OUKA
The University of Osaka
Institutional Knowledge Archive

| | |
|---|---|
| Title | 誘電体媒質と電磁波との相互作用に関する研究 |
| Author(s) | 小川, 英一 |
| Citation | 大阪大学, 1974, 博士論文 |
| Version Type | VoR |
| URL | https://hdl.handle.net/11094/2406 |
| rights | |
| Note | |

*The University of Osaka Institutional Knowledge Archive : OUKA*

https://ir.library.osaka-u.ac.jp/

The University of Osaka

# 誘電体媒質と電磁波との相互作用に関する研究

小　川　英　一

昭和４８年１２月

# 序　　文

本論文は著者が大阪大学大学院工学研究科（通信工学専攻）に在学中に行なった電磁界理論に関する研究のうち，誘電体媒質と電磁波との相互作用に関する研究の成果をまとめたものであり，つぎの６章からなっている．

第１章は序論であって，最近の電磁波工学の進歩に伴い，誘電体媒質と電磁波との相互作用の問題が重要な工学的研究課題となってきた背景について述べるとともに，本研究がこの分野において占める地位を明らかにしたものである．

第２章では，電磁波工学において最も基本的かつ重要な問題の一つである，二つの異なる導電性誘電体媒質の境界面における平面電磁波の反射・透過の問題を取り扱い，入射波が一様でない平面波（等位相面と等振幅面とが一致していない平面波）の場合も含めて一般的に論じている．すなわち，入射波が一様でない平面波に対して，位相角，振幅角およびエネルギー角を定義し，一般化されたSnellの法則を導いている．ついで，入射波および透過波に伴なう電磁エネルギー流について考察し，入射波および透過波の伝搬定数が満足すべき条件を求めている．さらに，このような異種媒質の境界面における Zenneck の表面波について一般的な考察を行ない，このような表面波が存在するために満足すべき条件と媒質の構成定数および入射角との関係などを明らかにしている．

第３章では，電磁波と誘電体媒質との相互作用の，マイクロ波および光学回路素子への応用として，平面電磁波の全反射現象を利用した誘電体媒質への波動励振の問題を論じている．まず，真空層中の全反射波によって半無限誘電体中に励振される波の電磁エネルギー流について考察し，真空層の厚さとの関係などを明らかにしている．ついで，全反射波による誘電体線路の励振の問題について解析し，誘電体線路に沿う波の性質について詳しく論じている．さらに，この現象を利用したPrism-Film Coupler の最適設計について考察し，種々の構成定数および入射角が適当な条件を満足する場合には誘電体線路中に励振される波の電磁エネルギー流を最大にするような真空層

の厚さが存在することを示し，また，入射角が適当な値をとるときには誘電体線路中に表面波固有モードが励振されることなどを明らかにしている．

第4章では，近年重要な工学的研究課題となりつつある相対論的電磁界理論の問題として，運動している誘電体媒質と電磁波との相互作用の問題について論じ，運動媒質の境界面に，ビーム波，パルス波および全反射波が入射する問題についてそれぞれ解析している．まず，ビーム波が入射する問題については，運動媒質の境界面におけるGoos-Hänchen 効果（媒質の境界面でビーム波が全反射を起こす場合に，反射ビーム波が幾何光学的な反射位置から変位する現象）について考察し，ビームの入射角および媒質の運動速度が反射ビーム波の変位量に与える影響などを明らかにしている．つぎに，パルス波が入射する問題を取り扱い，反射パルス波が受ける波形の変化と媒質の運動速度との関係について検討している．最後に，全反射によって真空層内に生じたevanescent waveと運動誘電体媒質との相互作用について考察し，媒質の運動速度等が反射係数および透過係数に与える影響などを明らかにしている．

第5章では，前章と同じく相対論的電磁界理論の問題として，運動している導電性誘電体媒質と電磁波との相互作用の問題を取り扱い，導電性運動媒質中の波動現象について論じている．すなわち，導電性運動媒質中の電磁波の位相速度よりも媒質の運動速度が大きくなる場合には，導電性媒質は等価的に負損失媒質となり，増幅波が励振され得る可能性があることを示し，このような波動増幅の機構についてエネルギー関係式を用いて考察している．特に運動している導電性誘電体平板中の波動増幅については反射係数・透過係数と媒質の運動速度との関係を詳しく検討し，また，このような現象を発電機構に応用する問題についても触れている．

第6章は結論であって，本研究の成果を総括して述べている．

以上の各章を構成する研究内容はすべて，電子通信学会論文誌，電子通信学会アンテナ・伝搬研究会，電気学会電磁界理論研究会，輻射科学研究会等においてすでに発表されたものである．

# 目　　次


第 1 章 序　　論……1

第 2 章 導電性媒質の境界面における平面電磁波の反射と透過……5

2・1 序　　言……5

2・2 反射波と透過波……5

2・2・1 入射波がE波の場合……6

2・2・2 入射波がH波の場合……10

2・3 Snell の法則……11

2・4 伝搬定数の決定……14

2・5 エネルギー流に関する考察……16

2・6 Zenneck の表面波……18

2・7 検　　討……22

2・8 結　　言……26

第 3 章 平面電磁波の全反射現象を利用した誘電体媒質への波動励振……27

3・1 序　　言……27

3・2 全反射波による半無限誘電体中の波……27

3・3 全反射波による誘電体平板中の波……35

3・3・1 一　般　解……35

3・3・2 表面波固有モードの励振……43

3・3・3 検　　討……46

3・4 結　　言……49

第 4 章 運動誘電体媒質と電磁波との相互作用……51

4・1 序　　言……51

4・2 運動媒質の境界面におけるGoos-Hänchen 効果……51

4・3　運動媒質の境界面におけるパルス波の反射現象……57
4・4　Evanescent Waveと運動誘電体媒質との相互作用……62
4・5　結　　言……66

第5章　導電性運動媒質中の電磁波とその励振……67
5・1　序　　言……67
5・2　エネルギー保存則……67
5・3　半無限導電性運動媒質中の波動……69
5・3・1　反射波および透過波……69
5・3・2　エネルギー関係式……74
5・4　導電性運動slab中の波動……76
5・4・1　反射係数と透過係数……76
5・4・2　エネルギー関係式……81
5・4・3　検　　討……82
5・5　発電機構への応用……84
5・6　結　　言……88

第6章　結　　論……89

謝　　辞……91

文　　献……93

# 第1章　序　　論

電磁気学が物理学における最も重要であり，かつ完全な理論体系の一つとして確立されて以来，今日に至る一世紀の間にわたって電磁界理論は幾多の研究者の努力によって多大の発展を遂げ，現在では物理学のみならず，通信工学，電子工学をはじめとする工学の諸分野においても，最も重要な基礎理論の一つとなっている．また，近年の電磁波工学のめざましい進歩により，マイクロ波，アンテナ，電波伝搬など，通信工学の分野において電磁界理論はその応用技術をも含めて広範囲にわたって研究されてきた．特に，今日においては，通信されるべき情報量の急激な増大，ならびに量子電子工学の進歩により，ミリ波通信からさらには光通信技術の開発が要請されており，また一方では，宇宙工学の急速な発展に伴なって，宇宙空間的規模をもつ通信伝送理論についての研究が急がれているのが現状である．

このように，種々の未知の分野における電磁界理論の問題の解析およびその応用技術は現在の重要な研究課題となっていることは言うまでもないが，従来から知られている電磁現象についても，電磁波工学における諸技術の急速な進歩によって，より一層高い精度および厳密な理論的考察によってこれらの問題を検討する必要性が生じてきている．たとえば，種々の光学回路素子における全反射波による回路間の結合，ならびにビーム波の全反射現象などについては，従来行なわれていた解析では十分にその特性を説明することができないような問題も生じ，また，宇宙工学あるいはプラズマ工学などの分野においても，波源あるいは媒質などの高速度の運動により，従来の静止系の電磁界理論では処理できない問題が現われ，このような問題に対しては，高速度で運動する波源あるいは媒質を含む運動系の電磁界理論による解析が必要となってきている．以上のような問題は通信工学における電磁界理論の重要な問題である，種々の媒質による電磁波の反射・透過，電波伝搬，あるいは電磁放射の問題など，すべての分野にわたって現われる問題である．

本論文は，このような種々の電磁界理論の問題のうち，最も基本的でかつ重要な問題の一つであると考えられる，誘電体媒質と電磁波との相互作用の

問題を取り扱い，誘電体媒質中の波動，およびその境界面における電磁波の反射と透過現象について論じたものであり，誘電体媒質としては導電性媒質である場合についても考察し，また，媒質が相対論的速度で運動している場合についても取り扱う．

まず，第２章においては，電磁界理論の最も基本的な問題である，異なる二つの導電性媒質の境界面における平面電磁波の反射と透過の現象について論じる．[1],[2] このような問題は，種々の電磁界理論の問題の基礎として古くから研究されている[3]が，導電性媒質中を伝搬する平面波は本質的にその等位相面と等振幅面が一致しない，いわゆる一様でない平面波[4],[5] であるにもかかわらず，従来の研究ではこれら二つの面が一致する特別な場合，すなわち入射波が一様な平面波である場合しか論じられておらず，しかも入射波および透過波に関する電磁エネルギー流，伝搬定数などについても十分には考察されていない．そこでこのような問題を解析するために，二つの半無限導電性誘電体の境界面における反射と透過現象に関して，入射波が一様でない平面波の場合を含めて一般的に考察する．まず，一様な平面波をどのように定義するかについて述べ，このような平面波に対する反射・透過の法則を導き，ついで，電磁エネルギー流についての考察から，入射波および透過波の伝搬定数が満足すべき条件などを明らかにする．さらに，このような境界面に励振され得る Zenneck の表面波についても詳しく考察する．

第３章においては，平面電磁波の全反射現象を利用した誘電体媒質中への波動励振の問題について述べる．最近，全反射現象をマイクロ波回路素子および光学回路素子に利用しようとする試みが活発になされており，真空層内に生成された全反射波によって，真空層で隔てられた三層以上の誘電体媒質中の電磁波を相互に結合させる構造は，方向性プリズム結合器[6],[7] プリズムーフィルム結合器[8]～[11] あるいは多層誘電体フィルター[12],[13] として実際に応用する研究がなされている．しかしいずれの場合においても ray optics による解析であるか，または真空層内および誘電体線路内における電磁界分布あるいは電磁エネルギー流についての考察が十分にはなされていない．そこでここではこのような構造について，全反射平面波によって，真

空層を隔てて置かれた半無限誘電体媒質，あるいは誘電体平板中に励振される波の性質について詳しく考察する[14]～[16]．まず，全反射波によって半無限誘電体中に励振される波の性質，および真空層内に存在するevanescent wave に伴う電磁エネルギー流について論じる．ついで，全反射波によって誘電体平板中に励振される波について解析し，このような構造をもつプリズムーフィルム結合器の最適設計について考察し，誘電体線路中の電磁エネルギー流と表面波固有モードとの関係について述べる．

つぎに，第4章および第5章においては，相対論的速度で運動している誘電体媒質と電磁波との相互作用の問題を取り扱う．前にも述べたように，近年の宇宙電波工学あるいはプラズマ工学などの分野においては，従来の静止系の電磁界理論では処理できない問題が出現しつつある．たとえば，宇宙空間内には相対論的速度で運動する媒質が存在することが明らかにされており[17],[18]，また，高速電子流を用いたMHD発電装置などの開発も急速に進められている[19]．さらに，宇宙空間を高速度で飛行する物体との通信は近い将来の重要な工学的問題であると考えられる[20]．これらの問題の解析には，光速度に比べて無視できない速度で運動する波源あるいは媒質を含む系の電磁界理論，すなわち相対論的電磁界理論による取り扱いが必要となってくる．相対論的電磁界理論はいうまでもなくEinsteinの特殊相対性理論にその基礎をおき，1908年，Minkowski がMaxwell の理論を運動媒質に拡張することによって完成された[21]～[23]が，このような理論が工学の分野においても取り扱われるようになったのは比較的新しく，現在も多くの研究者によって種々の工学的問題についての研究が進められている．特に，運動媒質の境界面における反射と透過に関しては，この問題が電磁波理論における基本的な問題の一つであることから，これまでに数多くの報告がなされ，種々の興味深い結果が得られている[24]～[42]．ところで，これまでに行なわれた，運動誘電体あるいはプラズマ媒質と電磁波との相互作用に関する研究[24]～[32]においては，入射波が平面波の場合に限られており，これらの媒質を実際に観測あるいは測定する場合に重要な研究課題になると考えられるビーム波あるいはパルス波が入射した場合の反射現象はまだ取り扱われていない．また，運動媒質が

導電性媒質である場合の従来の解析結果[36)〜(39)]は運動媒質が，無限あるいは半無限媒質の場合に限られており，導電性媒質中の波動現象および電磁エネルギーに関する考察，ならびにこのような媒質中に波動を励振する問題に関する考察が十分になされていない．そこで，第4章および第5章においてこれらの問題について論じる．

第4章においては，運動している誘電体媒質の境界面に，ビーム波，パルス波，またはevanescent waveが入射する場合の反射現象について，全反射領域も含めてそれぞれ考察し，媒質の運動が反射波に与える影響などを明らかにする．[33)〜(35)]

第5章においては，静止している完全誘電体媒質から平面電磁波によって導電性運動媒質中に波動を励振する問題について論じる．[41),(42)] このような構造においては，適当な条件の下に導電性運動媒質中に増幅波が励振され得る可能性があることを示し，このような現象に関してエネルギー関係式を用いて考察する．また，このような電磁現象を発電機構に応用する問題についても述べる．[43),(44)]

# 第２章　導電性媒質の境界面における平面電磁波の反射と透過[1),(2)]

## ２・１　序　　言

異なる二つの媒質の境界面における平面電磁波の反射と透過の問題は電磁界理論の基本的な問題の一つとして古くから研究されており、入射波の存在する媒質が導電性媒質である場合も、例えばStratton[(3)]によって論じられている．しかし，導電性媒質を伝搬する平面波が本質的にその等位相面と等振幅面とが一致しない，いわゆる一様でない平面波* であるにもかかわらず，Strattonにはこれら二つの面が一致する特別な場合，すなわち入射波が一様な平面波の場合しか論じられておらず，しかもエネルギー関係式および透過波の性質などについてもなんら考察されていない．

そこで，本章では二つの半無限導電性誘電体の境界面における反射と透過の問題を入射波が一様でない平面波の場合を含めて一般的に考察する．まず，一様でない平面波に対して，位相角，振幅角およびエネルギー角を定義し，Ｅ波およびＨ波の場合について一般化されたSnellの法則を導く．ついで電磁エネルギー流について考察し，この結果を用いて入射波および透過波の伝搬定数が満足すべき条件を求める．さらに，このような異種導電性媒質の境界面に励振され得るZenneck の表面波について考察し，このような表面波が存在するために媒質の構成定数が満足すべき条件などを明らかにする．最後に，得られた結果を数値計算例をあげて詳しく検討する．

## ２・２　反射波と透過波

図２．１に示すように，$z>0$ の空間は（$\varepsilon_1$, $\mu_0$, $\sigma_1$）なる導電性誘電体（媒質Ⅰ）で満されており，また $z<0$ の空間は（$\varepsilon_2$, $\mu_0$, $\sigma_2$）なる導電性誘

---

*　本章においては，等位相面と等振幅面とが一致しないような平面波を一様でない平面波（nonuniform plane wave または inhomogeneous plane wave）と呼ぶ．[(4),(5)]

電体（媒質Ⅱ）で満されているものとする．いま，媒質Ⅰの側から平面電磁波が入射するものとし，入射波がE波の場合，すなわち電界が入射面に垂直な場合，および入射波がH波の場合，すなわち磁界が入射面に垂直な場合のそれぞれについてその反射波および透過波を求める．

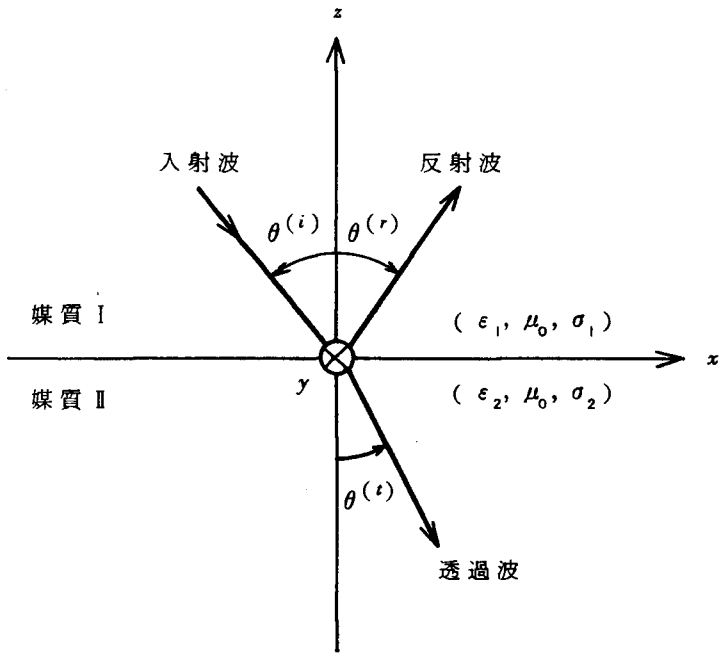



図２．１　座　標　系

２・２・１　入射波がE波の場合

本項においては，入射波がE波の場合を取り扱う．このとき，入射波，反射波および透過波は，それぞれつぎのように表わされる．

入射波

$$E_y^{(i)} = E_{0i} \exp\{ j ( \omega t - k_x^{(i)} x - k_z^{(i)} z ) \} \qquad (2\cdot1)$$

反射波

$$E_y^{(r)} = E_{0r} \exp \{ j ( \omega t - k_x^{(r)} x + k_z^{(r)} z ) \} \qquad (2 \cdot 2)$$

透過波

$$E_y^{(t)} = E_{0t} \exp \{ j ( \omega t - k_x^{(t)} x - k_z^{(t)} z ) \} \qquad (2 \cdot 3)$$

ただし，E波の定義より $E_x^{(l)} = E_z^{(l)} = 0$，$H_y^{(l)} = 0$ であり，また $H_x^{(l)}$，$H_z^{(l)}$ は上式とMaxwell方程式とから求められる．ここで，$E_{0i}$，$E_{0r}$ および $E_{0t}$ は場所および時間に無関係な定数である．なお，添字 $i$，$r$ および $t$ はそれぞれ入射波，反射波および透過波の電磁界量であることを表わし，また添字 $l$ は $i$，$r$ または $t$ を表わす．また，入射波，反射波および透過波の伝搬定数は媒質の構成定数とつぎの関係で結ばれている．

$$\left[ k_x^{(i)} \right]^2 + \left[ k_z^{(i)} \right]^2 = \omega^2 \varepsilon_1 \mu_0 - j \omega \sigma_1 \mu_0 \qquad (2 \cdot 4 a)$$

$$\left[ k_x^{(r)} \right]^2 + \left[ k_z^{(r)} \right]^2 = \omega^2 \varepsilon_1 \mu_0 - j \omega \sigma_1 \mu_0 \qquad (2 \cdot 4 b)$$

$$\left[ k_x^{(t)} \right]^2 + \left[ k_z^{(t)} \right]^2 = \omega^2 \varepsilon_2 \mu_0 - j \omega \sigma_2 \mu_0 \qquad (2 \cdot 4 c)$$

さて，反射波および透過波の振幅 $E_{0r}$ および $E_{0t}$ は $z = 0$ における境界条件

$$E_{0i} \exp \{ j ( \omega t - k_x^{(i)} x ) \} + E_{0r} \exp \{ j ( \omega t - k_x^{(r)} x ) \}$$

$$= E_{0t} \exp \{ j ( \omega t - k_x^{(t)} x ) \} \qquad (2 \cdot 5 a)$$

$$- k_z^{(i)} E_{0i} \exp \{ j ( \omega t - k_x^{(i)} x ) \}$$

$$+ k_z^{(r)} E_{0r} \exp \{ j ( \omega t - k_x^{(r)} x ) \}$$

$$= -k_z^{(t)} E_{0t} \exp\{ j( \omega t - k_x^{(t)} x ) \} \qquad (2\cdot5\,b)$$

を用いて決定されるわけであるが，上式が $x$ に無関係に常になりたつためには，$k_x^{(l)}$ に関するつぎの関係式が成立しなければならない．

$$k_x^{(i)} = k_x^{(r)} = k_x^{(t)} \qquad (2\cdot6)$$

上式から反射・透過のSnellの法則が導かれるが，これに関しては2・3において述べる．式（2・6）の関係を考慮して，伝搬定数 $k_z^{(l)}$ および $k_z^{(l)}$ はつぎのように表わされる．

$$k_x^{(l)} = k_0( p_{1x} - j\, q_{1x} ), \quad ( l = i,\ r,\ t ) \qquad (2\cdot7)$$

$$\left.\begin{aligned} k_z^{(i)} &= k_z^{(r)} = -k_0( p_{1z} - j\, q_{1z} ) \\ k_z^{(t)} &= -k_0( p_{2z} - j\, q_{2z} ) \end{aligned}\right\} \qquad (2\cdot8)$$

また式（2・4）および式（2・7），（2・8）からつぎの関係式が導かれる．

$$k_0^2 \left[ ( p_{1x} - j\, q_{1x} )^2 + ( p_{1z} - j\, q_{1z} )^2 \right] = \omega^2 \varepsilon_1 \mu_0 - j\omega \sigma_1 \mu_0 \qquad (2\cdot9\,a)$$

$$k_0^2 \left[ ( p_{1x} - j\, q_{1x} )^2 + ( p_{2z} - j\, q_{2z} )^2 \right] = \omega^2 \varepsilon_2 \mu_0 - j\omega \sigma_2 \mu_0 \qquad (2\cdot9\,b)$$

以上のことから，反射波および透過波の振幅はそれぞれつぎのように求められる．

$$E_{0r} = \frac{( p_{1z} - p_{2z} ) - j( q_{1z} - q_{2z} )}{( p_{1z} + p_{2z} ) - j( q_{1z} + q_{2z} )} E_{0i} \qquad (2\cdot10\,a)$$

$$E_{0t} = \frac{2( p_{1z} - j\, q_{1z} )}{( p_{1z} + p_{2z} ) - j( q_{1z} + q_{2z} )} E_{0i} \qquad (2\cdot10\,b)$$

つぎに，入射波，反射波および透過波の電磁エネルギー流を

$$\langle \mathbf{S}^{(l)} \rangle = \frac{1}{2} Re\left[ \mathbf{E}^{(l)} \times \mathbf{H}^{(l)*} \right], \quad ( l = i , r , t ) \qquad (2\cdot11)$$

で定義するとき，その成分$\langle S_x^{(l)} \rangle$，$\langle S_z^{(l)} \rangle$は入射波，反射波および透過波それぞれについてつぎのように表わされる．ただし，ここで $Re$ は複素量の実数部をとる操作を表わし，また記号 * は複素共役を表わす．

$$\langle S_x^{(i)} \rangle = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}}\, p_{1z} \,|\, E_{0i} \,|^2 \exp\left\{ -2 k_0 ( q_{1x} x - q_{1z} z ) \right\} \qquad (2\cdot12a)$$

$$\langle S_z^{(i)} \rangle = -\frac{1}{2} \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}}\, p_{1z} \,|\, E_{0i} \,|^2 \exp\left\{ -2 k_0 ( q_{1x} x - q_{1z} z ) \right\} \qquad (2\cdot12b)$$

$$\langle S_x^{(r)} \rangle = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}}\, p_{1x} \frac{( p_{1z} - p_{2z} )^2 + ( q_{1z} - q_{2z} )^2}{( p_{1z} + p_{2z} )^2 + ( q_{1z} + q_{2z} )^2} \,|\, E_{0i} \,|^2 \cdot \exp\left\{ -2 k_0 ( q_{1x} x + q_{1z} z ) \right\} \qquad (2\cdot13a)$$

$$\langle S_z^{(r)} \rangle = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}}\, p_{1z} \frac{( p_{1z} - p_{2z} )^2 + ( q_{1z} - q_{2z} )^2}{( p_{1z} + p_{2z} )^2 + ( q_{1z} + q_{2z} )^2} \,|\, E_{0i} \,|^2 \cdot \exp\left\{ -2 k_0 ( q_{1x} x + q_{1z} z ) \right\} \qquad (2\cdot13b)$$

$$\langle S_x^{(t)} \rangle = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}}\, p_{1x} \frac{4 ( p_{1z}^2 + q_{1z}^2 )}{( p_{1z} + p_{2z} )^2 + ( q_{1z} + q_{2z} )^2} \,|\, E_{0i} \,|^2 \cdot \exp\left\{ -2 k_0 ( q_{1x} x - q_{2z} z ) \right\} \qquad (2\cdot14a)$$

$$\langle S_z^{(t)} \rangle = -\frac{1}{2} \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}}\, p_{2z} \frac{4 ( p_{1z}^2 + q_{1z}^2 )}{( p_{1z} + p_{2z} )^2 + ( q_{1z} + q_{2z} )^2} \cdot \,|\, E_{0i} \,|^2 \exp\left\{ -2 k_0 ( q_{1x} x - q_{2z} z ) \right\} \qquad (2\cdot14b)$$

2・2・2　入射波がH波の場合

本項においては，入射波がH波の場合を取り扱う．このとき，入射波，反射波および透過波はそれぞれつぎのように表わされる．

入射波

$$H_y^{(i)} = H_{0i} \exp\{ j ( \omega t - k_x^{(i)} x - k_z^{(i)} z ) \} \qquad (2・15)$$

反射波

$$H_y^{(r)} = H_{0r} \exp\{ j ( \omega t - k_x^{(r)} x + k_z^{(r)} z ) \} \qquad (2・16)$$

透過波

$$H_y^{(t)} = H_{0t} \exp\{ j ( \omega t - k_x^{(t)} x - k_z^{(t)} z ) \} \qquad (2・17)$$

ただし，伝搬定数 $k_x^{(l)}$ および $k_z^{(l)}$，（$l = i, r, t$）は式（2・7），（2・8）に与えられているとおりである．また，反射波および透過波の振幅はそれぞれつぎのように求められる．

$$H_{0r} = \frac{( p_{1z} \omega \varepsilon_2 - p_{2z} \omega \varepsilon_1 - q_{1z} \sigma_2 + q_{2z} \sigma_1 )}{( p_{1z} \omega \varepsilon_2 + p_{2z} \omega \varepsilon_1 - q_{1z} \sigma_2 - q_{2z} \sigma_1 )} * \\ * \frac{- j ( q_{1z} \omega \varepsilon_2 - q_{2z} \omega \varepsilon_1 + p_{1z} \sigma_2 - p_{2z} \sigma_1 )}{- j ( q_{1z} \omega \varepsilon_2 + q_{2z} \omega \varepsilon_1 + p_{1z} \sigma_2 + p_{2z} \sigma_1 )} H_{0i} \qquad (2・18a)$$

$$H_{0t} = \frac{2 [ ( p_{1z} \omega \varepsilon_2 - q_{1z} \sigma_2 )}{( p_{1z} \omega \varepsilon_2 + p_{2z} \omega \varepsilon_1 - q_{1z} \sigma_2 - q_{2z} \sigma_1 )} * \\ * \frac{- j ( q_{1z} \omega \varepsilon_2 + p_{1z} \sigma_2 ) ]}{- j ( q_{1z} \omega \varepsilon_2 + q_{2z} \omega \varepsilon_1 + p_{1z} \sigma_2 + p_{2z} \sigma_1 )} H_{0i} \qquad (2・18b)$$

つぎに，入射波，反射波および透過波の電磁エネルギー流の成分はそれぞれつぎのように表わされる．

$$<S_x^{(i)}>=\frac{1}{2}\frac{p_{1x}\omega\varepsilon_1+q_{1x}\sigma_1}{(\omega\varepsilon_1)^2+\sigma_1^2}k_0|H_{0i}|^2$$

$$\cdot\exp\{-2k_0(q_{1x}x-q_{1z}z)\} \qquad (2\cdot19a)$$

$$<S_z^{(i)}>=-\frac{1}{2}\frac{p_{1z}\omega\varepsilon_1+q_{1z}\sigma_1}{(\omega\varepsilon_1)^2+\sigma_1^2}k_0|H_{0i}|^2$$

$$\cdot\exp\{-2k_0(q_{1x}x-q_{1z}z)\} \qquad (2\cdot19b)$$

$$<S_x^{(r)}>=\frac{1}{2}\frac{p_{1x}\omega\varepsilon_1+q_{1x}\sigma_1}{(\omega\varepsilon_1)^2+\sigma_1^2}k_0|H_{0r}|^2$$

$$\cdot\exp\{-2k_0(q_{1x}x+q_{1z}z)\} \qquad (2\cdot20a)$$

$$<S_z^{(r)}>=\frac{1}{2}\frac{p_{1z}\omega\varepsilon_1+q_{1z}\sigma_1}{(\omega\varepsilon_1)^2+\sigma_1^2}k_0|H_{0r}|^2$$

$$\cdot\exp\{-2k_0(q_{1x}x+q_{1z}z)\} \qquad (2\cdot20b)$$

$$<S_x^{(t)}>=\frac{1}{2}\frac{p_{1x}\omega\varepsilon_2+q_{1x}\sigma_2}{(\omega\varepsilon_2)^2+\sigma_2^2}k_0|H_{0t}|^2$$

$$\cdot\exp\{-2k_0(q_{1x}x-q_{2z}z)\} \qquad (2\cdot21a)$$

$$<S_z^{(t)}>=-\frac{1}{2}\frac{p_{2z}\omega\varepsilon_2+q_{2z}\sigma_2}{(\omega\varepsilon_2)^2+\sigma_2^2}k_0|H_{0t}|^2$$

$$\cdot\exp\{-2k_0(q_{1x}x-q_{2z}z)\} \qquad (2\cdot21b)$$

## 2・3　Snell の法則

導電性誘電体を伝搬する平面波は一般にはその等位相面と等振幅面とが一致しない，いわゆる一様でない平面波となる．したがって，媒質が完全誘電体の場合とは違って，位相角（等位相面の法線と $z$ 軸とのなす角）$\theta_p$ と振

幅角（等振幅面の法線と $z$ 軸とのなす角）$\theta_a$ の両者を同時に指定しなければ導電性誘電体中の平面波の伝搬定数を一意的に決定することができない（図２．２参照）．いま，入射波，反射波および透過波の位相角および振幅角を

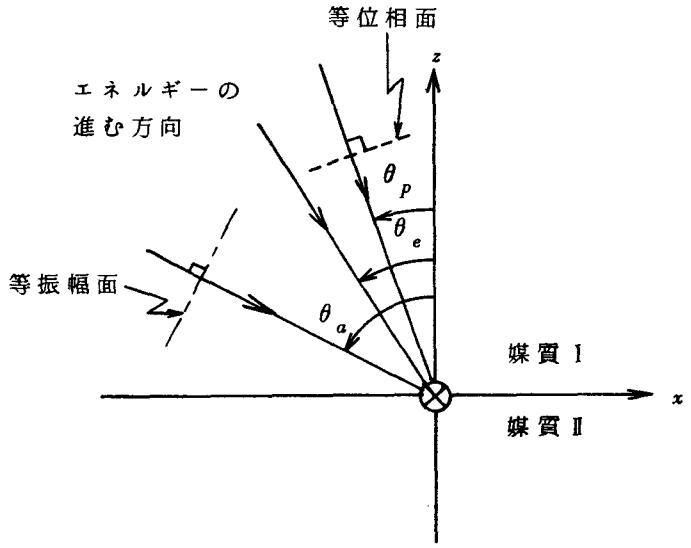



図２．２　位相角 $\theta_p$，振幅角 $\theta_a$ およびエネルギー角 $\theta_e$

それぞれ $\theta_p^{(l)}$ および $\theta_a^{(l)}$（$l=i,r,t$）とするとき，$\theta_p^{(l)}$ および $\theta_a^{(l)}$ はそれぞれ次式で定義される．

$$\theta_p^{(l)} = \tan^{-1}\frac{Re\left[k_x^{(l)}\right]}{-Re\left[k_z^{(l)}\right]},\quad (l=i,r,t) \qquad (2\cdot22)$$

$$\theta_a^{(l)} = \tan^{-1}\frac{-Im\left[k_x^{(l)}\right]}{Im\left[k_z^{(l)}\right]},\quad (l=i,r,t) \qquad (2\cdot23)$$

ただし，$Im$ は複素量の虚数部をとる操作を表わす．また，一様な平面波の場合には位相の進む方向とエネルギー流の進む方向は常に一致するが，上のような一様でない平面波の場合にはあとで示すように位相の進む方向とエ

ネルギー流の進む方向とは一般には一致しない．いま，エネルギー流の進む方向と $z$ 軸とのなす角，すなわちエネルギー角を $\theta_e$（図２．２参照）とすれば，$\theta_e$ は次式で定義される．

$$\theta_e^{(l)} = \tan^{-1} \frac{<S_x^{(l)}>}{-<S_z^{(l)}>}, \quad (l = i, r, t) \qquad (2\cdot24)$$

ここで，まず入射波がＥ波の場合の位相角，振幅角およびエネルギー角は式（２・６）～（２・８）および式（２・１２）～（２・１４）を用いてつぎのように表わされる．

$$\theta_p^{(i)} = \theta_p^{(r)} = \tan^{-1} \frac{p_{1x}}{p_{1z}}, \quad \theta_p^{(t)} = \tan^{-1} \frac{p_{1x}}{p_{2z}} \qquad (2\cdot25)$$

$$\theta_a^{(i)} = \theta_a^{(r)} = \tan^{-1} \frac{q_{1x}}{q_{1z}}, \quad \theta_a^{(t)} = \tan^{-1} \frac{q_{1x}}{q_{2z}} \qquad (2\cdot26)$$

$$\theta_e^{(i)} = \theta_e^{(r)} = \tan^{-1} \frac{p_{1x}}{p_{1z}}, \quad \theta_e^{(t)} = \tan^{-1} \frac{p_{1x}}{p_{2z}} \qquad (2\cdot27)$$

式（２・２５）～（２・２７）は，媒質ⅠおよびⅡがともに導電性誘電体の場合の反射・透過に関するSnellの法則を表わす．なお，式（２・２５）と式（２・２７）とを比較することにより，入射波がＥ波の場合には位相角とエネルギー角は常に等しく，したがって

$$\theta_p^{(l)} = \theta_e^{(l)}, \quad (l = i, r, t) \qquad (2\cdot28)$$

となることがわかる．つぎに，入射波がＨ波の場合の位相角と振幅角はＥ波の場合と同様に式（２・２５），（２・２６）で表わされるが，エネルギー角は式（２・１９）～（２・２１）を用いてつぎのように求められる．

$$\theta_e^{(i)} = \theta_e^{(r)} = \tan^{-1} \frac{p_{1x}\omega\varepsilon_1 + q_{1x}\sigma_1}{p_{1z}\omega\varepsilon_1 + q_{1z}\sigma_1}$$

$$\theta_e^{(l)} = \tan^{-1} \frac{p_{1x}\,\omega\,\varepsilon_2 + q_{1x}\,\sigma_2}{p_{2z}\,\omega\,\varepsilon_2 + q_{2z}\,\sigma_2} \Bigg\} \qquad (2\cdot29)$$

したがって，入射波がH波の場合には，一般に

$$\theta_p^{(l)} \neq \theta_e^{(l)}, \quad (l = i, r, t) \qquad (2\cdot30)$$

となり，位相角とエネルギー角とが一致しないことがわかる．

## 2・4　伝搬定数の決定

入射波の位相角および振幅角を添字($i$)を省略して$\theta_p$および$\theta_a$と表わすとき，式(2・25)および式(2・26)を用いて次式を得る．

$$p_{1x} = p_{1z} \tan\theta_p, \quad q_{1x} = q_{1z} \tan\theta_a \qquad (2\cdot31)$$

ただし，

$$-\pi \leqq \theta_p, \ \theta_a \leqq \pi, \quad |\theta_p - \theta_a| \leqq \frac{\pi}{2} \qquad (2\cdot32)$$

上式の関係は式(2・9)から導かれるものである．さて，式(2・31)を式(2・9a)に代入することによって，$p_{1x}$，$p_{1z}$および$q_{1x}$，$q_{1z}$はそれぞれつぎのように表わされる．

$$p_{1x} = p_1 \sin\theta_p, \quad p_{1z} = p_1 \cos\theta_p \qquad (2\cdot33)$$

および

$$q_{1x} = q_1 \sin\theta_a, \quad q_{1z} = q_1 \cos\theta_a \qquad (2\cdot34)$$

ただし

$$p_1 = n_1 \left[ \frac{1 + \sqrt{1 + \{1/m_1 \cos(\theta_p - \theta_a)\}^2}}{2} \right]^{1/2} \qquad (2\cdot35)$$

$$q_1 = n_1 \left[ \frac{-1 + \sqrt{1 + \{1/m_1 \cos(\theta_p - \theta_a)\}^2}}{2} \right]^{1/2} \qquad (2\cdot36)$$

ただし，伝搬定数 $k_x^{(i)}$，$k_z^{(i)}$ をもつ波が入射波を表わすためには，

$$<S_z^{(i)}><0 \qquad (2\cdot37)$$

すなわち，

$$p_{1z}>0\ (\text{E波}),\quad p_{1z}m_1+q_{1z}>0\ (\text{H波}) \qquad (2\cdot38)$$

でなければならない．

つぎに，透過波の $z$ 方向の伝搬定数 $p_{2z}$ および $q_{2z}$ はそれぞれつぎのようにして決定される．

$$p_{2z}=\pm p_0,\qquad q_{2z}=\pm q_0 \qquad (2\cdot39)$$

ただし，

$$\left.\begin{matrix}p_0\\q_0\end{matrix}\right\}=\left[\pm\frac{P}{2}+\frac{\sqrt{P^2+Q^2}}{2}\right]^{1/2} \qquad (2\cdot40)$$

ここで，

$$P=p_{2z}^2-q_{2z}^2=n_2^2-(p_1^2\sin^2\theta_p-q_1^2\sin^2\theta_a) \qquad (2\cdot41a)$$

$$Q=2\,p_{2z}\,q_{2z}=(n_2^2/m_2)-2\,p_1q_1\sin\theta_p\sin\theta_a \qquad (2\cdot41b)$$

であり，式（2・41b）からわかるように $Q$ の符号の正負により，$p_{2z}$ と $q_{2z}$ とは互いに同符号または異符号となる．なお，上式に含まれる $n_1$，$n_2$ および $m_1$，$m_2$ なる量はそれぞれ次式によって定義される．

$$n_j=\sqrt{\frac{\varepsilon_j}{\varepsilon_0}},\quad m_j=\frac{\omega\varepsilon_j}{\sigma_j},\quad (j=1,2) \qquad (2\cdot42)$$

さらに，複号は伝搬定数 $k_x^{(t)}$，$k_z^{(t)}$ をもつ波が透過波を表わすための条件

$$<S_z^{(t)}><0 \qquad (2\cdot43)$$

すなわち，

$$p_{2z} > 0 \text{（E波）}, \quad p_{2z} m_2 + q_{2z} > 0 \text{（H波）} \qquad (2\cdot44)$$

から決定され，したがって $p_{2z}$，$q_{2z}$ は表２．１に示すように求められる．

表２．１　透過波の伝搬定数

| | E　　波 | H　　波 |
|---|---|---|
| $Q > 0$ | $p_{2z} = + p_0$<br>$q_{2z} = + q_0$ | $p_{2z} = + p_0$<br>$q_{2z} = + q_0$ |
| $Q < 0$ | $p_{2z} = + p_0$<br>$q_{2z} = - q_0$ | $p_{2z} = \pm p_0$<br>$q_{2z} = \mp q_0$<br>ただし，<br>$p_{2z} m_2 + q_{2z} > 0$ |

## ２．５　エネルギー流に関する考察

前節の議論から，入射波については

$$p_{1z} > 0 \text{（E波）}, \quad p_{1z} m_1 + q_{1z} > 0 \text{（H波）} \qquad (2\cdot45)$$

透過波については

$$p_{2z} > 0 \text{（E波）}, \quad p_{2z} m_2 + q_{2z} > 0 \text{（H波）} \qquad (2\cdot46)$$

の条件を満足するかぎり，$q_{1z}$ あるいは $q_{2z}$ は負の値をとることができる．このことは，一見不合理のように思えるが，このような場合でも電磁エネルギー流はその伝搬の方向に減衰していくことを示すことができる．

まず，入射波がE波の場合には入射波および透過波のエネルギー流の指数部は式（２・１２），（２・１４）より

$$\exp\{-2k_0(q_{1x}x - q_{1z}z)\} \text{（入射波）} \qquad (2\cdot47a)$$

$$\exp\left[-2k_0(q_{1x}x-q_{2z}z)\right]\ (\text{透過波}) \qquad (2\cdot47b)$$

であるが，上式はエネルギー角が式（2・27）で与えられることを用いてつぎのように書き換えられる．

$$\exp\left[k_0\frac{n_1^2}{p_{1z}m_1}z\right]\ (\text{入射波}) \qquad (2\cdot48a)$$

$$\exp\left[k_0\frac{n_2^2}{p_{2z}m_2}z\right]\ (\text{透過波}) \qquad (2\cdot48b)$$

入射波がE波の場合 $p_{1z}>0$，$p_{2z}>0$ であり，したがって $z$ の係数は正となり，エネルギー流はその伝搬の方向に減衰していくことがわかる．つぎに，入射波がH波の場合には上と同様にしてエネルギー流の指数部は

$$\exp\left[k_0\frac{p_{1x}^2+q_{1x}^2+p_{1z}^2+q_{1z}^2}{p_{1z}m_1+q_{1z}}z\right]\ (\text{入射波}) \qquad (2\cdot49a)$$

$$\exp\left[k_0\frac{p_{1x}^2+q_{1x}^2+p_{2z}^2+q_{2z}^2}{p_{2z}m_2+q_{2z}}z\right]\ (\text{透過波}) \qquad (2\cdot49b)$$

と表わされるが，$p_{1z}m_1+q_{1z}>0$，$p_{2z}m_2+q_{2z}>0$ であり，したがってこの場合もE波の場合と同様にエネルギー流は，その伝搬の方向に減衰していくことがわかる．

なお，このように $q_{1z}$ あるいは $q_{2z}$ が負の値をとる場合には，式（2・12）～（2・14）または式（2・19）～（2・21）から

$$\frac{\partial<S_x^{(l)}>}{\partial z}>0\quad(l=i,r,t) \qquad (2\cdot50)$$

となるが，

$$\frac{\partial<S_x^{(l)}>}{\partial x}+\frac{\partial<S_z^{(l)}>}{\partial z}\quad(l=i,r,t)$$

は常に負の値をとり，したがって当然のことながら $q_{1z}$ あるいは $q_{2z}$ の正負にかかわらず，常に

$$\nabla \cdot \langle \mathbf{S}^{(l)} \rangle < 0 \quad (l = i, r, t) \qquad (2 \cdot 51)$$

なる式が成立する．

## 2・6 Zenneck の表面波

本節では入射波がH波の場合には，異種の導電性媒質の境界面において，ある条件のもとにいわゆる Zenneck の表面波が存在し得ることを示す．

入射波が一様でない平面波でH波の場合には，式（2・8a）からも明らかなように，異種導電性媒質の境界面上において反射波が0となるような入射波が必ず存在する．いま，このような場合について一般的に論ずるため境界面上に入射波と透過波だけが存在するものとすれば，その境界条件からこのような状態を満足する入射波および透過波の伝搬定数 $p_{1x}$，$q_{1x}$，$p_{1z}$，$q_{1z}$，$p_{2z}$ および $q_{2z}$ はそれぞれつぎのように定められる．

$$p_s = \pm \left[ \frac{P_s + \sqrt{P_s^2 + Q_s^2}}{2} \right]^{1/2} \quad (s = 1x, 1z, 2z) \qquad (2 \cdot 52a)$$

$$q_s = \pm \left[ \frac{-P_s + \sqrt{P_s^2 + Q_s^2}}{2} \right]^{1/2} \qquad (2 \cdot 52b)$$

ここで，

$$P_{1x} = \frac{n_1^2 n_2^2}{\Delta} (M_1 + M_2) \qquad (2 \cdot 53a)$$

$$Q_{1x} = \frac{n_1^2 n_2^2}{\Delta} \left( \frac{M_1}{m_2} + \frac{M_2}{m_1} \right) \qquad (2 \cdot 53b)$$

$$P_{1z}=\frac{n_1^4}{\Delta}\left\{M_1+n_2^2\left(1+\frac{2}{m_1m_2}-\frac{1}{m_1^2}\right)\right\} \qquad (2\cdot54a)$$

$$Q_{1z}=\frac{n_1^4}{\Delta}\left\{\frac{M_1}{m_1}+n_2^2\left(\frac{2}{m_1}+\frac{1}{m_1^2m_2}-\frac{1}{m_2}\right)\right\} \qquad (2\cdot54b)$$

$$P_{2z}=\frac{n_2^4}{\Delta}\left\{M_2+n_1^2\left(1+\frac{2}{m_1m_2}-\frac{1}{m_2^2}\right)\right\} \qquad (2\cdot55a)$$

$$Q_{2z}=\frac{n_2^4}{\Delta}\left\{\frac{M_2}{m_2}+n_1^2\left(\frac{2}{m_2}+\frac{1}{m_1m_2^2}-\frac{1}{m_1}\right)\right\} \qquad (2\cdot55b)$$

また，

$$\Delta=(n_1^2+n_2^2)^2+\left(\frac{n_1^2}{m_1}+\frac{n_2^2}{m_2}\right)^2 \qquad (2\cdot56a)$$

$$M_1=n_1^2\left(1+\frac{1}{m_1^2}\right),\quad M_2=n_2^2\left(1+\frac{1}{m_2^2}\right) \qquad (2\cdot56b)$$

ただし，式（２．５２）の複号は前節で述べたように入射波および透過波の条件を満足するように選ぶものとする．

さて，入射波および透過波がZenneckの表面波を構成するためには，電磁界の大きさが境界面$z=0$を中心として，$\pm z$方向にそれぞれ指数関数的に減衰しなければならない．すなわち，

$$q_{1z}<0,\quad q_{2z}>0 \qquad (2\cdot57)$$

でなければならない．さらに，伝搬定数は入射波および透過波の条件を満たしている必要がある．すなわち式（２・４５）および式（２・４６）から

$$p_{1z}m_1+q_{1z}>0,\quad p_{2z}m_2+q_{2z}>0 \qquad (2\cdot58)$$

でなければならない．したがって，式（２・５２）～（２・５５）で与えられる

伝搬定数のうち，条件式（２・５７）および式（２・５８）を満足するものがZenneck の表面波を構成することがわかる．

つぎに，このような表面波が存在するために，媒質の構成定数が満たすべき条件を調べる．まず，入射波の伝搬定数に対して式（２・５７）および式（２・５８）から $p_{1z}>0$，$q_{1z}<0$，すなわち $Q_{1z}=2\,p_{1z}\,q_{1z}<0$ でなければならない．式（２・５４ｂ）からわかるように，$Q_{1z}$ が負であるためには

$$m_2<\frac{n_2^2 m_1(m_1^2-1)}{n_1^2(m_1^2+1)+2n_2^2 m_1^2} \qquad (2\cdot 59)$$

であればよい．上式を満足する $m_1$ と $m_2$ の領域を図２．３に示す．同図から $m_1<1$，すなわち $\sigma_1>\omega\varepsilon_1$ であれば，どのような $m_2$ の値に対しても $Q_{1z}<0$ とはならず，したがってこのような場合には Zenneck の表面波は存在し得ないことがわかる．

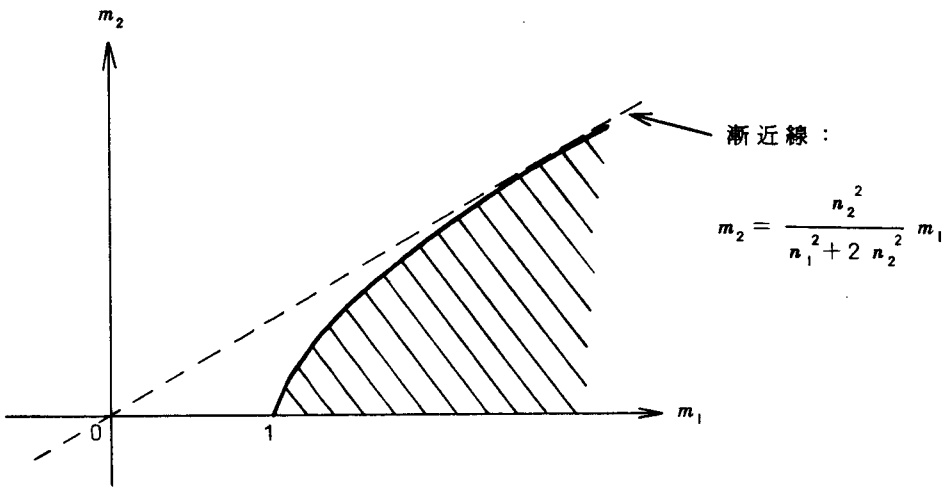



図２．３　Zenneck の表面波となり得る $m_1$，$m_2$ の値の範囲（斜線部）

つぎは，同図の領域内にある $m_1$，$m_2$ の値をとり，かつ $q_{1z}<0$，$q_{2z}>0$ となるように伝搬定数の符号を選べばそれらは必ず入射波および透過波の条件

を満足し，したがって Zenneck の表面波が構成され得ることを示す．まず，$m_1>1$ であることより，式（２・５４ａ）から $P_{1z}>0$ となる．この結果を式（２・５２ａ）および式（２・５２ｂ）に用いれば $p_{1z}>-q_{1z}>0$ となり，したがって

$$p_{1z}\,m_1+q_{1z}>0$$

がなりたち，入射波の条件を満足する．また図２．３の領域は $m_1>m_2$ を満足しているから，式（２・５５ｂ）より，$Q_{2z}=2\,p_{2z}\,q_{2z}>0$ となる．したがって $q_{2z}>0$ のとき $p_{2z}>0$ となり，常に関係式

$$p_{2z}\,m_2+q_{2z}>0$$

が成立し，透過波の条件を満足する．上に述べたことから，異種導電性媒質の境界面において $m_1$ および $m_2$ の値が図２．３の領域にあれば，式（２・２５），（２・２６）および式（２・５２）～（２・５６）から決定される位相角および振幅角をもった表面波が存在し得ることがわかる．

つぎに媒質Ⅰが完全誘電体の場合[45]について考察する．この場合には，入射波および透過波の伝搬定数は式（２・５３）～（２・５６）において $m_1=\infty$（$\sigma_1=0$）とおくことによって得られ，それらの値は，Zenneckの表面波となるための条件式（２・５７）および式（２・５８）を満足していることがわかる．また媒質Ⅰが完全誘電体の場合には，入射波の位相角 $\theta_p^{(i)}$ および振幅角 $\theta_a^{(i)}$ の間に

$$\tan\theta_p^{(i)}\cdot\tan\theta_a^{(i)}=\frac{Q_{1z}}{Q_{1z}}=-1 \qquad (2\cdot60)$$

なる関係が成立し，その等位相面と等振幅面は直交していることが確められる．

以上の議論から，伝搬定数を与える式（２・５２）～（２・５６）および条件式（２・５９）は Zenneck の表面波の一般形を表わしていることがわかる．

## 2・7　検　　討

本節では，入射波が一様でなく，かつH波の場合について伝搬定数，Snellの法則およびZenneckの表面波などの数値例を示す．図2．4は透過波の伝搬定数，図2．5および図2．6は透過角の数値例で，横軸に入射波の位相角$\theta_p^{(i)}$をとってあり，入射波の振幅角$\theta_a^{(i)}$をパラメータとしている．なお，これらの図において曲線が×印で切れているのは，入射角が条件式（2・32）を満さなくなる点であり，また○印で切れているのは式（2・38）すなわち入射波の条件を満たさなくなる点を表わしている．

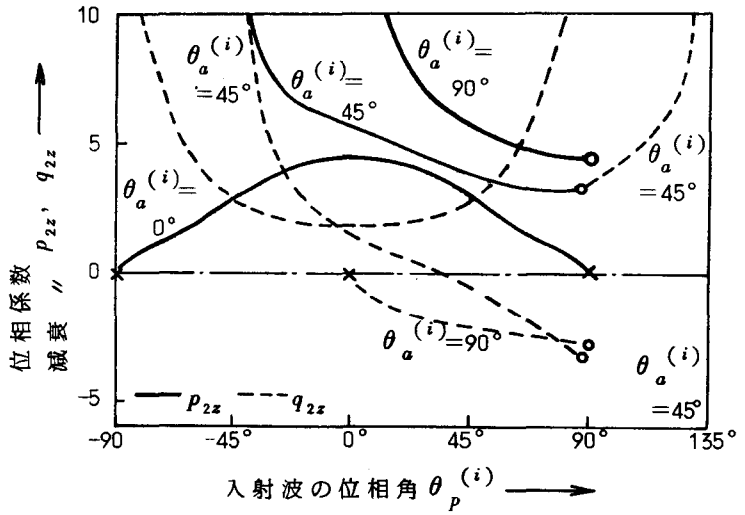
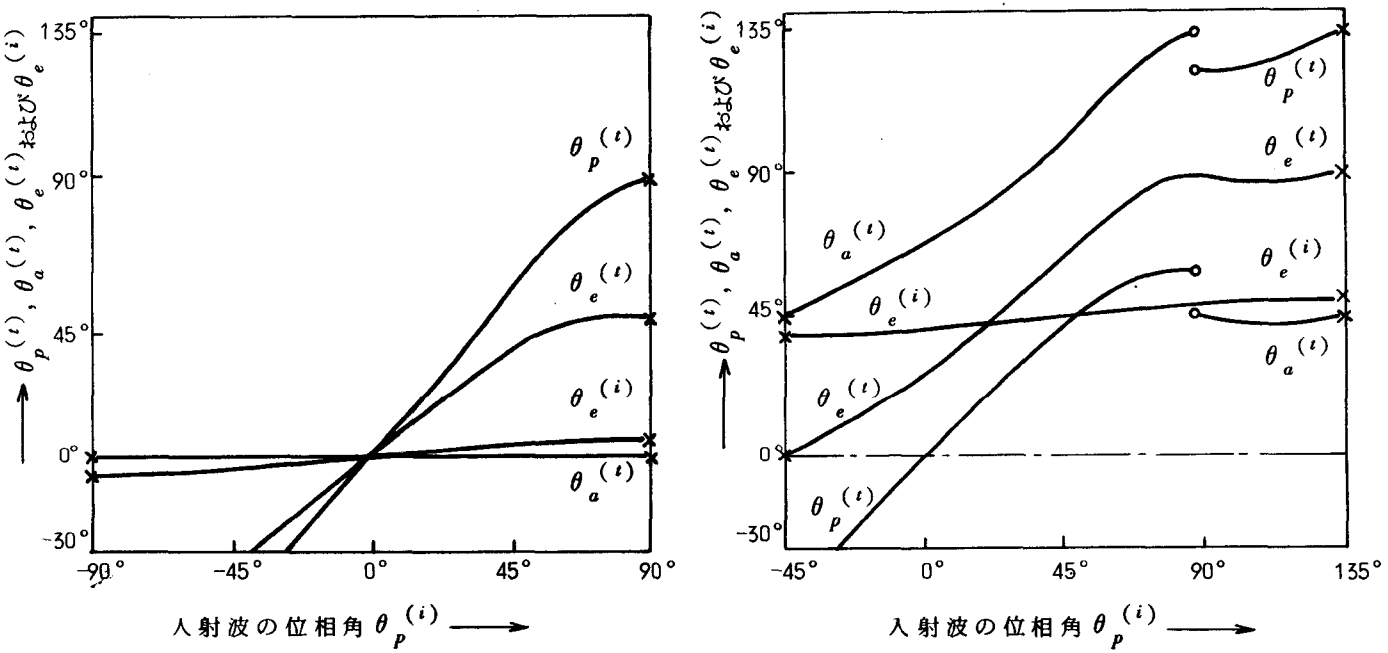


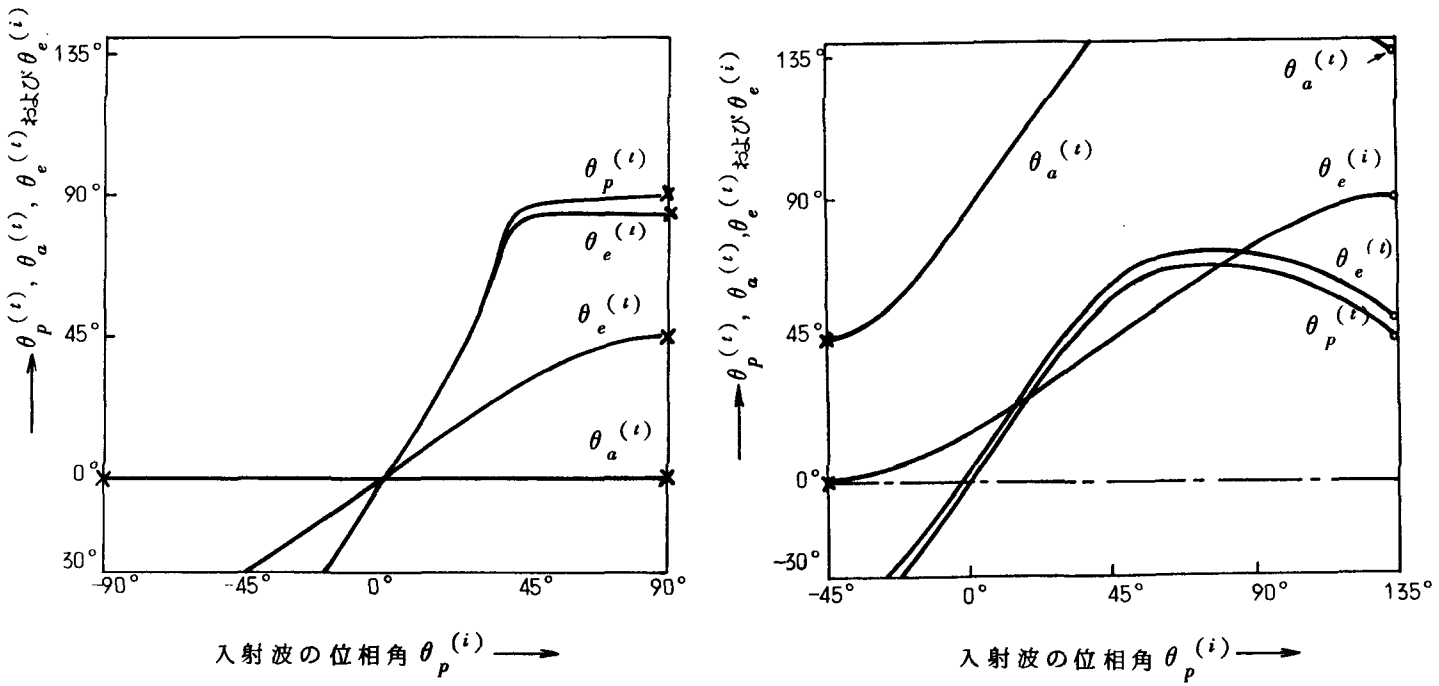

図2．4　透過波の伝搬定数（$n_1=2$，$n_2=4$，$m_1=0.1$，$m_2=1$）

図2．4は透過波の伝搬定数の$z$方向成分すなわち位相係数$p_{2z}$および減衰係数$q_{2z}$を示している．$\theta_a^{(i)}=0°$の場合には$-90° \leqq \theta_p^{(i)} \leqq 90°$の全範囲で$p_{2z}$，$q_{2z}$とも正の値をとるが，$\theta_a^{(i)}=45°$の場合には$\theta_p^{(i)}=90°$のの付近で$p_{2z}$と$q_{2z}$の符号が入れ代わるが，これは透過波の条件$p_{2z}m_2+q_{2z}>0$を満たすように$p_{2z}$および$q_{2z}$の符号を決めているためである．また，$\theta_a^{(i)}=90°$の場合には，$0° \leqq \theta_p^{(i)} \leqq 90°$の範囲で$p_{2z}>0$，$q_{2z}<0$となっている．




(a) $\theta_a^{(i)} = 0°$　　(b) $\theta_a^{(i)} = 45°$

図２．５　スネルの法則（$n_1=2$，$n_2=4$，$m_1=0.1$，$m_2=1$）




(a) $\theta_a^{(i)} = 0°$

(b) $\theta_a^{(i)} = 45°$

図２．６　スネルの法則（$n_1=2$，$n_2=2$，$m_1=1$，$m_2=10$）

図２．５は，入射波の位相角$\theta_p^{(i)}$の変化に対する入射波のエネルギー角$\theta_e^{(i)}$および透過波の位相角$\theta_p^{(t)}$，振幅角$\theta_a^{(t)}$，エネルギー角$\theta_e^{(t)}$の変化を示したものである．$\theta_a^{(i)}=0°$（図２．５(a)）の場合は，$\theta_a^{(t)}$は常に0°であるが，$\theta_p^{(t)}$，$\theta_e^{(t)}$および$\theta_e^{(i)}$は$\theta_p^{(i)}$の増加に対して単調に増加し，$\theta_a^{(i)}=45°$（図２．５(b)）の場合には，$\theta_p^{(i)}=90°$の付近で$\theta_p^{(t)}$と$\theta_a^{(t)}$が不連続に変化しているが，これは図２．４に示した伝搬定数の不連続に対応するもので，この点では$\theta_e^{(t)}=90°$となり，媒質Ⅱへのエネルギー流はない．

図２．６は，媒質の構成定数が$n_1=2$，$n_2=\sqrt{2}$，$m_1=1.0$，$m_2=10$の場合の数値例で，$\theta_p^{(i)}$の変化に対する，$\theta_p^{(t)}$，$\theta_a^{(t)}$，$\theta_e^{(t)}$および$\theta_e^{(i)}$の変化を示している．$\theta_a^{(i)}=0°$（図２．６(a)）の場合には$\theta_p^{(t)}$，$\theta_a^{(t)}$，$\theta_e^{(t)}$および$\theta_e^{(i)}$は，ほぼ単調に増加するが，$\theta_a^{(i)}=45°$（図２．６(b)）の場合には，$\theta_p^{(i)}$の増加に対して入射波のエネルギー角は単調に増加するが，透過角には極大値が存在する．また図から$\theta_p^{(i)}$が負の値の場合には正の$\theta_e^{(i)}$に対して負の$\theta_e^{(t)}$となる場合があることがわかる．

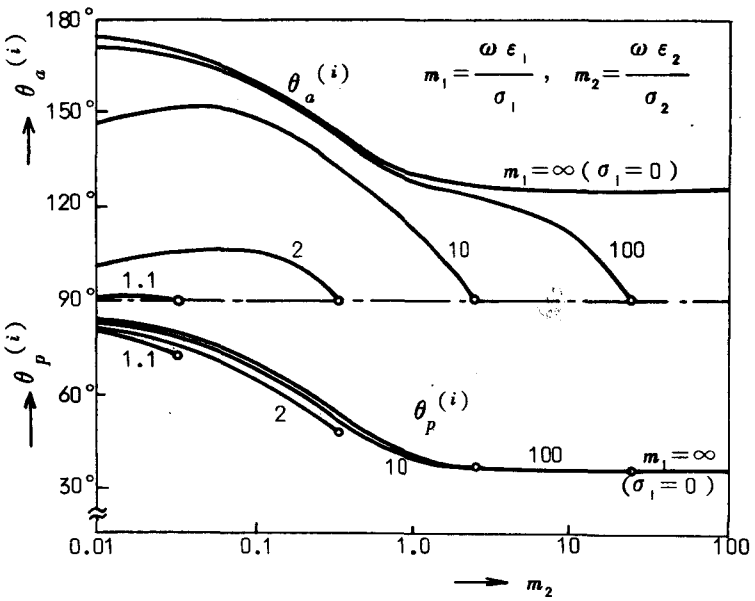



図２．７　Zenneckの表面波が励振される入射角$\theta_p^{(i)}$および$\theta_a^{(i)}$

図２．７はZenneckの表面波についての数値例であり，パラメータとして$m_1$をとり，横軸$m_2$の変化に対して，Zenneckの表面波となる入射波の位相角$\theta_p^{(i)}$および振幅角$\theta_a^{(i)}$の変化を示す．曲線が○印で切れているのは$m_2$がそれより大きくなると，表面波の条件式（２・５９）を満足しなくなることを表わしている．図において，$m_1=\infty$，すなわち媒質Ⅰが完全誘電体の場合には，常に$\theta_a^{(i)}-\theta_p^{(i)}=90°$となっていることがわかる．

## ２・８　結　　言

本章では，二つの半無限導電性媒質の境界面における反射・透過の問題について，入射波が一様でない平面波の場合を含めて一般的に考察した．まず，入射波が一様でない平面波に対して，位相角，振幅角およびエネルギー角を定義し，Ｅ波およびＨ波のそれぞれの場合について一般的なSnellの法則を導いた．ついで，電磁エネルギー流について考察し，この結果を用いて入射波および透過波の伝搬定数が満足すべき条件を求めた．さらに，このような異種の導電性媒質の境界面におけるZenneck の表面波について考察し，このような表面波が存在するために媒質の構成定数が満足すべき条件などを明らかにした．最後に，得られた結果を数値計算例をあげて検討した．

# 第３章　平面電磁波の全反射現象を利用した誘電体媒質への波動励振[14)〜16)]

## ３・１　序　　言

最近，全反射現象をマイクロ波回路素子および光学回路素子に利用しようという試みが活発になされている[6)〜13)]が，本章では，平面電磁波の全反射現象を利用して誘電体媒質中に波動を励振する問題を取り扱う．

半無限誘電体媒質から自由空間中に平面電磁波が入射するとき，平面電磁波の入射角と誘電体媒質の屈折率とがいわゆる全反射の条件を満足するとき，真空中の波はevanescent waveとなり，このとき境界面に垂直な方向の電磁エネルギーの流れがないことはよく知られている．本章ではこのような波すなわち全反射平面波によって，真空層を隔てて半無限誘電体媒質あるいは誘電体平板中に励振される波の性質について詳しく論じる．

まず，半無限誘電体中に励振される波について考察し，真空層の厚さが増加するとともに励振される波の電磁エネルギー流が単調に減衰する様子を明らかにする．

つぎに，全反射波によって誘電体平板中に励振される波について解析し，このような構造をもつPrism-Film Couplerの最適設計について考察する．すなわち，誘電体平板の厚さ，媒質の屈折率，および入射角が適当な条件を満足するとき，誘電体平板中に励振される波の電磁エネルギー流を最大にする真空層の厚さが存在することを示す．さらに，入射角が適当な値をとるとき，誘電体平板中に表面波固有モードが励振されることを明らかにし，この場合の電磁界分布について詳しく考察する．

## ３・２　全反射波による半無限誘電体中の波

本節においては全反射波によって半無限誘電体中に励振される波の性質について考察する．図３．１において媒質Ⅰは（$\varepsilon_1$，$\mu_0$）なる半無限誘電体媒質，媒質Ⅱは厚さ$h$なる真空層であり，また媒質Ⅲは（$\varepsilon_3$，$\mu_0$）なる半無限誘電体であるとする．いま，半無限媒質Ⅰから真空層Ⅱに向って一様な平面波が入

射するものとし，波はＴＥ波（電界が入射面に垂直な波）もしくはＴＭ波（磁界が入射面に垂直な波）であるとする．このとき，媒質Ⅰ，ⅡおよびⅢ中の波はそれぞれつぎのように表わされる．

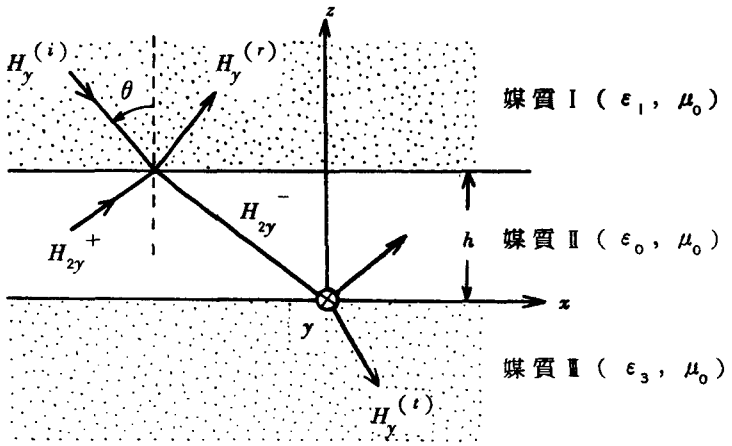



図３．１　座標系（入射波がＴＭ波の場合）

媒質Ⅰ：

$$E_y^{(i)} = E_{0i}\, e^{\,j(\omega t - k_{1x}x - k_{1z}z)} \qquad (3\cdot1)$$

$$E_y^{(r)} = E_{0r}\, e^{\,j(\omega t - k_{1x}x + k_{1z}z)} \qquad (3\cdot2)$$

媒質Ⅱ：

$$E_{2y}^{-} = E_{02}^{-}\, e^{\,j(\omega t - k_{1x}x - k_{2z}z)} \qquad (3\cdot3)$$

$$E_{2y}^{+} = E_{02}^{+}\, e^{\,j(\omega t - k_{1x}x + k_{2z}z)} \qquad (3\cdot4)$$

媒質Ⅲ：

$$E_y^{(t)} = E_{0t}\, e^{\,j(\omega t - k_{1x}x - k_{3z}z)} \qquad (3\cdot5)$$

ここで，添字 $i$，$r$ および $t$ はそれぞれ入射波，反射波および透過波の電磁界を表わし，また上部の添字 $^-$ および $^+$ はそれぞれ媒質Ⅱ中を $z$ の負および正の方向に伝搬する波の電磁界量を表わす．ただし，上の諸式は入射波がTE波の場合の電界成分であり，TM波の場合の磁界成分は $E_y^{(i)}$，$E_{0i}$ などを $H_y^{(i)}$，$H_{0i}$ などに置き換えることによって得られる．なお，式（3・1）～（3・5）以外の電磁界成分はTE波もしくはTM波の定義と Maxwell の方程式から求められる．

さて，伝搬定数 $k_{1x}$，$k_{1z}$，$k_{2z}$ および $k_{3z}$ は入射角 $\theta$ および各媒質の構成定数とそれぞれつぎの関係によって結ばれている．

$$k_{1x} = n_1 k_0 \sin\theta = \beta \tag{3・6a}$$

$$k_{1z} = -n_1 k_0 \cos\theta = -\beta_z \tag{3・6b}$$

$$k_{2z} = \begin{cases} -k_0\sqrt{1-n_1^2\sin^2\theta} & (n_1^2\sin^2\theta \leqq 1) \\ j\,k_0\sqrt{n_1^2\sin^2\theta-1} & (n_1^2\sin^2\theta > 1) \end{cases}$$

$$k_{3z} = \begin{cases} -k_0\sqrt{n_3^2-n_1^2\sin^2\theta} & (n_1^2\sin^2\theta \leqq n_3^2) \\ j\,k_0\sqrt{n_1^2\sin^2\theta-n_3^2} & (n_1^2\sin^2\theta > n_3^2) \end{cases}$$

ただし，

$$n_1 = \sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_0}}, \qquad n_3 = \sqrt{\frac{\varepsilon_3}{\varepsilon_0}}, \qquad k_0 = \omega\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}$$

ここで，$n_1$，$n_3$ および $\theta$ が

$$1 \leqq n_1^2\sin^2\theta \leqq n_3^2 \tag{3・7}$$

なる関係式を満足するものとすれば，$k_{2z}$ および $k_{3z}$ はそれぞれつぎのように表わされる．

$$k_{2z} = j\,k_0\sqrt{n_1^2\sin^2\theta-1} = j\,\alpha \tag{3・8}$$

$$k_{3z} = -k_0\sqrt{n_3^2 - n_1^2\sin^2\theta} = -\gamma \qquad (3\cdot 9)$$

条件式（３・７）のうち $1 \leqq n_1^2\sin^2\theta$ はいわゆる全反射の条件を表わし，$n_1^2\sin^2\theta \leqq n_3^2$ は，媒質Ⅲ，すなわち半無限誘電体媒質中を伝搬する波の伝搬定数の $z$ 方向成分が実数であるための条件を表わしている．媒質Ⅰの屈折率 $n_1$ および入射角 $\theta$ が全反射の条件を満足するとき式（３・３）および式（３・４）で与えられる媒質Ⅱ中の電磁界（$\mathbf{E}_2^-$，$\mathbf{H}_2^-$）および（$\mathbf{E}_2^+$，$\mathbf{H}_2^+$）はそれぞれ $z$ の負および正の方向にreactiveに減衰する．本章においては，このようにある境界面を通過した後，電磁界が境界面に垂直な方向にreactiveに減衰するような波を全反射波と呼ぼう．位相の進む方向と直角の方向にreactiveに減衰するような波は一般にはevanescent waveと呼ばれ，この波に伴う電磁エネルギー流の向きは位相の方向と同じであり，これと直角な方向の電磁エネルギー流は０であることはよく知られている．さて，媒質Ⅱ中の電磁エネルギー流も，（$\mathbf{E}_2^-$，$\mathbf{H}_2^-$）および（$\mathbf{E}_2^+$，$\mathbf{H}_2^+$）の個々の波に伴う電磁エネルギー流

$$\langle S_{2z}^- \rangle = \frac{1}{2} Re\left[\mathbf{E}_2^- \times \mathbf{H}_2^{-*}\right] \cdot \mathbf{i}_z$$

$$\langle S_{2z}^+ \rangle = \frac{1}{2} Re\left[\mathbf{E}_2^+ \times \mathbf{H}_2^{+*}\right] \cdot \mathbf{i}_z$$

をそれぞれ別個に計算してやれば

$$\langle S_{2z}^- \rangle = 0, \quad \langle S_{2z}^+ \rangle = 0$$

となりそれぞれの波に伴う電磁エネルギー流の境界面に垂直な成分は０となるわけであるが，実際には（$\mathbf{E}_2^-$，$\mathbf{H}_2^-$）および（$\mathbf{E}_2^+$，$\mathbf{H}_2^+$）は媒質Ⅱ中に同時に存在しており，したがって媒質Ⅱ中の全電磁界は

$$\mathbf{E}_2 = \mathbf{E}_2^- + \mathbf{E}_2^+, \quad \mathbf{H}_2 = \mathbf{H}_2^- + \mathbf{H}_2^+ \qquad (3\cdot 10)$$

で与えられ，この全電磁界に伴う電磁エネルギー流の境界面に垂直な成分は

次式で与えられる．

$$\langle S_{2z}\rangle=\frac{1}{2}Re\left[\mathbf{E}_2\times\mathbf{H}_2^{*}\right]\cdot\mathbf{i}_z=\langle S_{2z}^{-}\rangle+\langle S_{2z}^{+}\rangle$$

$$+\frac{1}{2}Re\left[\mathbf{E}_2^{-}\times\mathbf{H}_2^{+*}+\mathbf{E}_2^{+}\times\mathbf{H}_2^{-*}\right]\cdot\mathbf{i}_z \qquad (3\cdot11)$$

上式の右辺第３項は一般には０でなく，したがって

$$\langle S_{2z}\rangle\neq\langle S_{2z}^{-}\rangle+\langle S_{2z}^{+}\rangle=0$$

となり，個々のevanescent waveに注目したときの電磁エネルギー流の位相と直角方向の成分が，たとえそれぞれ０であっても，これら二つの波を合成した全電磁界のそれは一般には０とならないことに注意しなければならない．

さて，各媒質中の電磁エネルギー流は式（３・１）～（３・９）を用いてそれぞれつぎのように表わされる．ただし，以下において表式を簡単化するために$E_{0\kappa}$と$H_{0\kappa}$（$\kappa=i,r,t,2$）をまとめて$F_{0\kappa}$であらし，ＴＥ波の場合には$F_{0\kappa}=E_{0\kappa}$，ＴＭ波の場合には$F_{0\kappa}=H_{0\kappa}$とする．

媒質Ⅰ：

$$\langle S_x^{(i)}\rangle=\frac{1}{2}\beta a_1|F_{0i}|^2 \qquad (3\cdot12a)$$

$$\langle S_z^{(i)}\rangle=-\frac{1}{2}\beta_z a_1|F_{0i}|^2 \qquad (3\cdot12b)$$

$$\langle S_x^{(r)}\rangle=\frac{1}{2}\beta a_1|F_{0r}|^2 \qquad (3\cdot13a)$$

$$\langle S_z^{(r)}\rangle=\frac{1}{2}\beta_z a_1|F_{0r}|^2 \qquad (3\cdot13b)$$

媒質Ⅱ：

$$<S_{2x}>=\frac{1}{2}\beta a_0 Re\left[|F_{02}^{-}|^2 e^{2\alpha z}+|F_{02}^{+}|^2 e^{-2\alpha z}\right.$$

$$\left.+F_{02}^{-}F_{02}^{+*}+F_{02}^{-*}F_{02}^{+}\right] \qquad (3\cdot14a)$$

$$<S_{2z}>=\frac{1}{2}\alpha a_0 Re\left[j\left(F_{02}^{-}F_{02}^{+*}-F_{02}^{-*}F_{02}^{+}\right)\right] \qquad (3\cdot14b)$$

**媒質Ⅱ**：

$$<S_x^{(t)}>=\frac{1}{2}\beta a_3 |F_{0t}|^2 \qquad (3\cdot15a)$$

$$<S_z^{(t)}>=-\frac{1}{2}\gamma a_3 |F_{0t}|^2 \qquad (3\cdot15b)$$

ただし，上の諸式に含まれる $a_k$ は次式で定義される量である．

$$a_k=\begin{cases}\dfrac{1}{\omega\mu_0} & (\text{TE波の場合})\\[2ex] \dfrac{1}{\omega\varepsilon_k}\quad (k=0,1,3)(\text{TM波の場合})\end{cases} \qquad (3\cdot16)$$

ここで，$z=0$ および $z=h$ における境界条件を用いて未定定数 $F_{0r}$，$F_{02}^{-}$，$F_{02}^{+}$ および $F_{0t}$ を入射波の電界あるいは磁界の振幅 $F_{0i}$ で表わせばそれぞれつぎのようになる．

$$F_{0r}=F_{0i}\frac{r_{12}+r_{23}e^{-2\alpha h}}{1+r_{12}r_{23}e^{-2\alpha h}}e^{2j\beta_z h} \qquad (3\cdot17)$$

$$F_{02}^{-}=F_{0i}\frac{t_{12}}{1+r_{12}r_{23}e^{-2\alpha h}}e^{-(\alpha-j\beta_z)h} \qquad (3\cdot18)$$

$$F_{02}^{+}=r_{23}F_{02}^{-} \qquad (3\cdot19)$$

$$F_{0t}=t_{23}F_{02}^{-} \qquad (3\cdot20)$$

ただし，$r_{jk}$，$t_{jk}$（$jk=12,23$）は次式で定義される量である．

$$\left.\begin{aligned} r_{12}&=\frac{\beta_z+j\delta_1}{\beta_z-j\delta_1}=\rho_{12}e^{-j\phi_{12}}\\ r_{23}&=-\frac{\gamma+j\delta_3}{\gamma-j\delta_3}=\rho_{23}e^{-j\phi_{23}}\\ t_{12}&=\frac{2\beta_z}{\beta_z-j\delta_1}=\tau_{12}e^{-j\chi_{12}}\\ t_{23}&=-\frac{2j\delta_3}{\gamma-j\delta_3}=\tau_{23}e^{-j\chi_{23}} \end{aligned}\right\} \qquad (3\cdot21)$$

ここで

$$\left.\begin{aligned} &\rho_{12}=1,\quad \phi_{12}=\tan^{-1}\frac{-2\beta_z\delta_1}{\beta_z^2-\delta_1^2}\\ &\rho_{23}=1,\quad \phi_{23}=\tan^{-1}\frac{2\gamma\delta_3}{-(\gamma^2-\delta_3^2)}\\ &\tau_{12}=\frac{2\beta_z}{\sqrt{\beta_z^2+\delta_1^2}},\quad \chi_{12}=\tan^{-1}\frac{-\delta_1}{\beta_z}\\ &\tau_{23}=\frac{2\delta_3}{\sqrt{\gamma^2+\delta_3^2}},\quad \chi_{23}=\tan^{-1}\frac{\gamma}{\delta_3} \end{aligned}\right\} \qquad (3\cdot22)$$

なお，$\delta_k$ は次式で定義される量である．

$$\delta_k=\begin{cases}\alpha & (\text{TE 波の場合})\\ \alpha n_k^2\ (k=1,3) & (\text{TM 波の場合})\end{cases} \qquad (3\cdot23)$$

ここで反射係数 $R$ および透過係数 $T$ をそれぞれ

$$R=-\frac{<S_z^{(r)}>}{<S_z^{(i)}>} \qquad (3\cdot24)$$

$$T=\frac{<S_z^{(t)}>}{<S_z^{(i)}>} \qquad (3\cdot25)$$

で定義すれば，上に求めた諸関係式（３・１７）～（３・２３）を用いて$R$および$T$はつぎのように求められる．

$$R=\frac{\cosh(2\alpha h)+\cos(\phi_{12}-\phi_{23})}{\cosh(2\alpha h)+\cos(\phi_{12}+\phi_{23})} \qquad (3\cdot26)$$

$$T=\frac{1}{2}\left(\frac{\gamma\delta_1}{\beta_z\delta_3}\right)\frac{\tau_{12}^{\,2}\tau_{23}^{\,2}}{\cosh(2\alpha h)+\cos(\phi_{12}+\phi_{23})} \qquad (3\cdot27)$$

$$=1-R \qquad (3\cdot28)$$

なお，式（３・１８）～（３・２０）を用いて実際に計算を実行することにより

$$<S_{2z}>=<S_z^{(t)}> \qquad (3\cdot29)$$

となることを容易に確かめることができる．つぎに，次章の結果と比較するために透過波の電磁エネルギー流の境界面に平行な成分も求めておこう．$<S_x^{(t)}>$を入射波の電磁エネルギー流の大きさ$|<\mathbf{S}^{(i)}>|$で規格化し，これを$S_N$で表わせば

$$S_N=\frac{1}{2}\left(\frac{\delta_1}{\delta_3}\right)\frac{\tau_{12}^{\,2}\tau_{23}^{\,2}\sin\theta}{\left[\cosh(2\alpha h)+\cos(\phi_{12}+\phi_{23})\right]} \qquad (3\cdot30)$$

となる．式（３・２７）および式（３・３０）から，$T$および$S_N$は真空層の厚さ$h$の増加とともに単調に減少し，$h$が自由空間波長$\lambda_0=2\pi/k_0$に比べて十分大きくなれば

$$T\to0,\quad S_N\to0\quad(h/\lambda_0\to\infty) \qquad (3\cdot31)$$

となることがわかる．入射波がＴＭ波の場合の$T$および$S_N$の数値計算例を図３．２に示す．

全反射波によって，半無限誘電体媒質中に励振される波の以上に述べたような性質は，たとえば，光学方向性結合器などの光学回路素子に利用することができる[6],[7]．

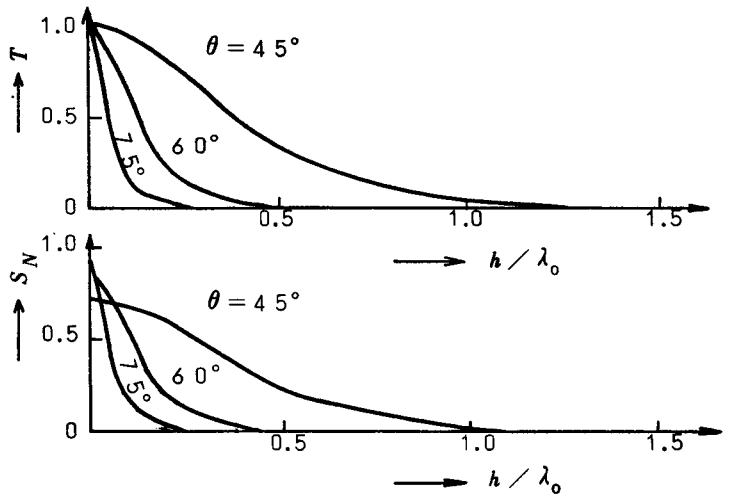



図３．２　真空層の厚さ$h/\lambda_0$に対する$T$および$S_N$の変化

## ３・３　全反射波による誘電体平板中の波

前節においては，全反射波によって半無限誘電体中に励振される波の性質について考察した．本節では，まず全反射波によって誘電体平板（線路）中に励振される波の一般的性質について論じ，ついで，その結果を用いて誘電体線路中に表面波固有モードを励振する問題について解析する．

### ３・３・１　一　般　解

図３．３に示すような構造をもつ系を考える．

同図において，媒質Ⅰは（$\varepsilon_1$，$\mu_0$）なる半無限誘電体，Ⅱは厚さ$h$なる真空層，Ⅲは（$\varepsilon_3$，$\mu_0$）なる厚さ$d$の誘電体平板，Ⅳは（$\varepsilon_0$，$\mu_0$）なる半無限自由空間であるとする．いま，半無限媒質Ⅰから真空層Ⅱに向って一様な平面波

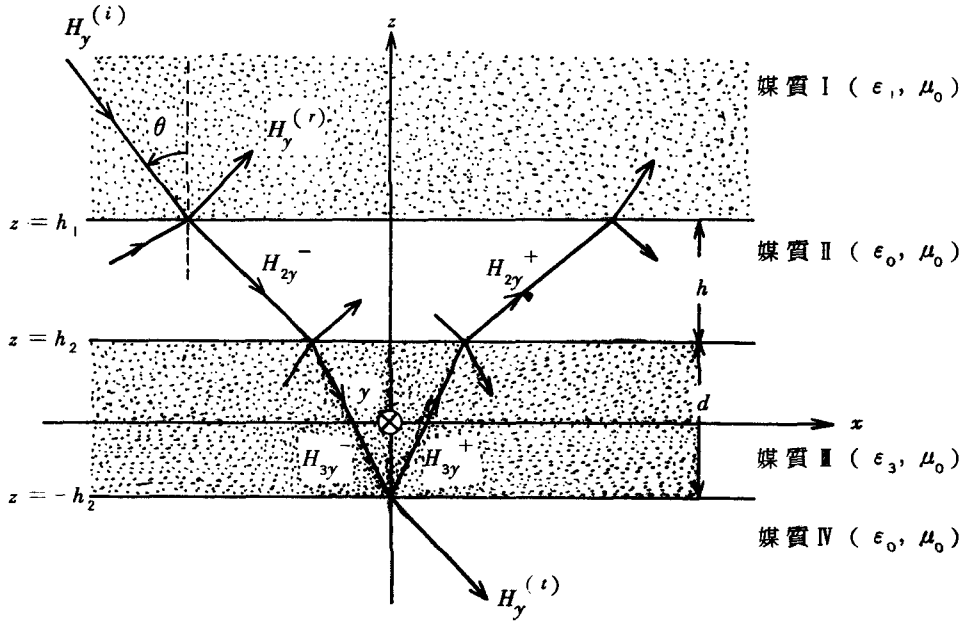



図３．３　座標系（入射波がＴＭ波の場合）

が入射するものとし，波はＴＥ波もしくはＴＭ波であるとする．ここで，媒質ⅠおよびⅢの屈折率$n_1$および$n_3$と入射角$\theta$が条件式（３・７）を満足しているものとすれば，各媒質中の伝搬定数はそれぞれつぎのように表わされる．

$$\left.\begin{aligned} k_{1x} &= k_{2x} = k_{3x} = k_{4x} = n_1 k_0 \sin\theta = \beta \\ k_{1z} &= -n_1 k_0 \cos\theta = -\beta_z \\ k_{2z} &= k_{4z} = j k_0 \sqrt{n_1^2 \sin^2\theta - 1} = j\alpha \\ k_{3z} &= -k_0 \sqrt{n_3^2 - n_1^2 \sin^2\theta} = -\gamma \end{aligned}\right\} \qquad (3\cdot 32)$$

伝搬定数が上のように定められているとき，各媒質中の電磁界はそれぞれつぎのように書ける．

媒質Ⅰ：$E_y^{(i)} = E_{0i}\, e^{j\beta_z z} e^{j(\omega t-\beta x)}$ （３・３３）

$E_y^{(r)} = E_{0r}\, e^{-j\beta_z z} e^{j(\omega t-\beta x)}$ （３・３４）

媒質Ⅱ：$E_{2y}^{-} = E_{02}^{-} e^{\alpha z} e^{j(\omega t-\beta x)}$ （３・３５）

$E_{2y}^{+} = E_{02}^{+} e^{-\alpha z} e^{j(\omega t-\beta x)}$ （３・３６）

媒質Ⅲ：$E_{3y}^{-} = E_{03}^{-} e^{j\gamma z} e^{j(\omega t-\beta x)}$ （３・３７）

$E_{3y}^{+} = E_{03}^{+} e^{-j\gamma z} e^{j(\omega t-\beta x)}$ （３・３８）

媒質Ⅳ：$E_y^{(t)} = E_{0t}\, e^{\alpha z} e^{j(\omega t-\beta x)}$ （３・３９）

ただし，前節と同様に上の諸式は入射波がＴＥ波の場合の電界成分を表わしており，ＴＭ波の場合の磁界成分は$E_y^{(i)}$，$E_{0i}$などを$H_y^{(i)}$，$H_{0i}$などに置き換えることによって得られる．ここで，$z=h_1$，$z=h_2$および$z=-h_2$における電磁界の境界条件を用いて，未定定数を入射波の電界の振幅$E_{0i}$（ＴＥ波の場合），あるいは磁界の振幅$H_{0i}$（ＴＭ波の場合）で表わせば，それぞれつぎのようになる．ただし，前節と同様表式を簡単化するために$E_{0\kappa}$と$H_{0\kappa}$（$\kappa=i, r, t, 2, 3$）をまとめて$F_{0\kappa}$で表わし，ＴＥ波の場合には$F_{0\kappa}=E_{0\kappa}$ＴＭ波の場合には$F_{0\kappa}=H_{0\kappa}$とする．

$$F_{0r} = F_{0i}\,\frac{r_{12}+R_{23}e^{-2\alpha h_1}}{1+r_{12}R_{23}e^{-2\alpha h_1}}\, e^{2j\beta_z h_1} = F_{0i}\, R_{12} \qquad (３・４０)$$

$$F_{02}^{-} = F_{0i}\,\frac{t_{12}}{1+r_{12}R_{23}e^{-2\alpha h_1}}\, e^{j(\beta_z+j\alpha)h_1} = F_{0i}\, T_{12} \qquad (３・４１)$$

$$F_{02}^{+} = F_{02}^{-}\,\frac{r_{23}+r_{34}e^{-2j\gamma h_2}}{1+r_{23}r_{34}e^{-2j\gamma h_2}}\, e^{2\alpha h_2} = F_{0i}\, T_{12}R_{23} \qquad (３・４２)$$

$$F_{03}^{-} = F_{02}^{-}\,\frac{t_{23}}{1+r_{23}r_{34}e^{-2j\gamma h_2}}\, e^{-j(\gamma+j\alpha)h_2} = F_{0i}\, T_{12}T_{23} \qquad (３・４３)$$

$$F_{03}^{+}=F_{03}^{-}\,r_{34}=F_{0i}\,r_{34}T_{12}T_{23} \qquad (3\cdot44)$$

$$F_{0t}=F_{03}^{-}\,t_{34}=F_{0i}\,t_{34}T_{12}T_{23} \qquad (3\cdot45)$$

ここで，$r_{jk}$，$t_{jk}$（$jk=12,\ 23$）は前節の式（３・２１）～（３・２３）で定義されているものと同じであるが，$r_{34}$，$t_{34}$は次式によって定義される量である．

$$\left.\begin{aligned} r_{34}&=\frac{\gamma+j\delta_3}{\gamma-j\delta_3}\,e^{-2j\gamma h_2}=\rho_{34}\,e^{-j(\phi_{34}+2\gamma h_2)}\\ t_{34}&=\frac{2\gamma}{\gamma-j\delta_3}\,e^{-j(\gamma+j\alpha)h_2}=\tau_{34}\,e^{-j\{\chi_{34}+(\gamma+j\alpha)h_2\}}\end{aligned}\right\} \qquad (3\cdot46)$$

ここで，

$$\left.\begin{aligned} \rho_{34}&=1,\quad \phi_{34}=\tan^{-1}\frac{-2\gamma\delta_3}{\gamma^2-\delta_3^{\,2}}\\ \tau_{34}&=\frac{2\gamma}{\sqrt{\gamma^2+\delta_3^{\,2}}},\quad \chi_{34}=\tan^{-1}\frac{-\delta_3}{\gamma}\end{aligned}\right\} \qquad (3\cdot47)$$

各媒質中の電磁エネルギー流，すなわちPoyntingベクトルの時間平均値は，上に求められた関係式（３・４０）～（３・４５）を用いて求めることができる．まず，境界面に平行な成分はつぎのように求められる．

$$\langle S_x^{(i)}\rangle=\frac{1}{2}\beta a_1\,|F_{0i}|^2 \qquad (3\cdot48)$$

$$\langle S_x^{(r)}\rangle=\langle S_x^{(i)}\rangle \qquad (3\cdot49)$$

$$\langle S_{2x}\rangle=\frac{1}{2}\beta a_0\frac{\tau_{12}^{\,2}}{\Delta}|F_{0i}|^2\{e^{2\alpha(z-h_2)}\sin^2(\gamma d+\phi_{23})+e^{-2\alpha(z-h_2)}\sin^2\gamma d+2\sin(\gamma d+\phi_{23})\sin\gamma d\} \qquad (3\cdot50)$$

$$<S_{3x}>=\frac{1}{4}\beta a_3 \frac{\tau_{12}^2\tau_{23}^2}{\Delta}|F_{0i}|^2\{1+\cos(2\gamma z+\gamma d+\phi_{34})\}$$

(3・51)

$$<S_x^{(t)}>=\frac{1}{8}\beta a_0 \frac{\tau_{12}^2\tau_{23}^2\tau_{34}^2}{\Delta}|F_{0i}|^2 e^{2\alpha(z+h_2)} \qquad (3・52)$$

ただし，

$$\Delta=e^{2\alpha h}\sin^2(\gamma d+\phi_{23})+e^{-2\alpha h}\sin^2\gamma d$$
$$+2\sin(\gamma d+\phi_{23})\cdot\sin\gamma d\cdot\cos\phi_{12} \qquad (3・53)$$

つぎに，境界面に垂直な成分は

$$<S_z^{(i)}>=-\frac{1}{2}\beta_z a_1|F_{0i}|^2 \qquad (3・54)$$

$$<S_z^{(r)}>=-<S_z^{(i)}> \qquad (3・55)$$

$$<S_{2z}>=<S_{3z}>=<S_z^{(t)}>=0 \qquad (3・56)$$

となり，各媒質中の境界面に垂直な成分はすべて0となることがわかる．このことは，半無限媒質Ⅳ中の波がevanescent wave であることから当然の結果である．

以上で，各媒質中を伝搬する波の電磁エネルギー流がそれぞれ求まったわけであるが，以下において媒質Ⅱおよび Ⅲ，すなわち真空層および誘電体平板内の電磁エネルギー流の境界面に平行な成分についてさらに詳しく考察しよう．まず，媒質Ⅱ，すなわち真空層内（$h_2\leqq z\leqq h_1$）の電磁エネルギー流の境界に平行な成分について考察する．式（3・50）より，$<S_{2x}>$の$z$に関する微分は次式で与えられる．

$$\frac{d<S_{2x}>}{dz}=2\alpha e^{-2\alpha(z-h_2)}\cdot\frac{1}{2}\beta a_0\frac{\tau_{12}^2}{\Delta}|F_{0i}|^2$$

$$\times\left[ e^{4\alpha(z-h_2)} \sin^2(\gamma d+\phi_{23}) - \sin^2\gamma d \right] \qquad (3\cdot57)$$

この式から

$$\sin^2\gamma d < \sin^2(\gamma d+\phi_{23}) \qquad (3\cdot58)$$

の場合には，$<S_{2x}>$は $z$ の負の方向に単調に減少し，

$$\sin^2\gamma d \geqq \sin^2(\gamma d+\phi_{23}) \qquad (3\cdot59)$$

の場合には

$$e^{4\alpha(z-h_2)} = \frac{\sin^2\gamma d}{\sin^2(\gamma d+\phi_{23})}$$

を満足する $z$ において $<S_{2x}>$ は極小値をとることがわかる．このときの $z$ を $z_{min}$ とすれば，$z_{min}$ は次式で与えられる．

$$(z_{min}-h_2) = \frac{1}{4\alpha}\log\frac{\sin^2\gamma d}{\sin^2(\gamma d+\phi_{23})} = h_0 \qquad (3\cdot60)$$

ただし，上式を満足する $z_{min}$ が境界の外側，すなわち $z_{min} \geqq h_1$ に存在するときには，$<S_{2x}>$ は $z$ の負の方向に単調に増加することになる（図３．４および図３．５参照）．

つぎに，誘電体平板中の電磁エネルギー流の境界面に平行な成分について考察しよう．$<S_{3x}>$は式（３・５１）からわかるように場所 $z$ の関数となっているが，その平均の値は

$$\frac{1}{d}\int_0^1 dy \int_{-h_2}^{h_2} <S_{3x}> dz = \frac{1}{4}\frac{\beta a_3}{\gamma d}\frac{\tau_{12}^2\tau_{23}^2}{\Delta}$$

$$\cdot |F_{0i}|^2\left[\gamma d+\sin\gamma d\cdot\cos(\gamma d+\phi_{34})\right] \qquad (3\cdot61)$$

で与えられる．前節の場合と同様にこの値を入射波の電磁エネルギー流の大

きさで規格化し，これを $S_N$ で表わせば

$$S_N=\frac{1}{2}\left(\frac{\delta_1}{\delta_3}\right)\frac{\tau_{12}^2\tau_{23}^2}{\Delta}$$

$$\times\frac{\{\gamma d+\sin\gamma d\cdot\cos(\gamma d+\phi_{23})\}\sin\theta}{\gamma d} \qquad (3\cdot62)$$

となる．上式からただちにわかるように，$S_N$ の真空層の厚さ $h$ に関する微係数は

$$e^{4\alpha h}=\frac{\sin^2\gamma d}{\sin^2(\gamma d+\phi_{23})} \qquad (3\cdot63)$$

のとき0となり，$S_N$ はこのとき極大となる．すなわち，$S_N$ は

$$h=h_0=\frac{1}{4\alpha}\log\frac{\sin^2\gamma d}{\sin^2(\gamma d+\phi_{23})} \qquad (3\cdot64)$$

において最大（極大）値をもつ．ただし，$h$ が正の値をとるためには

$$\sin^2\gamma d\geqq\sin^2(\gamma d+\phi_{23}) \qquad (3\cdot65)$$

でなければならない．$\gamma d$ と $\phi_{23}$ が上の条件を満足しないとき，すなわち

$$\sin^2\gamma d<\sin^2(\gamma d+\phi_{23}) \qquad (3\cdot66)$$

のときには，$S_N$ の微係数は常に負の値をとり，したがって，$S_N$ は $h=0$ で最大値をとり，$h$ の増加とともに単調に減少する．以上のことから，誘電体平板の厚さ $d$，媒質の屈折率 $n_1$，$n_3$ および入射角 $\theta$ が条件式（3・65）を満足するときには，真空層の厚さ $h$ が式（3・64）で与えられる値 $h_0$ をもつとき $S_N$ は最大となり，$h=h_0$ の前後で単調に減少することがわかる．また，諸定数が式（3・65）の条件式を満足しない場合には，真空層の厚さが0のとき，すなわち半無限媒質Ⅰと誘電体平板Ⅲが接しているときに $S_N$ は最大

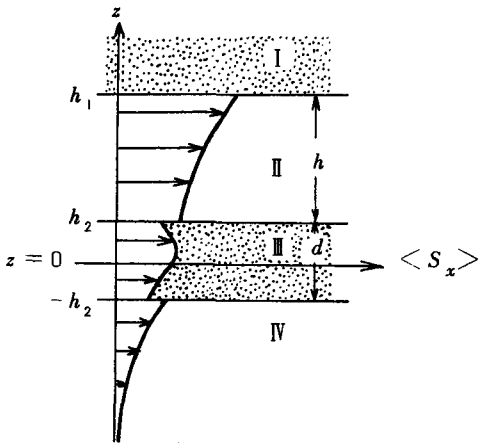



図３．４　$<S_x>$の様子

（$\sin^2\gamma d<\sin^2(\gamma d+\phi_{23})$の場合）

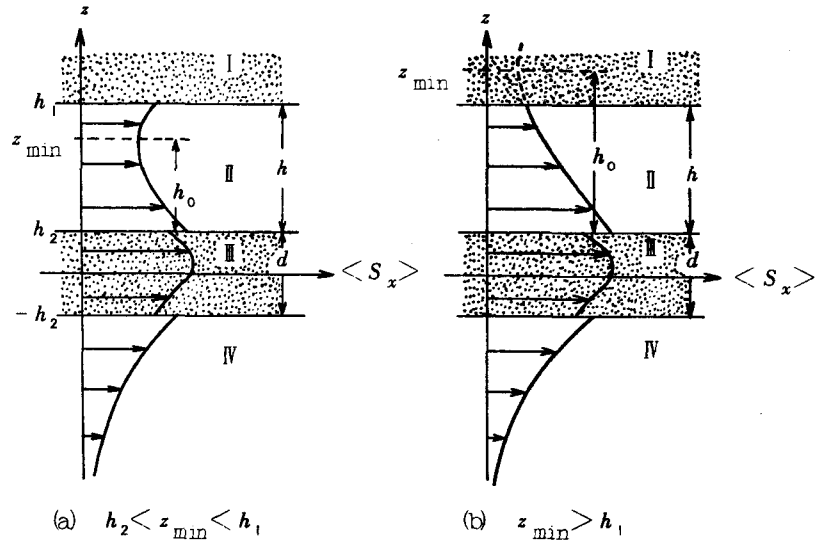



図３．５　$<S_x>$の様子（$\sin^2\gamma d\geqq\sin^2(\gamma d+\phi_{23})$の場合）

となり，$h$の増加とともに単調に減少する．ここで，条件式（３・６５）および式（３・６６）はそれぞれ式（３・５９）および式（３・５８）と同一のものであることに注意されたい．また，上に述べたことから，$<S_{3x}>$が最大とな

るように真空層の厚さ $h$ を選んだとき，式（３・６０）で定義される $z_{min}$ はちょうど $h_1$ に等しくなり，したがってこのとき $<S_{2x}>$ は $z$ の負の方向に単調に増加することになる．なお，式（３・５２）からただちにわかるように $<S_x^{(t)}>$ は $z$ の負の方向に単調に減少する．以上のことから，各媒質中の電磁エネルギー流の様子は図３．４および図３．５に示すようになる．

３・３・２　表面波固有モードの励振

前項においては，全反射波によって誘電体平板中に励振される波の一般的性質について論じたが，ここでは表面波固有モードの励振について考察しよう．

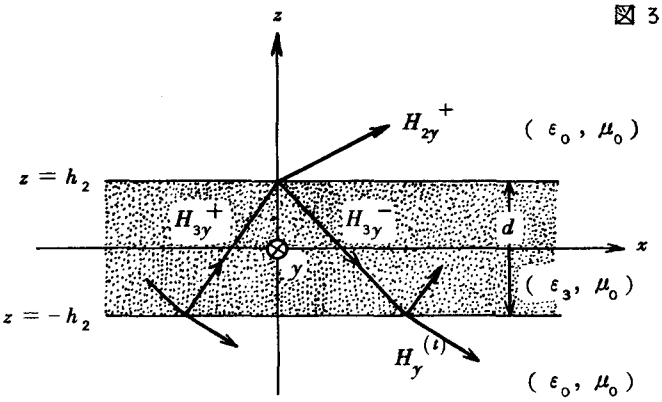



図３．６　誘電体表面波線路（ＴＭ波の場合）

まず，図３．６に示すような誘電体表面波線路の特性方程式は次式で与えられる．[44]

$$\tan \gamma d = \frac{2\delta_3 \gamma}{\gamma^2 - \delta_3^2} \qquad (3 \cdot 67)$$

図３．６は図３．３において，媒質Ｉが存在しないような場合にあたっている．以下においては図３．３に示した構造において伝搬定数 $\alpha$，$\gamma$，媒質の屈折率 $n_3$ および誘電体平板の厚さ $d$ が条件式（３・６７）を満足しているときには，$-\infty \leqq z \leqq h_1$ の領域に誘電体表面波線路の固有モードの場合と同じ電

磁界が励振できることを示す．

各媒質中の伝搬定数は式（３・３２）に与えられているがこれらの式からつぎの関係式を得る．

$$\beta^2 - \alpha^2 = k_0^2, \qquad \beta^2 + \gamma^2 = k_0^2 n_3^2 \tag{３・６８}$$

あるいは

$$\alpha^2 + \gamma^2 = k_0^2 ( n_3^2 - 1 ) \tag{３・６９}$$

したがって，式（３・６７）と式（３・６９）から$\alpha$および$\gamma$が決定され，これを式（３・６８）に用いれば$\beta$の値が一意的に決定される．すなわち，誘電体平板中に表面波線路の固有モードを励振すべき入射角$\theta = \theta_m$が一意的に決定される．このとき，すなわち$\theta = \theta_m$のとき式（３・２２），（３・４７）と式（３・６７）とからつぎの関係式が得られる．

$$\gamma d + \phi_{23} = ( m \pm 1 ) \pi \tag{３・７０}$$

$$\gamma d + \phi_{34} = m \pi \tag{３・７１}$$

したがって

$$\sin ( \gamma d + \phi_{23} ) = 0 \tag{３・７２}$$

$$\sin \gamma d = ( -1 )^m \frac{2 \delta_3 \gamma}{\delta_3^2 + \gamma^2} \tag{３・７３}$$

となる．ただし，$m$は０または正の整数である．

ここで，$\theta = \theta_m$のときの各媒質中の電磁界の振幅を求めてみよう．一般の場合の振幅の関係式は，式（３・４０）～（３・４５）に与えられているが，ここで式（３・７２）および式（３・７３）を用いれば，モードの場合の関係式

$$\left| \frac{F_{0r}}{F_{0i}} \right|^2 = 1 , \quad \left| \frac{F_{02}^{-}}{F_{0i}} \right|^2 = 0$$

$$\left.\begin{aligned} &\left|\frac{F_{02}^{+}}{F_{0i}}\right|^2=\tau_{12}^{2}e^{2\alpha h_1}, \quad \left|\frac{F_{02}^{-}}{F_{0i}}\right|^2=\left(\frac{\tau_{12}}{\tau_{34}}\right)^2 e^{-2\alpha h} \\ &\left|\frac{F_{03}^{+}}{F_{0i}}\right|^2=\left|\frac{F_{03}^{-}}{F_{0i}}\right|^2, \quad \left|\frac{F_{0t}}{F_{0i}}\right|^2=\left|\frac{F_{02}^{+}}{F_{0i}}\right|^2 \end{aligned}\right\} \qquad (3\cdot74)$$

が得られる．この式から明らかなように $\theta=\theta_m$ のとき $F_{02}^{-}=0$ となり，したがって媒質Ⅱ，すなわち真空層内の電磁界のうち $^{-}$ の添字をもつ電磁界成分は0となる．このとき，媒質Ⅲ，すなわち誘電体平板から見た電磁界成分は $-\infty\leqq z\leqq h_1$ なる領域においては誘電体表面波線路（図3・6）の場合と同様になり，したがって固有モードが励振されるわけである．

つぎに，固有モードの場合の各媒質中の電磁エネルギー流は，式（3・50）～（3・52）に式（3・70）～（3・73）の関係を用いてつぎのように表わされる．

$$\langle S_{2x}\rangle=a_0M(1\pm\cos 2\gamma h_2)\,e^{-2\alpha(z-h_1)} \qquad (3\cdot75)$$

$$\langle S_{3x}\rangle=a_3M(1\pm\cos 2\gamma z)\,e^{2\alpha h} \qquad (3\cdot76)$$

$$\langle S_x^{(t)}\rangle=a_0M(1\pm\cos 2\gamma h_2)\,e^{2\alpha(z-h_1)} \qquad (3\cdot77)$$

ここで

$$M=\beta\left(\frac{\tau_{12}}{\tau_{34}}\right)^2|F_{0i}|^2 \qquad (3\cdot78)$$

ただし，上式における複号のうち＋はevenモード，－はoddモードに対応する．

さて，$\theta=\theta_m$ のとき式（3・72）の関係がなりたつことから，$S_N$ の最大値を与える $h=h_0$ は式（3・64）から明らかなようにこのとき無限大となる．このことは，$\theta=\theta_m$ の場合の $S_N$ を直接求めることによっても明らかである．すなわち，$\theta=\theta_m$ の場合の $S_N$ を $S_{Nm}$ と表わせば，式（3・62）に式（3・70）～（3・73）を用いて $S_{Nm}$ はつぎのように求められる．

$$S_{Nm}=2\left(\frac{\delta_1}{\delta_3}\right)\sin\theta_m\left[1+\frac{2\delta_3}{d(\gamma^2+\delta_3^2)}\right]\left(\frac{\tau_{12}}{\tau_{34}}\right)^2 e^{2\alpha h}$$

（３・７９）

この式から，$\theta=\theta_m$の場合には，$h$が大きければ大きいほど，すなわち真空層の厚さが厚ければ厚いほど誘電体平板中に励振される波の電磁エネルギー流は大きくなり，式（３・３０）で与えられる半無限誘電体の場合とちょうど逆の傾向を示すことがわかる．この一見奇妙に思われる結論は，入射電磁波が平面波であると仮定したためであり，空間的に大きさが制限された，いわゆるbounded beamが入射する場合には$S_{Nm}$を最大にする$h$の有限な値が存在することが期待される[9],(11)．

３・３・３　検　　討

入射波がＴＭ波の場合について，真空層の厚さ，誘電体線路の厚さおよび入射角の変化に対する線路中の電磁エネルギー流の大きさの変化の様子を示す．図はいづれも$n_1=n_3=1.5$の場合である．

図３．７は規格化された真空層の厚さ$h/\lambda_0$に対する$S_N$の変化を示し，パラメータは線路の厚さ$d/\lambda_3$である．図から$d/\lambda_3$の値によって$S_N$を最大にする真空層の厚さが存在することがわかる．

図３．８は真空層の厚さ$h/\lambda_0$をパラメータとしたときの，線路の厚さに対する$S_N$の変化を示す．

図３．９は線路の厚さをパラメータとしたときの，入射角$\theta$に対する$S_{N\max}$とそのときの真空層の厚さ$h_0/\lambda_0$（式（３・６４））の値を示す．

図３．１０は真空層の厚さをパラメータとしたときの入射角$\theta$に対する$S_N$の変化の様子を示している．図中の$m=1,2,3$はそれぞれ表面波固有モードの次数に対応している．

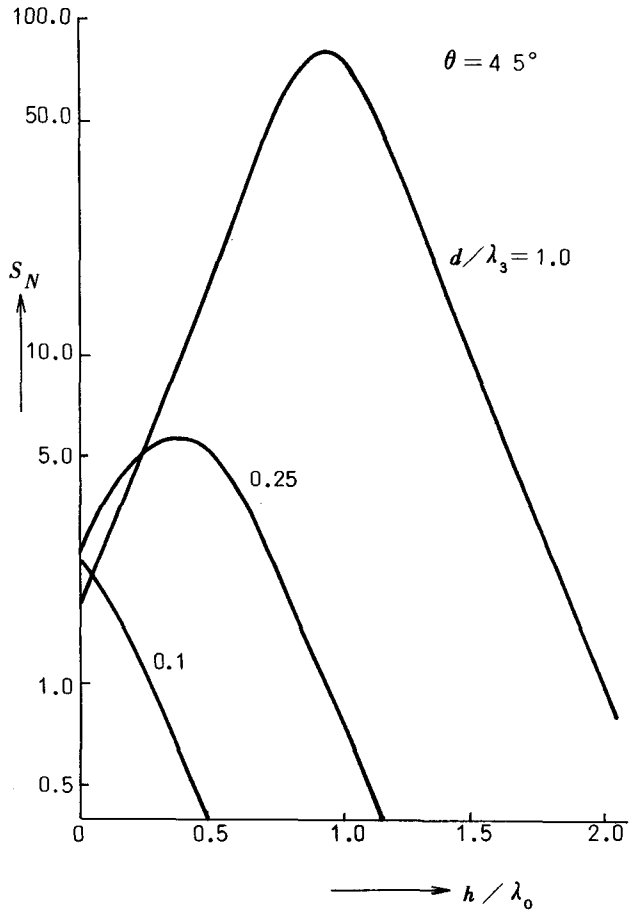



図３．７　真空層の厚さ $h/\lambda_0$ に対する $S_N$ の変化

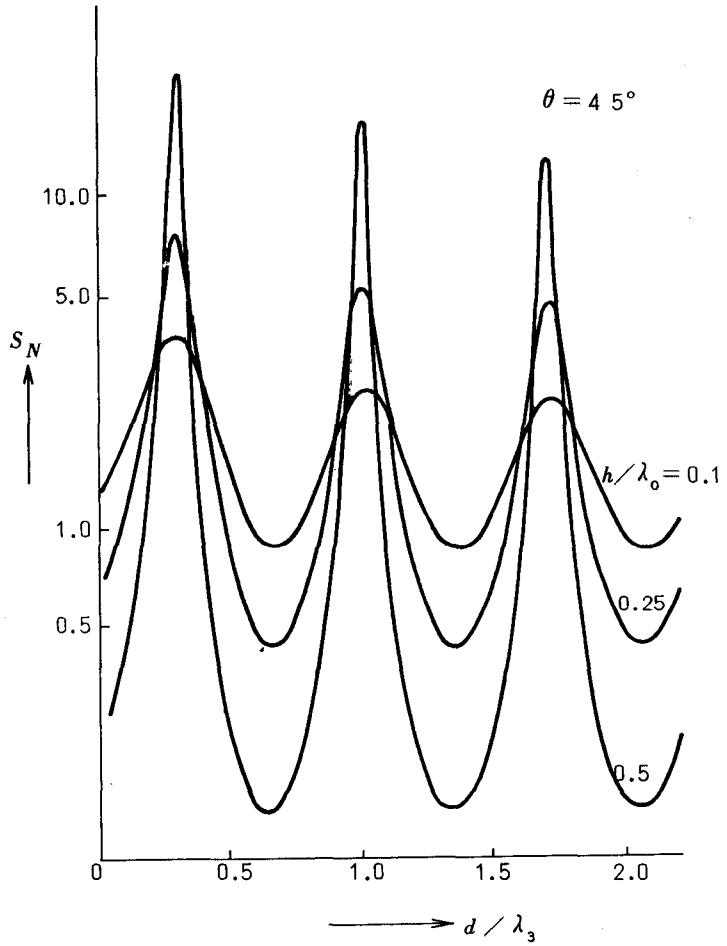



図３．８　線路の厚さ $d/\lambda_3$ に対する $S_N$ の変化

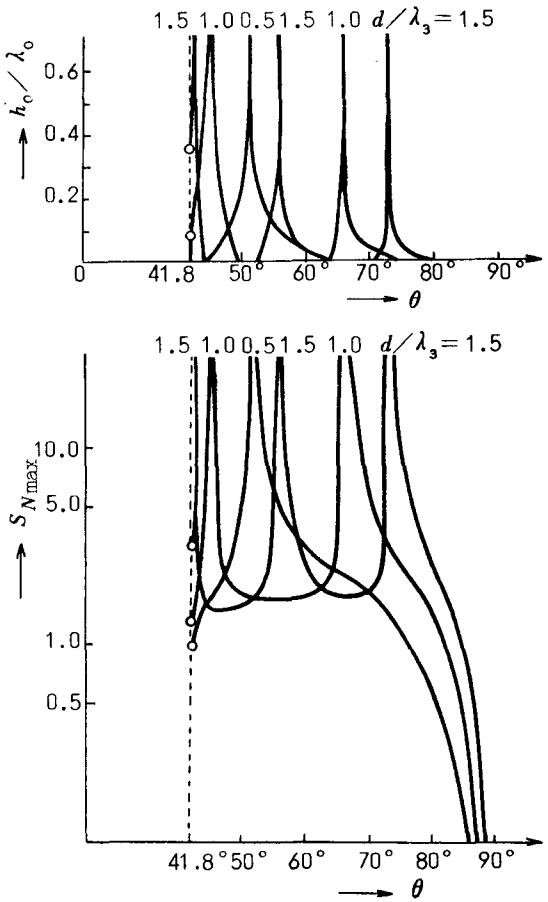



図３．９　入射角 $\theta$ に対する $S_{N\max}$ とそのときの $h_0/\lambda_0$ の値

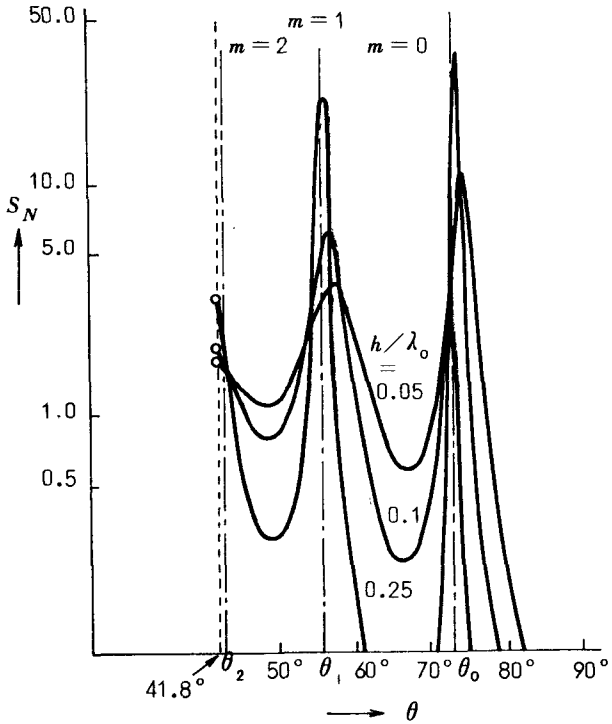



図３．１０　入射角 $\theta$ に対する $S_N$ の変化

## 3・4 結　　言

有限の厚さの真空層を隔てて，全反射波によって半無限誘電体媒質あるいは誘電体平板中に励振される波の性質について詳しく考察した．まず，半無限誘電体中に励振される波について考察し，真空層の厚さが増加するとともに励振される波の電磁エネルギー流が単調に減衰する様子を明らかにした．ついで，全反射波によって誘電体平板中に励振される波について論じ，誘電体平板の厚さ，媒質の屈折率，および入射角が適当な条件を満足するとき，誘電体平板中に励振される波の電磁エネルギー流を最大にする真空層の厚さが存在することを示した．さらに，入射角が適当な値をとるとき，誘電体平板中に表面波固有モードが励振されることを示し，この場合の電磁界分布について詳しく考察した．

# 第４章　運動誘電体媒質と電磁波との相互作用[33)〜35)]

## ４・１　序　　言

本章では，近年重要な工学的研究課題となりつつある相対論的電磁界理論の問題として，運動している誘電体媒質の境界面における電磁波と運動誘電体媒質との相互作用の問題を論じる．このような問題に関して，種々興味ある結果が報告されている[24)〜28)]が，いづれも入射波が平面波の場合に限られている．そこで本章では，入射波が平面波ではなく，ビーム波，パルス波およびevanescent 波である場合についてそれぞれ解析する．

まず，入射波としてビーム波を取り扱い，運動媒質の境界面におけるGoos－Hänchen効果について考察し，ビーム波の入射角および媒質の運動速度がGoos－Hänchen効果による反射ビーム波の変位量に与える影響などを明らかにする．

つぎに，入射波がパルス波の場合を取り扱い，全反射領域も含めて解析し，入射角および媒質の速度が反射パルス波の波形に与える影響などを考察する．

最後に，入射波が真空層によって生成されたevanescent 波である場合について解析し，真空層の厚さおよび運動媒質の速度が透過波に与える影響などを明らかにする．

## ４・２　運動媒質の境界面におけるGoos－Hänchen効果[33)]

異種媒質の境界面に電磁ビーム波が入射し，境界面において全反射が起こる場合には，反射ビーム波は通常の幾何光学的な反射波とは異なり側方に変位することが知られて[47),48)]おり，この現象はGoos－Hänchen効果と呼ばれている．本節では，電磁ビーム波が運動媒質の境界面に入射する場合のGoos－Hänchen効果について考察する．ただし，入射ビーム波としては．スリットを通過した平面波によって形成されたbounded beam とし，また，運動媒質としては，誘電体を取り扱う．なお，プラズマ媒質の場合も同様に取り扱うことができる．

図４．１に示すように，$z>0$ の領域は（$\varepsilon_1$，$\mu_0$）なる完全誘電体（媒質Ⅰ），

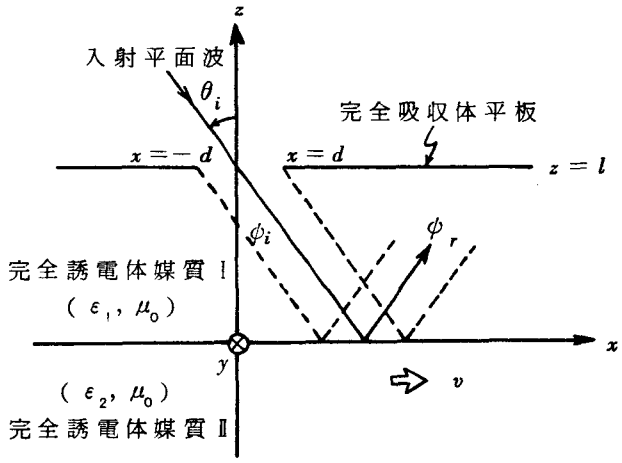



図４．１　座　標　系

$z<0$ の領域は $(\varepsilon_2,\ \mu_0)$ なる完全誘電体（媒質Ⅱ）で満たされているものとし，媒質Ⅱは媒質Ⅰに対して $x$ 方向に一様な速度 $v$ で運動しているものとする．また，$z=l$ 面上に，幅 $2d$ のスリットをもち，厚さが無限小の完全吸収体平板が存在し，$z$ の正の側から，つぎのようなスカラ平面波が入射するものとする．

$$\phi(x,z)=A_0 e^{j(\omega t-k_{1x}x-k_{1z}z)},\quad (z>l) \tag{4・1}$$

ここで，

$$\left.\begin{aligned} &k_{1x}=n_1 k_0 \sin\theta_i,\quad k_{1z}=-n_1 k_0\cos\theta_i \\ &n_1=\sqrt{\varepsilon_1/\varepsilon_0},\qquad k_0=\omega\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}=\omega/c \end{aligned}\right\} \tag{4・2}$$

さらに，$z=l$ 面上において，Kirchhoffの仮定

$$\left.\begin{aligned} &\phi(x,l)=0 \qquad\qquad ,\quad |x|\geqq d \\ &\phi(x,l)=A_0 e^{j(\omega t-k_{1x}x-k_{1z}l)},\quad |x|\leqq d \end{aligned}\right\} \tag{4・3}$$

がなりたつものとすれば，$z=l$ なる面上の電磁界はFourier積分によって平面波の和として表わすことができる．したがって，$z=l$ 上のスリットに

よって $0<z<l$ の領域につくられる入射 bounded beam はつぎのように与えられる．

$$\phi_i(x,z)=\int_{-\infty}^{\infty}\Phi(k_x)\,e^{j\{\omega t-k_x x-k_z z-(k_{1z}-k_z)l\}}\,dk_x \qquad (4\cdot4)$$

ここで，

$$\Phi(k_x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-d}^{d}A_0\,e^{-j(k_{1x}-k_x)x}\,dx \qquad (4\cdot5)$$

$$k_z=-\sqrt{n_1^2k_0^2-k_x^2} \qquad (4\cdot6)$$

反射ビーム波は，平面波の反射振幅比 $R(k_x)$ を

$$R(k_x)=r(k_x)\,e^{-j\phi_r(k_x)} \qquad (4\cdot7)$$

とすれば，反射平面素波の合成として次式のように求められる．

$$\phi_r(x,z)=\int_{-\infty}^{\infty}r(k_x)\Phi(k_x)\,e^{j(\omega t-k_x x+k_z z)}\cdot e^{-j\{(k_{1z}-k_z)l+\phi_r(k_x)\}}\,dk_x \qquad (4\cdot8)$$

ここで，$z=l$ に存在するスリットの幅 $2d$ が入射平面波の波長 $\lambda_1$ に比べて十分に大きいと仮定すれば，スリットを通過した後のビーム波が含む伝搬定数 $k_x$ はほとんど入射平面波の伝搬定数 $k_{1x}$ の付近に集中しているものと考えることができる．そこで，反射波の位相項に含まれる $\phi_r(k_x)$ を $k_x=k_{1x}$ の回りに展開し，$(k_x-k_{1x})$ の二次以上の項を無視すれば

$$\phi_r(k_x)=\phi_r(k_{1x})+\phi_r'(k_{1x})\cdot(k_x-k_{1x}) \qquad (4\cdot9)$$

となる．一方 $r(k_x)$ については，境界面において全反射が起こる場合には，後に示すようにたとえ媒質が運動している場合にも

$$r(k_x)=1 \qquad (4\cdot10)$$

となる．したがって，境界面において全反射が起こる場合には，反射波 $\phi_r$ は式（４・８）～（４・１０）から

$$\phi_r(x,z)=e^{-j\{\phi_r(k_{1x})-\phi_r'(k_{1x})\cdot k_{1x}\}}$$

$$\cdot\int_{-\infty}^{\infty}\Phi(k_x)\,e^{j\{\omega t-k_x(x+\phi_r'(k_{1x}))+k_z z\}}$$

$$\cdot\,e^{-j(k_{1z}-k_z)l}\,dk_x \qquad (4\cdot11)$$

と表わすことができる．ここで，上式で表わされる反射ビーム波と幾何光学的反射波を比較するため，完全反射の場合の反射波を求める．完全反射の場合の反射係数 $R(k_x)$ は

$$r(k_x)=1,\quad \phi_r(k_x)=\phi_0=\mathrm{const.} \qquad (4\cdot12)$$

となり，したがって幾何光学的反射（完全反射）ビーム波 $\phi_{rp}$ は式（４・８）（４・１２）から，次式のようになる．

$$\phi_{rp}(x,z)=e^{-j\phi_0}\int_{-\infty}^{\infty}\Phi(k_x)\,e^{j(\omega t-k_x x+k_z z)}$$

$$\cdot\,e^{-j(k_{1z}-k_z)l}\,dk_x \qquad (4\cdot13)$$

式（４・１１）と上式とを比較すれば，全反射ビーム波 $\phi_r$ は幾何光学的反射ビーム波 $\phi_{rp}$ に対して，$x$ 方向に

$$X=-\phi_r'(k_{1x})=-\left(\frac{\partial\phi_r(k_x)}{\partial k_x}\right)_{k_x=k_{1x}} \qquad (4\cdot14)$$

なる量だけ変位していることがわかる．また，反射ビーム波の進行方向に垂直な面内での変位を，波長 $\lambda_1$ で規格化した値を $D_N$ とすれば，$k_x=2\pi/\lambda_1\sin\theta$ なる関係を用いて

$$D_N=-\frac{X\cos\theta_i}{\lambda_1}=-\frac{1}{2\pi}\left(\frac{\partial\phi_r(\theta)}{\partial\theta}\right)_{\theta=\theta_i} \qquad (4\cdot15)$$

と表わすことができる（図４・２参照）．

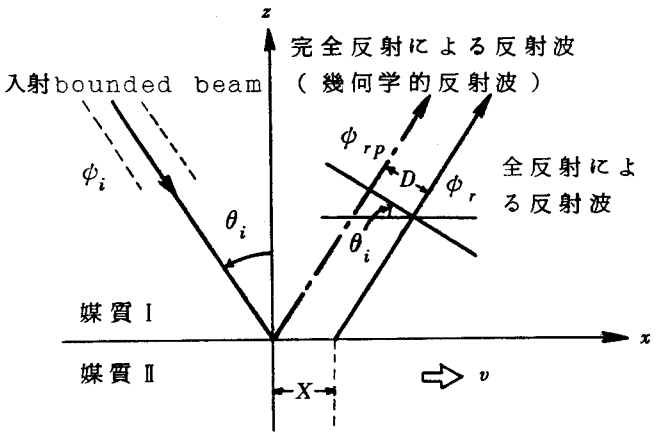



図４．２
Goos－Hänchen 効果による変位

一方，運動媒質の境界面における反射係数は一般に次式で与えられる[28]．

$$R(k_x)=\frac{k_z^{(1)}-\delta k_z^{(2)}}{k_z^{(1)}+\delta k_z^{(2)}} \qquad (4\cdot16)$$

ただし

$$\delta=\begin{cases}1 & (\mathrm{TE}\text{波})\\ n_1^2/n_2^2 & (\mathrm{TM}\text{波})\end{cases} \qquad (4\cdot17)$$

$k_z^{(1)}$および$k_z^{(2)}$はそれぞれ媒質ⅠおよびⅡ中の伝搬定数の$z$成分を表わし，次式のように求められる．

$$k_z^{(1)}=-n_1k_0\cos\theta \qquad (4\cdot18)$$

$$(k_z^{(2)})^2=\begin{cases}-\gamma^2n_1^2k_0^2(1-n_2^2\beta^2)(\sin\theta-\Theta_1)(\sin\theta-\Theta_2), & (n_2^2\beta^2\neq1)\\ -\gamma^2k_0^2\{2n_1\beta(n_2^2-1)\sin\theta-(n_2^2-\beta^2)\}, & (n_2^2\beta^2=1)\end{cases} \qquad (4\cdot19)$$

ただし，

$$\Theta_1=\frac{n_2+\beta}{n_1(n_2\beta+1)},\qquad \Theta_2=\frac{n_2-\beta}{n_1(n_2\beta-1)}$$

$$\gamma=\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}},\qquad \beta=\frac{v}{c}$$

したがって，全反射の場合の反射振幅比$R(\theta)$は次式で与えられる．

$$R(\theta)=\frac{a+jb}{a-jb}=e^{-j\phi_r(\theta)} \qquad (4\cdot20)$$

ここで

$$\phi_r(\theta)=\tan^{-1}\frac{-2ab}{a^2-b^2} \qquad (4\cdot21)$$

ただし

$$a=n_1\cos\theta,\qquad b=\delta\sqrt{-(k_z^{(2)}/k_0)^2} \qquad (4\cdot22)$$

式（4・21），（4・22）を式（4・15）に代入することによって反射ビーム波の変位量$D_N$を求めることができる．

図4．3に，入射波がTM波の場合の変位量$D_{NH}$の数値計算例を示す．図は媒質の運動速度$\beta$をパラメータとし，ビーム波の入射角$\theta_i$の変化に対する変位量$D_{NH}$の変化の様子を示している．図から媒質が運動することによって，反射ビーム波は$x$の負方向にも変位をうけることがわかる．このような現象は運動誘電体媒質に特有な現象であるが，媒質Ⅱがプラズマ媒質の場合には媒質が静止していても現われる．また，全反射の臨界角で，変位が無限となるが，これは反射係数の微係数が臨界角において発散してしまうためであり，式（4・9）で表わされる位相項の二次以上の項を無視したためではなく，臨界角近傍での反射係数の展開方法に問題があるものと考えられる．[49],[50]

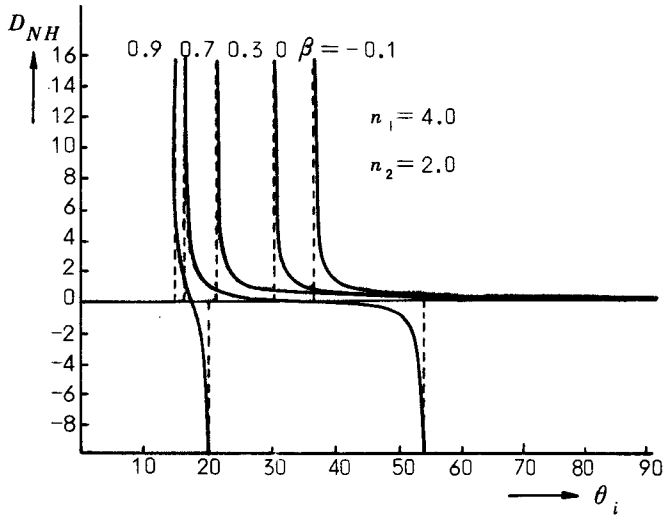



図４．３
入射角 $\theta_i$ に対する $D_{NH}$ の変化

## ４・３　運動媒質の境界面におけるパルス波の反射現象[34]

前節では，運動媒質の境界面にビーム波が入射した場合について論じたが，本節では，パルス波が入射する問題を取り扱い，その反射パルス波形について考察する．

図４．４に示すように，$z>0$ は（$\varepsilon_1$，$\mu_0$）なる誘電体（媒質Ⅰ），$z<0$ は（$\varepsilon_2$，$\mu_0$）なる誘電体（媒質Ⅱ）によって満たされているものとし，媒質Ⅱは媒質Ⅰに対して $x$ 方向に一様な速度 $v$ で運動しているものとする．

いま，$z$ の正の側から入射角 $\theta$ をもつパルス波が入射するものとし，この入射パルス波としてつぎのような二次元のスカラパルス波 $F_i(\xi_i)$ を考える．[51]

$$F_i(\xi_i)=\frac{w}{w^2+\xi_i^2} \qquad (4\cdot23)$$

ただし

$$\xi_i=\frac{x\sin\theta-z\cos\theta}{c_1}-t \qquad (4\cdot24)$$

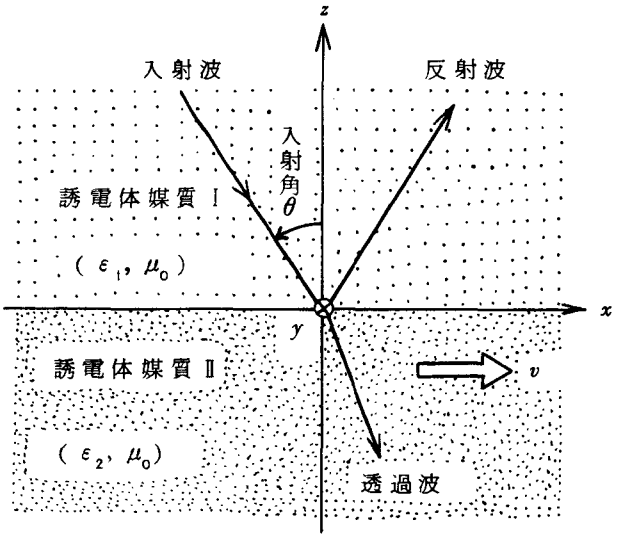



図４．４
座　標　系

ここで，$c_1$は誘電体媒質Ⅰ中を伝搬する平面波の位相速度を表わしており

$$c_1=\omega/k_1=1/\sqrt{\varepsilon_1\mu_0} \qquad (4\cdot25)$$

であり，また，$w$はパルス波形を特徴づけるパラメータである．$F_i(\xi_i)$は図４．５に示すように，$x\sin\theta-z\cos\theta=$const. を波面とし，入射角$\theta$，速度$c_1$をもち，$\xi_i=0$に最大振幅をもつパルス波を表わしていることがわかる．また，$F_i(\xi_i)/\pi$は$w\to0$の極限でDirac のデルタ関数となる．

さて，入射パルス波$F_i(\xi_i)$をつぎのようにFourier 積分によって平面波の和として表示する．

$$F_i(\xi_i)=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\Phi(\omega)\,e^{-j\omega\xi_i}\,d\omega \qquad (4\cdot26)$$

ここで$\Phi(\omega)$は，式（４・２３）に対して

$$\Phi(\omega)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}F_i(\xi_i)\,e^{j\omega\xi_i}\,d\xi_i$$

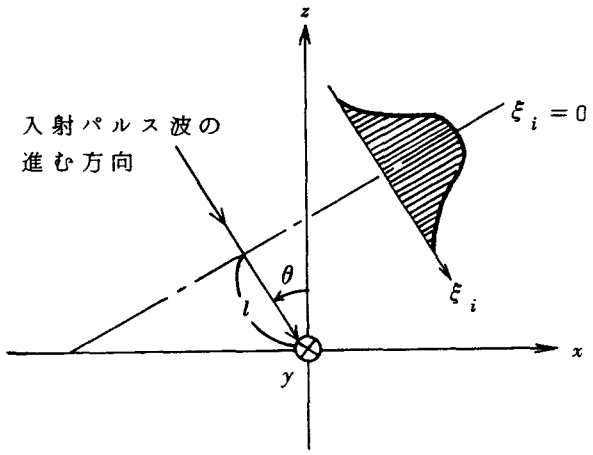



図４．５
入射パルス波の様子

$$\left(\text{時刻 } t = -\frac{l}{c_1}\right)$$

$$= \exp\left[-w\,|\,\omega\,|\,\right] \qquad (4\cdot27)$$

となり．したがって入射パルス波は次式のように求められる．

$$F_i(\xi_i) = Re\int_0^\infty \exp(-w\,|\,\omega\,| - j\,\omega\,\xi_i)\,d\omega \qquad (4\cdot28)$$

反射波は，平面波近似を用いてつぎのように求められる．いま，入射波が平面波である場合の反射波の振幅比を$R(\omega)$とすれば，$R(\omega)$は一般に

$$R(\omega) = A(\omega) + jB(\omega) \qquad (4\cdot29)$$

と表わされ，したがって反射波は，このような素波の合成として式(4･28)からつぎのように求められる．

$$F_r(\xi_r) = Re\int_0^\infty R(\omega)\,\Phi(\omega)\,e^{-j\omega\xi_r}\,d\omega \qquad (4\cdot30)$$

ただし，

$$\xi_r = \frac{x\sin\theta + z\cos\theta}{c_1} - t \qquad (4\cdot31)$$

ところで，入射波としてＴＥ波およびＴＭ波を考えれば，反射振幅比$R(\omega)$

は$\omega$の関数として前節と同様に式（４・１６）～（４・１９）のように表わされ，$R$は一般に$\omega$に無関係となることがわかる．

反射振幅比$R$の具体的な表式は，部分反射および全反射のそれぞれの場合について，次式のように求められる．

（ⅰ） 部分反射の場合

式（４・１９）で与えられる$k_z^{(2)}$が実数となる場合であり，このとき反射振幅比$R$は実数となり，次式のように表わされる．

$$R = A = \frac{n_1 \cos\theta - \delta p}{n_1 \cos\theta + \delta p} \qquad (4\cdot32)$$

ただし，

$$p = -\sqrt{(k_z^{(2)})^2 / k_0} \qquad (4\cdot33)$$

（ⅱ） 全反射の場合

$k_z^{(2)}$が純虚数となる場合であり，このとき$R$は複素数となり，式（４・２９）の$A$および$B$は次式のように求められる．

$$A = \frac{(n_1\cos\theta)^2 - (\delta q)^2}{(n_1\cos\theta)^2 + (\delta q)^2} \qquad (4\cdot34a)$$

$$B = \frac{2 n_1 \delta q \cos\theta}{(n_1\cos\theta)^2 + (\delta q)^2} \qquad (4\cdot34b)$$

ただし，

$$q = \sqrt{-(k_z^{(2)})^2 / k_0} \qquad (4\cdot35)$$

以上の結果を用いて式（４・３０）の積分を実行することにより，部分反射および全反射のそれぞれの場合について反射パルス波$F_r(\xi_r)$がつぎのように求められる．

$$F_r(\xi_r) = A \frac{w}{w^2 + \xi_r^2} \qquad （部分反射） \qquad (4\cdot36)$$

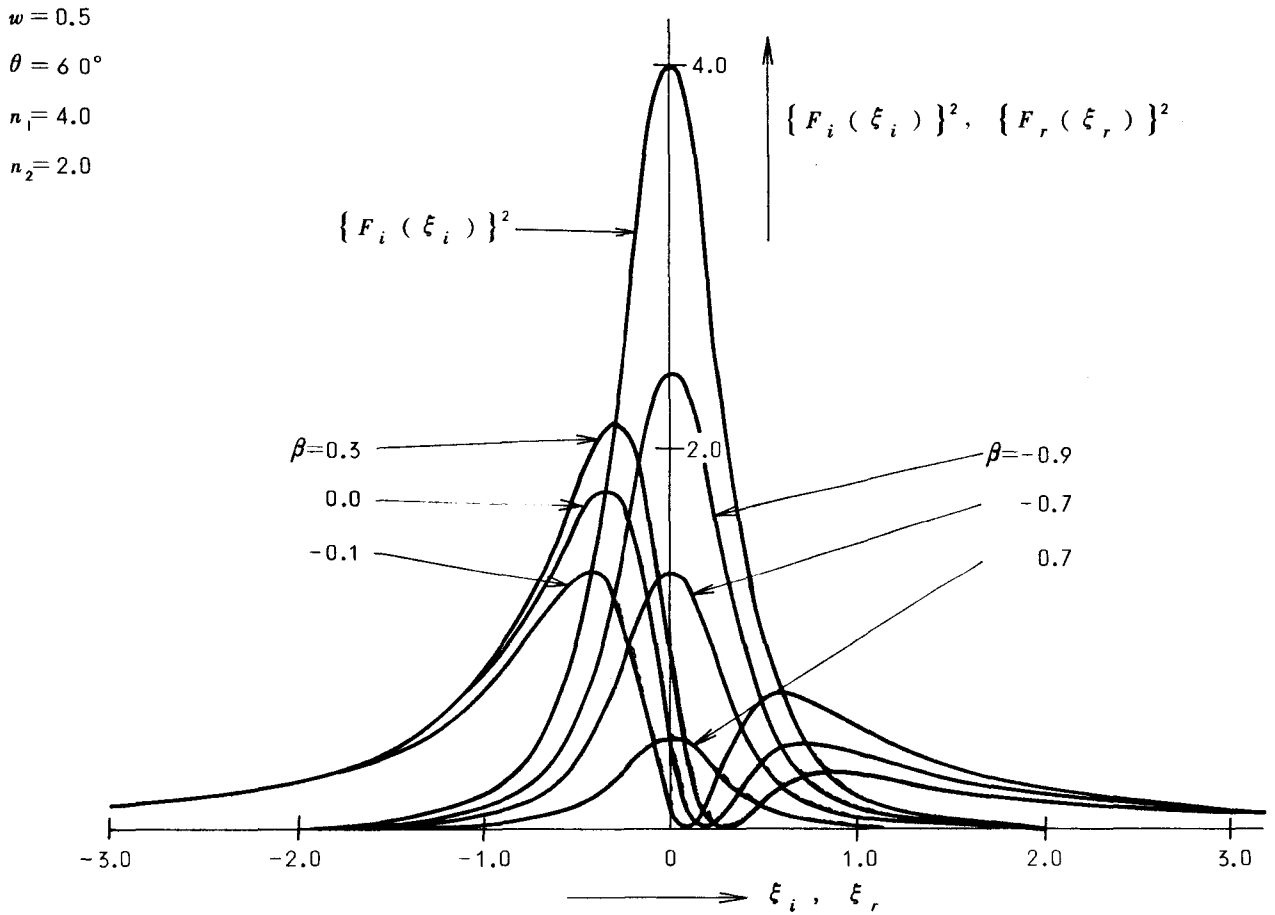



図４．６　反射パルス波の電力波形

$$F_r(\xi_r)=A\frac{w}{w^2+\xi_r^2}+B\frac{\xi_r}{w^2+\xi_r^2}\quad(\text{全反射})\qquad(4\cdot37)$$

上式より反射パルス波形は，部分反射の場合には入射パルス波形と相似であるが，全反射の場合には波形に歪みを受けることがわかる．

図４．６に，媒質の運動速度をパラメータとしたときの反射パルス波の電力波形 $\{F_r(\xi_r)\}^2$ の数値例を示す．図は $n_1=4.0$，$n_2=2.0$，$\theta=60°$，$w=0.5$ の場合であり，$\beta=-0.9$，$-0.7$，$0.7$ の場合は部分反射，また，$\beta=-0.1$，$0$，$0.3$の場合は全反射となる．なお，参考のために入射パルス波の電力波形 $\{F_i(\xi_i)\}^2$ も同時に示されている．

## ４・４　Evanescent Waveと運動誘電体媒質との相互作用[35]

本節では，運動している誘電体媒質の境界面に，全反射によって真空層内に生成されたevanescent waveが入射した場合の反射・透過現象について考察する．

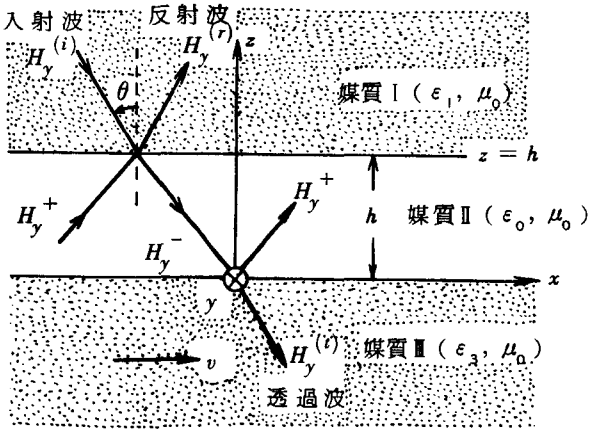



図４・７
座　標　系

図４．７において，媒質Ⅰ，ⅡおよびⅢはそれぞれ半無限誘電体（$\varepsilon_1$, $\mu_0$），厚さ $h$ なる真空層（$\varepsilon_0$, $\mu_0$）および半無限誘電体（$\varepsilon_3$, $\mu_0$）であり，媒質Ⅲは媒

質ⅠおよびⅡに対して境界面に平行に一様な速度$v$で$x$軸方向に運動しているものとする．いま，媒質Ⅰから平面電磁波（ＴＥ波もしくはＴＭ波）が入射するものとすれば，各媒質中を伝搬する波の位相項はそれぞれつぎのように表わされる．

媒質Ⅰ（入射波および反射波）：

$$\exp\{j(\omega t - k_{1x}x \mp k_{1z}z)\} \qquad (4\cdot38)$$

媒質Ⅱ：

$$\exp\{j(\omega t - k_{1x}x \mp k_{2z}z)\} \qquad (4\cdot39)$$

媒質Ⅲ（透過波）：

$$\exp\{j(\omega t - k_{1x}x - k_{3z}z)\} \qquad (4\cdot40)$$

ここで入射波の入射角を$\theta$とすれば，各媒質中の伝搬定数はそれぞれつぎのように書ける．

$$k_{1x} = k_0 n_1 \sin\theta \qquad (4\cdot41)$$

$$k_{1z} = -k_0 n_1 \cos\theta \qquad (4\cdot42)$$

$$k_{2z} = \begin{cases} -k_0\sqrt{1-n_1^2\sin^2\theta} = -k_0\alpha_r \quad (n_1\sin\theta \leqq 1) & (4\cdot43a) \\ +jk_0\sqrt{n_1^2\sin^2\theta - 1} = +jk_0\alpha_i \quad (n_1\sin\theta > 1) & (4\cdot43b) \end{cases}$$

$$k_{3z} = \begin{cases} -k_0\sqrt{P} = -k_0 p \quad (P \geqq 0) & (4\cdot44a) \\ +jk_0\sqrt{-P} = +jk_0 q \quad (P < 0) & (4\cdot44b) \end{cases}$$

ただし

$$P = \gamma^2\{n_3^2(1-n_1\beta\sin\theta)^2 - (n_1\sin\theta - \beta)^2\} \qquad (4\cdot45)$$

ここで式（４・４３ａ），（４・４３ｂ）および式（４・４４ａ），（４・４４ｂ）に

ついて考察しよう．まず，$k_{2z}$ が式（４・４３ａ）で表わされるとき，媒質Ⅱすなわち真空層内を伝わる波は通常の波となり，このとき式（４・４５）で与えられる $P$ は常に正の値をとり，したがって $k_{3z}$ は式（４・４４ａ）で与えられる．つぎに $k_{2z}$ が式（４・４３ｂ）で表わされるとき，すなわち入射角 $\theta$ が条件式

$$n_1^2 \sin^2\theta > 1 \qquad (4\cdot46)$$

を満足するときには真空層内を $z$ の負あるいは正の方向に伝搬する波は，いわゆるevanescent waveとなり，個々の波に伴う電磁エネルギー流の $z$ 方向成分は０となる．ただし，このような全反射の条件式（４・４６）を満足する場合でも，真空層内を $z$ の負および正の方向にそれぞれ伝搬する二つの波の合成電磁界，すなわち全電磁界に伴う電磁エネルギー流の $z$ 方向成分は必ずしも０にはならない*．なぜならば，入射角 $\theta$ と屈折率 $n_1$ とが条件式（４・４６）を満足するとき，媒質Ⅲの運動速度 $\beta$ と屈折率 $n_3$ との値によって $P$ は正または負の値をとり，それに伴って $k_{3z}$ は実数（式（４・４４ａ））あるいは純虚数（式（４・４４ｂ））で与えられることになるからである．

各媒質中の電磁界は媒質Ⅲが静止している場合* と同様にして求められ，反射係数および透過係数はそれぞれつぎのようになる．まず，$n_1 \sin\theta \leqq 1$ のとき

$$R=\frac{\begin{array}{l}2(1-n_1^2\sin^2\theta)(\eta_3^2 n_1\cos\theta-\eta_1^2 p)^2\\ +\xi(1-n_1^2)\{\eta_3^4(1-n_1^2\sin^2\theta)-p^2\}(1-\cos 2k_0\alpha_r h)\end{array}}{\begin{array}{l}2(1-n_1^2\sin^2\theta)(\eta_3^2 n_1\cos\theta+\eta_1^2 p)^2\\ +\xi(1-n_1^2)\{\eta_3^4(1-n_1^2\sin^2\theta)-p^2\}(1-\cos 2k_0\alpha_r h)\end{array}} \qquad (4\cdot47)$$

---

＊　第３章，３・２参照

$$T=\frac{8\eta_1^2\eta_3^2(1-n_1^2\sin^2\theta)n_1 p\cos\theta}{2(1-n_1^2\sin^2\theta)(\eta_3^2 n_1\cos\theta+\eta_1^2 p)^2+\xi(1-n_1^2)\{\eta_3^4(1-n_1^2\sin^2\theta)-p^2\}(1-\cos 2k_0\alpha_r h)} \quad (4\cdot48)$$

ただし

$$\eta_k=\begin{cases}1 & (\text{TE波})\\ n_k\ (k=1,3) & (\text{TM波})\end{cases}$$

$$\xi=\begin{cases}1 & (\text{TE波})\\ n_1^2\{(1+n_1^2)\sin^2\theta-1\} & (\text{TM波})\end{cases}$$

なお，式（4・47），（4・48）において，$h=0$ とおけば両式は媒質Ⅰと Ⅲ とが直接接している場合の表式[28]に一致する．

つぎに，$n_1\sin\theta>1$ のとき，すなわち真空層から運動媒質Ⅰに入ってくる波がevanescent wave のときには $P$ の正，負に伴って $R$ および $T$ はそれぞれつぎのように求められる．まず，$P\geqq 0$ のときには

$$R_{ev}=\frac{\cosh(2\alpha_i k_0 h)+\cos(\phi_{12}-\phi_{23})}{\cosh(2\alpha_i k_0 h)+\cos(\phi_{12}+\phi_{23})} \quad (4\cdot49)$$

$$T_{ev}=\frac{1}{2}\left(\frac{\eta_1}{\eta_3}\right)^2\frac{p}{n_1\cos\theta}\cdot\frac{\tau_{12}^2\tau_{23}^2}{\cosh(2\alpha_i k_0 h)+\cos(\phi_{12}+\phi_{23})} \quad (4\cdot50)$$

そして，$P<0$ のときには

$$R_{ev}=1$$

$$T_{ev}=0$$

ただし

$$\phi_{12}=\tan^{-1}\frac{-2n_1\cos\theta\alpha_i\eta_1^2}{n_1^2\cos^2\theta-(\alpha_i\eta_1^2)^2},\quad \phi_{23}=\tan^{-1}\frac{2\eta_3^2\alpha_i p}{(\alpha_i\eta_3^2)^2-p^2}$$

$$\tau_{12}^{2}=\frac{4\,n_1^{2}\cos^{2}\theta}{n_1^{2}\cos^{2}\theta+(\alpha_i\,\eta_1^{2})^{2}},\qquad \tau_{23}^{2}=\frac{4\,\eta_3^{4}\,\alpha_i^{2}}{p^{2}+(\alpha_i\,\eta_3^{2})^{2}}$$

となる．なお，いずれの場合も反射係数と透過係数の和は常に１となる．

図４．８に，入射波がＴＭ波の場合の，媒質の速度$\beta$に対する透過係数$T$および$T_{ev}$の変化の様子を示す．

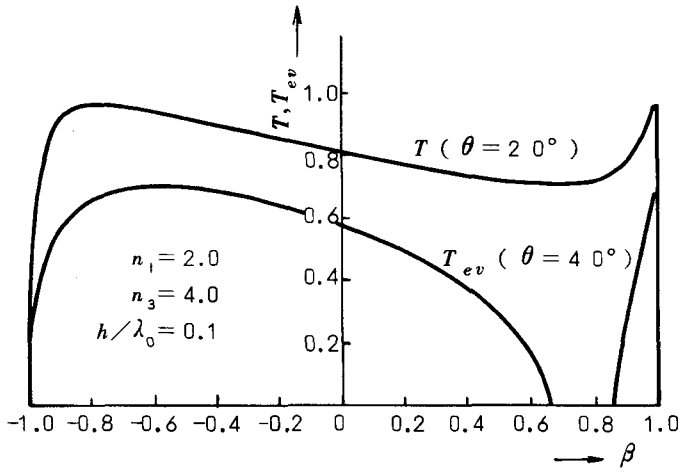



図４．８
運動速度$\beta$に対する$T$，$T_{ev}$の変化

## ４・５　結　　言

本章では，運動している誘電体媒質の境界面に，ビーム波，パルス波およびevanescent waveが入射した場合の反射・透過現象についてそれぞれ考察をおこなった．

まず，ビーム波が境界面において全反射を起こす場合に生じるGoos-Hänchen効果について論じ，媒質の運動が反射ビーム波に与える影響などを明らかにした．ついで，パルス波の反射現象について解析し，反射パルス波形に現われる媒質の運動による効果について考察した．最後に，evanescent waveと運動誘電体媒質との相互作用の問題を取り扱い，真空層の厚さおよび媒質の運動速度が，反射波および透過波に与える影響などを明らかにした．

# 第５章　導電性運動媒質中の電磁波とその励振[41)～44)]

## ５・１　序　　言

本章では，運動している導電性媒質中への波動励振の問題を取り扱い，運動媒質中の波の性質について詳しく論じる．境界のない無限に広がっている導電性運動媒質中を伝搬する平面電磁波の位相速度よりも媒質の運動速度が大きくなるとき波動増幅の可能性があることが報告されている[36),37)]が，本章では，このような波を平面波によって励振され得ることを明らかにする．すなわち，静止している完全誘電体媒質から境界面に平行に運動している導電性誘電体媒質に平面電磁波が入射するとき，媒質の運動速度が媒質中を伝搬する波の位相速度よりも大きくなるときには，導電性運動媒質中に増幅波が励振される可能性があることを示す．ここでは，運動導電性媒質としては，半無限の場合およびslabの場合の二つの場合を取り扱い，入射波はＥ波，すなわち電界が入射面に垂直な波であるとし，運動導電性媒質中の波について，エネルギー関係式[36)-39)]を用いて詳しく考察する．なお，導電性slabの場合については，反射係数，透過係数と媒質の運動速度あるいはその厚さなどとの関係を明らかにする．

さらに，このような現象の応用として，誘導発電機の機構を考え，それから得られる電力について考察する．

## ５・２　エネルギー保存則

Minkowskiの電磁エネルギー・運動量テンソルから導かれるエネルギー保存則は，本章の場合のように電磁界が正弦的に時間変化しているときにはつぎのように表わされる．[36),37)]

$$-\nabla\cdot\langle\mathbf{S}\rangle=\langle W\rangle=\langle A\rangle+\langle Q\rangle \qquad (5\cdot1)$$

ただし，

$$\langle\mathbf{S}\rangle=\frac{1}{2}\,\mathrm{Re}\left[\mathbf{E}\times\mathbf{H}^{*}\right] \qquad (5\cdot2a)$$

$$\langle W \rangle = \frac{1}{2} \mathrm{Re}\left[ \mathbf{J}_f^{*} \cdot \mathbf{E} \right] \qquad (5 \cdot 2\mathrm{b})$$

$$\langle A \rangle = \frac{1}{2} \mathrm{Re}\left[ \mathbf{v} \cdot ( \rho_f \mathbf{E} + \mathbf{J}_f^{*} \times \mathbf{B} ) \right] \qquad (5 \cdot 2\mathrm{c})$$

$$\langle Q \rangle = \frac{1}{2} \mathrm{Re}\left[ \mathbf{J}_c^{*} \cdot \mathbf{E}_{\mathrm{eff}} \right] \qquad (5 \cdot 2\mathrm{d})$$

上式において，$\langle \mathbf{S} \rangle$ は電磁エネルギー流の時間平均値を表わし，$\langle W \rangle$ は電磁界が媒質に対してなす全仕事量の時間平均値を表わす．また，$\langle A \rangle$ は電磁界が媒質に対してなす力学的仕事の時間平均値を表わし，$\langle Q \rangle$ は発生する熱量の時間平均値を表わす．以上の諸量のうち，$\langle W \rangle$ および $\langle A \rangle$ はあとで示すように媒質の運動速度によって正にも負にもなりうるが，$\langle Q \rangle$ は媒質の運動速度のいかんにかかわらず決して負にはならない．

さて，ここで $\langle A \rangle$ なる量について考察する．$\langle A \rangle$ は式（5・2c）からつぎのように表わされる．

$$\langle A \rangle = \mathbf{v} \cdot \left[ \frac{1}{2} \mathrm{Re}\left[ \rho_f \mathbf{E} + \mathbf{J}_f^{*} \times \mathbf{B} \right] \right] \qquad (5 \cdot 3\mathrm{a})$$

$$= v \langle f_{//} \rangle \qquad (5 \cdot 3\mathrm{b})$$

ここで，$\langle f_{//} \rangle$ は Lorentz 力 $\mathbf{f}$ の媒質の運動方向に平行な成分の時間平均値を表わす．上式から $v\langle f_{//} \rangle >> 0$，すなわち Lorentz 力が媒質を加速させる方向に働くときには $\langle A \rangle >> 0$ となり，このとき $\langle A \rangle$ は電磁界が媒質に対してなす力学的仕事の時間平均値を表わすことがわかる．また，$v\langle f_{//} \rangle << 0$，すなわち Lorentz 力が媒質を減速させる方向に働くときには $\langle A \rangle << 0$ となり，このとき $-\langle A \rangle$ なる量は媒質が電磁界に対してなす力学的仕事の時間平均値を表わすものと解釈できる．エネルギー関係式（5・1）から $\langle A \rangle << 0$ で $|\langle A \rangle| >> \langle Q \rangle$ なる場合には $-\nabla \cdot \langle \mathbf{S} \rangle = \langle W \rangle << 0$ と

なり，したがって，波動増幅の現象が起こることになる．このときエネルギー関係式はつぎのように書ける．

$$\langle -\langle W \rangle \rangle = \langle -\langle A \rangle \rangle - \langle Q \rangle \qquad (5\cdot 4)$$

上式の右辺は，媒質が電磁界に対してなす力学的仕事の時間平均値から媒質中に発生する熱量の時間平均値を差し引いた量を表わし，したがって，左辺は媒質が電磁界に対してなす全体の仕事量の時間平均値を表わすことになる．

## 5・3　半無限導電性運動媒質中の波動

### 5・3・1　反射波および透過波

図5．1は平面電磁波によって半無限の導電性運動媒質中に増幅波を励振する場合の構成図である．同図において，$z>0$ の空間は完全誘電体（$\varepsilon_1$, $\mu_0$），$z<0$ の空間は導電性誘電体（$\varepsilon_2$, $\mu_0$, $\sigma$）によってそれぞれ満たされており，導電性誘電体は完全誘電体に対して一定速度 $v$ で $x$ 軸方向に運動しているものとする．いま，完全誘電体側からE波，すなわち電界が入射面に垂直な波が入射するものとすれば，入射波はつぎのように表わされる．

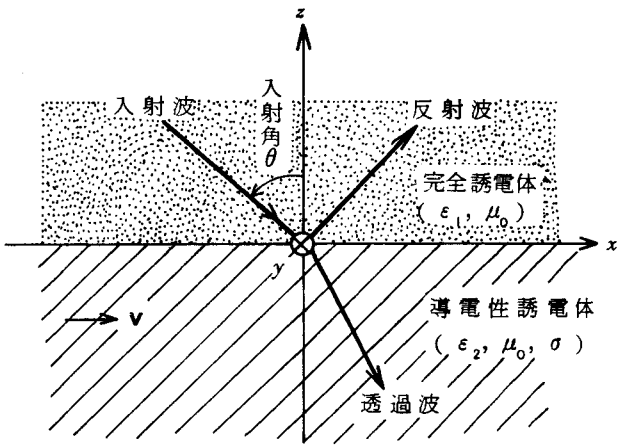



図5．1
半無限の導電性運動媒質

入射波

$$E_y^{(i)} = E_{0i}\, e^{j(\omega t - k_x x - k_z z)} \qquad (5\cdot5)$$

ただし，

$$k_x = k_0 n_1 \sin\theta, \qquad k_z = -k_0 n_1 \cos\theta \qquad (5\cdot6\,a,\,b)$$

$$k_0 = \omega\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}, \qquad n_1 = \sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_0}} \qquad (5\cdot6\,c,\,d)$$

ここで，$E_{0i}$ は場所および時間に無関係な定数であり，また $\theta$ は入射角を表わす．入射波式（５・５）に対して，反射波はつぎのように表わされる．

反射波

$$E_y^{(r)} = E_{0r}\, e^{j(\omega t - k_x x + k_z z)} \qquad (5\cdot7)$$

ただし，振幅 $E_{0r}$ は後で境界条件から決定される．

さて，つぎに導電性運動媒質中の電磁界を求める．入射平面電磁波によって励振される波の電界を

$$E_y^{(t)} = E_{0t}\, e^{j(\omega t - k_x x - k_z^{(t)} z)} \qquad (5\cdot8\,a)$$

とすれば，Maxwell の方程式

$$\nabla\times\mathbf{E} = -\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t} \qquad (5\cdot9\,a)$$

$$\nabla\times\mathbf{H} = \frac{\partial\mathbf{D}}{\partial t} + \mathbf{J}_f \qquad (5\cdot9\,b)$$

$$\nabla\cdot\mathbf{B} = 0 \qquad (5\cdot9\,c)$$

$$\nabla\cdot\mathbf{D} = \rho_f \qquad (5\cdot9\,d)$$

および，構成関係式

$$\mathbf{B}=\mu_0\bar{\alpha}\cdot\mathbf{H}-\Omega\times\mathbf{E} \qquad (5\cdot10a)$$

$$\mathbf{D}=\varepsilon_2\bar{\alpha}\cdot\mathbf{E}+\Omega\times\mathbf{H} \qquad (5\cdot10b)$$

$$\mathbf{J}_f=\gamma\sigma\mathbf{E}+\mathbf{v}\times\mathbf{B} \qquad (5\cdot11a)$$

$$\rho_f=\frac{\mathbf{v}\cdot\mathbf{J}_f}{c^2} \qquad (5\cdot11b)$$

ただし，

$$\left.\begin{aligned}
&\Omega=\frac{(n_2^2-1)\mathbf{v}}{(1-n_2^2\beta^2)c^2}=\frac{(n_2^2-1)\beta}{(1-n_2^2\beta^2)c}\,\mathbf{i}_x=\Omega\,\mathbf{i}_x\\
&\bar{\alpha}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&a&0\\0&0&a\end{bmatrix},\qquad a=\frac{1-\beta^2}{1-n_2^2\beta^2}\\
&\beta=\frac{v}{c},\quad \gamma=\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}},\quad n_2=\sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_0}},\quad c=\frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}}
\end{aligned}\right\} \qquad (5\cdot12)$$

を用いて磁界成分はつぎのように求められる．

$$H_x^{(t)}=-\frac{k_z^{(t)}}{\omega\mu_0}E_{0t}\,e^{j(\omega t-k_x x-k_z^{(t)}z)} \qquad (5\cdot8b)$$

$$H_z^{(t)}=\frac{k_x+\omega\Omega}{\omega\mu_0 a}E_{0t}\,e^{j(\omega t-k_x x-k_z^{(t)}z)} \qquad (5\cdot8c)$$

ただし，式（5・8a）において透過波の伝搬定数の $x$ 方向成分が，境界条件により入射波の伝搬定数の $x$ 方向成分と一致することを用いた．また，$\mathbf{B}$，$\mathbf{D}$，$\mathbf{J}_f$ および $\rho_f$ はそれぞれつぎのように表わされる．

$$\mathbf{B}=-\left[\ \mathbf{i}_x\ \frac{k_z^{(t)}}{\omega}-\mathbf{i}_z\ \frac{k_x}{\omega}\ \right]E_{0t}\ e^{j(\omega t-k_x x-k_z^{(t)}z)} \qquad (5\cdot13a)$$

$$\mathbf{D}=\mathbf{i}_y\left[\ \varepsilon_2 a-\frac{(k_x+\omega\Omega)\Omega}{\omega\mu_0 a}\ \right]E_{0t}\ e^{j(\omega t-k_x x-k_z^{(t)}z)} \qquad (5\cdot13b)$$

$$\mathbf{J}_f=\mathbf{i}_y\,\gamma\sigma\left(1-\frac{v\,k_x}{\omega}\right)E_{0t}\ e^{j(\omega t-k_x x-k_z^{(t)}z)} \qquad (5\cdot14a)$$

$$\rho_f=0 \qquad (5\cdot14b)$$

なお，透過波の伝搬定数の $z$ 方向成分 $k_z^{(t)}$ は，式（5・9b）に式（5・8b），（5・8c）および式（5・13b），（5・14a）を代入することによってつぎのように決定される．

$$(k_z^{(t)})^2=\omega^2\varepsilon_2\mu_0 a-\frac{(k_x+\omega\Omega)^2}{a}-j\omega\mu_0\sigma\gamma\left(1-\frac{v\,k_x}{\omega}\right) \qquad (5\cdot15)$$

したがって，

$$k_z^{(t)}=-k_0(p-jq) \qquad (5\cdot16)$$

とおけば，$p$ および $q$ はそれぞれつぎのように表わされる．

$$p=\left[\frac{P+\sqrt{P^2+Q^2}}{2}\right]^{1/2} \qquad (5\cdot17)$$

$$q=\begin{cases}+\left[\dfrac{-P+\sqrt{P^2+Q^2}}{2}\right]^{1/2}, & (1-n_1\beta\sin\theta\geqq 0) \\ -\left[\dfrac{-P+\sqrt{P^2+Q^2}}{2}\right]^{1/2}, & (1-n_1\beta\sin\theta<0)\end{cases} \qquad (5\cdot18a)\ (5\cdot18b)$$

ただし，

$$P=p^2-q^2=\gamma^2\left[\,n_2^{\,2}(1-n_1\beta\sin\theta)^2-(n_1\sin\theta-\beta)^2\right] \qquad (5\cdot19a)$$

$$Q=2pq=(\gamma n_2^{\,2}/m)(1-n_1\beta\sin\theta) \qquad (5\cdot19b)$$

ここで，$m=(\omega\varepsilon_2/\sigma)$である．なお，上式において

$$p=-\left[\frac{P+\sqrt{P^2+Q^2}}{2}\right]^{1/2}<0$$

を解として採らなかったのは，式（5・22b）で与えられる$<S_z^{(t)}>$が透過波の電磁エネルギー流の時間平均値を表わすためには$<S_z^{(t)}>\leqq 0$でなければならず，したがって$p\geqq 0$でなければならないからである．すなわち，式（5・16）で与えられる$k_z^{(t)}$が透過波の伝搬定数を表わすためには，$p$は媒質の運動速度のいかんにかかわらず負の値をとることは許されず，常に正または0の値をとらねばならないわけである．なお，このように$p$の符号を選んだとき，透過波のPoyntingベクトルの$z$方向成分を与える式(5・22b)から明らかなように，$q<0$の場合，すなわち$1-n_1\beta\sin\theta<0$ の場合にはエネルギー流の大きさがその進行方向に増大することになり，したがって波動増幅の現象が起こることになるが，これに関しては5・3・2においてエネルギー保存則を用いて詳しく検討する．

つぎに，反射波および透過波の振幅を求める．入射波がE波の場合には境界面上において電磁界の接線成分は連続となり，[40] したがって反射波および透過波の振幅は式（5・5a，b），（5・7a，b）および（5・8a，b）を用いてそれぞれつぎのように決定される．

$$E_{0r}=\frac{k_z-k_z^{(t)}}{k_z+k_z^{(t)}}E_{0i} \qquad (5\cdot20a)$$

$$E_{0t}=\frac{2k_z}{k_z+k_z^{(t)}}E_{0i} \qquad (5\cdot20b)$$

上式に式（５・６ｂ）および式（５・１６）を代入することにより次式を得る．

$$E_{0r}=\frac{(n_1\cos\theta-p)+jq}{(n_1\cos\theta+p)-jq}E_{0i} \qquad (5\cdot21a)$$

$$E_{0t}=\frac{2n_1\cos\theta}{(n_1\cos\theta+p)-jq}E_{0i} \qquad (5\cdot21b)$$

以上で，反射波および透過波に関する電磁界量はすべて決定された．

５・３・２　エネルギー関係式

ここでは５・２で導かれたエネルギー関係式を用いて，導電性誘電体が波の位相速度より大きい速度で運動するときには，透過波は増幅波となることを示す．

まず，式（５・２ａ）で定義されるPoyntingベクトルは５・３・１の結果を用いてつぎのように求められる．

$$\langle S_x^{(t)}\rangle=2\sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}}\frac{\gamma^2n_1^2\cos^2\theta\left[(n_1\sin\theta-\beta)+\beta n_2^2(1-n_1\beta\sin\theta)\right]}{(n_1\cos\theta+p)^2+q^2}\cdot|E_{0i}|^2e^{2k_0qz} \qquad (5\cdot22a)$$

$$\langle S_z^{(t)}\rangle=-2\sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}}\frac{pn_1^2\cos^2\theta}{(n_1\cos\theta+p)^2+q^2}|E_{0i}|^2e^{2k_0qz} \qquad (5\cdot22b)$$

つぎに，式（５・２ｂ）～（５・２ｄ）で定義される$\langle W\rangle$，$\langle A\rangle$および$\langle Q\rangle$なる量はそれぞれつぎのように求められる．

$$\langle W\rangle=\frac{2\gamma\sigma n_1^2\cos^2\theta(1-n_1\beta\sin\theta)}{(n_1\cos\theta+p)^2+q^2}|E_{0i}|^2e^{2k_0qz} \qquad (5\cdot23a)$$

$$<A>=\frac{2\gamma\sigma\beta n_1^3\sin\theta\cos^2\theta(1-n_1\beta\sin\theta)}{(n_1\cos\theta+p)^2+q^2}\,|E_{0i}|^2e^{2k_0qz} \qquad (5\cdot24a)$$

$$<Q>=\frac{2\gamma\sigma n_1^2\cos^2\theta(1-n_1\beta\sin\theta)^2}{(n_1\cos\theta+p)^2+q^2}\,|E_{0i}|^2e^{2k_0qz} \qquad (5\cdot25a)$$

あるいは，

$$<W>=\frac{1}{2}\gamma\sigma\left(1-\frac{v}{v_p}\right)|\mathbf{E}^{(t)}|^2 \qquad (5\cdot23a)$$

$$<A>=\frac{1}{2}\gamma\sigma\left(1-\frac{v}{v_p}\right)\left(\frac{v}{v_p}\right)|\mathbf{E}^{(t)}|^2 \qquad (5\cdot24b)$$

$$<Q>=\frac{1}{2}\gamma\sigma\left(1-\frac{v}{v_p}\right)^2|\mathbf{E}^{(t)}|^2 \qquad (5\cdot25b)$$

ただし，$v_p$ は

$$v_p=\frac{\omega}{k_x}=\frac{\omega}{k_0n_1\sin\theta} \qquad (5\cdot26)$$

で定義される量であり，透過波の位相速度の $x$ 方向成分，すなわち媒質の運動方向に平行な成分を表わす．上式から $v_p$ は，文献(37)および(39)の場合とは違って，運動媒質自身の構成定数や媒質の運動速度とは無関係に外部条件により定まることがわかる．なお，文献(37)および(39)の場合の増幅波は波の増幅される方向と，その方向における位相速度の向きが反対方向である；いわゆるBackward waveであるが，本章の場合には，式(5・16)，(5・17)および式(5・22b)から明らかなように，両者の方向が一致するForward wave となることに注意する必要がある．表5・1は($v/v_p$)による$<W>$，$<A>$および$<Q>$ の符号の変化を示したものであり，表から，

$n_1\beta\sin\theta>1$，したがって$v>v_p$のときには$<W>$が負となり波動増幅現象が起こる可能性があることがわかる．なお，このとき式（５・２２）からわかるように，

$$\nabla\cdot<\mathbf{S}^{(t)}>=\frac{\partial<S_z^{(t)}>}{\partial z}>0 \qquad (5\cdot27)$$

となり，したがって，透過波は媒質の運動に垂直な方向に増幅され，平行な方向には増幅されないことがわかる．透過波が境界面に平行な方向には増幅されないことは，透過波の伝搬定数の境界面に平行な成分が境界条件により実数量として定まることからも当然の結果である．

以上の議論から，平面電磁波によって導電性運動媒質中に増幅波を励振できることが明らかとなった．

表５・１　$<W>$，$<A>$および$<Q>$の符号

| | $\theta<0$ | $0<n_1\beta\sin\theta<1$ | $n_1\beta\sin\theta>1$ |
|---|---|---|---|
| | $\frac{v}{v_p}<0$ | $0<\frac{v}{v_p}<1$ | $\frac{v}{v_p}>1$ |
| $<W>$ | 正 | 正 | 負 |
| $<A>$ | 負 | 正 | 負 |
| $<Q>$ | 正 | 正 | 正 |
| | 減　衰　波 | 減　衰　波 | 増　幅　波 |

## ５・４　導電性運動slab 中の波動

### ５・４・１　反射係数と透過係数

図５．２に示すように，$z>h$の空間は（$\varepsilon_1$，$\mu_0$）なる完全誘電体（媒質Ⅰ）によって，$0<z<h$なる空間は（$\varepsilon_2$，$\mu_0$，$\sigma$）なる導電性誘電体（媒質Ⅱ）

によって，また$z<0$なる空間は（$\varepsilon_3$，$\mu_0$）なる完全誘電体（媒質Ⅲ）によってそれぞれ満たされており，媒質Ⅱは媒質ⅠおよびⅢに対して一様なる速度$v$で$x$軸方向に運動しているものとする．いま，媒質ⅠからE波が入射するものとすれば，媒質Ⅰ，ⅡおよびⅢ内の波は前節の結果を用いてそれぞれつぎのように表される．

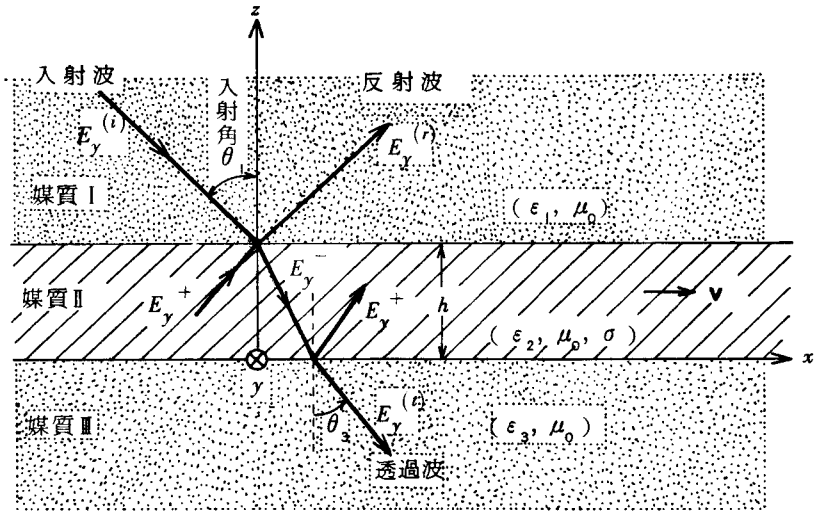



図５．２　導電性運動 slab 中の波

媒質Ⅰ：

入射波

$$E_y^{(i)} = E_{0i}\, e^{j(\omega t - k_{1x}x - k_{1z}z)} \qquad (5\cdot 28)$$

反射波

$$E_y^{(r)} = E_{0r}\, e^{j(\omega t - k_{1x}x + k_{1z}z)} \qquad (5\cdot 29)$$

媒質Ⅱ：

$$E_y^{-} = E_0^{-}\, e^{j(\omega t - k_{1x}x - k_{2z}z)} \qquad (5\cdot 30)$$

$$E_y^{+} = E_0^{+}\, e^{j(\omega t - k_{1x}x + k_{2z}z)} \qquad (5\cdot31)$$

媒質Ⅱ：

透過波

$$E_y^{(t)} = E_{0t}\, e^{j(\omega t - k_{1x}x - k_{3z}z)} \qquad (5\cdot32)$$

ただし，式（５・３０），（５・３１）における上部の添字－および＋は，それぞれ運動媒質中を $z$ の負および正の方向に伝搬する波（５・４・２参照）の電磁界量を表わす．また，伝搬定数 $k_{1x}$ および $k_{1z}$ は入射角 $\theta_1$ を用いてそれぞれつぎのように表わされる．

$$k_{1x} = k_0 n_1 \sin\theta_1 \qquad (5\cdot33a)$$

$$k_{1z} = -k_0 n_1 \cos\theta_1 \qquad (5\cdot33b)$$

したがって，$k_{2z}$ は前節と同様につぎのように求められる．

$$k_{2z} = -k_0(p - jq) \qquad (5\cdot34)$$

ここで，

$$p = \left[\frac{P + \sqrt{P^2+Q^2}}{2}\right]^{1/2} \qquad (5\cdot35)$$

$$q = \begin{cases} +\left[\dfrac{-P + \sqrt{P^2+Q^2}}{2}\right]^{1/2}, & (n_1\beta\sin\theta_1 \leqq 1) \qquad (5\cdot36a) \\ -\left[\dfrac{-P + \sqrt{P^2+Q^2}}{2}\right]^{1/2}, & (n_1\beta\sin\theta_1 > 1) \qquad (5\cdot36b) \end{cases}$$

ただし，

$$P = p^2 - q^2 = \gamma^2\left[n_2^2(1 - n_1\beta\sin\theta_1)^2 - (n_1\sin\theta_1 - \beta)^2\right] \qquad (5\cdot37a)$$

$$Q=2pq=(\gamma n_2^2/m)(1-n_1\beta\sin\theta_1) \qquad (5\cdot37b)$$

ここで，$m=(\omega\varepsilon_2/\sigma)$ である．さらに，$k_{3z}$ はつぎのように求められる．

$$k_{3z}=\begin{cases} -k_0\sqrt{n_3^2-n_1^2\sin^2\theta_1}=-k_0n_3\cos\theta_3, & (n_3^2>n_1^2\sin^2\theta_1) \qquad (5\cdot38a) \\ jk_0\sqrt{n_1^2\sin^2\theta_1-n_3^2}, & (n_3^2<n_1^2\sin^2\theta_1) \qquad (5\cdot38b) \end{cases}$$

さて，入射波がE波の場合には，静止媒質Ⅰと運動媒質Ⅱ，および運動媒質Ⅱと静止媒質Ⅲの境界における電磁界の境界条件は，媒質Ⅰ，ⅡおよびⅢがともに静止している場合の境界条件とまったく同様になり，したがって三者がともに静止している場合の理論をそのまま用いて，反射係数 $R$ および透過係数 $T$ はそれぞれつぎのように求められる．ただし，反射係数 $R$ および透過係数 $T$ は，それぞれ反射波と入射波，および透過波と入射波とのPoynting ベクトルの時間平均値の境界面に垂直な成分の比で定義するものとする．まず，$n_3^2>n_1^2\sin^2\theta_1$，すなわち $k_{3z}$ が式（5・38a）で表わされるときには，

$$R=\frac{R_{12}e^{2k_0qh}+R_{23}e^{-2k_0qh}+2\sqrt{R_{12}R_{23}}\cos\{\phi_{23}-\phi_{12}+2k_0ph\}}{e^{2k_0qh}+R_{12}R_{23}e^{-2k_0qh}+2\sqrt{R_{12}R_{23}}\cos\{\phi_{12}+\phi_{23}+2k_0ph\}} \qquad (5\cdot39)$$

$$T=\frac{T_{12}T_{23}}{e^{2k_0qh}+R_{12}R_{23}e^{-2k_0qh}+2\sqrt{R_{12}R_{23}}\cos\{\phi_{12}+\phi_{23}+2k_0ph\}} \qquad (5\cdot40)$$

ただし，

$$R_{12}=\frac{(p-n_1\cos\theta_1)^2+q^2}{(p+n_1\cos\theta_1)^2+q^2} \qquad (5\cdot41a)$$

$$R_{23}=\frac{(p-n_3\cos\theta_3)^2+q^2}{(p+n_3\cos\theta_3)^2+q^2} \qquad (5\cdot41b)$$

$$T_{12}=\frac{4pn_1\cos\theta_1}{(p+n_1\cos\theta_1)^2+q^2} \qquad (5\cdot42a)$$

$$T_{23}=\frac{4(p^2+q^2)n_3\cos\theta_3}{p\left[(p+n_3\cos\theta_3)^2+q^2\right]} \qquad (5\cdot42b)$$

および

$$\tan\phi_{12}=\frac{-2qn_1\cos\theta_1}{n_1^2\cos^2\theta_1-p^2-q^2} \qquad (5\cdot43a)$$

$$\tan\phi_{23}=\frac{2qn_3\cos\theta_3}{p^2+q^2-n_3^2\cos^2\theta_3} \qquad (5\cdot43b)$$

となる．つぎに，$n_3^2<n_1^2\sin^2\theta_1$のとき，すなわち$k_{3z}$が式（5・38b）で表わされるときには，反射係数$R$は（5・41a），（5・43a）および$R_{23}$，$\phi_{23}$に関するつぎの表示式

$$R_{23}=\frac{p^2+(q-\sqrt{n_1^2\sin^2\theta_1-n_3^2})^2}{p^2+(q+\sqrt{n_1^2\sin^2\theta_1-n_3^2})^2} \qquad (5\cdot44)$$

$$\tan\phi_{23}=\frac{-2p\sqrt{n_1^2\sin^2\theta_1-n_3^2}}{p^2+q^2-(n_1^2\sin^2\theta_1-n_3^2)} \qquad (5\cdot45)$$

を式（5・39）に代入することによって求められる．なお，透過係数$T$は$k_{3z}$が純虚数であるため0，すなわち

$$T=0,\quad (n_3^2<n_1^2\sin^2\theta_1) \qquad (5\cdot46)$$

となる．したがって，このとき媒質Ⅲへのエネルギー流はない．

5・4・2　エネルギー関係式

ここでは，媒質Ⅱ，すなわち運動している導電性誘電体媒質中を伝搬する波のエネルギー関係式について検討する．

まず，式（5・2a）で定義されるPoynting ベクトルは5・4・1の結果を用いてつぎのように求められる．

$$<S_x^->=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}}\gamma^2\{(n_1\sin\theta_1-\beta)+n_2^2\beta(1-n_1\beta\sin\theta_1)\}|E_0^-|^2e^{2k_0qz} \quad (5\cdot47a)$$

$$<S_z^->=-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}}p|E_0^-|^2e^{2k_0qz} \quad (5\cdot47b)$$

および

$$<S_x^+>=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}}\gamma^2\{(n_1\sin\theta_1-\beta)+n_2^2\beta(1-n_1\beta\sin\theta_1)\}|E_0^+|^2e^{-2k_0qz} \quad (5\cdot48a)$$

$$<S_z^+>=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}}p|E_0^+|^2e^{-2k_0qz} \quad (5\cdot48b)$$

式（5・47b）および式（5・48b）から，$<S_z^->$および$<S_z^+>$はそれぞれ$z$の負および正の方向に伝搬するエネルギー流を表わすことがわかる．つぎに，式（5・2b）～（5・2d）で定義される$<W>$，$<A>$および$<Q>$なる量は5・4・1の結果を用いてそれぞれつぎのように求められる．

$$<W^\pm>=\frac{1}{2}\gamma\sigma(1-n_1\beta\sin\theta_1)|E_0^\pm|^2e^{\mp2k_0qz} \quad (5\cdot49a)$$

$$<A^\pm>=\frac{1}{2}\gamma\sigma(1-n_1\beta\sin\theta_1)n_1\beta\sin\theta_1|E_0^\pm|^2e^{\mp2k_0qz} \quad (5\cdot50a)$$

$$<Q^{\pm}>=\frac{1}{2}\gamma\sigma(1-n_1\beta\sin\theta_1)^2|E_0^{\pm}|^2e^{\mp 2k_0qz} \qquad (5\cdot51a)$$

あるいは

$$<W^{\pm}>=\frac{1}{2}\gamma\sigma\left(1-\frac{v}{v_p}\right)|\mathbf{E}^{\pm}|^2 \qquad (5\cdot49b)$$

$$<A^{\pm}>=\frac{1}{2}\gamma\sigma\left(1-\frac{v}{v_p}\right)\left(\frac{v}{v_p}\right)|\mathbf{E}^{\pm}|^2 \qquad (5\cdot50b)$$

$$<Q^{\pm}>=\frac{1}{2}\gamma\sigma\left(1-\frac{v}{v_p}\right)^2|\mathbf{E}^{\pm}|^2 \qquad (5\cdot51b)$$

ただし，$v_p$ は

$$v_p=\frac{\omega}{k_{1x}}=\frac{\omega}{k_0n_1\sin\theta_1} \qquad (5\cdot52)$$

で定義される量であり，媒質Ⅱの中の波の位相速度の $x$ 方向成分を表わす．上式の結果から，半無限の導電性運動媒質の場合と同様に $v>v_p$ のときには $<W^{\pm}>$ が負となり，波動増幅現象が起こることがわかる．なお，このとき式（5・47a）および式（5・47b）からわかるように

$$\nabla\cdot<\mathbf{S}^->=\frac{\partial<S_z^-}{\partial z}>0 \qquad (5\cdot53a)$$

$$\nabla\cdot<\mathbf{S}^+>=\frac{\partial<S_z^+>}{\partial z}>0 \qquad (5\cdot53b)$$

となり，したがって添字－および＋をもつ波はそれぞれ $z$ の負および正の方向に増幅されることがわかる．

5・4・3　検　　討

反射係数と透過係数との和 $R+T$ の数値計算例を図5．3および図5．4

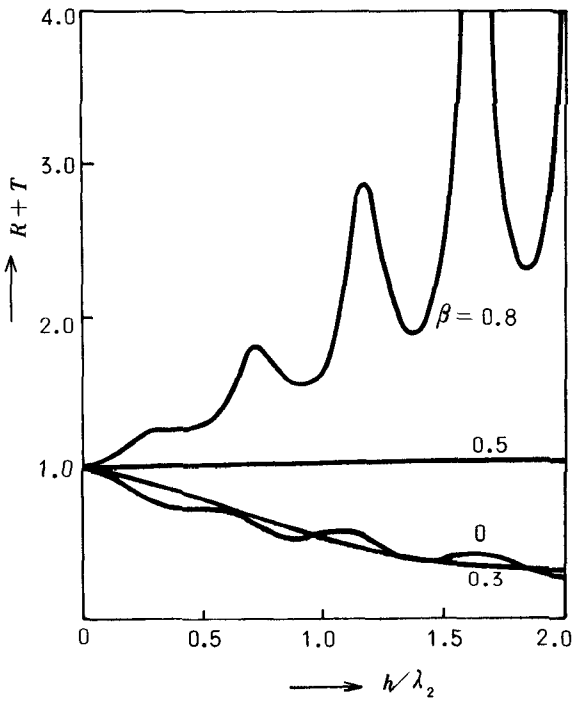



図５・３　正規化されたslabの厚さ $h/\lambda_2$ に対する $R+T$ の変化

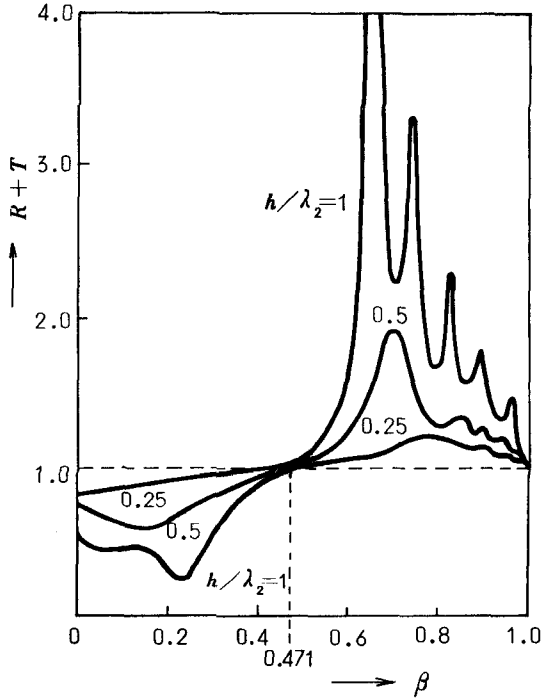



図５・４　媒質の運動速度 $\beta$ に対する $R+T$ の変化

に示す．図はいづれも $n_1=3$，$n_2=5$，$n_3=9$，$m=10$，$\theta_1=45°$ の場合であり，したがって波動増幅領域となる速度は $n_1\beta\sin\theta_1>1$ より

$$\beta>\frac{\sqrt{2}}{3}\fallingdotseq 0.47$$

で与えられる．

図５．３は媒質の運度速度 $\beta$ をパラメータとしたときのslabの厚さ $h/\lambda_2$ に対する $R+T$ の変化を示し，図５．４はslabの厚さをパラメータとしたときの，媒質の速度 $\beta$ に対する $R+T$ の変化を示している．両図から

$$R+T\begin{cases}<1 & (n_1\beta\sin\theta_1<1)\\ =1 & (n_1\beta\sin\theta_1=1)\\ >1 & (n_1\beta\sin\theta_1>1)\end{cases}$$

の関係が成り立っていることがわかる．

## ５・５　発電機構への応用[43),(44)]

前節までには，平面波によって導電性運動媒質中に増幅波が励振され得ることを明らかにしたが，本節ではこの現象の応用として，図５・５に示すような機構を考え，進行波電流によって増幅波を励振し，その電気的出力について考察する．

$z=h$ および $z=-h$ に存在する導体板面上にそれぞれ

$$\mathbf{I}_e=\pm\mathbf{i}_y\,I_0e^{j(\omega t-k_ex)} \qquad (5\cdot54)$$

なる進行波電流を流すものとすれば，各媒質中の波は前節の結果と同様に取り扱うことができる．ここで $k_e$ は，$x$ 方向に進行する面電流の伝搬定数を表わす．

前節で求めたエネルギー関係を表わす $\langle W\rangle$，$\langle A\rangle$ および $\langle Q\rangle$ なる量はそれぞれ次のように求められる．

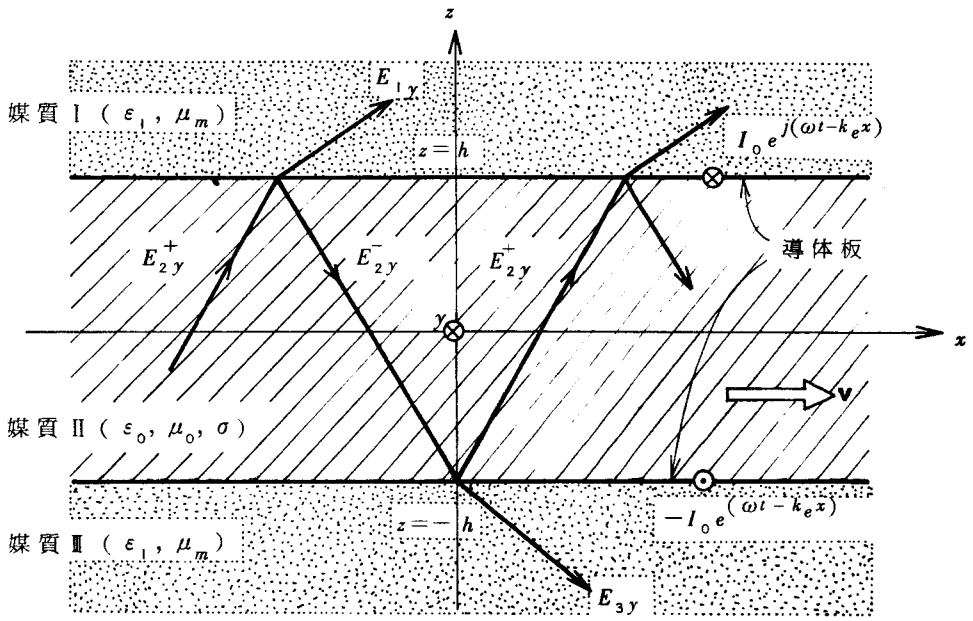



図５．５　発電機の機構

$$\langle W\rangle=\gamma\sigma\left(1-\frac{v}{v_{pe}}\right)|E_0^-|^2\left[\cosh(2k_0qz)-\cos(2k_0pz)\right] \qquad (5\cdot55a)$$

$$\langle A\rangle=\gamma\sigma\left(1-\frac{v}{v_{pe}}\right)\left(\frac{v}{v_{pe}}\right)|E_0^-|^2\left[\cosh(2k_0qz)-\cos(2k_0pz)\right] \qquad (5\cdot55b)$$

$$\langle Q\rangle=\gamma\sigma\left(1-\frac{v}{v_{pe}}\right)^2|E_0^-|^2\left[\cosh(2k_0qz)-\cos(2k_0pz)\right] \qquad (5\cdot55c)$$

上式において，$v_{pe}$ は進行波電流の位相速度を表わし，$p$ および $q$ なる量

は前節の式（５・３５）～（５・３７）において，$n_1 \sin\theta_1$なる量を$n_e$と置き替えることによって求められる．ここで$n_e = c/v_{pe}$である．

以上のことから，上式は前節の式（５・４９ｂ）～（５・５１ｂ）と全く同様な形になっていることがわかる．したがって$v > v_{pe}$となる場合には，導電性運動媒質中に増幅波が励振される．

つぎに，図５．５の機構における力学的入力および電気的出力について考察する．

導体板にはさまれた，$x$および$y$方向に単位長さの体積$V$を考える．$-\langle A \rangle$なる量は媒質が電磁場になす力学的仕事を表わしているから，体積$V$における力学的入力$P_{in}$は

$$P_{in} = \int_0^1 \int_0^1 dx\,dy \int_{-h}^{h} (-\langle A \rangle)\,dz$$

$$= -2\sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}} \left(\frac{v}{v_{pe}}\right) |E_0^-|^2 \{ p \sinh(2k_0 q h) - q \sin(2k_0 p h) \} \qquad (5\cdot56)$$

と表わされる．また，電気的出力$P_{out}$は同様にして

$$P_{out} = \int_0^1 \int_0^1 dx\,dy \int_{-h}^{h} (-\langle W \rangle)\,dz$$

$$= -2\sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}} |E_0^-|^2 \{ p \sinh(2k_0 q h) - q \sin(2k_0 p h) \}$$

となるが，この量が導体板につないだ負荷から取り出せる電力に等しいことを示すことができる．(52)

図５．６に電気的出力$P_{outN}$の数値例を示す．ここで$P_{outN}$は式（５・５７）を進行波電流の振幅で規格化したものである．図では励振進行波電流の規格化された位相速度$\beta_{pe} = v_{pe}/c$をパラメータとし，媒質の運動速度に対する

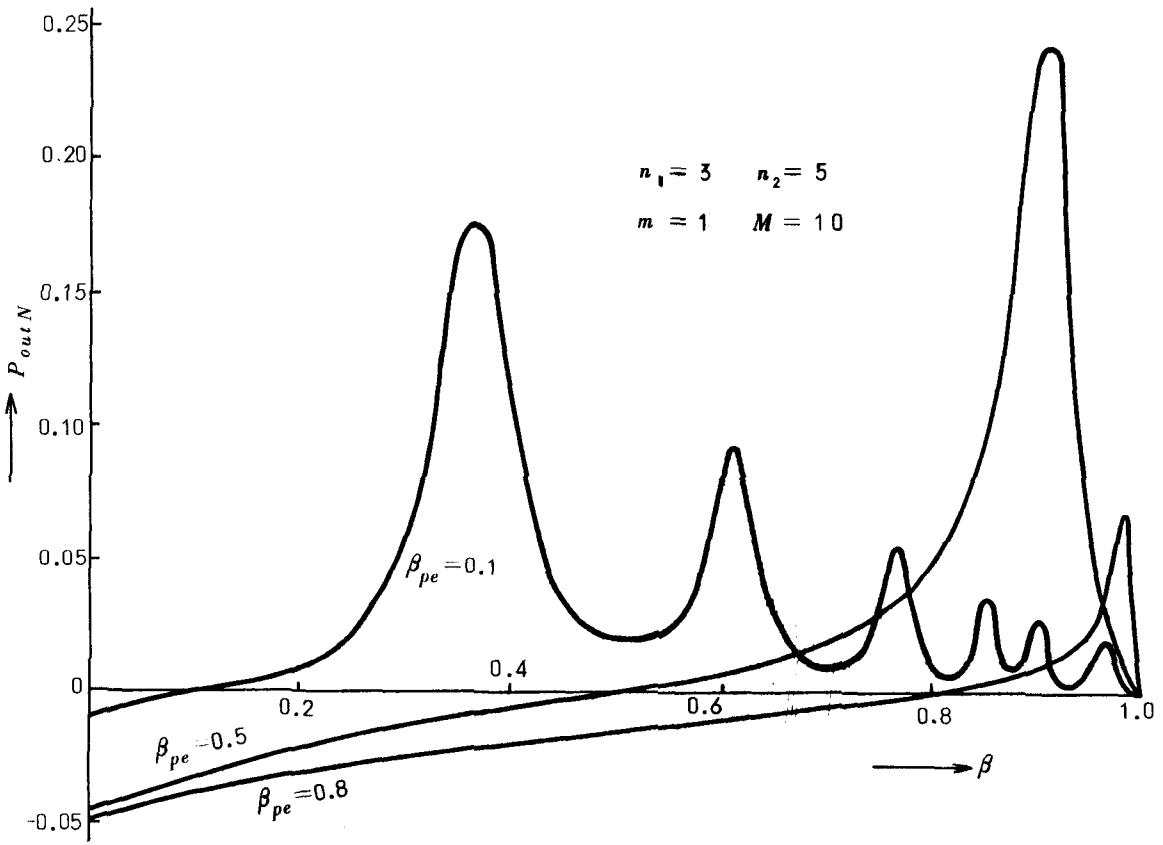



図５・６　$\beta$に対する$P_{outN}$の変化（$d/\lambda_2 = 0.25$）

$P_{outN}$ の変化を示している．ただし $M=\sqrt{\mu_m/\mu_0}$ である．

## 5・6 結　　言

静止している完全誘電体媒質から境界面に平行に運動している導電性誘電体媒質に平面電磁波が入射するとき，媒質の運動速度が媒質中を伝搬する波の位相速度よりも大きくなるときには，導電性運動媒質中に増幅波が励振されることを示し，この現象をMinkowskiの電磁エネルギー・運動量テンソルから導かれたエネルギー関係式をもとにして詳しく考察した．ただし，本章においては導電性運動媒質が半無限の場合およびslabの場合の二つの場合を取り扱い，また入射平面電磁波はE波，すなわち電界が入射面に垂直な波であると仮定している．なお，導電性誘電体slabの場合については，数値計算例をあげて詳しく検討し，反射係数，透過係数と媒質の運動速度あるいはslabの厚さなどとの関係などを明らかにした．

また，このような現象の応用として発電機の機構について考察し，その電気的出力と媒質の運動速度との関係などを明らかにした．

なお，5・3節で取り扱った，半無限運動媒質中の波の伝搬定数については，その符号の選び方に未だ議論が残る[53],[54]が，5・4および5・5節において考察した運動slab媒質の場合については，伝搬定数の符号の選び方によらずに各媒質中の波を決定することができ，したがって，本章において議論したように静止媒質中に増幅された電磁エネルギーを取り出すことができる[44]．

# 第6章　結　　論

本章では本研究の成果を総括して述べる．著者は，本論文において誘電体媒質と電磁波との相互作用に関する基本的な問題，すなわち導電性媒質の境界面における平面磁波の反射と透過，全反射波による透電体媒質中への波動励振，および運動誘電体媒質の境界面における反射と透過，ならびに導電性運動媒質中への波動励振についてそれぞれ考察し，従来知られていなかった種々の興味ある現象が現われることを明らかにした．

第2章では，二つの異種導電性媒質の境界面における反射・透過の問題について，入射波が一様でない場合を含めて一般的に取り扱い，一般化されたSnellの法則，伝搬定数の満すべき条件，およびZenneck の表面波が励振され得るための条件などを明らかにした．

第3章では，全反射現象を利用した誘電体媒質への波動励振，特に誘電体線路の励振について考察し，線路中の電磁エネルギー流を最大にするためにこのような系の構成定数が満足すべき条件を示し，表面波固有モードとの関係などを明らかにした．

第4章では，運動している誘電体媒質と電磁波との相互作用の問題について論じ，運動媒質の境界面に，ビーム波，パルス波および全反射波が入射する問題のそれぞれの場合について解析し，媒質の運動がこれらの問題に与える影響などについて考察した．

第5章では，運動している導電性誘電体媒質と電磁波との相互作用の問題を取り扱い，適当な条件のもとでは導電性運動媒質中に増幅波が励振される可能性があることを示し，このような系のエネルギー関係，および反射係数・透過係数と媒質の運動速度との関係などを明らかにした．

以上，本研究で得られた成果が電磁界理論ならびに電磁波工学の発展に多少なりとも貢献し得るならば，著者の最も幸いとするところである．

# 謝　　辞

本研究を行なうに際し，終始御懇切な御指導，御激励をいただいた大阪大学工学部熊谷信昭教授，ならびに種々有益な御教示，御助言をいただいた大阪大学工学部板倉清保教授に衷心より感謝の意を表わす．

大学院在学中には，通信工学一般に関して御指導，御教示をいただいた大阪大学工学部青柳健次名誉教授，笠原芳郎名誉教授，滑川敏彦教授，手塚慶一教授，中西義郎教授ならびに松原正則助教授に深謝する．

本研究遂行にあたって，直接御指導いただき，また種々有益な御討論をいただいた大阪大学工学部助手藤岡　弘博士（現在，電子ビーム研究施設）に深謝する．

また，本研究に関して御協力いただいた大阪大学大学院鈴木俊雄，安川交二の両氏に深謝するとともに，有益な御討論をいただいた大阪大学工学部助手塩沢俊之博士および森田長吉氏ならびに小山正樹博士（現在，電々公社横須賀電気通信研究所），間　剛博士（日立製作所横浜研究所），小嶋敏孝博士（現在，大阪大学工学部助手）および中川紀美雄氏（現在，岡山理科大学）の諸氏に深謝する．

さらに，日頃御討論いただいた大阪大学大学院青海恵之氏，田中嘉津夫氏をはじめとする大阪大学工学部通信工学教室電磁界理論研究グループの諸兄に厚く御礼を申し上げる．

# 文　　献


(1) 小川英一，藤岡　弘：“導電性静止媒質の境界面における平面電磁波の反射・透過に関する一般解”，信学論(B)，**55－B**，11，p.610 （昭47－11）．

(2) 藤岡　弘，小川英一：“導電性静止媒質の境界面における平面電磁波の反射・透過に関する一般解”，信学会，アンテナ・伝搬研資，**AP70－11** （1970－06）．

(3) 例えば，J.A.Stratton：Electromagnetic theory，Secs. 9.4～9.12，McGraw Hill，New York（1941）．

(4) R.Adler，L.J.Chu and R.M.Fano：Electromagnetic energy transmission and radiation. Chap. 8，John Wiley & Sons，New York（1960）．

(5) J.M.Stone：Radiation and optics，Chap. 6，McGraw Hill，New York（1963）．

(6) 牧本利夫，末田　正：“Brewster角を利用したミリ波プリズム形方向性結合器”，輻射科学研資　（昭38－02）．

(7) 末田　正，熊谷信昭，倉薗貞夫：“広帯域準光学プリズム回路素子”，信学誌，**49**，p.457 （昭41－03）．

(8) P.K.Tien，R.Ulrich and R.J.Martin：“Modes of propagation light waves in thin diposited semiconductor film”，Appl. Phys. Letters，**14**，9，p.291（1969）．

(9) R.Ulrich：“Theory of the prism-film coupler by plane-wave analysis”，J.Opt. Soc.Am.，**60**，10，p.1337 （1970）．

(10) P.K.Tien and R.Ulrich：“Theory of prism-film coupler and thin-film light guides”，J.Opt. Soc. Am.，**60**，10，p.1325 （1970）．

(11) J.E.Midwinter：“Evanscent field coupling into a

thin-film waveguide", IEEE Trans. QE, **QE-6**, 10, p.583 (1970).

(12) L.Bergstein and C.Shulman : "The frustrated total reflection filter", Appl. Opt., **5**, 1, p.9 (1966).

(13) N.S.Kapany and J.J.Burke : Optical waveguides, Chap. 3, Academic Press, New York (1972).

(14) 藤岡 弘, 小川英一, 安川交二, 熊谷信昭 : "平面電磁波の全反射現象を利用した誘電体媒質への励振", 信学論(B), **55-B**, 3, p.73 (昭47-03).

(15) 藤岡 弘, 小川英一 : "全反射現象に関する一考察", 輻射科学研資 (1970-12).

(16) 藤岡 弘, 小川英一, 安川交二, 熊谷信昭 : "全反射現象に関する一考察Ⅱ(固有モードの伝搬)", 輻射科学研資 (1971-02).

(17) J.H.Chisholm and J.C.James : "Radar evidence of solar wind and coronal mass motions", Astrophys. J., **140**, p.377 (July 1964).

(18) W.C.Erickson : "The radio-wave scattering properties of the solar corona", Astrophys. J., **139**, p.1290 (May 1964).

(19) Special Issue on MHD Power Generation, Proc. IEEE, **56** (Sept. 1968).

(20) H.Seifert, Ed. : Space Technology, John Wiley & Sons, New York (1959).

(21) A.Sommerfeld : Electrodynamics, Sec. 34, Academic Press, New York (1964).

(22) C.Møller : The theory of relativity, Chap.7, Oxford University Press, London (1952).

(23) C.T.Tai : "A study of electrodynamics of moving media", Proc. IEEE, **5**, p.685 (June 1964).

(24) S.N.Stolyarov : "Reflection and refraction of electromagnetic wave at a moving boundary", Soviet Phys. — Technical Phys., **8**, p.418 (Nov. 1963).

(25) C.T.Tai : "Reflection and refraction of plane electromagnetic wave at the boundary of a semi - infinite moving medium", paper presented at URSI spring meeting, Washington, D.C. (1965).

(26) C.Yeh : "Reflection and transmission of electromagnetic waves by a moving dielectric medium", J.Appl. Phys., **36**, p.3513 (Nov. 1965).

(27) 塩沢俊之, 熊谷信昭 : "静止媒質と運動媒質の境界面における平面波の反射および屈折", 信学会, アンテナ伝播研資(1966－08); 信学誌, **50**, p.1381 (昭42－08).

(28) T.Shiozawa and N.Kumagai : "Total reflection at the interface between relatively moving media", Proc. IEEE (Letters), **55**, p.1243 (July 1967).

(29) S.W.Lee and Y.T.Lo : "Reflection and transmission of electromagnetic waves by a moving uniaxially anisotropic medium", J.Appl. Phys., **38**, p.?106 (April. 1967).

(30) 間　剛, 塩沢俊之, 熊谷信昭 : "運動等方性プラズマによる平面電磁波の反射と透過(一般解)", 信学論(B), **51－B**, p.575 (昭45－12).

(31) 藤岡　弘, 二瓶文博, 熊谷信昭 : "圧縮性運動プラズマ流体と平面電磁波との相互作用", 信学論(B), **52－B**, p.359 (昭44－07).

(32) 藤岡　弘, 小川英一 : "異常分散領域における光波と運動している分散性誘電体媒質との相互作用", 信学論(B), **53－B**, 1, p.34 (昭45－01).

(33) 小川英一, 安川交二, 藤岡　弘 : "運動媒質の境界面におけるGoos -

Hänchen 効果”，信学論(B)（技術該話室），**56−B**，4，p.156 （1973−04）.

(34) 小川英一，鈴木俊雄，藤岡 弘：“パルス波と運動誘電体媒質との相互作用”，輻射科学研資 （1972−01）.

(35) 小川英一，鈴木俊雄．藤岡 弘：“Evanescent waveと運動誘電体媒質との相互作用”，信学論(B)（技術談話室），**55−B**，5，p.264 （1972−05）.

(36) 藤岡 弘：“導電性運動媒質中の電磁界の厳密な解析”，信学会，アンテナ・伝播研資 AP68−54 （1969−01）

(37) 藤岡 弘，熊谷信昭：“導電性運動媒質中の電磁界の厳密な解析”，信学論(B)，**52−B**，p.429 （昭44−08）.

(38) 藤岡 弘，小川英一：“相対的に運動している完全誘電体と導電性誘電体との境界面における平面電磁波の反射と透過”，輻射科学研資（昭44−04）.

(39) 藤岡 弘，中川紀美雄，熊谷信昭：“導電性運動媒質を含む導波管の厳密な取り扱い”，信学論(B)，**52−B**，3，p.130（昭44−03）.

(40) 藤岡 弘，二瓶文博，熊谷信昭：“導電性運動媒質の境界面における電磁波の境界条件とエネルギー関係式”，信学論(B)（研究速報），**52−B**，2，p.103 （昭44−02）.

(41) 藤岡 弘，小川英一：“導電性運動媒質中の増幅波の励振”，信学論(B)，**54−B**，2，p.53 （昭46−02）.

(42) 同上，輻射科学研資 （昭44−11）.

(43) 藤岡 弘，小川英一，鈴木俊雄：“導電性運動媒質中の波動増幅現象とac MHD generator”，輻射科学研資 （1970−12）.

(44) 藤岡 弘，小川英一：“導電性運動媒質の問題点”，電気学会，電磁界理論研資，EMT−71−23 （1971−10）.

(45) 虫明康人：アンテナ・電波伝播，第10章，電子通信学会編，コロナ社 （昭36）.

(46) R.E.Collin : Field theory of guided waves, McGraw Hill, New York (1960).

(47) F.Goos und H.Hänchen : "Ein neuer und fundamentaler Versuch zur Totalreflexion", Ann. d. Phys., (6), 1, p.333 (1947).

(48) H.K.V.Lotsch : "Beam displacement at total reflection Ⅰ～Ⅳ", Optik, (2), 32, p.116 (1970).

(49) B.R.Horowitz and T.Tamir : "Lateral displacement of a light beam at a dielectric interface", J.Opt. Soc. Am., **61**, 5, p.586 (1971).

(50) 安川交二, 小川英一, 藤岡 弘 : "運動媒質の境界面におけるビーム波の全反射現象", 信学論(B), **56-B**, 8, p.351 (1973-08).

(51) L.M.Brekhovskikh : Waves in layered media, p.122, Academic Press (1960).

(52) L.J.Kijewski, J.B.Fanucci and N.Ness : "Impedance characteristics of an AC MHD generator", IEEE Trans. ED, ED-11, p.14 (Jan. 1964).

(53) 細野敏夫, 日向 隆 : "導電性運動媒質による反射現象と増幅波の励振についての問題点", 信学論(B), **55-B**, 1, p.16 (1972-01).

(54) 藤岡 弘, 小川英一 : "導電性運動媒質の問題点(2)", 電気学会, 電磁界理論研資 EMT-72-13 (1972-05).