OUKA
Osaka University Knowledge Archive

Title	運動媒質中における電磁波の放射と伝搬に関する研究 : 相対論的考察
Author(s)	田中, 嘉津夫
Citation	大阪大学, 1975, 博士論文
Version Type	VoR
URL	https://hdl.handle.net/11094/239
rights	
Note	

Osaka University Knowledge Archive : OUKA

https://ir.library.osaka-u.ac.jp/

Osaka University

運動媒質中における電磁波の放射と伝搬に関する研究—相対論的考察

昭和４９年１２月

田 中 嘉 津 夫

序　文

本論文は著者が大阪大学大学院工学研究科（通信工学専攻）に在学中に行なった運動媒質中における電磁波の放射と伝搬に関する研究の成果をまとめたものであり，つぎの6章からなっている。

第1章は序論であって，最近の宇宙工学，電波天文学等の進歩に伴って，運動媒質中における電磁波の放射と伝搬に関する研究が，その工学的応用面で脚光を浴びるようになってきた経緯を述べるとともに，本研究がこの分野において占める地位を明らかにしたものである。

第2章では，等速度運動している不均質媒質による平面電磁波の反射と透過の問題について，その特殊相対論的取り扱いを論じている。運動不均質媒質として誘電率が直線的に変化している誘電体および電子密度が直線的に変化している等方性プラズマを考え，運動不均質媒質中においてなりたつ波動方程式を，入射E波の場合はBessel関数，入射H波の場合は級数解を用いて厳密に解いている。特に，電力反射係数および運動不均質媒質中での幾何光学的反射点については数値計算例をあげて，媒質の運動の影響を定量的に検討している。

第3章では，等速度運動している不均質スラブ中におかれた線波源からの放射の問題について，その特殊相対論的取り扱いを論じている。波源として無限長線電流源および無限長線磁流源を，運動不均質スラブとして，誘電率が直線的に変化している誘電体，および電子密度が直線的に変化している等方性ならびに1軸性プラズマを考え，第2章で得られた解を用いて，遠距離放射電磁界を求めている。特に，プラズマスラブの場合については，数値計算例を示しながら，放射パターンにおよぼすプラズマの運動の影響を調べ，プラズマが均質な場合との差異を明らかにしている。

第4章では，従来特殊相対論を用いて取り扱われてきた等速度運動している媒質中における電磁波に関して，一般相対論を考慮した電磁界理論の立場から論じている。一例として，等速度運動している半無限誘電体による平面電磁波の反射と透過の問題を，一般相対論的考察および手法を用いて解析し，その結果，特殊相対論的に解析した場合と比べ，より一般的な取り扱いが可能になり，結果も特殊相対論的に求めたものと矛盾しないことを示す。

第5章では，一方向に加速度運動を行なっている誘電体中における電磁

波に関する一般相対論的な取り扱いについて論じている。初等関数で表わしうる厳密解を求め，その性質について誘電体が等速度運動している場合と関連づけて詳しく論じている。特に，媒質と共に加速度運動を行なう観測から見た場合は，等価重力場中におかれた媒質中での電波伝搬の問題になり，等価重力場が電波伝搬におよぼす種々の効果について詳しく論じている。

第6章は結論であって，本研究の成果を総括して述べている。

以上の各章を構成する研究内容は，すべて電子通信学会論文誌，Radio Science，電子通信学会アンテナ伝搬研究会，電気学会電磁界理論研究会，電子通信学会全国大会，および輻射科学研究会等においてすでに発表されたものである。

目　次

第 1 章　序 論 ---------- 1

第 2 章　等速度運動をしている不均質媒質による平面電磁波の反射と透過 —— 特殊相対論的取り扱い ------- 5
2・1　序 言 ---------- 5
2・2　波動方程式 ---------- 5
2・3　幾何光学的反射点および級数解 ---------- 11
2・4　電力反射係数および電力透過係数 ---------- 13
2・5　運動不均質プラズマへの応用 ---------- 16
2・6　結 言 ---------- 19

第 3 章　等速度運動をしている不均質スラブ中におかれた線波源からの電磁放射 —— 特殊相対論的取り扱い ------ 20
3・1　序 言 ---------- 20
3・2　波動方程式 ---------- 20
3・3　等方性不均質媒質 ---------- 23
3・4　1軸性不均質媒質 ---------- 25
3・5　遠距離放射電磁界 ---------- 26
3・6　運動不均質プラズマスラブ ---------- 27
3・7　結 言 ---------- 31

第 4 章　等速度運動をしている媒質の電磁波 —— 一般相対論的取り扱い ------- 32
4・1　序 言
4・2　一般相対論からみた広義のガリレイ変換とロー

レンツ変換----------32
4・3 基礎理論----------34
4・4 運動半無限誘電体による平面電磁波の反射と透過----------35
4・5 結 言----------39

第5章 加速度運動をしている媒質中の電磁波 —— 一般相対論的取り扱い-----41
5・1 序 言----------41
5・2 波動方程式----------42
5・3 エネルギー速度および位相速度----------45
5・4 逆変換----------48
5・5 観測量および重力Doppler-shift----------49
5・5・1 瞬時静止系----------49
5・5・2 重力Doppler-shift----------52
5・6 結 言----------54

第6章 結 論----------55

謝 辞----------57

文 献----------58

付 録----------63

第1章　序　論

工学の分野において従来取り扱われてきた電磁現象は，観測者，波源および媒質の三者が相対的に静止しているか，あるいは近似的に静止していると見なせる場合に限られていた。ところが，近年における宇宙工学，電波天文学，天体物理学およびプラズマ工学等の急速な発展にともない，運動媒質中における巨視的な電磁界理論，すなわち相対性理論を考慮した巨視的な電磁界理論の重要性が認識され，その工学的応用と関連した研究が各方面で活発に行なわれるようになってきている。たとえば，太陽から放出された高速運動するプラズマ粒子による電磁波の散乱の問題[1][2]，プラズマ加熱や，マイクロ波波源に用いられる高速電子ビームの問題[3][4]等においては特殊相対論を考慮した電磁界理論を，回転運動の検出に使用されるリングレーザージャイロ中における光波の伝搬の問題[5]および回転運動するプラズマ中における電磁波動の問題[6][7]等においては，回転運動が加速度運動であるため，一般相対論を考慮した電磁界理論を，それぞれ使用して解析する必要がある。また以上のような現実的な必要性の他に，運動媒質における巨視的な電磁界方程式自体の有効性に関する理論研究として，その必要性も報告されている[8]

ところで，上記のような運動媒質中における電磁界理論に関する研究は，大別して，(I) 特殊相対論の範囲で取り扱うことができる問題　(II) 一般相対論をも考慮しなければならない問題　の二つの場合にわけることができる。(I) の問題に対して必要な基礎理論，すなわち等速度運動を行なう波源，媒質あるいは観測者を含む系における巨視的な電磁界理論は，Hertz[9]，Cohn および Lorentz 等を経て Einstein の特殊相対論[10] と合致した型式で，1908年に Minkowski[11] によって与えられた。Minkowski の理論は，理論自体が簡明であり，他の理論[12]に比べて最も矛盾が少なく，現在工学の分野において Minkowski 型式の Maxwell 方程式として，等速度運動する媒質中の電磁界解析にもっともよく用いられている。(II) の問題に対して必要な基礎理論，すなわち加速度運動を行なう波源，媒質あるいは観測者を含む系での巨視的な電磁界理論は，Minkowski の理論を Einstein の一般相対論[13] とも合致する型式で定式化しようとする試みとして，ごく最近 Heer[14]，Yildiz および Tang[15]，Anderson および Ryon[16][17] ならびに M.

[18]らによって発展させられてきたものである。このような，いわゆる加速系の電磁界理論においては，特に観測者が加速度運動を行なう場合，すなわち非慣性系中に存在する場合，問題は等価原理により，重力場中における電磁界理論の問題になり，(I)の問題に比べより複雑になる。[19] しかし，特殊相対論を考慮したMinkowski理論は，一般相対論をも考慮したMinkowski理論の特別な場合と考えることができ，(II)の問題は(I)の問題に比べより一般的とも考えることができる。

本論文は，以上述べたような基礎理論の工学的応用，および理論自体の有効性に関する研究の一環として，運動媒質中における電磁波の放射と伝搬の問題について，特殊相対論および一般相対論を考慮したMinkowski理論を用いて論じたものである。

まず，第2章においては，等速度運動している不均質媒質による平面電磁波の反射と透過現象の特殊相対論的な取り扱いについて論じる。等速度運動を行なう均質媒質による平面電磁波の反射と透過および散乱に関する問題は，これまで多数の研究者により取り扱われており，[20]～[25]種々の興味ある結果も報告されている。しかし実際的な問題として運動媒質を取り扱う場合には，上記のような研究を媒質が不均質な場合にも拡張する必要があると考えられる。Kritikos[26]および深井ら[27][28]は，運動速度の分布が不均質な誘電体およびプラズマによる平面電磁波の反射の問題を，Pogorzelski[29]は誘電率分布ならびに速度分布が不均質で，境界面に垂直な方向に拡大している媒質による平面電磁波の反射の問題を，それぞれ取り扱っている。また塩沢ら[30][31]は，軸方向に等速運動する不均質プラズマ円柱による平面電磁波の散乱の問題を取り扱っている。しかし，上記の報告はすべて近似解法を用いたものであり，厳密解を用いたものはまだないようである。第2章では，運動不均質媒質として誘電率が直線的に変化している誘電体および電子密度が直線的に変化している等方性プラズマを考え，それらによる平面電磁波の反射と透過の問題を厳密解を用いて論じる。入射E波の場合はBessel関数，入射H波の場合は級数解を用いて厳密解を求め，特に電力反射係数，および幾何光学的反射点については数値計算例を示しながら，媒質の運動の影響を詳しく調べる。[32]～[34]

第3章においては，第2章において得られた厳密解を用いて，等速度運動している不均質誘電体およびプラズマスラブ中におかれた線波源からの放射の問題を，特殊相対論的に取り扱う。等速度運動媒質中におかれた波源

からの電磁放射の問題に関しても，飛しょう体の大気圏再突入問題および高速度プラズマ診断と関連して，これまで多数報告されている。[35)~(39)] しかしながら，そのほとんどは媒質が均質な場合を取り扱っており，媒質が不均質な場合を取り扱ったものはまだ見あたらない。再突入の際の飛しょう体の周囲にできるプラズマ層を考えてみてもわかるように，実際問題の多くの場合，媒質は不均質であると考えられる。第3章では，誘電率が直線状に変化している運動不均質スラブ中に，無限長線波源が存在する場合を考え，線波源からの電磁放射におよぼす媒質の運動および不均質の影響について調べる。Maxwell-Minkowskiの方程式から導かれる波動方程式を，Fourier変換を用いて電磁界を求める。特に媒質が，電子密度が直線状に分布しているような不均質等方性プラズマ，および不均質1軸性プラズマである場合については，放射パターンの数値計算を行ない，媒質が均質な場合との差異を明らかにしながら，媒質の運動の影響を調べる。[40)(41)]

第4章においては，従来，特殊相対論を用いて取り扱われていた，等速度運動する媒質中における電磁界について，一般相対論を考慮したMinkowski理論の立場から論じる。特殊相対論を考慮したMinkowski理論は，一般相対論を考慮したMinkowski理論の特別な場合と考えられ，したがって従来特殊相対論的に，Maxwell方程式のLorentz変換に対する共変性を利用して解析していた等速度運動する媒質中の電磁界について，一般相対論を考慮したMinkowski理論を用いれば，従来の結果と矛盾なく，かつより一般的に取り扱うことができると考えられる。第4章では，例として，等速度運動している半無限誘電体による平面電磁波の反射と透過の問題[21)]を取り上げ，Lorentz変換を広義のGalilei変換およびGauge変換に分解し，Gauge変換に対する電磁界の変化を一般化されたMinkowski構成関係式にくり込んでしまえば，媒質の静止系として広義のGalilei変換で定義される系を用いても形式的に解くことができ，かつLorentz変換を用いて解析した結果と矛盾しないことを示す。[42)]

第5章においては，一般相対論的な取り扱いが必要な問題の一つと考えられる，一方向に加速度運動を行なう誘電体中における電磁波の伝搬の問題について論じる。この種の問題は，AndersonおよびRyon[16)(17)]ならびにMo[43)]によって始めて取り扱われた問題であるが，厳密解を求めるのが困難で，上記の報告においてもすべて近似解を用いて論じられている。したがって，加速度運動を行なう誘電体中における電磁波の伝搬特性の詳細な

議論をするためには，上記の報告では不十分と考えられる。そこで，第5章では，Maxwell 方程式の一般座標変換に対する共変性を利用して，Møllerの変換で与えられるような加速度運動を行なう誘電体中での，電磁波について厳密解を求める。媒質とともに加速度運動を行なう観測者から見れば，その解が最も簡単な計量をもつ非永久重力場中におかれた媒質中での解になっており，等価重力場による光線のわん曲，および，重力 Doppler-shift もがその解のエネルギー関係式から導かれること，また，それらは媒質の影響をうけないことなどを示す。観測者が慣性系にいるときは，その解から，加速度運動に対応する，エネルギー速度，および，位相速度の加法則が得られることも示す。(44)~(46)

第2章　等速度運動をしている不均質媒質による平面電磁波の反射と透過――特殊相対論的取り扱い[32)~34)]

2.1　序　言

等速度運動している不均質媒質による平面電磁波の反射と透過の問題は，運動媒質中の電波伝搬や，運動プラズマへの実際的な応用の基礎的問題として重要と考えられるが，これまでに報告されているものは少数である。Kritikos[26)]らは，運動速度の分布が不均質な媒質に平面電磁波が入射した場合について，反射係数に対して成立する微分方程式を導出，かつ近似的に解くことにより反射係数におよぼす運動の不均質の効果を数値計算例をあげて調べている。深井ら[27)28)]はKritikosらが用いた方法を，運動している不均質プラズマに適用し，近似的に解析している。Pogorzelskiは誘電率分布，および速度分布が不均質で，境界面に垂直な方向に拡大している媒質による平面電磁波の反射の問題を，垂直入射の場合についてローレンツ変換を用いて解析している。[29)]しかしながら，上記の報告はすべて近似解法を用いたものであり厳密に解析した例はまだないようである。本章では，誘電率が場所に関して直線的に変化し，境界面および入射面に平行に運動している不均質誘電体による平面電磁波の反射と透過の問題を，Maxwell-Minkowskiの方程式を直接解くことにより厳密に解析する。[32)33)]さらに理論を実際的な応用として，電子密度が直線的に変化しているような運動不均質プラズマによる平面電磁波の反射と透過の問題に適用する。その結果，入射H波の場合，波動方程式に均質プラズマでは現われなかった運動の効果が現われることがわかる。

2.2　波動方程式

図2.1に示されているように，誘電率 $\varepsilon_1=\varepsilon_0\varepsilon_1^*$，透磁率 μ_0 の均質媒質Iが観測者に対して静止しており，誘電率 $\varepsilon(z)=\varepsilon_0\varepsilon^*(z)$，透磁率 μ_0 の不均質媒質IIと誘電率 $\varepsilon_4^*=\varepsilon_0\varepsilon_4^*$，透磁率 μ_0 の均質媒質IIIがそれぞれ，v_1 および v_2 なる速さでy方向に運動しているものとする。ただし，すべて媒質は線形，等方，無損失とし不均質媒質IIの比誘電率 $\varepsilon^*(z)$ は次式で与えられるものとする。

$$\varepsilon^*(z)=\varepsilon_2^*-(\varepsilon_2^*-\varepsilon_3^*)\frac{z}{z_0} \qquad (2\cdot1)$$

ただし　$\varepsilon_2^* > \varepsilon_3^*$

さて，媒質Ⅰから Ⅱへ一様な平面電磁波が入射するものとし，電界が入射面に平行な入射波(H波)および，入射面に垂直な入射波(E波)，およびそれぞれの反射波について，つぎのように表わされるものとする。

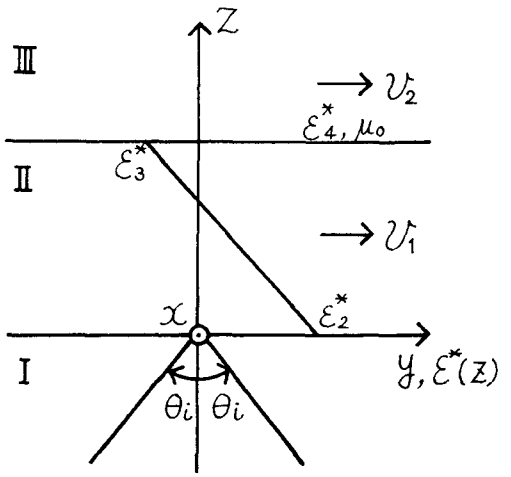


図2·1 座標系および媒質Ⅰ,ⅡおよびⅢの比誘電率

入射波（E_i, H_i）

$$\left.\begin{matrix} \text{E波}: E_i \\ \text{H波}: H_i \end{matrix}\right\} = \left\{\begin{matrix} E_0 \\ H_0 \end{matrix}\right\} \exp\left\{i(k_{iy}y + k_{iz}z - \omega t)\right\} \quad (2\cdot2)$$

反射波（E_r, H_r）

$$\left.\begin{matrix} E_r \\ H_r \end{matrix}\right\} = \left\{\begin{matrix} R_E E_0 \\ R_H H_0 \end{matrix}\right\} \exp\left\{i(k_{iy}y - k_{iz}z - \omega t)\right\} \quad (2\cdot3)$$

ただし

$$k_{iy} = k_0\sqrt{\varepsilon_1^*}\sin\theta_i, \qquad k_{iz} = k_0\sqrt{\varepsilon_1^*}\cos\theta_i$$
$$k_0 = \omega/c, \qquad c = (\varepsilon_0\mu_0)^{-1/2} \quad (2\cdot4)$$

ここで，E_0, H_0 はそれぞれE波およびH波の一定の振幅，ω は入射波の角周波数，θ_i は入射角である。式(2-3)においては，$z=0$ の境界面上で入射波と反射波の位相項は等しくならねばならないという境界条件からの要請を用いた。また，R_E, R_H はそれぞれE波およびH波の反射係数であり，電磁界に対する境界条件から決まる未知定数である。また式(2·2)および式(2·3)において他の電磁界成分はマクスウェルの方程式から求められる。

つぎに，運動不均質媒質Ⅱの中の電磁界（$E_Ⅱ$, $H_Ⅱ$）について考察しよう。誘電率の分布が z だけに依存し，かつ運動方向が y 方向のみである場合，系の時間変化を $e^{-i\omega t}$ とすると，Maxwell-Minkowski の方程式はつぎのようになる(47)

$$\left\{(\nabla + i\omega\mathbb{b}(z)\right\} \times E = i\omega\mu_0\,\bar{\alpha}(z)\cdot H \quad (2\cdot5a)$$

$$\{\nabla + i\omega b(z)\} \times H = -i\omega\varepsilon_0 \varepsilon^*(z)\bar{a}(z)\cdot E \qquad (2\cdot 5b)$$

ただし $\nabla = \frac{\partial}{\partial y} j + \frac{\partial}{\partial z} k$, $b(z) = b(z) j = \frac{\{\varepsilon^*(z) - 1\}}{\{1 - \varepsilon^*(z)\beta_1^2\} C} j$

$$\bar{a}(z) = \begin{vmatrix} a(z) & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & a(z) \end{vmatrix}, \quad a(z) = \frac{1-\beta_1^2}{1-\varepsilon^*(z)\beta_1^2}, \quad \beta_1 = \frac{v_1}{C} \qquad (2\cdot 6)$$

境界条件を考慮すると，運動不均質媒質中の電磁界（E_{II}, H_{II}）は，入射波がE波の場合は電界E_{II}がx方向成分のみを，H波の場合は磁界H_{II}がx方向成分のみをもつ。それゆえ，式(2·5)からE波の場合はHを，H波の場合はEを消去すれば，E_{IIx}およびH_{IIx}に対し，それぞれつぎの偏微分方程式が得られる。

（E波）

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2} E_{IIx} + \frac{1}{a(z)}\left\{\frac{\partial}{\partial y} + i\omega b(z)\right\}^2 E_{IIx} + k_0^2 \varepsilon^*(z) a(z) E_{IIx} = 0 \qquad (2\cdot 7)$$

（H波）

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2}\left\{\frac{1}{\varepsilon^*(z)}\frac{\partial}{\partial z}\right\} H_{IIx} + \frac{1}{\varepsilon^*(z)a(z)}\left\{\frac{\partial}{\partial y} + i\omega b(z)\right\}^2 H_{IIx} + k_0^2 a(z) H_{IIx} = 0 \qquad (2\cdot 8)$$

式(2·7)，式(2·8)の解を得るために，E_{IIx}, H_{IIx}をつぎのように仮定する。

$$\begin{Bmatrix} E_{IIx} \\ H_{IIx} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F(z) \\ G(z) \end{Bmatrix} \exp\{ik(z)y\} \qquad (2\cdot 9)$$

式(2·9)を式(2·7)および式(2·8)に代入して得られる式が任意のyの値に対してなりたつためには，$k(z)$, $F(z)$および$G(z)$に対し，それぞれ次式が成立しなければならないことがわかる。

$$\frac{d}{dz}\{k(z)\} = 0 \qquad (2\cdot 10)$$

$$\frac{d^2F(z)}{dz^2} - \frac{\{k(z) + \omega b(z)\}^2}{a(z)} F(z) + k_0^2 \varepsilon^*(z) a(z) F(z) = 0 \qquad (2\cdot 11)$$

$$\varepsilon^*(z)\frac{d}{dz}\left\{\frac{1}{\varepsilon^*(z)}\frac{d}{dz}\right\} G(z) - \frac{\{k(z) + \omega b(z)\}^2}{a(z)} G(z) + k_0^2 \varepsilon^*(z) a(z) G(z) = 0 \qquad (2\cdot 12)$$

まず，式(2·10)から $k(z)$ は z に無関係に一定であればよいことがわかり，さらに位相項に対する境界条件からの要請を考慮すれば次式がなりたつ。

$$k(z) = k_{iy} = k_0\sqrt{\varepsilon_1^*}\sin\theta_i \qquad (2\cdot13)$$

式(2·13)を式(2·11)および式(2·12)に代入して式を変形してゆくと，E波およびH波に対しつぎのような波動方程式が得られる。

（E波）

$$\frac{d^2F}{dz^2} + k_0^2\gamma_1^2\left(1-\beta_1\sqrt{\varepsilon_1^*}\sin\theta_i\right)^2\left\{\varepsilon^*(z) - \left(\frac{\beta_1 - \sqrt{\varepsilon_1^*}\sin\theta_i}{1-\beta_1\sqrt{\varepsilon_1^*}\sin\theta_i}\right)^2\right\}F = 0$$

（H波）

$$\frac{d^2G}{dz^2} - \frac{1}{\varepsilon^*(z)}\cdot\frac{d\varepsilon^*(z)}{dz}\cdot\frac{dG}{dz} + k_0^2\gamma_1^2\left(1-\beta_1\sqrt{\varepsilon_1^*}\sin\theta_i\right)^2\left\{\varepsilon^*(z) - \left(\frac{\beta_1 - \sqrt{\varepsilon_1^*}\sin\theta_i}{1-\beta_1\sqrt{\varepsilon_1^*}\sin\theta_i}\right)^2\right\}G = 0 \qquad (2\cdot14),(2\cdot15)$$

ただし，$\gamma_1 = (1-\beta_1^2)^{-1/2}$ である。式(2·5)から式(2·15)までは任意の分布 $\varepsilon^*(z)$ に対してなりたつが，いま式(2·1)に対する解を得るために，式(2·1)を式(2·14)および式(2·15)に代入して，E波の場合は，式(2·16)，H波の場合は式(2·17)の変数変換を行なう。

（E波）

$$\zeta = \left\{\frac{z_0 k_0\gamma_1(1-\beta_1\sqrt{\varepsilon_1^*}\sin\theta_i)}{\varepsilon_2^* - \varepsilon_3^*}\right\}^{\frac{2}{3}} \cdot\left\{\varepsilon_2^* - \left(\frac{\beta_1 - \sqrt{\varepsilon_1^*}\sin\theta_i}{1-\beta_1\sqrt{\varepsilon_1^*}\sin\theta_i}\right)^2 - (\varepsilon_2^* - \varepsilon_3^*)\frac{z}{z_0}\right\} \qquad (2\cdot16)$$

（H波）

$$\rho = \left\{k_0^2\gamma_1^2\left(1-\beta_1\sqrt{\varepsilon_1^*}\sin\theta_i\right)^2\frac{\varepsilon_2^* - \varepsilon_3^*}{z_0}\right\}^{1/3}\cdot\left(\frac{\varepsilon_2^* z_0}{\varepsilon_2^* - \varepsilon_3^*} - z\right) \qquad (2\cdot17)$$

式(2·16)の変数変換を行なえば，式(2·14)のE波に対する波動方程式はつぎのようなStokesの方程式になる。

$$\frac{d^2F}{d\zeta^2} + \zeta F = 0 \qquad (2\cdot18)$$

また，式(2·17)の変数変換を行なえば，式(2·15)のH波に対する波動方程式はつぎのような2階線形微分方程式になる。

$$\frac{d^2G}{d\rho^2} - \frac{1}{\rho}\frac{dG}{d\rho} + (\rho - B)G = 0 \qquad (2\cdot19)$$

ただし

$$B = \left(\frac{\beta_1 - \sqrt{\varepsilon_1^*}\sin\theta_i}{1 - \beta_1\sqrt{\varepsilon_1^*}\sin\theta_i}\right)^2 \cdot \left\{ k_0\gamma_1(1-\beta_1\sqrt{\varepsilon_1^*}\sin\theta_i)\frac{z_0}{\varepsilon_2^* - \varepsilon_3^*}\right\}^{2/3} \qquad (2\cdot20)$$

なる量で，後に述べるように幾何光学的反射点に関係した量である。式(2·18)の一般解 $S_A(\zeta)$，$S_B(\zeta)$ はAiry 関数，または1/3次のBessel関数で表わされるが，ここではBessel関数を使うことにする。すなわち，

$$S_A(\zeta) = \begin{cases} \zeta^{1/2} J_{1/3}\left(\frac{2}{3}\zeta^{3/2}\right) & \zeta \geq 0 \\ -(-\zeta)^{1/2} I_{1/3}\left\{\frac{2}{3}(-\zeta)^{3/2}\right\} & \zeta < 0 \end{cases} \qquad (2\cdot21a)$$

$$S_B(\zeta) = \begin{cases} \zeta^{1/2} J_{-1/3}\left(\frac{2}{3}\zeta^{3/2}\right) & \zeta \geq 0 \\ (-\zeta)^{1/2} I_{-1/3}\left\{\frac{2}{3}(\zeta)^{3/2}\right\} & \zeta < 0 \end{cases} \qquad (2\cdot21b)$$

ここで，J，Iはそれぞれ Bessel関数および変形 Bessel関数を表わす。また，$S_A(\zeta)$，$S_B(\zeta)$ の間には式(2·18)から Wronskian が定数になるという関係すなわち

$$S_A(\zeta)S_B'(\zeta) - S_A'(\zeta)S_B(\zeta) = -\frac{1}{\Gamma(4/3)\Gamma(2/3)} \qquad (2\cdot22)$$

がなりたつ。ここで，′はζに関する微分，Γはガンマ関数を表わしている。式(2·19)の一般解は $\rho = 0$ のまわりの級数解 $w_1(\rho)$, $w_2(\rho)$ で表わすことができる。すなわち(48)

$$w_1(\rho) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \rho^{n+2} \qquad (2\cdot23a)$$

$$w_2(\rho) = \frac{B}{2} w_1(\rho) \ln|\rho| + \sum_{n=0}^{\infty} b_n \rho^n \qquad (2\cdot23b)$$

とし，式(2·23)を式(2·19)に代入して各べき項を比較すれば，a_n, b_n に対しつぎのような関係がなりたち，$w_1(\rho)$ および $w_2(\rho)$ を求めることがで

きる。

$$a_n = \frac{-a_{n-3} + Ba_{n-2}}{n(n+2)} \quad n \geq 3 \qquad (2\cdot24a)$$

ただし $a_0 = 1, \quad a_1 = 0, \quad a_2 = B/8$

また

$$b_n = \frac{Bb_{n-2} - b_{n-3} - B(n-1)a_{n-2}}{n(n-2)} \quad n \geq 3 \qquad (2\cdot24b)$$

ただし $b_0 = 1, \quad b_1 = b_2 = 0$

また，$w_1(\rho)$，$w_2(\rho)$の間には，式(2·19)からWronskianについてつぎのような関係がなりたつ

$$w_1(\rho)w_2'(\rho) - w_1'(\rho)w_2(\rho) = 2\rho \qquad (2\cdot25)$$

ここで，′はρに関する微分を表わす。式(2·21)および式(2·24)の解を用いれば，結局媒質Ⅱの中の電界成分E_{IIx}および磁界成分H_{IIx}として次式を得ることができる。

$$\left.\begin{matrix} \text{E波}: E_{IIx} \\ \text{H波}: H_{IIx} \end{matrix}\right\} = \begin{Bmatrix} A_{1E}S_A(\zeta) + A_{2E}S_B(\zeta) \\ A_{1H}w_1(\rho) + A_{2H}w_2(\rho) \end{Bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} E_0 \\ H_0 \end{Bmatrix} \exp\{i(k_{iy} - \omega t)\} \qquad (2\cdot26)$$

ここで，$A_{1E}, A_{2E}, A_{1H}, A_{2H}$は境界条件から決定される未知定数である。式(2·26)に対応するE波の場合のH_{II}，およびH波の場合のE_{II}は式(2·5)から求められる。

つぎに，均質媒質Ⅲにおける透過波(E_t, H_t)は，よく知られているように，Maxwell-Minkowskiの方程式から次式のように表わされる。[23]

$$\left.\begin{matrix} \text{E波}: E_t \\ \text{H波}: H_t \end{matrix}\right\} = \begin{Bmatrix} T_E E_0 \\ T_H H_0 \end{Bmatrix} \exp\{i(k_{iy}y + k_{tz}z - \omega t)\} \qquad (2\cdot27)$$

ただし

$$k_{tz} = k_0\gamma_2\left\{\varepsilon_4^*(1 - \beta_2\sqrt{\varepsilon_i^*}\sin\theta_i)^2 - (\sqrt{\varepsilon_i^*}\sin\theta_i - \beta_2)^2\right\}^{1/2}$$

$$\gamma_2 = (1 - \beta_2^2)^{-1/2}, \qquad \beta_2 = v_2/c \qquad (2\cdot28)$$

であり，T_EおよびT_HはそれぞれE波およびH波に対する透過係数である。

さて，式(2·3)，式(2·26)および式(2·27)には，$R_E, R_H, A_{1E}, A_{1H}, A_{2E}, A_{2H}, T_E, T_H$の未知数が含まれているが，これらは$z = z_0$および$z = 0$なる境界面上で電界および磁界の接線成分が連続でなければならないとい

う境界条件により定められる。R_E, R_HおよびT_E, T_Hの結果を示すとつぎのようになる。

$$R_E=\frac{X_E-Y_E}{X_E+Y_E},\quad R_H=\frac{X_H-Y_H}{X_H+Y_H},\quad T_E=\frac{2\nabla_E}{X_E+Y_E},\quad T_H=\frac{2\nabla_H}{X_H+Y_H}, \tag{2·29}$$

ただし

$$X_E=\frac{k_{iz}k_{tz}}{iW}\left\{S_A(\zeta_0)S_B(\zeta_1)-S_A(\zeta_1)S_B(\zeta_0)\right\}$$
$$+k_{iz}\left\{S_A'(\zeta_1)S_B(\zeta_0)+S_A(\zeta_0)S_B'(\zeta_1)\right\} \tag{2·30}$$

$$X_H=\frac{\varepsilon_2^*k_{tz}k_{iz}}{i\varepsilon_1^*\varepsilon_4^*W}\left\{w_1(\rho_0)w_2(\rho_1)-w_1(\rho_1)w_2(\rho_0)\right\}$$
$$+\frac{\varepsilon_2^*k_{iz}}{\varepsilon_1^*\varepsilon_3^*}\left\{w_1(\rho_0)w_2'(\rho_1)-w_2(\rho_0)w_1'(\rho_1)\right\} \tag{2·31}$$

$$Y_E=k_{iz}\left\{S_A'(\zeta_0)S_B(\zeta_1)-S_A(\zeta_1)S_B'(\zeta_0)\right\}$$
$$+iW\left\{S_A'(\zeta_1)S_B'(\zeta_0)-S_A'(\zeta_0)S_B'(\zeta_1)\right\} \tag{2·32a}$$

$$Y_H=\frac{k_{iz}}{\varepsilon_4^*}\left\{w_2'(\rho_0)w_1(\rho_1)-w_1'(\rho_0)w_2(\rho_1)\right\}$$
$$+\frac{iW}{\varepsilon_3^*}\left\{w_1'(\rho_1)w_2'(\rho_0)-w_1'(\rho_0)w_2(\rho_1)\right\} \tag{2·32b}$$

$$\nabla_E=k_{iz}\left\{S_A'(\zeta_1)S_B(\zeta_1)-S_A(\zeta_1)S_B'(\zeta_1)\right\}\exp(-ik_{tz}z_0) \tag{2·33a}$$

$$\nabla_H=\frac{\varepsilon_2^*k_{iz}}{\varepsilon_1^*\varepsilon_3^*}\left\{w_1(\rho_1)w_2'(\rho_2)-w_2(\rho_1)w_1'(\rho_1)\right\}\exp(-ik_{tz}z_0) \tag{2·33b}$$

また

$$\zeta_0=\zeta|_{z=0},\quad \zeta_1=\zeta|_{z=z_0},\quad \rho_0=\rho|_{z=0},\quad \rho_1=\rho|_{z=z_0}. \tag{2·34}$$

$$W=\left\{k_0^2\gamma_1^2(1-\beta_1\sqrt{\varepsilon^*}\sin\theta_i)^2\frac{\varepsilon_2^*-\varepsilon_3^*}{z_0}\right\}^{1/3} \tag{2·35}$$

2.3 幾何光学的反射点および級数解

運動不均質媒質中の幾何光学的反射点z_cは運動媒質中でなりたつSnellの法則[23]から導くことができ，この値はE波の場合は$\zeta=0$とするzの値と，またH波の場合は$\rho=B$とするzの値と一致する。すなわちz_cは

$$\text{E波}: \zeta|_{z=z_c}=0, \qquad \text{H波}: \rho|_{z=z_c}=B \tag{2·36}$$

で与えられ，結局E波，H波にかかわらず

$$z_c=\frac{z_0}{\varepsilon_2^*-\varepsilon_3^*}\left\{\varepsilon_2^*-\left(\frac{\beta_1-\sqrt{\varepsilon_1^*}\sin\theta_i}{1-\beta_1\sqrt{\varepsilon_1^*}\sin\theta_i}\right)^2\right\} \tag{2·37}$$

となる。級数解 $w_1(\rho)$ および $w_2(\rho)$ の数値計算例が図2·2に，$B=1.0$ および $B=2.0$ の場合について示してある。図2·2からわかるように，$\rho>B$ の範囲で $w_1(\rho)$，$w_2(\rho)$ は振動しているが，$\rho<B$ の範囲では指数関数的に増減している。これは式(2·36)からわかるように，Bなる量が幾何光学的反射点を表わしていることを考慮すると，媒質IIの中の電磁界が幾何光学的反射点を越えた領域で指数関数的に減少しているという物理的事情に対応している。$S_A(\zeta)$，$S_B(\zeta)$ が $\zeta=0$ を境として，Bessel関数と変形Bessel関数に変わるのも同じ事情である。[49]

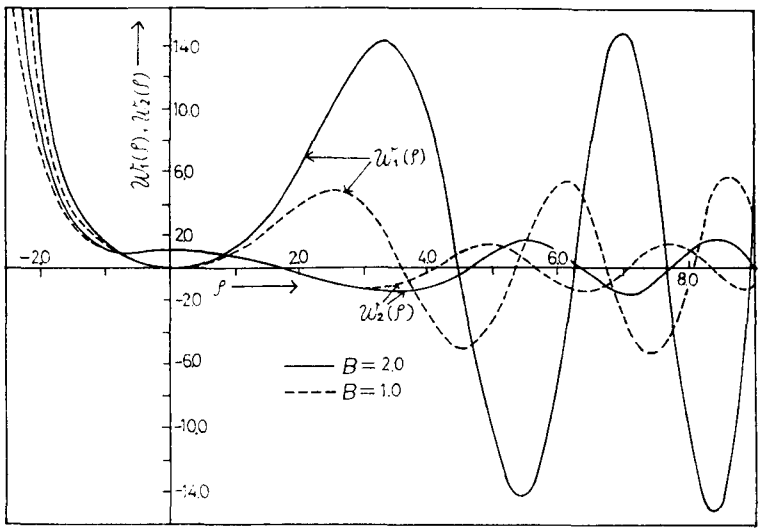


図2·2 級数解 $w_1(\rho)$ および $w_2(\rho)$

z_c が媒質の運動によってどのように変化するかを具体的に知るために，入射角 θ_i に対する z_c/z_0 の数値計算例を β_1 をパラメータとして，媒質Iが真空の場合を図2·3（$\varepsilon_1^*=\varepsilon_2^*=1.0$，$\varepsilon_3^*=-1.0$），媒質Iが誘電体の場合を図2·4（$\varepsilon_1^*=\varepsilon_2^*=4.0$，$\varepsilon_3^*=2.0$）に示す。図2·3および式(2·37)からわかるように $\varepsilon_3^*<0$ の場合は常に $z_c<z_0$ となり，z_c/z_0 が最大となる入射角は $\sin\theta_i=\beta_1/\sqrt{\varepsilon_1^*}$ で与えられる。この条件は，媒質IIの静止系で入射角が垂直入射となる条件である。

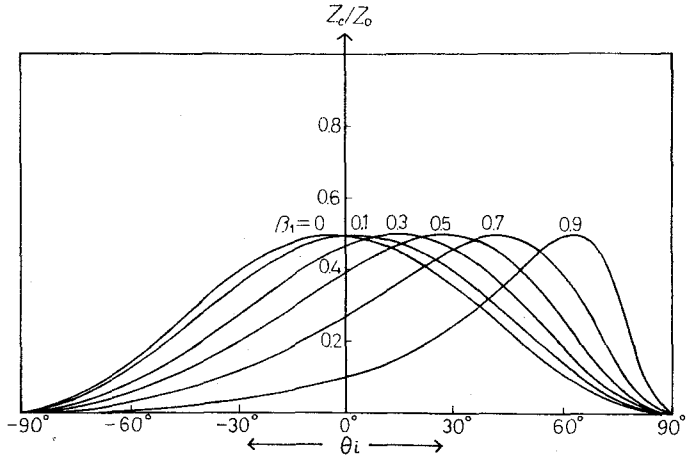


図2·3　幾何光学的反射点 Z_c/Z_0 ($\varepsilon_1^*=\varepsilon_2^*=1.0, \varepsilon_3^*=-1.0$)

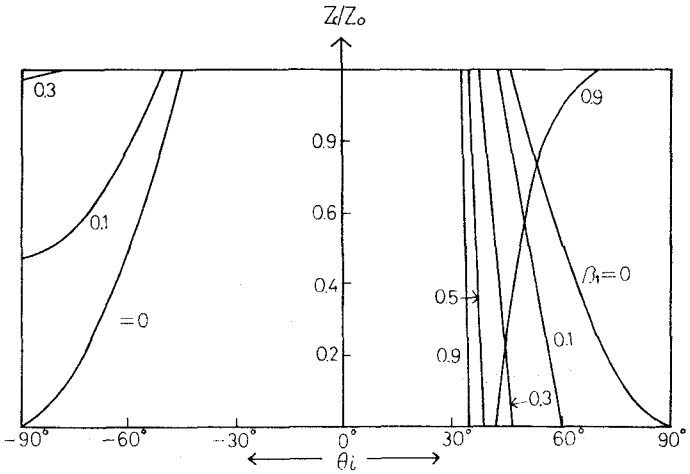


図2·4 幾何光学的反射点 Z_c/Z_0 ($\varepsilon_1^*=\varepsilon_2^*=4.0, \varepsilon_3^*=2.0$)

2.4　電力反射係数および電力透過係数

電力反射係数 C_R および，電力透過係数 C_T はそれぞれつぎのように定義される。

$$C_R = -\frac{\boldsymbol{z}\cdot\$r}{\boldsymbol{z}\cdot\$i}\quad,\quad C_T = \frac{\boldsymbol{z}\cdot\$t}{\boldsymbol{z}\cdot\$i} \tag{2·38}$$

ここで，$\$i$, $\$r$ および $\$t$ はそれぞれ入射波，反射波および透過波の時間平均 Poynting ベクトルである。式(2·3)，式(2·27)および式(2·38)から C_R, C_T は E波，H波についてそれぞれつぎのように示される。

(E波)

$$C_{RE}=R_E\cdot\overline{R_E}\quad,\quad C_{TE}=R_e\left(\frac{\overline{R_{tz}}}{R_{iz}}T_E\cdot\overline{T_E}\right) \tag{2·39}$$

（H波）

$$C_{RH} = R_H \cdot \overline{R_H} \quad , \quad C_{TH} = \frac{\varepsilon_1^*}{\varepsilon_4^*} Re\left(\frac{\overline{k_{tz}}}{k_{iz}} T_H \cdot \overline{T_H} \right) \qquad (2\cdot40)$$

ただし，Re，$\overline{\ }$はそれぞれ，実数部および複素共役を示す。式(2·22)の関係を使って

$$C_{RE} + C_{TE} = 1 \qquad (2\cdot41)$$

なる関係を証明することができ，また，C_{RH}, C_{TH} に対しては式(2·25)の関係を使って

$$C_{RH} + C_{TH} = 1 \qquad (2\cdot42)$$

を証明することができる。また，不均質媒質Ⅱの厚さが波長に比べて十分小さいときは，式(2·21)および式(2·23)を式(2·39)，式(2·40)に代入すれば，C_R, C_T をつぎのように表わすことができる。

（E波）

$$C_{RE} = C_{ROE} \cdot \left| \frac{1 - \frac{N_{1E}}{2} k_0 z_0 i - \frac{N_{2E}}{6} k_0^2 z_0^2 + O(k_0^3 z_0^3)}{1 - \frac{D_{1E}}{2} k_0 z_0 i - \frac{D_{2E}}{6} k_0^2 z_0^2 + O(k_0^3 z_0^3)} \right|^2 \qquad (2\cdot43a)$$

$$C_{TE} = C_{TOE} \cdot \left| \frac{1 - k_t z_0 i - \frac{k_t^2 z_0}{2} + O(k_0^3 z_0^3)}{1 - \frac{D_{1E}}{2} k_0 z_0 i - \frac{D_{2E}}{6} k_0^2 z_0^2 + O(k_0^3 z_0^3)} \right|^2 \qquad (2\cdot43b)$$

ただし

$$C_{ROE} = \left| \frac{k_{iz} - k_{tz}}{k_{iz} + k_{tz}} \right|^2, \quad C_{TOE} = Re\left(\frac{\overline{k_{tz}}}{k_{iz}} \right) \cdot \left| \frac{2k_{iz}}{k_{iz} + k_{tz}} \right|^2 \qquad (2\cdot44)$$

（H波）

$$C_{RH} = C_{ROH} \cdot \left| \frac{1 - N_{1H} k_0 z_0 i - N_{2H} k_0^2 z_0^2 + O(k_0^3 z_0^3)}{1 - D_{1H} k_0 z_0 i - D_{2H} k_0^2 z_0^2 + O(k_0^3 z_0^3)} \right|^2 \qquad (2\cdot45a)$$

$$C_{TH} = C_{TOH} \cdot \left| \frac{1 - k_{tz} z_0 i - k_t^2 z_0^2/2 + O(k_0^3 z_0^3)}{1 - D_{1H} k_0 z_0 i - D_{2H} k_0^2 z_0^2 + O(k_0^3 z_0^3)} \right|^2 \quad (2\cdot45b)$$

ただし

$$C_{ROH} = \left| \frac{\varepsilon_4^* k_{iz} - \varepsilon_1^* k_{tz}}{\varepsilon_4^* k_{iz} + \varepsilon_1^* k_{tz}} \right|^2 \quad (2\cdot46a)$$

$$C_{TOH} = \frac{\varepsilon_1^*}{\varepsilon_4^*} Re\left(\frac{\bar{k}_{tz}}{\bar{k}_{iz}}\right) \left| \frac{2\varepsilon_4^* k_{iz}}{\varepsilon_4^* k_{iz} + \varepsilon_1^* k_{tz}} \right|^2$$

ここで，D_{1E}，D_{1H}，N_{1E}，N_{1H}，D_{2E}，D_{2H}，N_{2E}，N_{2H} などは z_0 を含まない定数である（付録）。式(2·43)および式(2·45)からわかるように，不均質媒質IIの厚さが波長に比べ十分小さくなるにつれて，C_R，C_T はそれぞれ，運動均質媒質の場合の電力反射係数 C_{ROE}，C_{ROH} および電力透過係数 C_{TOE}，C_{TOH} に近づくことがわかる。真空中の波長 λ_0 で正規化した不均質媒質の厚さ z_0/λ_0 に対する電力反射係数の数値計算例を，$\beta_1 = \beta_2$ をパラメータとして，幾何光学的反射点 z_c が媒質IIの中にない場合を図2·5(

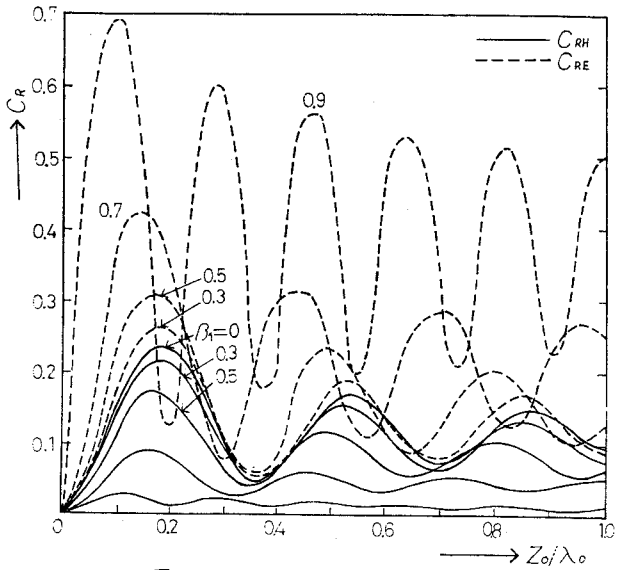


図2·5 電力反射係数 C_R（$\varepsilon_1^*=1.0$，$\varepsilon_2^*=4.0$ $\varepsilon_3^*=\varepsilon_4^*=1.0$，$\theta_i=0°$）

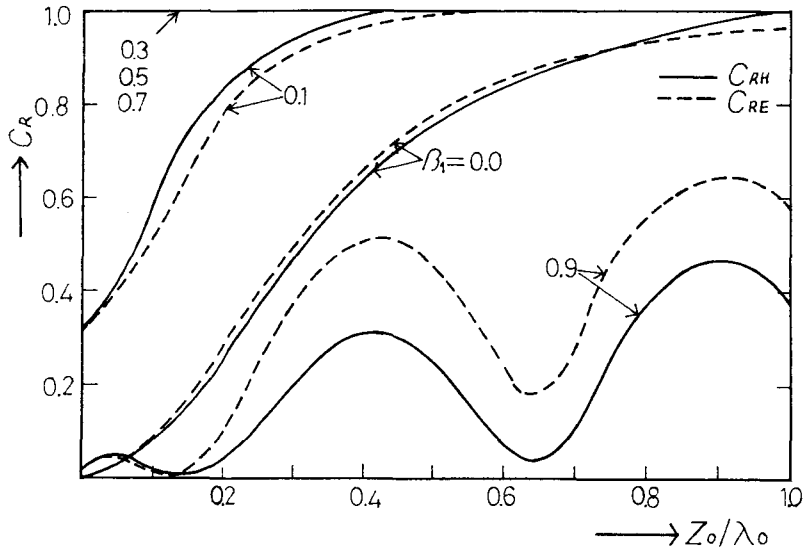


図2・6　電力反射係数 C_R ($\varepsilon_1^*=\varepsilon_2^*=4.0$, $\varepsilon_3^*=2.0$, $\beta_1=\beta_2$, $\theta_i=60°$)

$\varepsilon_1^*=1.0$, $\varepsilon_2^*=4.0$, $\varepsilon_3^*=\varepsilon_4^*=1.0$, $\theta_i=0°$)に，z_cが媒質IIにある場合を図2・6($\varepsilon_1^*=\varepsilon_2^*=4.0$, $\varepsilon_3^*=2.0$, $\varepsilon_4^*=4.0$, $\theta_i=60°$)に示す。図において，点線がE波，実線がH波の数値計算例を表わす。不均質媒質IIの厚さz_0/λ_0に対する反射係数の関係においては，媒質IIの中で幾何光学的反射点を越えた領域で，電磁界が指数関数的に減少しているため，幾何光学的反射点の位置によってその傾向が違う。たとえば，図2・4と図2・6において$\beta_1=0$および$\beta_1=0.1$のときはz_c/z_0の値はそれぞれ，0.5，0.051であり，幾何光学的反射点z_cは$z=0$の境界面近くにある。このときはC_Rはz_0/λ_0の増加とともに急速に1に近づく。$\beta_1=0.3, 0.5, 0.7$のときは式(2・28)から全反射が起っていることがわかり，C_Rはz_0/λ_0の値にかかわらず常に1になる。$\beta_1=0.9$になると$z_c/z_0=0.89$であり，幾何光学的反射点は$z=z_0$の境界面近くにあり，C_Rはz_0/λ_0の増加とともに振動しながらゆっくりと1に近づく。z_cが運動によっても媒質IIに現われない場合は，β_1の値によってC_Rの値は変化するが，C_R-z_0/λ_0のグラフの傾向は変わらない(図2・5参照)

2.5　運動不均質プラズマへの応用

以上の議論は，電子密度がz方向に直線状に分布している，運動不均質

プラズマに平面電磁波が入射した場合にそのまま適用できる。[46] いま電子密度がz方向に直線状に変化し，y方向に運動している無損失，等方性コールドプラズマの等価比誘電率 $\varepsilon_p^*(z)$ はつぎのように表わされる。

$$\varepsilon_p^*(z) = 1 - \frac{\omega_p^2(z)}{\gamma_1^2(1-\sqrt{\varepsilon^*}\beta_1 \sin\theta_i)^2\omega^2} \qquad (2\cdot47)$$

ただし，$\omega_p(z)$ はプラズマの静止系で定義されるプラズマ角周波数である。したがって，いままでの議論は ε_2^* および ε_3^* を

$$\varepsilon_2^* = \varepsilon_p^*(0), \quad \varepsilon_3^* = \varepsilon_p^*(z_0) \qquad (2\cdot48)$$

とおけばそのままなりたつ。いま運動均質プラズマとの違いを見るために，式(2·47)を式(2·14)および式(2·15)に代入すると，E波に対し波動方程式

$$\frac{d^2F}{dz^2} + k_0^2\left\{1 - \frac{\omega_p^2(z)}{\omega^2} - \varepsilon_1^*\sin^2\theta_i\right\}F = 0 \qquad (2\cdot49)$$

がなりたつ。またH波に対しては波動方程式

$$\frac{d^2G}{dz^2} + f_1(z)\frac{dG}{dz} + k_0^2 f_2(z)G = 0 \qquad (2\cdot50)$$

がなりたつ。ただし

$$f_1(z) = 1\Big/\left\{\gamma_1^2(1-\beta_1\sqrt{\varepsilon^*}\sin\theta_i)^2\frac{\omega_p^2(z)}{\omega^2}\right\}\cdot\frac{d}{dz}\left\{\frac{\omega_p^2(z)}{\omega^2}\right\} \qquad (2\cdot51)$$

$$f_2(z) = 1 - \frac{\omega_p^2(z)}{\omega^2} - \varepsilon_1^*\sin^2\theta_i \qquad (2\cdot52)$$

式(2·49)および式(2·50)からわかるように，運動均質プラズマでは式(2·50)の第2項がなくなり，E波，H波に対する波動方程式には運動の効果は現われない。しかし，運動不均質プラズマの場合には，H波に対する波動方程式に運動の効果が現われる。これが運動不均質プラズマの特徴である。式(2·49)の第2項，または，式(2·50)の第3項が運動の影響を受けないことから，前述したように，式(2·37)で与えられる幾何光学的反射点 z_{cp} はプラズマの速度によらない。媒質ⅠおよびⅢが真空で，媒質Ⅱが電子密度が直線的に変化している不均質プラズマスラブの場合の，z_0/λ_0 に対するH波の電力反射係数 C_{RH} の数値計算例を β_1 をパラメータとして，幾何光学的反射点 z_{cp} がプラズマ中にない場合を図2·7（$\omega_{p1}/\omega = 0$, ω_{p2}/ω

$=0.9, \theta_i=0°$）に，z_{cp} がプラズマ中にある場合を図2·8（$\omega_{p1}/\omega=0$, $\omega_{p2}/\omega=1.3$, $\theta_i=0°$, $z_{cp}/z_0=0.59$）に示す。ここで，$\omega_{p1}=\omega_p(0)$ および $\omega_{p2}=\omega_p(z_0)$ であり，点線は不均質プラズマと同じ平均電子密度をもつ均質プラズマスラブの数値計算例である。

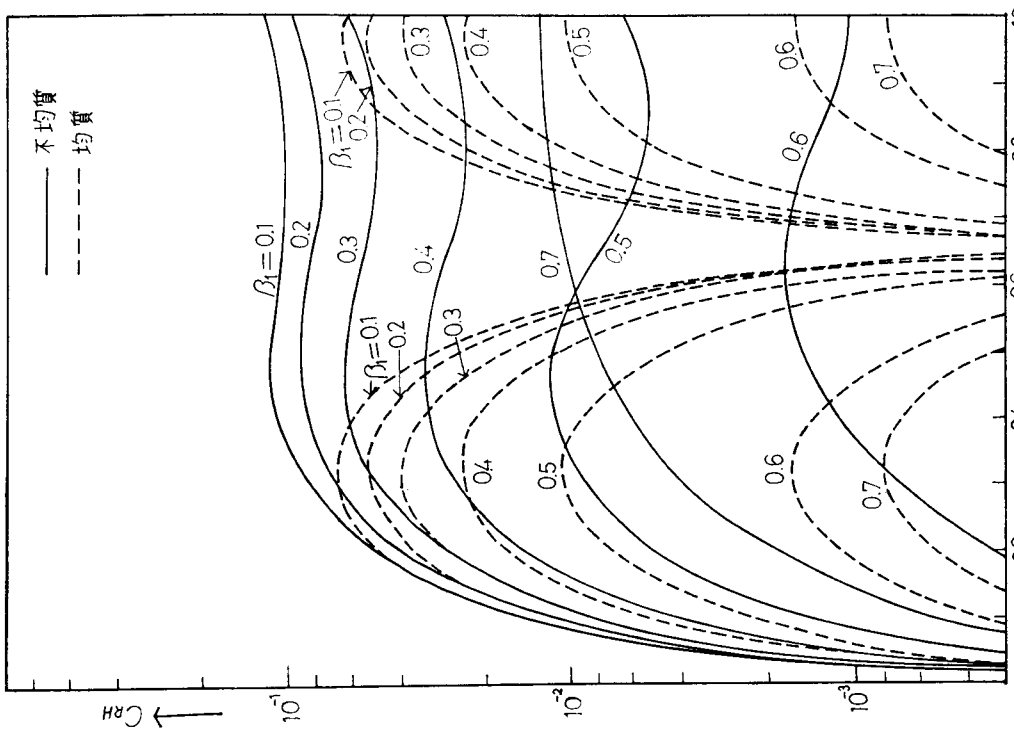


図2·7 電力反射係数 C_{RH}（$\frac{\omega_{p1}}{\omega}=0, \frac{\omega_{p2}}{\omega}=0.9, \theta_i=0°$）

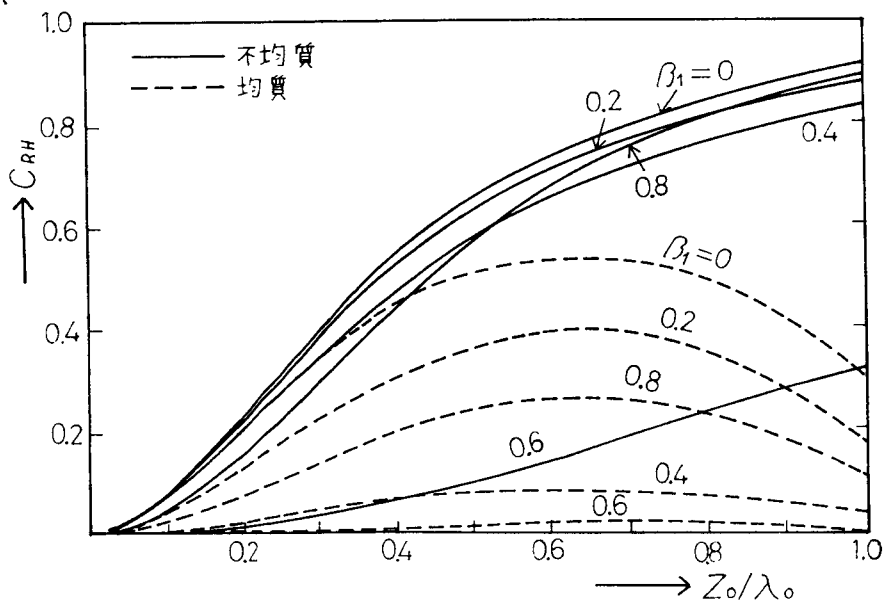


図2·8 電力反射係数 C_{RH}（$\frac{\omega_{p1}}{\omega}=0, \frac{\omega_{p2}}{\omega}=1.3$, $\theta_i=0°$, $Z_c/Z_0=0.59$）

さきに述べたように運動均質プラズマの場合は，波動方程式が運動の効果を含まないことから，$z_0/\lambda_0 - C_{RH}$のグラフの極値を与えるスラブの厚さz_0/λ_0は運動の影響をうけない。図2・7，図2・8でわかるように，幾何光学的反射点が運動の影響を受けないため図2・6の媒質が誘電体のときのように，運動速度が変化しても$z_0/\lambda_0 - C_{RH}$のグラフの傾向が変化することはない。

2.6 結言

誘電率が場所に関して直線的に変化しているような，運動不均質誘電体による平面電磁波の反射と透過について，Maxwell-Minkowskiの方程式を直接解くことにより，厳密に解析した。さらに理論を電子密度が直線的に変化しているような運動不均質プラズマに，H波が入射した場合に適用し，波動方程式に均質プラズマの場合には現われなかった運動の効果が現われること，および，幾何光学的反射点はプラズマの運動の影響を受けないことを示した。媒質が誘電体およびプラズマの場合の電力反射係数および幾何光学的反射点については，数値計算例を示しながら，両者を関連づけて媒質の運動の影響を詳しく検討した。

第3章　等速度運動をしている不均質スラブ中におかれた線波源からの電磁放射
――特殊相対論的取り扱い[40][41]

3.1　序　言

相対論的な速度で運動している媒質と電磁波との相互作用に関する研究が，近年各方面で活発に行なわれるようになり，特に運動媒質中に置かれた波源からの電磁放射に関する問題に対しては，飛しょう体の大気圏再突入問題および，高速プラズマの診断と関連して，これまでに数多く報告され，種々の興味ある結果が得られている。[37][38][39] また，静止媒質中における有限な領域をもつ媒質中におかれた波源からの放射に関しても，誘電体スラブもしくはプラズマスラブの表面波や漏洩波の励振と関連して，非常に詳しく研究されている。[50][51][52] しかしながら，上記の報告はすべて媒質を均質なものとして取り扱っており，不均質媒質を取り扱っているものは非常に少数である。[53][54] 特に，不均質媒質が運動している場合を取り扱っているものは全くないようである。再突入の際の飛しょう体の周囲にできるプラズマ層を考えてみてもわかるように，実際問題の多くの場合，媒質は不均質であると考えられる。そこで本章では，誘電率が直線状に変化している運動不均質かつ異方性（1軸性）誘電体スラブ，またはプラズマスラブ中におかれた線波源からの放射について詳しく考察する。

3.2　波動方程式

図3·1に示すように，完全導体板上におかれた厚さℓの異方性不均質誘電体スラブ（領域I，$\ell \geq z > 0$）がy方向に一定速度vで運動しているものとし，無限長線状波源がx軸に平行に，誘電体内の$y=0$，$z=d$に位置しているものと仮定する。誘電体スラブの誘電率は媒質の静止系において異方性（1軸性）かつ各成分が，zの関数で与えられる不均質媒質で

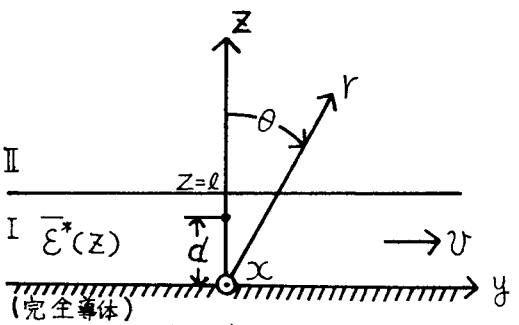


図3·1 座標系

あるとする。すなわち誘電率 $\bar{\varepsilon}(z)$ は

$$\bar{\varepsilon}(z)=\varepsilon_0\begin{bmatrix}\varepsilon_x^*(z), & 0 & , & 0\\ 0 & , & \varepsilon_y^*(z), & 0\\ 0 & , & 0 & , \varepsilon_z^*(z)\end{bmatrix} \qquad (3\cdot1)$$

で与えられるものとする。ここで，ε_0 は真空中の誘電率であり，媒質の透磁率は真空中のそれと同じで μ_0 であるとする。誘電率の分布が z だけに依存しかつ運動方向が y 方向のみである場合系の時間変化を $e^{i\omega t}$ で表わすとマクスウェルの方程式および Minkowski の構成関係式は次式で与えられる。[47]

$$\begin{aligned}\nabla\times\mathbb{E}&=-i\omega\mathbb{B}+\mathbb{J}_m\\ \nabla\times\mathbb{H}&=i\omega\mathbb{D}+\mathbb{J}_e\end{aligned} \qquad (3\cdot2)$$

および

$$\begin{aligned}\mathbb{D}&=\bar{N}_1(z)\cdot\mathbb{E}+\bar{M}_1(z)\cdot\mathbb{H}\\ \mathbb{B}&=\bar{N}_2(z)\cdot\mathbb{H}+\bar{M}_2(z)\cdot\mathbb{E}\end{aligned} \qquad (3\cdot3)$$

ただし

$$\bar{N}_1(z)=\varepsilon_0\begin{bmatrix}a_x(z)\varepsilon_x^*(z), & 0 & , & 0\\ 0 & , & \varepsilon_y^*(z), & 0\\ 0 & , & 0 & , a_z(z)\varepsilon_z^*(z)\end{bmatrix} \qquad (3\cdot4a)$$

$$\bar{N}_2(z)=\mu_0\begin{bmatrix}a_z(z), & 0 & , & 0\\ 0 & , & 1 & , & 0\\ 0 & , & 0 & , & a_x(z)\end{bmatrix} \qquad (3\cdot4b)$$

$$\bar{M}_1(z)=\begin{bmatrix}0 & , & 0 & , & b_x(z)\\ 0 & , & 0 & , & 0\\ -b_z(z), & 0 & , & 0\end{bmatrix}\qquad \bar{M}_2(z)=\begin{bmatrix}0 & , & 0 & , & -b_z(z)\\ 0 & , & 0 & , & 0\\ b_x(z), & 0 & , & 0\end{bmatrix} \qquad (3\cdot4c)$$

また

$$\nabla=\frac{\partial}{\partial y}\mathbb{y}+\frac{\partial}{\partial z}\mathbb{z}\ ,\qquad a_\nu(z)=\frac{1-\beta^2}{1-\varepsilon_\nu^*(z)\beta^2}\quad(\nu=x,z)$$

$$b_\nu(z)=\frac{\varepsilon_\nu^*(z)-1}{1-\varepsilon_\nu^*(z)\beta^2}\cdot\frac{\beta}{c}\ ,\qquad \beta=\frac{v}{c},\qquad c=(\varepsilon_0\mu_0)^{-1/2} \qquad (3\cdot5)$$

であり，$\mathbb{J}_e$ は電流密度，$\mathbb{J}_m$ は磁流密度を表わす。今波源が電流源である場

合は式(3·2)においてJm=0としHを消去してつぎの波動方程式を得る。

$$(\overline{\nabla}_1 \cdot \overline{N}_2^{-1} \cdot \overline{\nabla}_2 - \omega^2 \overline{N}_1)E = -i\omega J_e \qquad (3\cdot6)$$

ただし

$$\overline{\nabla}_1 = \begin{bmatrix} 0 & , -\frac{\partial}{\partial z} , \frac{\partial}{\partial y} + b_x(z) \\ \frac{\partial}{\partial z} & , 0 , -\frac{\partial}{\partial x} \\ -\frac{\partial}{\partial y} - b_x(z) & , \frac{\partial}{\partial x} , 0 \end{bmatrix} \quad \overline{\nabla}_2 = \begin{bmatrix} 0 & , -\frac{\partial}{\partial z} , \frac{\partial}{\partial y} + b_x(z) \\ \frac{\partial}{\partial z} & , 0 , -\frac{\partial}{\partial x} \\ -\frac{\partial}{\partial y} - b_z(z) & , \frac{\partial}{\partial x} , 0 \end{bmatrix} \qquad (3\cdot7)$$

また波源が磁流源である場合は式(3·2)においてJe=0とおいて，Eを消去すると次の波動方程式が得られる。

$$(\overline{\nabla}_2 \cdot \overline{N}_1^{-1} \cdot \overline{\nabla}_1 - \omega^2 \overline{N}_2) \cdot H = -i\omega J_m \qquad (3\cdot8)$$

電流源または磁流源がx方向に一様な無限長線波源と仮定すると，JeまたはJmは次式のように与えることができる。

$$\left.\begin{matrix} J_e \\ J_m \end{matrix}\right\} = \frac{1}{i\omega}\left\{\begin{matrix} \nabla_e \\ \nabla_m \end{matrix}\right\} \delta(y)\delta(z-d) \qquad (3\cdot9)$$

ここでδはディラックのデルタ関数であり，∇eおよび∇mはそれぞれ電流源および磁流源の励振の強さを表わす定数である。上記のような仮定のもとでは，波源が磁流源のときは磁界Hがx方向成分H_xのみを，波源が電流源のときは電界Eがx方向成分E_xのみをもつ。それゆえ，領域Iでの波源が電流源の場合の電界成分E_{Ix}に対する偏微分方程式を式(3·6)から，磁流源の場合のH_{Ix}に対するそれを式(3·7)から次のように得る。

(電流源)

$$\frac{\partial^2 E_{Ix}}{\partial z^2} + \frac{1}{\alpha_z(z)}\left\{\frac{\partial}{\partial y} + i\omega b(z)\right\}^2 E_{Ix} + k_0^2 \varepsilon_z^*(z)\alpha_z(z)E_{Ix} = \nabla_e \delta(y)\delta(z-d) \qquad (3\cdot10)$$

(磁流源)

$$\frac{\partial}{\partial z}\left\{\frac{1}{\varepsilon_y^*(z)} \cdot \frac{\partial}{\partial z}\right\} H_{Ix} + \frac{1}{\varepsilon_z^*(z)} \cdot \frac{1}{\alpha_z(z)}\left\{\frac{\partial}{\partial y} + i\omega b_z(z)\right\}^2 H_{Ix} + k_0^2 \alpha_z(z) H_{Ix} = \nabla_m \delta(y)\delta(z-d) \qquad (3\cdot11)$$

ただし$k_0 = \omega/c$である。式(3·10)および式(3·11)の波動方程式を解くために，E_{Ix}およびH_{Ix}を次のようにFourier積分によって表わす。

$$\left.\begin{matrix} E_{Ix}(y,z) \\ H_{Ix}(y,z) \end{matrix}\right\} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \left\{\begin{matrix} \phi_E(z,h) \\ \phi_H(z,h) \end{matrix}\right\} e^{ihy}\,dh \qquad (3\cdot12)$$

式(3·12)を式(3·10)および式(3·11)に代入すれば，ϕ_Eおよびϕ_Hの満足すべき方程式が得られる。

3．3　等方性不均質媒質

式(3·2)から式(3·12)までの式は，任意の比誘電率分布$\varepsilon^*(z)$に対して成立するが，今誘電率が直線状に変化している等方性媒質について考える。すなわち

$$\varepsilon_x^*(z)=\varepsilon_y^*(z)=\varepsilon_z^*(z)=\varepsilon_1^*-(\varepsilon_1^*-\varepsilon_2^*)\frac{z}{\ell} \qquad (3\cdot13)$$

とし，式(3·13)を式(3·10)および式(3·11)に代入し，電流源の場合は式(3·14)，磁流源の場合は式(3·15)の変数変換を行なう。

（電流源）

$$\zeta=\left\{\frac{\ell k_0(1-\beta k_s)}{\varepsilon_1^*-\varepsilon_2^*}\right\}^{2/3}\cdot\left\{\varepsilon_1^*-(\varepsilon_1^*-\varepsilon_2^*)\frac{z}{\ell}-\left(\frac{\beta-k_s}{1-\beta k_s}\right)^2\right\} \qquad (3\cdot14)$$

（磁流源）

$$\rho=\left\{k_0^2\gamma^2(1-\beta k_s)^2\frac{\varepsilon_1^*-\varepsilon_2^*}{\ell}\right\}^{1/3}\cdot\left(\frac{\varepsilon_1^*}{\varepsilon_1^*-\varepsilon_2^*}\ell-z\right) \qquad (3\cdot15)$$

ただし　$\gamma=(1-\beta^2)^{-1/2}$，　$k_s=h/k_0$

式(3·14)の変数変換を行なえば，式(3·10)の波動方程式は次のようなStokesの方程式を含んだものになる。

$$K^{2/3}\cdot\left(\frac{d^2\phi_E}{d\zeta^2}+\zeta\phi_E\right)=V_e\,\delta(z-d) \qquad (3\cdot16)$$

ただし

$$K=\frac{k_0\gamma(1-\beta k_s)(\varepsilon_1^*-\varepsilon_2^*)}{\ell} \qquad (3\cdot17)$$

また，式(3·11)の波動方程式は，式(3·15)の変数変換により次のような微分方程式になる。

$$K^{3/3}\cdot\left\{\frac{d^2\phi_H}{d\rho^2}-\frac{1}{\rho}\cdot\frac{d\phi_H}{d\rho}+(\rho-B)\phi_H\right\}=V_m\varepsilon_y^*(z)\,\delta(z-d) \qquad (3\cdot18)$$

ただし

$$B=\left(\frac{\beta-k_s}{1-\beta k_s}\right)^2\left\{k_0\gamma(1-\beta k_s)\frac{\ell}{\varepsilon_1^*-\varepsilon_2^*}\right\}^{3/2} \qquad (3\cdot19)$$

で与えられる。Stokesの方程式の一般解$S_A(\zeta)$，$S_B(\zeta)$は，Airy関数ま

たは1/3次のBessel関数で表わされるが，ここではBessel関数を使う。また$S_A(\zeta)$, $S_B(\zeta)$の間には次式のような有用な関係式がなりたつ。すなわち

$$S_A(\zeta)S_B'(\zeta) - S_A'(\zeta)S_B(\zeta) = const. \qquad (3\cdot20)$$

ここで，′はζに関する微分を表わす。また式(3·18)の一般解$w_A(\rho)$, $w_B(\rho)$は$\rho=0$のまわりの級数解で表わすことができる。さらに，$w_A(\rho)$, $w_B(\rho)$の間には次の有用な関係が成り立つ。

$$w_A(\rho)w_B'(\rho) - w_A'(\rho)w_B(\rho) = 2\rho \qquad (3\cdot21)$$

ここで′は，ρに関する微分を表わす。結局式(3·16)および式(3·18)の解は，つぎのように書くことができる。

(電流源)

$$\phi_E = \begin{cases} A_{1E}S_A(\zeta) + A_{2E}S_B(\zeta) & 0 \le z \le d \\ A_{3E}S_A(\zeta) + A_{4E}S_B(\zeta) & d \le z \le \ell \end{cases} \qquad (3\cdot22)$$

(磁流源)

$$\phi_H = \begin{cases} A_{1H}w_A(\rho) + A_{2H}w_B(\rho) & 0 \le z \le d \\ A_{3H}w_A(\rho) + A_{4H}w_B(\rho) & d < z \le \ell \end{cases} \qquad (3\cdot23)$$

ここで$A_{\nu E}$, $A_{\nu H}$ ($\nu=1\sim4$) は境界条件によって決定される定数である。領域IIにおける電磁界は，同様にFourier変換を用い

$$\left.\begin{matrix} E_{IIx} \\ H_{IIx} \end{matrix}\right\} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \left\{\begin{matrix} \psi_E \\ \psi_H \end{matrix}\right\} e^{ihy}\,dh \qquad (3\cdot24)$$

で表わすと，ψ_E および ψ_H はマクスウェル方程式から

$$\left.\begin{matrix} \psi_E \\ \psi_H \end{matrix}\right\} = \left\{\begin{matrix} A_{5E} \\ A_{5H} \end{matrix}\right\} e^{k_t z} \qquad z > \ell \qquad (3\cdot25)$$

で与えられる。ただし，$k_t = (k_0^2 - h^2)^{1/2}$ であり，符号は$z>\ell$に対するψ_Eおよびψ_Hの放射条件を満足するように選ぶ。A_{5E}およびA_{5H}は境界条件から決定される定数である。未定定数$A_{\nu E}$ ($\nu=1\sim5$)および$A_{\nu H}$ ($\nu=1\sim5$)は，自由空間IIと媒質との境界面および導体面上での電界および磁界の接線成分が連続でなければならないという条件と，$x=d$における境界条件を式(3·22)および式(3·23)に適用することにより定められる。A_{5E}およびA_{5H}のみの結果を示すと次のようになる。

$$A_{5E} = \frac{X_E V_e}{P Y_E + i k_t Z_E} e^{-ik_t \ell}, \qquad A_{5H} = \frac{\varepsilon_2^* X_H V_m}{P Y_H + i\varepsilon_2^* k_t Z_H} e^{-ik_t \ell} \qquad (3\cdot26)$$

ただし

$$X_E = S_A(\zeta_0)S_B(\zeta_d) - S_A(\zeta_d)S_B(\zeta_0),\quad X_H = w_A'(\rho_0)w_B(\rho_d) - w_A(\rho_d)w_B'(\rho_0)$$

$$Y_E = S_A(\zeta_0)S_B'(\zeta_\ell) - S_A'(\zeta_\ell)S_B(\zeta_0),\quad Y_H = w_A'(\rho_\ell)w_B'(\rho_0) - w_A'(\rho_0)w_B'(\rho_\ell)$$

$$Z_E = S_A(\zeta_\ell)S_B'(\zeta_0) - S_A'(\zeta_0)S_B(\zeta_\ell),\quad Z_H = w_A'(\rho_0)w_B(\rho_\ell) - w_A(\rho_\ell)w_B'(\rho_0)$$

$$P = -\left\{ k_0^2\gamma^2(1-\beta k_s)^2 \frac{\varepsilon_1^* - \varepsilon_2^*}{\ell} \right\}^{1/3} \qquad (3\cdot27)$$

また

$$\zeta_0 = \zeta|_{z=0},\ \zeta_d = \zeta|_{z=d},\ \zeta_\ell = \zeta|_{z=\ell},\ \rho_0 = \rho|_{z=0},\ \rho_d = \rho|_{z=d},\ \rho_\ell = \rho|_{z=\ell} \qquad (3\cdot28)$$

3.4 1軸性不均質媒質

つぎに，不均質誘電体が ε_x^*，ε_z^* が定数で ε_y^* のみが z の一次関数であるような一軸性誘電体の場合，すなわち

$$\varepsilon_x^* = \varepsilon_z^* = \text{const.}\quad \varepsilon_y^*(z) = \varepsilon_1^* - (\varepsilon_1^* - \varepsilon_2^*)\frac{z}{\ell} \qquad (3\cdot29)$$

の場合を考えよう。このようなモデルは，後で述べるように媒質が運動方向に無限大外部静磁界が印加されたコールドプラズマの場合に対し有用となる。この場合，波源が電流源の場合は式(3·10)からわかるように，波動方程式に $\varepsilon_y^*(z)$ が入ってこず，媒質が均質な場合と変わらなくなってしまうので，ここでは波源が磁流源の場合のみを考える。式(3·29)を式(3·11)に代入して次式の変数変換を行なう。

$$\eta = \xi^{1/3}\left(\frac{\varepsilon_1^*}{\varepsilon_1^* - \varepsilon_2^*}\ell - z\right) \qquad (3\cdot30)$$

ただし

$$\xi = k_0^2\gamma^2(1-\beta k_s)^2\frac{\varepsilon_1^* - \varepsilon_2^*}{\ell}\left\{1 - \frac{1}{\varepsilon_1^*}\left(\frac{k_s - \beta}{1-\beta k_s}\right)^2\right\} \qquad (3\cdot31)$$

式(3·30)の変換により，式(3·11)は次のようになる。

$$\xi^{2/3}\left\{\frac{d^2\phi_H}{d\eta^2} - \frac{1}{\eta}\cdot\frac{d\phi_H}{d\eta} + \eta\phi_H\right\} = \varepsilon^*(z)\nabla_m\delta(z-d) \qquad (3\cdot32)$$

式(3·32)の一般解は，式(3·18)からもわかるように，$\beta=0$ とおいた級数解 $w_A(\eta)$，$w_B(\eta)$ によっても表わすことができるが，ここでは数値計算に便利な，Stokes の方程式の一般解 S_A，S_B の一階微分によって表わす。すなわち，領域Ⅰにおける解は

$$\phi_H = \begin{cases} C_{1H} S_A'(\eta) + C_{2H} S_B'(\eta) & 0 \le z \le d \\ C_{3H} S_A'(\eta) + C_{4H} S_B'(\eta) & d < z \le \ell \end{cases} \qquad (3\cdot33)$$

とおくことができる。ここで′は，ηに関する微分を表わし$C_{\nu H}(\nu=1\sim4)$は境界条件から決まる定数である。領域Ⅱにおける解も前節と全く同様に

$$\psi_H = C_{5H} e^{ik_t z} \qquad (3\cdot34)$$

とおくことができる。前節と同様に境界条件を適用すると，未定定数C_{5H}はつぎのように決定できる。

$$C_{5H} = \frac{\varepsilon_2^* X_A \nabla m}{Q Y_A + i\varepsilon_2^* k_t Z_A} e^{-ik_t \ell} \qquad (3\cdot35)$$

ただし

$$X_A = S_A'(\eta_d) S_B(\eta_0) - S_A(\eta_0) S_B'(\eta_d),\ Y_A = S_A(\eta_0) S_B(\eta_\ell) - S_A(\eta_\ell) S_B(\eta_0)$$

$$Z_A = S_A'(\eta_\ell) S_B(\eta_0) - S_A(\eta_0) S_B'(\eta_\ell),\quad Q = \xi^{2/3} \qquad (3\cdot36)$$

$$\eta_0 = \eta|_{z=0},\quad \eta_d = \eta|_{z=d},\quad \eta_\ell = \eta|_{z=\ell} \qquad (3\cdot37)$$

また式(3·35)においては，$S_A(\eta)$ $S_B(\eta)$の間の式(3·20)の関係式を用いて簡単化した。

3.5　遠距離放射電磁界

さて，線波源からの放射におよぼす運動不均質スラブの影響について詳しく考察するために，領域Ⅱにおける電磁界式(3·25)および式(3·34)を式(3·24)に代入し，積分を鞍部点法により実行し，遠距離放射電磁界を次のように求める。

（電流源）

$$E_{\mathrm{II}x} \simeq \nabla e e^{i(k_0 r + \frac{\pi}{4})} \left(\frac{1}{2\pi k_0 r}\right)^{1/2} T_E(\theta) \qquad (3\cdot38)$$

ただし

$$T_E(\theta) = \left.\frac{X_E \cos\theta}{P Y_E + i k_t Z_E}\right|_{k_s = \sin\theta} \qquad (3\cdot39)$$

（磁流源）

$$H_{\mathrm{II}x} \simeq \nabla m e^{i(k_0 r + \frac{\pi}{4})} \left(\frac{1}{2\pi k_0 r}\right)^{1/2} \begin{cases} T_H(\theta) \\ T_A(\theta) \end{cases} \qquad (3\cdot40)$$

ただし

$$T_H(\theta) = \left.\frac{\varepsilon_2^* X_H \cos\theta}{P Y_H + i\varepsilon_2^* k_t Z_H}\right|_{k_s = \sin\theta} \quad (等方性) \qquad (3\cdot41a)$$

$$T_A(\theta)=\left.\frac{\varepsilon_2^* X_A \cos\theta}{Q Y_A + i\varepsilon_2^* k_t Z_A}\right|_{k_t=\sin\theta} \quad (1軸性) \qquad (3\cdot41b)$$

また　　$k_0 r \gg 1$，　$-90^\circ < \theta < 90^\circ$，　$x = r\sin\theta$，$z = r\cos\theta$ (3·42)

であり，r および θ は，図3·1に示す円筒座標を表わす。式(3·38)に対応する磁界および式(3·40)に対応する電界はマクスウェル方程式から得られる。式(3·38)および式(3·40)を考慮して，領域IIにおける遠距離放射電磁界の時間平均 Poynting ベクトル $\overline{S}_E$ および $\overline{S}_H$ を求めると，これは r 方向成分のみをもち，次式で与えられる。

(電流源)　$$\overline{S}_E = \frac{\nabla_e}{4\pi\omega\mu_0 r}\left|T_E(\theta)\right|^2 \hat{r} \qquad (3\cdot43)$$

(磁流源)

$$\overline{S}_H = \frac{\nabla_m \hat{r}}{4\pi\omega\varepsilon_0 r}\begin{cases}\left|T_H(\theta)\right|^2 \text{(等方性)} & (3\cdot44a)\\ \left|T_A(\theta)\right|^2 \text{(1軸性)} & (3\cdot44b)\end{cases}$$

ここで，$\hat{r}$ は r 方向単位ベクトルである。

3.6　運動不均質プラズマスラブ

以上の理論を，実際的な問題として媒質が直線状の電子密度をもつ運動不均質コールドプラズマである場合に適用しよう。[ ] 外部静磁界が存在せず，電子密度が直線状に z 方向に変化し，y 方向に運動している無損失コールドプラズマは等方性で，したがってその等価比誘電率 $\overline{\varepsilon}_p^*(z)$ の各成分は次式のように与えられる。

$$\varepsilon_{px}^*(z) = \varepsilon_{py}^*(z) = \varepsilon_p^*(z) \qquad (3\cdot45)$$

ただし

$$\varepsilon_p^*(z) = 1 - \frac{\omega_p^2(z)}{\omega^2}\cdot\frac{1-\beta^2}{(1-\beta k_s)^2} \qquad (3\cdot46)$$

である。また，$\omega_p(z)$ はプラズマの静止系で定義されたプラズマ角周波数である。運動方向すなわち y 方向に無限大外部静磁界が印加された場合のコールドプラズマは，一軸性であり，したがってその等価比誘電率 $\overline{\varepsilon}_p^*(z)$ の各成分は次式で与えられる。

$$\varepsilon_{px}^* = \varepsilon_{pz}^* = 1 \quad , \quad \varepsilon_{py}^*(z) = \varepsilon_p^*(z) \qquad (3\cdot47)$$

すなわち前節までの議論において，等方性コールドプラズマの場合は3.3節において，また一軸性コールドプラズマの場合は3.4節においてそれぞれ式(3·45)，式(3·47)を考慮して

$$\varepsilon_1^* = \varepsilon_p^*(0) \quad , \quad \varepsilon_2^* = \varepsilon_p^*(l) \qquad (3\cdot48)$$

とおけば，議論はそのままなりたつ。式(3·48)を式(3·10)に代入すればわかるように，波源が電流源の場合は解析は全くプラズマの運動の影響をうけないので，ここでは波源が磁流源のみの場合について考える。線磁流源からの放射におよぼす運動不均質コールドプラズマの影響を見るために，等方性の場合の放射パターンすなわち式(3-45)を $|T_H(\theta)|^2$ に代入したものの数値計算例を，波源が導体面上にある場合，すなわち，$d/\lambda = 0$ で，$\ell = \lambda/4$ としてプラズマの運動速度 β をパラメータとして図3·2に示す。ただし λ は真空中における波長である。上記の等方性プラズマと同じ平均電子密度，すなわちプラズマ角周波数が

$$\omega_{pm}^2 = \frac{\omega_p^2(0) + \omega_p^2(\ell)}{2} \qquad (3\cdot49)$$

で与えられる等方性均質プラズマの場合の数値計算例を図3·3に示す。よく知られているように，運動等方性均質プラズマの場合，プラズマの運動速度によって放射パターンに急しゅんな零点が現われることがある。(図3·3参照) この零点はプラズマの運動にともなうDoppler効果のために，均質プラズマの等価比誘電率が零になる角度でおこり，式(3·46)からプラズマ角周波数 ω_{pm} が

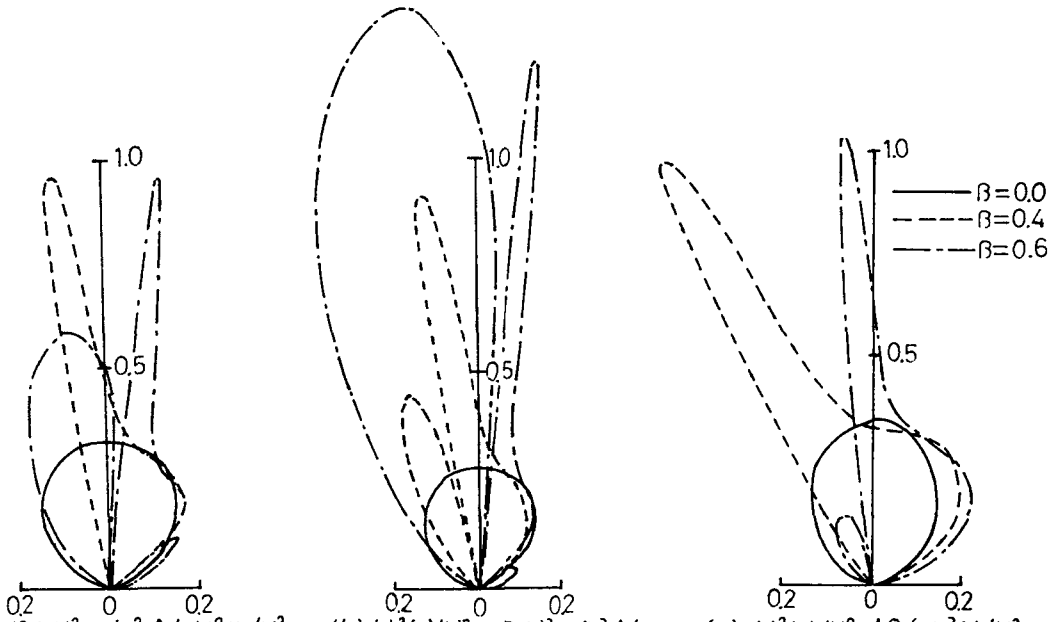
$$\frac{1-\beta}{1+\beta} < \left(\frac{\omega_{pm}}{\omega}\right)^2 < \frac{1+\beta}{1-\beta} \qquad (3\cdot50)$$

なる範囲にある時，プラズマスラブの厚さに無関係に放射パターンにそのような点が一ケ所現われることが知られている。プラズマが直線状に不均質になると，このような零点は運動速度によって二カ所に現われることが数値計算よりわかる。(図3·2a および図3·2b参照) この2点は式(3·41a)の分子において，$d/\lambda = 0$ とおいて，式(3·21)の関係式を利用すると

$$\varepsilon_2^* X_H \cos\theta = 2\varepsilon_1^*\varepsilon_2^*\left\{k_0\gamma(1-\beta\sin\theta)\frac{\ell}{\varepsilon_1^* - \varepsilon_2^*}\right\}^{2/3}\cos\theta \qquad (3\cdot51)$$

となることから，$\varepsilon_1^* = \varepsilon_p^*(0)$ および $\varepsilon_2^* = \varepsilon_p^*(\ell)$ が零になる二点であることがわかる。したがって $\omega_p^2(0)/\omega^2$ および $\omega_p^2(\ell)/\omega^2$ がそれぞれ式(3·50)の範囲にあれば，そのような零点がプラズマスラブの厚さにかかわらず現われることがわかり，もし電子密度が $z = \ell$ で連続に変化していれば，すなわち $\omega_p(\ell) = 0$ ならば，均質な場合と同様に放射パターンの零点

は，一ケ所しか現われないこともわかる。（図3·2C参照）



(a) $\omega_p^2(0)/\omega^2=1.4, \omega_p^2(1)/\omega^2=0.5$　(b) $\omega_p^2(0)/\omega^2=0.5, \omega_p^2(1)/\omega^2=1.4$　(c) $\omega_p^2(0)/\omega^2=1.94, \omega_p^2(1)/\omega^2=0.0$

図3·2 放射パターン $|T_H(\theta)|^2$
$(d/\lambda=0.0, 1/\lambda=0.25)$

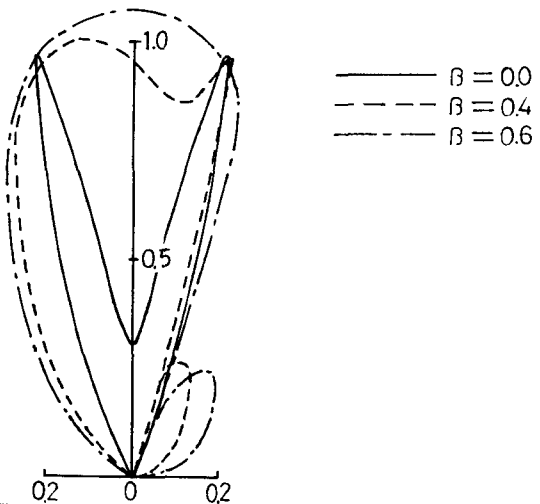


図3·3 放射パターン(均質プラズマ)
$(\omega_{Pm}^2/\omega^2=0.95, d/\lambda=0.0, 1/\lambda=0.25)$

z方向に無限大外部静磁界が印加されたプラズマの場合の放射パターン，すなわち式(3·47)を $|T_A(\theta)|^2$ に代入したものの数値計算例を図3·4に示す。パラメータは等方性の場合と同じである。図3·5は同じ平均電子密度をもつ無限大磁化プラズマの均質な場合の数値計算例である。

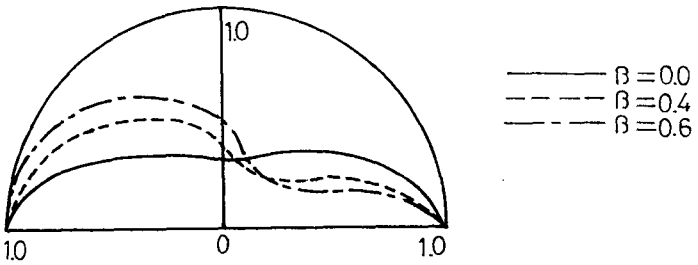


図3·4 放射パターン $|T_A(\theta)|^2$
$(\omega_p^2(0)/\omega^2=1.4, \omega_p^2(1)/\omega^2=0.5,$
$d/\lambda=0.0,\ 1/\lambda=0.25)$

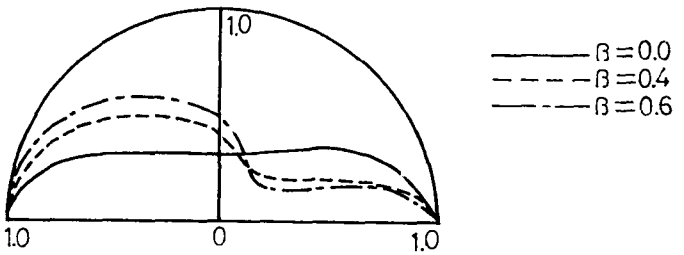


図3·5 放射パターン(1軸性均質プラズマ)
$(\omega_{pm}^2/\omega^2=0.95, d/\lambda=0.0, 1/\lambda=0.25)$

図3·4および図3·5からもわかるように，等方性の場合と比べて放射パターンはあまり媒質の不均質の影響をうけないことがわかる。また等方性の場合のような放射パターンの零点も現われない。このことは，式(3·41b)において $d/\lambda=0$ とおき，式(3·20)を利用して整理すると，その分子は ε_2^* が消えて

$$X_A\cos\theta=\{S_A'(\eta_0)S_B(\eta)-S_A(\eta_0)S_B'(\eta_0)\cos\theta=\text{Const.}\cos\theta \quad (3\cdot52)$$

となり，等方性の場合とちがって，$\varepsilon_1^*=\varepsilon_p^*(0)$ や $\varepsilon_2^*=\varepsilon_p^*(\ell)$ も現われないことからもわかる。このことは均質な場合にもあてはまる。

3.7 結言

誘電率が直線的に変化している運動不均質誘電体スラブおよびプラズマスラブ中におかれた無限長線波源からの放射について詳しく検討した。波源としては，無限長線電流源および線磁流源を考え，特に媒質が等方性および一軸性プラズマの場合の放射パターンについては，数値計算例を示しながら，媒質の運動および不均質の影響を詳しく調べた。

第4章　等速度運動をしている媒質中の電磁波
—— 一般相対論的取り扱い(4.2)

4.1　序　言

最近，一般相対性理論を考慮した非慣性系における媒質を含む巨視的な電磁界理論，または，その応用に関する報告がなされている。(5)(43) たとえば，工学的応用の例として回転運動を検出するリングレーザージャイロ中の光波のビート周波数が，回転運動が加速度運動であるため，一般相対論を考慮した電磁界理論から導くことができることが示されている。(14) 本章では，このような一般相対論を考慮した巨視的な電磁界理論の立場から，従来の特殊相対論を使った運動媒質による平面電磁波の散乱問題について考察する。

4.2　一般相対論からみた広義のガリレイ変換とローレンツ変換

従来，特殊相対論を用いた，運動媒質（誘電率 $\varepsilon_0\varepsilon^*$，透磁率 $\mu_0\mu^*$，運動速度 $\boldsymbol{v}$）による平面電磁波の反射と透過，または，散乱の問題に対する解法として，つぎの二つの方法が知られている。

（1）観測者の静止系，すなわち慣性系 K 系 (X, Y, Z, T) において，マクスウェル方程式および運動媒質に対するミンコウスキ構成関係式

$$\boldsymbol{D} + \frac{1}{c^2}(\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{H}) = \varepsilon_0\varepsilon^*(\boldsymbol{E} + \boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B}) \qquad (4\cdot1a)$$

$$\boldsymbol{B} - \frac{1}{c^2}(\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{E}) = \mu_0\mu^*(\boldsymbol{H} - \boldsymbol{v}\times\boldsymbol{D}) \qquad (4\cdot1b)$$

を用いて問題を解く。

（2）マクスウェル方程式のローレンツ変換に対する共変性を利用して，問題を K 系から，媒質の運動方向を X 軸に平行とすると，ローレンツ変換

$$X = \frac{x' + vt'}{\sqrt{1-\beta^2}}, \qquad Y = y'$$

$$Z = z', \qquad T = \frac{t' + \frac{v}{c^2}x'}{\sqrt{1-\beta^2}} \qquad (4\cdot2)$$

ただし，$\beta = v/c$，　c：光速

によって定義される媒質の静止系 k' 系 (x', y', z', t') に変換し，マクスウェル方程式および静止媒質に対するミンコウスキ構成関係式

$$\mathbb{D} = \varepsilon_0 \varepsilon^* \mathbb{E} \quad , \quad \mathbb{B} = \mu_0 \mu^* \mathbb{H} \qquad (4\cdot3)$$

を用いて問題を解く。得られた解をローレンツ逆変換によって K 系にもどす。（図 4・1 参照）

しかし，一般相対性理論によれば，マクスウェル方程式はローレンツ変換のみでなく，任意の座標変換に対しても共変的であるとみなすことができる。したがって，慣性系 K 系にいる観測者に対し等速度 v で運動している系 k 系 (x, y, z, t) に対する変換式として，広義のガリレイ変換

$$X = x + vt, \quad Y = y, \quad Z = z, \quad T = t \qquad (4\cdot4)$$

を用いても，方法(2)と全く同様に議論を進めることができる。なぜなら，k 系内の (x, y, z)=一定なる点に着目すれば，これらはみなすべて同じ速度 $dX/dT = v$ で運動しており，k 系も媒質の静止系と考えることができるからである。このように広義のガリレイ変換で定義された k 系とローレンツ変換によって定義された k' 系とはつぎのような変換式で結ばれている。

$$x' = \frac{x}{\sqrt{1-\beta^2}} \quad , \quad y' = y \quad , \quad z' = z$$

$$t' = \sqrt{1-\beta^2} - vx/c^2\sqrt{1-\beta^2} \qquad (4\cdot5)$$

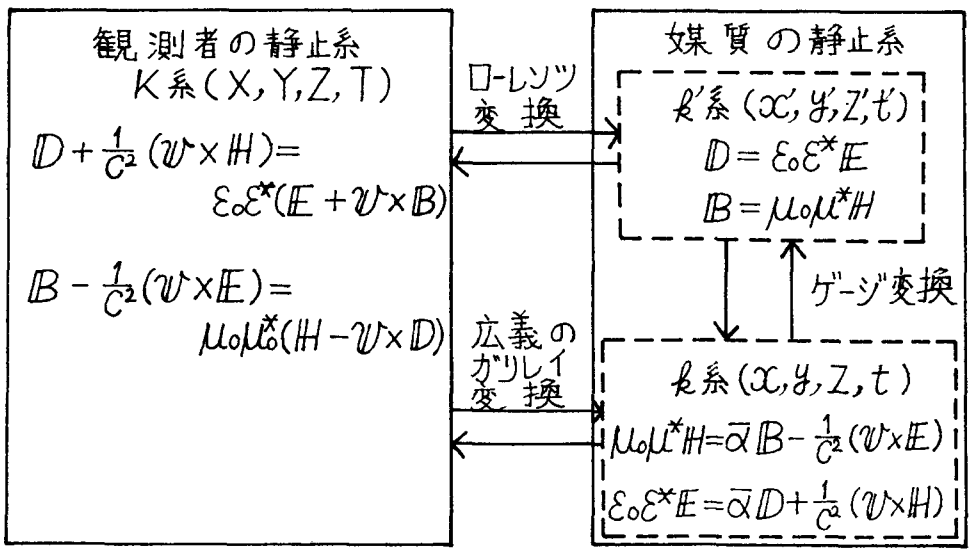


図4・1 ローレンツ変換および広義のガリレイ変換

この関係式は，空間座標に関する変換式が空間座標のみの関数であり，ゲージ変換とよばれ，一般相対論的にいえば K 系と K' 系は同じ系と考えることができる。したがって，運動媒質による電磁波の散乱問題は，ゲージ変換式(4·5)による電磁界の変化を構成関係式にくり込んでしまえば，広義のガリレイ変換を用いても，方法(2)と同じ手法および結果が得られると考えられる。本章では，例として等速度運動している半無限誘電体による平面電磁波の反射と透過の問題を，上記のような一般相対論的な考察および手法を用いて解析しても，結果は特殊相対論を用いて解析した結果と矛盾しないことを示す。

4.3 基礎理論

一般相対性理論によれば，計量テンソル g_{ij} で与えられるRiemann空間における，電流成分のないマクスウェル方程式は，計量テンソルを含まない形式で次式のように与えられる。(55)*

$$\frac{\partial F_{\mu\nu}}{\partial x^{\sigma}} + \frac{\partial F_{\sigma\mu}}{\partial x^{\nu}} + \frac{\partial F_{\nu\sigma}}{\partial x^{\mu}} = 0 \quad , \quad \frac{\partial G^{\mu\nu}}{\partial x^{\mu}} = 0 \qquad (4\cdot6)$$

$$(\mu, \nu, \sigma = 1, 2, 3, 4)$$

ここで，x^{ν} は座標成分

$$x^1 = x, \quad x^2 = y, \quad x^3 = z, \quad x^4 = ct \qquad (4\cdot7)$$

を表わし，c は真空中における光速を表わす。また $F_{\mu\nu}$ は2階反対称共変テンソル，$G^{\mu\nu}$ は2階反対称反変テンソル密度を表わし，任意の座標変換

$$x^{\mu} = x^{\mu}(x^{\nu'}) \qquad (4\cdot8)$$

に対し，それぞれ

$$F_{\mu'\nu'} = \bar{A}^{\rho}_{\mu'} \bar{A}^{\sigma}_{\nu'} F_{\rho\sigma} \quad , \quad |A^{\nu'}_{\kappa}| G^{\mu'\nu'} = A^{\mu'}_{\rho} A^{\nu'}_{\sigma} G^{\rho\sigma} \qquad (4\cdot9)$$

$$(\mu, \nu, \rho, \sigma, \lambda, \kappa = 1, 2, 3, 4)$$

のように変換される。ここで

$$\bar{A}^{\rho}_{\mu'} = \frac{\partial x^{\rho}}{\partial x^{\mu'}} \quad , \quad A^{\mu'}_{\rho} = \frac{\partial x^{\mu'}}{\partial x^{\rho}} \qquad (4\cdot10)$$

---

*テンソルの指標で，上方についた指標は反変成分，下方についた指標は共変成分を表わし，指標で同じものが二つ現われたときは，それに関して和をとるものとする。指標およびテンソル演算に関する詳しい規則は文献(19)および文献(55)を参照されたい。

であり，$|A_k^{\lambda'}|$ は $\det.|A_k^{\lambda'}|$ の絶対値である。したがって，マクスウェルの方程式(4·6)は任意の座標変換に対し共変となる。また，$F_{\mu\nu}$, $G^{\mu\nu}$ をそれぞれ

$$F_{\mu\nu}=\begin{bmatrix} 0 & cB_z & -cB_y & E_x \\ -cB_z & 0 & cB_x & E_y \\ cB_y & -cB_x & 0 & E_z \\ -E_x & -E_y & -E_z & 0 \end{bmatrix} \qquad G^{\mu\nu}=\begin{bmatrix} 0 & H_z & -H_y & -cD_x \\ -H_z & 0 & H_x & -cD_y \\ H_y & -H_x & 0 & -cD_z \\ cD_x & cD_y & cD_z & 0 \end{bmatrix} \tag{4·11}$$

に対応させれば式(4·6)は，よく知られた通常のベクトル形式のマクスウェルの方程式に書くことができる。計量テンソルが g_{ij} で与えられる Riemann 空間中に静止している媒質に対する構成関係式は，局所慣性系[5]での静止媒質に対するミンコウスキの関係式を Riemann 空間に一般化することにより，次式のように与えられる。[14][16]

$$\mu^* G^{\rho\sigma}=\eta\sqrt{-g}\,g^{\rho\alpha}g^{\sigma\beta}F_{\alpha\beta}$$
$$\varepsilon^*\sqrt{-g}\,\eta F_{\rho 4}=g_{\rho\alpha}g_{4\beta}G^{\alpha\beta} \tag{4·12}$$
$$(\alpha,\beta=1\sim4,\ \rho,\sigma=1\sim3)$$

ただし，$g=\det.(g_{ij})$，$\eta=(\varepsilon_0/\mu_0)^{1/2}$

ここで，ε_0, μ_0 はそれぞれ，真空の誘電率および透磁率であり，ε^*, μ^* はそれぞれ媒質の比誘電率および比透磁率である。上記のような構成関係式は，加速度運動にともなう慣性力が媒質を構成している分子間の力に比べ十分小さく，加速度運動が媒質固有の性質に影響をおよぼさないという仮定のもとに導かれるものであって，ミンコウスキ形式のもっとも単純な拡張と考えられる。

4.4 運動半無限誘電体による平面電磁波の反射と透過

いま，図4·2に示すように，二つの誘電体が無限平面によって接しているものとする。媒質Ⅰは簡単のために真空(誘電率 ε_0, 透磁率 μ_0)とし，媒質Ⅱ(誘電率 $\varepsilon_0\varepsilon^*$, 透磁率 $\mu_0\mu^*$)が，境界面に平行，または垂直にK系に静止している観測者に対し，一定速度 v で運動しているものとする。さて，一様な平面電磁波が，入射面をX-Z平面として媒質ⅠからⅡに入射するものとする。また，ここでは入射波はH波，すなわち電界成分がY

方向成分のみをもつ場合について考える。このときK系において入射波は次式のように表わすことができる。

$$E_Y^i = E_0 \exp i(k_X X - k_Z Z - \omega T) \qquad (4\cdot13)$$

ただし，　$k_X = k_0 \sin\theta_i$，$k_Z = k_0 \cos\theta_i$，$k_0 = \omega/c$ (4·14)

また，E_0は入射波の一定の振幅，θ_iは入射角を表わす。K系における他の電磁界成分は，マクスウェルの方程式(4·6)から求めることができる。(図4·2参照)

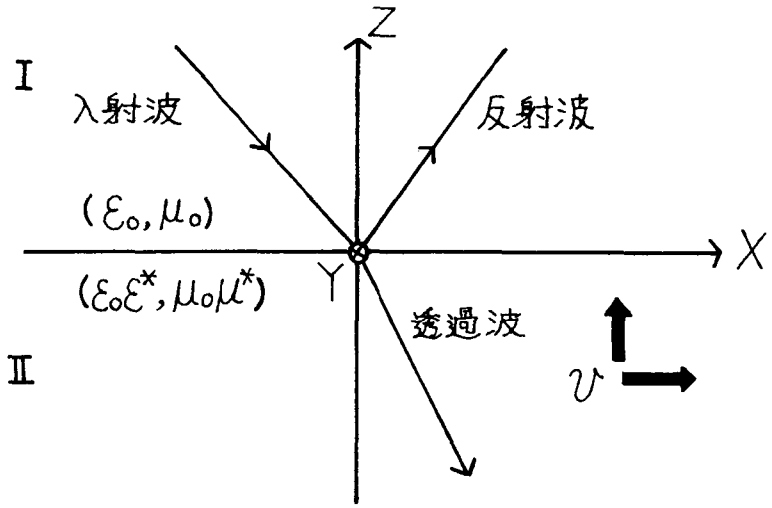


図4·2 座標系

つぎに，式(4·13)で与えられる入射波を媒質IIの静止系k系に変換する変換式として，広義のガリレイ変換を用いる。すなわち

$(\boldsymbol{v} = v\boldsymbol{x})$　$X = x + vt$，$Y = y$，$Z = z$，$T = t$　(4·15a)

$(\boldsymbol{v} = v\boldsymbol{z})$　$X = x$，$Y = y$，$Z = z + vt$，$T = t$　(4·15b)

を用いる。ここで，$\boldsymbol{x}$はX軸方向，$\boldsymbol{z}$はZ軸方向の単位ベクトルを表わす。k系における計量テンソル$g_{\mu\nu}$は式(4·15)を微分して線素dsの関係式

$$ds^2 = \eta_{ij}\, dX^i dX^j = g_{ij}\, dx^i dx^j \quad (i,j = 1 \sim 4) \qquad (4\cdot16)$$

ただし　　$\eta_{11}=\eta_{22}=\eta_{33}=-\eta_{44}=1$　　(4·17)

に代入することにより次式のように与えられる。

($v=v_x$)

$$g_{11}=g_{22}=g_{33}=1,\quad g_{14}=\beta,\quad g_{44}=-(1-\beta^2)\quad(4\cdot18a)$$

($v=v_z$)

$$g_{11}=g_{22}=g_{33}=1,\quad g_{34}=\beta,\quad g_{44}=-(1-\beta^2)\quad(4\cdot18b)$$

したがって，k系はもはや統計なミンコウスキ空間と考えることはできない。

変換(4·15)によって，電磁界成分$F_{\mu\nu}$, $G^{\mu\nu}$はそれぞれ式(4·9)のように変換されるので，式(4·15)にしたがって演算(4·9)を実行すると，k系における入射波の電界成分は次式のようになる。

($v=v_x$)

$$E_y^i=(1-\beta\sin\theta_i)E_0\exp i\{k_x x-k_{kz}z+(k_x v-\omega)t\}\quad(4\cdot19a)$$

($v=v_z$)

$$E_y^i=(1+\beta\cos\theta_i)E_0\exp i\{k_x x-k_{kz}z-(k_z v+\omega)t\}\quad(4\cdot19b)$$

他の電磁界成分も，同様の演算によって得ることができる。k系における透過波および反射波は，構成関係式(4·12)およびマクスウェル方程式から求めることができる。k系における媒質の構成関係式は，式(4·18)を式(4·12)に代入して，ベクトル型式で次式のように書くことができる。

$$\mu_0\mu^*\mathbb{H}=\overline{\alpha}\cdot\mathbb{B}-\frac{1}{c^2}(v\times\mathbb{E})\quad(4\cdot20a)$$

$$\varepsilon_0\varepsilon^*\mathbb{E}=\overline{\alpha}\cdot\mathbb{D}+\frac{1}{c^2}(v\times\mathbb{H})\quad(4\cdot20b)$$

ただし

($v=v_x$)　　($v=v_z$)

$$\overline{\alpha}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1-\beta^2 & 0\\ 0 & 0 & 1-\beta^2\end{bmatrix}\qquad \overline{\alpha}=\begin{bmatrix}1-\beta^2 & 0 & 0\\ 0 & 1-\beta^2 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\quad(4\cdot21)$$

したがって，式(4·6)および式(4·20)より，k系における電界成分E_yに対する波動方程式は，式(4·19)より，次式を考慮すると，

($v = vx$) ($v = vz$)

$$\frac{\partial}{\partial x} = ik_x,\ \frac{\partial}{\partial t} = i(k_x v - \omega), \qquad \frac{\partial}{\partial z} = ik_z,\ \frac{\partial}{\partial t} = i(k_z v + \omega) \tag{4·22}$$

次のような微分方程式になる。

($v = vx$)

$$\frac{d^2 E_y}{dz^2} + k_0^2 \gamma^2 \{n^2(\beta \sin\theta_i - 1)^2 - (\sin\theta_i - \beta)^2\} E_y = 0 \tag{4·23a}$$

($v = vz$)

$$\frac{d^2 E_y}{dz^2} + 2ik_0 \beta \gamma^2 (\beta \cos\theta_i + 1) \frac{dE_y}{dz} - k_0^2 \gamma^4 \{\beta^2(\beta\cos\theta_i + 1)^2 - Q\} E_y = 0 \tag{4·23b}$$

ただし

$$Q = n^2(\beta\cos\theta_i + 1)^2 - \sin^2\theta_i(1-\beta^2),\ \gamma = (1-\beta^2)^{-1/2},\ n = (\varepsilon^* \mu^*)^{1/2} \tag{4·24}$$

式(4·23)の微分方程式は解くことができて，k 系における透過波 E_t を求めることができる。反射波 E_r は式(4·23)において，$n=1$ とおいて求めることができる。反射波および透過波の電界に関する結果のみを書くとつぎのようになる

($v = vx$)

$$E_y^r = (1 - \beta\sin\theta_i) R'' E_0 \exp i\{k_x x + k_r'' z + (k_x v - \omega)t\} \tag{4·25a}$$

$$E_y^T = (1 - \beta\sin\theta_i) T'' E_0 \exp i\{k_x x - k_t'' z + (k_x v - \omega)t\} \tag{4·25b}$$

ただし $k_r'' = k_0 \cos\theta_i$, $k_t'' = k_0 \gamma \{n^2(\beta\sin\theta_i - 1)^2 - (\sin\theta_i - \beta)^2\}$ (4·26)

($v = vz$)

$$E_y^r = (1 + \beta\cos\theta_i) R^\perp E_0 \exp i\{k_x x + k_r^\perp z - (k_z v + \omega)t\} \tag{4·27a}$$

$$E_y^t = (1 + \beta\cos\theta_i) T^\perp E_0 \exp i\{k_x x - k_t^\perp z - (k_z v + \omega)t\} \tag{4·27b}$$

ここで，R および T は，反射係数および透過係数であり，電界 E および磁界 H の接線成分が連続でなければならないという境界条件より決定される。結果のみを示すと次式のようになる。

$$R^{\parallel} = \frac{k_r'' - k_t''}{k_r'' + k_t''} \qquad T^{\parallel} = \frac{2k_r}{k_r'' + k_t''} \tag{4·28}$$

$$R^{\perp} = \frac{(\cos\theta_i + \beta) - Q}{(\cos\theta_i + \beta) + Q} \gamma^2\{(1+\beta^2) + 2\beta\cos\theta_i\} \tag{4·29a}$$

$$T^{\perp} = \frac{\cos\theta_i + \beta}{(\cos\theta_i + \beta) + Q} \gamma^2\{\beta(1+\beta\cos\theta_i) - \beta Q\} \tag{4·29b}$$

観測者の静止系K系における反射波および透過波は式(4·27)を式(4·15)を用いて逆変換することにより次式のように得ることができる。

($w = v_x$)

$$E_Y^r = R^{\parallel} E_0 \exp i(k_x X + k_r'' Z - \omega T) \tag{4·30a}$$

$$E_Y^t = T^{\parallel} E_0 \exp i(k_x X - k_t'' Z - \omega T) \tag{4·30b}$$

($w = v_z$)

$$E_Y^r = R^{\parallel} E_0 \exp i(k_x X + k_r^{\perp} Z - \omega_r T) \tag{4·31a}$$

$$E_Y^t = T^{\parallel} E_0 \exp i(k_x X - k_t^{\perp} Z - \omega_t T) \tag{4·31b}$$

ただし

$$\omega_r = \omega\gamma^2\{(1+\beta^2) + 2\beta\cos\theta_i\} \tag{4·32a}$$

$$\omega_t = \omega\gamma^2\{(1+\beta\cos\theta_i) - \beta Q\} \tag{4·32b}$$

結局K系における反射波および透過波は，式(4·30)および式(4·31)で与えられることになる。これらの結果はローレンツ変換を用いて特殊相対論的に解析したもの[21]と完全に一致する。

4.5 結言

等速度運動を行なう半無限誘電体による平面電磁波の反射と透過の問題を，一般相対論を考慮した巨視的な電磁界理論の立場から考察した。その結果，ローレンツ変換をゲージ変換および広義のガリレイ変換の和と考え，ゲージ変換による電磁界の変化を，一般化されたミンコウスキ構成関係式にくり込んでしまえば，広義のガリレイ変換を用いてもローレンツ変換と

同じように問題が解け，結果も矛盾しないことを示した。以上のような結果の根拠は，ミンコウスキ型式のマクスウェル方程式および構成関係式が一般座標変化に対し共変的に書きうること，観測者が問題にする量，すなわち反射波および透過波の量が慣性系での量であること，である。本章においては，等速度運動を行なう半無限誘電体による平面電磁波の反射と透過の問題についてのみ考察したが，他の問題についても本章と同じ考察ができるものと考えられる。

第5章　加速度運動をしている媒質中の電磁波
―― 一般相対論的取り扱い[44]~[46]

5.1 序言

運動媒質中の電磁界に関する研究については，プラズマ工学，電波天文学などの発達とあいまって，多くの研究者によって議論され，種々の興味ある結果が得られている。しかしながら，そのほとんどは，媒質，または観測者が等速度運動している場合，すなわち慣性系に存在する場合を取り扱ったものである。したがって，その場合には特殊相対論を考慮すれば十分であった。これに対して観測者が非等速度運動をしている場合，すなわち非慣性系に存在する場合には，いわゆる一般相対論的な考慮が必要となる。このような問題に関しては，最近 Anderson[16][17]らが非慣性系中に，媒質，または観測者が存在する場合の電波伝搬について考察し，とくに位相速度についてくわしく論じている。また，Mo[18][43]は，非慣性系中における観測量という観点から出発して，前者とはちがった定式化を試み，理論を具体的な問題に適用している。さらに，工学的応用として，回転運動を行なっているリングレーザー中での光波のビート周波数が，一般相対論を考慮した電磁界理論から導かれることも示されている。

本章においては，加速度運動の一例として，Møller の変換で与えられるような，加速度運動を行なっている媒質中での電磁波について，初等関数で表わしうる厳密解を求め，その性質について等速度運動の場合と関連づけて詳しく調べる。その結果，観測者が加速系にいるときは，その解が最も簡単な形の計量をもつ非永久重力場中におかれた媒質中での平面波解になっており，等価重力場による光線のわん曲，および，Doppler-shift もがすべてエネルギー関係式から導かれること，観測者が慣性系にいる場合には，等速運動のときと同じエネルギー速度および位相速度の加法則が，加速度運動の場合にもなりたつこと，などを示している。従来の論文における，非慣性系中におかれた媒質中における電波伝搬，とくに等価重力場による光線のわん曲や，Doppler-shift についての解析は近似解を用いたものがすべてであり，マクスウェル方程式の厳密解を用いた議論は，本論文が始めてと思われる。また，加速度運動の場合に対応する，エネルギー速度および位相速度の加法則についても，本論文で始めてエネルギー関係式および

位相項から求められることが示されている。

5．2 波動方程式

慣性系K系（X, Y, Z, cT）に対し，加速度運動している媒質の静止系（加速系）L系（x, y, z, ct）を考え，K系とL系との変換則が次式のような，いわゆるMøllerの変換で与えられるものとする。(55)※

$$X = \frac{c^2}{g}(\cosh\theta - 1) + x\cosh\theta \tag{5·1a}$$

$$Y = y, \qquad Z = z \tag{5·1b}$$

$$T = \frac{c}{g}\sinh\theta + \frac{x}{c}\sinh\theta \tag{5·1c}$$

ただし，$\theta = gt/c$ であり，gは加速系L系の原点，$x=0$の固有加速度である。(55)式(5·1)は，加速系L系をtの各瞬間ごとに定義される慣性系の集合と考えることにより求められる。すなわち，加速系L系の座標時間tは，双曲線運動している媒質の原点における固有時間に一致させ，空間座標は，後に述べる各tの時間ごとに定義される媒質の瞬時静止系の空間座標と一致させることにより得られる。こうすることにより，L系は変形しない系，すなわち計量が時間に依存しない系となり，また，空間座標についてはミンコウスキ空間と同じになり，系内での物理現象が取り扱いやすくなる。式(5·1)は，$gt \ll c$の場合，よく知られているニュートンの変換則

$$X = x + \frac{1}{2}gt^2, \quad Y = y, \quad Z = z, \quad T = t \tag{5·2}$$

に一致することがわかる。媒質の各点のK系における速度は，式(5·1)から

$$v(t) = v(X,T) = \left.\frac{dX}{dT}\right|_{x=\text{const.}} = \frac{gt}{\{(1+gx/c^2)^2 + gT^2/c^2\}^{1/2}}$$

$$= c\tanh\theta \tag{5·3}$$

で与えられ，tのみの関数で表わされるが，K系からみれば媒質は，ロー

※本章では，式(5·1)の変換をMøllerの変換と呼ぶことにする。慣性系から加速系への変換については，この他に種々の変換が知られており，必ずしも一意的に式(5·1)で与えられるわけではない。ここでは，この問題には言及しないが，変換(5·1)に関するくわしい議論は文献(55)を参照されたい。

レンツ収縮のために変形しながら運動していくように見える。加速系L系での線素は式(5·1)から

$$ds^2 = g_{ij}\,dx^i dx^j = dx^2 + dy^2 + dz^2 - c^2\left(1 + \frac{gx}{c^2}\right)dt^2 \qquad (5\cdot4)$$

で与えられる。したがって，等価原理により[55]，L系は線素が式(5·4)で与えられる。

さて，いま，K系において，真空中で，X，Z 面内に入射面をもつ平面波を考えよう。ただし，電界Eが入射面に垂直な場合(TE波)を考える。TH波の場合も全く同様に議論を進めることができる。さて，TE波の場合，式(4·11)は

$$F_{\mu\nu} = \begin{bmatrix} 0 & \sin\zeta & 0 & 0 \\ -\sin\zeta & 0 & -\cos\zeta & 1 \\ 0 & \cos\zeta & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} E_0 f\left(\frac{X\sin\zeta + Z\cos\zeta}{c} - T\right) \qquad (5\cdot5a)$$

$$G^{\mu\nu} = \begin{bmatrix} 0 & \sin\zeta & \sin\zeta & 0 \\ -\sin\zeta & 0 & -\cos\zeta & -1 \\ 0 & \cos\zeta & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} E_0 f\left(\frac{X\sin\zeta + Z\cos\zeta}{c} - T\right) \qquad (5\cdot5b)$$

と書きうる。ただし，E_0は一定の振幅，ζは波の進行方向とX軸とのなす角度であり，fは適当な条件を満たす任意関数である。式(5·5)の解をもとにして，L系に比誘電率ε^*，比透磁率μ^*の均質な誘電体が静止している場合を考えよう。式(4·6)を式(4·12)に代入して得られる構成関係式は，

$$\mu_0\mu^* H = \left(1 + \frac{gx}{c^2}\right)B, \qquad \varepsilon_0\varepsilon^* E = \left(1 + \frac{gx}{c^2}\right)D \qquad (5\cdot6)$$

となり，計量テンソルg_{44}成分はあたかも媒質が不均質になったように影響する。したがって，L系に静止している媒質中での電波伝搬は，構成関係式が式(5·6)で与えられる不均質媒質中でのそれと形式的に全く同じになる。式(4·6)および式(5·6)より，D_yに関する波動方程式を求めると

$$\left(1+\frac{gx}{c}\right)\frac{\partial^2 D_y}{\partial z^2}+\left(1+\frac{gx}{c^2}\right)^2\frac{\partial^2 D_y}{\partial x^2}+\frac{3g}{c^2}\left(1+\frac{gx}{c^2}\right)\frac{\partial D_y}{\partial x}$$

$$+\frac{g^2}{c^4}D_y=\frac{n^2}{c^2}\frac{\partial^2 D_y}{\partial t^2} \qquad (5\cdot 7)$$

が得られる。ただし $n=(\varepsilon^*\mu^*)^{1/2}$ である。波動方程式(5・7)の一つの厳密解はマクスウェル方程式の共変性を利用してつぎのように求めることができる。まず，K系での真空中の電磁界式(5・5)を座標変換式(5・1)にしたがって変換する。変換された電磁界は，マクスウェル方程式の共変性から，$n=1$ とおいたL系での波動方程式(5・7)を満足している。式(5・7)において，屈折率 n が時間微分の項にしか入ってこないことを考慮すると，変換によって求めた真空中でのL系の電磁界の表式において，t を t/n でおきかえたものは，式(5・7)の解になっていることがわかる。このようにして得られた結果を示すと，次式のようになる。

$$\left.\begin{matrix}E_y\\ D_y\end{matrix}\right\}=\frac{1}{n}\left\{\begin{matrix}\left(1+\frac{gx}{c^2}\right)\\ \varepsilon_0\varepsilon^*\end{matrix}\right\}JE_0 f(\phi) \qquad (5\cdot 8a)$$

$$\left.\begin{matrix}H_x\\ B_x\end{matrix}\right\}=-\frac{1}{c}\left\{\begin{matrix}\left(1+\frac{gx}{c^2}\right)/\mu_0\mu^*\\ 1\end{matrix}\right\}\cos\zeta\, E_0 f(\phi) \qquad (5\cdot 8b)$$

$$\left.\begin{matrix}H_z\\ B_z\end{matrix}\right\}=\left\{\begin{matrix}\left(1+\frac{gx}{c^2}\right)/\mu_0\mu^*\\ 1\end{matrix}\right\}ME_0 f(\phi) \qquad (5\cdot 8c)$$

ただし

$$J=\cosh\psi-\sin\zeta\sinh\psi,\quad M=\sin\zeta\cosh\psi-\sinh\psi$$

$$\psi=gt/nc \qquad (5\cdot 9)$$

また，ϕ は位相を表わし，t を t/n でおきかえた式(5・1)を式(5・5)に代入することによりつぎのように与えられる。

$$\phi=\frac{c}{g}\left(1+\frac{gx}{c^2}\right)M+\frac{z}{c}\cos\zeta-\frac{c}{g}\sin\zeta \qquad (5\cdot 10)$$

式(5・10)からもわかるように，$t=$ const. における等位相面は直線となり平面波であることがわかる。また，式(5・8)は $gt\ll 0$ のとき双曲線関数をテーラー展開すればわかるように

$$B_x \simeq -\frac{1}{c}E_0 f\left(\frac{x\cos\zeta + z\sin\zeta}{c} - \frac{t}{n}\right) \qquad (5\cdot11)$$

に対応する波動である。したがって，ζは初期条件 $t=T=0$ における等位相面の傾きを表わす角度である。

5.3 エネルギー速度および位相速度

計量テンソルが g_{ij} で与えられるRiemann空間中でのエネルギー，運動量保存則は

$$\frac{\partial m_\nu^\mu}{\partial x^\mu} - \frac{1}{2} m^{\rho\sigma}\frac{\partial g_{\rho\sigma}}{\partial x^\nu} = 0 \qquad (5\cdot12)$$

で与えられる。[55] ここで，m_ν^μはエネルギー，運動量テンソル密度で

$$m_\nu^\mu = -F_{\nu\sigma}G^{\mu\sigma} + \frac{1}{4}\delta_\nu^\mu F_{\alpha\beta}G^{\alpha\beta} \qquad (5\cdot13)$$

$$(\mu,\nu,\sigma,\rho,\alpha,\beta = 1,2,3,4)$$

ただし

$$\delta_\nu^\mu = \begin{cases} 1 : \mu=\nu \\ 0 : \mu\neq\nu \end{cases}$$

式(5·12)において，$\nu=4$とおいたものはエネルギー保存則を表わし，いまの問題では，g_{44}が時間に依存しないことを考慮すると

$$\sqrt{-g}\frac{\partial w}{\partial t} + div.(\sqrt{-g}\,\mathbb{S}) = 0 \qquad (5\cdot14)$$

と書くことができる。ここで，wは電磁界のエネルギー密度，$\mathbb{S}$はポインティングベクトルを表わし次式のように与えられる。

$$\sqrt{-g}\cdot w = \frac{1}{2}c(\mathbb{E}\cdot\mathbb{D} + \mathbb{H}\cdot\mathbb{B}),\quad \sqrt{-g}\,\mathbb{S} = \mathbb{E}\times\mathbb{H} \qquad (5\cdot15)$$

L系でのwおよび$\mathbb{S}$を求めると式(5·8)および式(5·15)から

$$w = \frac{\varepsilon_0}{\mu^*}J^2E_0^2f^2(\phi) \qquad (5\cdot16a)$$

$$S_x = \frac{\eta}{n\mu^*}\left(1+\frac{gx}{c^2}\right)JME_0^2f^2(\phi) \qquad (5\cdot16b)$$

$$S_z = \frac{\eta}{n\mu^*}\left(1+\frac{gx}{c^2}\right)\cos\zeta\, JE_0^2f^2(\phi) \qquad (5\cdot16c)$$

となり，明らかに式(5·14)を満足しているのがわかる。
したがって，エネルギー速度u_eを次式で定義すると

$$u_e = \frac{S}{W} \qquad (5\cdot17)$$

式(5·16)から その成分は

$$u_{ex} = \frac{c}{n}\left(1+\frac{gx}{c^2}\right)\sin\rho\ ,\quad u_{ez} = \frac{c}{n}\left(1+\frac{gx}{c^2}\right)\cos\rho \qquad (5\cdot18)$$

ただし, $\sin\rho = M/J$, $\cos\rho = \cos\zeta/J$

で与えられるから, その合成は

$$u_e^2 = u_{ex}^2 + u_{ez}^2 = \frac{c^2}{n^2}\left(1+\frac{gx}{c^2}\right) \qquad (5\cdot19)$$

で与えられ, 計量テンソルが式(5·4)で与えられるような空間においては, 屈折率は光速に式(5·19)のように影響することがわかる。$n=1$のとき, すなわち真空の場合は, 式(5·19)は線素(5·4)で$ds^2=0$とおいて得られるL系での光速

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2 = c\left(1+\frac{gx}{c^2}\right) \qquad (5\cdot20)$$

に等しくなることもわかる。式(5·10)で与えられる位相面ϕが一定である面の位相速度をu_pで定義すると, その成分は(付録参照)

$$u_{px} = \frac{c}{n}\left(1+\frac{gx}{c^2}\right)/\sin\rho$$
$$u_{pz} = \frac{c}{n}\left(1+\frac{gx}{c^2}\right)/\cos\rho \qquad (5\cdot21)$$

で与えられ, その合成は

$$1/u_p^2 = 1/u_{px}^2 + 1/u_{pz}^2 = \frac{n^2}{c^2}\Big/\left(1+gx/c^2\right)^2 \qquad (5\cdot22)$$

となり, エネルギー速度に一致することがわかる。また式(5·18), および式(5·21)から つぎの関係

$$\sqrt{u_p u_e} = \sqrt{u_{px}u_{ex}} = \sqrt{u_{pz}u_{ez}} = \frac{n^2}{c^2}\cdot\frac{1}{(1+gx/c^2)} \qquad (5\cdot23)$$

があることもわかる。以上の結果をもちいて, L系における光線の軌跡をもとめてみよう。ポインティングベクトルの方向とx軸とのなす角度χ_1は

$$\tan\chi_1 = S_z/S_x = \cos\zeta/M \qquad (5\cdot24)$$

で与えられ, また等位相面とx軸とのなす角度χ_2は

$$\tan\chi_2 = -u_{pz}/u_{px} = -M/\cos\zeta \qquad (5\cdot25)$$

で与えられるから，ポインティングベクトルと等位相面とは互いに直交していることがわかる。したがって，ζをパラメータとする直線群，すなわち$\phi = const.$なる等位相面に直交する曲線群は，L系における光線の軌跡を表わすと考えられる。この曲線群は，簡単に求めることができて

$$\left(x + \frac{c^2}{g}\right)^2 + (z - \xi)^2 = \Gamma \qquad (5\cdot26)$$

で与えられる。ただし

$$\xi = (const. + \frac{c}{g}\sin\zeta)/\cos\zeta$$

$$\Gamma = 任意定数 \qquad (5\cdot27)$$

すなわち，式(5・26)は，特異面上の座標$(-c^2/g, \xi)$を中心とする円群を表わしている。$g=0$のときこれらは直線群となることを考慮すると，これは加速度運動にともなう非永久重力場によって光線がわん曲されることを表わしていると考えられ，またその軌跡は円弧で与えられることがわかる。(図5・1参照)　さらに屈折率nが式(5・26)に現われないことから，線素(5・4)で与えられる非永久重力場による光線のわん曲は媒質

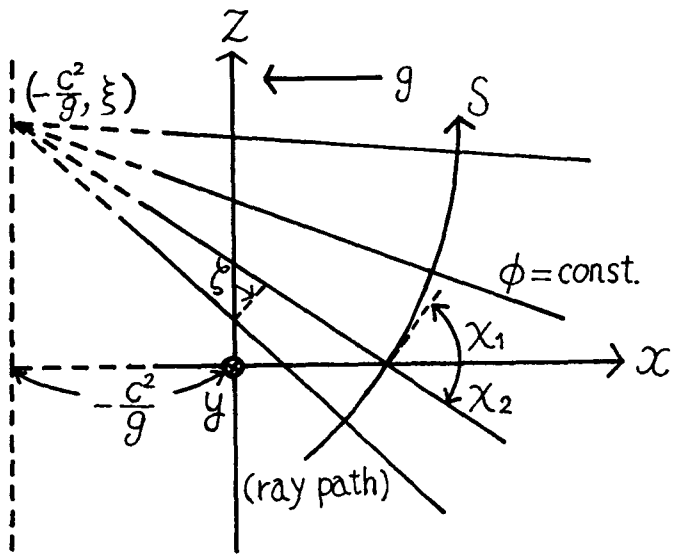


図5・1 加速系L系における等位相面 $\phi = const.$，
ポインチングベクトルSおよび光線の軌跡

に無関係であることがわかる。また曲線群(5·26)は，静的重力場中におけるフェルマーの原理(56)(57)

$$\delta\int\frac{dl}{\sqrt{-g_{44}}}=0 \qquad (5\cdot28)$$

を満足することを示すこともできる。

5.4 逆変換

L系で求めた以上の電磁界は，媒質が加速度運動しているように見える慣性系K系から見てどのように表わされるか調べてみよう。そのためには式(5·1)の逆変換にしたがって，演算(4·9)を実行すればよい。式(5·1)および $v=c\tanh\theta$ であることを考慮し，結果のみを示すと

$$\left.\begin{aligned}E_Y&=\frac{1}{n}\gamma(1+n\beta\sin\rho)\\ D_Y&=\frac{\eta}{c\mu^*}\gamma(n+\beta\sin\rho)\end{aligned}\right\}JE_0f(\phi) \qquad (5\cdot29a)$$

$$\left.\begin{aligned}H_Z&=\frac{\eta}{\mu^*}\gamma(\sin\rho+n\beta)\\ B_Z&=\frac{1}{cn}\gamma(n\sin\rho+\beta)\end{aligned}\right\}JE_0f(\phi) \qquad (5\cdot29b)$$

$$\left.\begin{aligned}H_X&=-\frac{\eta}{\mu^*}\cos\zeta\\ B_X&=-\frac{1}{c}\cos\zeta\end{aligned}\right\}JE_0f(\phi) \qquad (5\cdot29c)$$

ただし

$$\gamma(t)=\{1-\beta^2(t)\}^{-\frac{1}{2}}=\cosh\theta,\quad \beta(t)=v(t)/c \qquad (5\cdot30)$$

である。式(5·29)で $n=1$ とおけば真空の場合であるから，当然式(5·5)に一致する。式(5·29)からわかるように，K系での電磁界は，よく知られた運動媒質の構成関係式

$$\mathbb{D}+\frac{1}{c^2}\{v(t)\times\mathbb{H}\}=\varepsilon_0\varepsilon^*\{\mathbb{H}+v(t)\times\mathbb{B}\} \qquad (5\cdot31a)$$

$$\mathbb{B}-\frac{1}{c^2}\{v(t)\times\mathbb{E}\}=\mu_0\mu^*\{\mathbb{H}-v(t)\times\mathbb{D}\} \qquad (5\cdot31b)$$

を満足していることもわかる。式(5·29)の電磁界がK系でのマクスウェル方程式を満足していることは，その共変性から明らかである。K系でのエネルギー密度，およびポインティングベクトル $\mathbb{S}$ を求めると

$$W=\frac{\eta}{cn\mu^*}\gamma^2(1+n\beta\sin\rho)(n+\beta\sin\rho)J^2E_0^2f^2(\phi) \qquad (5\cdot32a)$$

$$S_Z=\frac{\eta}{n\mu^*}\gamma(1+n\beta\sin\rho)\cos\zeta J^2E_0^2f^2(\phi) \qquad (5\cdot32b)$$

$$S_X=\frac{\eta}{n\mu^*}\gamma^2(1+n\beta\sin\rho)(n\beta+\sin\rho)J^2E_0^2f^2(\phi) \qquad (5\cdot32c)$$

で与えられ，したがってエネルギー速度 U_e は

$$U_{eX}=\frac{S_X}{W}=c\frac{n\beta+\sin\rho}{n+\beta\sin\rho}$$

$$U_{eZ}=\frac{S_Z}{W}=c\frac{\cos\rho}{\gamma(n+\beta\sin\rho)} \qquad (5\cdot33)$$

で与えられる。この式は，後に述べるように，加速度運動に対応するエネルギー速度の加法則を表わしている。また K 系での位相速度 U_p は，式（5・1）を式（5・5）に代入することにより得ることができ（付録参照），次式のように与えられる。

$$U_{pX}=c\frac{1+n\beta\sin\rho}{n\sin\rho+\beta} \qquad (5\cdot34a)$$

$$U_{pZ}=c\frac{\gamma(1+n\beta\sin\rho)}{n\cos\rho} \qquad (5\cdot34b)$$

これも，同じく示すように，位相速度の加法則を表わしている。

5.5 観測量および重力 Doppler-shift

加速系 L 系は，非永久重力場と等価であるから，いわゆる光の伝搬において，前述の光線のわん曲の外に，重力場による Doppler-shift，または，重力赤方（青方）変位がおこるはずである。前章までにもとめた電磁界を使って，この現象を述べるためには，観測者が慣性系にいる場合とちがって，加速系 L 系において実際に測定できる量，すなわち，観測量というものを考慮しなければならない。以下，観測量および，それを使って Doppler-shift がどのように記述されるか調べる。

5.5.1 瞬時静止系

一般相対論によれば，ミンコウスキ空間でない一般 Riemann 空間にお

る観測量というものは，局所的なものしか意味がなく，観測者に設置された局所慣性系での量であることが知られている。[19] いまの問題では，$t=t_0$ という固定された座標時間において，L系に静止している観測者の局所慣性系として，媒質の瞬時静止系 $\bar{K}$ 系 $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}, c\bar{t})$ を用いることができる。$t=t_0$ において媒質の速度が $v_0=\tanh(gt_0/c)$ で与えられることを考慮すると，$\bar{K}$ 系はK系との座標変換が速度 v_0 のローレンツ変換で表わされる慣性系で与えることができ，$\bar{K}$ 系に対する媒質のすべての点の速度は零になる。[55] したがって，$t=t_0$ という座標時間に，L系に静止している観測者が測定できる量，すなわち観測量は $\bar{K}$ 系での量で定義すればよい。$\bar{K}$ 系とK系との座標変換は次式で与えられる。

$$X=\cosh\theta_0\,\bar{x}+c\sinh\theta_0\,\bar{t} \tag{5·35a}$$

$$Y=y\quad,\qquad Z=z \tag{5·35b}$$

$$T=\frac{1}{c}\sinh\theta_0\,\bar{x}+\cosh\theta_0\,\bar{t} \tag{5·35c}$$

ただし $\theta_0=gt_0/c$ である。$\bar{K}$ 系における電磁界量は，式(5·35)にしたがってK系での電磁界量式(5·29)を変換すればよい。変換式(5·35)にしたがって演算式(4·9)を実行すると，$t=t_0$ におけるL系に静止している観測者の観測量，すなわち $\bar{K}$ 系の電磁界として次式が得られる。

$$\left.\begin{matrix}E_{\bar{y}}\\ D_{\bar{y}}\end{matrix}\right\}=\frac{1}{n}\left\{\begin{matrix}1\\ \varepsilon_0\varepsilon^*\end{matrix}\right\}J_0E_0f(\phi_0) \tag{5·36a}$$

$$\left.\begin{matrix}H_{\bar{x}}\\ B_{\bar{x}}\end{matrix}\right\}=-\frac{\eta}{\mu^*}\left\{\begin{matrix}1\\ \mu_0\mu^*\end{matrix}\right\}\cos\zeta\,E_0f(\phi) \tag{5·36b}$$

$$\left.\begin{matrix}H_{\bar{z}}\\ B_{\bar{z}}\end{matrix}\right\}=-\frac{\eta}{\mu^*}\left\{\begin{matrix}1\\ \mu_0\mu^*\end{matrix}\right\}M_0E_0f(\phi) \tag{5·36c}$$

ただし $\phi_0=\phi|_{t=t_0}$，$J_0=J|_{t=t_0}$，$M_0=M|_{t=t_0}$

したがって，$\bar{K}$ 系でのエネルギー密度 $\bar{w}$，およびポインティングベクトル $\bar{S}$ は

$$\bar{w}=\frac{\varepsilon_0}{\mu^*}J_0^2E_0^2f^2(\phi_0) \tag{5·37a}$$

$$\bar{S}_{\bar{x}} = \frac{\eta}{n\mu^*} J_0 M_0 f^2(\phi_0) \qquad (5\cdot37b)$$

$$\bar{S}_{\bar{z}} = \frac{\eta}{n\mu^*} \cos\zeta J_0 f^2(\phi_0) \qquad (5\cdot37c)$$

で与えられるから，エネルギー速度 $\bar{u}_e$ は

$$\bar{u}_{e\bar{x}} = \frac{\bar{S}_{\bar{x}}}{\bar{w}} = \frac{c}{n}\sin\rho_0, \quad \bar{u}_{e\bar{z}} = \frac{\bar{S}_{\bar{z}}}{\bar{w}} = \frac{c}{n}\cos\rho_0 \qquad (5\cdot38)$$

で与えられる。ただし $\sin\rho_0 = \sin\rho|_{t=t_0}$, $\cos\rho_0 = \cos\rho|_{t=t_0}$

さらに，$t=t_0$ において L 系で観測できる波動のエネルギー速度はその合成

$$\bar{u}_e^2 = \bar{u}_{e\bar{x}}^2 + \bar{u}_{e\bar{z}}^2 = c^2/n^2 \qquad (5\cdot39)$$

で与えられる。また，$\bar{K}$ 系での位相速度も式(5·35)を式(5·10)に代入することによって，次式のように求められる。(付録参照)

$$\bar{u}_{p\bar{x}} = \frac{c}{n\sin\rho_0}, \quad \bar{u}_{p\bar{z}} = \frac{c}{n\cos\rho_0} \qquad (5\cdot40)$$

したがって，$t=t_0$ において L 系において観測できる波動の位相速度は，その合成

$$1/\bar{u}_p^2 = 1/\bar{u}_{p\bar{x}}^2 + 1/\bar{u}_{p\bar{z}}^2 = n^2/c^2 \qquad (5\cdot41)$$

となり，エネルギー速度に一致する。また t_0 が任意であることを考慮し，前節の式(5·33)すなわちエネルギー速度を式(5·38)を用いて，式(5·34)すなわち位相速度を式(5·40)を用いて書き直すと，それぞれつぎのようになる。

$$U_{eX} = \frac{\bar{u}_{e\bar{x}} + v(t)}{1 + v(t)\cdot\bar{u}_{e\bar{x}}/c^2} \qquad (5\cdot42a)$$

$$U_{eZ} = \frac{\bar{u}_{e\bar{z}}}{r(t)\{1 + v(t)\,\bar{u}_{e\bar{x}}/c^2\}} \qquad (5\cdot42b)$$

$$U_{pX} = \frac{\bar{u}_{p\bar{x}} + v(t)}{1 + v(t)\cdot\bar{u}_{p\bar{x}}/c^2} \qquad (5\cdot42c)$$

$$U_{pZ} = r(t)\{1 + v(t)/\bar{u}_{p\bar{x}}\}\,\bar{u}_{p\bar{z}} \qquad (5\cdot42d)$$

すなわち，瞬時静止系でのエネルギー速度 $\overline{w}_e$ および位相速度 $\overline{w}_p$ と，慣性系K系におけるエネルギー速度 w_e および位相速度 w_p との間に，特殊相対論でよく知られたエネルギー速度および位相速度の加法則において，$v=const.$ の代わりに $v=v(t)$ とおいたものがなりたっていることがわかる。式（5・42）は文献(18)においても得られているが，文献(18)においては電磁界の零点という特別の点の位相速度についてのみ考察されている。Møllerの変換を使えば，本論文のように，一般的に位相項およびエネルギー関係式から得られることがわかる。

5.5.2 重力 Doppler-shift

いま Doppler-shift の実験のモデルとして Pound-Rebka の実験を考えよう。[58]（図5·2参照）すなわち加速系L系において，座標時間 $t=t_1$ に

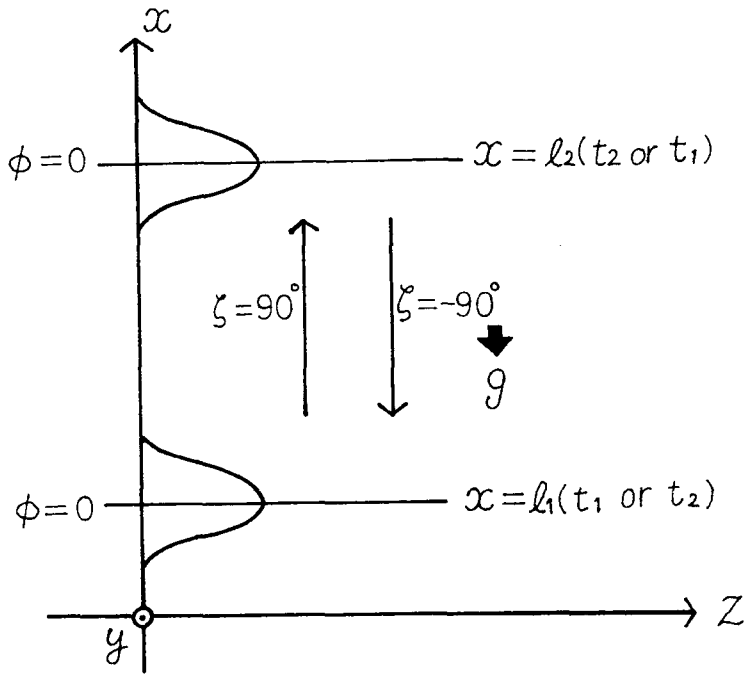


図 5·2 Pound-Rebka の実験

$x=\ell_1$，または，$x=\ell_2$ から振動数 $\overline{\nu}_1$，したがってエネルギー $\overline{E}_1=h\overline{\nu}_1$ の光子をx方向に発射し，つぎに座標時間 t_2 に $x=\ell_2$ または $x=\ell_1$ において，その光子を観測する。ただし $\ell_2>\ell_1$ とする。観測される光子の振動数 $\overline{\nu}_2$ は，L系が真空中の場合よく知られているように[57]

$$\frac{\overline{\nu}_1}{\overline{\nu}_2}=\left\{\frac{-g_{44}(\ell_2)}{-g_{44}(\ell_1)}\right\}^{1/2}=\frac{1+g\ell_2/c^2}{1+g\ell_1/c^2} \qquad (5\cdot43)$$

で与えられ，またそのエネルギーは $E_2 = h\nu_2$ で与えられる。ここで，h はプランク定数である。この現象を電磁エネルギーを用いて説明するために，任意関数 $f(\phi)$ として，y, z 方向単位幅に存在するエネルギーが有限であるようなパルス波を考え，先に述べた1個の光子のエネルギー $E = h\nu$ をそのパルス波のエネルギーに対応させる*。すなわち

$$\int_0^1 dz \int_0^1 dy \int_{-\infty}^{\infty} f^2(\phi)\, dx = const. = \alpha \qquad (5\cdot44)$$

とする。また簡単のために，$\zeta = \pm 90°$，すなわち波動が x 軸に平行に進行する場合を取りあつかう。（図5・2参照）$t = t_1$ において観測できるこのパルス波のエネルギー密度 w が式(5・37a)のように与えられるから，$t = t_1$ におけるエネルギー観測量 $E(t_1)$ は，$\sin\zeta = \pm 1$ とおいてつぎのように求められる。

$$E(t_1) = \frac{\varepsilon_0}{\mu^*} E_0^2 e^{\pm 2\phi_1} \int_0^1 dz \int_0^1 dy \int_{-\infty}^{\infty} f^2(\phi_1)\, dx$$

$$= \frac{\varepsilon_0}{\mu^*} E_0^2 e^{\pm\phi_1} \alpha \qquad (5\cdot45)$$

ただし

$$\phi_1 = \phi\big|_{t=t_1}, \quad \phi_1 = \frac{g}{nc} t_1$$

となる。ここで複号は，$-$ が $\zeta = 90°$ に，$+$ が $\zeta = -90°$ に対応する。同様に，$t = t_2$ におけるエネルギーの観測量 $E(t_2)$ は

$$E(t_2) = \frac{\varepsilon_0}{\mu^*} E_0^2 e^{\pm\phi_2} \alpha \qquad (5\cdot46)$$

ただし　　$\phi_2 = \frac{g}{nc} t_2$　である。

また，このパルス波が $x = l_1$ から $x = l_2$ まで，または，$x = l_2$ から $x = l_1$ まで進行するのに要する時間 $(t_2 - t_1)$ は，エネルギー速度が式(5・18)で与えられるから，$\zeta = 90°$ および $\zeta = -90°$ の場合について

$$t_2 - t_1 = \frac{n}{c} \int_{l_1 \text{ or } l_2}^{l_2 \text{ or } l_1} \frac{1}{(1 + gx/c^2)}\, dx$$

$$= \frac{nc}{g} \ln\left|1 + \frac{gx}{c^2}\right|_{x = l_1 \text{ or } l_2}^{x = l_2 \text{ or } l_1} \qquad (5\cdot47)$$

---

*具体的には $f(\phi) = 1/\pi \cdot a/(a^2 + \phi^2)$ のような関数を考えればよい。ただし，a はパルス波形を決定するパラメータであり，$\int_{-\infty}^{\infty} f^2(\phi)\, d\phi = 1$ である。

で与えられる。したがって，$\bar{\nu}_1 = \bar{E}(t_1)/h$，$\bar{\nu}_2 = \bar{E}(t_2)/h$ で定義される光子の振動数の比は

$$\frac{\bar{\nu}_1}{\bar{\nu}_2} = \frac{\bar{E}(t_1)}{\bar{E}(t_2)} = e^{\pm \frac{g}{nc}(t_2 - t_1)} = \frac{1 + \frac{g\ell_2}{c^2}}{1 + \frac{g\ell_1}{c^2}} \qquad (5\cdot 48)$$

となり式(5・43)に一致し，得た平面波解のエネルギーから Doppler-shift が説明できることがわかる。$g\ell_1 \ll c^2$，$g\ell_2 \ll c^2$ のニュートン近似では，

$$\bar{\nu}_2 / \bar{\nu}_1 = 1 - g(\ell_2 - \ell_1)/c^2 \qquad (5\cdot 49)$$

となり，Pound-Rebka が使用した式になる。また，式(5・48)の最右辺が屈折率 n を含まないことから，線素(5・4)で与えられる非永久重力場中での Doppler-shift は媒質の影響を受けないこともわかる。以上の結果は，幾何光学的近似( )とも矛盾しない。

5.6 結 言

加速度運動の一例として，Møllerの変換で与えられるような，加速度運動している媒質中での電磁界について，マクスウェル方程式の一般座標変換に対する共変性を利用して，厳密解を求めその性質についてくわしく論じた。観測者が非慣性系にいるときは，その解から，等価重力場による光線のわん曲，および重力 Doppler-shift が得られ，またそれらは媒質の影響を受けないことを示した。また観測者が慣性系にいるときは，加速度運動に対応する，エネルギー速度，および位相速度の加法則が得られ，それらは等速運動の場合と同じ形であることも示した。

第6章　結　論

本章では本研究の成果を総括して述べる。

第2章では，等速度運動を行なう不均質媒質による平面電磁波の反射と透過の問題に関する特殊相対論的な取り扱いについて論じた。不均質媒質として誘電率が直線的に変化している誘電体および電子密度が直線的に変化している等方性プラズマの場合を考え，その反射係数および透過係数を求めた。その結果，反射係数および透過係数におよぼす媒質の運動の影響は，媒質が均質な場合とかなり異なることが明らかになった。

第3章では，等速度運動を行なう不均質スラブ中におかれた線波源からの放射の問題に関する特殊相対論的な取り扱いについて論じた。運動不均質スラブとして電子密度が直線状に分布している等方性ならびに1軸性プラズマスラブを考え，その放射界を求めた。その結果，放射パターンにおよぼすプラズマの運動の影響は，プラズマの電子密度が均質な場合とかなり異なってくることが明らかになった。

第4章では，従来特殊相対論を用いて取り扱われていた，等速度運動を行なう媒質中における電磁波について，一般相対論を考慮した電磁界理論の立場から論じた。具体例として，等速度運動している半無限誘電体による平面電磁波の反射と透過の問題を，一般相対論的考察ならびに手法を用いて解析し，結果が特殊相対論を用いて解析した結果と矛盾しないことを示した。

第5章では，一方向に加速度運動を行なう誘電体中における電磁波の伝搬の問題に関する一般相対論的な取り扱いについて論じた。初等関数で表わしうる厳密解を求め，その性質について誘電体が等速度運動を行なう場合と関連づけて詳しく論じた。特に，媒質と共に加速度運動を行なう観測者から見た場合は，問題は，等価重力場中での電磁波伝搬の問題になり，等価重力場が電波伝搬におよぼす種々の効果についても詳しく論じた。

特殊相対論を考慮したMinkowski理論の応用に関する研究は，現在まで非常に多数にのぼるが，一般相対論を考慮したMinkowski理論は，ごく最近実際的な応用に適用され始めたばかりであり，今後，強い重力場中におかれた媒質中における電磁波伝搬，あるいは回転プラズマ中における電磁波伝搬等に関する研究として，その発展が期待されるものと考えられる。

以上，本研究で得られた成果が，電磁界理論およびプラズマ工学の発展に多少なりとも貢献し得るならば，著者の最も幸とするところである。

謝　　辞

本研究を行なうに際し，終始御懇切な御指導，御激励をいただいた大阪大学工学部熊谷信昭教授，ならびに種々有益な御教示，御助言をいただいた大阪大学工学部板倉清保教授に衷心より感謝の意を表わす。

大学院在学中には，通信工学一般に関して御指導，御教示をいただいた大阪大学工学部青柳健次名誉教授，笠原芳郎名誉教授，滑川敏彦教授，今塚慶一教授，中西義郎教授，児玉慎三教授ならびに松原正則助教授に深謝する。

本研究遂行にあたって，直接御指導いただき，また種々有益な御討論をいただいた日立製作所横浜研究所間　剛博士に深謝する。

また，本研究に関して御協力いただいた大阪大学大学院河崎善一郎，伊藤泰男の両氏に深謝するとともに，有益な御討論をいただいた大阪大学工学部講師提　誠博士，大阪大学工学部助手塩沢俊之博士，大阪大学工学部助手森田長吉氏，大阪大学工学部助手藤岡　弘博士および大阪大学工学部助手小嶋敏孝博士ならびに中川紀美雄氏（現在，岡山理科大学），山口致氏（現在，近畿大学），小川英一博士（現在，電々公社横須賀電気通信研究所）および青海恵之博士（現在，電々公社茨城電気通信研究所）の諸氏に深謝する。

さらに，日頃御討論いただいた大阪大学大学院鈴木俊雄氏，安川文二氏，大高真人氏をはじめとする熊谷研究室の諸兄に厚く御礼を申し上げる。

文　献

(1) J. H. Chisholm and J. C. James: "Radar evidence of solar wind and coronal mass motions", Astrophys. J., 140, p. 377 (July 1964).

(2) W. C. Erickson: "The radio-wave scattering properties of the solar corona", Astrophys. J., 139, p. 1290 (May 1964).

(3) 池上英雄: "プラズマの物理とその世界", サイエンス, 3, 10, p. 62 (1973-10).

(4) 増崎克, 宮原昭: "大強度相対論的電子ビームの生成と応用", 日本物理学会誌, 29, 11, p. 968 (1973-11).

(5) E. J. Post: "Sagnac effect", Rev. Mod. Phy., 39, 2, p. 475 (Apr. 1967).

(6) C. D. Ciubotariu and J. Gottlieb: "The relativistic magneto-hydrodynamics of a rotating plasma", Physica, 63, p. 393 (1973).

(7) T. Shiozawa: "Phenomelogical and electron-theoretical study of the electrodynamics of rotating systems", Pro. IEEE, 61, 12, (Dec. 1973)

(8) P. Penfield, Jr., and H. A. Haus: "Electrodynamics of moving media", The MIT Press, Cambridge, Mass., (1967).

(9) H. R. Hertz: "Über die Grundgleichungen der Electrodynamiks für bewegter Körper", Ann. d. Phys., 41, (1890).

(10) A. Einstein: "Zur Electrodynamik bewegter Körper", Ann. d. Phys., Lpz., 17, p. 891 (1905).

(11) H. Minkowski: "Die Grundgleichungen für die elektromagnetischen Vorgänge in bewegten Körpern", Math. Ann., 68, p. 472 (1908).

(12) R. M. Fano, L. J. Chu, and R. B. Adler: "Electromagnetic fields, energy and forces", Jhon Wiley & Sons, Inc., New York (1960).

(13) A. Einstein: "Die Grundlagen der allgemeinen Relativitätstheorie", Ann. Phys., Lpz., 49, p. 769 (1916).

(14) C. V. Heer: "Resonant frequencies of an electromagnetic cavity in an accelerated system of reference", Phys. Rev., 134, 4A, A799 (May 1964).

(15) A. Yildiz and C. H. Tang: "Electromagnetic cavity resonancies in accelerated systems", 146, 4, p.947 (June 1966).
(16) J. L. Anderson and J. W. Ryon: "Electromagnetic radiation in accelerated systems", Phys. Rev., 181, 5, p.1765 (May 1969).
(17) J. W. Ryon and J. L. Anderson: "Electromagnetic wave propagation in a linearly accelerating relativistic dielectric", Phys. Rev, D2, 12, p. 2745 (Dec. 1970).
(18) T. C. Mo: "Theory of electrodynamics in media in noninertial frames and applications", J. Math. Phy., 11, 8, p. 2589 (Aug. 1970)
(19) T. Yamanouchi, R. Utiyama and T. Nakano: "Theory of general relativity and gravitation", Shyokabo, Tokyo (1967).
(20) S. N. Stolyarov: "Reflection and refraction of electromagnetic waves at a moving boundary", Soviet Phys. Tchnical Phys., 8, p.418 (Nov. 1963).
(21) C. Yeh: "Reflection and transmission of electromagnetic waves by a moving dielectric medium", J. appl. Phys., 36, 11, p.3513 (Nov. 1965)
(22) C. Yeh and K. F. Casey: "Reflection and transmission of electromagnetic waves by a moving dielectric slab", Phys. Rev., 144, 4, p.665 (April 1966).
(23) T. Shiozawa and N. Kumagai: "Total reflection at the interface between relatively moving media", Pro. IEEE (Letters) 55, 7, p.1243 (July 1967).
(24) T. Shiozawa and K. Hazama: "General solution to the problem of reflection and transmission by a moving dielectric medium", Radio Sci., 3 (New Series), p. 569 (June 1968).
(25) 塩沢俊之: "外部静磁界に沿って運動している微小プラズマ円体による散乱", 信学論(B), 52-B, 1, P. 41 (昭44-01)
(26) H. N. Kritikos, K. S. H. Lee and C. H. Papas: "Electromagnetic reflectivity of nonuniform jet streams", Radio Sci., 2, 9, p.991 (Sept. 1967).
(27) 深井一郎, 風間輝雄, 鈴木道雄, 福岡醇一: "運動する不均質媒質による平面電磁波の反射について", 昭44信学全大, 373.

(28) 風間輝雄，深井一郎，鈴木道雄："速度に分布をもって運動する損失のあるプラズマスラブの反射係数について"，信学論(B)，54-B，5，P. 284 (昭46-05).
(29) R.J. Pogorzelski："Electromagnetic scattering from expanding dielectric slab"，J. Math. Phys.，5，11，p. 1685 (May 1970).
(30) 塩沢俊之，青海恵之："軸方向に運動している不均質プラズマ円柱による平面電磁波の散乱"，信学論(B)，55-B，4，P.158 (昭47-04)
(31) T. Shiozawa and S. Seikai："Scattering of electromagnetic waves from an inhomogeneous magnetoplasma colum moving in the axial direction"，IEEE Trans. AP-20，7，p. 455 (July 1972).
(32) 田中嘉津夫，間 剛："運動不均質媒質による平面電磁波の反射と透過"，信学会アンテナ伝搬研資，AP72-4，(1972-04).
(33) K. Tanaka and K. Hazama："Reflection and transmission of a electromagnetic wave by a moving inhomogeneous medium"，Radio Sci.，4，5，p. 483 (May 1969).
(34) 田中嘉津夫，間 剛："運動不均質媒質による平面電磁波の反射と透過"，信学論(B)，55-B，11，p. 618 (昭47-11).
(35) K. Hazama，T. Shiozawa and I. Kawano："Effect of a moving dielectric half-space on the radiation from a line source"，Radio Sci.，4，5，p483 (May 1968)
(36) 間 剛，田中嘉津夫："運動半無限媒質上の線波源からの放射—幾何光学的解法"，信学論(B)(技術談話室)，57-B，6，p. 410(昭49-06).
(37) 間 剛，田中嘉津夫："線波源からの放射に及ぼす運動半無限等方性プラズマの影響"，信学論(B)，53-B，11，p. 664 (昭45-11).
(38) K. F. Casey："Radiation from a slot antenna in a ground plane coated with a moving plasma sheath"，IEEE Trans.，AP-19，5，p. 401 (May 1971).
(39) 小嶋敏孝，東恒人，板倉清保："運動磁化プラズマ層でおおわれたスロットアンテナからの放射"，信学論(B)，55-B，12，p. 654 (昭47-12)
(40) 田中嘉津夫，河崎善一郎："運動不均質媒質中に置かれた線波源からの放射"，電気学会電磁界理論研究会資料，EMT-73-40，(1973

－10).
(41) 田中嘉津夫，河崎善一郎：“運動不均質スラブ中におかれた線波源からの放射”，信学論(B)(技術談話室)，57-B，6，p.410(昭49-06).
(42) 田中嘉津夫：“ガリレイ変換から見た運動媒質中の電磁波”，電気学会電磁界理論研究会資料，EMT-74-35，(1974-10).
(43) T. C. Mo：“Electromagnetic wave propagation in a uniformly accelerated simple medium”，Radio Sci. 6，6，p.673，(June 1971).
(44) 田中嘉津夫：“非等速運動を行なっている媒質中の電磁界について”，輻射科学研究会資料(1972-12).
(45) 田中嘉津夫：“加速度運動している媒質中における電磁界について”，電気学会電磁界理論研究会資料，EMT-73-41,(1973-10)
(46) 田中嘉津夫：“加速度運動している媒質中における電磁界について”，信学論(B)，57-B，2，P.75(昭49-02)
(47) C. T. Tai：“The dyadic Green's function for a moving isotropic medium”，IEEE Trans.(Communications)，AP-13，3，P.322 (Mar. 1965).
(48) K. G. Budden：“Radio waves in the ionosphere”，Chaps. 15 and 16，Cambridge University Press，London (1961).
(49) 上崎省吾，安達三郎，虫明康人：“誘電率が折れ線上に変化する媒質中における電波伝搬ならびにモデル実験”，信学誌，49，4，p.409 (昭41-01).
(50) T. Tamir and A.A. Oliner：“The influence of a complex waves on the radiation fields of a slot exited piasma layer”，IRE Trans.，AP-10，p.55 (Jan. 1962).
(51) T. Tamir and A.A. Oliner：“The spectrum of electromagnetic waves guided by a plasma layer”，Proc. IEEE，51，2，p.317 (Feb. 1963).
(52) T. Tamir and A.A. Oliner：“Complex waves and their relation to radiation patterns”，Proc. IEEE，51，2，p.310 (Feb. 1963)
(53) 上崎省吾，虫明康人：“不均質媒質中におかれた開口面からの電

磁界", 信学会アンテナ伝播研資, AP71-3 (1974-04).
(54) K. F. Casey and C. T. Case: "Transient signal propagation through an inhomogeneous plasma", IEEE Trans., AP-15, 3, p. 458 (Mar. 1965).
(55) C. Møller: "The theory of relativity", Oxford Univ. Press, London (1952).
(56) J. L. Synge: "Relativity", The general theory", North Holland Publishing Co., Amsterdam (1960), p. 376.
(57) ランダウ, リフシッツ: "場の古典論", 東京図書 (1966)
(58) R. V. Pound and G. A. Rebka, Jr.: "Apparent weight of photons", Phys. Rev. Letters, 4, 377 (1960).

付　　録

付録Ⅰ

式(2·45)および式(2·47)に現われる定数はつぎのように表わされる。

(E波)

$$N_{1E} = \{-k_0\gamma_1^2(\varepsilon_2^*+\varepsilon_3^*)(1-\beta_1\sqrt{\varepsilon_1^*}\sin\theta_i)^2 + 2\gamma_1^2 k_0(\beta_1-\sqrt{\varepsilon_1^*}\sin\theta_i)^2+2k_{tz}k_{iz}\}/(k_{iz}-k_{tz}) \quad (A\cdot1)$$

$$D_{1E} = \{k_0\gamma_1^2(\varepsilon_2^*+\varepsilon_3^*)(1-\beta_1\sqrt{\varepsilon_1^*}\sin\theta_i)^2 - 2\gamma_1^2 k_0(\beta_1-\sqrt{\varepsilon_1^*}\sin\theta_i)^2+2k_{tz}k_{iz}\}/(k_{iz}+k_{tz}) \quad (A\cdot2)$$

$$N_{2E} = (Qk_{tz}-Pk_{iz})/(k_{iz}-k_{tz}) \quad (A\cdot3)$$

$$D_{2E} = (Qk_{tz}+Pk_{iz})/(k_{iz}+k_{tz}) \quad (A\cdot4)$$

ただし

$$P = \gamma_1^2\{(\varepsilon_2^*+2\varepsilon_3^*)(1-\beta_1\sqrt{\varepsilon_1^*}\sin\theta_i)^2-3(\beta_1-\sqrt{\varepsilon_1^*}\sin\theta_i)^2\} \quad (A\cdot5)$$

$$Q = \gamma_1^2\{(2\varepsilon_2^*+\varepsilon_1^*)(1-\beta_1\sqrt{\varepsilon_1^*}\sin\theta_i)^2-3(\beta_1-\sqrt{\varepsilon_1^*}\sin\theta_i)^2\} \quad (A\cdot6)$$

(H波)

$$N_{1H} = (n_1+n_2)/(\varepsilon_4^* k_{iz}-\varepsilon_1^* k_{tz}) \quad (A\cdot7)$$

$$D_{1H} = (n_1-n_2)/(\varepsilon_4^* k_{iz}+\varepsilon_1^* k_{tz}) \quad (A\cdot8)$$

$$N_{2H} = (m_1-m_2)/(\varepsilon_4^* k_{iz}-\varepsilon_1^* k_{tz}) \quad (A\cdot9)$$

$$D_{2H} = (m_1+m_2)/(\varepsilon_4^* k_{iz}+\varepsilon_1^* k_{tz}) \quad (A\cdot10)$$

ただし

$$n_1 = \frac{\varepsilon_2^*+\varepsilon_3^*}{2k_0}k_{iz}k_{tz} \quad (A\cdot11)$$

$$n_2 = \left\{\frac{\varepsilon_1^*\varepsilon_4^*}{\varepsilon_2^*-\varepsilon_3^*}\ln\left(\frac{\varepsilon_3^*}{\varepsilon_2^*}\right)\gamma_1(\beta_1-\sqrt{\varepsilon_1^*}\sin\theta_i)^2\right.$$

$$-\varepsilon_1^*\varepsilon_4^*\gamma_1^2(1-\beta_1\sqrt{\varepsilon_1^*}\sin\theta_i)^2\Big\}k_0 \qquad (A\cdot12)$$

$$m_1=\left\{\frac{\varepsilon_3^{*2}}{2\varepsilon_1^*}\ln\left(\frac{\varepsilon_3^*}{\varepsilon_2^*}\right)+\frac{\varepsilon_2^{*2}-\varepsilon_3^{*2}}{4}\right\}Jk_{tz} \qquad (A\cdot13)$$

$$m_2=\left\{\frac{\varepsilon_2^{*2}}{2\varepsilon_4^*}\ln\left(\frac{\varepsilon_3^*}{\varepsilon_2^*}\right)+\frac{\varepsilon_2^{*2}-\varepsilon_3^{*2}}{4}\right\}Jk_{iz} \qquad (A\cdot14)$$

ここで

$$J=\frac{\gamma_1^2(\beta_1-\sqrt{\varepsilon_1^*}\sin\theta_i)^2}{(\varepsilon_2^{*2}-\varepsilon_3^{*2})} \qquad (A\cdot15)$$

付録Ⅱ

位相速度の計算

（L系）位相項は

$$\phi=\frac{c}{g}\left(1+\frac{gx}{c^2}\right)M+\frac{z}{c}\cos\zeta-\frac{c^2}{g} \qquad (A\cdot16)$$

で与えられるから，$\phi=$ const. として x, z, および t に関する微分を行なうと

$$\frac{\partial\phi}{\partial x}dx+\frac{\partial\phi}{\partial t}dt=0\ ,\quad \frac{\partial\phi}{\partial z}dz+\frac{\partial\phi}{\partial t}dt=0 \qquad (A\cdot17)$$

式(A·16)から

$$\frac{\partial\phi}{\partial x}=\frac{1}{c}M\ ,\quad \frac{\partial\phi}{\partial z}=\cos\zeta\ ,\quad \frac{\partial\phi}{\partial t}=\frac{1}{n}\left(1+\frac{gx}{c^2}\right)J \qquad (A\cdot18)$$

したがって位相速度 u_{px}, u_{pz} は

$$u_{px}=\frac{dx}{dt}=\frac{c}{n}\left(1+\frac{gx}{c^2}\right)/\sin\rho$$
$$u_{pz}=\frac{dz}{dt}=\frac{c}{n}\left(1+\frac{gx}{c^2}\right)/\cos\rho \qquad (A\cdot19)$$

（K系）

同様に $\phi=$ const. として X および T に関して微分を行なうと

$$\frac{\partial\phi}{\partial X}dX+\frac{\partial\phi}{\partial T}dT=0$$

$$\frac{\partial\phi}{\partial Z}dZ + \frac{\partial\phi}{\partial T}dT = 0 \qquad (A\cdot 20)$$

また

$$\frac{\partial\phi}{\partial X} = \frac{\partial\phi}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial X} + \frac{\partial\phi}{\partial t}\cdot\frac{\partial t}{\partial T}$$

$$\frac{\partial\phi}{\partial T} = \frac{\partial\phi}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial T} + \frac{\partial\phi}{\partial t}\cdot\frac{\partial t}{\partial T}$$

$$\frac{\partial\phi}{\partial Z} = \frac{\partial\phi}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial Z} \qquad (A\cdot 21)$$

また式(5・1)から

$$\frac{\partial x}{\partial X} = \cosh\theta\ ,\quad \frac{\partial t}{\partial X} = -\sinh\theta/C(1+gx/c^2)$$

$$\frac{\partial t}{\partial T} = \cosh\theta/(1+gx/c^2)\ ,\quad \frac{\partial x}{\partial T} = -c\sinh\theta\ ,\quad \frac{\partial z}{\partial Z} = 1 \qquad (A\cdot 22)$$

式(A・18)および式(A・22)を式(A・21)に代入すると位相速度 U_{PX}, U_{PZ} は

$$U_{PX} = \frac{dX}{dT} = C\,\frac{1+n\beta\sin\rho}{n\sin\rho+\beta}$$

$$U_{PZ} = \frac{dZ}{dT} = C\,\frac{\gamma(1+n\beta\sin\rho)}{n\cos\rho} \qquad (A\cdot 23)$$

($\bar{K}$系)

同様に $\phi = const.$ として $\bar{x}$ および $\bar{t}$ に関する微分を行なうと

$$\frac{\partial\phi}{\partial\bar{x}}\cdot d\bar{x} + \frac{\partial\phi}{\partial\bar{t}}d\bar{t} = 0\ ,\quad \frac{\partial\phi}{\partial\bar{z}}d\bar{z} + \frac{\partial\phi}{\partial\bar{t}}d\bar{t} = 0 \qquad (A\cdot 24)$$

また

$$\frac{\partial\phi}{\partial\bar{x}} = \left.\frac{\partial\phi}{\partial X}\right|_{t=t_0}\cdot\frac{\partial X}{\partial\bar{x}} + \left.\frac{\partial\phi}{\partial T}\right|_{t=t_0}\frac{\partial T}{\partial\bar{x}}$$

$$\frac{\partial\phi}{\partial\bar{z}} = \left.\frac{\partial\phi}{\partial Z}\right|_{t=t_0}\cdot\frac{\partial Z}{\partial\bar{z}}$$

$$\frac{\partial\phi}{\partial\bar{t}} = \left.\frac{\partial\phi}{\partial X}\right|_{t=t_0}\cdot\frac{\partial X}{\partial\bar{t}} + \left.\frac{\partial\phi}{\partial T}\right|_{t=t_0}\cdot\frac{\partial T}{\partial\bar{t}} \qquad (A\cdot 25)$$

また式(5・35)から

$$\frac{\partial X}{\partial \bar{x}} = \cosh\theta_0 , \quad \frac{\partial T}{\partial \bar{x}} = \sinh\theta_0 / c$$

$$\frac{\partial T}{\partial \bar{t}} = \cosh\theta_0 , \quad \frac{\partial X}{\partial \bar{t}} = c\sinh\theta_0 , \quad \frac{\partial Z}{\partial \bar{z}} = 1 \qquad (A\cdot 26)$$

式(A・11), (A・25) および(A・26)を(A・24)に代入すると $\bar{K}$ 系における位相速度 $\bar{u}_{p\bar{x}}$ および $\bar{u}_{p\bar{z}}$ は

$$\bar{u}_{p\bar{x}} = \frac{d\bar{x}}{d\bar{t}} = \frac{c}{n\sin\rho_0}$$

$$\bar{u}_{p\bar{z}} = \frac{d\bar{z}}{d\bar{t}} = \frac{c}{n\cos\rho_0} \qquad (A\cdot 27)$$