



Title	波動伝ぱによる材料の粘弾性構成方程式に関する研究
Author(s)	曾我部, 雄次
Citation	大阪大学, 1987, 博士論文
Version Type	VoR
URL	<a href="https://hdl.handle.net/11094/2364">https://hdl.handle.net/11094/2364</a>
rights	
Note	

*The University of Osaka Institutional Knowledge Archive : OUKA*

<https://ir.library.osaka-u.ac.jp/>

The University of Osaka

波動伝ばによる材料の  
粘弾性構成方程式に関する研究

昭和61年11月

曾我部雄次

## ま え が き

本論文は、材料の粘弾性特性および粘弾性構成方程式を、波動伝ば実験によって求めるための実験的解析手法を研究したものである。

近年の情報処理技術の飛躍的な進歩は、固体、構造解析の分野にも大きな変革をもたらしている。すなわち、有限要素法をはじめとして、計算機処理に適した様々な理論、計算手法が確立され、現在ではかなり大規模でしかも複雑な機械や構造物の力学的解析が容易に行えるようになり、広く設計に役立っている。ところが一方では、機械の高速化、軽量化が進み、それに伴って使用される材料も多様化されたことなどもあって、従来のように材料を単に弾性体、あるいは弾塑性体とみなして、画一的な解析を行っただけでは十分な結果が得られない場合も多くなってきたのも事実である。

高速機械のように、衝撃荷重が頻繁に作用する条件下において、多くの材料は静的な場合とかなり異なった挙動を示すことが知られている。たとえば、高分子に代表される粘弾性材料もその例であって、弾性範囲内においてもひずみ速度依存性を有し、この性質は衝撃荷重のもとではさらに顕著に現れる。高分子材料、複合材料の利用が広がりつつある今日、高度の信頼性、安全性に立脚して機械、構造物を設計し、しかもその性能を十分に発揮させるためには、材料のこのような性質に関しても把握しておくことが大切であり、材料の粘弾性特性を求めるための研究は、今後の重要な工学的課題と考えられる。

高分子材料だけでなく、どのような材料も程度の差こそあるが、必ず粘弾性的性質を有しているものである。本研究では、材料のこのような粘弾性挙動に焦点を当て、それを適切に表す材料特性、あるいは粘弾性モデルを同定する方法として、波動伝ばに Fourier 周波数解析を導入した新しい手法を提案し、いくつかの材料に対する実際の適用例を示す。また、材料の応力-ひずみ関係を普遍的な形で記述する目的から、3次元粘弾性構成方程式の決定を行うとともに、提案した同定法の妥当性、利点について論じる。

# 目 次

	ページ
まえがき .....	i
第1章 序論 .....	1
1・1 従来の粘弾性特性同定法 .....	1
(1) 準静的試験 .....	1
(2) 振動試験 .....	2
(3) 衝撃試験 .....	3
1・2 本研究の意義 .....	5
第2章 線形粘弾性体の構成方程式 .....	8
2・1 はじめに .....	8
2・2 粘弾性モデル .....	8
2・3 1次元構成方程式 .....	11
2・3・1 微分型構成方程式 .....	11
2・3・2 積分型構成方程式 .....	13
2・4 周波数応答特性 .....	14
2・4・1 複素弾性係数と複素コンプライアンス .....	14
2・4・2 複素コンプライアンスの一般的性質 .....	17
第3章 波動伝ば解析による粘弾性特性の同定 .....	20
3・1 粘弾性棒内を伝ばする1次元縦波 .....	20
3・2 複素コンプライアンスの決定 .....	23
3・3 粘弾性定数の決定 .....	24
3・4 ねじり応力波への適用 .....	25

3・5	小括	27
第4章	1次元粘弾性特性の同定	29
4・1	PMMA材試料	29
4・2	実験方法	32
4・2・1	縦衝撃試験	32
4・2・2	ねじり衝撃試験	34
4・3	データ処理法と解析手順	37
4・4	1次元粘弾性特性の同定	41
4・4・1	単軸特性の同定	41
	(1) 中実試料	41
	(2) 中空試料	48
	(3) 他の研究との比較	51
4・4・2	せん断特性の同定	53
4・5	高減衰能合金への適用	58
4・5・1	高減衰能合金試料と実験方法	58
4・5・2	実験・解析結果	59
	(1) Mn-Cu合金	59
	(2) Fe-Cr-Al合金	61
	(3) 銅	63
4・6	小括	65
第5章	3次元粘弾性構成方程式への一般化	66
5・1	はじめに	66
5・2	3次元粘弾性法則	67
5・2・1	体積粘弾性とせん断粘弾性	67
5・2・2	単軸応力状態	68

5・2・3	対応関係	69
5・3	粘弾性特性の3次元評価	71
5・3・1	複素縦弾性係数と複素横弾性係数	72
5・3・2	複素ポアソン比	74
5・3・3	複素体積弾性係数	76
5・4	3次元粘弾性構成方程式の定式化	78
5・5	小括	81
第6章	有限積分変換による波動伝ばの解析	82
6・1	有限積分変換による解析理論	82
6・1・1	問題の設定	82
6・1・2	有限積分変換による解法	84
6・1・3	時間積分の方法	86
6・2	解析結果	87
6・2・1	収束性の検討	87
6・2・2	解析結果	89
6・3	粘弾性特性同定法の精度の検討	92
6・4	小括	97
第7章	粘弾性縦波に及ぼす横方向慣性の影響	99
7・1	はじめに	99
7・2	運動方程式	100
7・3	波動伝ばの解析	101
7・3・1	解析方法	101
7・3・2	解析結果	102
7・4	減衰・分散の周波数特性	104
7・5	実験	108

7・5・1	実験方法	108
7・5・2	実験結果	109
7・6	実験値と理論値の比較	111
7・6・1	波動伝ば	111
7・6・2	減衰・分散の周波数特性	111
(1)	減衰係数と位相速度の実験的決定法	111
(2)	実験値と理論値の比較	113
7・7	小括	113
第8章	総括	115
	謝辞	118
	参考文献	119

# 第1章 序 論

高分子材料の力学的性質で特徴的であるのは、変形が著しく時間、あるいはひずみ速度に依存することであり、その挙動には粘弾性理論を適用するのが一般的である。また金属材料についても、振動減衰能や高温下での挙動を論じる場合などのように、粘弾性体として扱わなければならないことが少なくない。このように材料を粘弾性体とみなした場合の、材料特性あるいは構成方程式を求めるための研究は、今日まで数多くなされている。なかでも、耐衝撃性や防振の意味から、粘弾性体の衝撃応答に関連する研究は、現在の重要な課題と考えられている。<sup>(1)</sup> ここでは、これまでに様々な形で提案されてきた材料の粘弾性特性を求める方法の特徴と問題点を、衝撃応答問題への適用という観点に立って探るとともに、本研究の意義について考える。

## 1.1 従来の粘弾性特性同定法

粘弾性材料の力学的特性を調べるための実験的方法は、試験様式あるいは負荷方法のちがいによるひずみ速度範囲に応じ、(1)準静的試験、(2)振動試験、(3)衝撃試験に大別することができる。Lindholm<sup>(2)</sup>の分類によれば、負荷方法とひずみ速度との関係は図1.1のようである。

### (1) 準静的試験

準静的試験が工学上特に重要であるのは、荷重を一定に保つような条件が実際に非常に多く存在すること、さら



図1.1 負荷方法とひずみ速度の関係<sup>(3)</sup>

に応力を一定にするかまたは非常にゆっくり増加させて行う材料試験が、比較的速い変形速度の試験では観察できない基本的な変形特性の機構を明らかにすることなどのためである。

古くはクリープ曲線、応力緩和曲線などの実験データの収集に関心が注がれていたようである。しかし近年では工学的応用の立場から、材料の力学的特性を一般的に記述することのできる特性関数（応力緩和関数、クリープ関数）や構成方程式を、準静的試験から得ようとする研究が重視されるようになり、多くの研究例<sup>(4)~(9)</sup>が報告されている。最近では、ポリウレタン樹脂やエポキシ樹脂の光粘弾性的性質を利用した光学的な手法<sup>(10)~(12)</sup>も開発されている。

これらの研究の多くは、求めた材料特性を準静的状態だけでなく、振動や衝撃などの動的問題にも適用しようとするものである。しかし一般に、材料の粘弾性を特徴づける微視的要因には様々なものがあり、しかもそれぞれの要因はひずみ速度や振動数、振幅、あるいは温度の異なる条件に応じて、個々に支配的になるとされている。<sup>(13)(14)</sup>このような理由から、準静的試験から得られた材料特性を、動的問題に直接適用する考え方には疑問が残るところである。

## (2) 振動試験

周期力に対する材料の諸特性を調べることは、機械や構造物全体の振動を把握する意味において極めて重要である。最近の研究例として、周波数領域での構成則を与える複素弾性係数を自由振動もしくは強制振動の解析から求める方法<sup>(15)(16)</sup>が示されており、また、はりの減衰自由振動の解析から、材料を3要素固体モデルとみなした場合の粘弾性定数を求める方法<sup>(17)~(19)</sup>も報告されている。一方、せん断変形と回転慣性の影響を考慮した粘弾性Timoshenkoはりの自由振動理論に基づいて、材料を3要素、あるいは5要素固体モデルと仮定したときの粘弾性定数を求める方法<sup>(20)(21)</sup>も研究されている。

動的負荷の時間的変動はFourier級数もしくはFourier積分表示によって調和振動の合成として表すことができるから、波動伝ばなどの衝撃応答問題に振動試験から得られた粘弾性特性を用いることを推奨する考え方も多い。このよう

なFourier解析を利用した衝撃応答の解析は、Kolskyら<sup>(22)~(24)</sup>が振動試験によって求めた複素弾性係数などを用いて1次元応力波の伝ばを取り扱ったのを契機として、その後多くの研究者によって、振動試験による粘弾性特性の、衝撃応答問題への適用<sup>(25)~(30)</sup>がなされている。

振動試験は、比較的簡単に振動数や温度の異なる範囲について行うことができるが、試料の支持部や空気抵抗に測定値が影響され易いという欠点も持っている。正確な粘弾性特性を得るためには、このような外部環境の影響が最小限に留まる配慮が、実験装置、条件設定に必要である。

### (3) 衝撃試験

衝撃試験法の重要な特長は、準静的試験や振動試験では困難と考えられる高ひずみ速度領域あるいは高周波領域のような、極めて短時間の材料特性の解明を可能にすることである。衝撃試験法においては、衝撃力によって生じる応力波の伝ばが問題となってくるため、粘弾性特性の同定には、実験的に、あるいは解析的にも複雑な面がある。そのため、準静的試験、振動試験がほぼ完成された域に達していると考えられるのに対し、衝撃試験にはいくつかの検討課題が残されている。本論文は衝撃試験に関係するものであるから、この点について

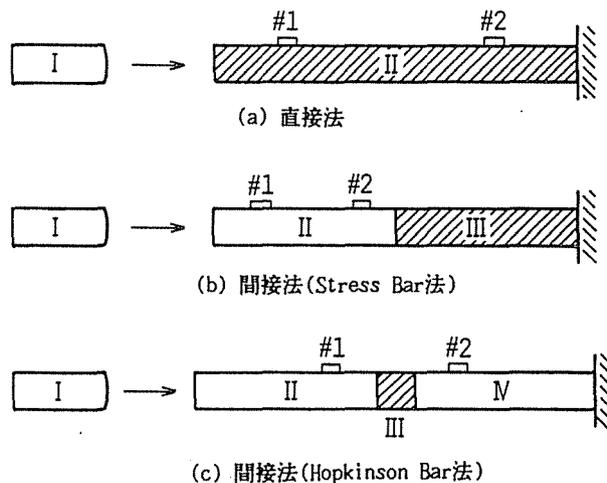


図1.2 粘弾性特性を定めるための縦衝撃試験

では次節で詳しく述べることにする。

現在までに、棒の縦衝撃試験から粘弾性特性を求めようとする研究が多く提案されている。粘弾性棒上において縦波を測定する方法として、図1.2(a)のように打撃棒Ⅰで直接、粘弾性棒Ⅱ（試料）に衝撃を与え、Ⅱでの測定値を入力波形と考えると波動伝ぱの解析を行い、Ⅲにおいて解析値が測定値に一致するように粘弾性特性を決定する方法がある。Sackman-Kayaは積分型構成方程式を用いた1次元粘弾性波の解析法<sup>(31)</sup>を示し、次いで図1.2(a)の直接法によって構成方程式中の未知パラメータを求める手法<sup>(32)</sup>を提案している。Lin-Sackmanはこの手法を非線形粘弾性体にまで拡張し<sup>(33)</sup>、ポリエチレン棒に対する非線形積分型構成方程式を定めている。また松本ら<sup>(34)</sup>は、PMMA棒に3要素固体モデルを適用し、粘弾性棒内の縦波の理論解をLaplace解析によって求め、これと直接法による実験値とを反復比較することによって粘弾性定数を推定している。

図1.2(b)のように弾性棒Ⅱと粘弾性試料棒Ⅲを接合して衝撃を与えるStress Bar法<sup>(43)(44)</sup>を利用して、弾性棒Ⅱ上において入射波をⅡで、一方粘弾性棒Ⅲからの反射波をⅢで観測することにより、粘弾性効果を間接的に測定する実験も行われている。中川ら<sup>(35)(36)</sup>は、この場合の反射波を数値Laplace逆変換によって解析し、Ⅲでの解析値を実験値と一致させるようにして、PMMA棒を4要素流体モデルとみなしたときの粘弾性定数を同定している。

図1.3(c)のHopkinson棒法<sup>(37)</sup>も間接的な測定法の例である。Chiu-Neubert<sup>(38)</sup>はセルロース・アセテートをMaxwell流体モデル近似し、これを試験片Ⅲに用いたHopkinson棒法の実験を行い、弾性入力棒ⅡのⅡにおける入射波と反射波、あるいは弾性出力棒ⅣのⅢでの透過波について、実験値と差分法による解析値との差が最も小さくなるような粘弾性定数の値を、試行錯誤的に求めている。また、山田・沢田<sup>(39)</sup>は特性曲線による差分法を用いて、Hopkinson棒法で粘弾性体を試験する場合の応力波の反射・干渉を解析的に調べている。

以上の粘弾性特性同定法では、波動伝ぱを理論的あるいは数値的に解析するための手段が不可欠である。一方、波動の解析を要しない方法として、短い試

験片を直接打撃したときの荷重と変形量を測定し、その解析から粘弾性定数を決定する方法もある。この方法によりTang-McConnell<sup>(40)</sup>は、ポリウレタン材を3要素固体モデルで近似した場合の粘弾性定数を定めている。

衝撃試験においては、振動試験で問題となることの多い空気抵抗や支持部でのエネルギー・ロスがほとんどなく、高精度の測定が期待できる。なお、衝撃試験から求めた粘弾性特性と振動試験から求めたものとの相違が指摘<sup>(38)(41)</sup>されており、材料の短時間的な応答に対しては、準静的試験や振動試験よりも、やはり衝撃試験から求めた特性を適用すべきと考えられる。

## 1・2 本研究の意義

衝撃試験法あるいは波動伝ば法としては、すでに述べたように、縦衝撃によって生じる1次元縦波の測定および解析を行うことによって粘弾性特性を同定する方法が多く提案されている。しかしながら、このような従来<sup>(31)~(40)</sup>の方法に関しては、検討すべき点がいくつか残っているように思われる。

実験の物理現象的な面からの問題点は2つある。粘弾性棒内の縦波は、材料の粘性だけでなく、横方向慣性（棒の横方向の運動）<sup>(42)(93)~(96)</sup>に起因する幾何分散によっても波形が変化するため、実験条件によっては目的とする粘弾性効果<sup>(43)(44)</sup>が正しく測定できない可能性のあることがその1つである。次に2つめとしては、粘弾性棒（試料）と弾性棒とを結合させて縦衝撃を与える間接的な実験法では、接合面において弾性、粘弾性両棒の変形差から摩擦力が生じ、非1次元的な変形が現れる特異現象、すなわち端面効果<sup>(43)(44)</sup>の問題が挙げられる。粘弾性特性を正しく得るためには、横方向慣性や端面効果の影響についてあらかじめ十分検討しておく必要がある。

一方、粘弾性特性を同定する際の手順に関しても、いくつかの検討課題が考えられる。衝撃試験による従来<sup>(31)~(40)</sup>の方法について、その共通の特徴を示せば図1.3のようになる。すなわち、従来<sup>(31)~(40)</sup>の方法はすべて、材料に対してある特定の構成則、あるいは粘弾性モデルの種類を仮定した後、図1.2に示す#1での測定値を

入力として、応力やひずみの時間応答に関して理論解析を行い、最適化の手法を導入して#2での解析値が測定値に一致するように、時間領域において粘弾性特性を同定しているのである。しかしながら、どのような形の構成則や粘弾性モデルを選べばよいかを同定以前にあらかじめ推測するのは困難と思われ、もし材料が仮定した構成則や粘弾性モデルの範囲外のものであれば、妥当な結果は得られないことになる。また、波動伝ばの解析値を最適化法によって測定値に近づけなければならないが、これには当然、複雑な反復計算が付随してくる。さらに、本研究で後に判明するが、図1.3のような時間領域

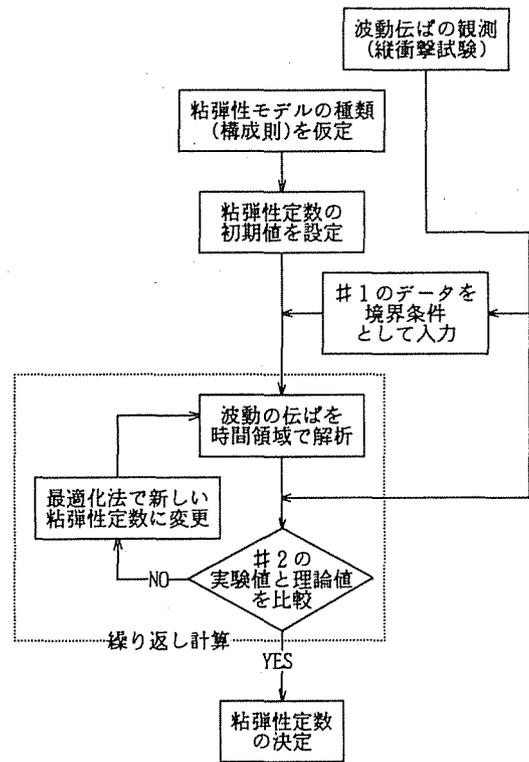


図1.3 従来の粘弾性特性同定法

での粘弾性特性同定法は、あまり有効な方法とは言えないのである。なお、振動試験による同定法においても、図1.3のような特徴を有する例<sup>(18)~(21)</sup>が多くみられる。

次に衝撃試験法に限って言えば、縦衝撃試験から単軸応力状態に関する粘弾性特性を研究したものがほとんどであり、形状や荷重条件が複雑な場合の応力解析に必要となる2次元、あるいは3次元の一般的な粘弾性特性を求めた例は極めて少ないのが現状である。

本論文は、以上のような様々な問題点に留意して、これを解決するものとして、波動伝ばによる材料の粘弾性特性の新しい同定法、ならびに3次元の粘弾性構成方程式の決定について研究したものである。

まず第2章では、線形粘弾性体の力学モデルおよび構成方程式を概観し、以

後、本研究において重要な役割を演ずることになる複素コンプライアンスの物理的意味と一般的な性質について述べる。

第3章では、波動伝ば実験におけるひずみ-時間関係の Fourier 変換から材料の複素コンプライアンスを実験的に求め、それに基づいて適用すべき粘弾性モデルおよび粘弾性定数を同定する実験的解析手法を示す。この方法では、従来のように粘弾性モデルの種類を仮定しておく必要はなく、最適化のための繰り返し計算も不要である。波動伝ばの測定値を解析する過程において、複素コンプライアンスのような周波数応答特性を表す物理量を導入して、粘弾性特性の同定を周波数領域において行うこの種の方法は現在までほとんど研究されていない。この方法の実際の適用例として第4章では、試料に PMMA 材を用いて縦衝撃試験およびねじり衝撃試験を行い、それぞれの実験・解析から1次元粘弾性特性として、単軸引張り圧縮および単純せん断に対する複素コンプライアンスと粘弾性モデルを決定する。また2, 3の特殊な金属材料についても、粘弾性特性を明らかにする。

次に第5章では、縦衝撃およびねじり衝撃の両者についての実験・解析結果を組み合わせて、弾性-粘弾性間の対応関係を利用して、材料の粘弾性特性を3次元的に評価すると同時に、種々の場合の応力解析に供することのできる一般的な形として、3次元粘弾性構成方程式の定式化を行う。

これより以後の2つの章は、提案した粘弾性特性同定法の妥当性および有効性について検討したものである。第6章では、縦衝撃やねじり衝撃の1次元粘弾性波伝ばを有限積分変換法によって解析し、第4章で求めた粘弾性特性の妥当性を検証するとともに、周波数領域で同定を行う場合の利点を明らかにする。また第7章では、粘弾性縦波に及ぼす横方向慣性の影響を、ひずみ波形の時間的変化、および減衰・分散の周波数特性の2つの観点に着目して、実験的あるいは解析的に調べ、粘弾性縦波の1次元初等理論に基づく実験・解析によって、単軸の粘弾性特性が正しく求められるための条件を明らかにする。

最後に、第8章では、本論文で得られた結論を総括する。

## 第2章 線形粘弾性体の構成方程式

### 2.1 はじめに

弾性体の変形は、その時点の応力状態で完全に決定され、どのような過程を経てその状態になったかの履歴には関係ない。ところが高分子材料、あるいは高温の金属などの力学的挙動は決してそのようなものではなく、弾性的な変形と同時に粘性的な変形が生じるため、現象は履歴によって異なったものとなる。弾性範囲内において材料の挙動が時間に依存する現象は、擬弾性効果として知られており、この現象を巨視的立場から記述するのが粘弾性理論である。

粘弾性理論は線形理論と非線形理論とに分けられ、特殊な材料や大変形の考慮が必要な場合に対しては非線形理論を用いなければならない。ところが、非線形粘弾性の普遍的な理論は確立されておらず、制限された条件下のみでしか利用できないものがほとんどである。また取り扱いは極めて複雑であり、結果の物理的解釈も容易ではない。実際的な問題を解析する場合には、むしろ材料を線形粘弾性体で近似化、理想化した方が有利であり、またそれで十分であることが多い。このような意味から本論文では、材料を線形の粘弾性体と仮定して議論する。以下では、研究に必要な1次元線形粘弾性理論の知識としてまず、粘弾性モデルと構成方程式の形式や特徴を整理する。次いで、周波数応答特性を述べ、本研究で重要な役割を演ずる複素コンプライアンスの物理的意味と一般的性質を示す。

### 2.2 粘弾性モデル

粘弾性理論を理解するには、適当な力学モデルを用いて出発するのが便利である。線形粘弾性体の力学モデルは、図2.1(a), (b)に示すような、弾性要素(スプリング)と粘性要素(ダッシュ・ポット)の2つの線形要素の組み合わせから構成される。弾性要素とは、応力 $\sigma$ とひずみ $\varepsilon$ との間の、 $\sigma = E \cdot \varepsilon$ のような

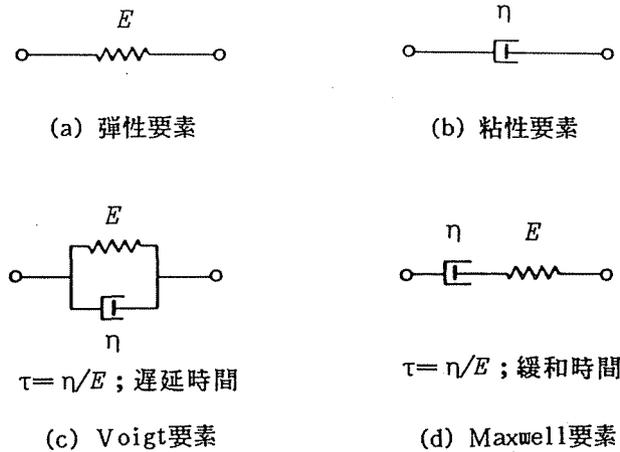
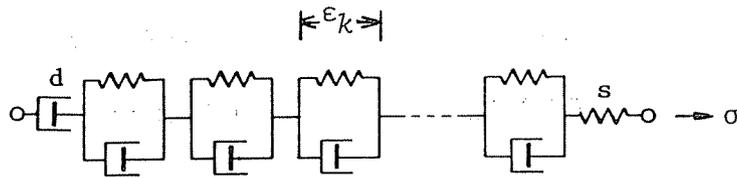


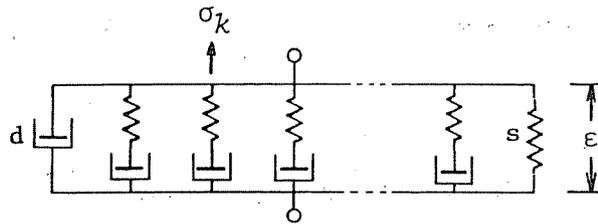
図2.1 粘弾性モデルの基本要素

比例関係を表すものであり、粘性要素とは応力 $\sigma$ とひずみ速度 $\dot{\epsilon}$ との比例関係、 $\sigma = \eta \cdot \dot{\epsilon}$ を表すものである。弾性要素と粘性要素の組み合わせの最も簡単な例として知られているのが、図2.1(c), (d)にそれぞれ示すような、2つの要素を並列に組み合わせたVoigtモデル(Voigt要素)、および2つを直列に組み合わせたMaxwellモデル(Maxwell要素)である。応力に対してひずみが遅れて応答する遅延弾性を表す場合にはVoigtモデルが、一方、クリープや応力緩和を表そうとする場合には、Maxwellモデルが用いられる。

VoigtモデルとMaxwellモデルは、基本的な粘弾性現象を少なくとも定性的には説明できるが、実際の材料の挙動に対しては不十分なことが多い。たとえば、これらのモデルで表される応力緩和またはクリープは指数関数の形に限られる。しかし、実際の材料では単調関数であっても必ずしも単一の指数関数で近似されるとは限らず、さらに複雑な時間の関数となることも予想される。このような場合には、もっと多くの要素を含んだモデルを考えなければならない。多くの基本的要素を組み合わせるには、図2.2に示すような(a)一般化Voigtモデルおよび(b)一般化Maxwellモデルの2つの系統的な方法がある。一般化Voigtモデルにおいては、異なるVoigt要素が任意の数だけ直列に連結されてい



(a) 一般化Voigtモデル



(b) 一般化Maxwellモデル

図2.2 一般化粘弾性モデル

るが、なかには退化した要素として弾性要素(s)や粘性要素(d)が含まれていてもよい。sがあれば瞬間弾性応答を持ち、dがあれば流体的挙動が生じる。一般化Maxwellモデルは、Maxwell要素が、いくつか並列に連結されているものである。この場合は、退化した要素dがなければ必ず瞬間弾性応答を示し、sがなければ必ず流体的挙動が生じる。なお一般化Voigtモデルでは、dがあるものを流体系モデル、dがないものを固体系モデルという。また逆に一般化Maxwellモデルでは、sのあるものが固体系モデルであり、sのないものが流体系モデルである。

任意の一般化Voigtモデルにはそれと等価な一般化Maxwellモデルが必ず存在し、同様に任意の一般化Maxwellモデルに対しても等価な一般化Voigtモデルが存在することが示される。<sup>(45)</sup> したがって材料の力学的挙動を粘弾性モデルで近似する場合には、一般化Voigtモデルあるいは一般化Maxwellモデルのいずれか

一方だけを想定すればよいことになる。両者のうちどちらを選ぶかは、問題の性格に応じて都合の良い方の一般化モデルを使用すればよい。通常、応力を与えてひずみを求めるときには一般化Voigtモデルを、逆にひずみから応力を知ろうとする場合には一般化Maxwellモデルを用いるのが便利である。本研究では以後、一般化Voigtモデルによって議論を進めるが、一般化Maxwellモデルを用いても同様の理論展開が可能である。

### 2・3 1次元構成方程式

種々の応力状態の中で、一般には6個ある応力成分のうち1つが、それに対応するひずみ成分のみに関係するような場合がある。たとえば、単軸応力状態や単純せん断状態などがその例であり、静水圧応力と体積ひずみとの関係もその1つと考えられる。本節では、このように1次元的に記述することができる場合の線形粘弾性体の構成方程式について述べる。なお、3次元の構成方程式については第5章で解説することにする。

#### 2・3・1 微分型構成方程式

一般化Voigtモデルおよび一般化Maxwellモデルを含め、スプリングとダッシュ・ポットのどのような複雑な組み合わせの模型においても、応力 $\sigma$ とひずみ $\varepsilon$ の関係を表すものとして、次のような微分型の構成方程式が成り立つ。

$$\sum_{k=0}^m p_k \frac{d^k \sigma(t)}{dt^k} = \sum_{k=0}^n q_k \frac{d^k \varepsilon(t)}{dt^k} \quad (2.1)$$

$t$ は時間である。 $p_k$ と $q_k$ はモデル内のスプリングやダッシュ・ポットの係数によって決まる定数であるが、モデルに物理的妥当性を与えるために種々の制約条件が課せられている。<sup>(45)(46)</sup> 時間微分  $d/dt$ を

$$\frac{d}{dt} \equiv D \quad (2.2)$$

のように演算子として表すことにすれば、式(2.1)は

$$P(D)\sigma(t) = Q(D)\varepsilon(t) \quad (2.3)$$

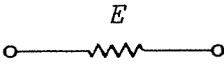
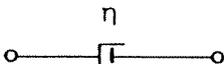
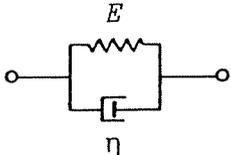
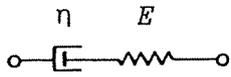
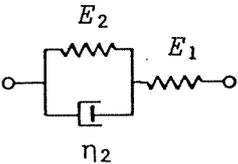
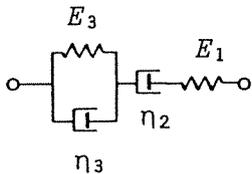
<p style="text-align: center;">弾性固体</p>  $\sigma = E\epsilon$ $\begin{cases} P(D) = 1 \\ Q(D) = E \end{cases}$	<p style="text-align: center;">粘性流体</p>  $\sigma = \eta \dot{\epsilon}$ $\begin{cases} P(D) = 1 \\ Q(D) = \eta D \end{cases}$
<p style="text-align: center;">Voigt固体</p>  $\sigma = E\epsilon + \eta \dot{\epsilon}$ $\begin{cases} P(D) = 1 \\ Q(D) = E + \eta D \end{cases}$	<p style="text-align: center;">Maxwell流体</p>  $E\sigma + \eta \dot{\sigma} = E\eta \dot{\epsilon}$ $\begin{cases} P(D) = E + \eta D \\ Q(D) = E\eta D \end{cases}$
<p style="text-align: center;">3要素固体</p>  $(E_1 + E_2)\sigma + \eta_2 \dot{\sigma} = E_1 E_2 \epsilon + E_1 \eta_2 \dot{\epsilon}$ $\begin{cases} P(D) = E_1 + E_2 + \eta_2 D \\ Q(D) = E_1 E_2 + E_1 \eta_2 D \end{cases}$	<p style="text-align: center;">4要素流体</p>  $E_1 E_3 \sigma + (E_1 \eta_2 + E_3 \eta_2 + E_1 \eta_3) \dot{\sigma} + \eta_2 \eta_3 \ddot{\sigma} = E_1 E_3 \eta_2 \dot{\epsilon} + E_1 \eta_2 \eta_3 \ddot{\epsilon}$ $\begin{cases} P(D) = E_1 E_3 + (E_1 \eta_2 + E_3 \eta_2 + E_1 \eta_3) D + \eta_2 \eta_3 D^2 \\ Q(D) = E_1 E_3 \eta_2 D + E_1 \eta_2 \eta_3 D^2 \end{cases}$

図 2.3 基本的粘弾性モデルと微分型構成方程式

と簡単に書くことができる。ただし、 $P(D)$  および  $Q(D)$  は、いずれも  $D$  の多項式でそれぞれ、

$$\left. \begin{aligned} P(D) &= \sum_k p_k D^k \\ Q(D) &= \sum_k q_k D^k \end{aligned} \right\} \quad (2.4)$$

のように表される線形微分演算子である。

式(2.1)もしくは式(2.3)が、線形粘弾性モデルの構成方程式を微分型で表示したものである。図2.3に、一般化Voigtモデルに属するいくつかの基本的粘弾性モデルの微分型構成方程式を示す。

### 2・3・2 積分型構成方程式

広い範囲の力学的挙動を表す目的から、図2.2に示した2種類の一般化モデルにおいて、Voigt要素やMaxwell要素の数を増やせば、結果として式(2.2)の微分方程式の次数は非常に高次のものとなり、取り扱いが困難となる。このような場合には、次に示す積分表示の構成方程式の方が有利である。

線形粘弾性体に、時刻  $t=0$  から単位ステップ応力を作用させたときの、ひずみの時間的変化を  $c(t)$  で表し、クリープ関数またはクリープ・コンプライアンスと呼ぶ。一方、逆に、時刻  $t=0$  から単位ステップひずみを生じさせるための応力の時間的変化  $k(t)$  を応力緩和関数または緩和弾性率という。 $c(t)$  あるいは  $k(t)$  を使えば、Boltzmannの重ね合わせ原理に基づいて応力とひずみの関係を積分方程式として4通りの方法で表すことができる。

まず、応力からひずみを求める形式は、クリープ関数  $c(t)$  を用いて、

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon(t) &= \sigma(+0)c(t) + \int_0^t c(t-\tau) \frac{d\sigma(\tau)}{d\tau} d\tau \\ \varepsilon(t) &= \sigma(t)c(+0) + \int_0^t \sigma(\tau) \frac{dc(t-\tau)}{d(t-\tau)} d\tau \end{aligned} \right\} \quad (2.5)$$

のように書かれる。式(2.5)の第1式はステップ応答の重ね合わせを、また第

2式はインパルス応答の重ね合わせを表したものである。両者は部分積分によって互いに他方に変換することができ、等価である。

同様に、応力緩和関数  $k(t)$  を用いて、ひずみから応力を求める形式は次のようになる。

$$\left. \begin{aligned} \sigma(t) &= \varepsilon(+0)k(t) + \int_0^t k(t-\tau) \frac{d\varepsilon(\tau)}{d\tau} d\tau \\ \sigma(t) &= \varepsilon(t)k(+0) + \int_0^t \varepsilon(\tau) \frac{dk(t-\tau)}{d(t-\tau)} d\tau \end{aligned} \right\} \quad (2.6)$$

微分型構成方程式は、一般化Voigtモデルあるいは一般化Maxwellモデルのような力学模型を前提としたものであり、モデルを構成する要素数が無限個のような極限、すなわちVoigt要素の遅延時間あるいはMaxwell要素の緩和時間が連続的に分布するような場合を含んでいない。積分型構成方程式は、そのような場合をも考慮した、より一般的な構成則であり、 $c(t)$  や  $k(t)$  の遅延時間および緩和時間が、離散的に分布するような特殊な場合が、粘弾性モデル、微分型構成方程式に相当する。粘弾性モデルを前提とする限りにおいては積分型と微分型は等価であり、両者のどちらを使ってもよいが、比較的簡単な粘弾性モデルを扱う場合や、材料の周波数応答特性を論ずる場合には、微分型を用いた方が直接的であり、解析も容易となる。一方、積分型は論理的な一般性および非線形構成方程式への拡張が簡単に行えるなどの利点を有している。

## 2・4 周波数応答特性

### 2・4・1 複素弾性係数と複素コンプライアンス

構成方程式が、式(2.1)のような微分型で表される粘弾性物質に、

$$\sigma(t) = \sigma_0 \cdot e^{i\omega t} \quad (2.7)$$

のように調和的に振動する応力を与えた場合を考える。ただし、 $\omega$  は角周波数であり、 $i$  は虚数単位 ( $i^2 = -1$ ) を示す。式(2.7)を式(2.1)に代入し、ひずみの定常解を求めると、やはり調和的に振動する解が得られるが、位相は応力に

比べて遅れることになり,

$$\varepsilon(t) = \varepsilon_0 \cdot e^{i(\omega t - \delta)} = \varepsilon_0^* \cdot e^{i\omega t} \quad (2.8)$$

となる。  $\delta$  は損失角と呼ばれる内部摩擦の程度を表す量であり、  $\varepsilon_0^*$  は複素振幅で  $\varepsilon_0 \cdot e^{-i\delta}$  に等しい。また、このときひずみ速度  $\dot{\varepsilon}$  は

$$\dot{\varepsilon}(t) = \frac{d\varepsilon(t)}{dt} = i\omega \varepsilon_0 \cdot e^{i\omega t} = i\omega \varepsilon(t) \quad (2.9)$$

となる。いま、複素平面内で  $\sigma$ ,  $\varepsilon$ ,  $\dot{\varepsilon}$  の関係を表せば図2.4のようになる。すなわち、  $\sigma$  が原点のまわりに回転しているとき、  $\varepsilon$  も角度  $\delta$  だけ遅れて同じ方向に回転する。また、  $\dot{\varepsilon}$  は  $\varepsilon$  の  $\omega$  倍の大きさを有し、位相は  $\varepsilon$  より  $\pi/2$  だけ進んだ位置にある。

ここで、ひずみと同位相の応力成分  $\sigma_E$  に注目し、  $\sigma_E$  と  $\varepsilon$  との比を動的弾性係数  $K$  として定義する。すなわち、

$$\sigma_E = K \cdot \varepsilon$$

である。また、ひずみ速度と同位相の応力成分  $\sigma_V$  と  $\dot{\varepsilon}$  の比を動的粘性係数  $C$  とすれば、

$$\sigma_V = C \cdot \dot{\varepsilon} = i\omega C \cdot \varepsilon$$

となる。  $K$  および  $C$  は、角周波数の大きさに応じて変わり、  $\omega$  の関数である。さて、応力  $\sigma$  は  $\sigma_E$  と  $\sigma_V$  をベクトルの的に合成したものであるから、

$$\sigma(t) = \sigma_E + \sigma_V = (K + i\omega C) \cdot \varepsilon(t)$$

となる。ここで、  $K + i\omega C$  を1つの複素数

$$\bar{E}(\omega) = \bar{E}_1(\omega) + i\bar{E}_2(\omega) (= K + i\omega C) \quad (2.10)$$

で表せば、

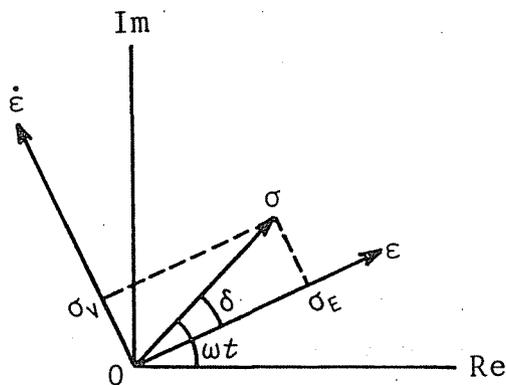


図2.4 粘弾性振動の複素数表示

$$\sigma(t) = \bar{E}(\omega) \cdot \varepsilon(t) \quad (2.11)$$

のようなHookeの法則に類似した関係が得られる。 $\bar{E}$  は複素弾性率と呼ばれ、実数部  $\bar{E}_1$  は動的弾性係数、虚数部  $\bar{E}_2$  は動的損失係数という。 $\bar{E}$  の逆数は複素コンプライアンス  $J$  であり、

$$J(\omega) = J_1(\omega) - i J_2(\omega) \quad (2.12)$$

のように書かれ、その実数部  $J_1$  は動的コンプライアンス、虚数部  $J_2$  は損失コンプライアンスと呼ばれている。なお、この場合には、

$$J(\omega) \cdot \sigma(t) = \varepsilon(t) \quad (2.13)$$

である。また簡単な考察から、損失角  $\delta$  は複素弾性係数あるいは複素コンプライアンスによって次のように表されることがわかる。

$$\tan \delta = \frac{\bar{E}_2(\omega)}{\bar{E}_1(\omega)} = \frac{J_2(\omega)}{J_1(\omega)} \quad (2.14)$$

内部摩擦の程度を表すものとして、固有減衰能(SDC), 対数減衰率( $\Delta$ ), あるいは振動吸収係数( $Q^{-1}$ 値)がよく用いられる。粘性が小さいときには、 $Q^{-1}$ 値は  $\tan \delta$  に等しく、SDCは  $\tan \delta$  の  $2\pi$  倍、また  $\Delta$  は  $\tan \delta$  の 2 倍に等しいから、<sup>(47)</sup> 複素弾性係数や複素コンプライアンスを求めれば、式(2.14)によって材料の内部摩擦を評価することもできる。

微分型構成方程式(2.3)に  $\sigma(t) = \sigma_0 \cdot e^{i\omega t}$  および  $\varepsilon(t) = \varepsilon_0^* \cdot e^{i\omega t}$  を代入すれば、

$$P(i\omega)\sigma(t) = Q(i\omega)\varepsilon(t) \quad (2.15)$$

となる。これを式(2.11)あるいは式(2.13)と比較すれば、複素弾性係数および複素コンプライアンスを、構成方程式の微分演算子  $P(D)$ ,  $Q(D)$  で定義するものとして次の2式を得る。

$$\bar{E}(\omega) = \bar{E}_1(\omega) + i \bar{E}_2(\omega) = \frac{Q(i\omega)}{P(i\omega)} \quad (2.16)$$

$$J(\omega) = J_1(\omega) - i J_2(\omega) = \frac{P(i\omega)}{Q(i\omega)} \quad (2.17)$$

すなわち、複素弾性係数および複素コンプライアンスは両者とも、応力とひずみの振幅比と同時に位相差を含んだ量であり、線形粘弾性体の周波数応答特性を表すものである。また、これらは構成方程式を別な形で表現したものとも考えられる。

#### 2・4・2 複素コンプライアンスの一般的性質

次に一般化 Voigtモデルの複素コンプライアンスについて考えよう。一般化 Voigtモデルは図2.2(a)のように、いくつかのVoigt要素を、弾性要素もしくは粘性要素とともに、直列に結合したものである。この場合、第  $k$  番目の要素のひずみを  $\varepsilon_k(t)$  とすれば、モデル全体のひずみ  $\varepsilon(t)$  は、

$$\varepsilon(t) = \sum_k \varepsilon_k(t) \quad (2.18)$$

のように各要素のひずみの和で表される。一方、応力  $\sigma(t)$  は各要素に共通に作用する。調和振動状態を仮定し、第  $k$  番目の要素だけを取り出して考え、その複素コンプライアンスを  $J_k(\omega)$  と書くことにすれば、応力  $\sigma(t)$  と要素ひずみ  $\varepsilon_k(t)$  の関係は、式(2.13)のように

$$J_k(\omega) \cdot \sigma(t) = \varepsilon_k(t) \quad (2.19)$$

となる。式(2.18)と式(2.19)とから、モデル全体に関する応力  $\sigma(t)$  とひずみ  $\varepsilon(t)$  の間には、

$$\{\sum J_k(\omega)\} \cdot \sigma(t) = \varepsilon(t) \quad (2.20)$$

が成り立ち、モデル全体の複素コンプライアンス  $J(\omega)$  が

$$J(\omega) = \sum_k J_k(\omega) \quad (2.21)$$

のように、各要素の複素コンプライアンス  $J_k(\omega)$  の和として表されることがわかる。

一方、図2.2(b)の一般化 Maxwellモデルにおいては、複素弾性係数に関して

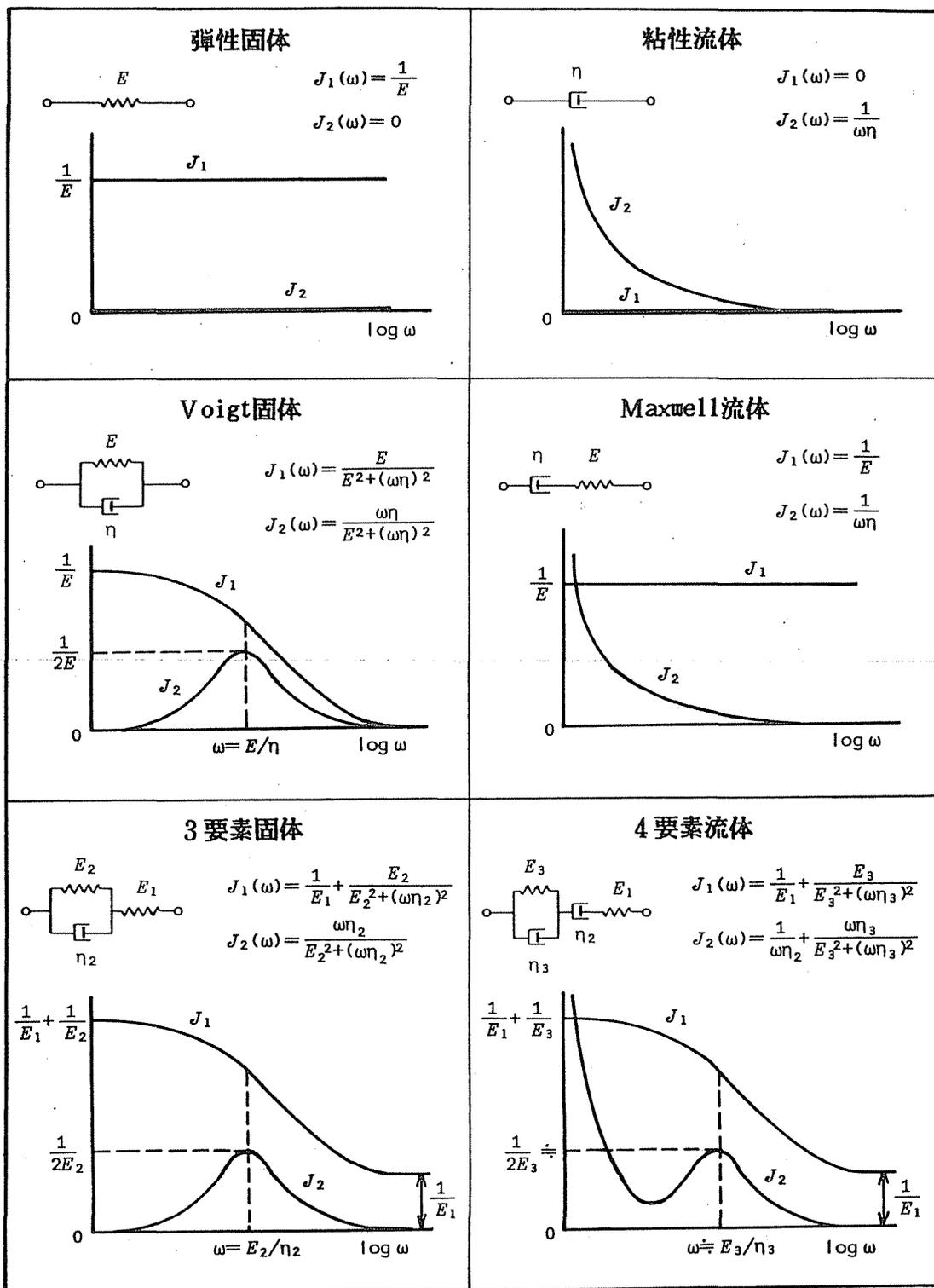


図 2.5 基本的粘弾性モデルの複素コンプライアンス

同様な次の性質を示すことができる。

$$\bar{E}(\omega) = \sum_k \bar{E}_k(\omega) \quad (2.22)$$

このように、一般化 Voigtモデルの複素コンプライアンス（あるいは一般化 Maxwellモデルの複素弾性係数）は、各構成要素の  $J_k$  ( $\bar{E}_k$ )を合成してやれば、モデル全体の  $J$  ( $\bar{E}$ )になるという便利な性質をもっている。したがって、複素コンプライアンスあるいは複素弾性係数が実験的に求まった時、材料に対してどのような形の粘弾性モデルを適用するかは、いくつかの簡単な知識さえあれば、上の性質を利用して容易に判断することができる。図2.5に一般化Voigtモデルに属する基本的な粘弾性モデルの、複素コンプライアンスを与える式、およびその定性的な特徴を示す。式の上からも、また定性的な傾向の上からも、式(2.21)の性質が理解できよう。

### 第3章 波動伝ば解析による粘弾性特性の同定

線形粘弾性体内の1次元波動（縦波，ねじれ波）がどのように伝ばするかを周波数領域においてまず論じ，波動の減衰や分散を特徴づけるパラメータと複素コンプライアンスとの関係式を導く．次に，衝撃によって生じる1次元波動の Fourier周波数解析から，複素コンプライアンスを求め，それに基づいて粘弾性モデルを同定する実験的解析手法<sup>(48)(49)</sup>を示す．

波動の実験データに Fourier解析を適用する方法は，Santosham-Ramsey<sup>(50)</sup> や Yew-Chen<sup>(51)</sup> らによって示されており，それぞれ金属材料の減衰能，弾性波動の幾何分散が研究されている．本手法は粘弾性特性を求める目的のものであって，これらの方法を拡張，あるいは一般化したものに相当すると考えられる．

#### 3・1 粘弾性棒内を伝ばする1次元縦波

均質で細く一様な粘弾性棒内を伝ばする縦波について考える．1次元縦波の運動方程式と線形粘弾性体の単軸引張り圧縮に対する構成方程式は，それぞれ

$$\frac{\partial^2 \sigma(x, t)}{\partial x^2} = \rho \frac{\partial^2 \varepsilon(x, t)}{\partial t^2} \quad (3.1)$$

$$P(D)\sigma(x, t) = Q(D)\varepsilon(x, t) \quad (3.2)$$

と表される．ここで  $x$  は棒の軸方向の座標， $t$  は時間を示し， $\sigma$  および  $\varepsilon$  はそれぞれ軸方向の応力，ひずみを表す． $\rho$  は材料の密度であり，場所，時間によらず一定と仮定する．また  $D$  は時間微分を示し， $D = \partial / \partial t$  であり， $P(D)$ ， $Q(D)$  は  $D$  の多項式，すなわち線形微分演算子である．

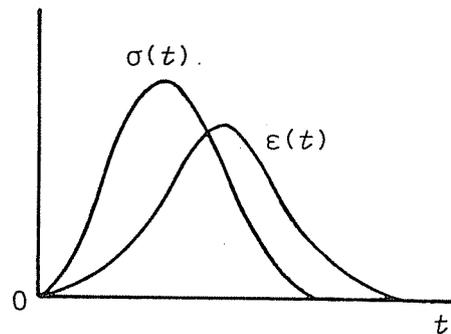


図3.1 パルス状の応力とひずみ

$\sigma$  および  $\varepsilon$  の時間的変化を図3.1のようなパルス状と仮定すれば、次式で示す時間に関する Fourier変換が可能である。

$$\bar{f}(x, \omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, t) \cdot \exp(-i\omega t) dt \quad (3.3)$$

ただし、 $\omega$  は角周波数を示し、 $i^2 = -1$  である。式(3.1) および式(3.2)を Fourier変換すれば、それぞれ式(3.4), (3.5)のようになる。

$$\frac{d^2 \bar{\sigma}(x, \omega)}{dx^2} = -\rho \omega^2 \bar{\varepsilon}(x, \omega) \quad (3.4)$$

$$P(i\omega) \bar{\sigma}(x, \omega) = Q(i\omega) \bar{\varepsilon}(x, \omega)$$

ここで  $\bar{\sigma}(x, \omega)$  および  $\bar{\varepsilon}(x, \omega)$  は、それぞれ  $\sigma(x, t)$ ,  $\varepsilon(x, t)$  の Fourier変換を示すが、 $\bar{\sigma}(x, \omega)$ ,  $\bar{\varepsilon}(x, \omega)$  は実数部と虚数部から成る関数、すなわち複素値関数であることに注意しなければならない。さて、式(3.5)に第2章の式(2.17)で示した複素コンプライアンスの定義式

$$J(\omega) = J_1(\omega) - i J_2(\omega) = \frac{P(i\omega)}{Q(i\omega)} \quad (3.5)$$

を導入すれば、次式のように簡単な形となる。

$$J(\omega) \bar{\sigma}(x, \omega) = \bar{\varepsilon}(x, \omega) \quad (3.6)$$

式(3.6)を式(3.4)に代入して  $\bar{\sigma}$  を消去すると、 $\bar{\varepsilon}$  の  $x$  に関する常微分方程式として、

$$\left\{ \frac{d^2}{dx^2} + \rho \omega^2 J(\omega) \right\} \bar{\varepsilon}(x, \omega) = 0 \quad (3.7)$$

を得る。これを境界条件

$$\text{i) } x=0 \quad \text{で} \quad \bar{\varepsilon}(0, \omega) = \text{確定値}$$

$$\text{ii) } x \rightarrow \infty \quad \text{で} \quad \bar{\varepsilon}(x, \omega) \rightarrow 0$$

のもとで解くと、次の半無限長棒に対する解が得られる。

$$\bar{\varepsilon}(x, \omega) = \bar{\varepsilon}(0, \omega) \cdot \exp\{-(\alpha + i f)x\} \quad (3.8)$$

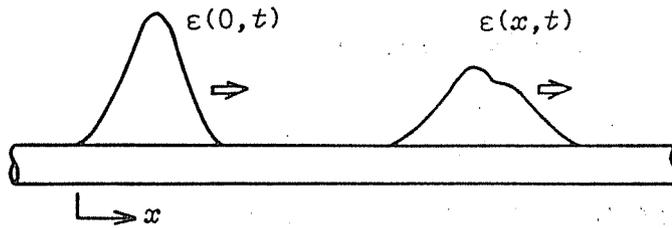


図3.2 粘弾性波の伝ば

ここで  $\alpha$ ,  $f$  はそれぞれ減衰係数, 速度係数であり, いずれも  $\omega$  の関数である. 式(3.8) を式(3.7) に代入することにより,  $J_1(\omega)$  および  $J_2(\omega)$  との関係式

$$\left. \begin{aligned} f^2 - \alpha^2 &= \rho \omega^2 J_1(\omega) \\ 2 \alpha f &= \rho \omega^2 J_2(\omega) \end{aligned} \right\} \quad (3.9)$$

が容易に導かれる.

時間領域における波動の伝ば形式を知るために, 式(3.8)にFourier逆変換

$$f(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \bar{f}(x, \omega) \cdot \exp(i \omega t) d\omega \quad (3.10)$$

を適用すれば,

$$\begin{aligned} \varepsilon(x, t) &= \int_{-\infty}^{\infty} \bar{\varepsilon}(x, \omega) \cdot \exp(i \omega t) d\omega \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} [\bar{\varepsilon}(0, \omega) \exp(-\alpha x)] \cdot \exp\{i \omega (t - \frac{f}{\omega} x)\} d\omega \end{aligned} \quad (3.11)$$

となる. すなわち, 角周波数が  $\omega$  であるような成分波は指数関数的に減衰してゆき, それが伝ばする速度, つまり位相速度  $C(\omega)$  は

$$C(\omega) = \frac{\omega}{f(\omega)} \quad (3.12)$$

で与えられることがわかる. また, 同時に速度係数  $f$  は波数 ( $2\pi/\text{波長}$ ) に相当する量であることもわかる.

### 3.2 複素コンプライアンスの決定

縦衝撃実験を行い、図3.2のように伝ばするひずみ波を試料棒上の数箇所の地点  $x_j$  ( $j=1, 2, \dots, n: x_1=0$ ) において、 $\varepsilon_j(t) = \varepsilon(x_j, t)$  のように測定する。それらのFourier変換  $\bar{\varepsilon}_j(\omega)$  を求め、材料を線形粘弾性体と仮定すれば、式(3.8)をあてはめることができ、

$$\bar{\varepsilon}_j(\omega) = \bar{\varepsilon}_0(\omega) \cdot \exp\{-(\alpha + i f) x_j\} \quad (3.13)$$

を得る。それぞれの絶対値  $|\bar{\varepsilon}_j(\omega)|$  および位相角  $\theta_j(\omega) = \arg \bar{\varepsilon}_j(\omega)$  を計算すれば、減衰係数  $\alpha(\omega)$  と速度係数  $f(\omega)$  は

$$\left. \begin{aligned} \alpha(\omega) &= \frac{\sum x_j \cdot \sum \log |\bar{\varepsilon}_j| - n \sum x_j \cdot \log |\bar{\varepsilon}_1|}{n \sum x_j^2 - (\sum x_j)^2} \\ f(\omega) &= \frac{\sum x_j \cdot \sum \theta_j - n \sum x_j \cdot \theta_1}{n \sum x_j^2 - (\sum x_j)^2} \end{aligned} \right\} \quad (3.14)$$

のように最小二乗法から実験的に定めることができる。このように定めた  $\alpha$ ,  $f$  を式(3.9)に代入すれば、複素コンプライアンスの実数部  $J_1$  および虚数部  $J_2$  が周波数の関数として決定される。

このように複素コンプライアンスを実験的に求めれば、第2章の図2.5などを利用して、材料の粘弾性挙動を表すのに最も適当な粘弾性モデルの種類を判断することができる。あとは、複素コンプライアンスの実験値を最も良く再現するようにモデルの粘弾性定数を決めればよい。図2.5に示したような比較的簡単なモデルで実験的傾向が表現できない場合は、複素コンプライアンスの合成則 [第2章式(2.21)] を考慮すれば、より複雑なモデルとしてどのような形の粘弾性モデルを用いるべきかの判断は容易である。また、周波数の範囲を注目するある特定の領域に絞り、その範囲内において簡単なモデルで近似するのも1つの方法である。実際の問題への応用を考えるならば、こうした方が得策と言えよう。次節では、複素コンプライアンスの実験値からモデルの粘弾性定数を定める方法として、BlandとLeeらによる方法を紹介する。

### 3・3 粘弾性定数の決定

Bland-Lee<sup>(52)(53)</sup>は、実験的に得られた複素コンプライアンスから、図3.3のような4要素流体モデルの粘弾性定数  $E_1$ ,  $\eta_2$ ,  $E_3$ ,  $\eta_3$  の各値を定める方法を示している。4要素流体モデルを選んだ理由は粘弾性現象の重要な特徴、すなわち瞬間弾性、クリープ、および遅延弾性の3つの性質を備えているもののなかで、最も簡単な粘弾性モデルであるからである。

4要素流体モデルの複素コンプライアンスの実数部  $J_1(\omega)$  および虚数部  $J_2(\omega)$  は、第2章の図2.5に示したようにそれぞれ、

$$\left. \begin{aligned} J_1(\omega) &= \frac{1}{E_1} + \frac{E_3}{E_3^2 + (\omega \eta_3)^2} \\ J_2(\omega) &= \frac{1}{\omega \eta_2} + \frac{\omega \eta_3}{E_3^2 + (\omega \eta_3)^2} \end{aligned} \right\} \quad (3.15)$$

と与えられる。式(3.15)の2つの式より次の関係が得られる。

$$\frac{E_3}{\eta_3} [J_1(\omega)] + [\omega J_2(\omega)] = \frac{E_3}{E_1 \eta_3} + \frac{1}{\eta_2} + \frac{1}{\eta_3} \quad (3.16)$$

この式より、実験で求めた複素コンプライアンスをもとにして、 $[J_1(\omega)]$  と  $[\omega J_2(\omega)]$  の関係をプロットすると、両者は直線関係に回帰できることがわかる。したがって、最小二乗法により回帰直線の傾きと切片からそれぞれ、

$$\frac{E_3}{\eta_3} \quad \text{および} \quad \frac{E_3}{E_1 \eta_3} + \frac{1}{\eta_2} + \frac{1}{\eta_3}$$

の値を知ることができる。また、式(3.15)の第1式を書き換えると

$$[J_1(\omega)] = \frac{1}{E_1} + \frac{1}{E_3} [1 + (\eta_3/E_3)^2 \omega^2]^{-1} \quad (3.17)$$

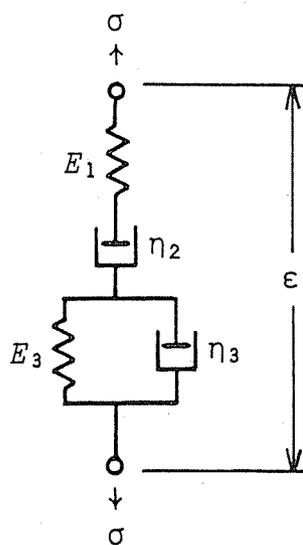


図3.3 4要素流体モデル

となり、この式より  $[J_1(\omega)]$  と  $[1 + (\eta_3/E_3)^2 \omega^2]^{-1}$  との関係も直線関係であることがわかる。式(3.17)中の  $(\eta_3/E_3)$  の値はすでに既知となっているから、 $[J_1(\omega)]$  と  $[1 + (\eta_3/E_3)^2 \omega^2]^{-1}$  の両者に関してプロットすることができ、直線の傾きと切片から

$$\frac{1}{E_3} \quad \text{および} \quad \frac{1}{E_1}$$

の値がわかる。したがって、

$$\frac{E_3}{\eta_3}, \quad \frac{E_3}{E_1 \eta_3} + \frac{1}{\eta_2} + \frac{1}{\eta_3}, \quad \frac{1}{E_3}, \quad \frac{1}{E_1}$$

の4個の値より、未知数であった4つの粘弾性定数の値が決定できる。

この方法は4要素流体モデルが退化したような、あるいはそれに含まれるような粘弾性モデル、すなわち3要素固体、Voigt固体、Maxwell流体などのモデルにも適用することが可能である。なお、Bland-Leeの方法以外でも、第2章図2.5に示したような  $J_2$  のピーク値とそれが現れる周波数値、 $J_1$  の変曲点、 $\omega = 0$  あるいは  $\omega \rightarrow \infty$  での  $J_1$  と  $J_2$  の値を利用した簡単な粘弾性定数の決定法も考えられる。

### 3・4 ねじり応力波への適用

これまで述べたのは、細い粘弾性棒内の縦波の実験・解析から、単軸応力状態に対する複素コンプライアンスおよび粘弾性モデルを同定する手法であった。ここではその手法を粘弾性棒内のねじり応力波に適用して、単純せん断状態での複素コンプライアンスを求める方法について述べる。

円柱座標を  $(r, \theta, x)$  とすれば、 $x$  軸を中心軸とする一様な丸棒（またはパイプ）のねじりに関する運動方程式は、

$$\rho I_p \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = \frac{\partial M}{\partial x} \quad (3.18)$$

となる。ここで  $\rho$  は棒の密度、 $\phi$  は  $x$  軸まわりのねじり角を示す。また  $M$

および  $I_p$  はそれぞれ、ねじりモーメント、断面の 2 次極モーメントであり、

$$M = \int_A \tau_{\theta x} \cdot r \, dA \quad (3.19)$$

$$I_p = \int_A r^2 \, dA \quad (3.20)$$

のように与えられる。ただし、 $A$  は断面領域を表す。一方、線形粘弾性体において、せん断応力  $\tau_{ij}$  ( $i \neq j$ ) とせん断ひずみ  $\gamma_{ij} (= 2\varepsilon_{ij})$  の関係を表す構成方程式は、

$$P'(D)\tau_{ij} = Q'(D)\gamma_{ij} \quad (3.21)$$

のように書くことができる。ただし  $D = \partial / \partial t$  であり、 $P'(D)$ 、 $Q'(D)$  は線形微分演算子であるが、 $P'$ 、 $Q'$  のように  $()'$  を付したのは、単軸状態に関する量と区別するためである。また、丸棒の任意の断面は変形後も円形平面を保つと仮定すれば、せん断ひずみ  $\tau_{\theta x}$  とねじり角  $\phi$  との関係は、

$$\tau_{\theta x} = r \frac{\partial \phi}{\partial x} \quad (3.22)$$

のようになる。なお、この仮定は材料が線形の弾性体あるいは粘弾性体である限りにおいて妥当である。

さて、式(3.19)に演算子  $P'(D)$  を施し、微分と積分の順序が交換可能と考えて式(3.20)～(3.22)を用い、 $\phi$  が  $\phi = \phi(x, t)$  のように  $r$  と  $\theta$  に関係しないことに注意すれば、

$$P'(D)M = I_p Q'(D) \frac{\partial \phi}{\partial x} \quad (3.23)$$

を得る。さらに、式(3.18)に演算  $P'(D)$  を施したものに式(3.23)を代入すれば、粘弾性棒内のねじり波動を支配する方程式

$$\rho P'(D) \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = Q'(D) \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \quad (3.24)$$

が得られる。せん断ひずみ  $\tau_{\theta x}$  の、棒の表面での値を単に  $r = r(x, t)$  と表す

ことにすれば、式(3.22), (3.24)より  $r$  に関しても

$$\rho P'(D) \frac{\partial^2 r(x, t)}{\partial t^2} = Q'(D) \frac{\partial^2 r(x, t)}{\partial x^2} \quad (3.25)$$

が成立することがわかる。

時間に関する Fourier変換を式(3.25)に適用し、その結果に単純せん断状態に対する複素コンプライアンスの定義式

$$J'(\omega) = J'_1(\omega) - i J'_2(\omega) = \frac{P'(i\omega)}{Q'(i\omega)} \quad (3.26)$$

を用いれば、 $r(x, t)$  の Fourier変換、すなわち  $\bar{r}(x, \omega)$  の  $x$  に関する微分方程式として、縦波の場合と同様の式

$$\left\{ \frac{d^2}{dx^2} + \rho \omega^2 J'(\omega) \right\} \bar{r}(x, \omega) = 0 \quad (3.27)$$

を得る。 $\bar{r}(x, \omega)$  の半無限長棒に対する解も式(3.8)と同様

$$\bar{r}(x, \omega) = \bar{r}(0, \omega) \cdot \exp\{-(\alpha + i f)x\} \quad (3.28)$$

$$\left. \begin{aligned} f^2 - \alpha^2 &= \rho \omega^2 J'_1(\omega) \\ 2\alpha f &= \rho \omega^2 J'_2(\omega) \end{aligned} \right\} \quad (3.29)$$

のようになる。

以下は3・2節と同じく、ねじり衝撃試験を行い、数箇所の地点において試料表面上のせん断ひずみの時間的経過を測定して解析すれば、単純せん断状態での複素コンプライアンスを周波数の関数として求めることができる。

### 3・5 小 括

この章では、粘弾性棒内を伝わる1次元縦波またはねじり応力波に Fourier周波数解析を適用して、単軸応力状態あるいは単純せん断状態に対する複素コンプライアンスを求め、それに基づいて粘弾性モデルを同定するための実験的解析手法を示した。

図3.5は、この手法によって粘弾性モデルを同定するまでの手順を表したもので、第1章の図1.3で示した従来の同定法のような繰り返し計算のループがなく、かなり簡潔化された手順であることがわかる。本手法の特徴は、粘弾性材料の振動特性を取り扱うために通常用いられてきた複素コンプライアンスという周波数応答量を、波動伝ばのような衝撃現象に導入したことである。また、材料に適用すべき粘弾性モデルの種類を実験データに基づいて判断できること、さらに使用する粘弾性モデルの適応性、近似の度合いなどが認識できることは、従来の衝撃試験による方法<sup>(31)~(40)</sup>あるいは一部の振動試験法<sup>(18)~(21)</sup>にはなかった本手法の持つ大きな利点の1つである。

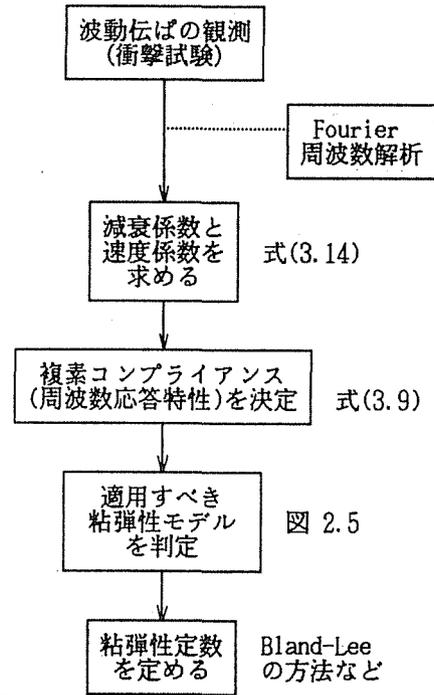


図3.4 本研究の粘弾性特性同定法

## 第4章 1次元粘弾性特性の同定

ここでは第3章で示した手法を実際に適用することにより、材料の1次元粘弾性特性として、縦衝撃試験から単軸引張り圧縮特性<sup>(48)(49)(54)</sup>(以後、単軸特性と略す.)を、またねじり衝撃試験から単純せん断特性<sup>(54)</sup>(以後、せん断特性と略す.)を同定する。試料には、代表的な高分子材料であるPMMA (polymethyl methacrylate)材を中心に用いる。なお、金属材料への適用例として、高減衰能合金<sup>(55)~(58)</sup>についても縦衝撃試験を行い、減衰特性、粘弾性特性を調べる。<sup>(59)(60)</sup>

### 4.1 PMMA材試料

本研究では、縦衝撃試験およびねじり衝撃試験の試料として、PMMA材を用いる。PMMA材を試料とする理由は、高分子材料のなかで線形性が比較的確かとされていること<sup>(41)</sup>、また粘弾性特性を求めた研究例<sup>(18)~(21)(34)~(36)</sup>も多く、他の研究データとの比較を様々な角度から行えるからである。

表4.1は実験で用いたPMMA材の機械的性質を示したものである。縦弾性係数 $E$ 、ポアソン比 $\nu$ 、および降伏応力 $\sigma_Y$ 、降伏ひずみ $\varepsilon_Y$ の各値は、静的引張り試験によって定めたものであり、密度 $\rho$ は水中での浮力を利用して測定<sup>(61)</sup>したものである。なお $\sigma_Y$ 、 $\varepsilon_Y$ は、応力-ひずみ線図において直線から離脱しはじめる点、すなわち比例限度の値を示している。

表4.1 PMMA材の機械的性質

Young's modulus $E$ GPa	Poisson's ratio $\nu$	Yield stress $\sigma_Y$ MPa	Yield strain $\varepsilon_Y$ %	Density $\rho$ kg/m <sup>3</sup>
3.22	0.365	12.9	0.40	$1.183 \times 10^3$

図4.1は、PMMA棒に縦振動を与えた際の減衰振動曲線から対数減衰率を求め、ひずみ振幅の大きさに関して整理したものである。なお、棒の長さに応じて決まる縦振動の基本振動数を図中に付記した。ひずみ振幅の増加にしたがい対数減衰率が低下する傾向(非線形性)が若干認められるが、約  $2500 \mu\text{m/m}$  以下の範囲では一定値を示すとみなせ、このひずみ振幅の範囲内ではPMMA材は線形粘弾性材料として扱えるものと考えられる。

衝撃試験(波動伝ば実験)に用いた試料の形状は、図4.2に示すような(a)中実丸棒、および(b)中空丸棒(パイプ)の2種類である。中実試料は、直径15mm(または10mm)、長さ2mの一体成形棒である。一方、中空試料は、外径14mm、内径10mm、長さ1mのパイプ2本をアクリル系接着剤によって接合したものである。中実試料、中空試料の両者ともについて、波動の伝ばを観測するための測定点を、図4.2のように、衝撃端から20cmごとの4箇所にて設け、縦衝撃試験では軸方向ひずみ測定用、またねじり衝撃試験ではせん断ひずみ測定用のひずみゲージを、4箇所のそれぞれの測定点において、軸対称な2点に貼り直列に接続した。このように表裏2枚のひずみゲージを直列に接続するのは、ひずみ

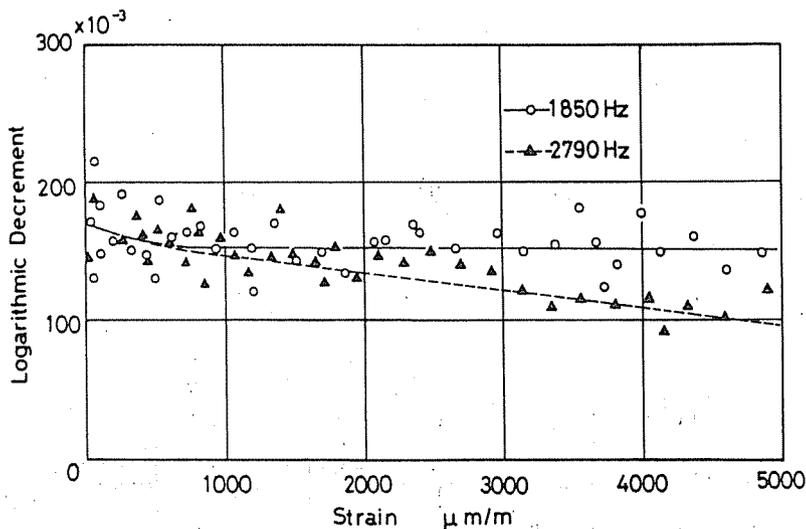
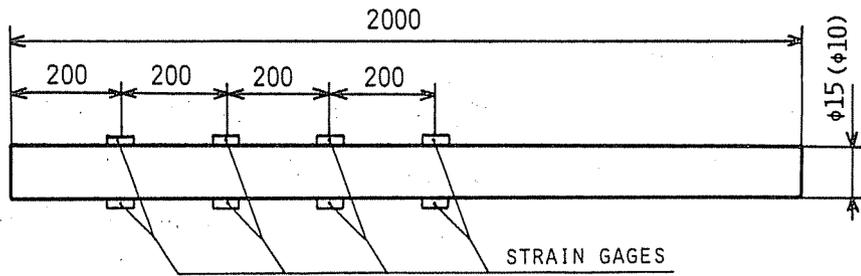
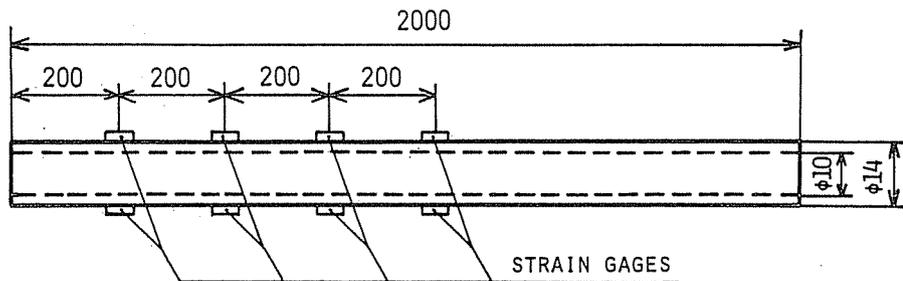


図4.1 対数減衰率とひずみ振幅との関係



(a) 中実丸棒試料



(b) 中空丸棒(パイプ)試料

図 4.2 試料形状と測定点の位置

の測定値から曲げ変形による効果を除去するためである。また、波動の観測領域(0~0.8m)の後にかかなりの余裕(約 1.2m の長さ)をとってあるのは、観測時間内に試料右端からの反射波を到達させないためである。

縦衝撃試験は中実試料、中空試料の両者ともについて行った。一方、ねじり衝撃試験に関しては、材料が正確な線形の粘弾性挙動を示さなかった場合、中実棒では妥当な測定が期待できない可能性\*もあるため、中空試料についてのみ行った。

\* 非線形性が顕著な場合は、3.4節式(3.22)の仮定が適当でない。したがって、測定理論の基礎式である式(3.28)の適用は困難となる。中空棒では、近似的に式(3.22)の仮定が成り立つと考えられる。

## 4・2 実験方法

### 4・2・1 縦衝撃試験

縦衝撃試験としては、引張り試験と圧縮試験の2種類が考えられる。引張り試験に比べ圧縮試験は、実験が比較的簡単な装置で行え、しかも応力波の大きさや波形を容易に変えることができる。したがって、目標とする応力波形が得られ易く、その波形も非常に滑らかなものとなるなどの利点がある。このような理由から、本研究では圧縮型の縦衝撃試験を行う。

使用した実験装置は図4.3に示すような、ストライカ(打撃棒)で試料に直接衝撃を与える形式のものである。最初コンプレッサに所定の空気圧を蓄えておき、ストライカを適当な長さ分だけ銃身内に挿入した後、電磁弁を開放すれば、ストライカは加速され試料の一端を打撃する。試料は数個の支持ブロック上に設置されているが、試料とストライカ両者の軸を一致させるために、支持ブロックには高さ調節機構が設けられている。また、試料と支持ブロックの相互干渉を防ぐ意味で、両者の間に緩衝材(脱脂綿)を介した。この実験装置では、試料

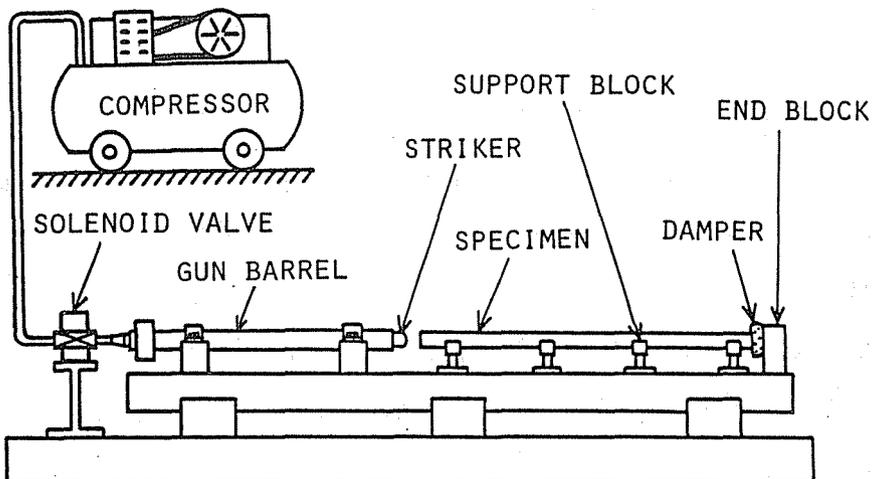


図4.3 圧縮縦衝撃試験装置

内に入射されるパルス状応力波の大きさ(振幅)を空気圧あるいはストライカの挿入長さ(加速距離)によって、またパルスの持続時間(パルス幅)をストライカの長さによって調節することができる。滑らかな応力波形を得るために、ストライカには試料と同材質で同径のもの(すなわちPMMA丸棒もしくはパイプ)を用い、その先端には片当りを防ぐためのわずかな曲率をもたせてある。

図4.4は実験方法と測定系の概略を示したものである。空気圧銃(コンプレッサ、電磁弁、銃身から構成されたもの)によって加速されたストライカで試料の一端を打撃し、試料内に圧縮縦波を発生させる。応力波の伝ばの様子を、試料棒上に衝撃端から20cm間隔に貼られた4箇所のひずみゲージで検知し、ブリッジ回路、増幅器を通してデジタル・メモリに記録する。記録された波形のデジタル値はマイクロ・コンピュータに転送され、計算処理および結果表示に用いられる。また波形のアナログ信号はオシロスコープに送られて、写真撮影に利用される。なお以後、これら測定された軸方向ひずみ-時間関係を、衝撃端から近い順に $\varepsilon_1(t)$ ,  $\varepsilon_2(t)$ ,  $\varepsilon_3(t)$ ,  $\varepsilon_4(t)$ のように表すものとする。

中実棒の試料は同じく中実棒のストライカで衝撃するが、同定される粘弾性

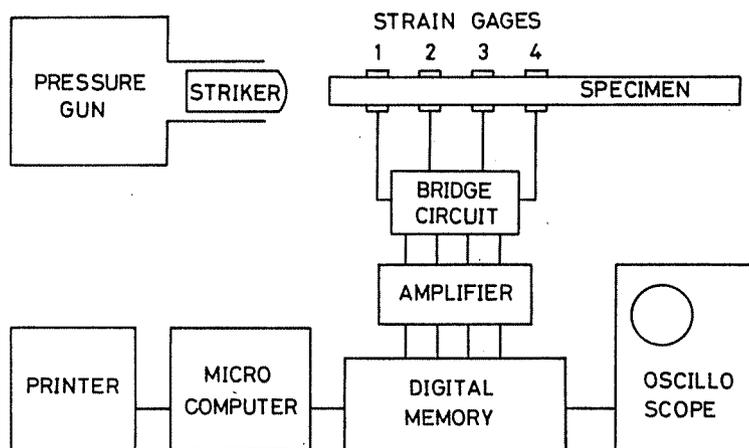


図4.4 実験方法と測定系の概略

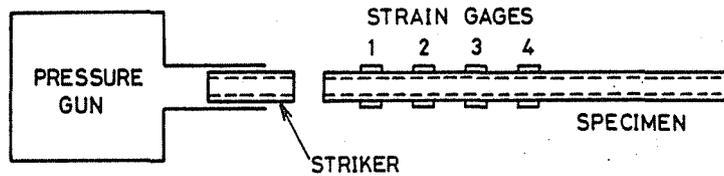


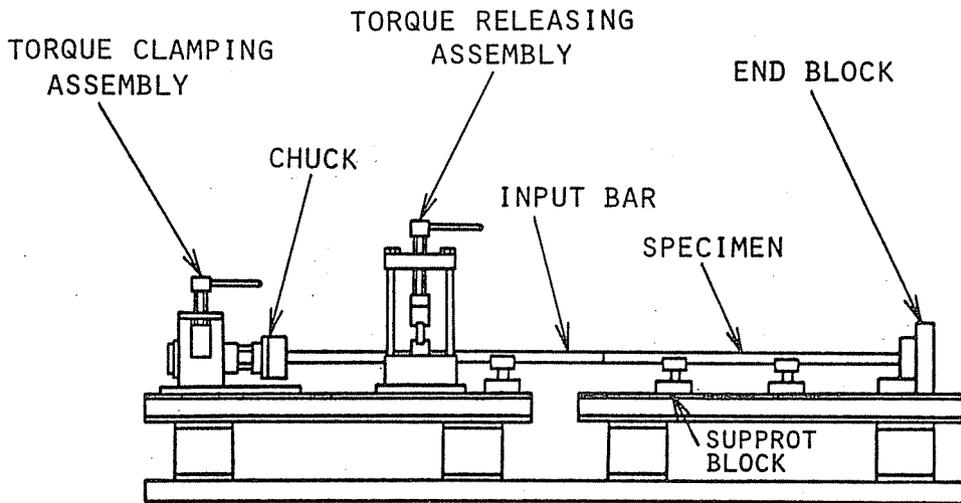
図 4.5 中空試料の場合の実験方法

特性のパルス幅依存性および振幅依存性を調べる目的で、7, 10, 15, 20cm の 4 種類の長さのストライカを用意し、それぞれについて第 1 番目の測定点でのひずみ  $\epsilon_1(t)$  の最大値が約 800, 1500, 2200, 3000  $\mu\text{m/m}$  の 4 通りになるようにストライカの衝突速度を制御した。したがって、実験条件数は  $4 \times 4 = 16$  種類である。一方、中空棒を試料とする場合は、図 4.5 のように中空のストライカで衝撃するが、この際のストライカ長さは 4, 8, 12cm の 3 種類とし、ひずみの最大値は 1000, 2000, 3000  $\mu\text{m/m}$  に設定した。この場合の実験条件数は  $3 \times 3 = 9$  種類である。なお、実験はすべて室温雰囲気中 (15~20°C) で行った。

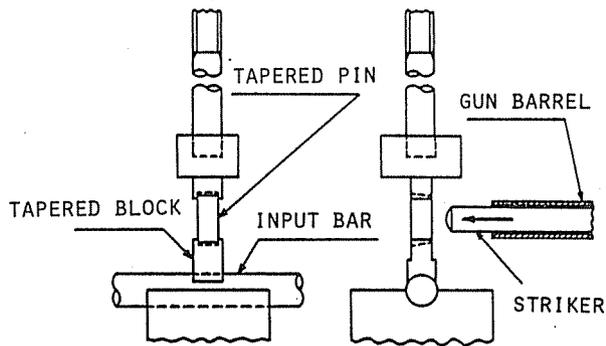
#### 4.2.2 ねじり衝撃試験

ねじり衝撃試験は縦衝撃試験に比べ、実験技術の面で難しい点がある。しかし、縦衝撃試験で問題となる端面効果や横方向慣性の影響がないため、より正確な材料特性が求められるという特長がある。金属の衝撃塑性を研究するために、これまで回転体、棒の自然落下、弾性棒のトルク解放などを利用した試験法<sup>(62)~(64)</sup>が提案されているが、本研究のような材料の粘弾性特性を求める目的のねじり衝撃試験は、ほとんど行われていないようである。

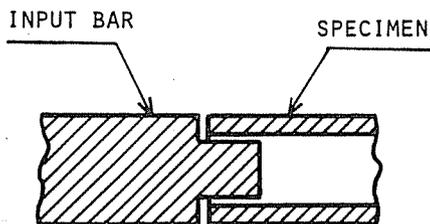
本研究で使用したねじり衝撃試験装置の概略を図 4.6(a) に示す。弾性入力棒に蓄えられるねじりトルクを瞬間的に解放することによって、ねじり応力波を発生させる形式のものである。まず、中空試料を弾性入力棒と接合しておき、弾性入力棒の任意の位置(トルク解放部の箇所)を図 4.6(b) のようにテーパ・ピン、テーパ・ブロックを介して締め付けておく。次にチャック部を所定のねじり角までねじり、クランプ部で固定すれば、弾性入力棒のトルク解放部とチャ



(a) 装置全体の概略



(b) トルク解放部の詳細



(c) 弾性入力棒と試料の接合部

図 4.6 ねじり衝撃試験装置

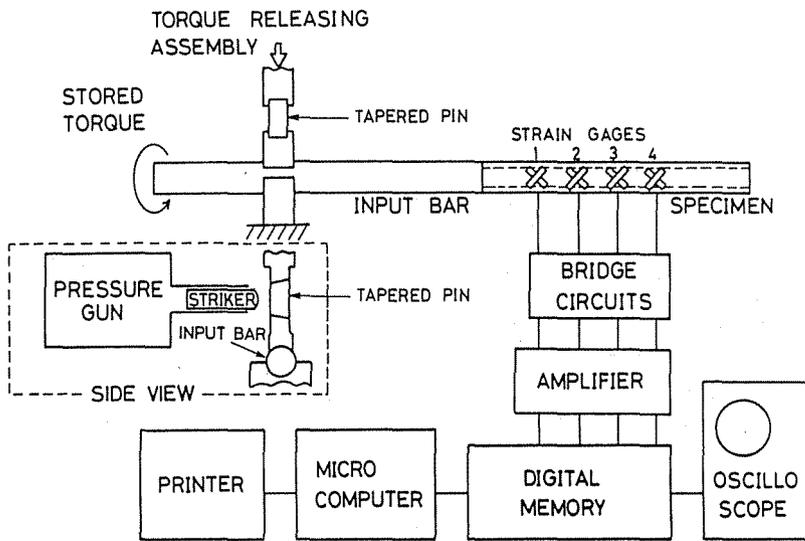


図 4.7 実験方法と測定系の概略

ック部との間には、静的なねじりトルクが蓄えられる。トルク解放部のテーパピンを 図(b)のように空気圧で加速されたストライカで打ち抜けば、蓄えられていたトルクは瞬間的に解放され、ねじり応力波となって試料内へと伝ばしてゆく。なお、この際のねじり応力波の波長は原理的には、チャック部とトルク解放部の距離の 2 倍の長さとなる。弾性入力棒の材質は 2017-T4 のアルミニウム合金であり、この一端を 図4.6(c)のように凸状に加工して試料の中空部に差し込み、エポキシ系接着剤で接合した。接合部近傍の応力状態は 3 次元的に分布すると思われるが、試料上の測定領域は接合部からかなりの距離 (20cm 以上) 離れているため、測定領域においては、1 次元的なねじり応力波が観測されると考えられる。

図4.7は、実験方法と測定系の概略を表したものである。試料表面上のせん断ひずみの時間的経過を、接合面から 20cm 間隔に貼られた 4 箇所のひずみゲージで検知し、縦衝撃試

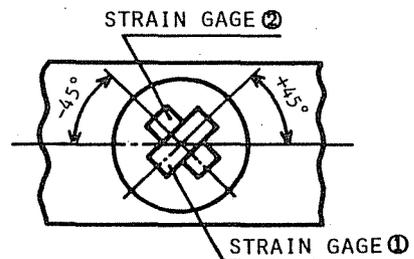


図 4.8 せん断ひずみ測定用ゲージ

験の場合と同様、ブリッジ回路、差動増幅器を通してデジタル・メモリに記録する。せん断ひずみ波形の記録はマイクロ・コンピュータに転送され、計算処理と結果表示に用いられる。なお以後、これら測定されたせん断ひずみ-時間関係を、接合面から近い順に  $r_1(t)$ ,  $r_2(t)$ ,  $r_3(t)$ ,  $r_4(t)$  と書くことにする。ひずみゲージには図4.8のようなせん断ひずみ測定用のものを用い、4箇所 の測定点のそれぞれにおいてこれを、軸対称な表裏の2点に貼った。1枚のひずみゲージは、試料の軸方向に対して  $+45^\circ$  および  $-45^\circ$  の2方向のセットから成っており、表裏に貼った2枚のゲージの  $+45^\circ$  方向同士、および  $-45^\circ$  方向同士のそれぞれを直列に接続して、ブリッジ回路に組み込み、差動増幅器で両者の出力差をとった。このようにすれば、各測定点におけるせん断ひずみを曲げ変形の影響なしに測定できる。

粘弾性特性のパルス幅依存性および振幅依存性を調べるために、チャック部とトルク解放部との間隔を 5, 10, 15 cm の3種類に変え、それぞれについて第1番目の測定点でのせん断ひずみ  $r_1(t)$  の最大値が約 900, 1800, 3000  $\mu\text{m/m}$  となるようにチャック部に与えるねじり角を設定した。すなわち、実験条件数は  $3 \times 3 = 9$  種類である。なお、実験はすべて  $20^\circ\text{C}$  で行った。

#### 4.3 データ処理法と解析手順

デジタル・メモリに記録された縦衝撃あるいはねじり衝撃のひずみ-時間関係のデータは、マイクロ・コンピュータに転送され、材料の粘弾性特性を同定するための計算処理や結果表示が行われる。本研究で開発したマイクロ・コンピュータ・システムによるデータ処理法の概要を図4.9に示す。システム内には、ラベル書き込みおよびデータ取り込み格納~粘弾性定数決定までの5種類の作業プログラムがあり、どの作業プログラムを実行し、どのような処理を行うかは作業管理プログラムによって指定される。

実験で得られた4箇所のひずみ波形 ( $\varepsilon_j(t)$  または  $r_j(t)$ ;  $j=1, 2, 3, 4$ ) は、データ取り込み格納プログラムによって、デジタル・メモリからGB-IBインター

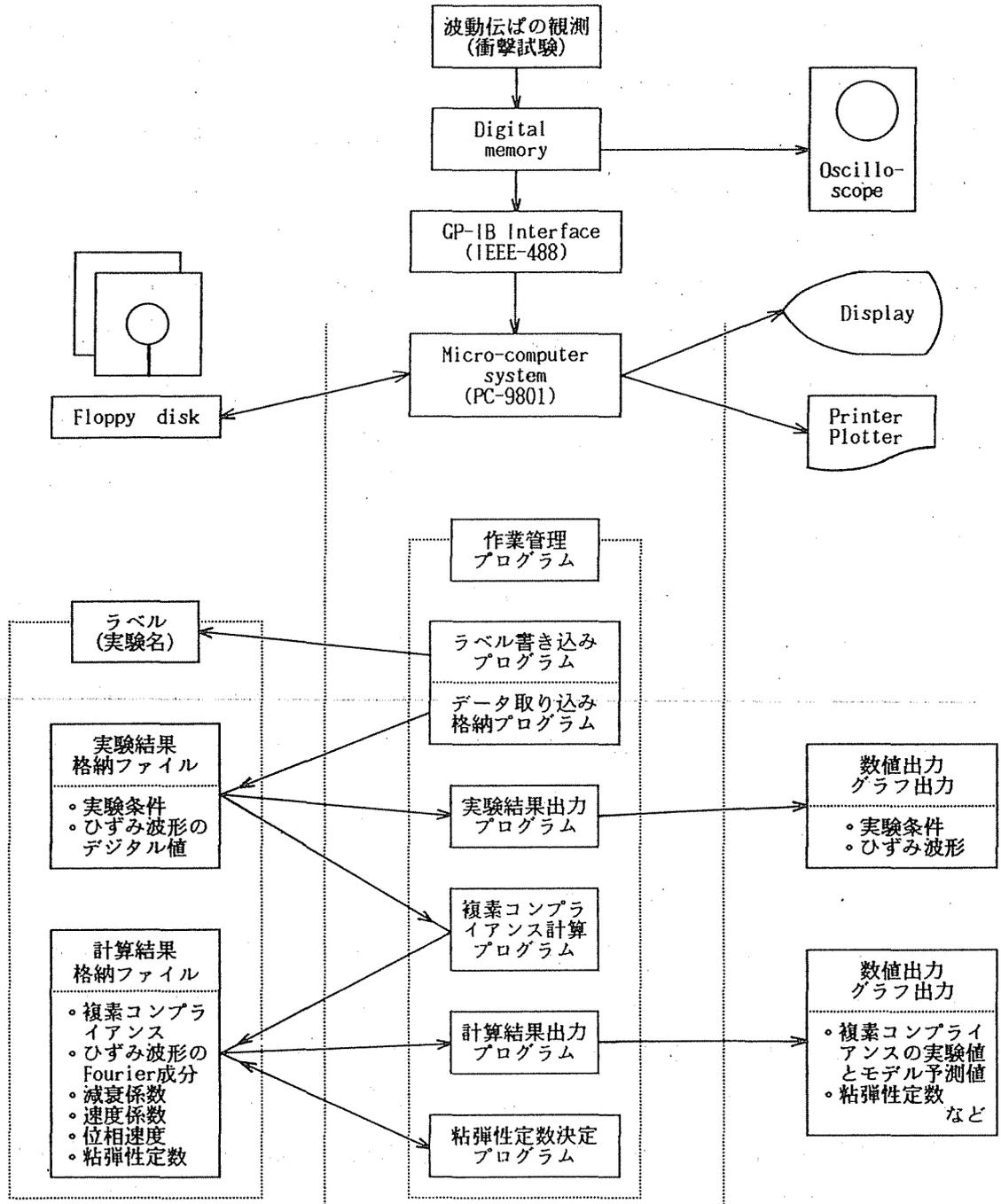


図 4.9 マイクロ・コンピュータ・システムによるデータ処理の概要

フェイスを通してマイクロ・コンピュータに取り込まれ、フロッピー・ディスク内に保存される。このときラベル書き込みプログラムによって、実験条件、計算に必要な諸値とともに実験名をラベルとして書き込んでおく。このような実験結果に関する情報は、実験結果出力プログラムによって数値またはグラフとしてディスプレイ画面上に表示され、必要に応じてプリンタに出力できるようになっている。

複素コンプライアンス計算プログラムは、3・2節で述べた方法に従い、次のような手順で複素コンプライアンスの実験値を求めるためのプログラムである。

- 1)  $\varepsilon_j(t)$  ( $j=1, 2, 3, 4$ ) をFourier変換し、 $\bar{\varepsilon}_j(\omega)$ を計算する。
- 2)  $\bar{\varepsilon}_j(\omega)$ の絶対値  $|\bar{\varepsilon}_j(\omega)|$  および位相角  $\theta_j(\omega)$ を計算する。
- 3) 式(3.14)を用いて減衰係数  $\alpha(\omega)$  および速度係数  $f(\omega)$ を求める。
- 4) 式(3.9)を用いて複素コンプライアンスの実数部  $J_1(\omega)$  および虚数部  $J_2(\omega)$ を求める。

計算終了時には  $J_1(\omega)$ ,  $J_2(\omega)$  とともに、 $|\bar{\varepsilon}_j(\omega)|$ ,  $\theta_j(\omega)$ ,  $\alpha(\omega)$ ,  $f(\omega)$  および位相速度  $C(\omega) = \omega / f$  などの各量が周波数の関数として、計算結果格納ファイルに保存される。以上は縦衝撃試験について述べたものであるが、ねじり衝撃試験の場合に関しても同じプログラムが利用できる。ファイルに格納された計算結果の内容は、計算結果出力プログラムによって数値、あるいはグラフとなってディスプレイ画面上に表示され、必要に応じてハード・コピーをプリンターあるいはプロッタに出力することができる。

計算された複素コンプライアンスの周波数に対する傾向から、粘弾性モデルの種類を判断し、注目する周波数の範囲を指定した後、計算結果格納ファイルに粘弾性定数決定プログラムを運用してやれば、指定された周波数範囲内で複素コンプライアンスの実験値を最もよく再現するような粘弾性定数の値が決定される。使用する決定手法は3・3節で述べたBland-Leeの方法であり、4要素流体モデルとそれに含まれる粘弾性モデルについて適用できる。このように同定された粘弾性モデルによる複素コンプライアンスのモデル予測値は、計算結果

格納ファイルを経て，計算結果出力プログラムによって表示される。

実験結果と計算結果を格納するファイルはフロッピー・ディスク内では別個に自動作成されているが，両者は同じラベル名(実験名)のもとで管理されており，使用者は2つのファイルの区別を意識する必要がないようになっている。

複素コンプライアンス計算プログラムにおけるFourier変換の数値計算には，FFT(高速Fourier変換：Fast Fourier Transform technique)<sup>(65)~(67)</sup>を使用した。実験で観測されるひずみ波形  $\varepsilon_j(t)$ ，あるいは  $\gamma_j(t)$  はパルス状の局在波であるが，FFTのような離散Fourier変換では，本来周期性をもたない局在波を，周期  $T = \Delta t \cdot N$  ( $\Delta t$ ,  $N$  はそれぞれサンプル時間，サンプル数)をもつ周期関数に置き換えて計算する。これによって本来連続的に分布しているはずの周波数スペクトル(Fourier変換の絶対値)は，基本周波数  $\Delta f = 1/T$  の整数倍のところに散在する離散スペクトルになるという特徴がある。したがって周波数スペクトルの正確な関数形を得るためには，周期  $T$  (すなわち，サンプル数  $N$ ) を十分大きくとる必要がある。ただし，FFTでは1つの波形のサンプル数を2のべき乗としなければならない。計算にあたっては，実際の波形データのサンプル数  $2^{10} = 1024$ 個 に対し，その後値が0であるような点を1024個(もしくは3072個)付け加えて，サンプル数を合計  $2^{11} = 2048$ 個(もしくは  $2^{12} = 4096$ 個)として計算した。

なお，プログラムはすべてBASIC言語(N<sub>88</sub> Disk-BASIC(86))によって作成されたものである。

#### 4・4 1次元粘弾性特性の同定

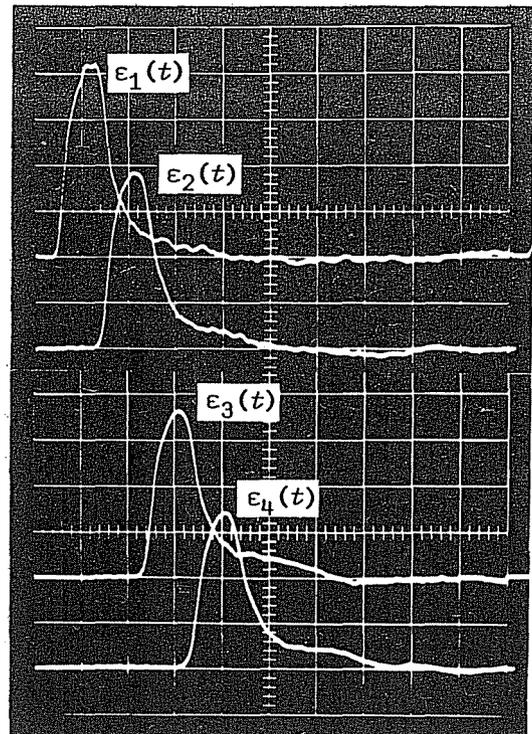
本節では、まず中実棒および中空棒の縦衝撃試験に関する実験・解析結果を述べ、次いで中空棒のねじり衝撃についての実験・解析結果を述べることにより、試料として用いたPMMA材の1次元粘弾性特性、すなわち単軸特性およびせん断特性について検討する。

##### 4・4・1 単軸特性の同定

縦衝撃試験の実験・解析からは、材料の粘弾性特性として単軸特性が求まる。以下では、材料の単軸引張り圧縮に対する粘弾性モデル、およびその粘弾性定数を同定することを目標として、(1) 中実試料、(2) 中空試料の順に実験・解析結果を述べ、最後に(3) 他の研究との比較を行う。

##### (1) 中実試料

i) 縦衝撃試験結果 図4.10はひずみ波形の伝ばの様子を示した一例である。このとき衝突させたストライカの長さは10cmであった。第1番めの測定点におけるひずみ波形  $\epsilon_1(t)$  のピーク値は  $1475 \mu\text{m}/\text{m}$  であり、表4.1に示した降伏ひずみ  $\epsilon_Y = 4000 \mu\text{m}/\text{m}$  と比較すれば十分小さく、巨視的には弾性範囲内にある。 $\epsilon_4(t)$  を  $\epsilon_1(t)$  と比較すると、ピーク値は約0.8倍、パルス幅は1.2倍程度になっており、伝ばに伴い減衰と分散が生じていることがわかる。図4.10より波頭伝ば速度  $C_f$  を算出すると、 $C_f = 2140 \text{m}/\text{sec}$  となる。これは静的縦弾性係数  $E$  から



V. scale:  $343 \mu\text{m}/\text{m}/\text{div.}$   
H. scale:  $100 \mu\text{sec}/\text{div.}$

図4.10 ひずみ波形の記録の一例  
(中実試料, ストライカ長さ10cm)

求めた  $C_0 = \sqrt{E/\rho} = 1650$  m/sec に比べ、かなり大きな値となっており、動的負荷においては粘性の効果により、縦弾性係数が静的な場合に比べ相当大きくなるのが想像される。

図4.10の各波形  $\varepsilon_j(t)$  ( $j=1,2,3,4$ ) をFourier変換して  $\bar{\varepsilon}_j(\omega)$  を求め、それらの絶対値  $|\bar{\varepsilon}_j(\omega)|$ 、すなわち周波数スペクトル(振幅)、および位相角  $\theta_j(\omega)$  を計算してそれぞれ、図4.11(a),(b)に示す。

図4.11(a) をみると、すべての周波数にわたって振幅の減衰が認められるが、特に 1~3 kHz 付近の減衰が大きいことがわかる。Pochhammer-Chreeの理論<sup>(42)</sup>によると弾性縦波の場合、棒の半径を  $a$ 、波長を  $\Lambda$  とした場合、 $a/\Lambda < 0.1$  程度であれば、変形は1次元的で横方向慣性による幾何分散の影響はほとんど生じないとされている。いま、周波数  $f$  が最も大きい 10kHz の成分波につい

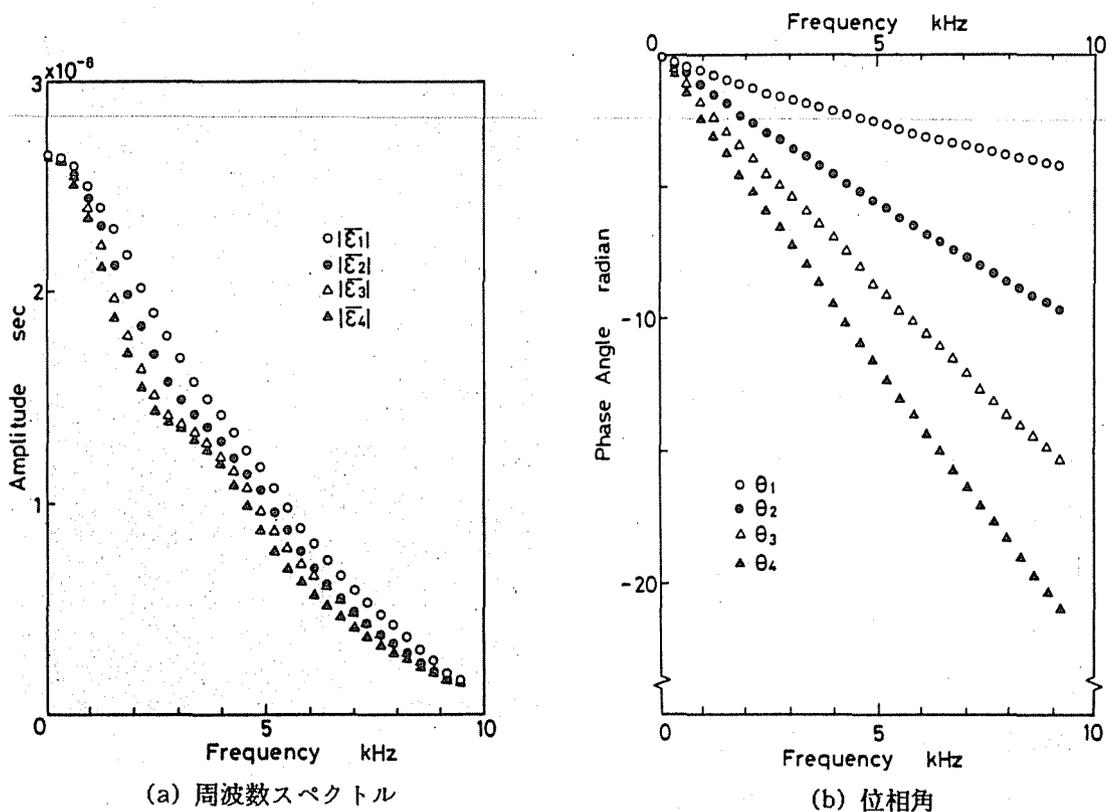


図4.11 ひずみ波形のFourier成分

て考えれば、この値は  $a/\Lambda = a \cdot f / C_f = 0.023$  となる。したがって、波に含まれているすべての周波数成分に対して  $a/\Lambda < 0.1$  の条件が十分満足されており、図4.10の波形には幾何分散の影響はほとんどなく、粘性、つまり材料的な要因のみによって波形の減衰・分散が生じたものと考えてよい。なお、これは弾性棒についての理論に基づいているが、粘弾性棒の縦波に及ぼす幾何分散の影響に関しては、後に本論文第7章で詳しく考察する。図4.10の各波形の面積は、図4.11(a)における周波数が0での値、すなわち  $|\bar{\varepsilon}_j(0)|$  ( $j=1, 2, 3, 4$ ) に対応しているが、これはほとんど変化していないため、波は面積をほぼ一定値に保ちながら伝ばしたことになる。この性質は線形粘弾性体のなかの固体系モデル(2.2節参照)の持つ重要な特徴の1つであり、PMMMA材に対しては固体系の粘弾性モデルが適用されるものと考えられる。

図4.11(b)をみれば、波形の位相角  $\theta_j(\omega)$  は負の値となり、直線に近い形で減少していることがわかる。それぞれの直線の初期における傾き差は、図4.10の各波形が立ち上る時間差に対応するものである。しかし注意して観察すれば、それぞれの直線の傾きは周波数の増加に伴い、しだいに鈍化しているのがわかる。このような傾きの鈍化傾向は、各波形がGauss関数(正規分布曲線)のような左右対称形のものではなく、それからややはずれた形、つまり除荷後の波形後部が長い形となっているためである\*。

ii) 減衰・分散の評価 3.2節の式(3.14)で示された最小二乗法を用いて、図4.11(a)の  $|\bar{\varepsilon}_j|$  ( $j=1, 2, 3, 4$ ) についての実験データから減衰係数  $\alpha(\omega)$  を、一方、 $\theta_j$  に関する図4.11(b)のデータから速度係数  $f(\omega)$  を求め、それぞれ図4.12(a), (b)にプロットで示す。なお、実線は後に述べるように、同定された粘弾性モデルからの予測値を示したものである。

---

\* Gauss関数  $g(t) = A \cdot \exp\{-\alpha(t-t_0)^2/2\}$  のFourier変換は解析的に求めることができ、 $\bar{g}(\omega) = (A/\sqrt{2\pi\alpha}) \cdot \exp(-i\omega t_0) \cdot \exp(-\omega^2/2\alpha)$  となる。 $|\bar{g}(\omega)|$  はやはりGauss関数であり、その位相角  $\theta(\omega)$  は、 $\theta(\omega) = -t_0\omega$  のように周波数に対して直線的に減少する。また、関数形  $g(t)$ 、 $|\bar{g}(\omega)|$  の標準偏差をそれぞれ  $\Delta t$ 、 $\Delta \omega$  とすると、 $\Delta t \cdot \Delta \omega = 1$  の関係を導くことができる。

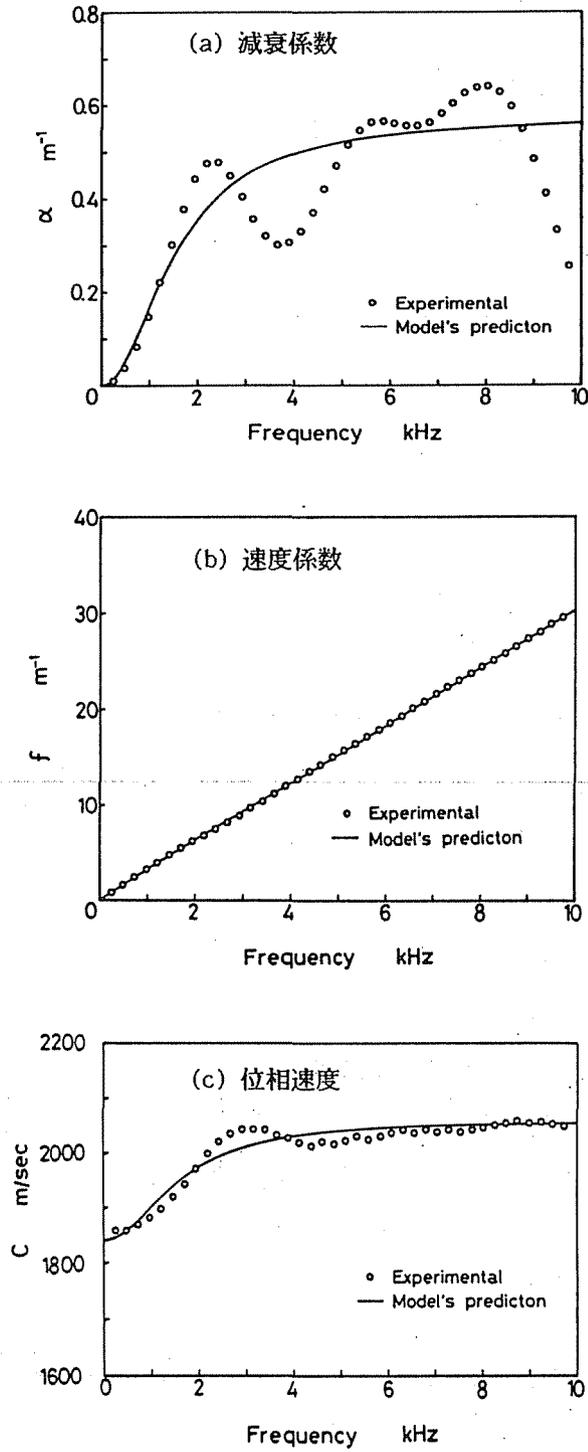


図 4.12 減衰・分散の周波数特性

まず図4.12(a)に関して述べると、周波数が0での $\alpha$ の値がほぼ0となっていることと、その後、3kHz付近まで値が顕著に増加していることは、図4.11(a)で認められた $|\bar{\epsilon}_j(0)|$ の値が測定点によらずほぼ一定である事実、および1~3kHz付近での振幅の著しい減少が、それぞれ反映されたものである。8kHzを過ぎての $\alpha$ の急激な低下は、図4.11(a)において、それに対応する振幅の周波数成分が、正確な $\alpha$ の値を算出するのに十分な大きさでないため生じた実験的誤差と考えられる。一方、3~4kHz付近の実験値とモデル予測値との差異は、実験的な誤差ではなく、材料が正しい線形の粘弾性挙動を示さないことが原因と考えられる。

次に図4.12(b)によれば、速度係数 $f$ は周波数に対してほぼ直線的に増加しているが、注意して見ると直線の傾きがしだいに小さくなっているのが観察できよう。細い弾性棒を使って同様の実験・解析を行うと、このような現象は観察されず、 $f$ はほとんど完全な直線的増加を示す。図4.12(b)の $f$ についてのデータを、3.1節式(3.12)で述べた位相速度 $C(\omega)$ との関係式、 $C(\omega) = \omega/f(\omega)$ に代入して、位相速度を周波数に対して求めると図4.12(c)のようになる。 $C(\omega)$ は3kHz程度まで比較的顕著に増加し、その後も徐々に増加する。このように波の伝ば速度(位相速度)が周波数によって変化するのとは、図4.12(b)において $f$ が直線からやや離脱した傾向となっているからである。もし、 $f$ が完全な直線であれば、位相速度は一定値となることは明らかである。また位相速度が図4.12(c)のように、周波数に応じて異なった値を有しているから、図4.10に示したひずみ波形が伝ばによって広がってくる、つまり分散するのである。図4.12(a)のような減衰だけでは、波形は単に小さくなるだけである。なお、縦波の減衰・分散については、横方向慣性の効果も考慮して、第7章でさらに詳しく調べる。

iii) 粘弾性モデルの同定 以上のようにして求めた減衰係数 $\alpha$ と速度係数 $f$ を、3.1節の式(3.9)に代入して計算すれば、単軸状態に対する複素コンプライアンスの実数部 $J_1(\omega)$ および虚数部 $J_2(\omega)$ が求まる。図4.13はこ

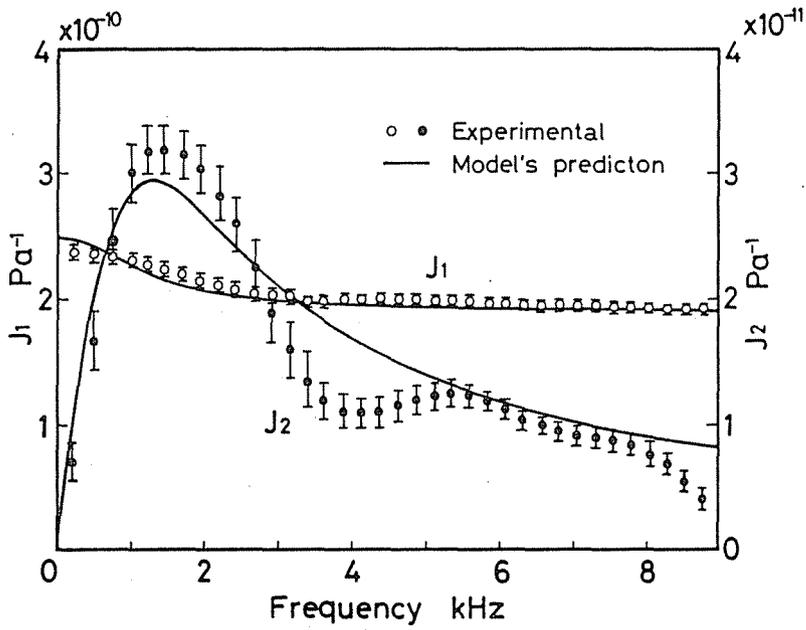


図 4.13 単軸状態に対する複素コンプライアンス (中実試料)

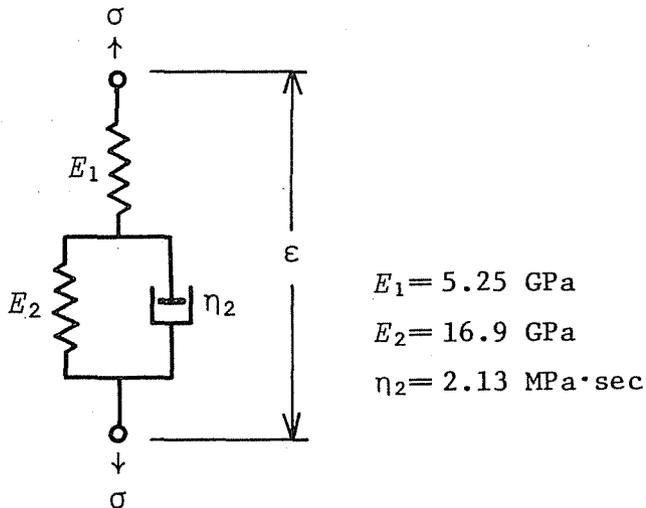


図 4.14 単軸状態に対する粘弾性モデル (中実試料)  
(3要素固体モデル)

の手順に従い、 $J_1$  および  $J_2$  を各周波数について求めたものである。プロットは、すでに述べたような、ストライカ長さを7~20cm、 $\varepsilon_1(t)$ のピーク値を800~3000 $\mu\text{m/m}$ の範囲で変えた種々の実験条件下での平均値を示し、幅は変動(ばらつき)の範囲を $\pm 2 \times$ (標準偏差)で表している。衝突させるストライカの速度を速くして、 $\varepsilon_1(t)$ のピーク値、すなわちひずみ振幅を増加させると、 $J_2$ は全体的にやや低下するが、 $J_1$ はあまり変化しなかった。2.4節式(2.14)で述べたように、 $J_2/J_1$ は材料の振動減衰能に相当するものであるから、ひずみ振幅の増大にともない、材料の減衰能は低下することになる。これは、図4.1の結果からもうかがえることである。なおストライカの長さの変化に関しては、有意な差異は観察されなかった。同一の実験条件下では、ひずみ波形の再現性は非常に良く、以後の計算結果にほとんど差異は生じなかった。

$J_1$ は1.3kHz付近で大きく減少し、その後一定となる。一方、 $J_2$ は1.3kHz付近で最大値をとり、その後減少してゆく。第2章の図2.5を参照すれば、 $J_1$ と $J_2$ のこのような傾向を表す粘弾性モデルとして、図4.14に示す3要素固体モデルを考えることができる。図4.13の0~3.417kHzの範囲の実験点をもとに、3.3節で述べたBland-Leeの方法を使って、モデルの粘弾性定数 $E_1, E_2, \eta_2$ を定めると、図4.14に付記した値となった。このモデルの $J_1, J_2$ はそれぞれ

$$\left. \begin{aligned} J_1(\omega) &= \frac{1}{E_1} + \frac{E_2}{E_2^2 + (\omega \eta_2)^2} \\ J_2(\omega) &= \frac{\omega \eta_2}{E_2^2 + (\omega \eta_2)^2} \end{aligned} \right\} \quad (4.1)$$

と与えられる。図4.14の各値を式(4.1)に代入し、同定された粘弾性モデルによる $J_1, J_2$ の予測値を計算すると、図4.13の実線のようにになった。

$J_1$ はすべての周波数域においてよく一致しているが、 $J_2$ は4kHz付近、および8kHz以上でやや不一致がみられる。試料材の対数減衰率を示した図4.1において、振動数が2790kHzのデータに非線形性がやや認められるが、図4.13の4kHz付近の不一致は、この影響と考えられる。一方8kHz以上の不一致は、

一連の実験において図4.11(a)のように、ひずみ波形に8 kHz以上の高周波成分があまり含まれていなかったため生じた実験的誤差が主な原因と思われる。高周波成分を多く含む、より短いストライカを使った実験数を増やせば、この不一致は解消されるものと思われる。

詳細な点では多少の不一致が認められるものの、全般的傾向や、 $J_1$ の初期の減少と $J_2$ の最大値、およびそれらが現われる周波数範囲については、同定されたモデルでよく再現されており、PMMA材の単軸引張り圧縮に対する動的挙動には3要素固体モデルが適用できると結論づけられる。同定した3要素固体モデルの場合、波頭伝ば速度は瞬間弾性応答を表すパラメータ $E_1$ と密度 $\rho$ とから、 $\sqrt{E_1/\rho} = 2106\text{m/sec}$ と計算される。この値はひずみ波形の記録を示した図4.10からの実測値 $C_f = 2140\text{m/sec}$ にほぼ等しく、同定したモデルの妥当性を裏付けている。

なお、減衰係数 $\alpha$ 、速度係数 $f$ 、位相速度 $C$ のモデル予測値を示した図4.12(a), (b), (c)中の実線は、3.1節の式(3.9)および式(3.12)を用いて、図4.13に表した複素コンプライアンス $J_1, J_2$ のモデル予測値から計算して求めたものである。

## (2) 中空試料

図4.15は、中空丸棒(パイプ)を試料に用いて実験した際の、ひずみ波形の記録の一例である。図4.15の場合、衝突させたストライカの長さは4 cmであり、生じたひずみ波形 $\epsilon_1(t)$ の最大値は $1030\mu\text{m/m}$ である。先に図4.10で示したストライカの長さが10cmのも

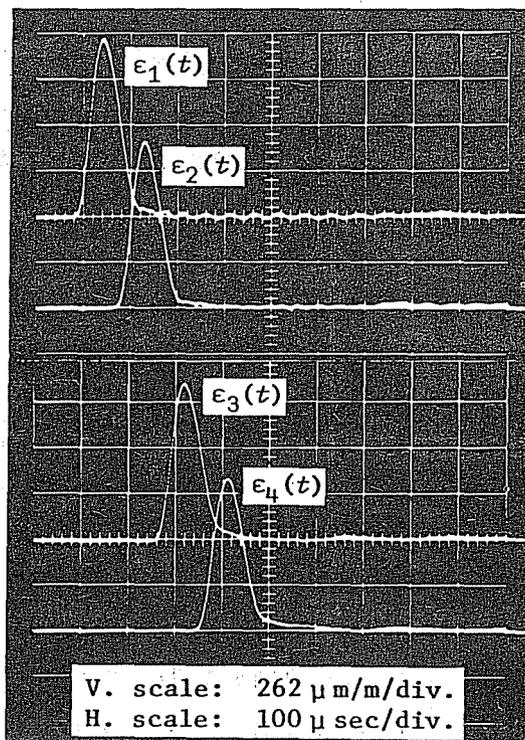


図4.15 ひずみ波形の記録の一例  
(中空試料, ストライカ長さ 4 cm)

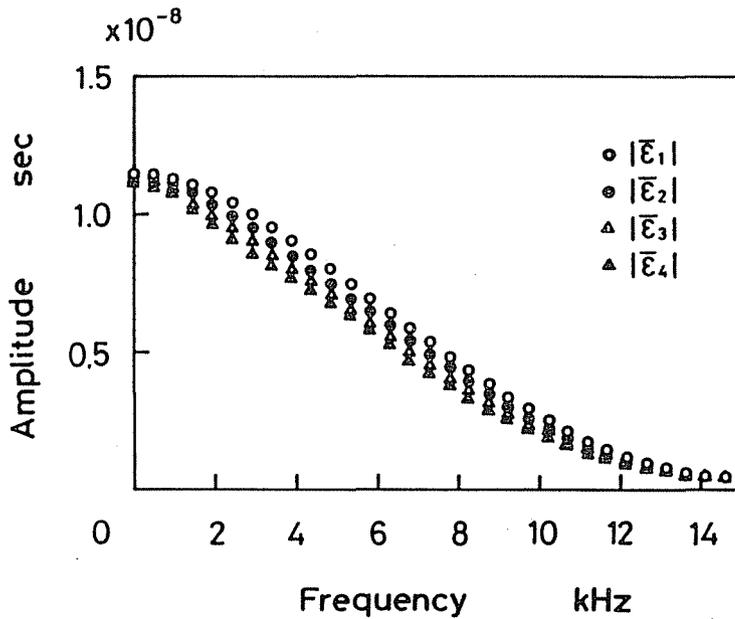


図 4.16 ひずみ波形の周波数スペクトル

のに比べると、個々の波形の持続時間がかなり短くなっているのがわかる。伝ばに伴うピーク値の減少および波形の広がり、は、図4.10の場合とほぼ同程度である。  $\varepsilon_1(t)$  の除荷後の平坦な部分では、breathing mode<sup>(68)</sup> と呼ばれる中空棒あるいは円筒殻内の縦波特有の、細かい振動が観察されている。しかしながら振動の周期は  $50 \mu\text{sec}$  程度、すなわち周波数に換算すれば  $20\text{kHz}$  程度のかかり高周波のものであり、以後の粘弾性モデルを同定するための解析には影響していない。

図4.15の各ひずみ波形のFourier変換を計算し、それぞれの絶対値(周波数スペクトル)  $|\bar{\varepsilon}_j|$  を図4.16に示す。ストライカ長さが短く、ひずみ波形の持続時間が短いため、図4.11(a)の場合に比べ、周波数スペクトルが広い範囲(0~14 kHz)に分布していることがわかる。周波数が0における値がほぼ一定であることなどの全般的傾向は、図4.11(a)とほとんど同様である。

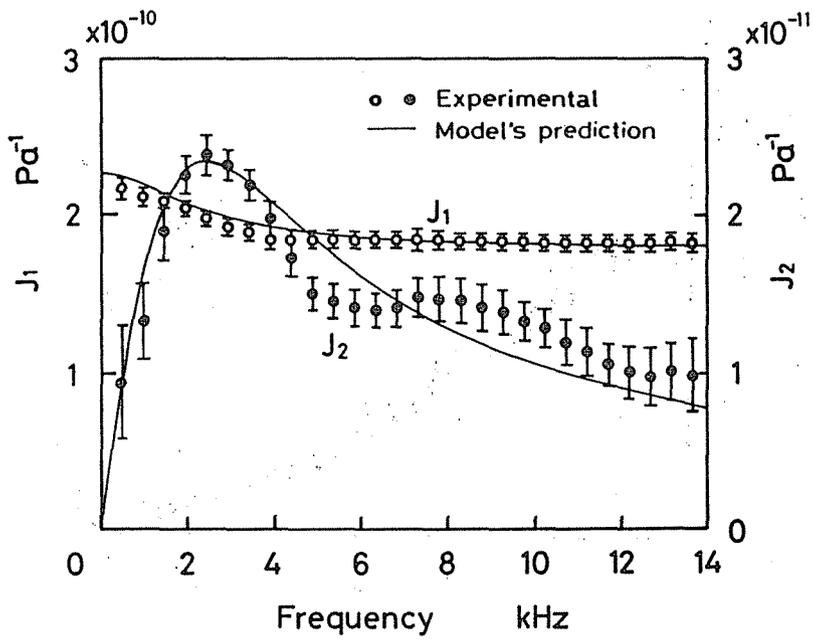


図 4.17 単軸状態に対する複素コンプライアンス (中空試料)

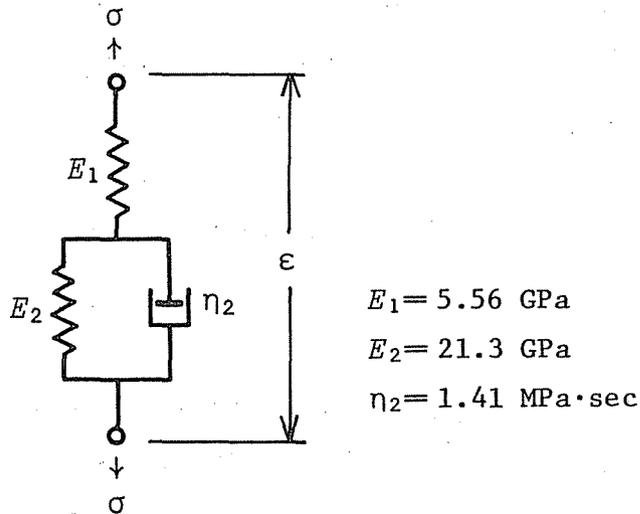


図 4.18 単軸状態に対する粘弾性モデル (中空試料)  
(3要素固体モデル)

中実試料の場合と同じく、単軸状態に対する複素コンプライアンス  $J_1, J_2$  を各周波数について求め、図4.17に示す。プロットはストライカ長さを4~12cm,  $\varepsilon_1(t)$ のピーク値を1000~3000  $\mu\text{m/m}$ の範囲で変えた種々の実験での平均値を示し、幅は $\pm 2 \times$ (標準偏差)を示している。中実試料に比べ、複素コンプライアンスが広い周波数範囲で求められているのは、長さが4cmの、かなり短いストライカを用いての実験を取り入れたからである。当然のことながら、図4.13の結果と同様の傾向であり、3要素固体モデルの適用が考えられる。図4.13および図4.17両者の実験値を比較すると、 $J_1$  はほぼ等しくなっているが、 $J_2$  に関しては、ピーク値は中空試料を用いた今回の方がやや小さく、高周波域での値については、逆に今回の方がやや大きいようである。図4.13、図4.17両者の差異の原因として、実験的誤差のほか、中実棒と中空棒の製造方法、あるいはロットの違いなどが、材料の微視的構造に影響していた可能性も考えられる。

図4.17の実験値より、3要素固体モデルの粘弾性定数  $E_1, E_2, \eta_2$  を図4.18に示すような値に定めた。同定された3要素固体モデルから計算される  $J_1, J_2$  の予測値を図4.17に実線で示す。

### (3) 他の研究との比較

いくつかの文献<sup>(18)~(20)(34)</sup>には、PMMA材の粘弾性挙動(単軸引っ張り圧縮)を3要素固体モデル、あるいはそれと等価な3要素標準線形モデルで近似したときの粘弾性定数が、表4.2のように報告されている。文献<sup>(18)</sup>と文献<sup>(19)</sup>は棒の縦振動から、文献<sup>(20)</sup>ははりの曲げ振動から、また文献<sup>(34)</sup>は棒の縦衝撃から、それぞれ粘弾性定数の値を決定している。なおこれらの文献の中で、3要素標準線形モデルで近似した場合の粘弾性定数を示している例については、3要素固体モデルとしての値に換算して、表4.2に記している。

いずれの研究例においても、 $E_1$ の値は本研究の値とほぼ等しいと考えてよい。 $E_2$ と $\eta_2$ に関しては、各研究値のオーダーこそ揃っているものの、振動試験から求めた文献<sup>(18)~(20)</sup>の値と、本研究での値との間には、2~3倍程度の相違がみられる。一方、本研究と同じ衝撃試験による文献<sup>(34)</sup>の値は、各粘弾性定数

表 4.2 粘弾性定数に関する他の研究値との比較

Ref. No.	$E_1$ GPa	$E_2$ GPa	$\eta_2$ MPa·sec	$E_1 E_2 / (E_1 + E_2)$ GPa
The Present Method	5.25	16.9	2.13	4.01
	5.56	21.3	1.41	4.41
Ref. (18)	5.57	56.8	2.06	5.07
Ref. (19)	4.58	45.8	6.72	4.16
Ref. (20)	5.84	38.3	3.23	5.07
	4.58	31.8	2.27	4.00
Ref. (34)	5.48	18.6	1.97	4.23
	5.47	15.2	2.38	4.02

とも非常に近い値を示している。各研究で報告された  $E_1$  の値が、ほぼ等しいのは、 $E_1$  が瞬間的な弾性応答を表すパラメータであるから、試験法の違いによるひずみ速度の差にあまり影響されないためであろう。一方、 $E_2$  と  $\eta_2$  についての各文献値の相違は、両者が材料の粘弾性を特徴づけるパラメータであるため、実験におけるひずみ速度の差が、敏感に影響してくることが原因と思われる。このように、衝撃あるいは振動などの試験方法のちがいによって、同定される粘弾性定数の値に有意差が生じてくるのは避けられないことであろう。同様の事実として Chiu-Neubert<sup>(38)</sup> は、セルロース・アセテートに対する粘弾性モデルを衝撃試験から同定し、これを複素弾性係数に換算して振動試験による値と比較すれば、両者には相当の差が生じたことを報告している。

3要素固体モデルから予測される静的縦弾性係数は、 $E_1 E_2 / (E_1 + E_2)$  となるが、各文献についてのこの値を、表4.2に同時に示す。各文献値とも、静的引張り試験から測定される実際の値 (3.22 GPa) に比べ、かなり大きくなっている。このことから、振動や衝撃などの動的試験から求めた材料特性を、そのまま静的、あるいは準静的問題に適用するのは無理と考えられ、なんらかの補正が必要となろう。また逆に、クリープ試験や応力緩和試験から求めた材料特性を、振動や衝撃などの動的問題に適用しようという考え方もあるが、準静的

試験から求めた特性の動的問題に対する有効性に関しては、先と同様の理由から疑問が残る。

このように、試験方法の違いによるひずみ速度の差から、求められる材料特性値が異なってくることは、簡単には解決できそうもない問題であり、今後一層の研究、データの蓄積が必要と思われる。

#### 4.4.2 せん断特性の同定

これまで述べてきた実験・解析結果は、縦衝撃試験によって生じた1次元縦波のFourier周波数解析から、単軸引張り圧縮の粘弾性特性を求めたものであった。以下では同様の手法を、ねじり衝撃試験におけるせん断ひずみ波動に適用して、材料の単純せん断に対する粘弾性特性を求めた実験・解析結果について述べる。

i) ねじり衝撃試験 試料には、縦衝撃試験[4.4.1(2)]のものと同一の中空丸棒を用いた。図4.19に、ねじり衝撃試験より得られたせん断ひずみ波形の一例を示す。このとき、パルスの持続時間に関係する、弾性入力棒上でのチャック部とトルク解放部との間隔(クランプ長さ)は10cmであった。第1番目の測定点でのせん断ひずみ波形 $\gamma_1(t)$ の最大値は約 $1854 \mu\text{m}/\text{m}$ であり、十分な弾性範囲内にある。 $\gamma_4(t)$ を $\gamma_1(t)$ と比較すれば、最大値は約0.8倍、パルス幅は約1.2倍になっており、図4.10あるいは図4.15の縦衝撃の場合と同様に、明らかな減衰・分散

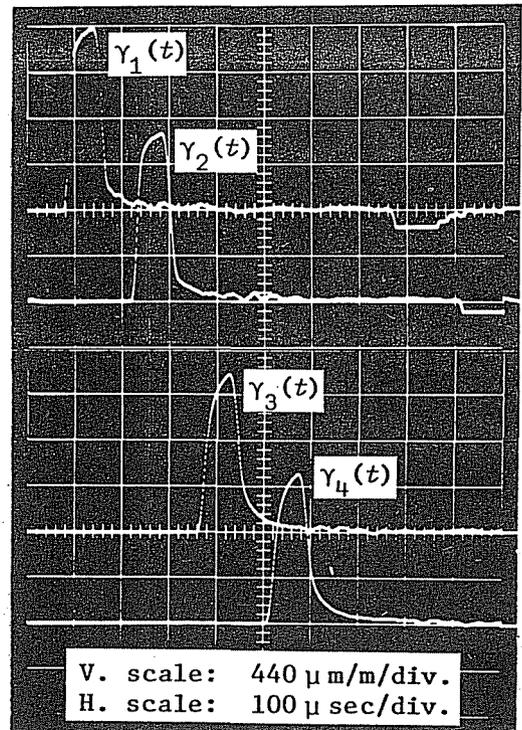


図4.19 せん断ひずみ波形の記録の一例  
(クランプ長さ 10 cm)

が認められる。図4.19より波頭伝ば速度を算出すると、 $C_f = 1350\text{m/sec}$ となる。図4.10と同じくやはり、この値は静的横弾性係数  $G = E/2(1+\nu)$  から計算される弾性せん断波の伝ば速度  $\sqrt{G/\rho} = 1000\text{m/sec}$  に比べ、かなり大きくなっている。

試料には弾性入力棒との接合部があり、入力棒内で発生したねじり応力波はこの接合部において、試料への透過波と入力棒への反射波とに分かれる。反射波は接合面で一度位相を逆転させて入力棒を往復し、一部が再び試料へ透過する。最初の透過波と2度目の透過波が重ならないようにするためには、入力棒を十分長くしなければならない。図4.19において2度目の透過波は、 $r_1(t)$ および $r_2(t)$ の波形の後に凹部として、波形主要部と分離して観察されている。これら凹部は除外して、以後の解析を行った。

図4.19の各波形を Fourier変換し、その絶対値  $|\bar{r}_j|$  (周波数スペクトル)を

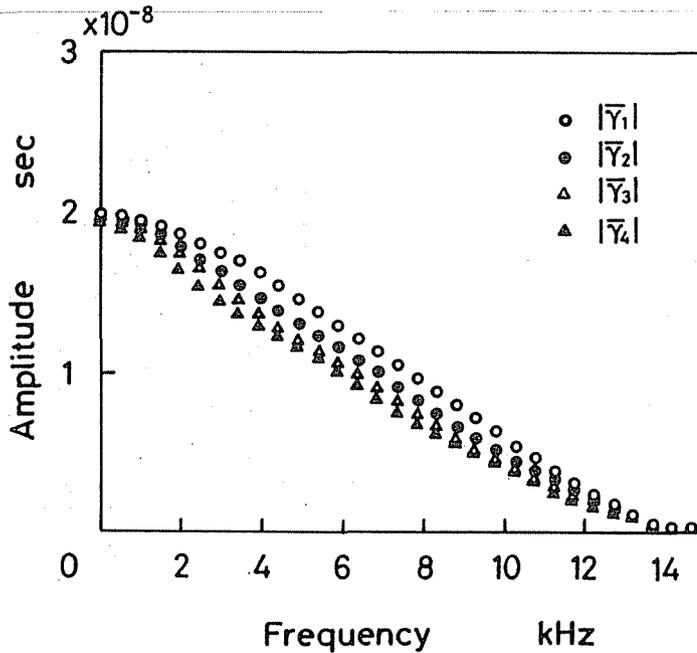


図4.20 せん断ひずみ波形の周波数スペクトル

図4.20に示す。周波数が0での各値はほとんど等しく、2 kHz を超える付近から減衰の程度が大きくなり始めている。このような傾向は、縦衝撃についての図4.11(a)，あるいは図4.16の結果と同様である。

ii) 粘弾性モデルの同定 クランプ長さが5～15cm,  $r_1(t)$  の最大値が900～3000  $\mu\text{m/m}$  の範囲内で種々の実験を行い、その結果の解析から単純せん断状態に対する複素コンプライアンスの実数部  $J'_1$ 、および虚数部  $J'_2$  を求め、図4.21に示す。プロットは種々の実験条件での平均値を示し、幅は $\pm 2 \times$ (標準偏差)を表している。なお、 $J'_1, J'_2$  のように( )'を付したのは、先の単軸状態に関するものと区別するためである。また、中空試料を用いた単軸特性に関する結果との対応を考慮して、周波数の範囲は図4.17と同じく、0～14 kHzとした。発生させるせん断ひずみ波の振幅を大きくすると、 $J'_2$  は若干低下するが、 $J'_1$  はほとんど変化しなかった。また、パルス幅を変化させても  $J'_1, J'_2$  両者とも有意な差は生じなかった。

$J'_1$  は 4 kHz 程度まで減少し、その後ほぼ一定となっている。一方、 $J'_2$  は 2.5kHz 付近で最大値をとり、その後減少している。このような  $J'_1, J'_2$  の周波数に対する傾向は、中実試料あるいは中空試料を用いた縦衝撃試験での結果とまったく同様であり、材料のせん断挙動に対しても適用すべき粘弾性モデルはやはり図4.22のような、3要素固体モデルであることがわかる。ただし図4.22のモデルは、せん断応力  $\tau_{ij} (i \neq j)$  と工学的せん断ひずみ  $\gamma_{ij} (=2\epsilon_{ij})$  との関係を表すものとしておく。また粘弾性定数には、 $G_1, G_2, \eta'_2$  の記号を用い、図4.14あるいは図4.18の単軸に関する記号と区別する。 $J'_1, J'_2$  の実験値を用いて、モデルの粘弾性定数を定めると図4.22に付記した値となった。 $G_1, G_2, \eta'_2$  の各値を、3要素固体モデルの  $J'_1, J'_2$  を与える式

$$\left. \begin{aligned} J'_1(\omega) &= \frac{1}{G_1} + \frac{G_2}{G_2^2 + (\omega \eta'_2)^2} \\ J'_2(\omega) &= \frac{\omega \eta'_2}{G_2^2 + (\omega \eta'_2)^2} \end{aligned} \right\} \quad (4.2)$$

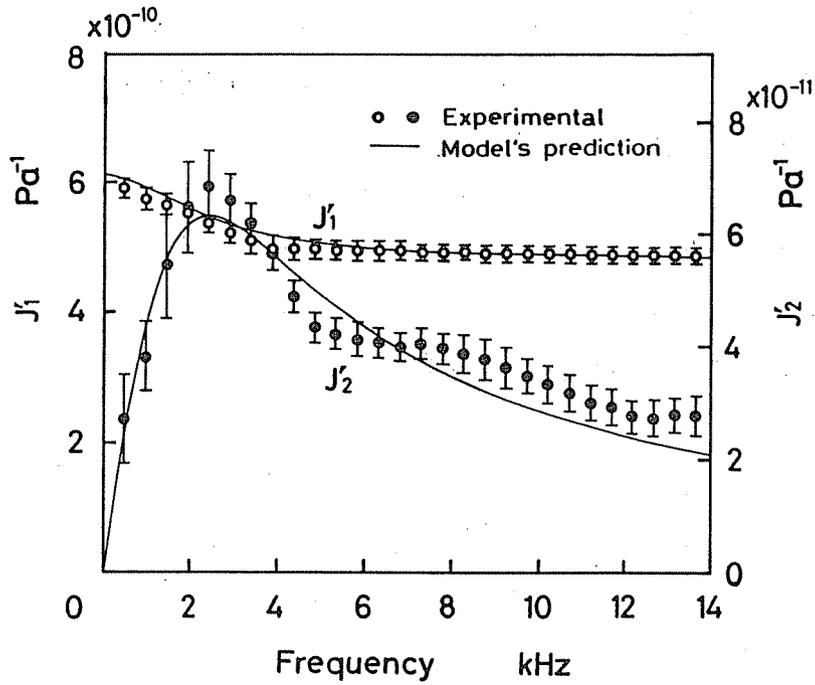


図 4.21 せん断状態に対する複素コンプライアンス

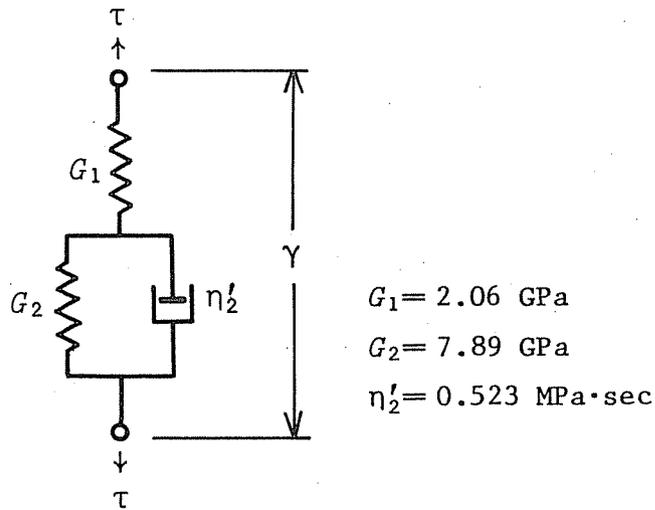


図 4.22 せん断状態に対する粘弾性モデル  
(3要素固体モデル)

に代入して計算した  $J'_1, J'_2$  のモデル予測値を, 図4.21中に実線で示す. 細部を除いた全体的傾向は, 同定した3要素固体モデルによって良く表されているものと思われる.

#### 4・5 高減衰合金への適用

機械や構造物の振動や騒音を低減する必要性から、高い強度と大きな減衰能を兼ね備える金属材料が研究され、近年その目的にかなうような高減衰能合金 (High Damping Alloy) が種々開発されている。<sup>(55)~(58)</sup> 本節では、すでに述べた PMMA 材の場合と同様に、縦衝撃の実験・解析から、2種類の高減衰能合金、および銅に関して、それぞれの粘弾性特性を明らかにするとともに粘弾性モデルの同定を行う。<sup>(59)(60)</sup>

##### 4・5・1 高減衰能合金試料と実験方法

実験に使用した高減衰能合金は、Mn-Cu合金とFe-Cr-Al合金の2種類である。それらの化学成分を表4.3に示す。杉本<sup>(56)(58)</sup>は、高減衰能合金を内部摩擦の機構から、i)複合型、ii)強磁性型、iii)転位型、iv)双晶型に分類している。この分類によれば、Mn-Cu合金はiv)双晶型に属し、Fe-Cr-Al合金はii)強磁性型に属する。試料にはこのほか、比較のため市販の純銅を用意した。

試料はいずれも直径12mm、長さ2mの丸棒である。Mn-Cu合金は850℃×2時間の溶体化処理の後、450℃×4時間の時効処理が施してある。Fe-Cr-Al合金は1000℃×1時間程度の焼鈍を行ったものである。一方銅は、未焼鈍のまま試験した。各試料の機械的性質、すなわち静的縦弾性係数  $E$ 、降伏応力  $\sigma_Y$ 、

表4.3 高減衰能合金の化学成分

(a) Mn-Cu合金		(b) Fe-Cr-Al合金	
Chemical composition	wt. %	Chemical composition	wt. %
Cu	35.00	Fe	84.0
Mn	54.94	Cr	12.0
Ni	1.72	Al	2.0
Al	4.25	Mn	1.0
Fe	4.31	Si	0.5
C	0.01		
Co	0.01		
Si	Tr.		

表 4.4 試料の機械的性質

Material	$E$ GPa	$\sigma_Y$ MPa	$\varepsilon_Y$ %	$\rho$ kg/m <sup>3</sup>
Mn-Cu	89.2	350	0.40	$7.09 \times 10^3$
Fe-Cr-Al	182.0	330	0.18	7.49
Cu	107.8	170	0.15	8.96

降伏ひずみ  $\varepsilon_Y$ 、および密度  $\rho$  を表 4.4 に示す。なお  $\sigma_Y$ 、 $\varepsilon_Y$  は比例限度の値を示したものである。

実験は 4.2 節の図 4.4 のような方法で行い、縦波の伝ばを 2 箇所 の測定点で観測した。測定点の間隔は、Mn-Cu 合金と Fe-Cr-Al 合金では 30cm とし、銅については減衰能が他の 2 つに比べて非常に小さいことを考慮して、90cm とした。ストライカには、直径 16mm、長さ 約 2 cm のアルミニウム片を使用した。PMMA 材の場合と同様の手順で実験結果を解析し、それぞれについて単軸引張り圧縮に対する複素コンプライアンスを求めた。

#### 4.5.2 実験・解析結果

##### (1) Mn-Cu 合金

図 4.23 に、Mn-Cu 合金試料の複素コンプライアンス  $J_1$ 、 $J_2$  の実験値をプロットで示す。 $J_1$  は周波数に対してほぼ一定であるが、 $J_2$  は周波数が増加するにしたがい、10kHz 付近で、いったん極小値となり、その後 30kHz 程度まで増加している。 $J_1$  と  $J_2$  がこのような傾向を示す粘弾性モデルとして、図 4.24 のような 4 要素流体モデルを考えることができる。このモデルの  $J_1$  と  $J_2$  の周波数に対する定性的傾向は、第 2 章の図 2.5 に示したようなものである。図 4.23 の実験値を図 2.5 のものと対応させてみると、30kHz 程度までは両者の傾向は類似していると考えてよい。しかし、それ以上の周波数域において実験値の方は、 $J_2$  が減少していく傾向であるのかかわらず、 $J_1$  はほとんど変化しておらず、モデルの傾向と異なっている。したがって、30kHz 以上の周波数域では、4 要素流体モデルによる近似は無理といえる。この原因としてまず、材料自体

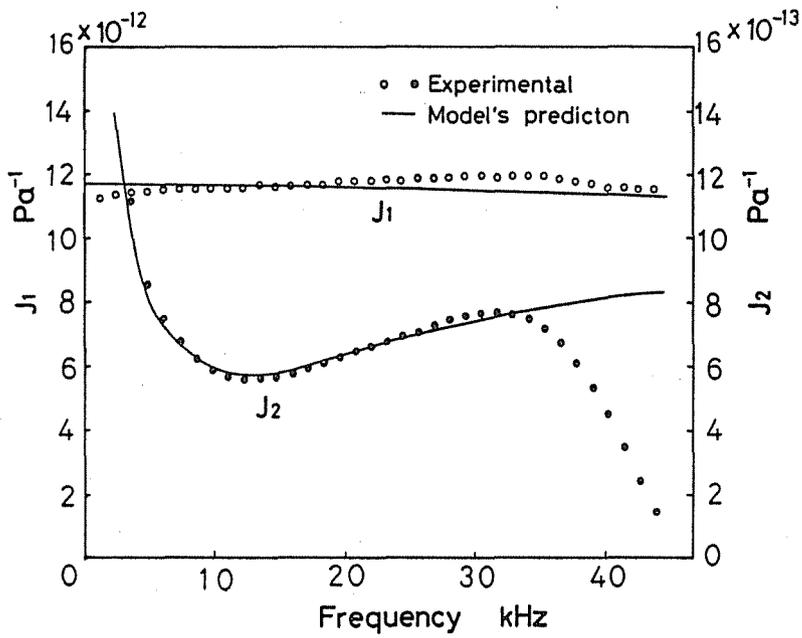


図 4.23 Mn-Cu合金の複素コンプライアンス

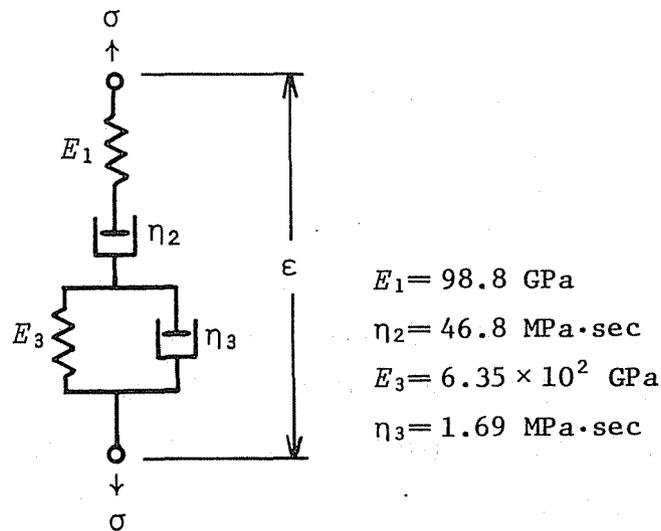


図 4.24 Mn-Cu合金に対する粘弾性モデル  
(4要素流体モデル)

が完全な線形粘弾性挙動を示していないことが考えられよう。また伝ばするひずみパルスにはもともと、30kHz以上の成分があまり含まれていなかったために生じた、実験的誤差も考えられる。

30kHz以下の周波数域においては、材料の挙動を4要素流体モデルで近似することは可能と思われ、この周波数域での $J_1, J_2$ の実験値から、各粘弾性定数 $E_1, \eta_2, E_3, \eta_3$ を決定すれば、図4.24に記した値となった。なお、値の決定に際しては、今まで使ってきた方法、すなわち3.3節で述べたBland-Lee法ではなく、これにやや改良を加えた方法を用いた。その理由は、Bland-Lee法では $J_1$ の周波数に対する変動が十分大きいことが不可欠な要件であり、図4.23のような $J_1$ がほぼ一定の場合には、正確な粘弾性定数の決定が困難であったからである。4要素流体モデルの $J_1$ と $J_2$ は次のように与えられる。

$$\left. \begin{aligned} J_1(\omega) &= \frac{1}{E_1} + \frac{E_3}{E_3^2 + (\omega \eta_3)^2} \\ J_2(\omega) &= \frac{1}{\omega \eta_2} + \frac{\omega \eta_3}{E_3^2 + (\omega \eta_3)^2} \end{aligned} \right\} \quad (4.3)$$

図4.24の粘弾性定数の各値を、式(4.3)に代入して計算したモデルによる予測を図4.23中に実線で示す。30kHz以下の周波数域では実験値と予測値はよく一致している。また同定されたモデルから計算される波頭伝ば速度は、 $\sqrt{E_1/\rho} = 3732\text{m/sec}$ となるが、これはひずみ波形の伝ばから観察した実際の値 $3800\text{m/sec}$ とほぼ等しく、モデルの妥当性を表している。

ストライカの衝突速度により、ひずみ波形の大きさを変えることができる。その際、 $J_2$ はほとんど変化しなかったのに対し、 $J_1$ の方はひずみ振幅の増加にしたがい、小さくなった。したがって $J_2/J_1$ で表される減衰能は、振幅の増加にともない大きくなることになる。

## (2) Fe-Cr-Al合金

図4.25に、Fe-Cr-Al合金の複素コンプライアンスを示す。周波数が15kHzまでの $J_1, J_2$ の実験値の傾向は、Mn-Cu合金と同様、4要素流体モデルで

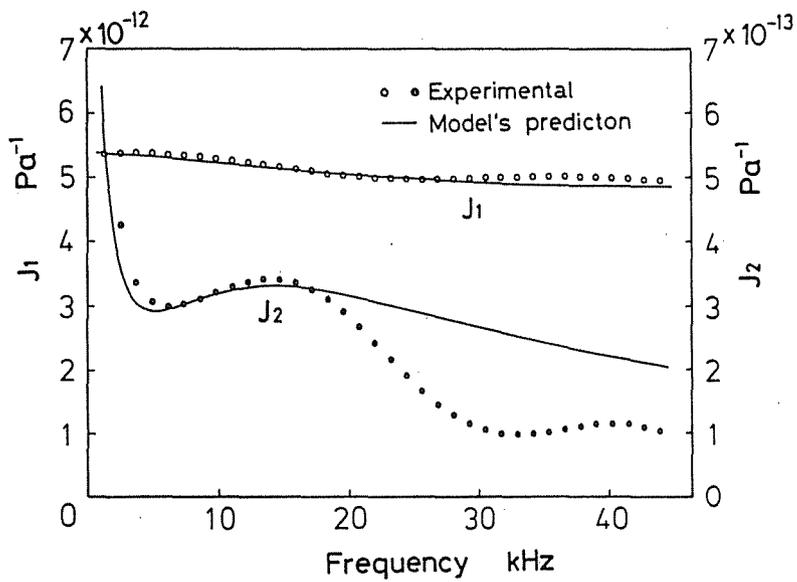


図 4.25 Fe-Cr-Al合金の複素コンプライアンス

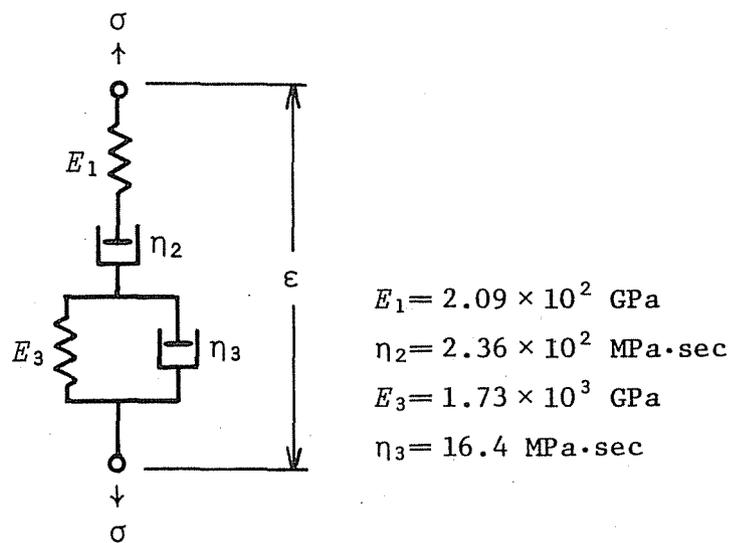


図 4.26 Fe-Cr-Al合金に対する粘弾性モデル  
(4要素流体モデル)

近似できることが推察される。この周波数範囲の実験値をもとに、粘弾性定数を定めると、図4.26に示す値となった。これらの値によって計算した $J_1$ 、 $J_2$ のモデル予測値を、図4.25に比較して示す。注目する0~15kHzの周波数域で、実験値は同定したモデルによって、よく表されている。

ひずみ振幅の増加につれて、 $J_1$ 、 $J_2$  両者とも小さくなり、その比  $J_2/J_1$  も各周波数に対して小さくなった。先に述べたように、Fe-Cr-Al合金の減衰機構は強磁性型であり、エネルギーの消散は磁区壁の非可逆移動によって行われる。もし高い応力が加わって、磁区壁の移動が飽和状態に達すれば、それ以上の磁区壁の移動が起こらず、減衰はほとんど増加しない。このような理由によって、減衰能を表す  $J_2/J_1$  は振幅の増加にしたがい、低下するものと考えられる。

### (3) 銅

Mn-Cu合金、Fe-Cr-Al合金のほかに、銅についても実験・解析を行い、複素コンプライアンスを求めた。それを図4.27に示す。周波数の増加にしたがい、 $J_1$  はほぼ一定値を示し、 $J_2$  は逆比例的に減少している。このような傾向は、図4.28に示したMaxwellモデルによって表される。Maxwellモデルの $J_1$ 、 $J_2$  はそれぞれ、次のように与えられる。

$$\left. \begin{aligned} J_1(\omega) &= \frac{1}{E} \\ J_2(\omega) &= \frac{1}{\omega \eta} \end{aligned} \right\} \quad (4.4)$$

したがって、 $E$  は  $J_1(\omega)$  の逆数として、また  $\eta$  は  $\omega J_2(\omega)$  の逆数として求められる。このようにして決定した粘弾性定数  $E$ 、 $\eta$  の値を図4.28に示す。

田中ら<sup>(69)</sup> は鋼を伝わる1次元縦波の、波頭の立上がり部分に及ぼす影響として、材料の粘性と横方向慣性の効果とを調べている。そして、ステップ波のような立上がりの急な高周波成分に対しては、粘性よりも横方向慣性の方がやや大きな影響をもつことを報告している。しかしながら、本研究の場合、実験で

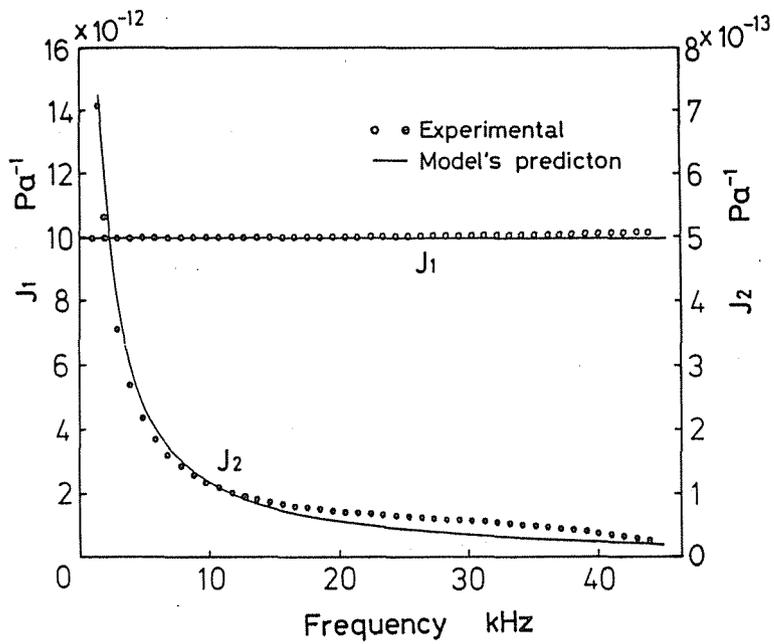


図 4.27 銅の複素コンプライアンス

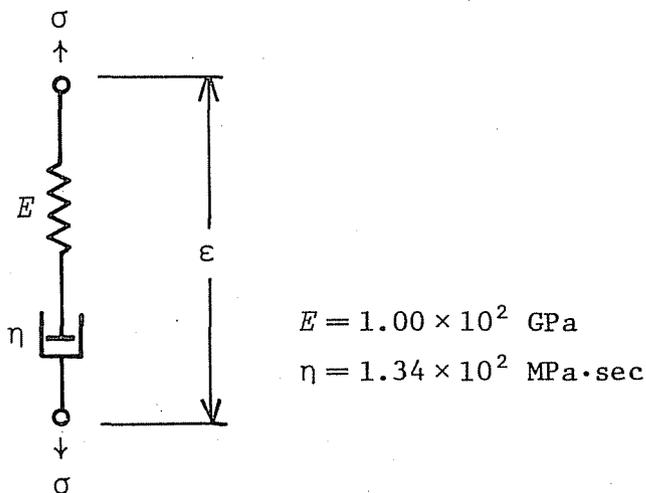


図 4.28 銅に対する粘弾性モデル  
(Maxwell流体モデル)

観測されたひずみ波形は、ステップ波のような急なものではなく、波形の周波数成分は 0~40kHz の範囲内のものである。この範囲内では横方向慣性がほとんど影響しない条件、 $a/\lambda < 0.1$  ( $a$  は棒の半径、 $\lambda$  は波長) が十分に満たされている。したがって図4.27の結果には、横方向慣性は影響しておらず、材料の粘弾性特性が正しく求められているものと思われる。

#### 4・6 小 括

本章では、波動伝ばのFourier周波数解析から材料の1次元粘弾性特性を同定する第3章の手法を、PMMA材および数種の金属材料に対して実際に適用した。以下に、本章で得られた主要な結論を述べておく。

(1) PMMA材の中実試料および中空試料を用いて、縦衝撃試験から同定した材料の単軸特性に関しては、複素コンプライアンスの実験的傾向が、0~14 kHz(またはそれ以上)の広い周波数範囲において、3要素固体モデルによって、よく近似される。したがって、PMMA材の単軸応力状態での動的挙動には3要素固体モデルを適用することができる。また、その場合のモデルの粘弾性定数を、複素コンプライアンスの実験値から定めた。

(2) PMMA材の中実試料を用いて、ねじり衝撃試験から求めたせん断特性についても、単軸特性の場合と同様に、動的挙動が3要素固体モデルによって表される。

(3) Mn-Cu合金、Fe-Cr-Al合金の2つの高減衰能合金、および銅の3種の金属材料について、縦衝撃試験から単軸特性を調べた。その結果、Mn-Cu合金に対しては30kHz以下、Fe-Cr-Al合金に対しては15kHz以下の限定された周波数範囲内において、4要素流体モデルが適用でき、一方銅は40kHz程度までの周波数範囲内で、Maxwell流体モデルが適用できることがわかった。また、複素コンプライアンス実験値から、それぞれのモデルの粘弾性定数を決定した。

## 第5章 3次元粘弾性構成方程式への一般化

### 5.1 はじめに

粘弾性材料の力学特性を調べるための研究は、第1章で述べたように、注目するひずみ速度の大きさに応じて、準静的試験、振動試験、あるいは衝撃試験などを通じた、種々の実験的解析手法が提案されており、実用的にも有用な結果が得られている。しかしながら、1次元的な意味での粘弾性特性を研究したものがほとんどであり、形状や荷重条件が複雑な場合の解析に必要となる3次元的な特性を求めた例は、極めて少ないのが現状である。<sup>(1)</sup> そのため、2次元もしくは3次元の応力解析を行う際には、非圧縮、<sup>(25)</sup>体積弾性率が一定、<sup>(70)</sup>ポアソン比が一定<sup>(71)(72)</sup>などの仮定を設けているが、その根拠は必ずしも明確とは言えないようである。

衝撃試験から粘弾性特性を求めた従来の研究においては、縦衝撃試験によって単軸引張り圧縮に関する材料特性を同定したものがほとんどである。しかし通常、材料は体積粘弾性とせん断粘弾性とを有しており、縦衝撃試験のみではこの両者のいずれについても正確に測定することはできない。一般に等方弾性体においては、2つの材料定数（例えば、縦弾性係数とポアソン比）が求まれば一般化された Hookeの法則、すなわち3次元の構成方程式が定まる。この事情は等方の粘弾性体においてもまったく同様であり、2つの独立な粘弾性特性が同定されれば、3次元の構成方程式を定式化することができる。

第4章ではPMMA材の中空試料について、縦衝撃およびねじり衝撃の実験・解析から、2つの独立な粘弾性特性としてそれぞれ、単軸特性、せん断特性が求められている。本章においては、3次元粘弾性理論の要点を述べた後、単軸およびせん断の2つの特性を組み合わせ、弾性-粘弾性間の対応関係に基づき、材料の粘弾性特性を3次元的に評価<sup>(54)</sup>すると同時に、3次元粘弾性構成方程式の定式化を行う。

## 5・2 3次元粘弾性法則

粘弾性体内において応力成分が2つ以上存在するときには、構成方程式の3次元形式が必要である。これは弾性体で言えば、一般化された Hookeの法則に相当するものであり、第2章で述べたような1次元の構成方程式や粘弾性法則を特殊な場合として含むものでなければならない。以下では等方線形粘弾性体の3次元構成方程式<sup>(73)~(76)</sup>について考える。

### 5・2・1 体積粘弾性とせん断粘弾性

表現を簡略化するためにテンソル記法を用いる。一般に9個(対称性を考えれば6個)の成分からなる応力テンソル  $\sigma_{ij}$ 、およびひずみテンソル  $\varepsilon_{ij}$ は、次のように体積(静水圧)成分とせん断(偏差)成分とに分けることができる。

$$\sigma_{ij} = s \delta_{ij} + s_{ij} \quad , \quad s = \frac{1}{3} \sigma_{kk} \quad (5.1)$$

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{3} e \delta_{ij} + e_{ij} \quad , \quad e = \varepsilon_{kk} \quad (5.2)$$

ここで  $\delta_{ij}$  はクロネッカ・デルタを示し、 $\delta_{ij}=1 (i=j)$ 、 $\delta_{ij}=0 (i \neq j)$  である。 $s$  は静水圧応力  $(\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33})/3$ 、 $e$  は体積膨張率  $\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33}$  であり、式(5.1)、(5.2)の右辺第1項めが、応力およびひずみの体積成分を表していることは明らかである。 $s_{ij}$  は偏差応力テンソル、 $e_{ij}$  は偏差ひずみテンソルであり、それぞれさらに5つのせん断応力系、せん断ひずみ系に分解することができる<sup>(73)</sup>第2項めはせん断成分を表す項である。

もし、粘弾性体が等方性ならば、静水圧応力  $s$  は膨張  $e$  を生じさせるが、形状変化(つまりせん断変形)  $e_{ij}$  は生じさせず、 $s$  と  $e$  との関係は2・3節式(2.3)のように、

$$P''(D)s = Q''(D)e \quad (5.3)$$

となるものと考えられる。一方、偏差応力  $s_{ij}$  の1つはそれに対応する偏差ひずみ  $e_{ij}$  の1つと関係づけられるが、材料の等方性を考慮するならば、 $s_{ij}$  と  $e_{ij}$  の対を結び付ける関係式はすべて同等でなければならない。このことを、

$s_{ij}$ と $e_{ij}$ との関係式として、あるいはせん断応力 $\tau_{ij}(=s_{ij}, i \neq j)$ と工学的せん断ひずみ $\gamma_{ij}(=2e_{ij}, i \neq j)$ との関係式として表せば、次のようになる。

$$P'(D)s_{ij}=2Q'(D)e_{ij} \quad (5.4)$$

$$\text{あるいは} \quad P'(D)\tau_{ij}=Q'(D)\gamma_{ij} \quad (5.4)'$$

このように、材料の粘弾性は、式(5.3)で示される体積粘弾性と、式(5.4)で示されるせん断粘弾性とに分けることができる。式(5.3), (5.4)が等方線形粘弾性体の3次元構成方程式の一般形式である。

### 5・2・2 単軸応力状態<sup>(73)</sup>

単軸応力状態を3次元応力状態の特殊な場合の1つと考えて、式(5.3), (5.4)の適用を行えば、2・3節式(2.3)の形 $P\sigma=Q\varepsilon$ に戻るはずであり、3種の演算子ペア $(P, Q)$ ,  $(P', Q')$ ,  $(P'', Q'')$ の関係も得られるはずである。

$x$ 方向を軸とする単軸応力のような場合には、ただ1つの応力成分 $\sigma_x$ しかないから静水圧応力は、

$$s = \sigma_x/3$$

となる。このとき、偏差応力には次のような成分がある。

$$s_x = 2\sigma_x/3, \quad s_y = s_z = -\sigma_x/3$$

一方、ひずみには3つの成分、すなわち軸方向ひずみ $\varepsilon_x$ と、等しい2つの横方向ひずみ $\varepsilon_y = \varepsilon_z$ が生じる。したがって膨張は、

$$e = \varepsilon_x + 2\varepsilon_y$$

となり、偏差ひずみは、

$$e_x = 2(\varepsilon_x - \varepsilon_y)/3, \quad e_y = e_z = -(\varepsilon_x - \varepsilon_y)/3$$

となる。 $s$ および $e$ を式(5.3)に代入し、定数項を外に出して整理すれば、

$$P''\sigma_x = 3Q''\varepsilon_x + 6Q''\varepsilon_y \quad (5.5)$$

を得る。一方、偏差応力、偏差ひずみを式(5.4)に代入すれば、すべて

$$P'\sigma_x = 2(Q'\varepsilon_x - Q'\varepsilon_y) \quad (5.6)$$

の形となる。

ここで、式(5.5)に演算子  $Q'$  を施したものと、式(5.6)に  $3Q''$  を施したものの和をとり、演算子が線形で交換可能であることを考慮すれば、

$$(P''Q' + 3P'Q'')\sigma_x = 9Q'Q''\varepsilon_x \quad (5.7)$$

が得られる。これを単軸応力状態についての構成方程式

$$P\sigma_x = Q\varepsilon_x \quad (5.8)$$

と比較すれば、3種の演算子ペアの間には、

$$\left. \begin{aligned} P &= P''Q' + 3P'Q'' \\ Q &= 9Q'Q'' \end{aligned} \right\} \quad (5.9)$$

の関係があることがわかる。

また、式(5.5)に演算子  $P'$  を施したもののから、式(5.6)に  $P''$  を施したものを差し引けば、 $\sigma_x$  が消去され、

$$2(3P'Q'' + P''Q')\varepsilon_y = -(3P'Q'' - 2P''Q')\varepsilon_x \quad (5.10)$$

となり、軸方向ひずみ  $\varepsilon_x$  と横方向ひずみ  $\varepsilon_y$  との関係を表した式が求まる。

### 5・2・3 対応関係

式(5.3), (5.4)は形式的に次のように表すことができる。

$$\frac{s}{e} = Q''/P'', \quad \frac{\tau_{ij}}{\gamma_{ij}} = Q'/P'$$

両式の右辺はそれぞれ、弾性体における体積弾性係数  $K$ 、横弾性係数  $G$  に対応しているものと考えられる。このことを

$$K \leftrightarrow Q''/P'', \quad G \leftrightarrow Q'/P'$$

のように書くものとする。式(5.7), (5.10)も同様に

$$\frac{\sigma_x}{\varepsilon_x} = \frac{9(Q''/P'')(Q'/P')}{3(Q''/P'') + (Q'/P')} \quad (5.11)$$

$$\frac{\varepsilon_y}{\varepsilon_x} = \frac{3(Q''/P'') - 2(Q'/P')}{2\{3(Q''/P'') + (Q'/P')\}} \quad (5.12)$$

のように表せば、それぞれの右辺は縦弾性係数  $E$ 、ポアソン比  $\nu$  に対応してい

る。これを、 $K$ と $G$ から $E$ と $\nu$ を与える、弾性体の材料定数間の公式

$$E = \frac{9KG}{3K+G} \quad (5.13)$$

$$\nu = \frac{3K-2G}{2(3K+G)} \quad (5.14)$$

と比較すれば、 $K \leftrightarrow Q''/P''$ ,  $G \leftrightarrow Q'/P'$  の対応のもとで、まったく同形であることがわかる。このように弾性体の材料定数と粘弾性体の演算子ペアにおいて、

$$E \leftrightarrow Q/P, \quad G \leftrightarrow Q'/P', \quad K \leftrightarrow Q''/P''$$

のような対応を考えるならば、構成方程式や材料定数(材料特性)間の関係式に関して、弾性体と粘弾性体の間で、まったく同形の式が成り立つ。したがって、弾性体において独立な材料定数が2つであるように、粘弾性体においても演算子ペアの独立なものは2つとなる。

この弾性-粘弾性間の対応関係は、周波数領域においてさらに簡明に記述することができる。なぜならば、演算子ペアの比  $Q/P$ ,  $Q'/P'$ ,  $Q''/P''$  内の時間微分  $D = d/dt$  が  $i\omega$  で置き換わり、それぞれ

$$\bar{E}(\omega) = \bar{E}_1(\omega) + i\bar{E}_2(\omega) = Q(i\omega)/P(i\omega) \quad (5.15)$$

$$\bar{G}(\omega) = \bar{G}_1(\omega) + i\bar{G}_2(\omega) = Q'(i\omega)/P'(i\omega) \quad (5.16)$$

$$\bar{K}(\omega) = \bar{K}_1(\omega) + i\bar{K}_2(\omega) = Q''(i\omega)/P''(i\omega) \quad (5.17)$$

のように複素縦弾性係数  $\bar{E}(\omega)$ 、複素横弾性係数  $\bar{G}(\omega)$ 、および複素体積弾性係数  $\bar{K}(\omega)$  などの単一量となるからである。式(5.3), (5.4), (5.8), (5.10)のそれぞれに Fourier 変換を適用し、それらに相当する弾性体の式との対応を示せば、次のようになる。ただし、テンソル表記の総和はとらないものとする。

【弾性体】

【粘弾性体】

単軸引張り圧縮:	$\sigma_{zz}(t) = E \varepsilon_{zz}(t)$	$\leftrightarrow$	$\bar{\sigma}_{zz}(\omega) = \bar{E}(\omega) \bar{\varepsilon}_{zz}(\omega)$
	$\varepsilon_{jj}(t) = -\nu \varepsilon_{zz}(t)$	$\leftrightarrow$	$\bar{\varepsilon}_{jj}(\omega) = -\bar{\nu}(\omega) \bar{\varepsilon}_{zz}(\omega)$
せん断成分:	$\tau_{ij}(t) = G \gamma_{ij}(t)$	$\leftrightarrow$	$\bar{\tau}_{ij}(\omega) = \bar{G}(\omega) \bar{\gamma}_{ij}(\omega)$
体積成分:	$s(t) = K e(t)$	$\leftrightarrow$	$\bar{s}(\omega) = \bar{K}(\omega) \bar{e}(\omega)$

すなわち、弾性体では時間領域で成り立っていた応力-ひずみ関係式が、粘弾性体に対しても形を変えずに周波数領域においてそのまま成立するのである。ここで、 $\bar{\nu}(\omega)$  は粘弾性体の複素ポアソン比であり、

$$\bar{\nu}(\omega) = \bar{\nu}_1(\omega) + i \bar{\nu}_2(\omega) \quad (5.18)$$

と表されるものである。これは式(5.12)右辺において、演算子  $Q/P'$ ,  $Q''/P''$  中の時間微分  $D$  を  $i\omega$  で置き変えた量である。材料定数(材料特性)間の関係式についても、同様の対応があるのは、もはや自明であろう。なお  $\bar{E}$ ,  $\bar{G}$ ,  $\bar{\nu}$ , および  $\bar{K}$  に付した( $\bar{\quad}$ )の記号は、周波数領域での量ではあるが、Fourier変換を意味したものではないことを断わっておく。

### 5・3 粘弾性特性の3次元評価

PMMA材の中空試料については第4章において、単軸状態に対する複素コンプライアンス  $J(\omega) = J_1(\omega) - i J_2(\omega)$ , およびせん断状態に対する複素コンプライアンス  $J'(\omega) = J'_1(\omega) - i J'_2(\omega)$  が、2つの独立な粘弾性特性として、それぞれ図4.17, 図4.21のようにすでに求められている。したがって、材料の粘弾性特性を3次元的に評価することが可能である。

弾性体の材料定数には様々なものがある。通常よく用いられ、かつ重要であるのは、縦弾性係数  $E$ , 横弾性係数  $G$ , ポアソン比  $\nu$ , および体積弾性係数  $K$  の4個である。粘弾性材料(PMMA材)に関しても同様の考えのもとに、これら4個に相当する粘弾性特性を評価することにする。

まず、複素縦弾性係数  $\bar{E}(\omega)$  と複素横弾性係数  $\bar{G}(\omega)$  の両者は、

$$\bar{E}(\omega) = \frac{1}{J(\omega)} \quad (5.19)$$

$$\bar{G}(\omega) = \frac{1}{J'(\omega)} \quad (5.20)$$

のように、それぞれに対応する複素コンプライアンスの逆数に等しいから、この2つは  $J(\omega)$  および  $J'(\omega)$  から簡単に求めることができる。一方、弾性

体において $\nu$ および $K$ は、 $E$ と $G$ を用いて、

$$\nu = \frac{E}{2G} - 1, \quad K = \frac{E \cdot G}{3(3G - E)}$$

のように表わされる。対応関係によれば、粘弾性体においてもやはり同じ形の式が成り立ち、 $\bar{\nu}(\omega)$  および  $\bar{K}(\omega)$  はそれぞれ、 $\bar{E}(\omega)$  と  $\bar{G}(\omega)$ 、あるいは  $J(\omega)$  と  $J'(\omega)$  によって、

$$\bar{\nu}(\omega) = \frac{\bar{E}(\omega)}{2\bar{G}(\omega)} - 1 = \frac{J'(\omega)}{2J(\omega)} - 1 \quad (5.21)$$

$$\bar{K}(\omega) = \frac{\bar{E}(\omega) \cdot \bar{G}(\omega)}{3\{3\bar{G}(\omega) - \bar{E}(\omega)\}} = \frac{1}{3\{3J(\omega) - J'(\omega)\}} \quad (5.22)$$

のように与えられる。

式(5.19)～式(5.22)に基づいて、図4.17、図4.21にそれぞれ示した $J(\omega)$ と $J'(\omega)$ とから、4種の粘弾性特性 $\bar{E}(\omega)$ 、 $\bar{G}(\omega)$ 、 $\bar{\nu}(\omega)$ 、 $\bar{K}(\omega)$ について求めた結果を次に述べる。

### 5・3・1 複素縦弾性係数と複素横弾性係数

複素縦弾性係数 $\bar{E}$ の実数部 $\bar{E}_1$ 、および虚数部 $\bar{E}_2$ を図5.1に示す。プロットは、図4.17の単軸状態に対する複素コンプライアンス $J$ の実数部 $J_1$ 、虚数部 $J_2$ の実験値を用いて、式(5.19)によって算出したものである。実線は、図4.18の粘弾性モデルによる予測値を示したものである。図4.17において $J_1$ が4 kHz付近まで減少しているのに対し、図5.1の $\bar{E}_1$ は4 kHz付近まで増加している。一方、 $\bar{E}_2$ の方は $J_2$ と同様の傾向である。これは図4.17において、 $J_1$ が $J_2$ よりかなり大きく、 $J_1 \gg J_2$ であるため、式(5.19)が近似的に $\bar{E}_1 \doteq 1/J_1$ 、 $\bar{E}_2 \doteq J_2/J_1^2$ となるためである。なお、図4.18において同定した粘弾性モデルの瞬間弾性項は $E_1 = 5.56 \text{ GPa}$ であり、図5.1の $\bar{E}_1$ の高周波域での値にはほぼ一致している。

同様の手順で求めた複素横弾性係数 $\bar{G}$ の実数部 $\bar{G}_1$ 、虚数部 $\bar{G}_2$ を図5.2に示す。 $\bar{G}_1$ 、 $\bar{G}_2$ を図4.21のせん断に対する複素コンプライアンス $J'_1$ 、 $J'_2$ と比

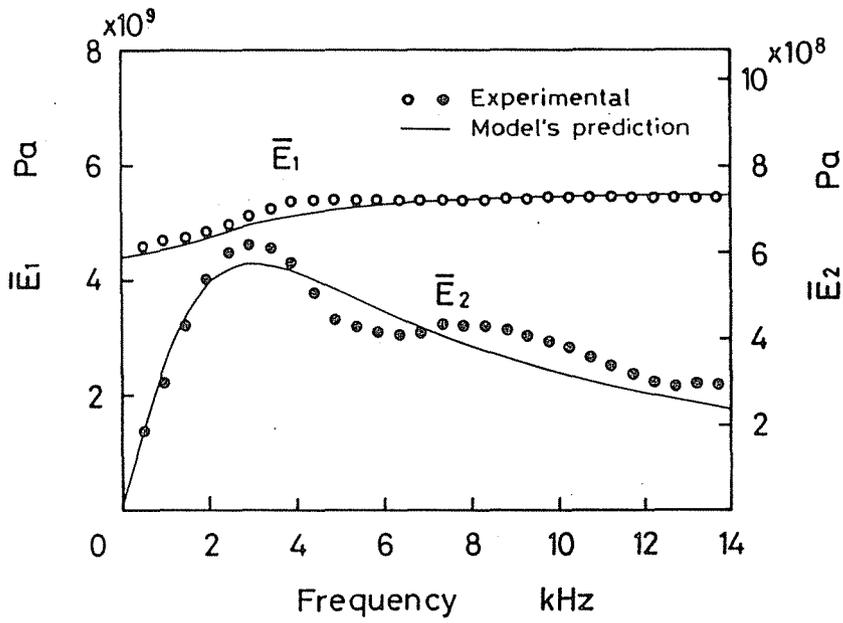


图 5.1 複素縱彈性係數

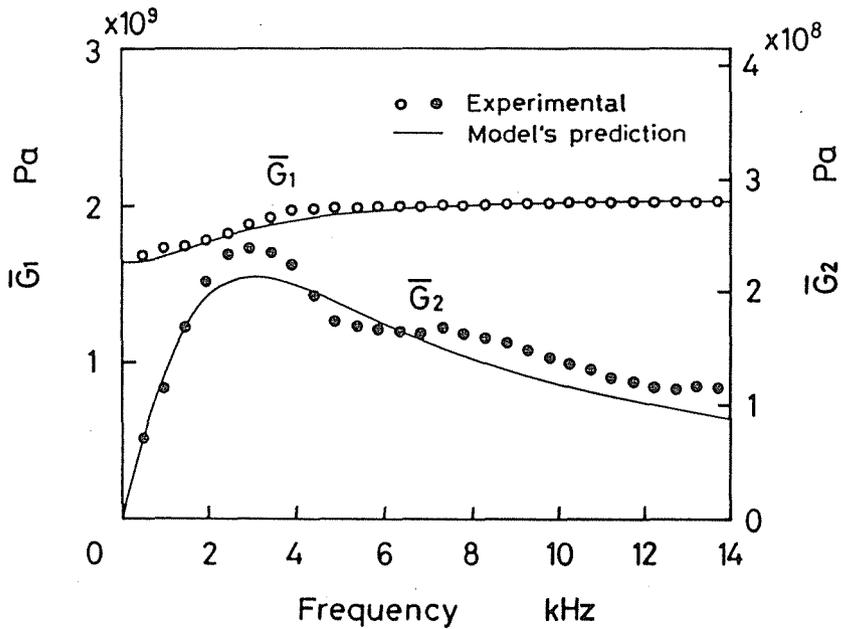


图 5.2 複素橫彈性係數

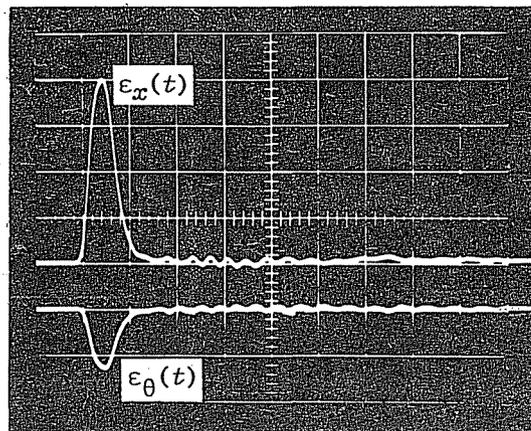
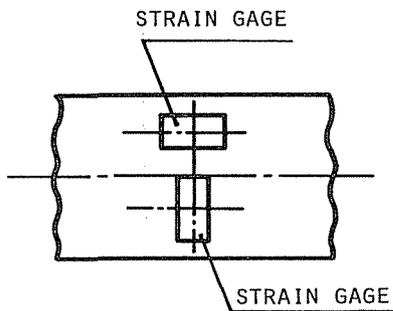
較すれば、先の  $\bar{E}_1, \bar{E}_2$  と  $J_1, J_2$  との比較と、同様のことが言える。また、図4.22で同定したせん断に対する粘弾性モデルの瞬間弾性項は、 $G_1 = 2.06\text{GPa}$  であり、この場合も  $\bar{G}_1$  の高周波域での値にほぼ等しい。

なお、図4.17と図4.21、あるいは図5.1と図5.2において、単軸特性とせん断特性の両者の傾向が非常に良く似ている理由は、次に述べる複素ポアソン比に関する結果によって明らかになる。

### 5・3・2 複素ポアソン比

複素ポアソン比を求めるには、式(5.21)の対応関係を利用する方法と、次のような縦衝撃試験から直接測定する方法の2つが考えられる。縦衝撃試験において、図5.3(a)のように同一箇所軸方向と周方向にひずみゲージを貼り、軸方向ひずみ  $\varepsilon_x(t)$  と周方向ひずみ  $\varepsilon_\theta(t)$  を測定すれば、図5.3(b)のような結果となる。正負の逆転を除けば両波形の位相はほぼ等しく、相似形となっていることがわかる。図5.3(b)より、ポアソン比を周波数の関数として求めるには、 $\varepsilon_x(t)$  および  $\varepsilon_\theta(t)$  のFourier変換  $\bar{\varepsilon}_x(\omega)$ 、 $\bar{\varepsilon}_\theta(\omega)$  をそれぞれ図5.3(c)のように求め、その比  $|\bar{\varepsilon}_\theta(\omega)/\bar{\varepsilon}_x(\omega)|$  を計算すればよい。このようにして求めたポアソン比の直接測定値を、図5.4に△印プロットで示す。なお、試料の平均半径  $a$  と、図5.3(c)の最高周波数値(14kHz)での波長  $\lambda$  との比は  $a/\lambda \doteq 0.04$  程度であって、縦波に及ぼす横方向慣性(幾何分散)の影響を無視するのに十分小さい値となっている(第7章参照)。一方、図4.17, 図4.21にそれぞれ示した  $J$  および  $J'$  の実験値を用いて、式(5.21)の対応関係に基づいて求めた複素ポアソン比  $\bar{\nu}$  の、実数部  $\bar{\nu}_1$  および虚数部  $\bar{\nu}_2$  を、図5.4に○印プロットで示す。

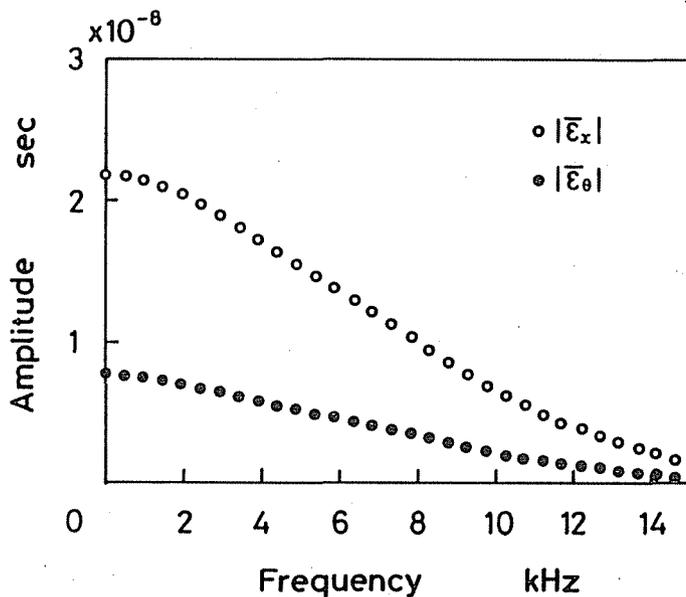
図5.4において、実数部  $\bar{\nu}_1$  は、式(5.21)の対応関係に基づく値と直接測定値とがほぼ等しく一定であり、その値は  $\bar{\nu}_1 \doteq 0.35$  程度となっている。一方、虚数部  $\bar{\nu}_2$  は、すべての周波数域においてほぼ0とみなすことができる。したがって、複素ポアソン比は一定の実数として扱えるものと考えられる。 $\bar{\nu} \doteq 0.35$  とおき、 $\bar{E} = 1/J$  および  $\bar{G} = 1/J'$  に注意して式(5.21)を変形すれば、 $\bar{E} \doteq 2.7 \cdot \bar{G}$  (あるいは  $J' \doteq 2.7 \cdot J$ ) となる。すなわち、単軸およびせん断両者についての複



V. scale:  $517 \mu\text{m/m/div.}$   
H. scale:  $100 \mu\text{sec/div.}$

(a) ひずみゲージの貼り方

(b) 軸方向ひずみと周方向ひずみの記録



(c) 軸方向ひずみと周方向ひずみの周波数スペクトル

図 5.3 ポアソン比の直接測定

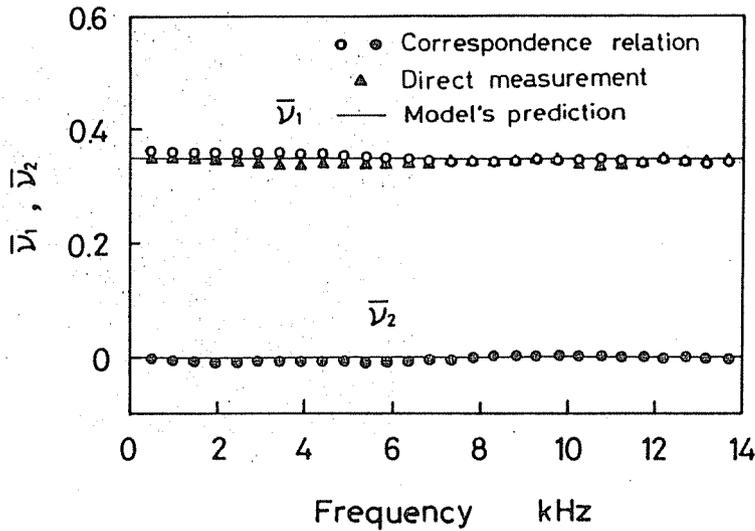


図5.4 複素ポアソン比

素弾性係数（あるいは複素コンプライアンス）は、単に実数の定数を比例定数とした比例関係にあることがわかる。  $\bar{E}$  と  $\bar{G}$  を示した図5.1と図5.2，あるいは  $J$  と  $J'$  を示した図4.17と図4.21が，非常によく似た傾向となっているのはこのためである。なお，図4.18および図4.22に示した単軸，せん断の両者に対する粘弾性モデルの各定数は，図5.3において  $\bar{\nu}$  のモデル予測値が一定の実数となるように，あらかじめ配慮して定めておいたものである。  $\bar{\nu}$  のモデル値が一定の実数となる条件は，式(4.1)と式(4.2)，および式(5.21)から定まり，単軸に関する粘弾性定数のそれぞれは，対応するせん断の粘弾性定数の  $2(1+\bar{\nu}) \doteq 2.7$  倍とすればよい。なお動的負荷状態において，ポアソン比は0.35程度の一定の実数とはなるものの，静的な場合の値 0.365（4.1節 表4.1参照）に比べ，やや小さい値となるようである。

### 5.3.3 複素体積弾性係数

式(5.22)を利用して，  $J$  および  $J'$  の実験値から求めた複素体積弾性係数  $\bar{K}$  をプロットで図5.5に示す。実線は図4.18，図4.22の粘弾性モデルからの予測値で

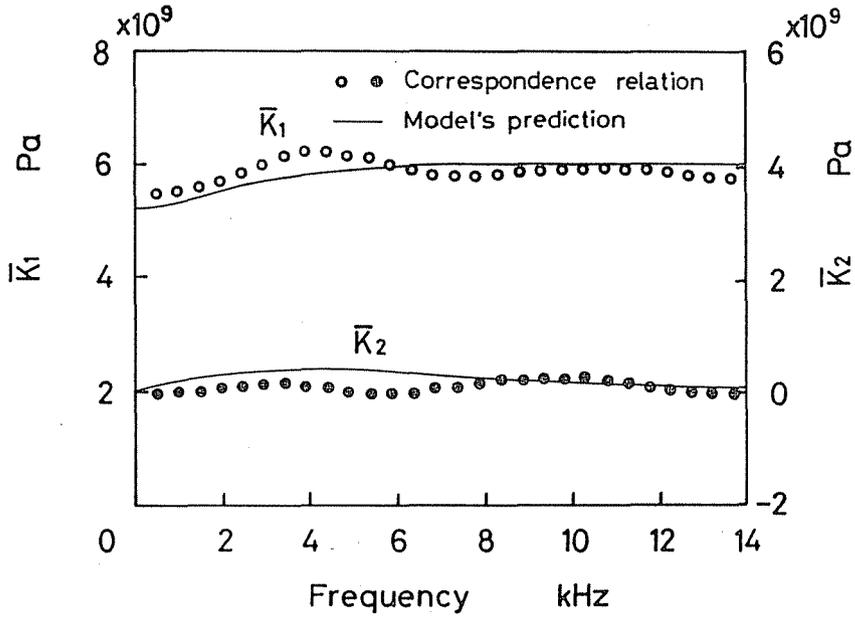


図 5.5 複素体積弾性係数

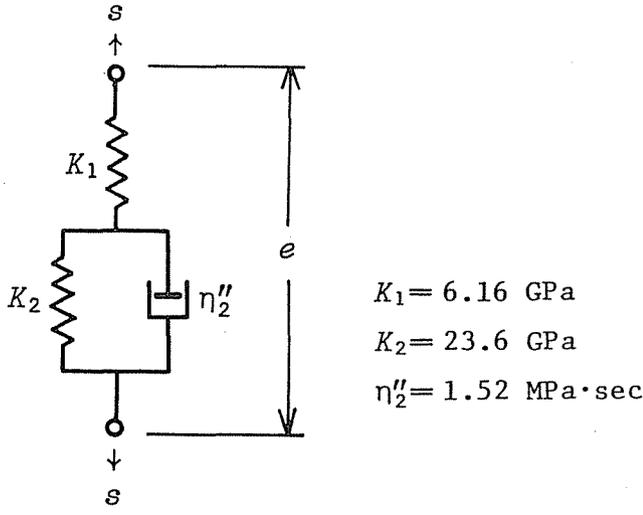


図 5.6 体積成分に対する粘弾性モデル  
(3要素固体モデル)

である。  $\bar{K}_1, \bar{K}_2$  の実験値はいずれも、周波数に対してやや変動を示しているが、  $\bar{K}_1$  は近似的に一定値、  $\bar{K}_2$  はほぼ 0 とみなすことができる。したがって複素体積弾性係数も、近似的には一定の実数として扱うことができるものと考えられる。

モデルの予測値に関して考察すれば、次のようなことが言える。式(5.21)において  $\bar{\nu} \doteq 0.35$  のように一定の実数としたものを、式(5.22)に代入すれば、  $\bar{K} \doteq 1.2 \cdot \bar{E}$  となる。すなわち、  $\bar{E}$  の予測値が一定の実数でない限り、  $\bar{K}$  の予測値も一定の実数とはなり得ない。したがって、  $\bar{\nu}$  および  $\bar{K}$  の両者が、同時に一定の実数となるようなモデル化は理論的に不可能であり、  $\bar{K}$  のモデル予測値が図5.6のような3要素固体モデルとしての傾向となるのは、避けられないことである。図5.5の実験値に対して、これを一定の実数として近似するのも1つの考えではあるが、この方法では  $\bar{\nu}$  を一定の実数とすることはできない。もし、  $\bar{\nu}$  と  $\bar{K}$  について両者とも一定の実数として近似すれば、3次元粘弾性の理論上、矛盾が生じることになる。粘弾性体の3次元動的応力解析においては、  $\bar{\nu}$  あるいは  $\bar{K}$  を一定の実数とする仮定を設けることが多いが、図5.4と図5.5を比較して判断すれば、PMMA材の場合にはポアソン比の方を一定の実数とするのが、より妥当な仮定と思われる。

PMMA材の粘弾性的性質を、式(5.1)、(5.2)のように体積成分とせん断成分に分けて考え、図5.5(体積成分)と図5.2(せん断成分)とを比較すれば、せん断成分の特徴の方がはるかに顕著であることがわかる。したがって、粘弾性的性質は、主としてせん断成分によって支配されており、体積成分はほぼ弾性的であると言うことができる。

#### 5・4 3次元粘弾性構成方程式の定式化

等方弾性体の3次元構成方程式(一般化されたHookeの法則)は、独立な2つの弾性定数を用いて記述することができる。この事情は、等方の粘弾性体においてもまったく同様である。対応関係を利用して、弾性体の構成方程式中に

現われる2つの弾性定数を、それぞれに対応する微分演算子のペアに置き換えれば、粘弾性体の3次元構成方程式が得られる。PMMA材については前節において、単軸成分、せん断成分、ポアソン比、および体積成分の4種類の粘弾性特性が求められている。構成方程式の定式化にあたっては、これら4種類のなかの2つを、独立なものとして選び出せばよい。ポアソン比は一定の実数でよく近似されることがすでにわかっているので、これをその1つに選ぶのが、まず簡単である。残る1つには単軸成分の微分演算子ペアを選ぶのが、実用的意味から最も有用と思われる。このような理由からここでは、単軸に対する微分演算子ペア  $P(D)$  および  $Q(D)$  と、ポアソン比  $\nu$  とを用いて、PMMA材の3次元粘弾性構成方程式の定式化を行う。なお、複素ポアソン比は一定の実数であったので、その実数部  $\bar{\nu}_1$  を単に  $\nu$  のように書く。また、簡略化のためテンソル表記を用いることにする。

等方弾性体の3次元構成方程式を、縦弾性係数  $E$  とポアソン比  $\nu$  を使って書けば、

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1+\nu}{E} \sigma_{ij} - \frac{\nu}{E} \delta_{ij} \sigma_{kk} \quad (5.23)$$

となる。あるいは、これを  $\sigma_{ij}$  に関して解いたもの、すなわち、

$$\sigma_{ij} = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} \delta_{ij} \varepsilon_{kk} + \frac{E}{1+\nu} \varepsilon_{ij} \quad (5.24)$$

を用いてもよい。粘弾性体の単軸引張り圧縮の構成方程式  $P(D)\sigma = Q(D)\varepsilon$  における微分演算子ペアの比  $Q(D)/P(D)$  は、縦弾性係数  $E$  と

$$E \leftrightarrow Q(D)/P(D)$$

のように対応している。これを式(5.23)、(5.24)に用いれば、それぞれから

$$Q(D)\varepsilon_{ij} = (1+\nu)P(D)\sigma_{ij} - \nu \delta_{ij} P(D)\sigma_{kk} \quad (5.25)$$

$$P(D)\sigma_{ij} = \frac{\nu \delta_{ij}}{(1+\nu)(1-2\nu)} Q(D)\varepsilon_{kk} + \frac{1}{1+\nu} Q(D)\varepsilon_{ij} \quad (5.26)$$

が得られる。PMMA材のような3要素固体モデルの場合、 $P(D)$ 、 $Q(D)$  は、

$$\left. \begin{aligned} P(D) &= E_1 + E_2 + \eta_2 D \\ Q(D) &= E_1 E_2 + E_1 \eta_2 D \end{aligned} \right\} \quad (5.27)$$

と与えられる(第2章 図2.3参照). なお, 粘弾性定数  $E_1, E_2, \eta_2$  の各値, および  $\nu$  の値には, それぞれ図4.18, 図5.4を参照して,

$$E_1 = 5.56 \text{ GPa}, \quad E_2 = 21.3 \text{ GPa}$$

$$\eta_2 = 1.41 \text{ MPa} \cdot \text{sec}, \quad \nu = 0.35$$

を採用すればよい. 式(5.25), あるいは式(5.26)が, PMMA材に対する3次元粘弾性構成方程式の一般的形式である.

ここで, いくつかの特殊な場合について考えてみる. まず, 単軸応力状態を仮定し, たとえば  $\sigma_{22} = \sigma_{33} = 0$  の条件を式(5.25)に用いれば,

$$P(D)\sigma_{11} = Q(D)\varepsilon_{11}$$

$$\text{および} \quad \varepsilon_{22} = \varepsilon_{33} = -\nu \varepsilon_{11}$$

が得られ, 明らかに単軸応力状態下の1次元構成方程式に帰着する.

また, せん断成分を考え, 式(5.25)において  $i \neq j$  とすると,

$$P'(D)\sigma_{ij} = 2Q'(D)\varepsilon_{ij} (=Q'(D)\gamma_{ij})$$

$$\left. \begin{aligned} \text{ただし} \quad P'(D) &= P(D)/\{2(1+\nu)\} \equiv G_1 + G_2 + \eta'_2 D \\ Q'(D) &= Q(D)/\{2(1+\nu)\}^2 \equiv G_1 G_2 + G_1 \eta'_2 D \end{aligned} \right\}$$

が得られる. 上式における  $G_1, G_2, \eta'_2$  の値は, 図4.22に示した値になることが, 容易に確かめられる.

最後に, 体積成分に関しては, 式(5.25)において  $i = j = k$  として総和をとることにより,

$$P''(D)\sigma_{kk} = 3Q''(D)\varepsilon_{kk}$$

$$\left. \begin{aligned} \text{ただし} \quad P''(D) &= P(D)/\{3(1-2\nu)\} \equiv K_1 + K_2 + \eta''_2 D \\ Q''(D) &= Q(D)/\{3(1-2\nu)\}^2 \equiv K_1 K_2 + K_1 \eta''_2 D \end{aligned} \right\}$$

が求まる. この場合も,  $K_1, K_2, \eta''_2$  の値は図5.6に示した値に一致する.

ここではPMMA材についてのみ, 3次元粘弾性構成方程式を示したが, 手法自体は一般性を有するものであって, 第3章~第5章までの手順を踏めば,

いかなる粘弾性材料に対しても 3次元構成方程式の定式化が行える。

### 5・5 小 括

本章では、PMMA材を等方の線形粘弾性体と仮定し、第4章において求めた単軸およびせん断両者の粘弾性特性を利用して、弾性-粘弾性間の対応関係に基づき、材料の粘弾性特性を3次元的に評価した。また、3次元粘弾性構成方程式の定式化を行った。以下に、本章での主な結論を述べておく。

(1) 単軸状態、せん断状態の2つの複素コンプライアンスの逆数計算から、それぞれ複素縦弾性係数、複素横弾性係数を求め、両者の傾向を明らかにした。

(2) 単軸およびせん断の2つの複素コンプライアンスを組み合わせて、対応関係を利用することにより、複素ポアソン比を求めた。複素ポアソン比の実数部はほぼ一定値となり、直接測定による値とよく一致していた。また、虚数部はほとんど0となり、複素ポアソン比は一定の実数として扱えることがわかった。

(3) 複素ポアソン比と同様の手順で複素体積弾性係数を求めた。複素体積弾性係数には多少の変動がみられるが、やはり、実数部はほぼ一定に近く、虚数部もほぼ0とみなせる。したがって複素体積弾性係数も、近似的には一定の実数として扱うことができる。

(4) 材料の粘弾性的性質は、体積成分とせん断成分とに分けて考えることができる。PMMA材の場合、粘弾性的性質は主としてせん断成分に起因しており、体積成分の方は、ほぼ弾性的であることが明らかとなった。

(5) ポアソン比を一定の実数とし、これと単軸状態についての微分演算子ペアとを用いて、一般的かつ実用的な形で、PMMA材に対する3次元粘弾性構成方程式の定式化を行った。

本論文の手法は一般性を有した手法であり、第3章～第5章までの手順にしたがえば、PMMA材に限らずいかなる材料についても、3次元の粘弾性特性の評価ならびに粘弾性構成方程式の定式化が可能である。

## 第6章 有限積分変換による波動伝ばの解析

PMMA材の粘弾性構成方程式は、前章までですでに確定されており、衝撃応答などの動的な応力解析問題に供し得るようになっている。本章においては、PMMA材に対して同定された粘弾性特性、および同定法自身の妥当性を検証する目的から、1次元粘弾性波伝ばの解析を行う。

粘弾性波の解析的研究は1950年代中頃から始まり、現在までにFourier解析<sup>(22)~(30)(69)</sup>、Laplace変換<sup>(34)~(36)(77)~(81)</sup>をはじめとして、差分法<sup>(38)(39)(82)~(84)</sup>、有限要素法<sup>(85)~(87)</sup>などによる様々な解析手法が提案されている。最近では、Laplace変換法、差分法、波頭展開法<sup>(88)</sup>の有用性についての相互比較<sup>(89)(90)</sup>も行われている。

ここでは、時間依存型の境界条件を持つ線形初期値・境界値問題に特に有効な有限積分変換<sup>(91)(92)</sup>の手法を用いて、縦波あるいはねじり応力波のような1次元粘弾性波の伝ばを解析し、実験結果との比較を行うことにより、第4章において同定された単軸およびせん断両者に対する粘弾性モデルの有効性を検討する。加えて、同定法の精度や利点についても考察する。

### 6・1 有限積分変換による解析理論

#### 6・1・1 問題の設定

最初に、粘弾性棒を伝わる1次元縦波について考える。3・1節の式(3.1)および式(3.2)で示したように、運動方程式と構成方程式はそれぞれ、

$$\frac{\partial^2 \sigma(x, t)}{\partial x^2} = \rho \frac{\partial^2 \varepsilon(x, t)}{\partial t^2}$$

$$P(D)\sigma(x, t) = Q(D)\varepsilon(x, t)$$

と表される。この2つの式より $\varepsilon(x, t)$ に関する偏微分方程式として式(6.1)

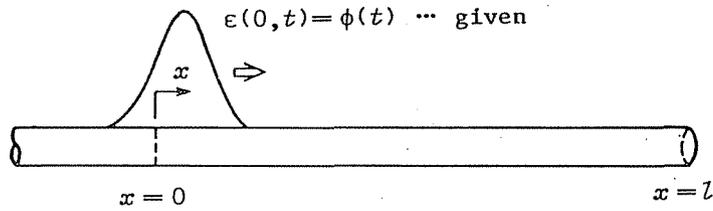


図6.1 問題の設定

を得る。なお簡略のため、 $\partial/\partial x = ( )'$ 、 $\partial/\partial t = D = ( \dot{ } )$  の記号を用いる。

〈偏微分方程式〉

$$\rho P(D) \dot{\varepsilon}(x, t) = Q(D) \varepsilon''(x, t) \quad (6.1)$$

第4章のように粘弾性モデルが同定されていれば、 $P(D)$ 、 $Q(D)$  は既知である。基本的な粘弾性モデルについては、 $P(D)$ 、 $Q(D)$  の具体的な形が、2・3節の図2.3に示されている。たとえばPMMA材のように、3要素固体モデルが適用されるような材料に対しては、次のようになる。

$$\left. \begin{aligned} P(D) &= E_1 + E_2 + \eta_2 D \\ Q(D) &= E_1 E_2 + \eta_2 D \end{aligned} \right\}$$

棒は時刻  $t=0$  で静止していたものとし、 $x=0$  におけるひずみ-時間関係が、 $\varepsilon(0, t) = \phi(t)$  のように境界条件として与えられる場合を考える。これは、図6.1のように、衝撃によって発生した応力波を  $x=0$  の地点において観測し、これを境界条件とすることに相当する。本研究の場合には、第4章の図4.10、図4.15 (あるいは図4.19) などにおける第1番目の測定点でのひずみ波形  $\varepsilon_1(t)$  (あるいは  $r_1(t)$ ) を、境界条件  $\phi(t)$  として用いる。なお、 $x=l$  については自由端とする。この場合の初期条件と境界条件は、それぞれ次のように記述される。

〈初期条件〉

$$t=0 \text{ で } \varepsilon(x, 0) = \dot{\varepsilon}(x, 0) = \ddot{\varepsilon}(x, 0) = \dots = 0 \quad (6.2)$$

〈境界条件〉

$$\left. \begin{aligned} x=0 \text{ で } & \varepsilon(0, t) = \phi(t) \\ x=l \text{ で } & Q(D) \varepsilon(l, t) = 0 \end{aligned} \right\} \quad (6.3)$$

式(6.3)の第2式は、 $x = l$  において構成方程式を考え、これに自由端の条件  $\sigma(l, t) = 0$  を代入したものから得られる。

### 6・1・2 有限積分変換による解法

有限積分変換では、従属境界値問題と呼ばれる固有値問題の解  $u(x)$  を変換の核(kernel)として用いる。いまの場合、従属境界値問題は次のようになる。

〈微分方程式〉

$$u''(x) = -\lambda^2 u(x) \quad (6.4)$$

〈境界条件〉

$$u(0) = u(l) = 0 \quad (6.5)$$

ここで、 $\lambda$  は固有値、 $u(x)$  は固有関数である。この固有値問題は、可付番無限個の固有値  $\lambda_n$  ( $n=1, 2, \dots$ ) と それに対応する固有関数  $u_n(x)$  を解として持っている。この固有関数系  $\{u_n\}$  を次の正規直交条件で規格化しておくことにする。

$$\int_0^l u_m \cdot u_n \, dx = \delta_{mn} \quad (6.6)$$

ただし、 $\delta_{mn}$  はクロネッカ・デルタである。

式(6.1)に  $u_n(x)$  を乗じ、 $x = 0 \rightarrow l$  で積分し、微分と積分の順序が交換可能とすれば、

$$\rho D^2 P(D) \int_0^l \varepsilon \cdot u_n \, dx = Q(D) \int_0^l \varepsilon'' \cdot u_n \, dx \quad (6.7)$$

を得る。ここで、右辺を部分積分すれば、

$$\begin{aligned} & \rho D^2 P(D) \int_0^l \varepsilon \cdot u_n \, dx \\ &= Q(D) \left\{ [\varepsilon' \cdot u_n - \varepsilon \cdot u_n']_0^l + \int_0^l \varepsilon \cdot u_n'' \, dx \right\} \end{aligned} \quad (6.8)$$

となる。式(6.8)に、式(6.3)～式(6.5)を用い、さらに

$$Y_n(t) = \int_0^l \varepsilon(x, t) \cdot u_n(x) dx \quad (6.9)$$

とにおいて整理すれば,

$$\{\rho D^2 P(D) + \lambda_n^2 Q(D)\} Y_n(t) = u'_n(0) Q(D) \phi(t) \quad (6.10)$$

を得る。これは  $Y_n(t)$  に関する線形常微分方程式である。 $Y_n(t)$  の初期条件は、式(6.2)と式(6.9)から,

$$Y_n(0) = \dot{Y}_n(0) = \ddot{Y}_n(0) = \dots = 0 \quad (6.11)$$

となることが容易に知れる。

さて、一般に区間  $[0, l]$  で定義された任意の関数  $F(x)$  が正規直交関数系  $\{u_n\}$  によって

$$F(x) = \sum_n C_n \cdot u_n(x) \quad (6.12)$$

のように展開されている場合、その展開係数  $C_n$  は式(6.12)の両辺に  $u_n$  を乗じて、 $x = 0 \rightarrow l$  で積分することにより求まり、

$$C_n = \int_0^l F(x) \cdot u_n(x) dx \quad (6.13)$$

となる。ここで式(6.13)と式(6.9)において

$$C_n \rightarrow Y_n(t), \quad F(x) \rightarrow \varepsilon(x, t)$$

と対応させて考えれば、 $\varepsilon(x, t)$  は式(6.12)のように

$$\varepsilon(x, t) = \sum_n Y_n(t) \cdot u_n(x) \quad (6.14)$$

と展開されることがわかる。このように有限積分変換法では、 $\varepsilon(x, t)$  の解は、無限級数の形で与えられる。

式(6.14)右辺中の  $u_n(x)$  は、式(6.4)~(6.6)で表される従属境界値問題の解である。これは簡単に求まり、

$$u_n(x) = \sqrt{\frac{2}{l}} \sin \lambda_n x, \quad \lambda_n = \frac{n\pi}{l} \quad (6.15)$$

のようになる。一方、式(6.10)の解  $Y_n(t)$  は、 $\phi(t)$  が初等関数のときには解析的に解くことができる。実験値のように、 $\phi(t)$  が数値的に与えられている場合には、Runge-Kutta-Gill法、Hamming法などによって、式(6.10)を数値的に時間積分して求めればよい。

一方、ねじり応力波については、支配方程式である3・4節の式(3.25)

$$\rho P'(D) \frac{\partial^2 r(x, t)}{\partial t^2} = Q'(D) \frac{\partial^2 r(x, t)}{\partial x^2}$$

が、式(6.1)と同形であるので、同様の手順によって  $r(x, t)$  の解を求めることができる。

### 6・1・3 時間積分の方法

境界条件  $\phi(t)$  が、実験などから数値的に与えられるような場合には、線形常微分方程式(6.10)を数値的に解かなければならない。ここでは、その方法を簡単に述べる。

PMMA材のような3要素固体モデルの  $P(D)$ 、 $Q(D)$  は、

$$\left. \begin{aligned} P(D) &= E_1 + E_2 + \eta_2 D \\ Q(D) &= E_1 E_2 + E_1 \eta_2 D \end{aligned} \right\}$$

である。これを式(6.10)に代入して整理すれば、次式を得る。

$$\frac{d^3 Y(t)}{dt^3} + a_3 \frac{d^2 Y(t)}{dt^2} + a_2 \frac{dY(t)}{dt} + a_1 Y(t) = f(t) \quad (6.16)$$

ただし、

$$a_1 = \frac{E_1 E_2 \lambda^2}{\rho \eta_2}, \quad a_2 = \frac{E_1 \lambda^2}{\rho}, \quad a_3 = \frac{E_1 + E_2}{\eta_2}$$

$$f(t) = \lambda \sqrt{\frac{2}{l}} \left\{ \frac{E_1}{\rho} \frac{d\phi(t)}{dt} + \frac{E_1 E_2}{\rho \eta_2} \phi(t) \right\}$$

である。上式中に現れる  $d\phi(t)/dt$  は、3次スプライン補間を用いて  $\phi(t)$

を微分することにより求め、あらかじめ  $f(t)$  を計算しておく。なお、 $Y(t)$ 、 $\lambda$ 、 $f(t)$ 、および  $a_1, a_2$  には、本来  $Y_n(t)$  のように添字  $n$  が付くが、これを省略して書くものとする。

式(6.16)のような、3階線形常微分方程式は、

$$Y(t) = Y_1(t), \quad \frac{dY(t)}{dt} = Y_2(t), \quad \frac{d^2 Y(t)}{dt^2} = Y_3(t)$$

とおくことにより階数低下が行え、次のような3元連立1階常微分方程式にすることができる。

$$\left. \begin{aligned} \frac{dY_1(t)}{dt} &= Y_2(t) \\ \frac{dY_2(t)}{dt} &= Y_3(t) \\ \frac{dY_3(t)}{dt} &= -\{a_1 Y_1(t) + a_2 Y_2(t) + a_3 Y_3(t)\} + f(t) \end{aligned} \right\} \quad (6.17)$$

このときの初期条件は、式(6.11)より明らかに

$$Y_1(0) = Y_2(0) = Y_3(0) = 0$$

となる。式(6.17)は

$$\frac{dY_i(t)}{dt} = F_i(Y_j(t), t); \quad i, j = 1, 2, 3$$

という正規形になっており、Runge-Kutta-Gill法あるいはHamming法などの数値的解法によって、時間積分することができる。各  $n$  について、 $Y_1, Y_2, Y_3$  の解を求め、 $Y_1 = Y(t)$  のみに注目すれば、それが式(6.10)の解となる。

## 6・2 解析結果

### 6・2・1 収束性の検討

有限積分変換法による  $\varepsilon(x, t)$  の解は、式(6.14)のような無限級数の形になる。したがって、目的の計算を行うのに先立って、級数和を何項程度まで

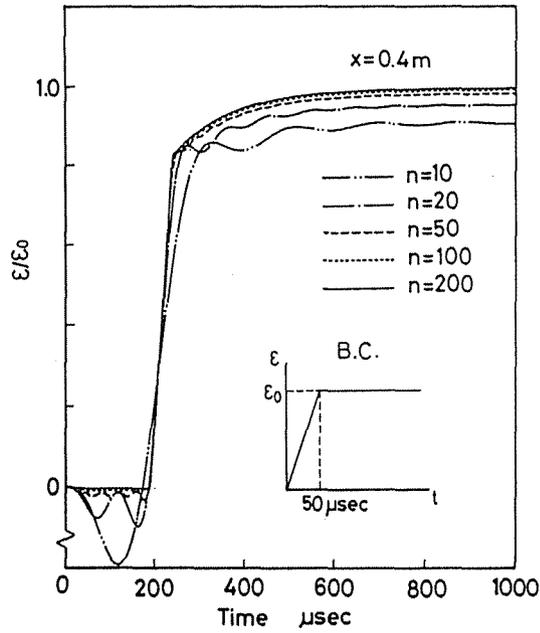


図 6.2 収束性の検討

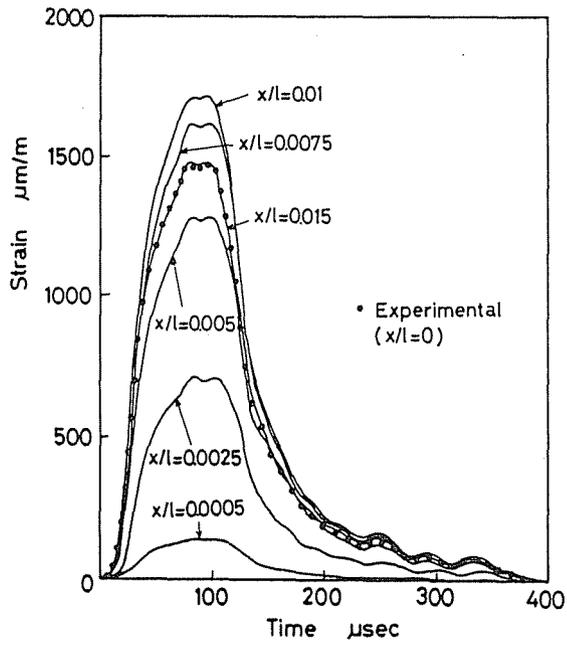


図 6.3  $x=0$  近傍での解の状態

とれば満足な近似が得られるかを、検討しておかなければならない。図6.2は、 $x=0.4$  m の位置での数値解が、級数和の項数によってどのように変化するかを調べたものである。 $x=0$  m において与えるひずみの境界条件  $\phi(t)$  には、立ち上がり時間が  $50 \mu\text{sec}$  のランプ状波形を用いた。また、材料には、第4章図4.14に示した3要素固体モデルを想定した。項数が20項程度ではまだ収束していないが、50項程度になるとほぼ安定してくる。項数を100項程度までとると、ほぼ収束が実現し、正解に対して十分な精度の数値解が得られるものと考えられる。

次に、式(6.14)において、 $u_n(x)$  は式(6.15)のような sine 関数であるから、 $x=0$  とするとすべての  $t$  に対してひずみの解は  $\varepsilon(0, t)=0$  となり、境界条件  $\varepsilon(0, t)=\phi(t)$  と矛盾した結果を与えてしまう。これは不連続関数を有限個の Fourier 級数で近似したときの、不連続部での状況と同様の現象であり、級数和を有限項とする限り避けられないものである。したがって、境界条件を与える  $x=0$  付近では、満足な解が得られないと考えなければならない。第4章の図4.10における  $\varepsilon_1(t)$  の観測値を境界条件  $\phi(t)$  とし、級数和を100項までとって、 $x=0$  近傍での解の状態を調べると図6.3のようになった。ただし、解を出力させる位置  $x$  は棒の全長  $l$  によって無次元化し、 $x/l$  として表示している。 $x/l$  の値が小さいうちは、与えた境界条件(実験値)とかなり違っているが、 $x/l$  の値が0.015以上となると、境界条件とほぼ等しい値を示すようになる。したがって項数が100項の場合に、有効な解が得られるための条件は、 $x/l \geq 0.015$  と考えられる。

### 6・2・2 解析結果

第4章の図4.10における  $\varepsilon_1(t)$  を境界条件として縦波伝ばの解析を行い、各測定点に対応する解析結果を、実験値とともに図6.4に示す。計算にあたって必要となる3要素固体モデルの粘弾性定数には、図4.14に示した値

$$E_1=5.25 \text{ GPa}, \quad E_2=16.9 \text{ GPa}, \quad \eta_2=2.13 \text{ MPa}\cdot\text{sec}$$

を用いた。級数の和は100項までとり、解析で仮定する試料棒の長さ  $l$  は、

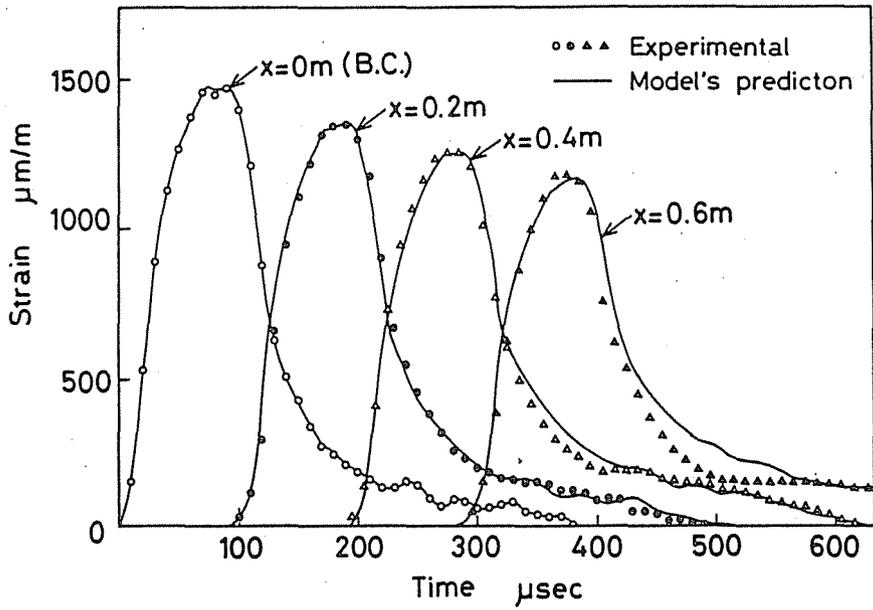


図 6.4 縦波伝ばの解析結果

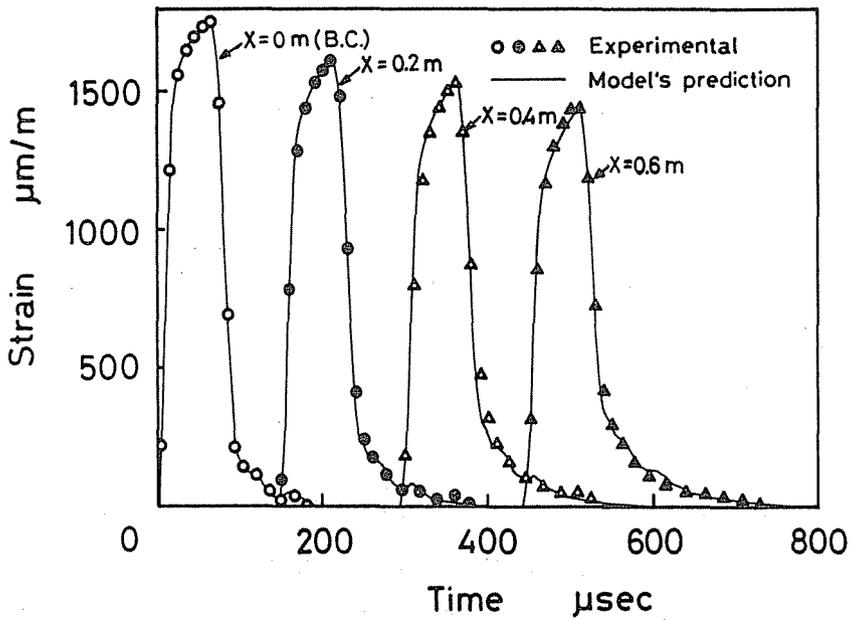


図 6.5 ねじり応力波伝ばの解析結果

$z = 2\text{ m}$  とした。なお、図6.4中の  $x = 0\text{ m}$  の解析値は、図6.3の結果より、 $x = 0.03\text{ m}$  での値を代用したものである。

図6.4中の実験値と解析値の間には、伝ばするにしたがい波形後部で、多少の不一致が生じてくる。これは第4章の図4.13で示した複素コンプライアンスにおいて、虚数部  $J_2$  の実験値とモデル値に関して見られた4 kHzを中心とした付近の不一致が影響したものと考えられる。しかしながら、このような細部を除いては、図6.4の実験値は、解析値によってよく表されているものと思われる。機械や構造物の応力解析のような実際の問題に対しては、応力の最大値、波の伝ば速度、あるいは残留ひずみなどが主要な問題となってくる。これらの点に関しては、図4.14の3要素固体モデルで精度よく解析されており、PMMA材に対しては、このモデルによって、有効な動的応力解析が実現するものと思われる。

第4章の図4.19における、ねじり衝撃実験から得られたねじり応力波（せん断ひずみ波）の伝ばについての解析結果を図6.5に示す。解析には図4.22に示した、せん断成分に対する粘弾性モデル、粘弾性定数を用いた。図4.21のせん断成分の複素コンプライアンスには、単軸成分(図4.13)でみられたような虚数部  $J_2$  に関する実験値とモデル値の、比較的顕著な不一致がなく、モデル値は実験値の傾向を全体的によく表している。そのため図6.5においては、縦波の解析(図6.4)で現れたような波形後部の不一致も観察されず、ねじり応力波の解析結果は実験値を非常によく再現している。この場合も、図4.22のように同定されたせん断に対する粘弾性モデル(3要素固体モデル)が、PMMA材の動的せん断挙動の解析に対して有効であることがわかる。

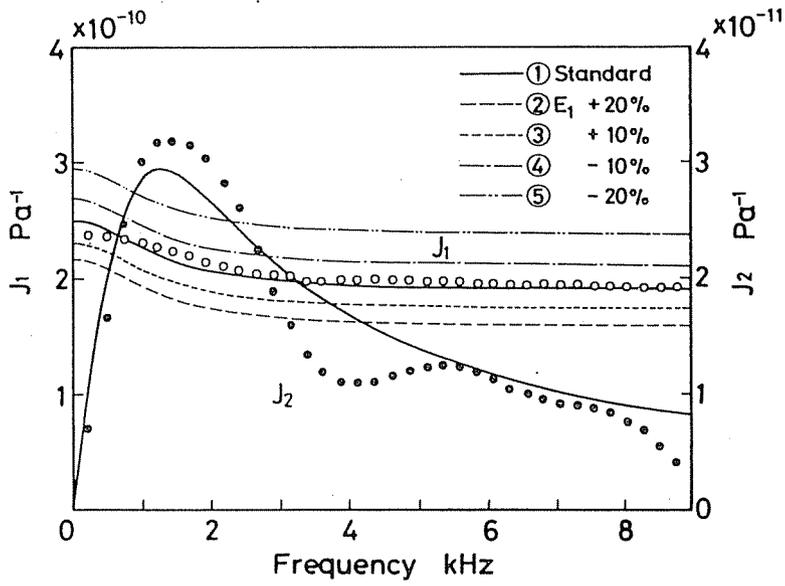
このように、第4章において同定された、単軸およびせん断両者の粘弾性モデルの妥当性が検証された。したがって、これら2つの粘弾性モデルから第5章において導かれた3次元粘弾性構成方程式も、PMMA材の3次元動的応力解析に対して有効であるものと考えられる。

### 6・3 粘弾性特性同定法の精度の検討

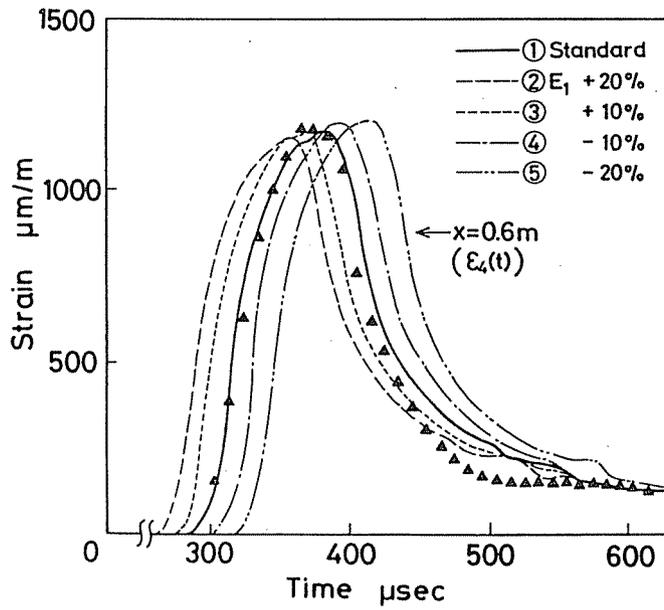
本論文第3章で提案した粘弾性特性同定法は、複素コンプライアンスを利用して、周波数領域において同定を行う方法である。一方、従来からの多くの方法<sup>(18)~(21)(31)~(40)</sup>は、振動や波動伝ばなどの解析値を実験値と比較して、時間領域において同定を行う方法である。本研究で同定の基礎として用いた複素コンプライアンス、および従来の同定法の基礎であるひずみの時間応答の両者に対して、PMMA材に関する3種の粘弾性定数  $E_1$ ,  $E_2$ ,  $\eta_2$  がどのような影響度を持っているかを調べることは、それぞれの同定法の精度を考察する意味で興味深い。そこで第4章の図4.14で同定された粘弾性定数を基準値と考え、これと表6.1に示すような(1)  $E_1$  を  $-20\% \sim +20\%$ , (2)  $E_2$  を  $-50\% \sim +50\%$ , (3)  $\eta_2$  を  $-50\% \sim +50\%$  の範囲で変化させた12通りの人工的なデータを用意し、それぞれの場合について、複素コンプライアンス、および波動伝ばの解析値を計算した。

表6.1 変化させた粘弾性定数のデータ

Case	$E_1$ GPa	$E_2$ GPa	$\eta_2$ MPa·sec
① Standard	5.25	16.9	2.13
② -20%	4.20	16.9	2.13
③ -10%	4.73		
④ +10%	5.78		
⑤ +20%	6.30		
⑥ -50%	5.25		
⑦ -20%		13.5	
⑧ +20%		20.3	
⑨ +50%		25.4	
⑩ -50%	5.25	16.9	1.07
⑪ -20%			1.70
⑫ +20%			2.56
⑬ +50%			3.20



(a) 複素コンプライアンスへの影響



(b) 波動伝ば解析値への影響

図 6.6  $E_1$  の変化による影響

### (1) $E_1$ の変化による影響

図6.6は  $E_1$  の変化による影響を示したもので、図(a)は複素コンプライアンス  $J_1, J_2$  への影響を、また図(b)は波動伝ばの解析値のなかで、最も変化が顕著と思われる  $\varepsilon_1(t)$  に対する影響を、それぞれ表したものである。なお図(b)の計算にあたっては、第4章 図4.10の  $\varepsilon_1(t)$  を境界条件に用いた。

図(a)においては、複素コンプライアンスのモデル値を与える式

$$\left. \begin{aligned} J_1(\omega) &= \frac{1}{E_1} + \frac{E_2}{E_2^2 + (\omega \eta_2)^2} \\ J_2(\omega) &= \frac{\omega \eta_2}{E_2^2 + (\omega \eta_2)^2} \end{aligned} \right\}$$

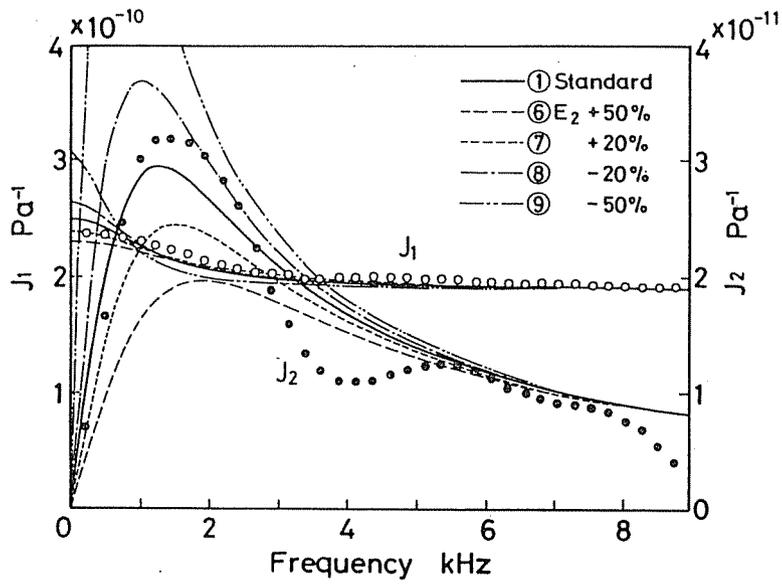
から容易にわかるように、 $J_1$  のみが増加を示し、 $J_2$  は変化していない。一方図(b)に関しては、 $E_1$  の減少にしたがい、波の伝ば速度が小さくなり、波形が遅れて現れてくるのがわかる。また、ひずみの最大値は、 $E_1$  の減少によって徐々に大きくなっている。3要素固体モデルの瞬間弾性項を表す  $E_1$  は、やはり波の伝ば速度に主として影響しているようである。

### (2) $E_2$ の変化による影響

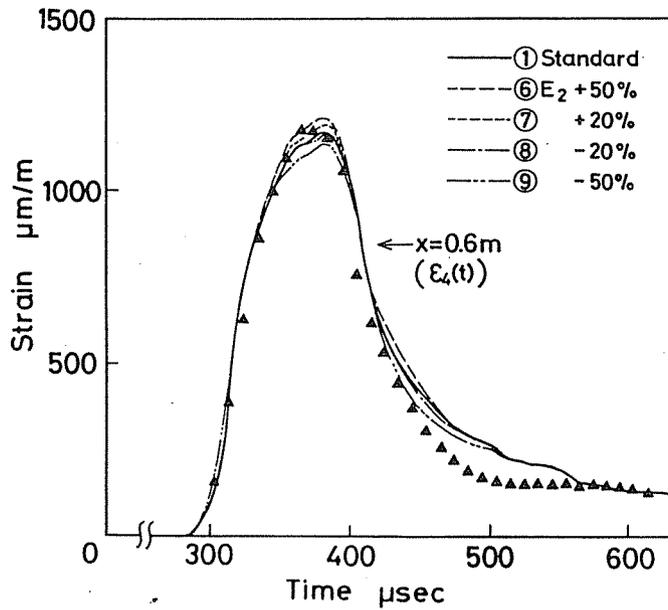
$E_2$  の変化による影響を同様に図6.7(a), (b)に示す。図(a)において、 $J_2$  に対する影響が非常に顕著である。 $E_2$  が減少するにつれ、ピーク的位置が低周波側へ移行するとともに、ピーク値は非常に大きくなってゆく。 $J_1$  についても低周波域において、かなりの変化が認められる。これに対して図(b)では、波形の変化がほとんど現れず、最大値および波形後部でわずかに変化が生じる程度である。

### (3) $\eta_2$ の変化による影響

図6.8(a), (b)に  $\eta_2$  の変化による影響を示す。図(a)では、やはり  $J_2$  の変化が激しく、また  $J_1$  もかなり広い周波数範囲で変化している。一方、波動伝ばの解析値を示した図(b)においては、図6.7(b)と同様、やはり  $\eta_2$  の影響はかなり小さいものである。

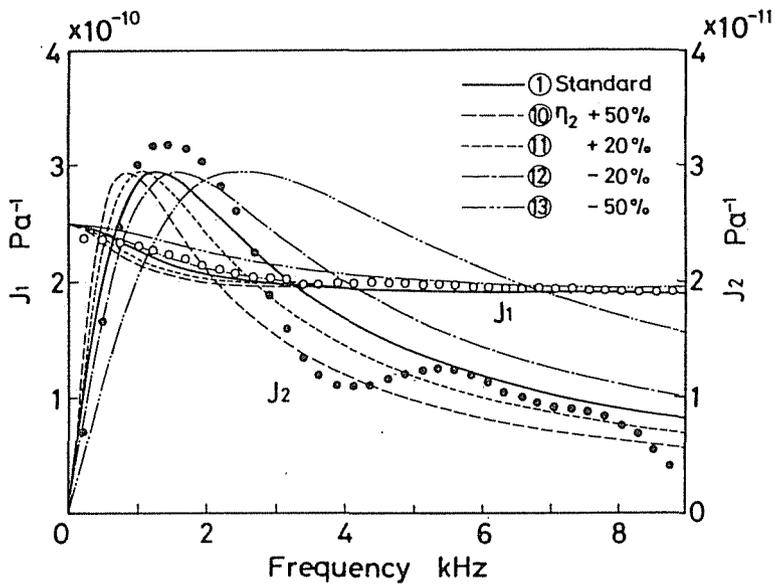


(a) 複素コンプライアンスへの影響

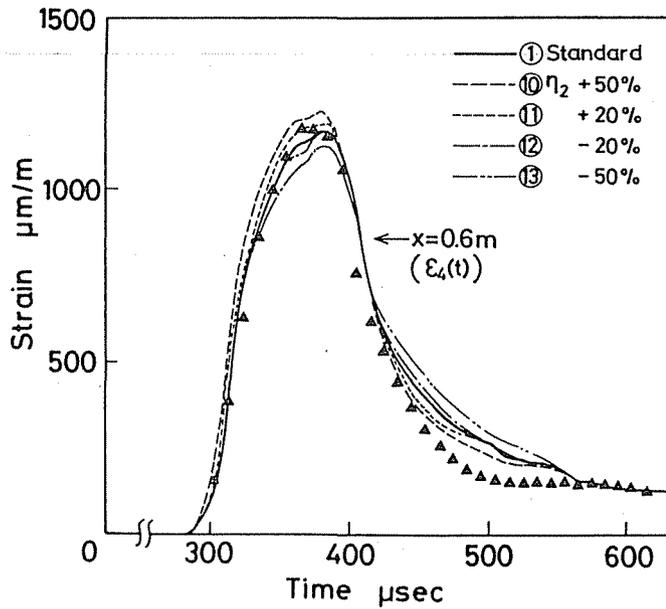


(b) 波動伝ば解析値への影響

図6.7  $E_2$ の変化による影響



(a) 複素コンプライアンスへの影響



(b) 波動伝ば解析値への影響

図 6.8  $\eta_2$  の変化による影響

図6.8(b)においては、粘性係数  $\eta_2$  の増加にともない  $\varepsilon_4(t)$  の最大値が上昇している。これは一見矛盾しているようであるが、実はそうではない。なぜならば、図6.8(a)を見ればわかるように、減衰能を表す  $J_2/J_1$  は  $\eta_2$  の増加により小さくなっているからである。

(1)~(3)の結果を総合すると次のようなことが言える。すなわち、 $E_1$  は主として波の伝ば速度のような動的な弾性的性質を左右するパラメータであり、複素コンプライアンスおよび波動の伝ばの両者に、かなり大きく影響する。これに対して、 $E_2, \eta_2$  の2つのパラメータは、粘弾性体の減衰特性に関係する量ではあるが、ひずみの時間応答にはほとんど影響しない。しかし、複素コンプライアンスのような、周波数応答特性に対しての影響度は非常に顕著である。第4章の表4.2では、PMMA材の粘弾性定数  $E_1, E_2, \eta_2$  に関する種々の研究値が示されている。表4.2において、 $E_1$ の値はいずれもほぼ等しくなっているが、 $E_2, \eta_2$  に関しては、時間領域において求めた各研究値の間にかかなりの相違が見られる。 $E_1$ の値がほぼ一致しているのは、それが弾性的性質に関するパラメータであり、同定法によるひずみ速度差の影響があまり現れないためであろう。一方、 $E_2, \eta_2$ の値がかなりばらついているのは、時間領域においての、 $E_2, \eta_2$ の影響度が非常に小さいことが原因の1つと考えられる。

このように粘弾性体の特性は、時間領域では鈍感であるが、周波数領域に対しては非常に敏感である。したがって、動的荷重下での材料の粘弾性特性を同定する場合、応力やひずみなどの時間的応答に基づいて、粘弾性モデル、粘弾性定数を定めるよりも、複素コンプライアンス、複素弾性係数のような、周波数応答特性を表す物理量をもとに同定を行う方が、比較的簡単でしかも高精度の結果が期待できるものと思われる。

#### 6・4 小 括

本章では、有限積分変換による1次元粘弾性波伝ばの解析法を示し、これをPMMA棒を伝ばする縦波およびねじり応力波に適用して、実験結果との比較

から第4章で同定された粘弾性モデルの妥当性を検証した。また、複素コンプライアンスおよび波動伝ばの解析値に与える粘弾性定数の影響度について考察し、第3章のような周波数領域における粘弾性特性同定法の精度や利点について論じた。以下に、本章での結論を要約する。

(1) 有限積分変換法を用いた1次元粘弾性波伝ばの解析法を示した。解析例は、PMMA材のような3要素固体モデルについてのみ示したが、解析手法自体は一般性を有しており、他の粘弾性モデルに対しても適用することができる。そのような場合には、粘弾性モデルに応じて、微分演算子  $P(D)$ ,  $Q(D)$  を変更すればよいだけである。また、Laplace変換や Fourier変換を用いた解析法に比べ、逆変換が容易なことが本解析法の大きな特長である。

(2) この方法を用いて、縦衝撃試験における縦波、およびねじり衝撃試験におけるねじり応力波の解析を行った。解析結果と実験結果は良好な一致を示し、第4章で同定されたPMMA材に対する粘弾性モデルの妥当性、および動的応力解析問題への有効性が確かめられた。

(3) 複素コンプライアンス、およびひずみの時間応答のそれぞれに及ぼす、各粘弾性定数の変化による影響度を調べた。その結果、粘弾性定数  $E_2$ ,  $\eta_2$  のひずみの時間応答への影響度は非常に小さく、複素コンプライアンスへの影響度の方が、はるかに顕著であることがわかった。これにより、本論文の第3章で提案したような、周波数領域における粘弾性特性同定法の利点を明らかにした。

## 第7章 粘弾性縦波に及ぼす横方向慣性の影響<sup>(102)</sup>

### 7.1 はじめに

粘弾性棒内の応力波は、粘性変形に起因するエネルギー損失によって減衰・分散が生じ、波形を変化させながら伝ばしてゆく。細い粘弾性棒内の縦波に関しては、横方向慣性（棒の横方向の運動）を無視した1次元初等理論に基づいて、多くの実験、解析的研究がなされている。しかしながら、応力波長が短い場合や、棒の径が大きい場合には、粘性による減衰・分散だけでなく、横方向慣性によっても幾何分散が生じ、初等理論では必ずしも正しく粘弾性特性が同定されるとは限らない。

横方向慣性の効果は、弾性棒については古くから議論されており、厳密には Pochhammer-Chree の 3次元理論<sup>(42)(93)~(96)</sup>によらなければならない。一方、近似的に横方向慣性を考慮したものとして Love-Rayleigh 理論<sup>(97)(98)</sup>が知られている。これらの理論を粘弾性棒に拡張する場合、Pochhammer-Chree の理論では困難を極めるのに対し、Love-Rayleigh 理論の方は数学的には動的な1次元問題となるため取扱いは比較的容易で、簡単な粘弾性モデルに関しては、すでに Testa,<sup>(99)</sup> 田中・元山<sup>(100)</sup>などの解析も報告されている。

本章においては、粘弾性棒内の縦波に及ぼす横方向慣性の影響を、実験、解析によって調べる。解析的基礎は文献<sup>(99)(100)</sup>と同様、Love の仮定によって横方向慣性を考慮した運動方程式である。試料には PMMA 棒を想定し、これを第4章の図4.14に示した3要素固体モデルと仮定する。波動の伝ばに対する横方向慣性の効果を解析すると同時に、従来報告されていない減衰・分散の周波数特性にも着目し、実験値と理論値の比較から、基礎式の妥当性や適用範囲を検討する。また、縦波の伝ばから粘弾性特性を同定する場合に、横方向慣性が影響せず、正しい特性が得られるための条件を明らかにする。

## 7.2 運動方程式

Loveは、次のような近似的仮定を設けて、横方向慣性を考慮した弾性縦波の方程式を導いた。(97)(98)

【仮定】 i) 断面は変形後も平面を保っている。

$$\text{ii) } u_r = -\nu r \frac{\partial u_x}{\partial x}, \quad \text{すなわち } \varepsilon_r = -\nu \varepsilon_x$$

ここで  $x, r$  は円柱座標系のそれぞれ、軸方向と半径方向の座標を示し、 $u_x, u_r, \varepsilon_x, \varepsilon_r$  はそれぞれの方向の変位とひずみを示す。また  $\nu$  はポアソン比である。Loveの仮定のもとに、Hamiltonの原理より運動方程式を導き、軸方向ひずみ  $\varepsilon_x$  (以下では添字  $x$  を省略する) に関して記述すると次のようになる。

$$\rho \frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial t^2} = E \frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial x^2} + \frac{1}{2} \rho \nu^2 a^2 \frac{\partial^4 \varepsilon}{\partial x^2 \partial t^2} \quad (7.1)$$

ただし、 $\rho$  は材料の密度、 $E$  は縦弾性係数であり、 $a$  は棒の半径を示す。棒の両端では自然境界条件として、次式が成立する。

$$\sigma = E \varepsilon + \frac{1}{2} \rho \nu^2 a^2 \frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial t^2} \quad (7.2)$$

式(7.1), (7.2)を粘弾性棒に対して拡張するには、5.4節で述べた対応関係を利用して、 $E$  を粘弾性体の演算子ペア  $P(D), Q(D)$  によって

$$E \rightarrow Q(D)/P(D)$$

と置き換えればよい。したがって、横方向慣性を考慮した粘弾性縦波の運動方程式は式(7.1)より、次のようになる。

$$\rho P(D) \frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial t^2} = Q(D) \frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial x^2} + \frac{1}{2} \rho \nu^2 a^2 P(D) \frac{\partial^4 \varepsilon}{\partial x^2 \partial t^2} \quad (7.3)$$

また境界条件についても、同様に式(7.2)より、粘弾性棒の両端において、

$$P(D) \sigma = Q(D) \varepsilon + \frac{1}{2} \rho \nu^2 a^2 P(D) \frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial t^2} \quad (7.4)$$

が成立することになる。式(7.3), (7.4)の両式において、右辺第2項めが横方向

慣性の効果を表しており、式(7.3)は  $\alpha = 0$  とすると横方向慣性を無視した1次元粘弾性縦波の方程式[第6章式(6.1)], すなわち初等理論に一致する。

P MMA材のような3要素固体モデルの  $P(D), Q(D)$  は、

$$\left. \begin{aligned} P(D) &= E_1 + E_2 + \eta_2 D \\ Q(D) &= E_1 E_2 + E_1 \eta_2 D \end{aligned} \right\}$$

である。粘弾性定数の値には第4章 図4.14に示されている

$$E_1 = 5.25 \text{ GPa}, \quad E_2 = 16.9 \text{ GPa}, \quad \eta_2 = 2.13 \text{ MPa}\cdot\text{sec}$$

を採用することにし、 $\rho$  および  $\nu$  はそれぞれ表4.1に示した

$$\rho = 1.183 \times 10^3 \text{ kg/m}^3, \quad \nu = 0.365$$

の値を用いるものとする。

### 7.3 波動伝ばの解析

#### 7.3.1 解析方法

長さ  $l$ , 半径  $a$  の粘弾性棒が時刻  $t = 0$  で静止していたものとし、 $x = 0$  におけるひずみ-時間関係が  $\varepsilon(0, t) = \phi(t)$  のように境界条件として与えられ、他端  $x = l$  を自由端とした場合の波動伝ばを、有限積分変換法によって解析する。横方向慣性の効果として、式(7.3)の右辺第2項が付加された以外は、すでに6.1節で示した初等理論に対する解析とほとんど同様であるので、以下では概略のみを述べることにする。

有限積分変換を式(7.3)に適用する際には、次の固有値問題の解  $u_n(x)$  を正規直交条件で規格化して、変換の核(kernel)として用いる。

〈微分方程式〉

$$u_n''(x) = -\lambda_n^2 u_n(x) \quad (7.5)$$

〈境界条件〉

$$u_n(0) = u_n(l) = 0 \quad (7.6)$$

ただし、 $\lambda_n$  は可付番無限個 ( $n = 1, 2, \dots$ ) の固有値である。なお  $\partial/\partial x = (\cdot)'$ ;  $\partial/\partial t = (\cdot)^{\cdot}$  の簡略記号を用いるものとする。

式(7.3)に  $u_n(x)$  を乗じて  $x=0 \rightarrow l$  で積分し、部分積分を行った結果に、 $\varepsilon$  の境界条件

$$\varepsilon(0, t) = \phi(t)$$

$$Q(D)\varepsilon(l, t) + \frac{1}{2}\rho\nu^2 a^2 P(D)\dot{\varepsilon}(l, t) = 0$$

および式(7.5), (7.6)を代入し、さらに、

$$Y_n(t) = \int_0^l \varepsilon(x, t) \cdot u_n(x) dx \quad (7.7)$$

と整理すれば、 $Y_n(t)$ に関する常微分方程式

$$\begin{aligned} & \{\rho D^2 P(D) + \lambda_n^2 Q(D) + \frac{1}{2}\rho\nu^2 a^2 \lambda_n^2 D^2 P(D)\} Y_n(t) \\ &= \{Q(D) + \frac{1}{2}\rho\nu^2 a^2 D^2 P(D)\} u_n'(0) \phi(t) \end{aligned} \quad (7.8)$$

を得る。式(7.8)を初期条件

$$Y_n(0) = \dot{Y}_n(0) = \ddot{Y}_n(0) = \dots = 0$$

を満足するように解けば、 $\varepsilon(x, t)$  の解は、式(7.7)の逆変換として得られ、

$$\varepsilon(x, t) = \sum_n Y_n(t) \cdot u_n(x) \quad (7.9)$$

と与えられる。

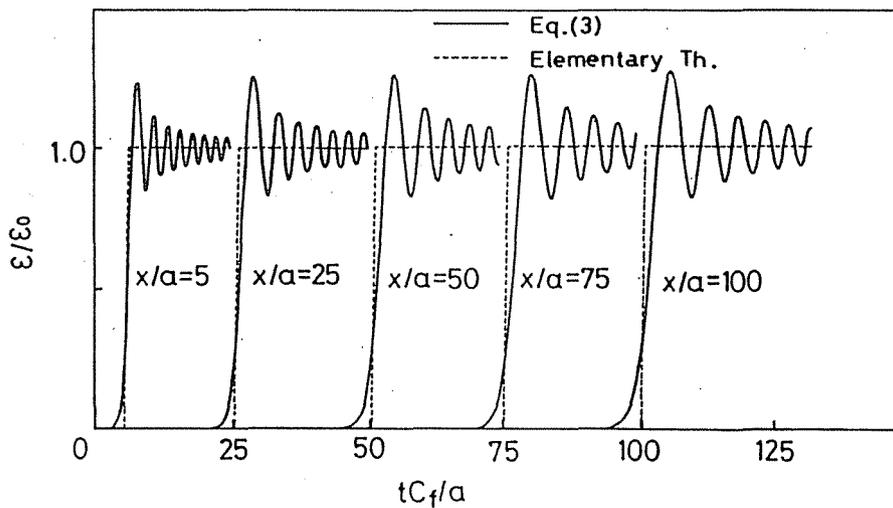
$u_n(x)$  は式(7.5), (7.6)から容易に求めることができ、

$$u_n(x) = \sqrt{\frac{2}{l}} \sin \lambda_n x, \quad \lambda_n = \frac{n\pi}{l} \quad (7.10)$$

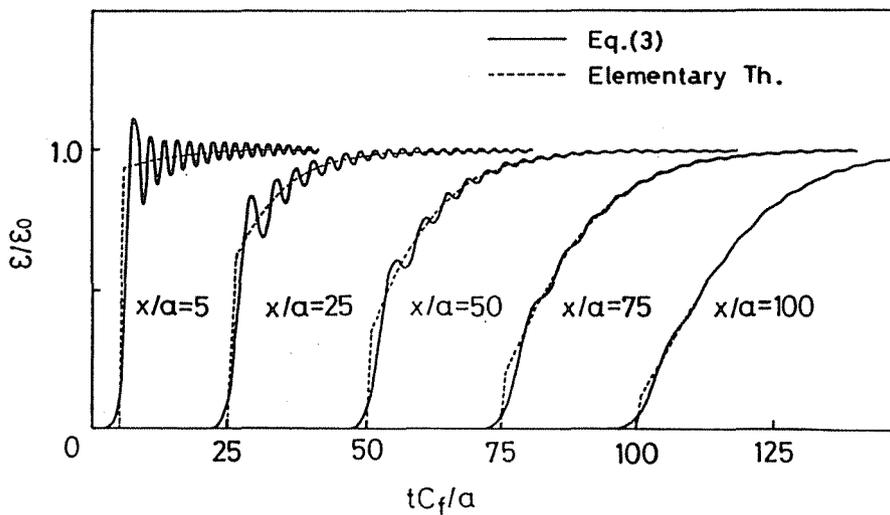
である。一方、式(7.8)の解  $Y_n(t)$  は、 $\phi(t)$  が簡単な初等関数の時は解析的に解くことができる。ここでは、実験から  $\phi(t)$  が数値的に与えられるような場合にも適用可能な、Runge-Kutta-Gill法によって数値的に解く。

### 7.3.2 解析結果

$P(D)=1$ ,  $Q(D)=E$  とすれば、特殊な場合として、弾性棒についても解



(a) 弾性棒



(b) 粘弾性棒

図 7.1 波動伝ばの解析

析することができる。図7.1に (a) 弾性棒, (b) 粘弾性棒(PMMA棒)の両者について, 波動伝ばの様子を比較して示す。横軸は無次元時間  $t C_f / a$  で表している。  $C_f$  は1次元波の波頭伝ば速度で, 弾性棒では  $C_f = C_0 = \sqrt{E/\rho}$ , 3要素固体モデルの粘弾性棒では  $C_f = \sqrt{E_1/\rho}$  となる。境界条件  $\varepsilon(0, t) = \phi(t)$  には, 立ち上がりが無次元時間で1, 大きさが  $\varepsilon_0$  のランプ状波形を仮定した。

弾性棒, 粘弾性棒いずれも, 横方向慣性を考慮すれば, 初等理論の波形(破線で示す。)上に周期的な振動が重畳されることがわかる。弾性棒では, 横方向慣性のみによる分散のため, 伝ばするにしたがい重畳される振動は周期を長くしながら発達してゆく。一方, 粘弾性棒では, 粘性の効果によって振動がかなり抑制され, 半径の約100倍程度まで伝ばすると, 初等理論との差異がほとんどなくなってくる。また, 弾性棒, 粘弾性棒両者とも, 横方向慣性によって立ち上がりが鈍化していることがわかる。

#### 7.4 減衰・分散の周波数特性

$\varepsilon(x, t)$  をパルス状の局在波と仮定し, 運動方程式(7.3)にFourier変換を施し整理すれば, 次式を得る。

$$[\{1 - h \rho \omega^2 J(\omega)\} \frac{d^2}{dx^2} + \rho \omega^2 J(\omega)] \bar{\varepsilon}(x, \omega) = 0 \quad (7.11)$$

ただし,  $h = \nu^2 a^2 / 2$  である。また,  $J(\omega)$  は複素コンプライアンスで

$$J(\omega) = J_1(\omega) - i J_2(\omega) = \frac{P(i\omega)}{Q(i\omega)}$$

と与えられる。PMMA材のような3要素固体モデルの場合,  $J_1, J_2$  は,

$$\left. \begin{aligned} J_1(\omega) &= \frac{1}{E_1} + \frac{E_2}{E_2^2 + (\omega \eta_2)^2} \\ J_2(\omega) &= \frac{\omega \eta_2}{E_2^2 + (\omega \eta_2)^2} \end{aligned} \right\}$$

のようになる。

さて、式(7.11)の半無限長棒に対する解は、第3章式(3.8)と同様、

$$\bar{\varepsilon}(x, \omega) = \bar{\varepsilon}(0, \omega) \cdot \exp\{-(\alpha + i f)x\} \quad (7.12)$$

の形となる。 $\alpha$ と $f$ はそれぞれ、減衰係数、速度係数で、角周波数 $\omega$ の関数である。式(7.12)を式(7.11)に代入し、 $\alpha$ と $f$ について解けば、次のような結果を得る。

$$\alpha^2 = \frac{\rho \omega^2}{2 K^2} (-J_1 + K \cdot |J| + h \rho \omega^2 \cdot |J|^2) \quad (7.13)$$

$$f^2 = \frac{\rho \omega^2}{2 K^2} (J_1 + K \cdot |J| - h \rho \omega^2 \cdot |J|^2) \quad (7.14)$$

ここで、 $K(\omega)$  および  $|J|$  はそれぞれ、

$$K^2(\omega) = (1 - h \rho \omega^2 J_1)^2 + (h \rho \omega^2 J_2)^2$$

$$|J| = \sqrt{J_1^2 + J_2^2}$$

である。また、位相速度  $C(\omega)$  は  $f(\omega)$  と  $C = \omega/f$  という関係にあるから、次のようになる。

$$C^2 = \frac{2 K^2}{\rho} (J_1 + K \cdot |J| - h \rho \omega^2 \cdot |J|^2)^{-1} \quad (7.15)$$

式(7.13)~(7.15)は、弾性棒に対しては  $J_1 = 1/E$ ,  $J_2 = 0$  とすればよく、また横方向慣性を無視するのであれば  $a = 0$  (すなわち  $h = 0$ ,  $K = 1$ ) とすればよい。いま、簡単な例を述べると、たとえば弾性棒においては、横方向慣性を考慮するか否かにかかわらず、式(7.13)は  $\alpha = 0$  となり減衰は生じない。さらに、横方向慣性を無視すれば、式(7.15)は  $C^2 = E/\rho$  となり弾性縦波に対する初等理論の結果と一致する。図7.2は、基礎式(7.3)に含まれるこのようないくつかの場合について、減衰係数  $\alpha(\omega)$ 、速度係数  $f(\omega)$ 、および位相速度  $C(\omega)$  の、角周波数 $\omega$ に対する定性的傾向を示したものである。図中において「太い」とは横方向慣性を考慮することを、また「細い」とは横方向慣

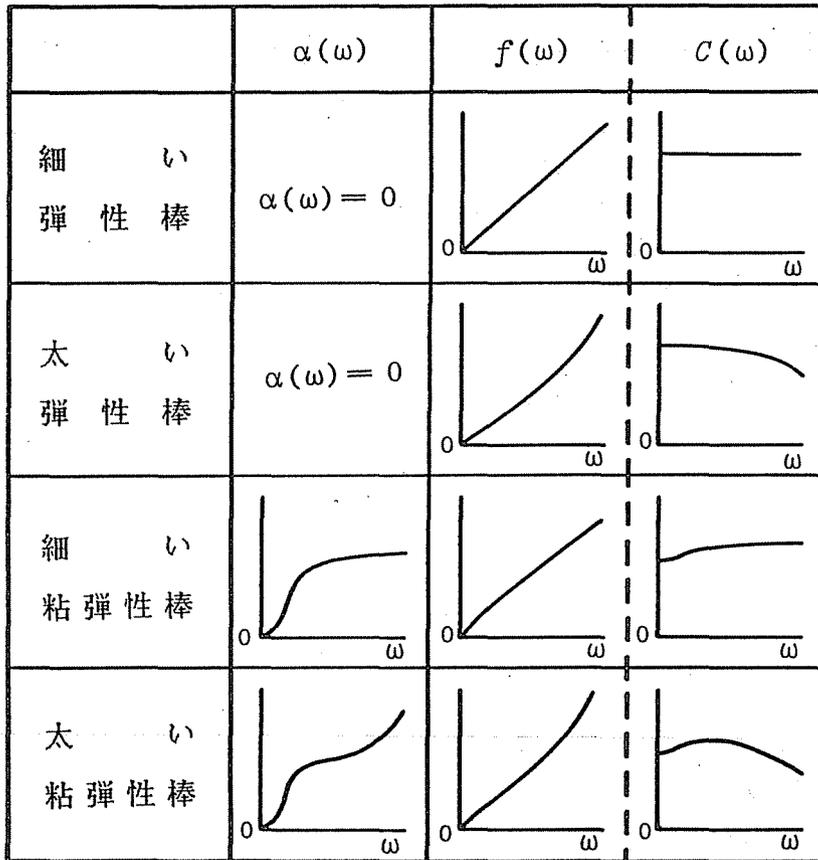
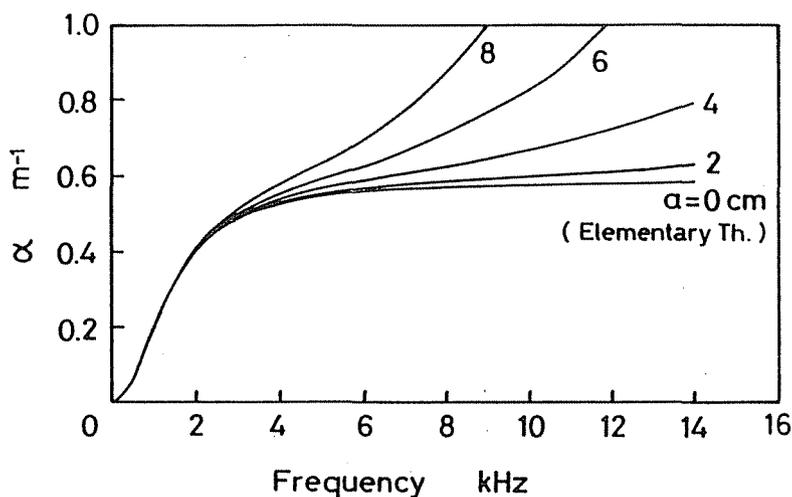


図7.2 減衰・分散の定性的特徴

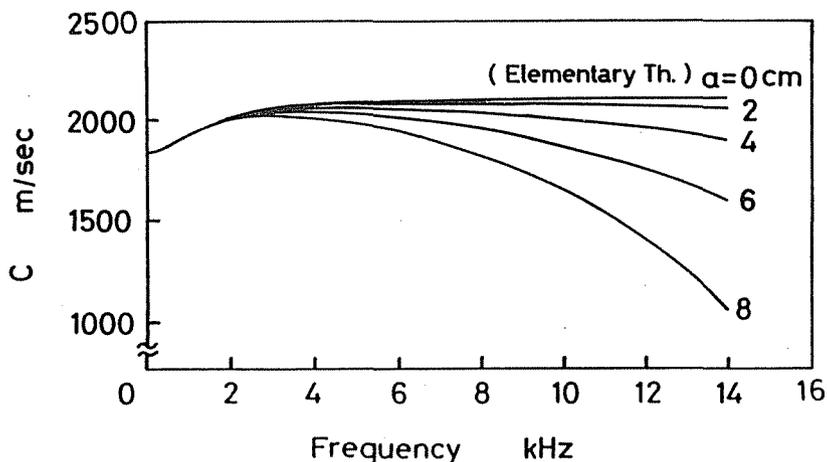
性を考慮しないことを、それぞれ意味する。なお、粘弾性体には3要素固体モデルを仮定している。

図7.3は、粘弾性棒(PMMA棒)の半径 $a$ をパラメータとして、減衰係数および位相速度と、周波数との関係を、式(7.13)、(7.15)に基づいて求めたものである。 $\alpha$ および $C$ いずれも、 $a$ が大きくなるにつれて、また、周波数が高くなるにつれて、急激に初等理論( $a=0$ の曲線)との差が大きくなり、横方向慣性の影響が顕著になることがわかる。しかしながら、 $a=2$  cmの曲線について考えれば、約10kHz 以内の周波数範囲においては、初等理論との差異がほとんど見

られていない。この場合、横方向慣性が無視できるための条件を、棒の半径  $a$  と波長  $\lambda$  による無次元周波数  $a/\lambda$  によって表すと、 $a/\lambda = a \cdot f / C < 0.1$  ( $f$  は周波数)となる。したがって  $a/\lambda < 0.1$  の条件が満たされていれば、初等理論によって妥当な解析が行え、正しい粘弾性特性が求められることになる。



(a) 減衰係数



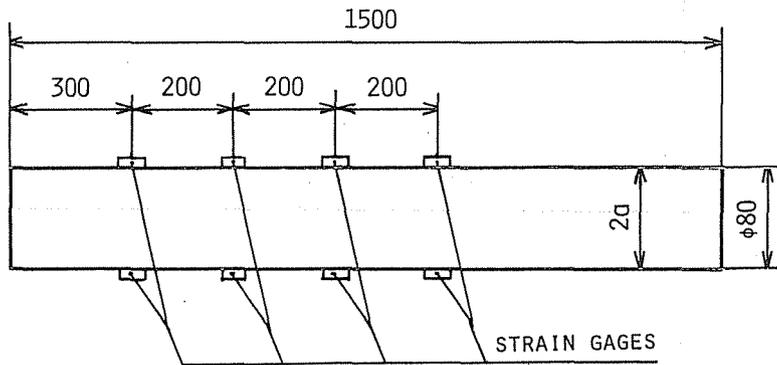
(b) 位相速度 (分散曲線)

図7.3 減衰・分散の周波数特性

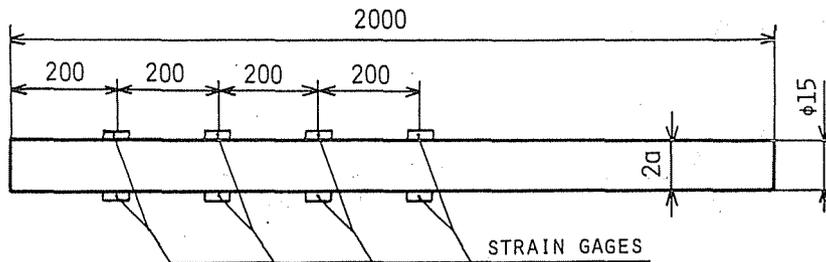
## 7.5 実験

### 7.5.1 実験方法

試料は市販のPMMA棒であり、直径は図7.4のように、80mmおよび15mm（すなわち半径  $a = 4\text{ cm}$  および  $a = 0.75\text{ cm}$ ）の2種類とした。実験方法は、第4章 図4.4と同様である。試料の一端に空気圧で加速されたストライカで衝撃を与え、圧縮波を発生させる。波動伝ばの様子を20cmごと計4箇所のひずみゲージで検知し、デジタル・メモリからマイクロ・コンピュータに転送させて計算に利用する。なおストライカには試料と同じく、PMMA棒を用いた。

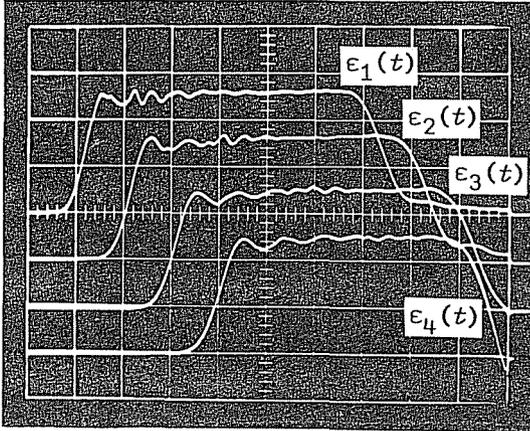


(a)  $a = 4\text{ cm}$  試料



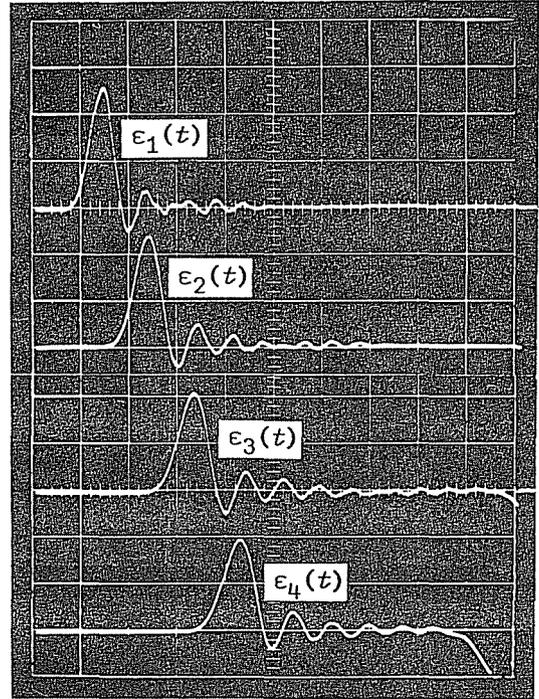
(b)  $a = 0.75\text{ cm}$  試料

図7.4 試料形状と測定点の位置



V. scale: 348  $\mu\text{m}/\text{m}/\text{div}.$   
 H. scale: 100  $\mu\text{sec}/\text{div}.$

(a) ストライカ長さ 40 cm



V. scale: 87.0  $\mu\text{m}/\text{m}/\text{div}.$   
 H. scale: 100  $\mu\text{sec}/\text{div}.$

(b) ストライカ長さ 4 cm

図 7.5  $a = 4 \text{ cm}$  試料のひずみ波形

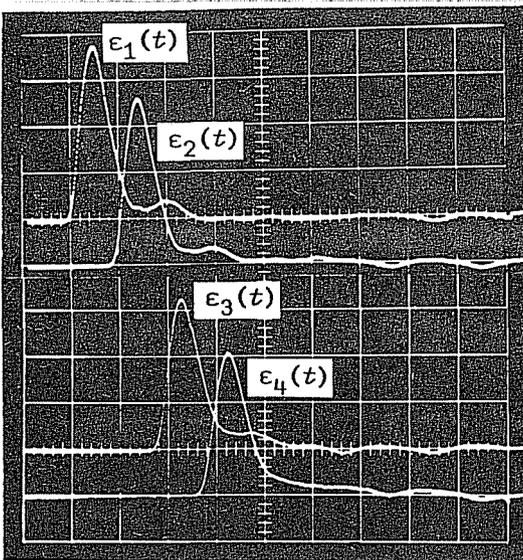
### 7・5・2 実験結果

図7.5は、半径  $a$  が 4 cm の太い試料を用いたときの衝撃試験結果である。ストライカ長さが 40cm の図7.5(a)の場合、横方向慣性によって立ち上がり直後に周期的振動が現れ、伝ばにしたがい小さくなってゆくのわかる。図7.1(b)に示した解析結果に比べ、重畳される振動の振幅が小さいのは、立ち上がり時間が無次元時間  $t C_f/a$  に換算して約 3 (実時間  $t$  では 約60  $\mu\text{sec}$ ) と、解析での値 1 に比べ、かなりゆるやかなためである。一方、ストライカの長さが 4 cm の図7.5(b)の場合は、波形はパルス状となり、立ち上り直後に周期的振動が生じる時間的余裕がないため、除荷後に振動が現れている。図7.5(a)に比べ振動の振幅が大きいのは、負荷と除荷の効果が同時に作用するためと思われる。また、波形のピーク値は減少、パルス幅は増大しており、明らかな減衰・分散

が認められる。

内藤・台丸谷<sup>(101)</sup>は、鋼の丸棒を試料に用いて衝撃実験を行い、衝撃端付近では重畳される振動に高次モード的な不規則性が生じ、半径の数十倍程度の距離を伝ばすると、その不規則性が消失することを報告している。図7.5(a)において、衝撃端から 30cm の第1番目の波形には、振動にこのような不規則性がみられる。しかし、第3番目以降ではほとんど観察されていない。すなわち鋼棒に比べ、PMMA棒の場合は、粘性の効果によって不規則性の消失が比較的速いようである。

図7.6は半径  $a$  が 0.75cm の細い試料に、長さ 4 cm のストライカを衝撃させたときの結果である。粘性によって、波形のピーク値は減少し、パルス幅も増大するが、有意な周期的振動は観察されておらず、横方向慣性はほとんど影響していないと言える。



V. scale: 220  $\mu\text{m}/\text{m}/\text{div}.$   
H. scale: 100  $\mu\text{sec}/\text{div}.$

図 7.6  $a = 0.75\text{cm}$  試料ひずみ波形

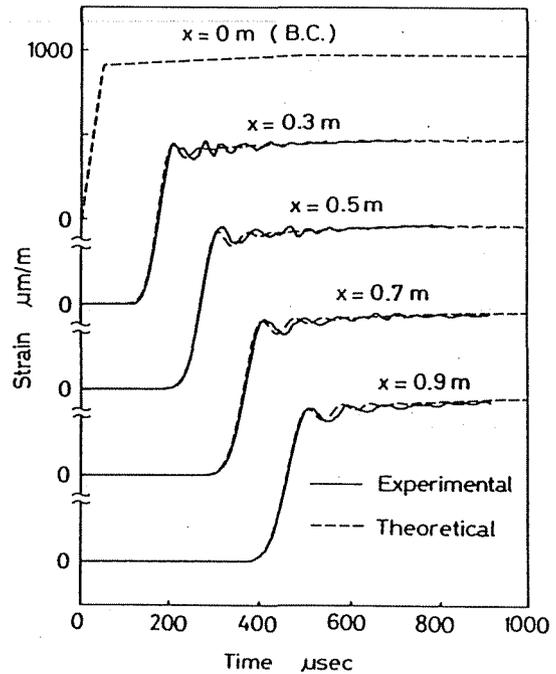


図 7.7 波動伝ばの比較

## 7・6 実験値と理論値の比較

### 7・6・1 波動伝ば

横方向慣性がほとんど影響しない  $a = 0.75\text{cm}$  の細い試料を、十分長いストライカで衝撃すると、ほぼランプ状に近い波形が観測される。衝撃端ではその特異性のため、ひずみ波形を正確に測定するのは困難であるが、図7.5の太い試料の場合も、同様なランプ状波形が端面に入力されていると予測される。そこで図7.5(a)の4個の波形から、衝撃端のひずみ-時間関係を図7.7に示す  $x = 0\text{m}$  の波形のように推定し、これを境界条件  $\varepsilon(0, t) = \phi(t)$  として波動の解析を行い、実験値と比較した。

弾性棒に関しては、実験、もしくは3次元厳密解<sup>(95)(96)</sup>よりも、近似解であるLove-Rayleigh解の方が、重畳される振動の周期が短いことが一般に知られている。図7.7に示した粘弾性棒の場合も同じく、実験よりもLoveの仮定に基づく解析のほうが、やや周期が短いようである。しかし、そのような細部を言及しなければ、横方向慣性の効果や全体的傾向はよく表されており、衝撃応答に対する基礎式(3.3)の有効性が確められる。

### 7・6・2 減衰・分散の周波数特性

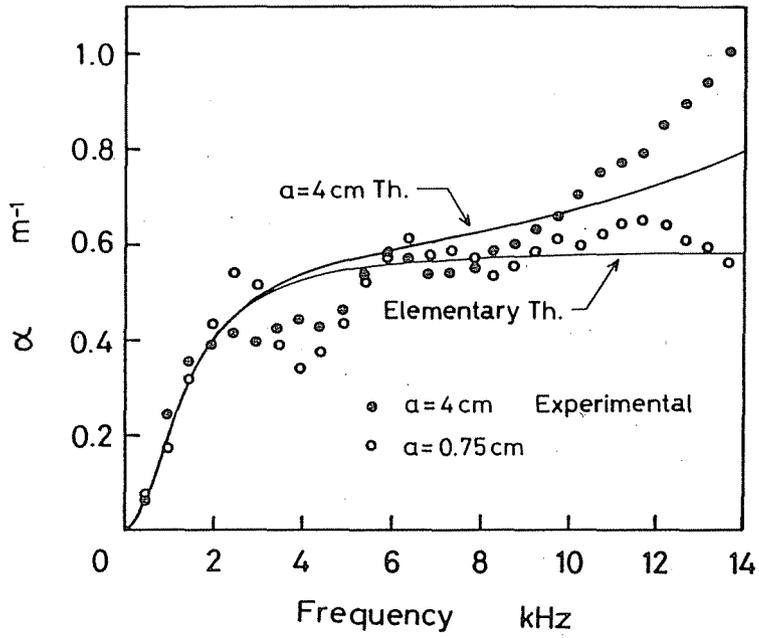
#### (1) 減衰係数と位相速度の実験的決定法

$a = 4\text{cm}$  の図7.5(b)、および  $a = 0.75\text{cm}$  の図7.6のそれぞれから、減衰係数  $\alpha(\omega)$  と位相速度  $C(\omega)$  を、以下のように実験的に決定する。

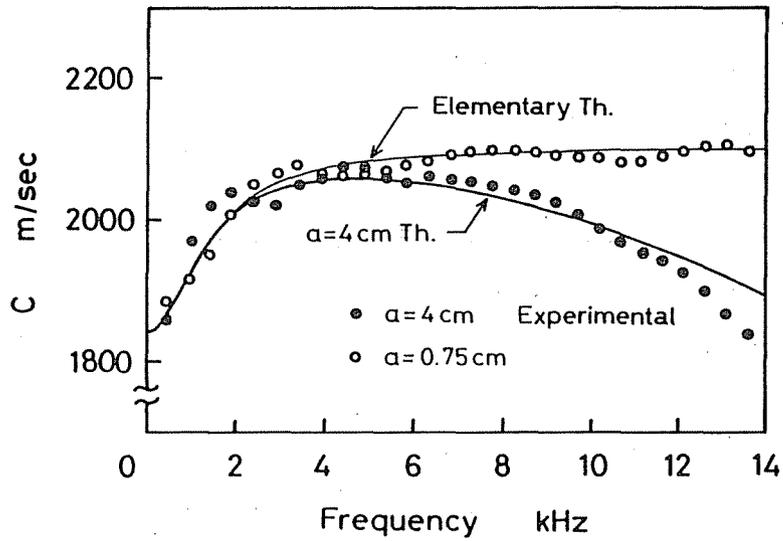
試料上の4箇所のひずみ-時間記録  $\varepsilon_j(t) = \varepsilon(x_j, t)$  ( $j = 1, 2, 3, 4$ )のそれぞれのFourier変換  $\bar{\varepsilon}_j(\omega) = \bar{\varepsilon}(x_j, \omega)$  を計算して、式(7.12)にあてはめると、

$$\bar{\varepsilon}_j(\omega) = \bar{\varepsilon}_0(\omega) \cdot \exp\{-(\alpha + i f) x_j\} \quad (7.16)$$

となる。ただしこの場合、 $x_j$  の原点は試料上の第1番目のゲージの位置とする。式(7.16)の絶対値  $|\bar{\varepsilon}_j(\omega)|$  より減衰係数  $\alpha(\omega)$  を、また位相角より速度係数  $f(\omega)$  を最小二乗法を用いて次のように定める。



(a) 減衰係数



(b) 位相速度 (分散曲線)

図 7.8 減衰・分散の周波数特性の比較

$$\left. \begin{aligned} \alpha(\omega) &= \frac{\sum x_j \cdot \sum \log |\bar{\varepsilon}_j| - n \sum x_j \cdot \log |\bar{\varepsilon}_j|}{n \sum x_j^2 - (\sum x_j)^2} \\ f(\omega) &= \frac{\sum x_j \cdot \sum \theta_j - n \sum x_j \cdot \theta_j}{n \sum x_j^2 - (\sum x_j)^2} \end{aligned} \right\} \quad (7.17)$$

さらに、 $C(\omega) = \omega / f(\omega)$  の関係を使い、位相速度を決定する。

## (2) 実験値と理論値の比較

図7.8(a), (b)にそれぞれ、減衰係数および位相速度の実験値を、理論値と比較して示す。位相速度  $C$  に比べて減衰係数  $\alpha$  は、形状的、材質的不均一性に実験値が大きく左右されると思われる。したがって、一般的に  $C$  よりも  $\alpha$  の方が実験値、理論値両者の差異が大きいようである。ただし、4 kHz 付近の  $\alpha$  の不一致は実験的誤差ではなく、その周波数域において PMMA 材が、3要素固体モデルと異なった挙動を示す(4.4節 図4.13参照)のが原因と考えられる。

$C$  および  $\alpha$  の両者に関し、 $a = 0.75\text{cm}$  の実験値の傾向は、0~14kHz の周波数全域において、初等理論によってほぼうまく表されている。したがって4.4節において、細い PMMA 棒に対する実験データを、初等理論に基づき解析したことによって求めた単軸成分の粘弾性特性は、妥当なものと言える。

一方、 $a = 4\text{cm}$  の太い試料に関する実験値は、周波数が 10kHz 程度までは理論による予測とかなり一致している。しかし、10kHz を越えると定性的傾向こそ類似してはいるが、値には差が生じ始めている。したがってこの場合、基礎式(7.3)、あるいは式(7.13)~(7.15)によって、横方向慣性の影響を論じることができるのは、周波数が 10kHz 程度まで、すなわち半径  $a$  と波長  $\lambda$  によって無次元周波数に換算すれば  $a/\lambda < \text{約} 0.2$  の範囲内が限度と考えられる。

## 7.7 小 括

本章においては、粘弾性縦波に及ぼす横方向慣性の影響を、ひずみの時間的応答(波動の伝ば)、および減衰・分散の周波数特性の2つの観点から、実験、解析によって調べた。また、第3章で示したような、初等理論に基づく単軸粘

弾性特性の同定法が、有効となる範囲を明らかにした。以下に本章の内容を要約する。

(1) Loveの仮定によって横方向慣性を考慮した粘弾性縦波の運動方程式を導き、波動の伝ばを解析する手法を示した。

(2) 横方向慣性の効果は、初等理論による1次元波形上に重畳される周期的振動として現れる。周期的振動は、弾性棒では徐々に発達してゆくが、粘弾性棒では伝ばにしたがい次第に消失してゆく。

(3) 運動方程式に Fourier変換を適用し、減衰係数および位相速度に対する横方向慣性の影響を定量的に調べた。その結果、横方向慣性の影響は、半径が大きいほど、また周波数が高いほど顕著になることを示した。また、初等理論に基づく縦波の実験・解析から、単軸成分の粘弾性特性が正しく求められる条件は、棒の半径を  $a$ 、波長を  $\Lambda$  とした場合、 $a/\Lambda < \text{約 } 0.1$  の範囲であることを明らかにした。

(4) PMMA棒を試料とした実験を行って、Loveの仮定に基づいて横方向慣性を考慮した運動方程式の妥当性を検証した。波動の解析値は、実験で得られた波形とほぼ一致しており、衝撃応答問題に対する基礎式(運動方程式)の有効性が確認された。また、 $a/\Lambda < \text{約 } 0.2$  の条件が満たされれば、基礎式によって妥当な減衰・分散特性が得られることがわかった。

## 第8章 総 括

本論文は、衝撃を受ける材料の粘弾性特性および構成方程式を求めるための新しい方法を確立するとともに、その妥当性、有効性について研究したものであった。新しい方法を確立するにあたっては、第1章で述べたような従来の粘弾性特性同定法に内包されていた次のような諸問題を検討し、改善するのが目的の1つでもあった。

### 【従来の方法の問題点】

- 1) 構成則あるいは粘弾性モデルの形を、材料に対してあらかじめ仮定しておく必要があること。
- 2) 波動の伝ばを解析する手段、および最適化法などによって解析値を実験値に一致させるための繰り返し計算が必要であること。
- 3) 粘弾性体の特性が、比較的鈍感に現れる時間領域において、同定を行っていること。
- 4) 3次元的な粘弾性特性を調べた研究がほとんどなく、さらには3次元構成方程式を提案した例がなかったこと。
- 5) 縦波伝ば（縦衝撃試験）の実験・解析から単軸の粘弾性特性を調べた研究が多く報告されていたが、その場合、横方向慣性の影響についての検討が十分なされていなかったこと。

これらの問題点のなかで 1), 2) については、それを解決する新しい粘弾性特性同定法を第3章で提案し、実際の適用例を第4章に示した。3) に関しては第6章で論じ、従来のような時間領域での同定法に比べ、本方法のような周波数領域での同定法の方が有利であることを明らかにした。また、4), 5) に関しては、それぞれ第5章、第7章において検討されており、全体として研究目的は達成されたものと思う。以下に第1章から第7章までの内容、および研究成果を要約する。

第1章では、従来の粘弾性特性同定法の問題点を指摘し、本研究の意義について述べた。また、研究に必要な線形粘弾性理論の知識を第2章で概説した。

第3章では、粘弾性棒中の縦波またはねじり応力波の伝ばに Fourier 周波数解析を適用して、単軸応力状態あるいは単純せん断状態での複素コンプライアンスを求め、その周波数に対する傾向に基づいて粘弾性モデルを同定する実験的解析手法を示した。この方法においては、粘弾性波伝ばの現象的事項は複素コンプライアンスを定める際に用いる公式の中に組み込まれているため、従来のように粘弾性モデルの種類を仮定して波動を解析する必要はなく、実験波形との一致を実現するための繰り返し計算も不要である。本方法の特徴は、粘弾性体の振動を扱うために用いられてきた複素コンプライアンスのような周波数応答特性を、波動伝ばという衝撃現象に取り入れたことである。粘弾性モデルの種類を実験データに基づいて判断でき、さらにはその際の、近似の度合いを認識できることは、従来の方法にはなかった大きな利点となっている。

縦衝撃およびねじり衝撃の両実験を行い、第3章で提案した同定法を実際に適用することにより第4章では、PMMA材と数種の金属材料についての1次元粘弾性特性を同定した。その結果、PMMA材の単軸およびせん断に関する動的挙動は、両者とも広い周波数範囲において、3要素固体モデルによって近似できることを明らかにした。高減衰能合金の単軸挙動に対してはそれぞれ、Mn-Cu合金では0~30 kHz、Fe-Cr-Al合金では0~15 kHzの限られた周波数範囲内において4要素流体モデルが適用でき、銅に対してはMaxwell流体モデルが適用できることを明らかにした。また、それぞれの材料について、粘弾性モデルの定数を定めた。

第5章ではPMMA材の粘弾性特性を3次元的に評価する目的から、弾性-粘弾性間の対応関係に基づき、単軸およびせん断の両者に対する複素コンプライアンスを組み合わせ、複素ポアソン比と複素体積弾性係数を求めた。その結果、複素ポアソン比に関しては一定の実数として扱うことができ、一方複素体積弾性係数についても、近似的には一定の実数とみなせることを明らかにし

た。また、ポアソン比を一定の実数とし、これと単軸応力状態についての微分演算子ペアとを用いて、一般的かつ実用的な形で3次元粘弾性構成方程式の定式化を行い、種々の動的応力解析問題に供し得るようにした。

有限積分変換法による1次元粘弾性波伝ばの解析法を第6章で示した。この方法を用いて、縦衝撃、ねじり衝撃の両実験で観測された波動について解析した。解析波形と実験波形とは良好な一致を示し、同定した粘弾性モデルの妥当性、および衝撃応答問題への有効性が検証された。また、粘弾性定数の影響度は、ひずみの時間的応答に対しては極めて小さいけれども、複素コンプライアンスに対しては非常に顕著であることを明らかにし、本論文で提案したような、周波数領域での粘弾性特性同定法の利点について論じた。

第7章においては、Loveの仮定によって横方向慣性を考慮した運動方程式のもとに、粘弾性縦波に及ぼす幾何分散の影響を調べ、初等理論に基づいた実験・解析から正しく粘弾性特性が求められるための条件について検討した。ひずみの時間的応答において、横方向慣性の影響は1次元波形上に重畳される周期的振動となって現れ、弾性棒の場合に比べ、すみやかに消失することを示した。減衰・分散の周波数特性に対しては、棒の半径が大きいほど、また周波数が高くなるほど、横方向慣性の影響が顕著になることを示した。これより、初等理論による実験・解析から正しく粘弾性特性が同定されるための条件は、棒の半径を $a$ 、応力波の波長を $\Lambda$ とした場合、 $a/\Lambda < \text{約} 0.1$ の範囲であることを明らかにした。また、実験と解析の比較から、Loveの仮定によって横方向慣性を考慮することの有効性は $a/\Lambda < \text{約} 0.2$ までが限度であることを明らかにした。

## 謝 辞

末尾ながら、本研究を行うにあたり終始懇切な御指導を賜りました大阪大学工学部 岸田敬三教授，ならびに愛媛大学工学部 都築正之教授に心から感謝の意を表しますとともに、有益な御教示を賜りました大阪大学工学部 山田朝治教授，牧之内三郎教授，濱田實教授に厚く感謝致します。

また、大阪大学での学部，大学院在学当時から今日に至るまで御指導いただきました大阪大学名誉教授(現 岡山理科大学教授) 中川憲治先生に心から御礼申し上げます。

さらに、研究に御協力いただきました奥田弘司，石丸祐基，山本順一，横山英二，大森長門の諸氏に謝意を表します。

## 参 考 文 献

- (1) 松本, 機論, 48-436 A (昭57), 1475.
- (2) Lindholm, U. S., "Behavior of Materials under Dynamic Loading", (1965), 42, ASME.
- (3) 中川・ほか 2 名, 材料, 34-384 (昭60), 1115.
- (4) Bhushan, B. and Dauer, F. W., Exp. Mech., 35-11 (1978), 421.
- (5) Smith, T. L., J. Polymer Sci., 17 (1979), 2181.
- (6) Distefano, N., Int. J. Solids & Struct., 6 (1970), 1021.
- (7) Distefano, N., Int. J. Solids & Struct., 9 (1973), 805.
- (8) Haddad, Y. M., Int. J. Engng. Sci., 18-2 (1980), 325.
- (9) Christensen, R. M., J. Appl. Mech., 47-4 (1980), 325.
- (10) 宮野・ほか 2 名, 機論, 34-262 (昭43), 1060.
- (11) 難波・ほか 2 名, 材料, 22-242 (昭48), 1002.
- (12) 林・ほか 2 名, 機論, 45-398 A (昭54), 1276.
- (13) 日本金属学会編, "転位論", (昭46), 411, 丸善.
- (14) Fung, Y. C., "Foundations of Solid Mechanics", (1965), Prentice-Hall.  
(大橋・ほか 2 名 共訳, "固体の力学/理論", (1970), 27, 培風館.)
- (15) Norris, D. M. Jr. and Young, W. C., Exp. Mech., 10-2 (1970), 93.
- (16) Forrestal, M. J. and Sagartz, M. J., J. Appl. Mech., 42-1 (1975), 205.
- (17) 鈴木, 機論, 33-249 (昭42), 686.
- (18) 坂田・ほか 3 名, 機論, 46-411 C (昭55), 1364.
- (19) 坂田・木村, 機論, 48-436 C (昭57), 1889.
- (20) 遠藤・高塚, 機論, 48-432 C (昭57), 1185.
- (21) 遠藤・酒井, 機論, 51-462 C (昭60), 257.
- (22) Kolsky, H., Phil. Mag., 1 (1956), 693.
- (23) Kolsky, H., Int. Sym. on Stress Wave Propagation, (1960), 59,  
Interscience Pub. New York.
- (24) Lifshitz, J. M. and Kolsky, M., J. Mech. Phys. Solids, 13-6 (1965), 361.
- (25) Arentz, R. J., J. Appl. Mech., 31-1 (1964), 17.
- (26) Daniel, I. M., J. Appl. Mech., 32-3 (1965), 598.
- (27) Norris, D. M. Jr., Exp. Mech., 7-7 (1967), 297.
- (28) Knauss, W. G., J. Appl. Mech., 35-3 (1968), 449.
- (29) Tsai, Y. M. and Kolsky, H., J. Mech. Phys. Solids, 16-2 (1968), 99.

- (30) Mao, M. and Rader D., *Int. J. Solids & Struct.*, 6(1970), 519.
- (31) Sackman, J. L. and Kaya, I., *J. Mech. Phys. Solids*, 16-5(1968), 349.
- (32) Sackman, J. L. and Kaya, I., *J. Mech. Phys. Solids*, 16-2(1968), 121.
- (33) Lin, I. H. and Sackman, J. L., *Int. J. Solids & Struct.*, 11-10(1975), 11.
- (34) 松本・ほか 2 名, *機論*, 45-399(昭54), 1409.
- (35) 中川・ほか 2 名, *機講論*, No. 774-12(昭52), 100.
- (36) 中川・ほか 3 名, *機講論*, No. 784-2(昭53), 87.
- (37) Kolsky, H., *Proc. Phys. Soc.*, B 62(1949), 673.
- (38) Chiu, S. S. and Neubert, V. H., *J. Mech. Phys. Solids*, 15-3(1967), 177.
- (39) 山田・沢田, *塑性と加工*, 10-98(昭44), 141.
- (40) Tang, C. T. and McConnell, K. G., *Exp. Mech.*, 17-3(1977), 113.
- (41) 松本, *材料*, 34-376(昭60), 47.
- (42) Kolsky, H., "Stress Waves in Solids", (1963), 54, Dover.
- (43) 岸田敬三, 大阪大学博士論文, (昭43), 47.
- (44) 岸田・千田, *機論*, 37-262(昭46), 875.
- (45) 山本, "物体の変形学", (昭47), 150, 誠文堂新光社.
- (46) Flügge, W., "Viscoelasticity", (1975), 22, Springer-Verlag.  
(堀 訳, "粘弾性学", (昭48), 18, 培風館.)
- (47) 中川, "レオロジー", (昭35), 181と203, 岩波書店.
- (48) 曾我部・都築, *機論*, 51-472 A(昭60), 2738.
- (49) Sogabe, Y. And Tsuzuki, M., *Bull. JSME*, 29-254(1986), 2410.
- (50) Santosham, T. V. and Ramsey, H., *Int. J. Mech. Sci.*, 11(1969), 751.
- (51) Yew, C. H. and Chen, C. S., *Int. J. Engng. Soc.*, 18(1980), 1027.
- (52) Bland, D. R. and Lee, E. H., *J. Appl. Mech.*, 23-3(1956), 416.
- (53) Flügge, W., et al., "Handbook of Engineering Mechanics", (1962), 53-10, McGraw-Hill.
- (54) 曾我部・ほか 2 名, *機論*投稿中.
- (55) 植田・竹田, *三菱重工技報*, 11-6(昭49), 770.
- (56) 杉本, *鉄と鋼*, 60-14(昭49), 2203.
- (57) 杉本・水谷, *日本金属学会誌*, 39-5(昭50), 503.
- (58) 杉本, *日本金属学会報*, 14-7(昭50), 491.
- (59) 曾我部・ほか 2 名, *機論*, 47-419 A(昭56), 748.
- (60) Sogabe, Y., et al., *Bull. JSME*, 25-201(1983), 321.
- (61) 大西, "計測工学", (昭41), 248, 理工新社.
- (62) 福岡・ほか 3 名, *機論*, 43-367(昭52), 883.

- (97) Nowacki, W., "Dynamics of Elastic System", (1963), 83, Chapman & Hall.
- (98) Miklowitz, J. "The Theory of Elastic Waves and Waveguides". (1978), 371, North-Holland.
- (99) Testa, R. B., J. Appl. Mech., 33-3(1966), 687.
- (100) 田中・元山, 機論, 40-330(昭49), 382.
- (101) 内藤・台丸谷, 機論, 50-453, A (昭59-5), 1097.
- (102) 曾我部・ほか 2 名, 機論, 52-473A (昭61-1), 261.

- (63) 茶谷・放生, 機論, 44-381(昭53), 1145.
- (64) 岸田・ほか2名, 第22回構造強度に関する講演会講演集, (昭55), 280.
- (65) 高橋, 計測と制御, 13-3(昭49), 246.
- (66) 牧之内・鳥居, "数値解析", (昭50), オーム社.
- (67) 渡部・ほか2名, "数値解析とFORTRAN(第3版)", (昭58), 743, 丸善.
- (68) Barez, F., et al., Exp. Mech., 20-10(1980), 325.
- (69) 田中・黒川, 機論, 38-310(昭47), 1217.
- (70) Arentz, R. J., J. Appl. Mech., 32-2(1965), 303.
- (71) 三沢・ほか2名, 機論, 48-425 A(昭57), 35.
- (72) 川井・ほか2名, 機論, 48-425 A(昭57), 101.
- (73) 文献(46)と同じ, 159.
- (74) 文献(53)と同じ, 53-5.
- (75) 牟岐, 機誌, 64-513(昭36), 1392.
- (76) 国尾・Williams, 機誌, 68-552(昭40), 83.
- (77) Lee, E. H. and Kanter, I., J. Appl. Phys., 24-9(1953), 1115.
- (78) Lee, E. H. and Morrison, J. A., J. Polymer Sci., 19(1956), 93.
- (79) Morrison, J. A., Quart. Appl. Math., 14(1956), 153.
- (80) 松本・ほか2名, 機論, 45-396 A(昭54), 902.
- (81) Swanson, S. R., J. Appl. Mech., 47-4(1980), 769.
- (82) Glauz, R. D. and Lee, E. H., J. Appl. Phys., 25-8(1954), 947.
- (83) 沢田・山田, 塑性と加工, 11-117(昭45), 724.
- (84) 山田・沢田, 塑性と加工, 11-119(昭45), 876.
- (85) Zienkiwicz, O. C., et al., Int. J. Mech. Sci., 10(1968), 807.
- (86) Carpenter, W. C., Int. J. Num. Methods Engng., 4(1972), 357.
- (87) 山田, "コンピュータによる構造工学講座 II -2-A/塑性・粘弾性", (昭47), 84, 培風館.
- (88) Achenbach, J. D. and Reddy, D. P., Z. Angew. Math. u. Phys., 18(1967), 141.
- (89) 中川紀寿, 大阪大学博士論文, (昭51).
- (90) 中川・ほか2名, 機論, 43-367(昭52), 889
- (91) Senda, K. and Tuzuki, M., Tech. Repts. Osaka Univ., 16-689(1966), 89.
- (92) 都築・曾我部, 愛媛大学工学部紀要, 10-4(昭60), 49.
- (93) Goldsmith, W., "Impact", (1960), 30, Edward Arnold.
- (94) Bancroft, D., Phys. Rev., 59-1(1941), 588.
- (95) Skalak, R., J. Appl. Mech., 24-1(1957), 59
- (96) Zak, A. R., J. Appl. Mech., 31-1(1964), 150.

- (63) 茶谷・放生, 機論, 44-381(昭53), 1145.
- (64) 岸田・ほか2名, 第22回構造強度に関する講演会講演集, (昭55), 280.
- (65) 高橋, 計測と制御, 13-3(昭49), 246.
- (66) 牧之内・鳥居, "数値解析", (昭50), オーム社.
- (67) 渡部・ほか2名, "数値解析とFORTRAN(第3版)", (昭58), 743, 丸善.
- (68) Barez, F., et al., Exp. Mech., 20-10(1980), 325.
- (69) 田中・黒川, 機論, 38-310(昭47), 1217.
- (70) Arentz, R. J., J. Appl. Mech., 32-2(1965), 303.
- (71) 三沢・ほか2名, 機論, 48-425A(昭57), 35.
- (72) 川井・ほか2名, 機論, 48-425A(昭57), 101.
- (73) 文献(46)と同じ, 159.
- (74) 文献(53)と同じ, 53-5.
- (75) 牟岐, 機誌, 64-513(昭36), 1392.
- (76) 国尾・Williams, 機誌, 68-552(昭40), 83.
- (77) Lee, E. H. and Kanter, I., J. Appl. Phys., 24-9(1953), 1115.
- (78) Lee, E. H. and Morrison, J. A., J. Polymer Sci., 19(1956), 93.
- (79) Morrison, J. A., Quart. Appl. Math., 14(1956), 153.
- (80) 松本・ほか2名, 機論, 45-396A(昭54), 902.
- (81) Swanson, S. R., J. Appl. Mech., 47-4(1980), 769.
- (82) Glauz, R. D. and Lee, E. H., J. Appl. Phys., 25-8(1954), 947.
- (83) 沢田・山田, 塑性と加工, 11-117(昭45), 724.
- (84) 山田・沢田, 塑性と加工, 11-119(昭45), 876.
- (85) Zienkiwicz, O. C., et al., Int. J. Mech. Sci., 10(1968), 807.
- (86) Carpenter, W. C., Int. J. Num. Methods Engng., 4(1972), 357.
- (87) 山田, "コンピュータによる構造工学講座Ⅱ-2-A/塑性・粘弾性", (昭47), 84, 培風館.
- (88) Achenbach, J. D. and Reddy, D. P., Z. Angew. Math. u. Phys., 18(1967), 141.
- (89) 中川紀寿, 大阪大学博士論文, (昭51).
- (90) 中川・ほか2名, 機論, 43-367(昭52), 889
- (91) Senda, K. and Tuzuki, M., Tech. Repts. Osaka Univ., 16-689(1966), 89.
- (92) 都築・曾我部, 愛媛大学工学部紀要, 10-4(昭60), 49.
- (93) Goldsmith, W., "Impact", (1960), 30, Edward Arnold.
- (94) Bancroft, D., Phys. Rev., 59-1(1941), 588.
- (95) Skalak, R., J. Appl. Mech., 24-1(1957), 59
- (96) Zak, A. R., J. Appl. Mech., 31-1(1964), 150.

- (97) Nowacki, W., "Dynamics of Elastic System", (1963), 83, Chapman & Hall.
- (98) Miklowitz, J. "The Theory of Elastic Waves and Waveguides", (1978), 371, North-Holland.
- (99) Testa, R. B., J. Appl. Mech., 33-3(1966), 687.
- (100) 田中・元山, 機論, 40-330(昭49), 382.
- (101) 内藤・台丸谷, 機論, 50-453, A (昭59-5), 1097.
- (102) 曾我部・ほか 2 名, 機論, 52-473A (昭61-1), 261.