The University of Osaka
Institutional Knowledge Archive

Title	ロボットのダイナミックスシミュレーションに関する研究
Author(s)	増田, 隆広
Citation	大阪大学, 1989, 博士論文
Version Type	VoR
URL	https://hdl.handle.net/11094/2410
rights	
Note	

The University of Osaka Institutional Knowledge Archive : OUKA

https://ir.library.osaka-u.ac.jp/

The University of Osaka

ロボットのダイナミックス
シミュレーションに関する研究

平成元年２月

増　田　隆　広

目次

第１章　緒論

1.1　産業用ロボットの歴史と現状 ---------- 1

1.2　ダイナミックスシミュレータの必要性 ---------- 1

1.2.1 ロボットはシステム技術であること ---------- 1

1.2.2 アームダイナミックスが複雑であること ---------- 3

1.3　シミュレータの開発構想 ---------- 6

1.3.1 ハードウエア構成 ---------- 6

1.3.2 ソフトウエア構成 ---------- 6

1.4　これまでの研究とアッペル法の導入 ---------- 10

1.5　本論文の目的と各章の構成 ---------- 11

第２章　アッペル法による運動方程式の生成

2.1　基礎方程式の導出 ---------- 18

2.2　ロボットアームへの適用 ---------- 23

2.2.1 力学系の構成 ---------- 23

2.2.2 座標系と変換行列 ---------- 25

2.2.3 運動学的関係 ---------- 27

2.2.4 運動方程式の生成 ---------- 28

2.2.5 汎用化のためのインプットデータ ---------- 31

2.2.6 演算速度の評価 ---------- 34

第３章　汎用性のある逆変換の解析法

3.1　まえがき ---------- 37

3.2　記号 ---------- 37

3.3　解析法 ---------- 39

3.4　解析例 ---------- 41

3.5　まとめ ---------- 47

［　付録　］ ---------- 47

第４章　アッペル法による閉ループ力学系の解析

4.1　まえがき ---------- 51
4.2　記号 ---------- 51
4.3　解析法 ---------- 52
4.3.1 開ループ力学系の解析 ---------- 52
4.3.2 閉ループ力学系の解析 ---------- 54
4.3.3 手先加速度の解析 ---------- 54
4.4　解析例 ---------- 56
4.5　まとめ ---------- 61

第５章　関節座標上の拘束条件付力学系の解析とその応用
5.1　まえがき ---------- 62
5.2　単一チェーンの解析 ---------- 62
5.2.1　解析法 ---------- 62
5.2.2　応用と解析例 ---------- 64
5.3　枝分れ力学系の解析 ---------- 68
5.3.1　解析法 ---------- 68
5.3.2　解析例 ---------- 70
5.4　まとめ ---------- 73

第６章　関節座標拘束を用いたループ機構を含む力学系の解析
6.1　まえがき ---------- 74
6.2　解析方法 ---------- 75
6.2.1　順ダイナミックス ---------- 75
6.2.2　逆ダイナミックス ---------- 78
6.3　解析例と考察 ---------- 79
6.4　まとめ ---------- 84

第７章　駆動・伝達系を含むロボットアームの動力学解析
7.1　まえがき ---------- 86
7.2　解析方法 ---------- 86
7.2.1　逆ダイナミックス ---------- 87
7.2.2　順ダイナミックス ---------- 88

7.3　解析例と考察 ---------- 88
7.4　まとめ ---------- 91

第８章　水平関節形ロボットの設計検討（パラメータスタディ）
8.1　まえがき ---------- 94
8.2　解析法 ---------- 94
8.3　シミュレーション諸元 ---------- 98
8.4　シミュレーション結果と考察 ---------- 101
8.4.1 制御系の剛性≫伝達系の剛性の場合 ---------- 101
8.4.2 伝達系の剛性≫制御系の剛性の場合 ---------- 109
8.4.3 考察 ---------- 109
8.5　まとめ ---------- 111
［　付録　］---------- 112

第９章　アーム軽量化の設計指針に関する一考察
9.1　まえがき ---------- 114
9.2　解析法 ---------- 114
9.3　シミュレーション諸元 ---------- 114
9.3.1 ロボットシステム諸元 ---------- 115
9.3.2 軸の剛性と制御系諸元 ---------- 115
9.4　シミュレーション結果と考察 ---------- 118
9.5　まとめ ---------- 118

第10章　関節の剛性を考慮した逆ダイナミックス制御と軌道生成
10.1　まえがき ---------- 124
10.2　逆ダイナミックス制御と軌道生成 ---------- 124
10.2.1　逆ダイナミックス制御 ---------- 124
10.2.2　軌道生成 ---------- 126
10.3　シミュレーション ---------- 127
10.3.1　ロボットシステム諸元と目標軌道 ---------- 127
10.3.2　逆ダイナミックス制御 ---------- 127
10.3.3　ＰＤ制御 ---------- 131

10.4 まとめ ---------- 134

第11章 関節摩擦力に関する一考察

11.1 まえがき ---------- 136

11.2 解析モデルと解析法 ---------- 136

11.2.1 逆ダイナミックス ---------- 136

11.2.2 順ダイナミックス ---------- 139

11.3 解析例と考察 ---------- 140

11.3.1 逆ダイナミックス ---------- 140

11.3.2 順ダイナミックス ---------- 143

11.4 まとめ ---------- 143

第12章 結論 ---------- 148

謝辞 ---------- 151

参考文献 ---------- 152

関係論文 ---------- 158

第１章　緒論

1.1　産業用ロボットの現況

産業用ロボットの概念は，米国のジョージ・デボルが1954年に出願した特許“プログラムド・アーティクル・トランスファー（1961年特許登録）によって明らかにされたといわれる．その実用化は1962年のアメリカのユニメーション社とＡＭＦ社によってそれぞれ製作されたユニメート(UNIMATE) とバーサトラン(VERSATRAN) に始まる．その後，産業用ロボットは，生産性の向上，熟練労働者の不足，作業環境の問題などの要請により急速に拡大し，溶接（スポットおよびアーク），塗装に続いてマテリアルハンドリング・組立などの分野で着実に実績を作っている．

日本では，1967年にＡＭＦ社のロボット“バーサトラン”が輸入されたのが最初で，翌68年からは技術導入などによって早くも国産化が始まっている．すなわち，我国における産業用ロボットの発展は，1960年代後半の黎明期，1970年代の実用期を経て，1980年代の本格的な普及期と，生産が始まって以来，現在まで15年余りを経過し，毎年順調に拡大方向に推移してきている．言いかえると，メーカーにとっては産業用ロボットの市場は成長期にあることになる．普及台数は諸外国に比べてきわだっており，国内競合各社は約 220 社に達し，高機能化と低価格化の２極を目標として激しい競争を行なっている．

1.2　ダイナミックスシミュレータの必要性

1.2.1　ロボットはシステム技術であること

産業用ロボットの高機能化には，知能化も一つの大きな技術課題であるが，その基礎となるのは機構系や制御系であり，これらの技術の確立がまず基本となる．ロボットの機構・制御系に関する技術課題として，以下の項目があげられる．

(1) 高速，(2) 高精度，(3) 高可搬重量，(4) 長寿命，(5) 低価格

しかし，これらの課題は，互いに二律背反する要求である．設計では，限られた制約条件のもとで，これらの性能を最大限に満たす機構系や制御系諸元を効率良く見い出す必要がある．

試作試験の繰り返しによるロボットの開発は，パラメータの数が非常に多いため，設計諸元の決定に多くの時間と費用を必要とする．これは，ロボットシステムが図1-1 に示すように軌道生成系，制御系，駆動・伝達系，およびアーム運動系など，多くのサブシステムによって構成され，様々な分野の技術を総合して検討する必要があるためである．このような課題に対しては，計算機シミュレーションが有力である．さらに，メーカーにとっては，結果を解析式の形ではなく，評価の容易な数値で提示する必要があり，計算機シミュレーションはこの目的とも合致する．

これらの観点からロボットの機構・制御系の最適設計ツールとして，近年，ロボットアームの動特性を考慮したシミュレータの開発が各方面で活発に進められている．[1)-17)]そ

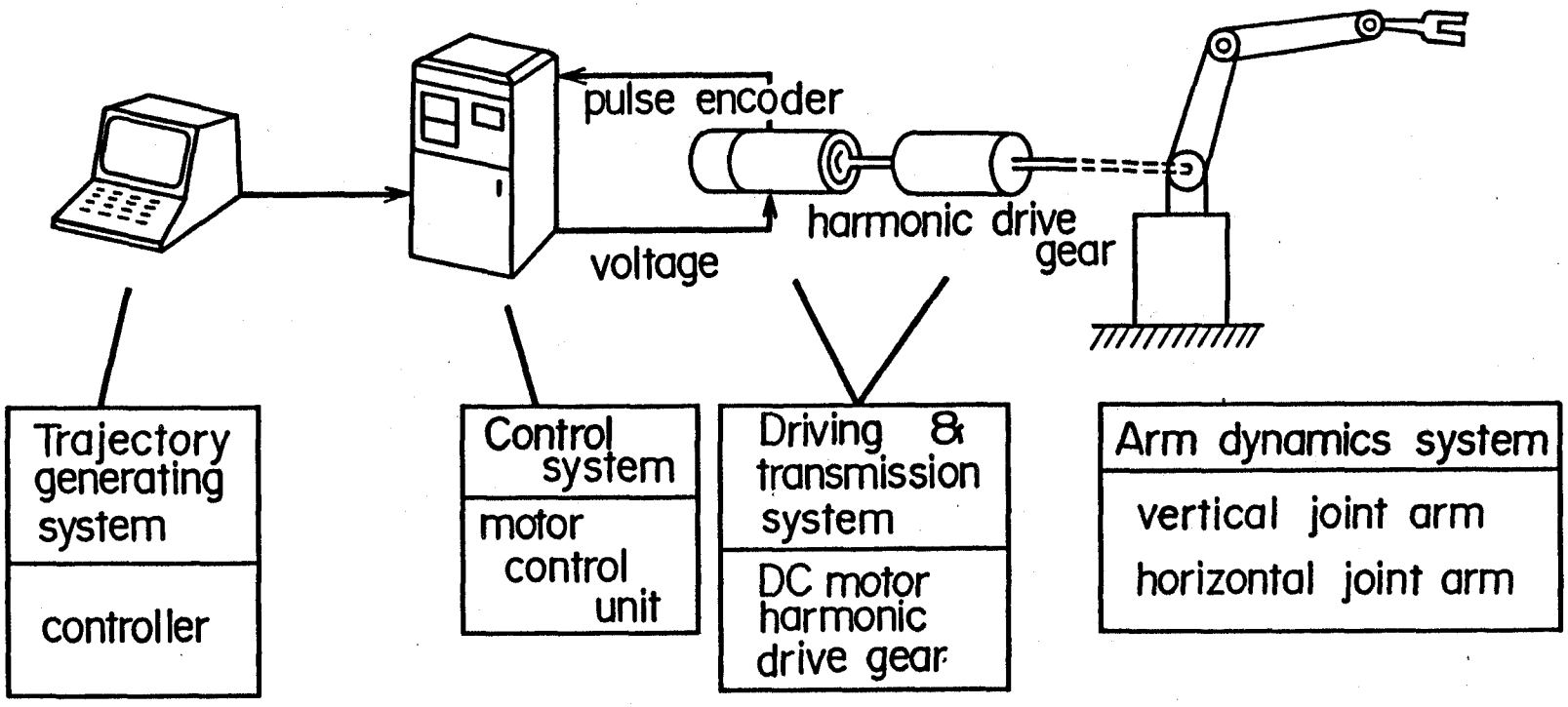


図 1-1 ロボットシステムの構成

してこれらのシミュレータでは，ロボットアームの運動や制御性能を事前に的確に予測すること，およびパラメータスタディによる最適設計を計算機上で実現することを意図している．

1.2.2　アームダイナミックスが複雑であること

自由度nのロボットアームの運動方程式は，一般に次式の形で記述される．

$$(P) = [W(q)](\ddot{q}) + V^{T}(q, \dot{q}) - Y(q) \qquad (1.1)$$

ここで，

$P \in R^n$　；各関節の駆動力／トルクよりなる一般化外力 $(P_1, P_2, \cdots, P_n)^T$

$W \in R^{n \times n}$　；慣性行列

$q \in R^n$　；各関節の変位（長さ／回転角）よりなる一般化座標 $(q_1, q_2, \cdots, q_n)^T$

$V \in R^n$　；各関節に作用する遠心力，コリオリ力の項 $(V_1, V_2, \cdots, V_n)$

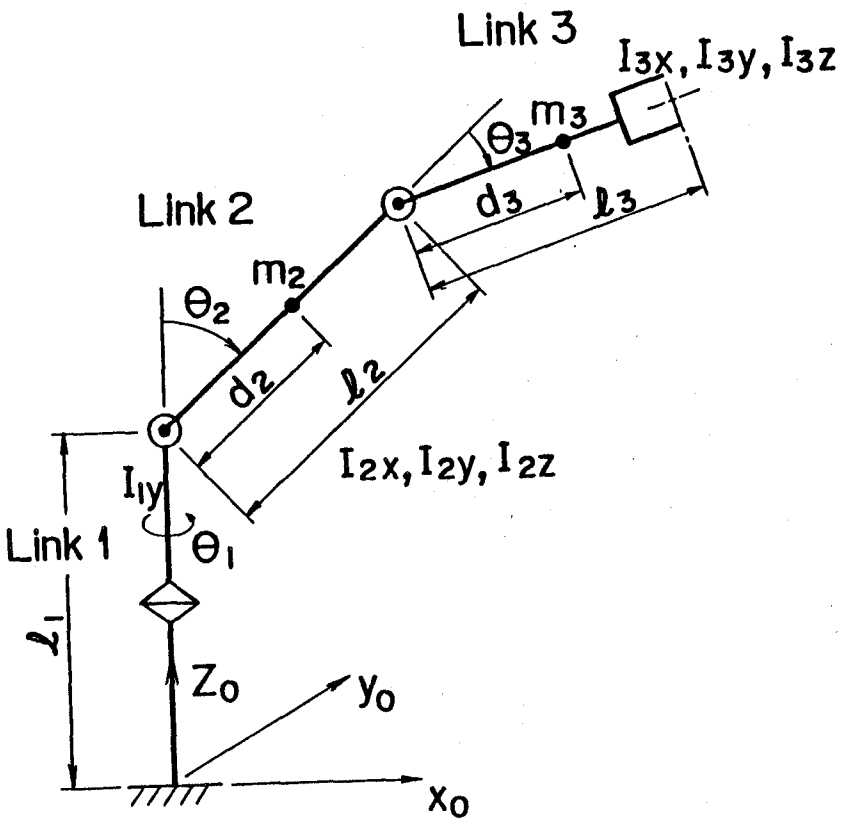
$Y \in R^n$　；各関節に作用する重力の項　、$(Y_1, Y_2, \cdots, Y_n)^T$

である．

図1-2 に示す 3自由度の垂直多関節形ロボットを例として，ロボットアームの運動方程式を図の右に式(1.2) から式(1.4) で示す．各リンク（軸）の質量や慣性モーメントm_i，I_i を定数として，関節の駆動トルクP_i (i=1,2,3) を関節の運動，すなわち回転角（図ではqの代わりにθを用いている）角速度，角加速度の関数として表わしている．各関節の駆動トルクP_1，P_2，P_3 はそれぞれ $\sin\theta_i$，$\cos\theta_i$ の乗算演算を含む 20，25，18の項数から成立していることがわかる．

最も簡略に整理した形でこれだけの項数が必要である．運動方程式を導く過程の式の変形や展開整理に，少なく見積っても，式(1.2) から式(1.4) の数倍の書き下しが必要なことを考えると，運動方程式の生成過程に膨大な演算が必要である．さらに，比較のため，このロボットの第 1軸のみ，および，第 1軸と第 2軸のみで構成される 2種類の力学モデルについて，その構成と運動方程式を図1-3 に示す．図1-3 と式(1.2) ～式(1.4) を比べることにより，ロボットアームの運動方程式は，自由度が増加するに従い，飛躍的に複雑となることがわかる．

以上のように，個々のロボットアームに応じて，その自由度配分を考慮して運動方程式を導くには，膨大な量の演算を必要とし，解析式の導出は，きわめて困難であることがわかる．このことから，多自由度のロボットアームについては，ロボットの構成にかかわらない運動方程式の統一的な計算機生成と，これをもとにした運動挙動のシミュレーションが適していることがわかる．



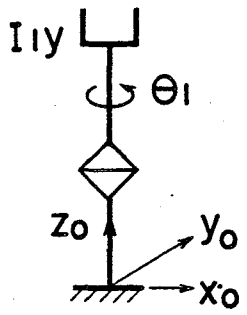
$$
\begin{aligned}
P_1 = & \Big[I_{1y} + I_{2x} s^2\theta_2 + I_{2y} c^2\theta_2 + I_{3x} s^2(\theta_2+\theta_3) + I_{3y} c^2(\theta_2+\theta_3) \\
& \quad + m_2 s^2\theta_2 d_2^2 + m_3 \{ s\theta_2 l_2 + s(\theta_2+\theta_3) d_3 \}^2 \Big] \ddot{\theta}_1 \\
& + 2 \Big[I_{2x} s\theta_2 c\theta_2 - I_{2y} s\theta_2 c\theta_2 + m_2 d_2^2 s\theta_2 c\theta_2 + m_3 \{ s\theta_2 l_2 + s(\theta_2+\theta_3) d_3 \} c\theta_2 l_2 \Big] \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \\
& + 2 \Big[I_{3x} s(\theta_2+\theta_3) c(\theta_2+\theta_3) - I_{3y} s(\theta_2+\theta_3) c(\theta_2+\theta_3) \\
& \quad + m_3 \{ s\theta_2 l_2 + s(\theta_2+\theta_3) d_3 \} c(\theta_2+\theta_3) d_3 \Big] \dot{\theta}_1 (\dot{\theta}_2 + \dot{\theta}_3)
\end{aligned}
\qquad (1.2)
$$

$$
\boxed{\begin{aligned} S\theta_i &\triangleq \sin\theta_i \\ C\theta_i &\triangleq \cos\theta_i \end{aligned}}
$$

$$
\begin{aligned}
P_2 = & (I_{2z} + m_2 d_2^2 + m_3 l_2^2 + m_3 c\theta_3 l_2 d_3) \ddot{\theta}_2 \\
& + (I_{3z} + m_3 d_3^2 + m_3 c\theta_3 l_2 d_3)(\ddot{\theta}_2 + \ddot{\theta}_3) \\
& - m_3 s\theta_3 l_2 d_3 \dot{\theta}_3 (\dot{\theta}_2 + \dot{\theta}_3) - m_3 s\theta_3 l_2 d_3 \dot{\theta}_2 \dot{\theta}_3 \\
& - \Big[(I_{2x} - I_{2y} + m_2 d_2^2) s\theta_2 c\theta_2 - (I_{3x} - I_{3y}) s(\theta_2+\theta_3) c(\theta_2+\theta_3) \\
& \quad + m_3 \{ s\theta_2 l_2 + s(\theta_2+\theta_3) d_3 \} \{ c\theta_2 l_2 + c(\theta_2+\theta_3) d_3 \} \Big] \dot{\theta}_1^2 \\
& - (m_2 d_2 + m_3 l_2) g s\theta_2 - m_3 d_3 g s(\theta_2+\theta_3)
\end{aligned}
\qquad (1.3)
$$

$$
\begin{aligned}
P_3 = & (I_{3z} + m_3 d_3^2)(\ddot{\theta}_2 + \ddot{\theta}_3) + m_3 c\theta_3 l_2 d_3 \ddot{\theta}_2 \\
& - \Big[(I_{3x} - I_{3y}) s(\theta_2+\theta_3) c(\theta_2+\theta_3) + m_3 \{ s\theta_2 l_2 + s(\theta_2+\theta_3) d_3 \} c(\theta_2+\theta_3) d_3 \Big] \dot{\theta}_1^2 \\
& + m_3 s\theta_3 l_2 d_3 \dot{\theta}_2^2 - m_3 d_3 g s(\theta_2+\theta_3)
\end{aligned}
\qquad (1.4)
$$

図 1-2　3 自由度アームの構成と運動方程式

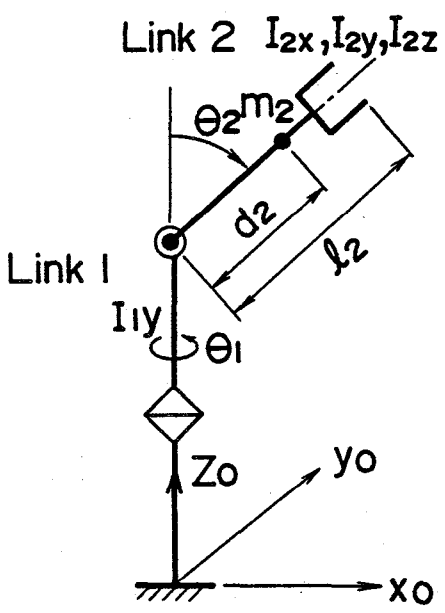


1 d.o.f. arm

Equation of motion

$$P_1 = I_{1y}\,\ddot{\theta}_1$$

$$\boxed{\begin{aligned} S\theta_i &\triangleq \sin\theta_i \\ C\theta_i &\triangleq \cos\theta_i \end{aligned}}$$



2 d.o.f. arm

Equation of motion

$$P_1 = I_{1y} + I_{2x}S^2\theta_2 + I_{2y}C^2\theta_2 + m_2S^2\theta_2 d_2^2)\ddot{\theta}_1$$

$$+2(I_{2x} - I_{2y} + m_2 d_2^2)S\theta_2 C\theta_2 \dot{\theta}_1\dot{\theta}_2$$

$$P_2 = (I_{2z} + m_2 d_2^2)\ddot{\theta}_2$$

$$-(I_{2x} - I_{2y} + m_2 d_2^2)S\theta_2 C\theta_2 \dot{\theta}_1^2$$

$$-m_2 d_2 g\, S\theta_2$$

図 1-3　1,2 自由度アームの構成と運動方程式

1.3 シミュレータの開発構想

ロボットの最適設計の対話形ツールとしての設計支援シミュレータが持つべき機能を明らかにし，そのモデルを開発する．システム中の主な解析手法は，運動の幾何学的側面を扱う Kinematics（正変換），Inverse kinematics（逆変換）と機械システムの力学的挙動を扱う Direct dynamics と Inverse dynamics の四つので構成されている．そしてこれら四つのプログラム群について，設計への利用の観点からそれらの相互関係を明らかにする．すなわち，キネマティックスにより，ロボットの動きを扱うだけでなく，ダイナミックスや制御を考慮し，ロボットの試作試験の繰り返しを計算機上で行なうことを意図している．そしてこの時，ロボットの形状や解析した運動の評価を容易とするため，アニメーション表示機能を持たせている．開発を計画したシステムを以下に詳述する．

1.3.1 ハードウェア構成

システムのハードウェア構成を図1-4 に示す．ホストコンピュータは，ＶＡＸ11／730で，これに 1ＭＢの主記録メモリー，121 ＭＢのハードディスク，および10ＭＢのカートリッジディスクを備えている．グラフィックディスプレイは，AGS-3401で，これを用いてアニメーションを行なう．表示の高速化をはかるため，RS-422を介してホストコンピュータと接続している．さらに 3台の端末とユニバス DR11Wを介して A/D,D/A変換ボードを備えた DAS-BOXを接続している．DAS-BOX は，開発中のロボットコントローラのデバック（コントローラからの出力電圧の入力とこれに基ずくロボットの運動のアニメーション）や実験データの取り込みに用いる．

1.3.2 ソフトウェア構成

システムのプログラム構成を図1-5 に示す．以下，システムを構成する個々のプログラムについて本システムの利用法を述べる．

(1) Inverse kinematics （逆変換）

ダイナミックスについては，ラグランジューオイラー法をはじめ回転や直動の任意の自由度配分に対応できる汎用性の高い運動方程式の生成法が既にある．しかし，このプログラムを用いてロボットアームの動特性シミュレーションを行なう場合，各関節の変位や速度の目標値を与えるなど，関節座標系での目標値や外力を与える必要がある．ロボットの設計スペックは，手先の運動で与えられることが多い．このため，作業座標系での目標値をもとにシミュレーションを行なう場合には，この目標値を一旦関節座標系に変換する，いわゆる，逆変換が必要になる．

現在，一般に用いられているロボットアームの逆変換計算法は，個々のロボットアームの自由度配分に応じて，その幾何学的形状を考慮し，それぞれ異なる解析式を用いて求める方法である．しかし，この方法をとるかぎり，運動方程式を解析するプログラムの汎用性が高いにもかかわらず，逆変換を計算するプログラムは，それぞれのロボットアームに応じて必要になるという問題点が残る．このため汎用性の高い逆変換の計算法を開発する必要があり，第３章で一方法を提案している．

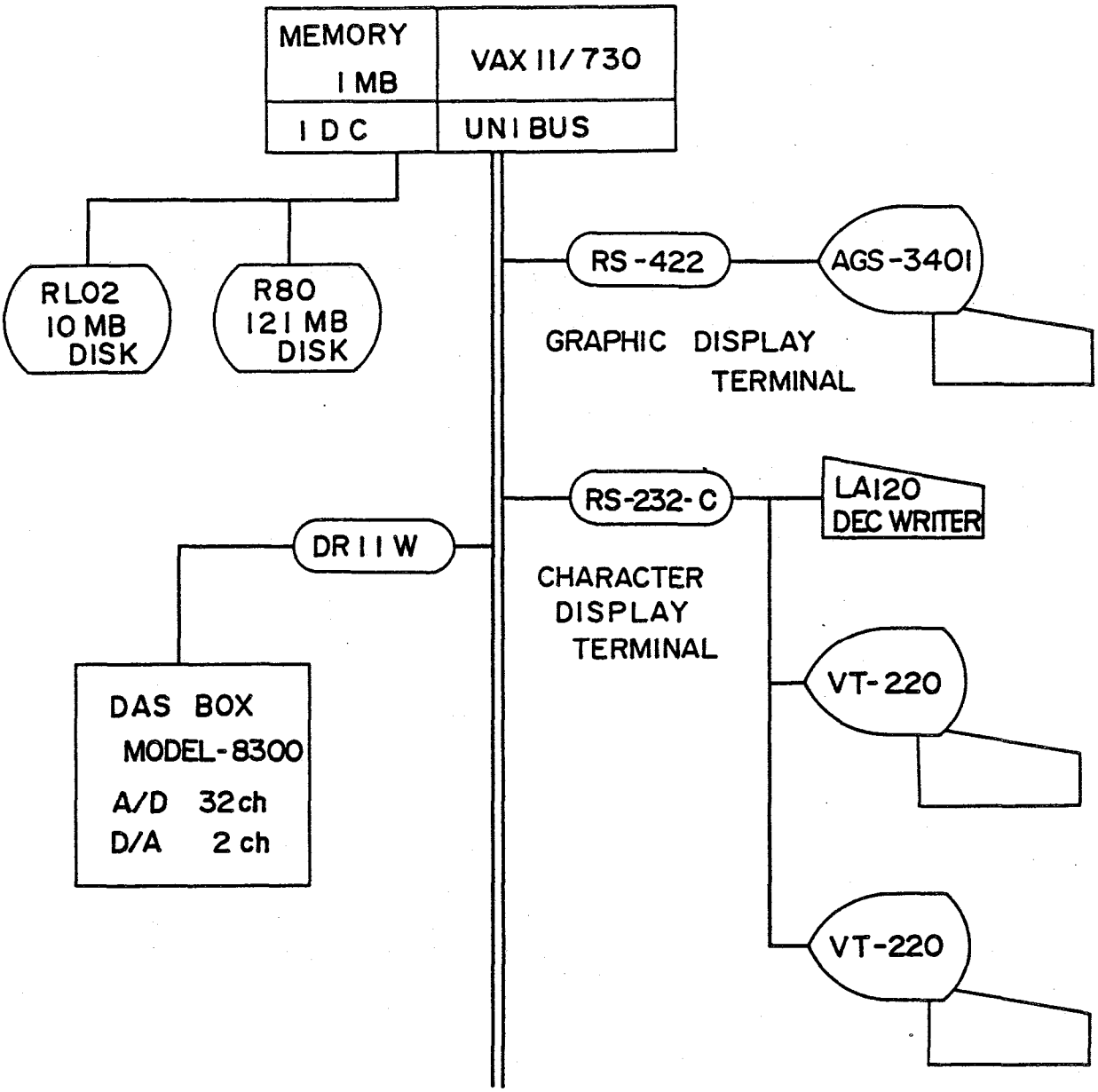
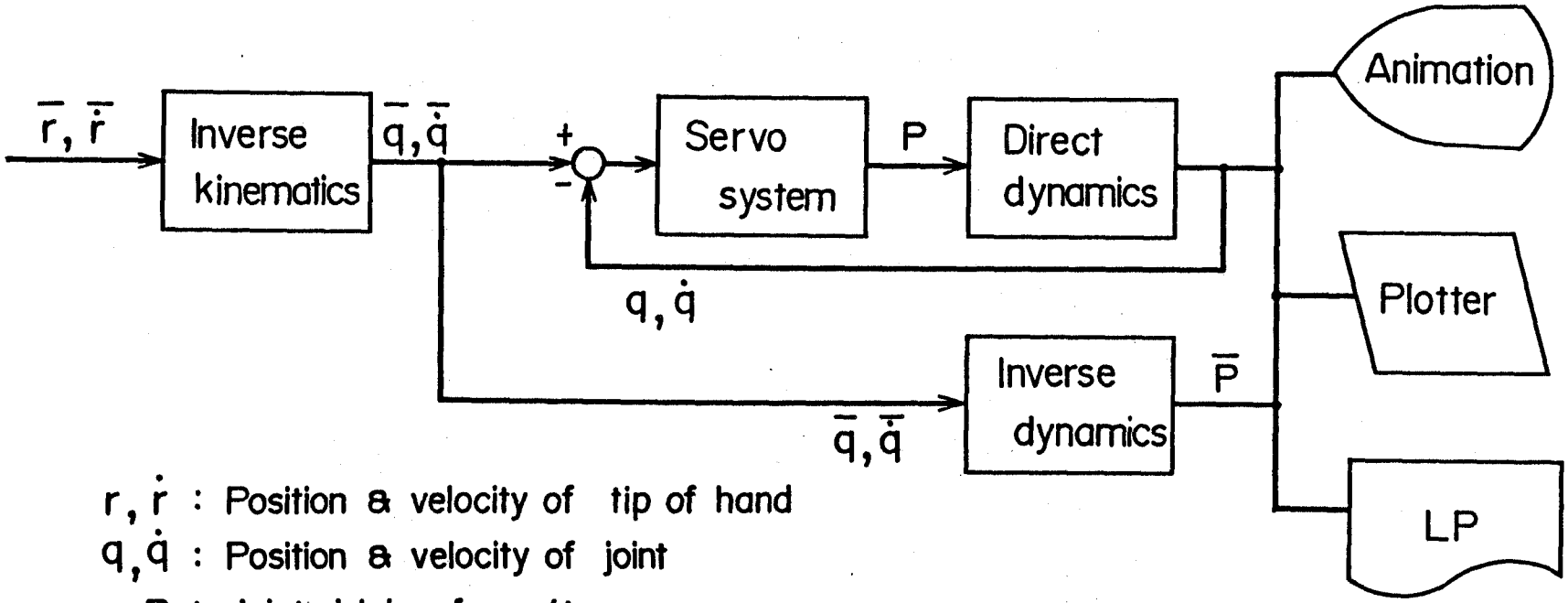


図 1-4 シミュレータのハードウエア構成



$r, \dot{r}$: Position & velocity of tip of hand
$q, \dot{q}$: Position & velocity of joint
P : Joint driving force/torque
Superscript "—" shows desired value

図 1-5 シミュレータのソフトウエア構成

(2) Inverse dynamics（逆動力学問題）

リンクの位置・速度・加速度を与えて，運動に必要な関節駆動力／トルクを求める逆動力学問題を解析するプログラムである．運動方程式の生成は，回転・直動の任意の組み合わせより成る20自由度以下のロボットアームに対して実行可能とする．

アッペル法では，リンク重心の加速度と関節加速度の関係がリカーシブに求まるだけでなく，慣性行列が遠心力・コリオリ力項や重力項と分離して求まるため，Inverse dynamics だけでなく後に示す Direct dynamics にも適用可能である．

(3) Servo system,Direct dynamics（順動力学問題）

制御との連成を考慮し，関節駆動力／トルクを与えてロボットの挙動を求めるもので，ロボットの試作試験の計算機シミュレーションに相当する．ロボットシステムのダイナミックスモデルは，制御系，駆動系，伝達系，およびアーム運動系の四つのサブシステムに大別される．ロボットの試作試験に相当するものを計算機シミュレーションで行うためには，アームのダイナミックスだけでなく，これらすべての特性を考慮した総合的なシミュレーションを行う必要がある．

(4) Animation

下記の三つのアニメーションを利用可能とし，用途に応じて使い分ける．

（ｉ） 線画モデル

（ii） ワイヤーフレームモデル

（iii） サーフェスモデル

線画モデルは，新たなデータ入力を必要とせず，ダイナミックス計算に必要なデータのみでアニメーションが可能である．ダイナミックス解析の入力データのチェックやシミュレーション結果の簡便なアニメーションに利用可能である．

ワイヤーフレームモデルは，アーム形状のデータ入力を必要とするものの，ロボットの3次元アニメーションに必要な機能を満たしており，本シミュレータの目的である機構・制御系の設計評価には，このアニメーションが適している．さらに，停止後の振動等も重ね書きにより，うまく表現でき，この点では次のサーフェスモデルのアニメーションよりも優れている．

サーフェスモデルは，ワイヤーモデルよりも更に具体的にロボットの外観をそのまま表現できる．製作前に商品としてのロボットの出来上がりや外観上のバランス等を評価するのに適している．しかし，アニメーションのスピードの点や必要入力データ数が多くなる欠点がある．

(5) 本システムの設計への適用

本システムの利用法を図1-5 に従って述べる．ロボットの設計スペックが手先の可動範囲や最高速度で与えられる．これをInverse kinematicsプログラムにより，関節の運動に変換する．その後，システムの利用の流れは，以下の二つに大別される．まず，Inverse dynamicsによってアームに所定の運動をさせるために必要な駆動モータの動力やトルクを

求める．この値をもとにモータや減速機の選定を行なう．次いで，選定したモータや減速機の特性，およびアーム諸元を入力し，アームダイナミックスのみでなく，制御系，駆動系，伝達系を含む総合的な運動シミュレーションを行ない，ロボットの速応性や停止後の振動などを評価する．ロボットシステムの試作試験にあたるものを計算機上で行う．解析結果のアニメーションを見ながら，パラメータを変更してシミュレーションを繰り返し，トライアンドエラーで最適設計点にもっていく．

開発するロボットダイナミックスシミュレータの機能を表1-1 にまとめる．

表1-1　シミュレータの機能

(1)　任意の形式のロボットに適用しうる汎用性
　・　ダイナミックス
　・　逆変換
(2)　ロボットシステム全体の総合的シミュレーション
(3)　解析・実験結果のアニメーション表示
(4)　アッペル法によるダイナミックスの記述

1.4 これまでの研究とアッペル法の導入

ロボットアームは，回転，直動関節の組合せからなるきわめて複雑な力学系を構成している．このような多自由度リンク機構の運動方程式の一般的な計算機生成法について既に多くの研究がなされてきている．代表的なものとして Uicker らによる Lagrange-Euler 法を用いたIMP [18)-21)]，他[22),23)] がある．しかし，ロボットの出現する以前に提案された方法であり，ロボットのもつ力学モデルとしての複雑さや能動性を想定しておらず，計算時間や制御系を含めたシミュレーションへの適用の面で問題がある．

その後，ロボットアームについては，フィードフォワード制御（ Computed torque control)，すなわち，与えられた目標軌道に沿ってロボットを動かすために必要なモータトルクをあらかじめ計算し，これを入力とする制御法の要請から逆ダイナミックスにつについては，これまで種々の高速演算アルゴリズムが提案されている．[24)-27)] しかし，逆ダイナミックスは，運動を与えて，必要な駆動力／トルクを求めるものであり，シミュレーションでは，与えられた関節駆動力／トルクより，ロボットの運動を求める順ダイナミックスの演算を必要とする．この計算では，関節加速度が必要となり，慣性行列が遠心力やコリオリ力項，および重力項と分離した形で陽に求まらなければならない．

ロボットのダイナミックスシミュレーションの必要性から，順ダイナミックスについても，多くの演算アルゴリズムが提案されている．Lagrange-Euler法[19),28)] や Newton-Euler 法[1)]，およびダランベールの原理に基づく方法[29)] が主であるが，系の加速度エネ

ルギーを関節加速度で偏微分して外力と等置するAppel 法に基づく方法[30)-37)] もある．

シミュレータ中に用いる運動方程式の計算機生成法に望まれる条件として下記があげられる．

(1) 関節加速度を求める順ダイナミックス演算が可能

(2) 演算が高速

(3) 運動方程式の記述が簡潔

(4) 複雑な力学系への拡張が容易

アッペル法について上記の項目を検討した結果は，以下の通りである．

(1) 慣性行列の構成要素等がリカーシブに求まり，順ダイナミックス，逆ダイナミックスの双方に適用可能である．

(2) 関節加速度を求める演算量について，これまでに提案された主な計算アルゴリズムを比較した結果，アッペル法は，これまで最も早いとされるNewton-Euler法をもとにしたWalkerらの方法[1)]とほぼ同等の演算速度をもつ．

(3) Kinematics ，Dynamics 共，リカーシブな演算法が可能で，運動方程式の計算機生成過程のプログラム記述がきわめて簡明である．、

(4) 系の加速度エネルギー（運動エネルギーの記述式中の速度を加速度で置きかえたもの）が必要なため，運動方程式の導出過程でリンク重心加速度と関節加速度の関係を求める演算が含まれている．これを利用することにより手先座標と関節座標を結びつけるヤコビ行列やヤコビ行列の時間微分と関節速度の積がリカーシブに得られるため，拡張性に富む．

上述のように，アッペル法は種々の優れた特長をもっているので，シミュレータ中の運動解析手法としてこの方法を採用する．

1.5 本論文の目的と各章の構成

本論文の目的は大別すると以下の４項目となる．

(1) 運動方程式の記述法として，これまで，あまり一般的でなかったアッペル法に注目して汎用性のあるロボットダイナミックスシミュレータを開発したこと．

(2) 開発の過程で明らかになったアッペル法の種々の優れた点を指摘し，これを利用してロボットアームの汎用的な逆変換や閉ループ力学系の運動解析を達成したこと

(3) 関節座標上の拘束条件付力学系の解析法を提案し，これを用いて，複数の力学系の連成する複合力学系のシミュレーションが可能であることを明らかにしたこと．またこの過程で本解析法は適用範囲が広く，枝分れ力学系の解析，ループを含む力学系の解析，モータロータの回転を考慮した動力学解析等に応用できることを示している．

(4) 開発したシミュレータを産業用ロボットに適用し，実設計に対する有益性を示したこと．そしてこれに基づいて産業用ロボットの設計法や制御法に関して 2,3の提案を行っている．

以下，第２章では，本論文で用いたロボットのダイナミックスシミュレーションの基礎理論について述べる．本論文で用いたアッペル法による運動方程式の生成法等，相当部分については，文献35),36) に沿っているが，これをロボットアームに適用するにあたり，効率的に汎用化を達成するため，下記の工夫を行っている．

(1) 座標系の設定法は，汎用化を達成するためデナビット・ハルテンベルグの記法[38] を採用している．演算の高速化をはかるため回転移動のみで変換行列の次元は，3X3 である．

(2) 座標系がどのリンクに固定されているかをより明瞭にするため，座標原点をリンク重心に置いている．

(3) 汎用化を達成するため，新たに重力加速度の方向余弦をインプット項目としている．

加えて，本章では，他の方法との比較からアッペル法の評価を与えている．アッペル法の演算速度はこれまで提案された種々の方法と比べても遜色ないこと，および拡張性に優れた方法であることを明らかにしている．

第３章では，いかなる自由度配分のロボットアームであっても適用が可能な逆変換の計算アルゴリズムを提案している．機構系の優劣までも含めて評価できる設計支援シミュレータは，特定のロボットの軸構成に限定されてはならなず，いかなる形式についてもシミュレーションが可能でなければならない．汎用性のある運動方程式の生成法は，既に確立されているが，逆変換の計算法は未確立である．またロボットアームの設計スペックは作業座標系で与えられることが多い．しかし，動特性シミュレーションでは各関節の変位や速度の目標値を与えるなど，関節座標系での目標値や外力を与える必要がある．この時に問題となるのが，汎用性のある逆変換の計算法である．

提案し，かつ採用している方法は，まず，与えられた手先の目標軌道を時間に対して 2 階微分して作業座標（デカルト座標）における目標加速度を得る．次いで，この目標手先加速度のデカルト座標から関節座標への変換を行ない，得られた関節加速度を数値積分する方法である．本方法は次の利点を有する．

(1) アッペル法の運動方程式の導出過程に含まれる関節加速度からリンク重心加速度へのリカーシブな正変換演算が利用できる．

(2) 関節加速度が明らかになるので，知能ロボットに必要となる手先の運動からこれを実現するための駆動トルクも同時に求まる．

(3) 数値積分によって逆変換を達成するので，従来のイタレーションによって解を収束させる方法に比べて高速である．

第４章は，本シミュレータの解析の対象とする力学系の拡張に関するものである．ロボットを搬送作業に用いる場合には，開ループの力学系であるが，物を挿入する組立作業やバリ取り作業に用いる場合には，閉ループ力学系（拘束条件付きの力学系）となり，閉ル

ープ力学系のシミュレーション機能が必要となる．しかし，多くのシミュレータでは，単一チェーン，先端自由（開ループ）の力学系を対象としており，前者を対象にした研究は多いが，後者を対象にした研究は比較的少ない．

閉ループ力学系の運動解析法としては，

(1) 拘束条件で決まる自由度の数の変数を用いて運動方程式をたて，残りの運動を従属的に決定する方法[42]

(2) 運動が拘束条件を満足するように，拘束力を繰返し計算により逐次求める方法[43]

(3) ラグランジュ乗数で拘束力を表わし，自由度の数以上の次元の空間で運動方程式を立てて解く方法[44]

などがある．これらのうち，(1) は独立変数の選定に直観を要するため，計算機で数値計算して運動を求める方法としては不向きであり，(2) は拘束力を求めるのに繰り返し計算を要する，などの問題がある．これに対し，(3) は一度の逆行列の計算で関節加速度と拘束力が同時に求まり，かつ拘束される自由度の数や方向をプログラム中で任意に選定し易い特長がある．

この特長を生かしてラグランジュ乗数を用いたアッペル法による閉ループ力学系の運動解析法について検討している．本章では，まず解析法について述べ，アッペル法では，開ループ力学系の動力学解析から閉ループ力学系の動力学解析への拡張がきわめて容易であることを示す．さらに解析例により，良い精度で閉ループ力学系の運動解析が可能であることを示す．

第５章では，拘束条件が関節座標系で与えられる運動解析を提案している．拘束条件付きの力学系の解析についてのこれまでの研究では，前章でとりあげたように手先と作業対象物の間の幾何学的関係や力の相互作用を考慮したダイナミックスが取り扱われている．すなわち，拘束条件が作業座標系（デカルト座標系）で表わされている．

提案した解析法は，拘束条件が関節座標系で与えられるもので，これまでの拘束条件がデカルト座標で表わされる場合に比べ，関節座標とデカルト座標の間の相互変換が不要なため，より簡略なものとなっている．しかし，応用範囲は多岐にわたる．本解析法を任意の自由度配分・軸数の力学系のダイナミックス解析が可能なプログラムと組み合わせることにより，種々の応用が可能である．本章では，これらのうちリンク応力や軸受け荷重の解析，基準座標に運動を伴う時のシミュレーション，および枝分れ力学系の解析などへの適用について述べる．特に，枝分れ力学系の解析は，次章で述べるループを含む力学系等の複合力学系の解析に必要となる手法である．

第６章では，関節座標拘束を用いたループを含む力学系の動力学解析を提案している．垂直多関節形の産業用ロボットでは，第３軸のモータを，第２軸のモータと同様，第１軸に取り付けた構成が多い．そして２本のリンクを第２軸，第３軸と並列に設けて平行四辺

形の４節リンクを形成している．このようなロボットアームの動力学特性を正確に解析するためには，もはや単一チェーンの力学系としては扱えず，ループを含む力学系としての取り扱いが必要になる．

これまでのループを含む力学系の取り扱い法は，下記の三つに大別される．

(1) 拘束条件で決まる自由度の数の独立変数を用いて運動エネルギを記述し，ラグランジュの運動方程式を適用する方法[55]

(2) 駆動行列を用いて外力を変換する方法[56]

(3) 一旦，ループの一端を切り離し，木構造の力学系とした上で切り離した二つの端点の変位が等しいという拘束条件を導入して解析する方法[47]

近年ロボットアームの動特性シミュレーションプログラムの開発が各方面で活発に進められている．これらのプログラムでは，ロボットアームの構成や自由度は任意に設定できるようになっている．しかし取り扱える力学系は単一チェーン，先端自由に限られるものが多い．これらのプログラムのループを含む力学系の解析への拡張を考える時，(1) の方法では，並設リンクの運動の取り扱いが困難となる．(2) の方法は，最も容易に適用可能であるが，近似解析にとどまる．(3)の方法は，単一チェーンから木構造への拡張が必要であるが，汎用性がありコンピュータシミュレーションに適している．しかし拘束される自由度５ないし６と多くなる等の欠点がある．

このため本章では，ループを含む力学系の解析法として関節座標上の拘束条件の利用を提案する．(3) の方法と同様，まず一端を切り離して木構造の力学系とするが，これについては既に前章でその解析法を明らかにしている．そして拘束条件として各関節の角度（回転関節）／変位（直動関節）の関係を与えて解く方法である．本方法は，

(1) 切り離し点のヤコビ行列が不要なため，単一チェーンの動力学解析からの拡張が容易

(2) 与える拘束条件の数が必要最小限

(3) ループを含む力学系の関節駆動力／トルクが単一チェーンの駆動力／トルクから容易に求まり，逆動力学，順動力学の定義が明確

という特長を持っている．

第７章では，ロボットのダイナミックス特性に及ぼす駆動モータの回転の効果を明らかにしている．多くの産業用ロボットのアームは，減速機を介して直流サーボモータによって駆動される．ハーモニックドライブ減速機では，モータロータの回転角速度は，リンク角速度の50～100 倍に達する．当然，このロータの回転によるジャイロ効果等がロボットアームの動特性に影響を及ぼす．しかし，筆者の知るかぎり，駆動モータの回転の効果を厳密に解析した文献[57] はほとんどない．

駆動モータの回転の効果を考慮するために一般に取られている方法は，慣性行列の対角項に減速比を考慮してロータ慣性モーメントのリンク慣性モーメント相当値を加えて新たに慣性行列とみなす方法である．しかし，この方法では，ロータの慣性効果については考

慮できるが，遠心力・コリオリ力や重力の効果は考慮されていない．

本章では，モータのロータ回転を考慮したロボットアームの動力学解析法を提案している．本解析を行なうためには，運動方程式中での伝達機構のモデル化を明らかにする必要がある．解析法は，モータロータも一つのリンクとみなし，リンクとロータの角速度の関係，すなわち伝達機構の機能を拘束条件とみなし，これを力学系に付与する方法である．多くのロボットアームのダイナミックスシミュレータは，任意の構成の単一チェーンの力学系が取り扱えるようになっており，慣性行列，コリオリ力，遠心力，重力項等が計算機で自動生成される．提案した解析法は，このようなプログラムを用いて容易に拡張可能な方法となっている．

解析例により本解析法の妥当性を明らかにすると共に，本解析法を５自由度の垂直多関節形ロボットに適用してモータのロータ重量や回転による遠心力・コリオリ力の効果を見積った．その結果，以下の事項が明らかになった．

(1) 現用の産業用ロボットでは，これらの効果は小さく，従来の慣性行列の対角項にロータのリンクイナーシャ相当値を加える解析法で対応可能である．

(2) しかし，アームの高速化や軽量化，およびロータ重量の増大に伴って，これらの効果は大きくなり，正確な解析が必要になる．

第８章では，開発したシミュレータを水平関節形ロボットの設計検討に適用している．制御系，駆動系，伝達系，およびアーム運動系より成るロボットシステム全体の総合的シミュレーションを行っており，ロボットの試作試験にあたるものを計算機上で実現している．前章で明らかにしたように通常の産業用ロボットの駆動系については，モータロータの慣性項のみを考慮すればよい．このことを考慮して伝達機構を有し，駆動モータの回転角を検知してアーム制御するセミクローズドループのロボットシステムをモデル化している．

パラメータスタディでは，変数として主に制御系と伝達系の特性を対象としている．その結果，得られたロボットアームに発生する振動の性質やその増大・減少傾向がこれまでの経験とよく一致することから，ここで提案した制御系，駆動・伝達系，およびアーム運動系よりなるシミュレーションモデルによってロボットシステムの設計検討が可能であることを明らかにしている．そして設計では，動力伝達系の剛性に着目する必要があり，制御系の剛性と動力伝達系の剛性をほぼ等しくする設計指針などを提案している．

第９章では，第８章に引き続き開発したシミュレータを用いて設計検討を行っている．ロボットの高速化には，アームの軽量化が大きな課題である．アームの軽量化は，必然的にアームの剛性低下を招く．アームの確保すべき剛性が明らかになれば，これを基準としての軽量化が可能であり，アーム軽量化に関する設計指針を与えることができる．

そして本章では，アームを構成する各リンクを 3分割し，これらの間を回転ばね要素で

結合することによるフレキシブルリンクのモデル化を提案している．この解析モデルについて前章と同様のロボットシステム全体の総合的な運動シミュレーションを行ない，リンクの確保すべき剛性を伝達系の剛性との比の観点から評価している．その結果，リンク剛性を伝達系の剛性の 2ないし4 倍確保すれば，剛体リンクとみなせること，およびリンク剛性が伝達系の剛性と同一のオーダであっても，これを関節の剛性に含めることにより，剛体リンクを仮定しての設計検討が可能であることなどを明らかにしている．

第10章では，これまでに示した伝達系の剛性の重要性に立脚して，伝達系の剛性を考慮した逆ダイナミックス制御（フィードフォワード制御，Computed torque control)を提案している．逆ダイナミックス制御は，目標軌道を実現するのに必要な関節駆動力／トルクをあらかじめ計算し，これを制御入力としてダイナミックスに基づく非線形項を補償する方法である．しかし，この方法を実際に適用した例は少ない．これは，関節駆動力／トルクの計算が繁雑で時間を要することも一つの理由であるが，現実の多くのロボットが伝達機構を有し，この部分の剛性が弱いため，計算された関節駆動力／トルクと制御入力が必ずしも一致しないことがもう一つの大きな理由と考えられる．

近年，リンクのフレキシビリティに着目したダイナミックスや制御法に関する研究は多い．しかし，多くの産業用ロボットは伝達機構を有する．そして，第 8,9章で述べたように，産業用ロボットではリンクのフレキシビリティがよほど小さい場合を除き，むしろ伝達系の剛性に着目するのがより重要であると考えられる．

提案した制御法を実現するためには，初期値および到達位置での 1階から 3階微分が 0となる目標軌道を設定する必要のあることを明らかにし，さらに，この目標軌道は，ＰＤ制御のみによって駆動されるロボットの残留振動の低減に有効であり，ロボットアームの軌道生成に利用できることを示している．

第11章では，関節摩擦力の荷重依存性を考慮したロボットアームの挙動シミュレーションのルゴリズムを提案している．多くの産業用ロボットは，減速機を介して直流サーボモータによって駆動される．このようなロボットの関節にはかなりの摩擦力が作用しているものと推測される．制御する時の補償やダイナミックスシミュレーションでは，通常この摩擦力は一定として取り扱われている．しかし，クーロンの法則によれば摩擦力は垂直荷重に比例して増減する．そして，運転中のロボットにおいても，この垂直荷重は重力や遠心力，コリオリ力のために時々刻々変化していると考えられる．

解析法は，各関節に垂直荷重をモニタする仮想関節を設け，この関節に作用する荷重をもとに摩擦力を決定する方法である．水平関節形ロボットを対象として運転中の摩擦力の変化を解析し，以下の事項を明らかにしている．

(1) ロボットアームでは運動に伴う遠心力，コリオリ力，および重力によって関節に加わる荷重が変化する．これらの垂直荷重の変化によって摩擦力がかなり大きく変化する．

(2) シミュレーションでは与えられた関節駆動力／トルクをもとに，関節加速度と摩擦力を決める垂直荷重を同時に求める必要がある．しかし一般に正負の符号も含め，摩擦係数が摩擦力の関数となるため，関数加速度の決定に繰り返し計算を必要とする．

(3) 繰り返し計算については，解析例について，正負の符号に関する収束性を確認でき，摩擦力の荷重依存性を考慮したシミュレーションが可能であることを明らかにした．

最後に，第12章において全章のまとめ，および今後の課題等について述べる．

第２章　アッペル法による運動方程式の記述

シミュレータ中で運動方程式の生成法として採用しているアッペル法について述べる．本方法はきわめて計算機援用解析に適した方法である．この方法は，最初文献(30)で明らかにされ(31)-(34) において能動機構への適用が述べられている．さらに，アッペル法によるロボットアームの運動方程式の計算機生成法は，文献(35),(36) に詳述されており，以下は，これに沿っているが，座標軸の取り方や汎用化に関する筆者自身の工夫をも交えて述べる．

2.1 基礎方程式の導出

Ｎ個の質点よりなる力学系を考える．各質点は，$\ell = 1, 2, \cdots, N$の番号が付され，質量m_ℓ と位置ベクトル$\vec{r}_\ell$ を持つものとする．系の位置は，$\vec{r}_1$ ，$\vec{r}_2$ ，…，$\vec{r}_N$ で定義される．これらをそれぞれ三つのデカルト座標の値で表わし，

$$\underbrace{x_1, x_2, x_3}_{\vec{r}_1}, \cdots, \underbrace{x_{3N-2}, x_{3N-1}, x_{3N}}_{\vec{r}_N}$$

とする．この表現法は各質点のｘ，ｙ，ｚ座標を与えるよりも後の議論には適している．系の位置が次元３Ｎの一つのベクトル$x = (x_1, x_2, \cdots, x_{3N})$で定義されるからである．

下式で与えられる拘束が系に加わるものとする．

$$f(x, t) = 0 \tag{2.1a}$$

もしくは，

$$f(x) = 0 \tag{2.1b}$$

これらの拘束はホロノミックな拘束と呼ばれる．式(2.1) の形の拘束のみを受けて運動する時，ホロノミック系と称する．

積分した形の拘束条件が得られないとき，すなわち，拘束条件が

$$\sum_{\nu=1}^{3N} A_\nu(x, t)\, dx_\nu + A_\nu\, dt = 0 \tag{2.2a}$$

もしくは，

$$\sum_{\nu=1}^{3N} A_\nu(x, t)\, dx_\nu = 0 \tag{2.2b}$$

で表わされるとき，非ホロノミックな拘束と呼ばれる．これが系に加わる時，非ホロノミック系と称する．

拘束が時間ｔを陽に含まない時（式(2.1b)および式(2.2b)の形），スクレロノミックまたは，定常的な拘束と呼ばれる．拘束条件が時間ｔに依存するとき，レオノーマスまたは非定常拘束と呼ばれる．

当初，アッペルの方程式は非ホロノミック系の運動を記述することを目的としていた．

そして，ホロノミックな系は，非ホロノミックな系の特殊な場合と考えられていた．しかし，ここでは考慮の対象をホロノミック系に限定することにする．

次式に示すk個の拘束を受けて運動する質点系を考える．

$$f_\mu(x, t) = 0, \qquad \mu = 1, 2, \cdots, k \tag{2.3}$$

ダランベールの原理によると，このようなホロノミック系のダイナミックスは次式の微分方程式を用いて記述される．

$$\vec{F}_\ell - m_\ell \ddot{\vec{r}}_\ell + \vec{R}_\ell = 0, \qquad \ell = 1, 2, \cdots, N \tag{2.4}$$

ここで，$\vec{F}_\ell$ は質点m_ℓ に作用する外力の合力であり，$\vec{R}_\ell$ は，系に加わる拘束に起因する反力の合力である．この系のダイナミックスを解くためには，系の自由度の数より多い数の運動方程式が必要である．系は$n = 3N - k$の自由度を持っているため，$3N + k$のスカラー量の運動方程式が必要である．（式(2.4) で表わされる個数３Ｎのスカラーの微分方程式と個数ｋの拘束を表わす方程式（式(2.3) ）である）目的は系の運動を記述し得る必要最小限の数の運動方程式の組を得ることである．その運動方程式の数は系の自由度の数，すなわちｎである．アッペル形式でその数の運動方程式を導く．

アッペルの方程式を導くため，仮想変位を用いる．仮想変位を簡単に説明する．ｘをある時刻ｔにおける変位とする．ｘ′をもう一つの可能な変位とする．（可能なとは，この時刻ｔにおける拘束条件を満足していることである．）状態ｘから状態ｘ′まで移すためには，$\delta x = x - x'$ の微小変位が必要である．この運動は，ある時刻ｔの瞬間に行なわれ，いかなる時間間隔をも必要としない．これを仮想変位δxと称し，真の変位（ｄｘと表わされる）と区別される．真の微小変位ｄｘは時間ｄｔを要し，この時には力や拘束も変化する．しかし，他の点ではシンボルδは微分のｄと同様の性質を持っている．

系に仮想変位$\delta\vec{r}$を与え，式(2.4) に相当するそれぞれの質点との積をとることにより

$$(\vec{F}_\ell - m_\ell \ddot{\vec{r}}_\ell + \vec{R}_\ell)\,\delta\vec{r}_\ell = 0, \qquad \ell = 1, 2, \cdots, N \tag{2.5a}$$

式(2.5a)の総和をとることにより，

$$\sum_{\ell=1}^{N} (\vec{F}_\ell - m_\ell \ddot{\vec{r}}_\ell + \vec{R}_\ell)\,\delta\vec{r}_\ell = 0 \tag{2.5b}$$

摩擦のない理想的な拘束のみを考慮しているので，拘束力は仮想変位に対して仕事をしない，すなわち，$\vec{R}_\ell \perp \delta\vec{r}_\ell$ のため，$\Sigma\vec{R}_\ell \cdot \delta\vec{r}_\ell = 0$である．このようにして，

$$\sum_{\ell=1}^{N} (\vec{F}_\ell - m_\ell \ddot{\vec{r}}_\ell)\,\delta\vec{r}_\ell = 0 \tag{2.6}$$

この方程式は，ダランベールの原理と仮想仕事の原理を結合したものである．それ故，しばしば，ダランベール・ラグランジュの方程式と称される．

下記のデカルト座標系での表記法を採用する．

$$\vec{r}_1 = (x_1, x_2, x_3), \cdots, \vec{r}_N = (x_{3N-2}, x_{3N-1}, x_{3N})$$

$$\vec{F}_1 = (P_1, P_2, P_3), \cdots, \vec{F}_N = (P_{3N-2}, P_{3N-1}, P_{3N}) \qquad (2.7)$$

そして，質量についても，次の番号付を行う．

質点1：m_1(old) → $m_1 = m_2 = m_3$ (new)

⋮

質点N：m_N(old) → $m_{3N-2} = m_{3N-1} = m_{3N}$(new) (2.8)

この表記法を採用することにより，式(2.6) は，次の形に表わすことができる．

$$\sum_{\nu=1}^{3N} (P_\nu - m_\nu \ddot{x}_\nu)\, \delta x_\nu = 0 \qquad (2.9)$$

既に述べたように，力学系は，N個の質点により構成され，個数kのホロノミックな拘束を受ける．持ち得る自由度は$n = 3N - k$で，x_1，x_2，…，x_{3N}は，この拘束のため独立ではない．それ故，系の変位を決定するn個の独立なパラメータq_1，q_2，…，q_nを定義する．このパラメータを一般化座標と呼ぶ．系の個々のデカルト座標の値x_νは一般化座標を用いて次式の形に表わすことができる．

$$x_\nu = g_\nu (q_1, q_2, \cdots, q_n, t) \qquad (2,10)$$

定常的な系では，拘束は時刻tに移存しない．それ故，仮想変位δx_νは次式の形で表わされる．

$$\delta x_\nu = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial x_\nu}{\partial q_i} \delta q_i = \sum_{i=1}^{n} a_{\nu i}\, \delta q_i \qquad (2.11)$$

式(2.11)を式(2.9) に代入することにより，

$$\sum_{\nu=1}^{3N} (P_\nu - m_\nu \ddot{x}_\nu) \sum_{\nu=1}^{n} a_{\nu i}\, \delta q_i = 0 \qquad (2.12)$$

すなわち，

$$\sum_{\nu=1}^{3N} P_\nu \sum_{i=1}^{n} a_{\nu i}\, \delta q_i - \sum_{\nu=1}^{3N} m_\nu \ddot{x}_\nu \sum_{i=1}^{n} a_{\nu i}\, \delta q = 0 \qquad (2.13)$$

もしくは，

$$\sum_{i=1}^{N} \sum_{\nu=1}^{3N} m_\nu \ddot{x}_\nu a_{\nu i}\, \delta q_i = \sum_{i=1}^{N} \sum_{\nu=1}^{3N} P_\nu a_{\nu i}\, \delta q_i \qquad (2.14)$$

式(2.14)の右辺は，系に作用するすべての外力による仮想仕事δAを表わしている．これを次式の形で記述することにより，

$$Q_i = \sum_{\nu=1}^{3N} P_\nu a_{\nu i}, \qquad i = 1, 2, \cdots, n \qquad (2.15)$$

仮想仕事は次式の形で表わされる．

$$\delta A = \sum_{i=1}^{n} Q_i\, \delta q_i \qquad (2.16)$$

ここで，Q_iは一般化座標q_iに相当する一般化力と称される．一つの一般化力の簡便な定義は，仮想変位の仮想仕事に関する係数ということである．このように定義することにより，一般化力の決定がより容易にとなる．

式(2.14)の右辺を変形するにあたり，まず式(2.10)の時間微分をとる．

$$\dot{x}_\nu = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial x}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial x_\nu}{\partial t} = \sum_{i=1}^{n} a_{\nu i} \dot{q}_i + a_\nu \tag{2.17}$$

そして２階微分は，

$$\ddot{x} = \sum_{i=1}^{n} a_{\nu i} \ddot{q}_i + \sum_{i=1}^{n} \sum_{J=1}^{n} \frac{\partial a_{\nu i}}{\partial q_i} \dot{q}_i \dot{q}_j + \sum_{J=1}^{n} \frac{\partial a_\nu}{\partial q_j} \dot{q}_j + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial a_{\nu i}}{\partial t} \dot{q}_i + \frac{\partial a_\nu}{\partial t} \tag{2.18}$$

式(2.18)より $a_{\nu i}$ は次式の形で表わされることがわかる．

$$a_{\nu i} = \frac{\partial \ddot{x}_\nu}{\partial \ddot{q}_i}, \qquad \nu = 1, 2, \cdots, 3N \tag{2.19}$$

式(2.19)を式(2.14)の左辺に用いることにより，次式が得られる．

$$\sum_{i=1}^{N} \sum_{\nu=1}^{3N} m_\nu \ddot{x}_\nu a_{\nu i} \delta q_i = \sum_{i=1}^{N} \sum_{\nu=1}^{3N} m_\nu \ddot{x}_\nu \frac{\partial \ddot{x}_\nu}{\partial \ddot{q}_i} \tag{2.20}$$

そして，次の関数Ｓを導入し，

$$S = \frac{1}{2} \sum_{\nu=1}^{3N} m_\nu \ddot{x}_\nu^2 \tag{2.21}$$

加速度エネルギーと称する，関数の形は，運動エネルギーとして類似しているが，速度の代りに加速度が入っている．このため関数Ｓを前述のように命名する．下記の関係が自明である．

$$\sum_{\nu=1}^{3N} m_\nu \ddot{x}_\nu \frac{\partial \ddot{x}_\nu}{\partial \ddot{q}_i} = \frac{\partial S}{\partial \ddot{q}_i} \tag{2.22}$$

式(2.20)，式(2.21)を用いて式(2.14)，式(2.15)，および式(2.16)を変形すると，

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial S}{\partial \ddot{q}_i} \delta q_i = \sum_{i=1}^{n} Q_i \delta q_i \tag{2.23}$$

もしくは，

$$\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial S}{\partial \ddot{q}_i} - Q_i \right) \delta q_i = 0 \tag{2.24}$$

を得る．

仮想仕事が独立であることから次式を得る．

$$\frac{\partial S}{\partial \ddot{q}} = Q_i, \qquad i = 1, 2, \cdots, n \tag{2.25}$$

式(2.25)の形の表現がアッペルの方程式である．これらは２階微分方程式の組となっている．以上により，アッペル法による運動方程式の生成の問題は，一般化座標を用いて加速度エネルギーを記述する問題に帰着される．

それ故，アッペルの方程式を多自由度リンク系へ応用するためには，一つの剛体リンクの加速度エネルギーの表現形式を見い出せばよいことがわかる．理由は，全体のチェーンの関数Sはチェーンに含まれるすべての剛体の加速度エネルギーの総和をとることによって得られるからである．関数Sは，一般化座標q_1，q_2，…，q_nを用いてリカーシブな形式で表現することが可能である．

剛体の加速度エネルギーの定義の表現から出発する．剛体は質点m_ℓの集合と考えられることから，

$$S = \frac{1}{2} \sum_{\ell=1}^{N} m_\ell \ddot{\vec{r}}_\ell^{\,T} \cdot \ddot{\vec{r}}_\ell \tag{2.26}$$

剛体の質量中心をcとし，位置ベクトルr_cを用いて表わすことにすれば，

$$\vec{r}_\ell = \vec{r}_c + \vec{r}_\ell' \tag{2.27}$$

ここで，$\vec{r}_\ell'$は重心からみた質点m_ℓの位置を与える．式(2.27)を式(2.26)に代入することにより，

$$S = \frac{1}{2} \sum_{\ell=1}^{N} m_\ell \left(\ddot{\vec{r}}_c + \ddot{\vec{r}}_\ell'\right)^T \left(\ddot{\vec{r}}_c + \ddot{\vec{r}}_\ell'\right)^2$$

$$= \frac{1}{2} M \ddot{\vec{r}}_c^{\,T} \cdot \ddot{\vec{r}}_c + \frac{1}{2} \sum_{\ell=1}^{N} m_\ell \ddot{\vec{r}}_\ell'^{\,T} \cdot \ddot{\vec{r}}_\ell' + \ddot{\vec{r}}_c \sum_{\ell=1}^{N} m_\ell \ddot{\vec{r}}_\ell' \tag{2.28}$$

ここでMを系の質量の総和，すなわち剛体の質量とすると，次式が成立する．

$$M = \sum_{\ell=1}^{N} m_\ell \tag{2,29}$$

そして式(2.28)の最後の項は0となる．これは，

$$\sum_{\ell=1}^{N} m_\ell \ddot{\vec{r}}_\ell' = \frac{d^2}{dt^2} \sum_{\ell=1}^{N} m_\ell \vec{r}_\ell' \tag{2.30}$$

であり，$\vec{r}_\ell'$が重心からの位置ベクトルであることから，

$$\sum_{\ell=1}^{N} m_\ell \vec{r}_\ell' = 0 \tag{2.31}$$

が成立するためである．このようにして式(2.28)は次のようになる．

$$S = \frac{1}{2} M \vec{w}_c^{\,T} w_c + \frac{1}{2} \sum_{\ell=1}^{N} m_\ell \vec{w}_\ell'^{\,T} \cdot \vec{w}_\ell' \tag{2.32}$$

ここで，$\vec{w}_c$は質量中心の加速度であり，$\vec{w}_\ell'$は質量中心に対する質点m_ℓの相対加速度である．この式は，運動エネルギーの式と類似しているが，速度の代りに加速度が入っている．剛体については，式(2.32)の右辺第２項を変形し，加速度エネルギーを次のように表わすことができる．

$$G = \frac{1}{2} M \tilde{\vec{w}}_c^{\,T} \tilde{\vec{w}}_c + \frac{1}{2} \tilde{\vec{\varepsilon}}^{\,T} \tilde{I} \tilde{\vec{\varepsilon}} - \left[\left(\tilde{I} \tilde{\vec{\omega}} \right) \times \tilde{\vec{\omega}} \right]^T \tilde{\vec{\varepsilon}} \tag{2.33}$$

ここで$\vec{\varepsilon}$は剛体の角加速度であり，Ｉは慣性テンソルで，記号の上に付したチルダ（～）は，それらの値が相当する剛体に固定された座標系に関して表わされていることを示す．$\tilde{\vec{w}}_c^T \tilde{\vec{w}}_c = \vec{w}_c^T \vec{w}_c$ が成立することに注意されたい．

既に述べたように，剛体チェーンの加速度エネルギーはすべてのセグメントの総和をとることにより得られる．以上述べたように，加速度エネルギーを一般化座標を用いて表現するためには，すべてのセグメントの重心の並進加速度$\vec{w}_c$と角加速度$\vec{\varepsilon}$が一般化座標で表わされれば良い．連結されたセグメントのリカーシブな加速度の表現式が既にあるのでこのことは問題ではない．アッペルの方程式がいかに単一チェーン先端自由の力学系の運動方程式を得るのに利用されているかを以下に示す．

2.2 ロボットアームへの適用

2.2.1 力学系の構成

解析の対象とする力学系は，図2.1 に示すように先端がフリー（あるいはオープン）で枝分れのない単一チェーンの力学系である．　力学系を構成する個々のリンクは互いに 1 自由度の関節によって連結されている．関節の自由度は、回転と直動の 2種類がある．この力学系を一般化座標よりなるｎ次元ベクトルでもって記述する．

$$q = (q_1, q_2, \cdots, q_n)^T \tag{2.34}$$

回転関節は，単位ベクトル$\vec{e}_i$まわりに回転でき，直動関節は単位ベクトル$\vec{e}_i$の方向にスライドできる．s_iが関節のタイプを示す指標で，

$$s_i = \begin{cases} 0 : & \text{関節が回転のとき} \\ 1 : & \text{関節が直動のとき} \end{cases} \tag{2.35}$$

である．

各関節には能動アクチュエータが存在する．回転関節の場合には次式の駆動トルクが，

$$\vec{p}_i = p_i^M \vec{e}_i \tag{2,36}$$

直動関節の場合は，次式の駆動力が作用する．

$$\vec{p}_i = p_i^F \vec{e}_i \tag{2.37}$$

駆動力／トルクのベクトルは，次式であらわされる．

$$\vec{p} = (p_1, p_2, \cdots, p_n)^T \tag{2.38}$$

式(2.38)の駆動力／トルクのベクトルでは，右上の添字^{M}と^{F}を省略している．駆動の種類が力であるかトルクであるかは，関節の種類を示す指標s_iによって自明であるからである．

アッペル法を適用して運動方程式を得た結果として，系の挙動を記述するｎ個の２階微分方程式が生成される．

$$W\ddot{q} = p + U \tag{2.39}$$

ここでｐは駆動力／トルクよりなるｎ次元ベクトルである．また，Ｗはｎ行ｎ列のマトリックスで力学系の状態ｑに依存し，Ｕはｎ次元ベクトルであり，力学系の状態ｑ，$\dot{q}$に依

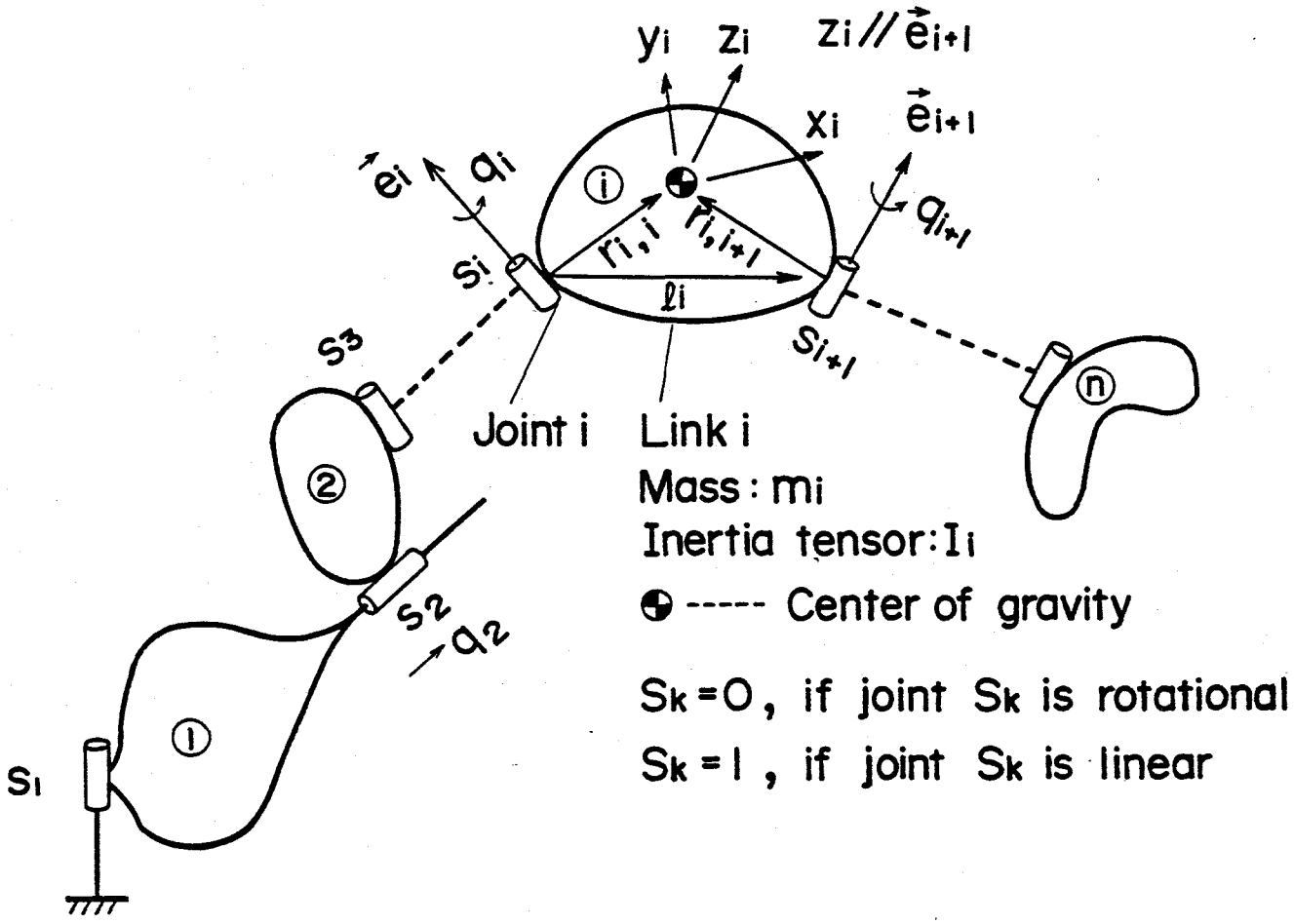


図 2-1　n自由度ロボットアームの力学モデル

存する．そして，加速度(Direct dynamics) や駆動力／トルク(Inverse dynamics)を表わす関数ｆやｇが得られる．

$$\ddot{q} = f\ (p,\ q,\ \dot{q}) \tag{2.40}$$

$$p = g\ (q,\ \dot{q},\ \ddot{q}) \tag{2.41}$$

2.2.2 座標系と変換行列

各リンクに座標系をとる．座標系の設定例を 3自由度の垂直多関節形ロボットについて図2-2 に示す．シミュレータ中では，図2-2(a)に示すように，座標原点を各リンクの重心にとっている．一般には，デナビット・ハルテンベルグの記述法[38] に従い，図2-2(b)に示すように，平行移動をも含めて，座標原点を各関節にとる方法が用いられる．しかし，アッペル法では後述のように，隣接する座標系の相互関係のうち，回転にかかわる姿勢変換行列のみを求めればよい．このため，座標原点はどこにとってもよく，どの座標系がどのリンクに固定され，かつ共に動く座標系であるかをより明瞭にするため，座標原点をリンク重心に置く記述法を採用している．このように座標系の設定法は，平行移動を除くデナビット・ハルテンベルグの記法となっている．

図2-3 に従って座標軸の設定手順を以下に示す．

(1) まず，リンク重心に座標系の原点をとる．

(2) 関節ｉの変位方向にz_{i-1}軸をとる．

(3) Σ_{i-1} ー座標系をz_{i-1}軸まわりにθ_i だけ回転する．

(4) θ_i 回転後のΣ'_{i-1} ー座標系のx'_{i-1} 軸まわりにα_i だけ回転する．そして，α_i 回転後のz'_{i-1} 軸をz_i 軸に一致させる．

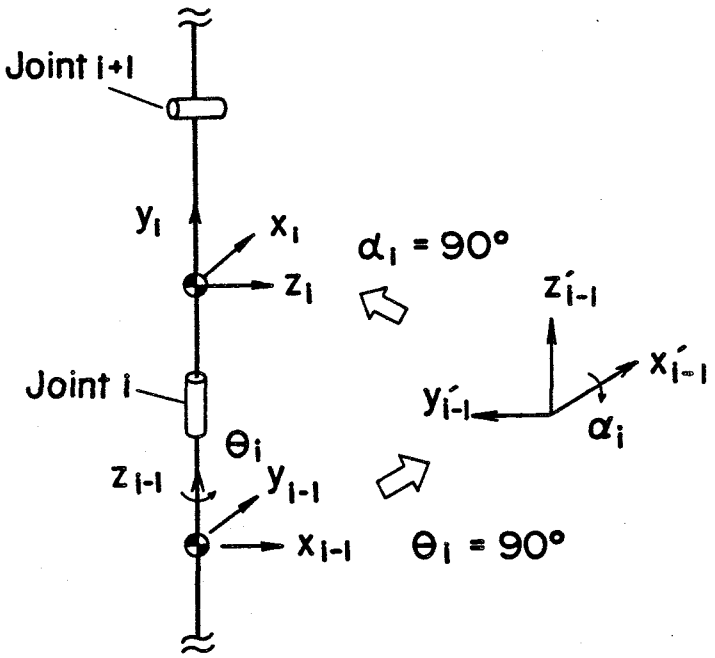


図 2-3　座標系の設定手順

なお，デナビット・ハルテンベルグの記法では，上記の (3)と(4) の設定手順の間にz'_{i-1} 軸に沿っての原点の並進d_i とx'_{i-1} 軸に沿っての並進a_i が入る．

このようにして設定した隣接する座標系相互の姿勢変換行列は，次式によって与えられる．

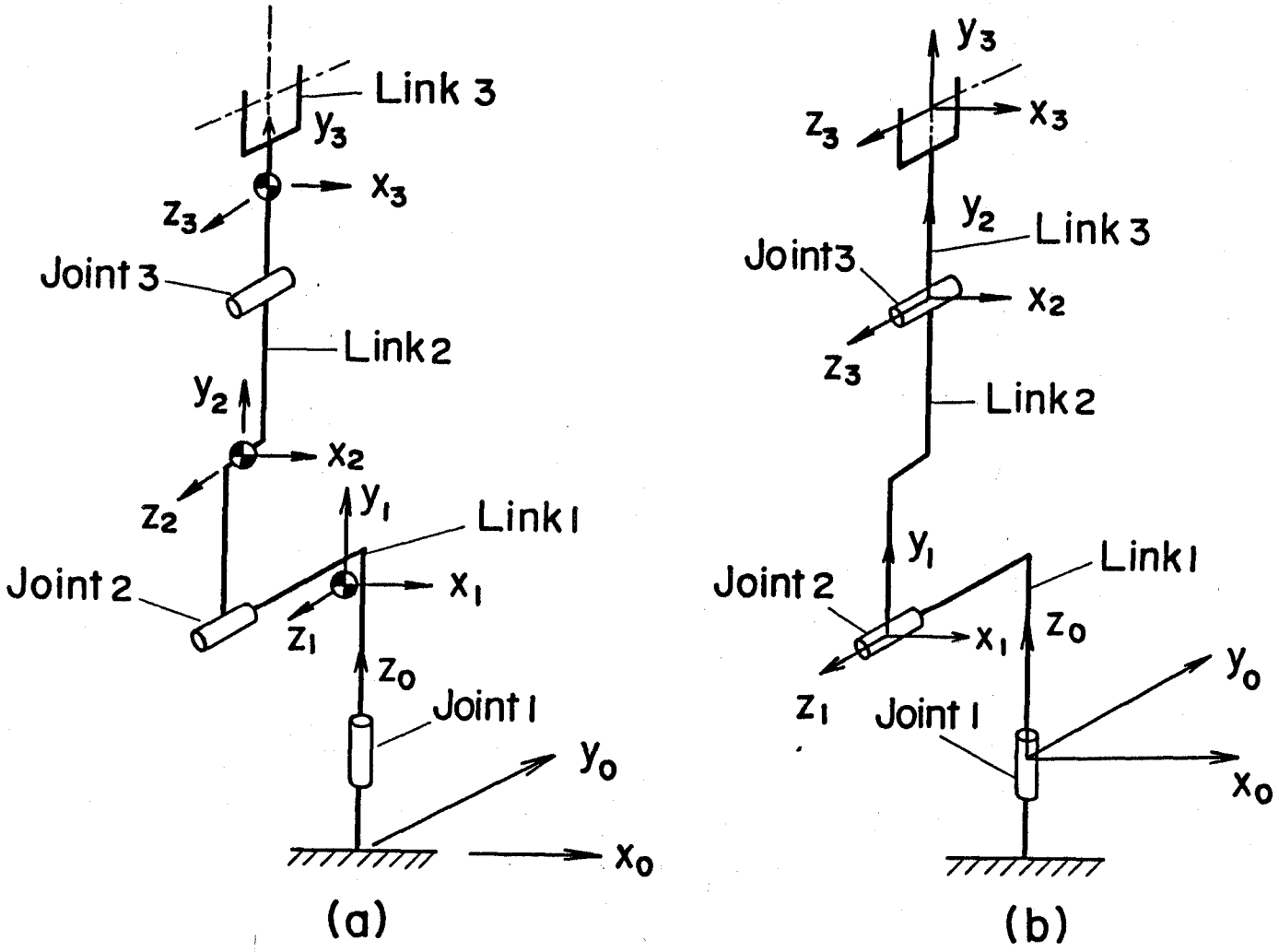


図 2-2 3自由度アームにとった座標系

$$A_{i,i+1} = \begin{bmatrix} \cos\theta_i & \sin\theta_i & 0 \\ \sin\theta_i & \cos\theta_i & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha_i & -\sin\alpha_i \\ 0 & \sin\alpha_i & \cos\alpha_i \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \cos\theta_i & -\sin\theta\ \cos\alpha & \sin\theta\ \sin\alpha \\ \sin\theta_i & \cos\theta\ \cos\alpha & -\cos\theta\ \sin\alpha \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad (2.42)$$

以下，本稿では空間の位置・速度・加速度等の 3次元ベクトルがどの座標系を用いて表わされているかを明確にするため，以下の添字を導入する．a_i をリンクiのある特性値を表わす 3次元ベクトルとし，

a_i ：上記を基準座標系で表わしたベクトル

$\tilde{a}_i$ ：上記をリンクiにとった座標系を用いて表わしたベクトル

$\underset{\sim}{a}_i$ ：上記をリンク(i-1) にとった座標系を用いて表わしたベクトル

とすると，次式が成立する．

$$a_i = A_i\ \tilde{a}_i = A_{0,1}\ A_{1,2}\cdots A_{i-1,i}\ \tilde{a}_i$$

$$\underset{\sim}{a}_i = A_{i-1,i}\ \tilde{a}_i$$

$$\tilde{a}_i = A_{i,i-1}\cdot \underset{\sim}{a}_i = A^{-1}_{i-1,i}\ \underset{\sim}{a}_i \qquad \text{以上}(2,43)$$

なお，このように定義した時，$\tilde{r}_{i,i}$ ，$\underset{\sim}{r}_{i-1,i}$ ，$\tilde{e}_{i+1}$ ，$\underset{\sim}{e}_i$ 等は，常に一定となる．

n自由度の力学系を表すため，n次元の一般化座標ベクトルq_i を導入する．このとき回転関節の場合は角度を，直動関節の場合は長さを変位としてとる．回転関節に対しては一般化座標q_i はθ_i ，すなわち，z_{i-1} 軸まわりの回転角として定義される．大きさはx_{i-1} 軸とx_i 軸との相対角でz_{i-1} 軸に垂直な平面への正射影角とする.(図2.4a) 直動関節の一般化座標q_i は，e_i 軸に沿ってのスライド量である．（図2-4b)

2.2.3 運動学的関係

リンクiの並進速度をv_i ，回転角速度をω_i とするとリンクiの並進加速度，および角加速度は$\dot{v}_i$ ，$\dot{\omega}_i$ となる．リンクi-1 とリンクiの速度の間に次の再帰的関係が成立する．

$$\tilde{\omega}_i = A_{i,i-1}\ \tilde{\omega}_{i-1} + \dot{q}_i\ (1 - s_i)\ \tilde{e}_i \qquad (2.44)$$

$$\tilde{v}_i = A_{i,i-1}\ (\tilde{v}_{i-1} - \tilde{\omega}_{i-1} \times \tilde{r}_{i-1,i}) + \tilde{\omega}_i \times \tilde{r}'_i + \dot{q}_i\ s_i\ \tilde{e}_i \qquad (2.45)$$

ここで，

$$\tilde{r}'_{i,i} = \tilde{r}_{i,i} + q_i\ s_i\ \tilde{e}_i$$

である．また加速度については，次の関係が成立する．

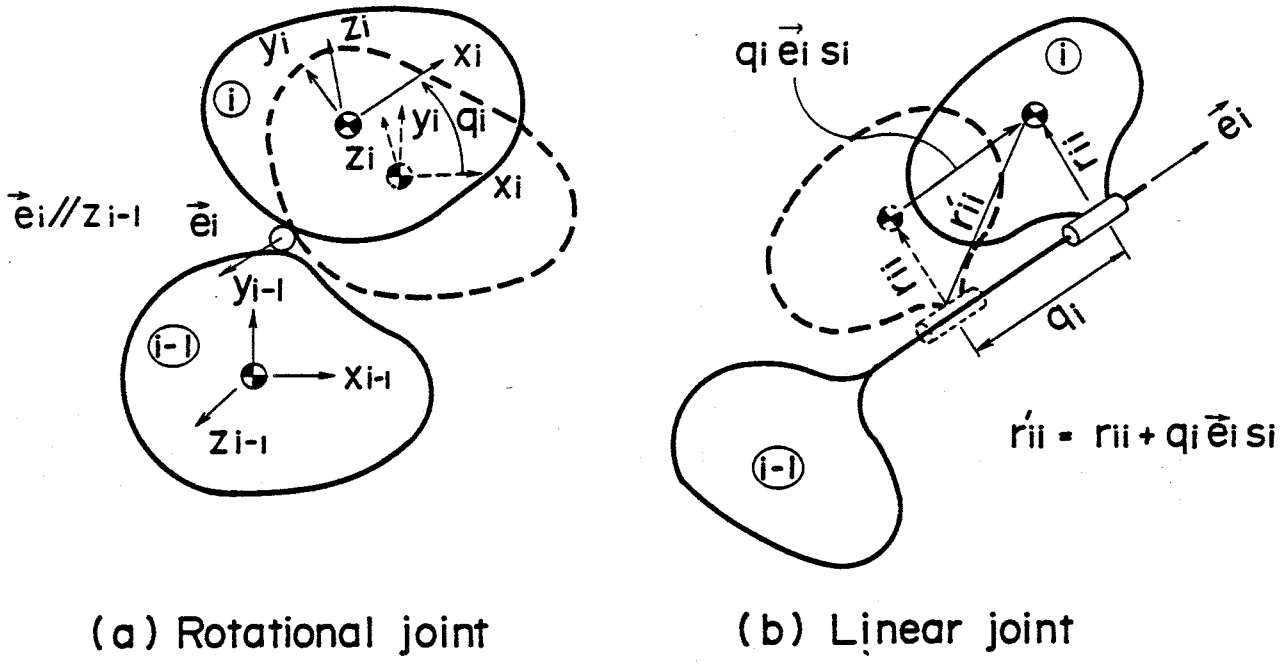


図 2-4　一般化座標

$$\tilde{\dot{\omega}}_i = A_{i,i-1}\,\tilde{\dot{\omega}}_{i-1} + \{\ddot{q}_i\,\tilde{e}_i + \dot{q}_i(\tilde{\omega}_i \times \tilde{e}_i)\}\,(1 - s_i) \qquad (2.46)$$

$$\begin{aligned}\tilde{\dot{v}}_i = {} & A_{i,i-1}\,\{\tilde{\dot{v}}_{i-1} - \tilde{\dot{\omega}}_{i-1} \times \tilde{r}_{i-1,i} - \tilde{\omega}_{i-1} \times (\tilde{\omega}_{i-1} \times \tilde{r}_{i-1,i})\} \\ & + \tilde{\dot{\omega}}_i \times \tilde{r}'_{i,i} + \tilde{\omega}_i \times (\tilde{\omega}_i \times \tilde{r}_{i,i}) \\ & + \{\ddot{q}_i\,\tilde{e}_i + 2q_i(\tilde{\omega}_i \times \tilde{e}_i)\}\,s_i \qquad (2,47)\end{aligned}$$

基準座標系が不動であることから式(2.44)～式(2.47)の再帰的表現の初期値は次式で表わされる．

$$v_0 = \omega_0 = \dot{v}_0 = \dot{\omega}_0 = 0 \qquad (2.48)$$

2.2.4 運動方程式の生成

自由度nの力学系の運動方程式は，アッペル法では，次式のように記述される．

$$(\partial G / \partial \ddot{q}_i) = Q_i \qquad (i=1,2,\cdots,n) \qquad (2.49)$$

ここで，関数Gは加速度エネルギーであり，Q_i は一般化座標 q_i によって決まる一般化力である．式(2.49)より得られるn個の運動方程式を行列の形で記すと次式を得る．

$$(\partial G / \partial \ddot{q}) = Q \qquad (2.50)$$

そして，

$$Q = (Q_1, Q_2, \cdots, Q_n)^T \qquad (2.51)$$

は，一般化力で構成されたn次元ベクトルである．

全体の加速度エネルギーは各リンクの加速度エネルギーの和である．

$$G=\sum_{i=1}^{n} G_i \tag{2.52}$$

ここで，各リンクの加速度エネルギーは次式で与えられる．

$$G_i=\frac{1}{2}m_i\,\tilde{\dot{v}}_i^T\,\tilde{\dot{v}}_i+\frac{1}{2}\tilde{\dot{\omega}}_i^T\,\tilde{I}_i\,\tilde{\dot{\omega}}_i-\{(\tilde{I}_i\,\tilde{\omega}_i)\times\tilde{\omega}_i\}^T\,\tilde{\dot{\omega}}_i \tag{2.53}$$

リカーシブ演算を可能とするため，次の行列Ω，ベクトルΘを定義する．すなわち，

$$\Omega\in R^{3\times n}\ ,\ \Theta\in R^{3\times 1} \tag{2.54}$$

で，Ωは一般化座標の加速度のリンクiの重心の並進加速度への変換行列で，Θは残りの項である．Ω，Θを用いてリンクiの重心の並進加速度は，次式であらわされる．

$$\tilde{\dot{v}}=[\Omega]\,(\ddot{q})+(\Theta) \tag{2.55}$$

ここで，

$$\Omega=[\beta_1^i,\beta_2^i,\cdots,\beta_i^i,0,\cdots,0]$$

$$\Theta=(\delta^i) \qquad \text{以上}(2.56)$$

である．

同様に次の行列Γ，Φを定義する．

$$\Gamma\in R^{3\times n}\ ,\ \Phi\in R^{3\times 1} \tag{2.57}$$

で，Γは一般化加速度のリンクの角加速度への変換行列であり，Φは残りの項である．Γ，Φを用いてリンクiの角加速度は次式で表わされる．

$$\tilde{\dot{\omega}}=[\Gamma]\,(\ddot{q})+(\Phi) \tag{2.58}$$

ここで，

$$\Gamma=[\alpha_1^i,\alpha_2^i,\cdots,\alpha_i^i,0,\cdots,0]$$

$$\Phi=(\gamma^i) \qquad \text{以上}(2.59)$$

である．

新しいリンクが力学系に加わるごとにリンクの順序を表す添字iを増加させ，変換行列Ω，Θや残りの項Γ，Φの各要素を下記のようにリカーシブに求める．

$$\alpha_j^i=A_{i,i-1}\,\alpha_j^{i-1} \qquad (j=1,2,\cdots,i-1)$$

$$\alpha_i^i=\tilde{e}_i\,(1-s_i) \qquad \text{以上}(2.60)$$

$$\gamma^i=A_{i,i-1}\,\gamma^{i-1}+\dot{q}_i\,(1-s_i)\times(\tilde{\omega}_i\times\tilde{e}_i) \tag{2.61}$$

$$\beta_j^i=A_{i,i-1}\,\beta_j^{i-1}-A_{i,i-1}\,(\alpha_j^{i-1}\times\tilde{r}_{i-1,i})+\alpha_j^i\times\tilde{r}'_{i,i} \qquad (j=1,2,\cdots,i-1)$$

$$\beta_i^i=\alpha_i^i\times\tilde{r}'_{i,i}+\tilde{e}_i\,s_i \qquad \text{以上}(2.62)$$

$$\delta^i=A_{i,i-1}\,\delta^{i-1}-A_{i,i-1}\,(\gamma^{i-1}\times\tilde{r}_{i-1,i})+\gamma^i\times\tilde{r}'_{i,i}+h \tag{2.63}$$

ここで，

$$h=-A_{i,i-1}\,[\tilde{\omega}_{i-1}\times(\tilde{\omega}_{i-1}\times\tilde{r}_{i-1,i})]+\tilde{\omega}_i\times(\tilde{\omega}_i\times\tilde{r}'_{i,i})+2\dot{q}_i\,(\tilde{\omega}_i\times\tilde{e}_i)\,s_i$$

$$\tilde{r}'_{i,i} = \tilde{r}_{i,i} + q_i \tilde{e}_i s_i \qquad \text{以上(2.64)}$$

である．

式(2.55)と式(2.58)を式(2.53)に代入することにより，個々のリンクの加速度エネルギーG_iは，次式で与えられる．

$$G_i = \frac{1}{2}\ddot{q}^T W_i \ddot{q} + V_i \ddot{q} + D_i \qquad (2.65)$$

ここで，

$$W_i = m_i \Omega^T \Omega + \Gamma^T \tilde{I}_i \Gamma$$

$$V_i = m_i \Theta^T \cdot \Omega + \Phi^T \cdot \tilde{I}_i \Gamma - \tilde{\mu}^T \cdot \Gamma$$

$$D_i = \frac{1}{2} m_i \Theta^T \cdot \Theta + \frac{1}{2}\Phi^T \cdot \tilde{I}_i \Phi - \tilde{\mu}^T \cdot \Phi$$

$$\tilde{\mu} = (\tilde{I}_i \tilde{\omega}_i) \times \tilde{\omega}_i \qquad \text{以上(2.66)}$$

である．

式(2.52)と式(2.65)に注目することにより，系全体の加速度エネルギーGは次式の形で表わされることがわかる．

$$G = \frac{1}{2}\ddot{q}^T W \ddot{q} + V \ddot{q} + D \qquad (2.67)$$

上式をアッペルの方程式(2.49)に代入することにより，次式が得られる．

$$\frac{\partial G}{\partial \ddot{q}} = W\ddot{q} + V^T = Q \qquad (2.68)$$

一般化外力の詳細については後述するが，これは次の形で表わされる．

$$Q = p + Y \qquad (2.69)$$

ここで，pは駆動力／トルクであり，Yはpと独立に計算される．

このようにして，次の運動方程式が得られる．

$$W\ddot{q} = p + Y - V^T \qquad (2.70)$$

そして，Uを次式で定義することにより，

$$U = Y - V^T \qquad (2.71)$$

最初に述べたアッペル法による運動方程式(2.39)が得られる．

$$w\ddot{q} = P + U \qquad (2.72)$$

式(2:52)と式(2.65)より，W，Vについて次式の成立することがわかる．

$$W = \sum_{i=1}^{n} W_i \quad , \quad V = \sum_{i=1}^{n} V_i \qquad (2.73)$$

上式は，慣性行列Wや非線系項Vのリカーシブな計算が可能であることを示しており，i回目の繰り返しで，次式の演算を行なっていけばよい．

$$W^i = W^{i-1} + W_i$$

$$V^i = V^{i-1} + V_i \qquad \text{以上(2.74)}$$

式(2.69)であらわされる一般化外力のもう一つの項Yは，重力項である．これは，当該

関節より手先側にあるそれぞれのリンクの重力に起因する駆動力／トルクである．図2-5(a) に示すように，関節ｉが回転関節の場合は，重力に起因する一般化外力は，後に詳述するベクトル

$$\vec{g} = 9.8\,(\ell,\ m,\ n) \tag{2.75}$$

を用いて，

$$Y_i = \sum_{k=0}^{n-i} \vec{e}_i(\vec{r}_k^{\,i} \times m_{i+k}\cdot\vec{g}) = \sum_{k=0}^{n-i} |\, m_{i+k}\cdot\vec{g},\ \vec{e},\ \vec{r}_k^{\,i}\ | \tag{2.76}$$

と表わされる．ここで｜　｜はベクトル三重積を表わし，またr_k^i は，

$$\vec{r}_k^{\,i} = \sum_{l=0}^{k} \vec{r}_{i+l,\,i+l} - \sum_{l=0}^{k-1} \vec{r}_{i+k,\,i+k+1} \tag{2.77}$$

である．

図2-5(b)に示すように関節ｉが直動関節の場合は，

$$Y_i = \sum_{k=0}^{n-i} \vec{e}_i(m_{i+k}\cdot\vec{g}) = \vec{e}_i\cdot\vec{g} \sum_{k=0}^{n-i} m_{i+k} \tag{2.78}$$

となる．

以上の式(2.76)と式(2.78)をまとめると，

$$Y = (Y_1, Y_2, \cdots, Y_n)^T \tag{2.79}$$

で，

$$Y_i = (1-s_i)\left\{\sum_{k=0}^{n-i} |\, m_{i+k}\cdot\vec{g},\ \vec{e}_i,\ \vec{r}_k^{\,i}\ |\right\} + s_i\left(\vec{e}_i\cdot\vec{g} \sum_{k=0}^{n-i} m_{i+k}\right) \tag{2.80}$$

となる．

本節で述べた運動方程式の生成課程をまとめて図2-6 に示す．リンクの重心の加速度や慣性行列Ｗ，遠心力，コリオリ力の項Ｖがリカーシブに求まることがわかる．

2.2.5 汎用化のためのインプットデータ

アッペル法には汎用性があり，回転と直動の任意の組み合わせの力学系に適用できる．しかし，座標系の設定法にデナビット・ハルテンベルグによる回転を用いているので，第1関節の変位方向に基準座標系のz_0 軸を設定する必要がある．重力ベクトルの方向が常にz_0 軸の方向と一致するとは限らず，必ずしも，

$$\vec{g} = (0, 0, -9.8) \qquad (\mathrm{m/s^2}) \tag{2.81}$$

とならない．この不都合を解消して汎用性を持たせるためには，重力方向の方向余弦ベクトル

$$(\ell,\ m,\ n)^T \tag{2.82}$$

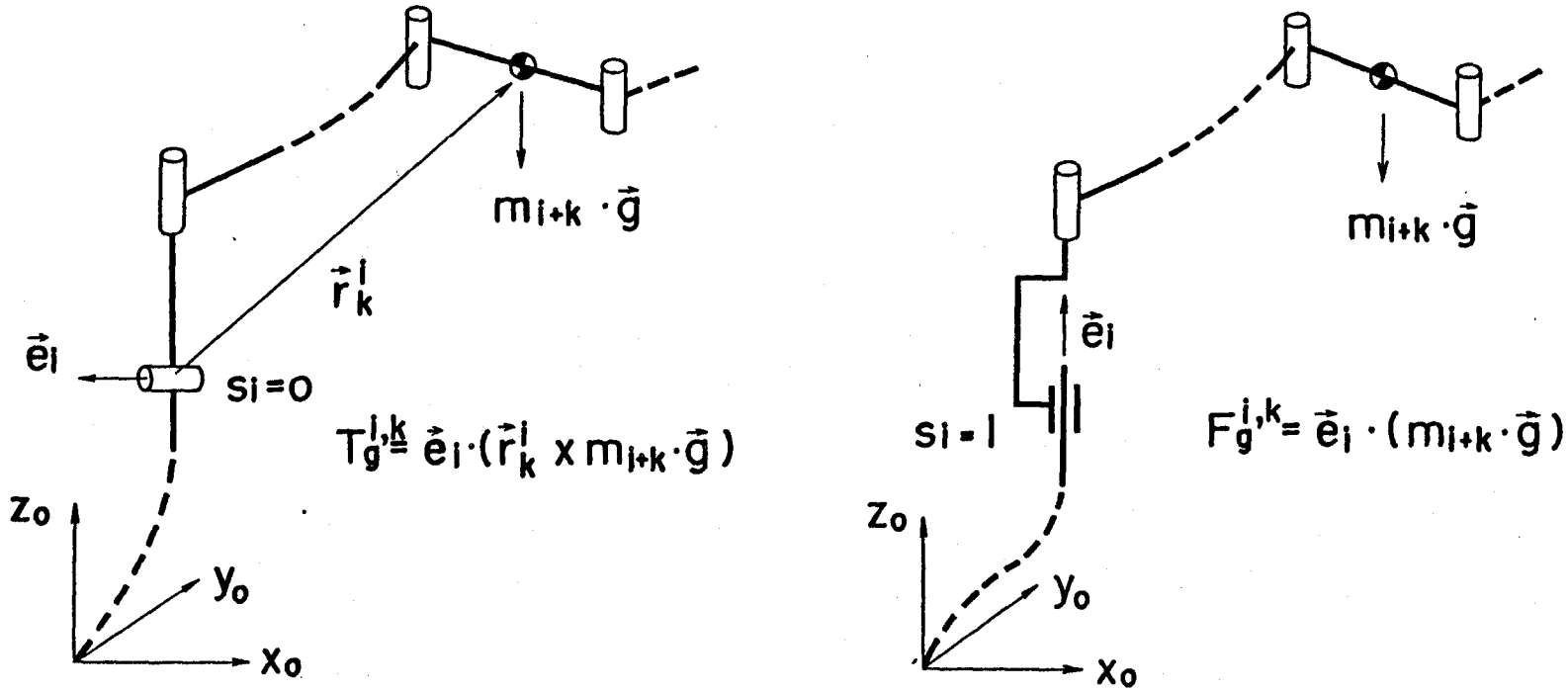
をインプットすればよく，

$$\vec{g} = 9.8\ (\ell,\ m,\ n)^T \tag{2.83}$$

で与えている．

すなわち，任意の自由度配分，軸数のロボットの運動方程式を計算機生成するために必要なインプットは，下記の項目である．

(1) ロボットの自由度　ｎ



(a) Rotational joint　　(b) Linear joint

図 2-5　重力項

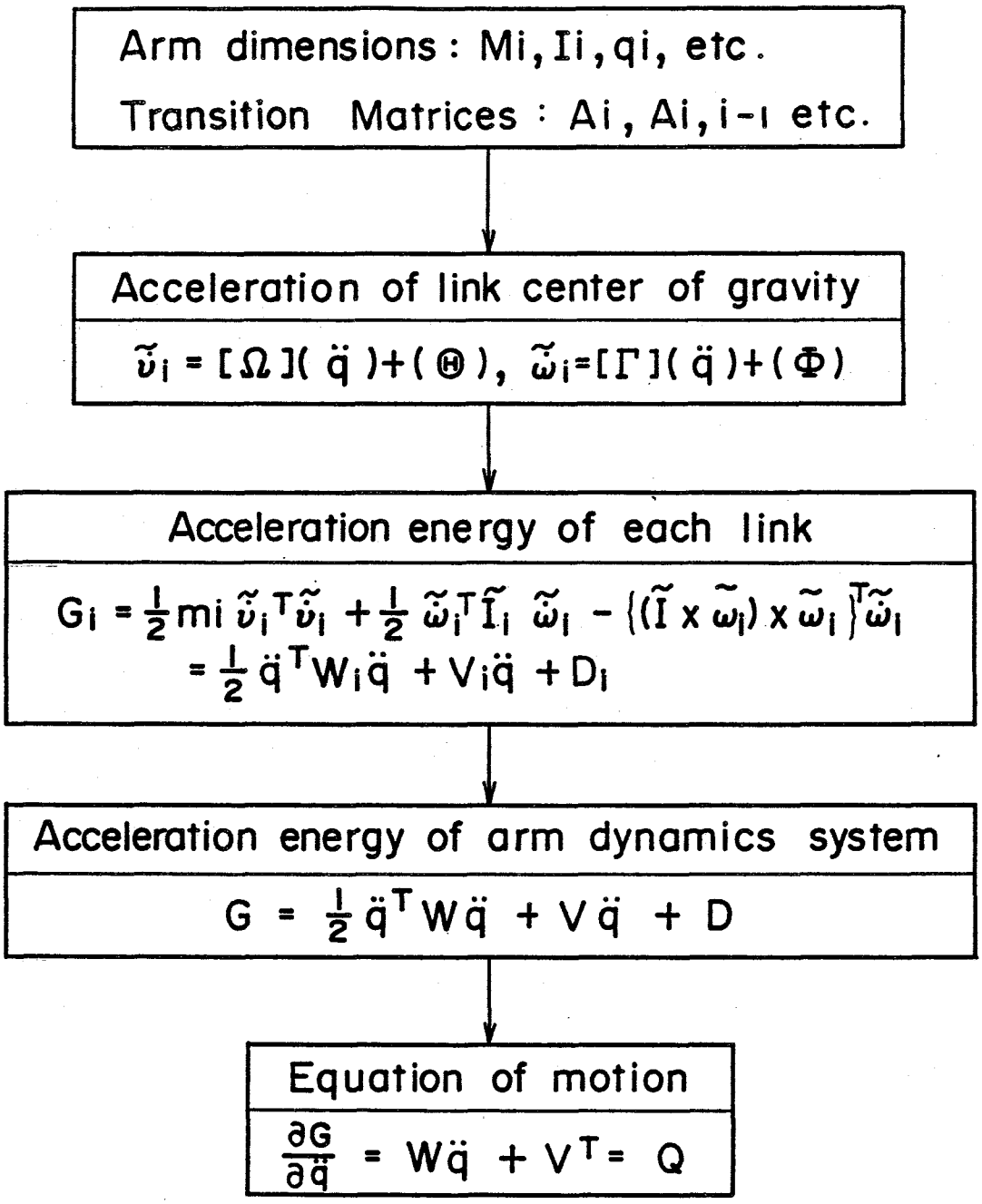


図 2-6　アッペル法による運動方程式の生成の流れ

(2) 関節の自由度（回転か直動か）　$s_k = 0$ or 1

(3) リンク相互の座標変換パラメータ（ α　ℓ　θ ）

(4) 各リンクについて

- 関節からの重心位置ベクトル　$\vec{r}_{i,i}$
- 関節から関節へ向かうリンク長ベクトル　$\vec{\ell}_i$
- 質量m_i と慣性テンソル　$\tilde{I}_i$

(5) Σ_0-座標系で表わした重力の方向余弦

2.2.6 演算速度の評価

ロボットアームの動力学では関節駆動力／トルクとリンクの初期条件が与えられた時，各リンクの位置・速度・加速度を時系列的に求める順動力学問題とリンクの位置・速度・加速度を与えて，その時の関節駆動力を求める逆動力学問題とがある．前々節で述べたようにアッペル法では双方の計算が可能である．また，後者はフィードフォワード制御，すなわち，手先を計画軌道に沿って運動させるためのアクチュエータ入力を計算してこれを用いる時に必要であり，かつ高速演算が必要なところから種々の計算アルゴリズムが提案されている．

慣性行列が得られ，関節加速度が求まる形の，これまで提案された演算アルゴリズムについて，演算量を比較して表2-1 に示す．表中，Walker,Orin の方法[1]が最も高速とされている方法であり，下二つがアッペル法についてのものである．このうち，No.1の方法がこれまでに述べた解法アルゴリズムに従って忠実に計算した時の演算量であり，No.2の方法は，Walker,Orin と同様，慣性行列の対称性を利用して三角行列としての演算を実施した時の値である．これまで最も速いとされているWalker,Orin の方法とアッペル法は，ほぼ同等の演算スピードを持ち，アッペル法はきわめて速い方法であることがわかる．

比較のため， 6自由度ロボットアームについて逆ダイナミックスの演算量を表2-2 に示す．Luh ら[24] の演算法と比較すると，順ダイナミックスの演算量は逆ダイナミックスのおよそ 2倍の演算量の必要なことがわかる．

なお，アッペル法の演算量の見積りでは，重力項の計算を含めていない．理由は，アッペル法についてもLuh らの方法と同様，式(2.48)に示すように基準座標の並進加速度の入力が可能であり，これに重力加速度を入力すれば，別途重力項を計算する必要がなく重力項の入った形での運動方程式の生成が可能となるからである．但し，上記は演算量の比較に際して，演算回数をできるだけ少なく見積もるため用いた方法であり，原理的に重力項の演算なしに重力項の考慮が可能なことを利用したものである．シミュレータ中では，手先位置の計算を行なう際，同時に重力項の計算に必要な各リンク重心位置が求まるため，重力項はこれを用いて別途計算している．

表 2-1 順ダイナミックスの演算量

Method	Multiplications	Additions	(n=6) Mul.	Add.
Uicker/Kahn	$32\frac{1}{2}n^4+86\frac{5}{12}n^3$ $+171\frac{1}{4}n^2+53\frac{1}{6}n-128$	$25n^4+66\frac{1}{3}n^3$ $+129\frac{1}{2}n^2+41\frac{1}{3}n-96$	66,271	51,548
Lee, Nigam	$3n^3+38\frac{1}{2}n^2+52\frac{2}{3}n$	$4n^3+33n^2+52n-12$	2,350	2,352
Walker, Orin	$\frac{1}{6}n^3+13\frac{1}{2}n^2+192\frac{1}{3}n-49$	$\frac{1}{6}n^3+8n^2+166\frac{5}{6}n-64$	1,627	1,261
Appel's No. 1	$2\frac{2}{3}n^3+17\frac{1}{2}n^2+165\frac{2}{3}n-72$	$2\frac{1}{3}n^3+15n^2+209\frac{2}{3}n-84$	2,118	2,218
Appel's No. 2	$1\frac{1}{3}n^3+17\frac{1}{2}n^2+167n-72$	$1\frac{1}{6}n^3+15n^2+210\frac{5}{6}n-84$	1,973	1,848

表 2-2 逆ダイナミックスの演算量

Method	Multiplication	Additions	(n=6) Mul.	Add.
Uicker/Kahn	$32\frac{1}{2}n^4+86\frac{5}{12}n^3$ $+171\frac{1}{4}n^2+53\frac{1}{6}n-128$	$25n^4+66\frac{1}{3}n^3$ $+129\frac{1}{2}n^2+41\frac{1}{3}n-96$	66,271	51,548
Waters	$106\frac{1}{2}n^2+620\frac{1}{2}n-512$	$82n^2+514n-384$	7,051	5,652
Hollerbach (4×4)	830n-592	675n-464	4,388	3,586
Hollerbach (3×3)	412n-277	320n-201	2,195	1,719
Luh, Walker, Paul	150n-48	131n-48	852	738

第３章　汎用性のある逆変換の数値解析法

3.1　まえがき

回転や直動等の任意の組み合わせによる 6自由度ロボットアームに対して，作業座標上で時系列的に与えられた手先の位置と姿勢の運動から，これを実現するための各関節の回転角や変位，および運動に必要な駆動力を求める数値計算手法を提案する．

近年，ロボットの機構・制御系の最適設計を効率よく進めるため，ロボットダイナミックスシミュレータの開発が各方面で活発に進められている．[1)-17)] そして，これらのシミュレータ中の運動解析プログラムは，ほとんど任意の自由度配分・軸数に対応できる汎用性の高いものになっている．

しかし，このプログラムを用いてロボットアームの動特性シミュレーションを行う時，各関節の変位や速度の目標値を与えるなど，関節座標系での目標値や外力を与える必要がある．　このため，作業座標系で手先の位置と姿勢の目標値が与えられて，シミュレーションを行う場合には，この目標値を一旦関節座標系に変換するいわゆる逆変換が必要になる．現在，一般に用いられているロボットアームの逆変換計算法は，個々のロボットアームの自由度配分に応じて，その幾何学的形状を考慮し，それぞれ異なる解析式を導いて解く方法[39)] である．この方法をとるかぎり運動方程式を計算するプログラムの汎用性が高いにもかかわらず，逆変換を計算するプログラムは個々のロボットアームに応じて作成しなければならないという問題点が残る．このため汎用性の高い逆変換の計算法が求められているが，筆者の知る限りでは，高野[2),40)]らのヤコビ行列を用いる数値計算法が報告されているのみである．しかしこの方法では，ニュートン法による繰り返し計算が必要で，計算時間を要する．

本章では，以下に述べる方法によって，逆変換の数値解を得る汎用性の高い計算手法を提案する．すなわち，まず作業座上で，時間の関数として与えられた手先の位置や姿勢の目標軌道から，これを時間で 2階微分することにより目標加速度を得る．次に，この目標手先加速度を関節加速度に変換する．　しかる後，この関節加速度を数値積分することにより，各関節変位を時系列的に求めるものである．本方法では，逆変換を数値積分によって得るので，ニュートン法による繰り返し計算を必要とせず，計算時間が短縮され，かつ関節の変位・速度・加速度が明らかになるので，同時に作業座標上の目標軌道を実現する駆動力が得られる利点も有する．

3.2 記号

本章で用いる座標系とアーム諸元を図3-1 に，主な記号や添字を下記に示す．

A_i　　：座標系（Σ_i-系）から基準座標系（Σ_0-系）への変換行列

$A_{i,j}$　　：Σ_j-系からΣ_i-系への変換行列

d　　：手先の位置と姿勢を示す 6次元列ベクトル

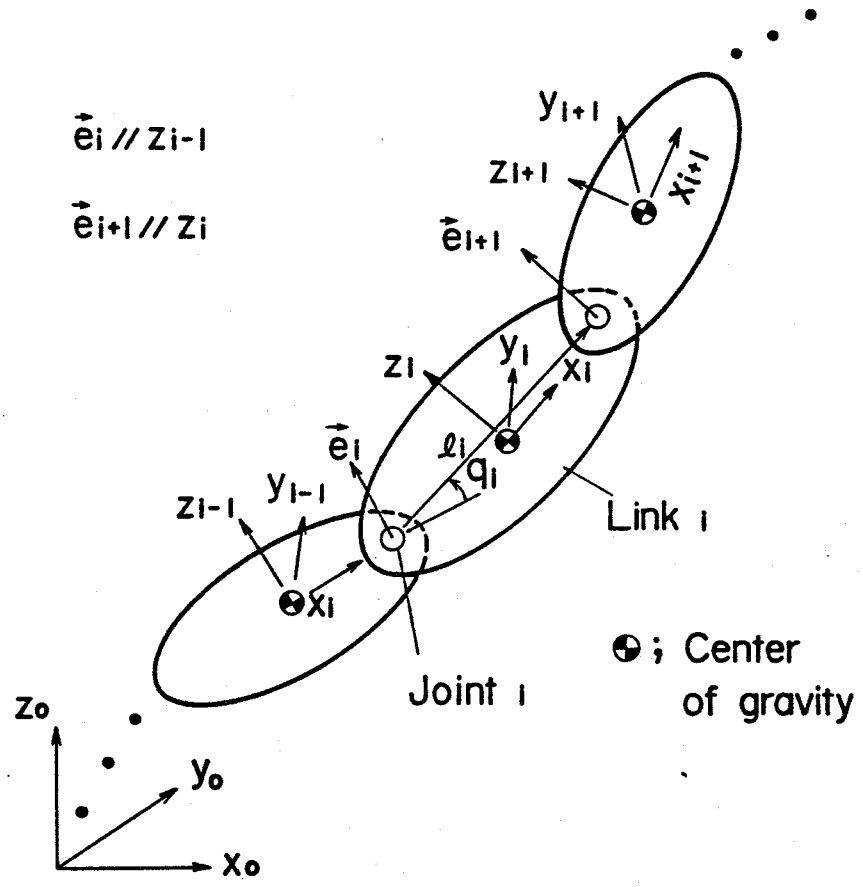


図 3-1　ロボットアーム諸元

e_i　：関節iの変位方向にとった単位ベクトル

ℓ_i　：関節iから関節i＋1へ向かう位置ベクトル

p　：p_i を要素とする関節駆動力／トルクのベクトル

q　：q_i を要素とする関節の変位ベクトル

r_x r_y r_z　：手先の目標位置，$r = (r_x, r_y, r_z)$

s_i　：関節iが回転の場合 0，直動の場合 1

t　：時間

U　：各関節に作用する重力・遠心力・コリオリ力の和のベクトル

W　：慣性行列

α，β，γ，δ　：式(3.5) 参照

Γ，Ω，Φ，Θ　：式(3.4) 参照

ϕ_x ϕ_y ϕ_z　：手先のヨー、ピッチ、ロール角，$\phi = (\phi_x, \phi_y, \phi_z)$

π，π_1　：式(3.10)参照

v_i　：リンクiの並進速度ベクトル

ω_i　：リンクiの回転速度ベクトル

添字

i　　：基準座標側から各関節，および各リンクに付した番号

T　　：転置

″ ˙ ″：時間に関する微分

～　　：各リンクに取った座標系（Σ_i-系）で表わした諸元で，～がないのは，基準座標系（Σ_0-系）で表わした諸元

¯　　：目標値

*　　：手先に関する値

j　　：式(3.5) 参照

3.3　解析法

ロボットは任意の位置・姿勢を取り得る必要上，最低六つの自由度が必要であり，6自由度で構成されるのが一般である．このような，ロボットアームの運動方程式は，関節の摩擦やリンク（以下，軸と称す）に作用する空気抵抗を無視すると，次式によって表わされる．[30)-37)]

$$[W]\ (\ddot{q}) = (P + V^T \bar{Y}) \tag{3.1}$$

ここで，qは関節変位の一般化座標で構成される 6次元の列ベクトルである．関節の位置，速度，および加速度を用いて、手先の，それ自身に取った座標系で表わした並進と回転加速度$\dot{\tilde{v}}^*$，$\dot{\tilde{\omega}}$ は，それぞれ，次のようになる．

$$(\ \dot{\tilde{v}}^*\ ) = [\ \Omega^*\ ]\ (\ddot{q}) + (\ \Theta^*\ ) \tag{3.2}$$

$$(\ \dot{\tilde{\omega}}\ ) = [\ \Gamma\ ]\ (\ddot{q}) + (\ \Phi\ ) \tag{3.3}$$

ここで，

$$[\ \Omega^*\ ] = [\beta^{*6}_1, \beta^{*6}_2, \cdots \beta^{*6}_6]$$

$$(\ \Theta^*\ ) = (\delta^{*6})$$

$$[\ \Gamma\ ] = [\alpha_1^6, \alpha_2^6, \cdots \alpha_6^6]$$

$$(\ \Phi\ ) = (\gamma^6) \tag{3.4}$$

で，上式中の α，β^*，γ，δ^* は下記の如くリカーシブに求められる．

$$\alpha_j^i = A_{i,i-1} \cdot \alpha_j^{i-1} \qquad (j=1,\cdots,i-1)$$

$$\alpha_i^i = e_i\ (1 - s_i) \qquad (i=1,2,\cdots,6)$$

$$\gamma^i = A_{i,i-1} \cdot \gamma^{i-1} + \dot{q}\ (1 - s_i)\ (\tilde{\omega}_i \times \tilde{e}_i) \qquad (i=1,2,\cdots,6)$$

$$\beta_j^{*i} = A_{i,i-1} \cdot \beta_j^{*i-1} + \alpha_j^i \cdot \tilde{\ell}_i \qquad (j=1,\cdots,i-1)$$

$$\beta_i^{*i} = \alpha_i^i \times \tilde{\ell}_i + \tilde{e}_i \cdot s_i \qquad (i=1,2,\cdots,6)$$

$$\delta^{*i} = A_{i,i-1} \cdot \delta^{*i-1} + \gamma^{i} \times \tilde{\ell}_i + \tilde{\omega}_i \times (\tilde{\omega}_i \times \tilde{\ell}_i)$$
$$+ 2\dot{q}_i \cdot (\tilde{\omega}_i \times \tilde{e}_i) \cdot s_i \qquad (i=1,2,\cdots,6) \qquad (3.5)$$

以上の式(3.2)-式(3.4) の導出は，アッペル法に基づく運動方程式の生成過程でのリンク重心加速度の表現式を利用している．すなわち式中のリンク重心位置ベクトルをリンク長ベクトルで置き換えることによって得たものである．

式(3.2),(3.3) のそれぞれ 3行 1列の列ベクトル（ $\tilde{\dot{v}}^*$ ），（ $\tilde{\dot{\omega}}$ ）を縦に並べ，一つの 6次元列ベクトルとする．これは手先の，これ自身にとった座標系で表した並進，および回転加速度を表し，各関節の加速度を用いて次式によって与えられる．

$$\begin{bmatrix} \tilde{\dot{v}}^* \\ \tilde{\dot{\omega}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Omega^* \\ \Gamma \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{q} \\ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \Theta^* \\ \Phi \end{bmatrix} \qquad (3.6)$$

一方，目標軌道は，基準座標（作業座標）系において，手先の位置と姿勢が次式の如く与えられる．

$$(\bar{r}) = (\bar{r}_x, \bar{r}_y, \bar{r}_z)^T$$
$$(\bar{\phi}) = (\bar{\phi}_x, \bar{\phi}_y, \bar{\phi}_z)^T \qquad \text{以上(3.7)}$$

ここで，r_x，r_y，$\cdots$，ϕ_z は時間の関数であり，ϕ_x，ϕ_y，ϕ_z はそれぞれ，ヨー，ピッチ，ロール角[28] である．

式(3.7) の目標位置の時間に関する 2階微分を取ることにより，目標加速度の並進成分は，次式で与えられる

$$(\ddot{\bar{r}}) = (\ddot{\bar{r}}_x, \ddot{\bar{r}}_y, \ddot{\bar{r}}_z)^T \qquad (3.8)$$

上式を基準座標系から手先座標系へ変換すると，次式を得る．

$$(\tilde{\ddot{r}}) = [A_6]^{-1}(\ddot{\bar{r}}) \qquad (3.9)$$

また，目標加速度の回転成分を，手先にとった座標系でもって表わすと，付録に示すように次式となる．

$$(\tilde{\ddot{\phi}}) = \pi\,(\ddot{\bar{\phi}}_x, \ddot{\bar{\phi}}_y, \ddot{\bar{\phi}}_z)^T + \pi_1\,(\dot{\bar{\phi}}_y\,\dot{\bar{\phi}}_z, \dot{\bar{\phi}}_z\,\dot{\bar{\phi}}_x, \dot{\bar{\phi}}_x\,\dot{\bar{\phi}}_y)^T$$

ここで，

$$\pi = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\sin\phi_y \\ 0 & \cos\phi_x & \cos\phi_y\sin\phi_x \\ 0 & -\sin\phi_x & \cos\phi_y\cos\phi_x \end{bmatrix}$$

$$\pi_1 = \begin{bmatrix} -\cos\phi_y & 0 & 0 \\ -\sin\phi_y\sin\phi_x & -\cos\phi_y\cos\phi_x & -\sin\phi_x \\ -\sin\phi_y\cos\phi_x & -\cos\phi_y\cos\phi_x & -\cos\phi_x \end{bmatrix} \qquad \text{以上(3.10)}$$

式(3.9),および式(3.10)の目標加速度の並進成分と回転成分を縦に並べて一つの 6次元列ベクトルとする．

$$\tilde{\ddot{d}} = (\tilde{\ddot{r}}, \tilde{\ddot{\phi}})^T \qquad (3.11)$$

式(3.11)に式(3.6) を適用することにより手先座標系で表わされる目標加速度からロボッ

トアームの各関節加速度への変換は，次式によって与えられる．

$$\begin{bmatrix} \ddot{q} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Omega^{*} \\ \Gamma \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} \ddot{\tilde{r}} \\ \ddot{\tilde{\phi}} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \Theta^{*} \\ \Phi \end{bmatrix} \right) \tag{3.12}$$

式(3.12)で与えられる関節加速度を数値積分することにより，目標軌道を実現するための関節変位の組（q）を時間の関数として求めることができる．　ただし，特異点では，式(3.12)の逆行列が求まらず今後の課題である．

また本解析法によれば，各時刻における変位や速度・加速度が求まるので，作業座標（基準座標）で与えられた手先の目標軌道に沿ってアームを動かすための関節駆動力も求まる．必要な関節駆動力は，式(3.12)で与えられる関節加速度を式(3.1) に代入して，次式となる．

$$(p) = [W]\ (\ddot{q}) + (Y - V^{T}) \tag{3.13}$$

3.4　解析例

解析の対象としたロボットは図3-2 に示す 6自由度の垂直多関節形である．その力学モデルとホームポジション（各関節の回転角が 0）において，各リンク（軸）にに取った座標系を図3-3 に示す．図において，各座標系の原点は各々のリンクの重心である．

各軸の重心位置と長さを基準側の関節から重心までの位置ベクトル，および手先側の関節までの位置ベクトルで表し，表3-1 に示す．そして，各軸の質量と三つの座標軸回りの慣性モーメントを表3-2 に示す．ここで，一連の諸元は，該当軸にとった座標系を用いて表わしている．

設定した手先の目標軌道は，各関節が10° 回転した状態から，手先を基準座標系のz_0軸回りに -1 rad/s の角加速度で回転させると同時に，手先をz_0 軸に沿って -1 m/s の加速度で下に降ろす軌道である．すなわち目標軌道は，次式となる．

$$\begin{aligned}
r_x &= -0.279473 && (\mathrm{m}) \\
r_y &= -0.0732595 && (\mathrm{m}) \\
r_z &= 1.44349 - t^2/2 && (\mathrm{m}) \\
\phi_x &= -0.165077 && (\mathrm{rad}) \\
\phi_y &= -0.497296 && (\mathrm{rad}) \\
\phi_z &= 0.571041 - t^2/2 && (\mathrm{rad})
\end{aligned} \tag{3.14}$$

目標軌道を図3-4 に図示する．この目標軌道に対し本解析法で求めた各関節の回転角を図3-5 に示す．また表3-3 では，本解析法で求めた 0.1秒おきの各関節の回転角から正変換により手先の位置・姿勢を求めた結果と，設定した目標軌道の比較を行なっている．本数値例は，下記の条件で行なったものである．

(1)　数値積分はルンゲ・クッタ・ギル法[41] を用い，時間きざみは，0.005 秒

(2)　変数はすべて32ビットの単精度実数

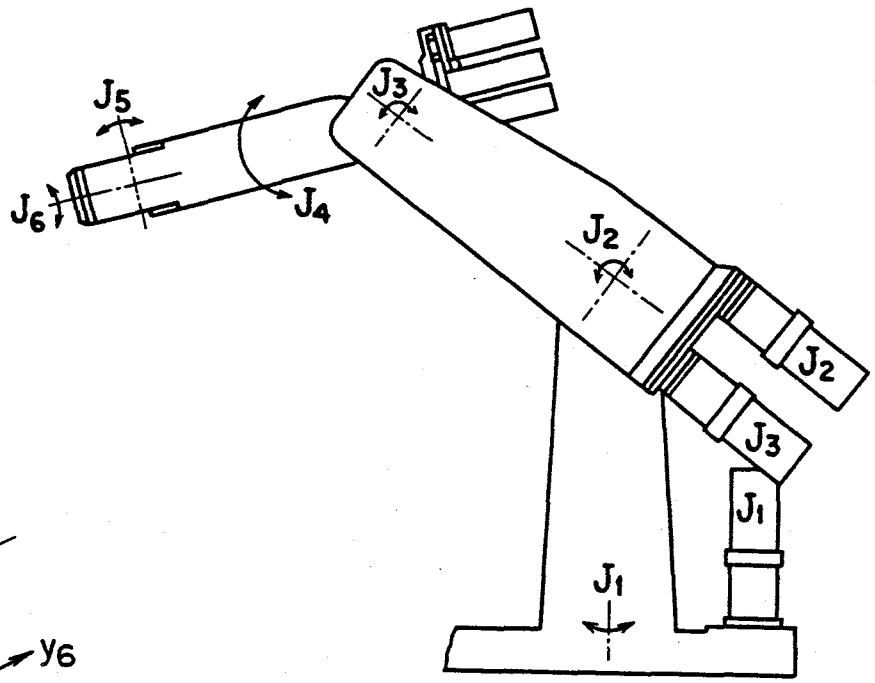


図 3-2　解析の対象とした 6軸多関節形ロボット

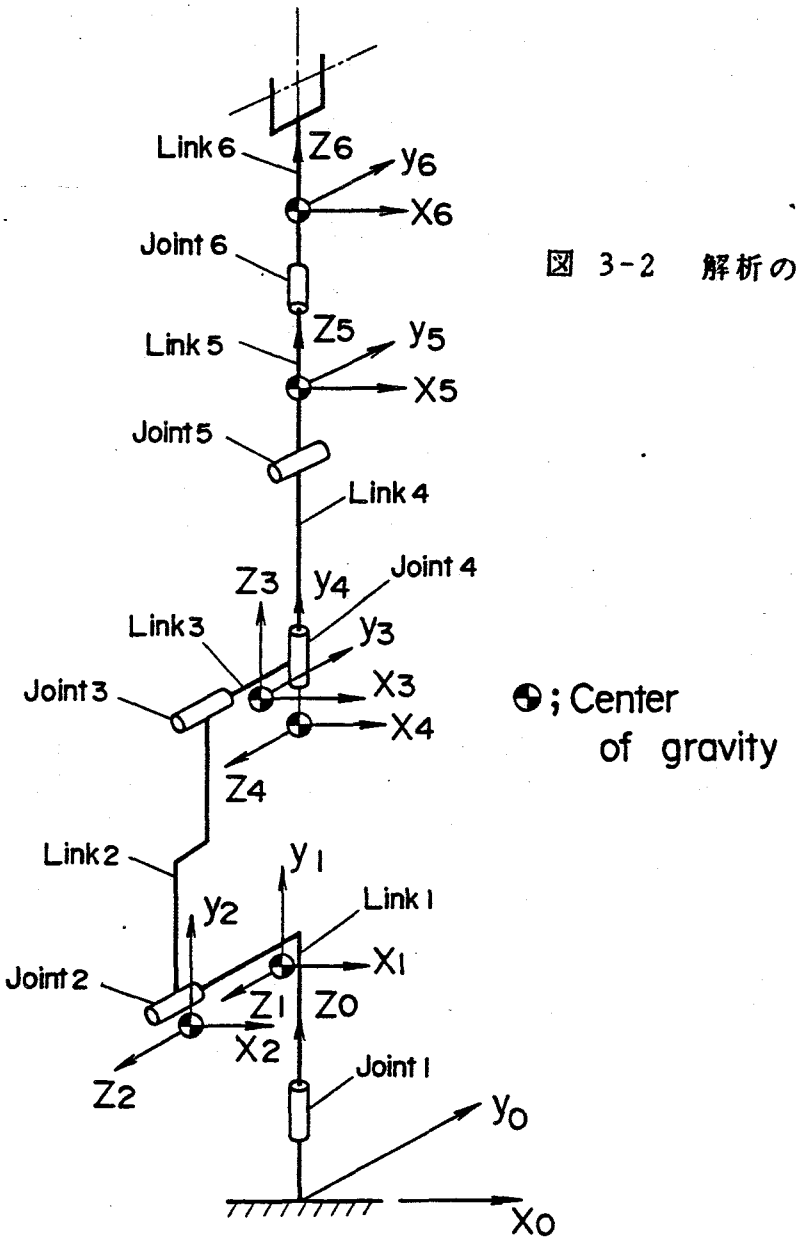


図 3-3　6軸多関節形ロボットの構成と座標系

表 3-1 リンク長と重心位置

	Link length ℓ_i(m)	Link center of gravity $r_{i,i}$(m)
Link 1	(0 , .6 , .176)	(0 , .314 , .021)
" 2	(0 , .4 , -.018)	(.012 , -.092 , -.007)
" 3	(0 , .13 , 0)	(0 , .112 , -.049)
" 4	(0 , .4 , 0)	(0 , -.032 , 0)
" 5	(0 , 0 , 0)	(0 , 0 , .02)
" 6	(0 , 0 , .085)	(0 , 0 , .065)

ℓ_i : Vector from base side joint to next joint

$r_{i,i}$: Vector from base side joint to link center of gravity

表 3-2 リンク質量と慣性モーメント

	Mass (kg)	Moment of inertia (kg·m^2)		
		I_{xx}	I_{yy}	I_{zz}
Link 1	36.14	0	.418	0
" 2	13.73	.779	.073	.837
" 3	4.75	.072	.028	.052
" 4	5.523	.17	.01	.17
" 5	.64	.001	.001	.001
" 6	.211	.0005	.0005	.0003

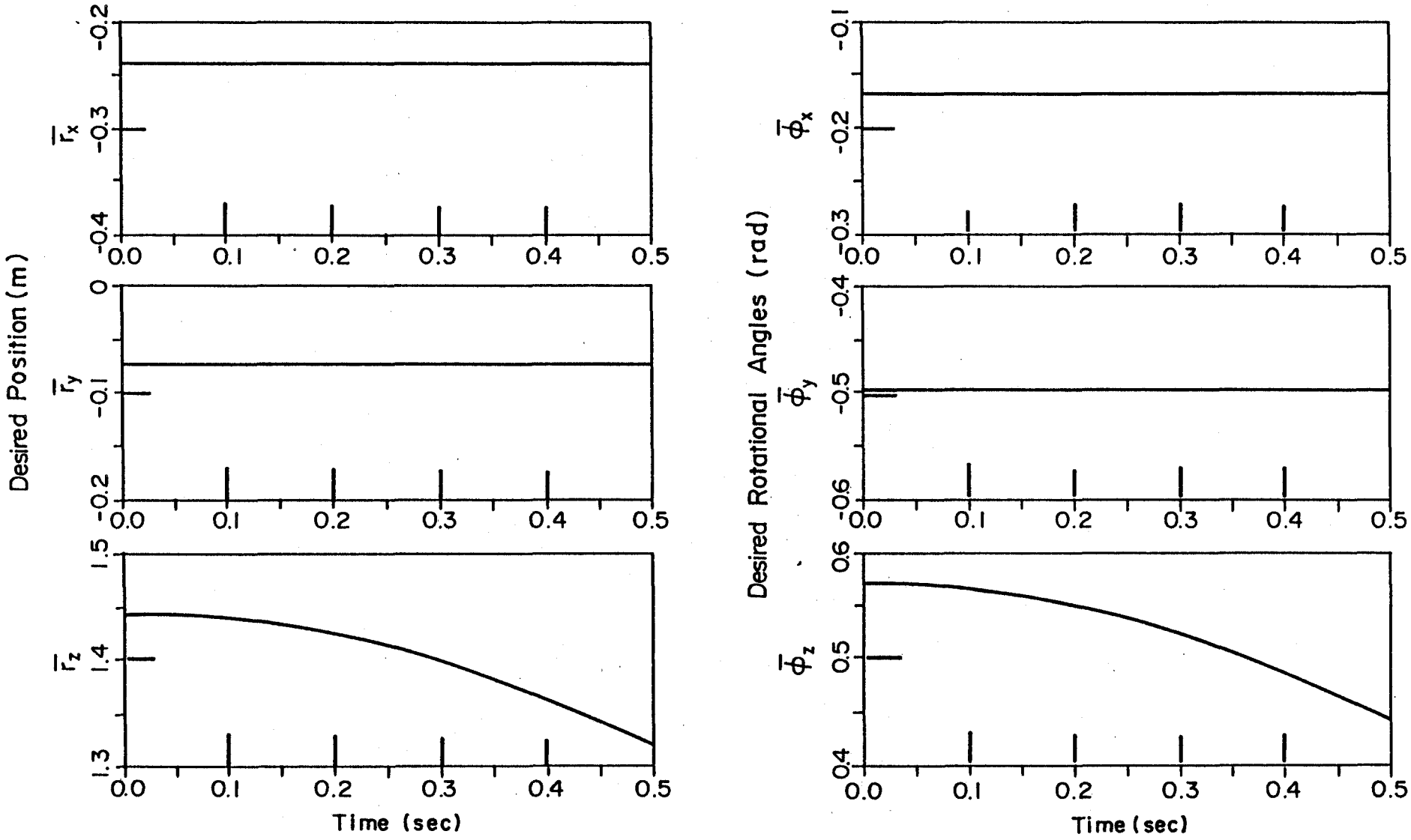

Desired Position (m)
$\bar{r}_x$
$\bar{r}_y$
$\bar{r}_z$
-0.2
-0.3
-0.4
0
-0.1
-0.2
1.5
1.4
1.3
0.0
0.1
0.2
0.3
0.4
0.5
Time (sec)
Desired Rotational Angles (rad)
$\bar{\phi}_x$
$\bar{\phi}_y$
$\bar{\phi}_z$
-0.1
-0.2
-0.3
-0.4
-0.5
-0.6
0.6
0.5
0.4
Time (sec)

図 3-4　手先の目標軌道

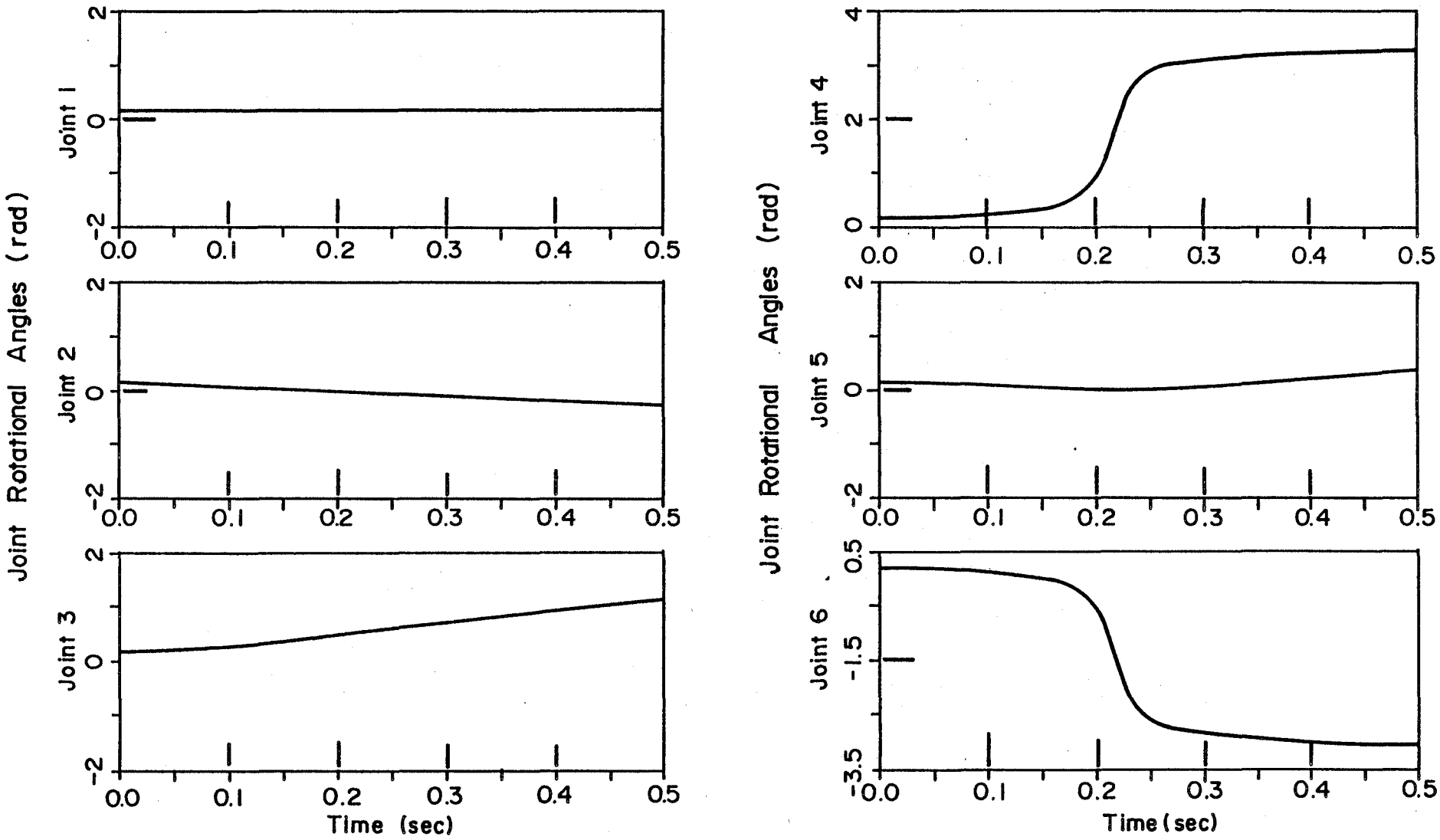


図 3-5　逆変換の計算結果

表 3-3 逆変換の数値解析精度

Time (sec)	Desired Position (m)			Numerical Solution (m)		
	$\bar{r}_x$	$\bar{r}_y$	$\bar{r}_z$	r_x	r_y	r_z
0	- .239473	- .0732595	1.44349	- .239473	- .0732595	1.44349
0.1	"	"	1.43849	"	- .0732594	1.43849
0.2	"	"	1.42349	"	- .0732593	1.42349
0.3	"	"	1.39849	"	- .0732594	1.39849
0.4	"	"	1.36349	"	"	1.36349
0.5	"	"	1.31849	"	- .0732591	1.31849
Time (sec)	Desired Rotational Angles (rad)			Numerical Solution (rad)		
	$\bar{\phi}_x$	$\bar{\phi}_y$	$\bar{\phi}_z$	ϕ_x	ϕ_y	ϕ_z
0	- .165077	- .497296	.571041	- .165077	- .497296	.571041
0.1	"	"	.566041	"	"	.566041
0.2	"	"	.551041	- .165078	- .497295	.551043
0.3	"	"	.526041	"	- .497299	.526043
0.4	"	"	.491041	- .165077	"	.491040
0.5	"	"	.446041	"	- .497297	.446038

(3) 計算機は MELCOM-COSMO900Ⅱ

表3-3 より明らかなように，本解析法で得られた手先の位置・姿勢が 5桁以上の精度で目標軌道と一致しており，本解析法がロボットの逆変換の解法に適用可能であることがわかる．ただし，ここでとりあげた解析例は軌道上に特異点を含まず，本解析法の適用も，このような軌道にとどまる．

また，目標軌道を実現するための関節駆動トルクを，式(3.13)より求めて，図3-6 に示す．図に示すように，目標軌道がなめらかであるにもかかわらず，関節1 と関節4 に大きな駆動トルクの変化が認められる．

3.5 まとめ

回転や直動などの，任意の自由度配分の 6軸ロボットアームに適用できる逆変換とダイナミックスの数値計算手法を提案した．解法は，基準座標系で与えられた目標軌道の時間に関する 2階微分をとることによって目標加速度を求め，さらに，これをロボットの関節加速度に変換した後，数値積分によって関節の時系列変位を求める方法である．

本解析法の確立により，作業座標で手先の運動が与えられる場合の任意の自由度配分の 6軸ロボットアームのシミュレーション解析が可能となると共に，この運動を実現させるのに必要な関節駆動力／トルクが同時に得られる．一連の逆変換とダイナミックスの解析の流れを図3-7 にまとめる．

【付　録】

ロボットの手先の姿勢を記述するため，ヨー，ピッチ，ロール角を文献[28] に従って定義する．これは，基準座標系Σ_0-(x_0, y_0, z_0) の手先に固定した座標系Σ_6-(x_6, y_6, z_6)へ向かう回転であり，まず最初に x_0 軸回りにϕ_x，次いで回転前の元の基準座標系Σ_0 の y_0 軸回りにϕ_y 最後に，y_0 軸と同様，元の z_0 軸回りの回転ϕ_z を施して，基準座標系を手先座標系に一致させる一連の回転角である．

基準座標系の成分 x_0, y_0, z_0 を，今注目している手先と共に運動する座標系の成分 x_6, y_6, z_6と結びつける変換は，次式によって与えられる．

$$(x_0, y_0, z_0)^T = \Phi_z \Phi_y \Phi_x (x_6, y_6, z_6)^T \tag{3.15}$$

ここで変換行列は，以下の如くである．

$$\Phi_x = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\phi_x & -\sin\phi_x \\ 0 & \sin\phi_x & \cos\phi_x \end{bmatrix}$$

$$\Phi_y = \begin{bmatrix} \cos\phi_y & 0 & -\sin\phi_y \\ & 1 & 0 \\ -\sin\phi_y & 0 & \cos\phi_y \end{bmatrix}$$

$$\Phi_z = \begin{bmatrix} \cos\phi_z & -\sin\phi_z & 0 \\ \sin\phi_z & \cos\phi_z & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{3.16}$$

手先の回転速度ベクトル$\tilde{\omega}$は，回転の順序を考慮することにより，

$$(\tilde{\omega}) = (0, 0, \dot{\phi}_x)^T + \Phi_z(0, \dot{\phi}_y, 0)^T + \Phi_z \Phi_y(\dot{\phi}_x, 0, 0)^T \tag{3.17}$$

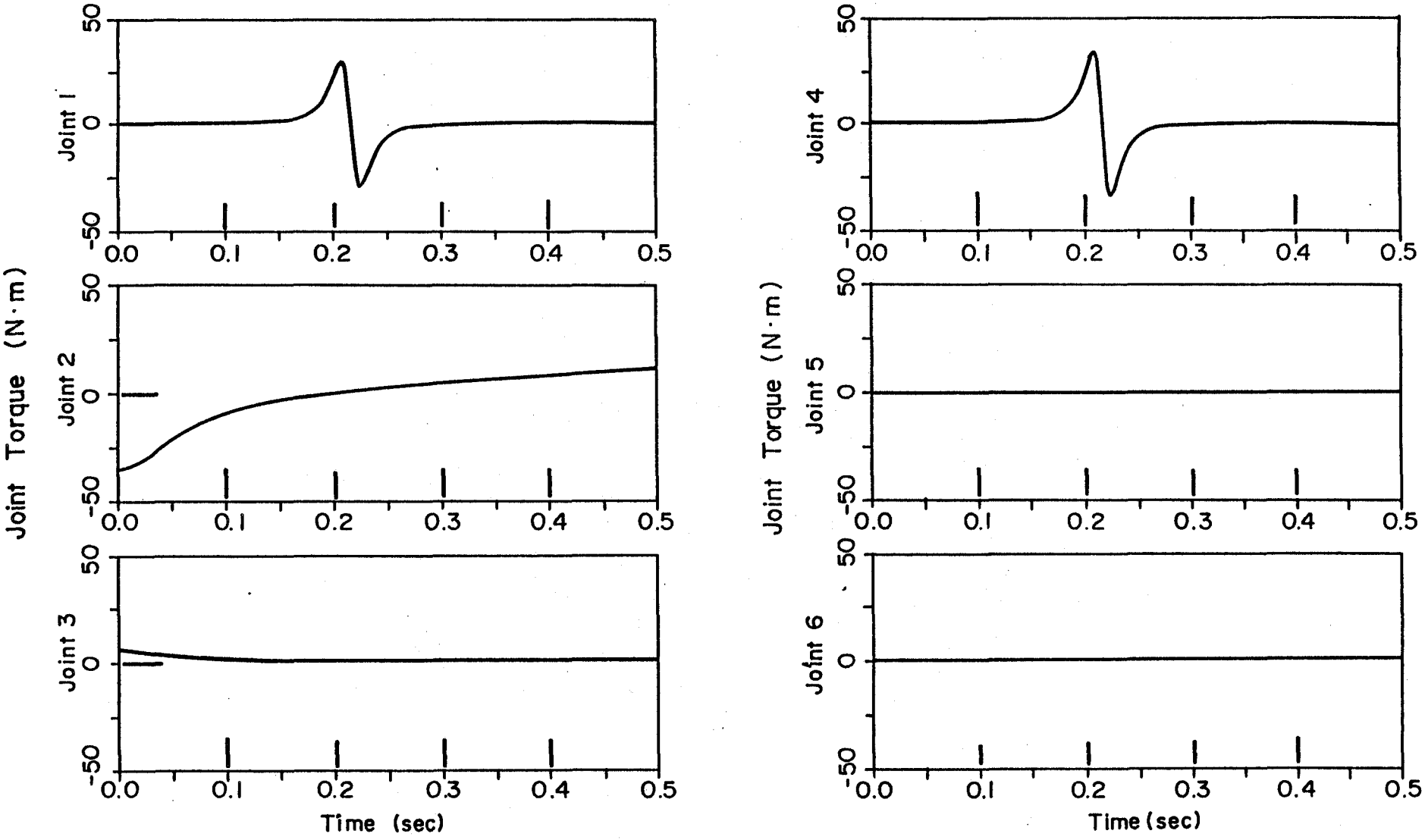

Joint Torque (N·m)
Joint 1
Joint 2
Joint 3
Joint 4
Joint 5
Joint 6
50
0
-50
0.0
0.1
0.2
0.3
0.4
0.5
Time (sec)

図 3-6 駆動トルク

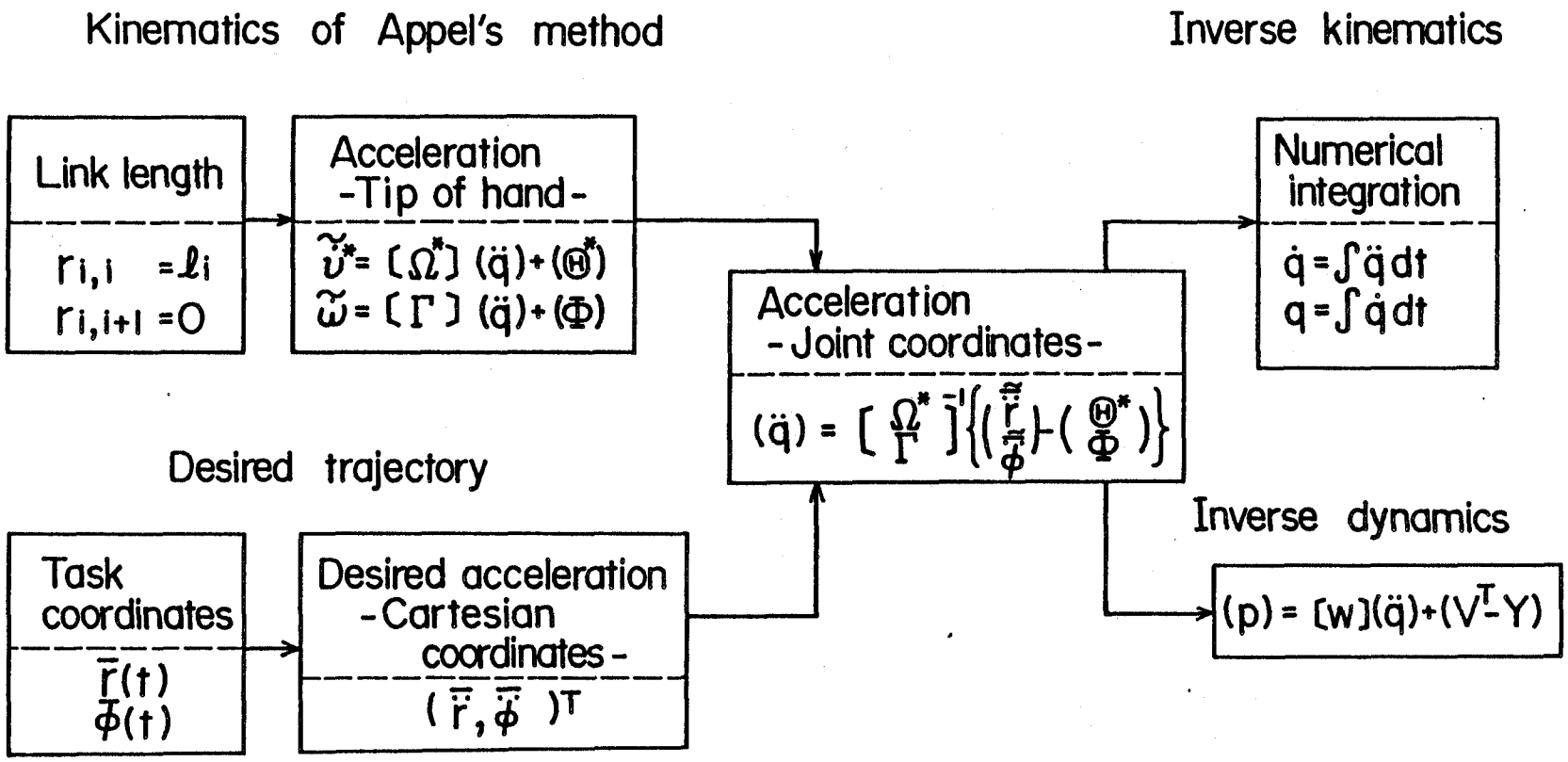


図 3-7　逆変換の解析の流れ

と表わされる．ここで，

$$(\tilde{\omega}) = (\tilde{\omega}_x, \tilde{\omega}_y, \tilde{\omega}_z)^T \tag{3.18}$$

で，スカラー$\tilde{\omega}_x$ $\tilde{\omega}_y$ $\tilde{\omega}_z$ は，それぞれ手先に取った座標系のこれ自身まわりの回転速度成分である．式(3.17)を整理すると，

$$(\tilde{\omega}) = \pi\ (\dot{\phi}_x, \dot{\phi}_y, \dot{\phi}_z) \tag{3.19}$$

となり，変換行列πは，

$$\pi = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\sin\phi_y \\ 0 & \cos\phi_x & \cos\phi_y\sin\phi_x \\ 0 & -\sin\phi_x & \cos\phi_y\cos\phi_x \end{bmatrix} \tag{3.20}$$

である．

回転速度の時間変化率，すなわち回転加速度は，

$$(\dot{\tilde{\omega}}) = \frac{d}{dt}(\tilde{\omega}_x, \tilde{\omega}_y, \tilde{\omega}_z) = \frac{d}{dt}[\pi\ (\dot{\phi}_x, \dot{\phi}_y, \dot{\phi}_z)] \tag{3.21}$$

であり，右辺を整理すると，

$$\begin{aligned}(\dot{\tilde{\omega}}) &= \pi\ (\ddot{\phi}_x, \ddot{\phi}_y, \ddot{\phi}_z) \\ &\quad + \pi_1\ (\dot{\phi}_y\ \dot{\phi}_z\ ,\ \dot{\phi}_z\ \dot{\phi}_x\ ,\ \dot{\phi}_x\ \dot{\phi}_y\ )\end{aligned} \tag{3.22}$$

となる．ここで行列π_1は，

$$\pi_1 = \begin{bmatrix} -\cos\phi_y & 0 & 0 \\ -\sin\phi_y\sin\phi_x & -\cos\phi_y\cos\phi_x & -\sin\phi_x \\ -\sin\phi_y\ \mathrm{os}\phi_x & -\cos\phi_y\cos\phi_x & -\cos\phi_x \end{bmatrix} \tag{3.23}$$

である．

第４章　アッペル法による閉ループ力学系の解析

4.1　まえがき

ロボットを搬送作業に用いる場合には，開ループの力学系であるが，物を挿入する組立作業やバリ取り作業に用いる場合には，閉ループ力学系（拘束条件付き力学系）となり，閉ループ力学系のシミュレーション機能が必要となる．したがって，ロボットのダイナミックスシミュレーションでは，開ループの力学系を対象にするだけでなく，閉ループ力学系も対象にする必要がある．しかし，筆者らの知る範囲では，前者を対象にした研究は多いが，後者を対象にした研究は比較的少ないのが現状である．

閉ループ力学系の運動解析法としては，

(1) 拘束条件で決まる自由度の数の変数を用いて運動方程式をたて，残りの運動を従属的に決定する方法[42]

(2) 運動が拘束条件を満足するように，拘束力を逐次求めていく方法[43]

(3) ラグランジュ乗数で拘束力を表わし，自由度の数以上の次元の空間で運動方程式を立てて解く方法[44]

などがある．これらのうち，(1) は独立変数の選定に直観を要するため，計算機で数値計算して運動を求める方法としては不向きであり，(2) は拘束力を求めるのに繰り返し計算を要する，などの問題がある．これに対し，(3) は一度の逆行列の計算で関節加速度と拘束力が同時に求まり，かつ拘束される自由度の数や方向をプログラム中で任意に選定し易い特長がある．

筆者らは，この特長を生かしてラグランジュ乗数を用いたアッペル法による閉ループ力学系の運動解析法について検討した．本稿では，まず解析法について述べ，アッペル法では，開ループ力学系の運動解析から閉ループ力学系の運動解析への拡張がきわめて容易であることを示す．さらに，解析例により，良い精度で閉ループ力学系の運動解析が可能であることを示す．

4.2 記号

本文中に用いる主な記号を下記に示す．

A_i	：座標系（Σ_i-系）から基準座標系（Σ_0-系）への変換行列
$A_{i,j}$	：Σ_j-系からΣ_i-系への変換行列
d	：手先の位置と姿勢を示す 6次元列ベクトル
E	：ヤコビ行列から抽出した小行列
e_i	：関節ｉの変位方向に取った単位ベクトル
f	：空間における拘束条件
g	：重力加速度ベクトル
$k(t)$	：時間に対する拘束条件

I_i ：リンクｉの慣性テンソル

ℓ_i ：関節ｉから関節ｉ＋１へ向かう位置ベクトル

J ：ヤコビ行列

m_i ：リンクｉの質量

m ：拘束される自由度の数

p ：p_i を要素とする関節駆動力／トルクベクトル

P_R ：拘束面からの反力ベクトル

q ：q_i を要素とする関節変位ベクトル

s_i ：関節ｉが回転の場合 0，直動の場合 1

t ：時間

V^T ：各関節に作用する遠心力とコリオリカの和のベクトル

W ：慣性行列

Y ：重力項

ϕ_x, ϕ_y, ϕ_z ：手先のヨー、ピッチ、ロール角

λ ：ラグランジュ乗数

v_i ：リンクｉの重心並進速度ベクトル

x^* ：基準座標系（Σ_0 －系）で表わした手先位置

$\tilde{x}^*$ ：手先座標系（Σ_n －系）で表わした手先位置

ω_i ：リンクｉの回転速度ベクトル

添字

i ：基準座標側から各関節，および各リンクに付した番号

T ：転置

～ ：各リンクに取った座標系（Σ_i －系）で表わした諸元で，～がないのは，基準座標系（Σ_0 －系）で表わした諸元

－ ：手先の目標値

* ：手先に関する値

$\tilde{J}$ ：手先座標で表わしたヤコビ行列

4.3 解析方法

4.3.1 開ループ力学系の解析

閉ループ力学系の運動解析についても，開ループ・単一チェーンの力学系の運動方程式が基礎となる．これにラグランジュ乗数を導入して閉ループ力学系の運動解析が可能となるよう拡張をはかる．アッペル法[30)-37)] によるロボットアームの運動方程式の生成法については，既に第２章で詳しく述べているので，以下に簡潔にまとめる．

各リンク（以下軸と称す）重心の並進加速度と回転角加速度は，次式となる．

$$\dot{\tilde{v}}_i = [\Omega]\ (\ddot{q}) + (\Theta) \qquad (i=1,2,\cdots,n) \qquad (4.1)$$

$$\dot{\tilde{\omega}}_i = [\Gamma]\ (\ddot{q}) + (\Phi) \qquad (i=1,2,\cdots,n) \qquad (4.2)$$

ここで，

$$\Omega = [\beta_1{}^i \beta_2{}^i, \cdots, \beta_i{}^i, 0\cdots0\ ]$$

$$\Theta = (\delta^i)$$

$$\Gamma = [\alpha_1{}^i \alpha_2{}^i, \cdots, \alpha_i{}^i, 0\cdots0\ ]$$

$$\Phi = (\gamma^i) \qquad \text{以上(4.3)}$$

で、上式中の$\alpha_j{}^i$, $\beta_j{}^i$, γ^i , δ^i は、次式のようにリカーシブに求められる．

$$\alpha_j{}^i = A_{i,i-1}\ \alpha_j{}^{i-1} \qquad (j=1,2,\cdots,i-1)$$

$$\alpha_i{}^i = \tilde{e}_i\ (1-s_i)$$

$$\gamma^i = A_{i,i-1}\ \gamma^{i-1} + \dot{q}_i\ (1-s_i) \times (\omega_i \times \tilde{e}_i)$$

$$\beta_j{}^i = A_{i,i-1}\ \beta_j{}^{i-1} - A_{i,i-1}\ (\alpha_j{}^{i-1} \times \tilde{r}_{i-1,i}) + \alpha_j{}^i \times \tilde{r}'_{i,i} \qquad (j=1,2,\cdots,i-1)$$

$$\beta_i{}^i = \alpha_i{}^i \times \tilde{r}'_{i,i} + \tilde{e}_i\ s_i$$

$$\delta^i = A_{i,i-1}\ \delta^{i-1} - A_{i,i-1}\ (\gamma^{i-1} \times \tilde{r}_{i-1,i}) + \gamma^i \times \tilde{r}'_{i,i} + h$$

$$h = -A_{i,i-1}\ [\tilde{\omega}_{i-1} \times (\tilde{\omega}_{i-1} \times \tilde{r}_{i-1,i})] + \tilde{\omega}_i \times (\tilde{\omega}_i \times \tilde{r}'_{i,i}) + 2\dot{q}_i\ (\tilde{\omega}_i \times \tilde{e}_i)\ s_i$$

$$\tilde{r}'_{i,i} = \tilde{r}_{i,i} + q_i\ \tilde{e}_i\ s_i \qquad \text{以上(4.4)}$$

式(4.1) と式(4.2) より，運動方程式は次式で表わされる．

$$[W]\ (\ddot{q}) = P + Y - V^T \qquad (4.5)$$

ここで，

$$W = \sum_{i=1}^{n} W_i$$

$$V = \sum_{i=1}^{n} V_i \qquad \text{以上(4.6)}$$

で，

$$W_i = m_i\ \Omega^T\ \Omega + \Gamma^T\ \tilde{I}_i\ \Gamma$$

$$V_i = m_i\ \Theta^T\ \Omega + \Phi^T\ \tilde{I}_i\ \Gamma - \tilde{u}^T\ \Gamma$$

$$\tilde{u} = (\tilde{I}_i\ \tilde{\omega}_i) \times \tilde{\omega}_i \qquad \text{以上(4.7)}$$

である．

また，アッペル法では，重力項も外力とみなしているので，これによる関節駆動力／トルクは次式で与えられる．

$$Y_i = \vec{e}_i \cdot \vec{g} \cdot s_i\ \Sigma\ m_{i+k} + (1-s_i) \sum_{k=0}^{n-i} | m_{i+k}\ \vec{g},\ \vec{e}_i\ ,\ \vec{r}_k{}^i |$$

ここで，| |はベクトル三重積をあらわし，また，$\vec{r}_k{}^i$は，

$$\vec{r}_k{}^i = \Sigma\ \vec{r}_{i+1,i+1} - \Sigma\ \vec{r}_{i+1,i+1+1} \qquad \text{以上(4.8)}$$

である．

4.3.2　閉ループ力学系の解析

宮崎ら[44]が示しているラグランジュ乗数を用いる閉ループ力学系の解析法を，拘束条件が時間の関数で表わされる場合にも適用できるように拡張する．

前節で述べた拘束条件のない力学系に対し，作業座標で表わされる独立なm個のホロノミックな拘束条件，

$$f(q) = k(t) \quad ; \quad f, k \in R^m \tag{4.9}$$

が加わったとする．

この時の運動方程式は，ラグランジュ乗数λを用いて，以下のように表わされる．

$$[W](\ddot{q}) = (P + Y - V^T) + [E](\lambda)$$

ここで，

$$\lambda \in R^m \quad , \quad E^T = \frac{\partial f}{\partial q} \tag{4.10}$$

式(4.10)中のE^Tは，作業座標と関節座標の関係を表わす後述のヤコビ行列［J］の拘束される方向の座標成分のみで構成される小行列となる．

式(4.9) の拘束条件の時間に関する 2階微分をとると，

$$[E]^T(\ddot{q}) + [(d/dt)\cdot E^T](\dot{q}) = \ddot{k}(t) \tag{4.11}$$

となる．式(4.10)と式(4.11)より，次式を得る．

$$\begin{bmatrix} W & -E \\ -E^T & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{q} \\ \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P + Y - V^T \\ (d/dt)E^T \cdot \dot{q} - \ddot{k}(t) \end{bmatrix} \tag{4.12}$$

慣性行列Wが正定値行列であるので，式(4.12)の逆行列が存在し，関節加速度と拘束力が次式によって求まる．

$$\begin{bmatrix} \ddot{q} \\ \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} W & -E \\ -E^T & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} P + Y - V^T \\ (d/dt)E^T \cdot \dot{q} - \ddot{k}(t) \end{bmatrix} \tag{4.13}$$

以上のように，開ループ力学系の運動方程式に加えて，ヤコビ行列［J］，およびこの時間微分と関節速度の積［(d/dt)J］（$\dot{q}$）を得ると，ラグランジュ乗数を用いた閉ループ力学系の解析が可能となる．

4.3.3　手先加速度の解析

閉ループ力学系の解析に新たに必要となる．行列やベクトルは，後述のように，手先加速度を求めることによって得られる．このうち，回転角加速度は，4.3.1 で求めた重心まわりの回転角加速度と一致する．

手先の並進加速度$\dot{v}^*$は，Σ_n-系で次式のように表わされる．

$$\tilde{\dot{v}}_n^* = [\ \Omega^*\ ](\ddot{q}) + (\ \Theta^*\ ) \tag{4.14}$$

式(4.14)に含まれるΩ^*，Θ^*は，関節iから関節i+1 へ向うベクトルℓ_iを用い，式(4.3) おいて，

$$\tilde{r}_{i,i} = \tilde{\ell}_i$$
$$\tilde{r}_{i,i+1} = 0 \qquad \text{以上(4.15)}$$

と置くことにより求まる．すなわち，

$$\Omega^* = [\beta_1^{*n}, \beta_2^{*n}, \cdots, \beta_n^{*n}]$$
$$\Theta^* = [\delta^{*n}] \qquad \text{以上(4.16)}$$

となり，β_j^{*i}，δ^{*i}は，式(4.3) の$\alpha_j{}^i$，$\alpha_i{}^i$，γ^i を用いて，次式のようにリカーシブに表わされる．

$$\beta_j^{*i} = A_{i,i-1}\ \beta_j^{*i-1} + \alpha_j{}^i \tilde{\ell}_i \qquad (j=1,2,\cdots,i-1)$$
$$\beta_i{}^i = \alpha_i{}^i \times \tilde{\ell}_i + \tilde{e}_i\ s_i$$
$$\delta^{*i} = A_{i,i-1}\ \delta^{*i-1} + \gamma^i \times \tilde{\ell}_i + \tilde{\omega}_i \times (\tilde{\omega}_i \times \tilde{\ell}_i)$$
$$+\ 2\dot{q}\ (\tilde{\omega}_i \times \tilde{e}_i)\ s_i \qquad \text{以上(4.17)}$$

式(4.14)では，手先加速度がΣ_n-系で表わされている．これをΣ_0-系における表現に書き改めると，

$$\dot{v}^* = [A_n]\ [\ \Omega^*\ ]\ (\ddot{q}) + [A_n]\ (\ \Theta^*\ )$$
$$\dot{\omega} = [A_n]\ [\ \Gamma\ ]\ (\ddot{q}) + [A_n]\ (\ \Phi\ ) \qquad \text{以上(4.18)}$$

となる．

手先の並進と回転加速度を縦に並べて一つの 6次元列ベクトルdで表わすと，

$$(\ddot{d}) = \begin{bmatrix} \dot{v}^* \\ \dot{\omega} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_n\ \Omega^* \\ A_n\ \Gamma \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{q} \\ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} A_n\ \Theta^* \\ A_n\ \Phi \end{bmatrix} \qquad (4.19)$$

を得る．

式(4.19)について考察する．関節速度と角速度を含めた手先速度をそれぞれ$\dot{q}$，$\dot{d}$とすると，これらの関係は線形であり，ヤコビ行列［J］を用いて次式で表わされる．

$$(\dot{d}) = [J]\ (\dot{q}) \qquad (4.20)$$

式(4.20)の時間微分をとると，次式を得る．

$$(\ddot{d}) = [J]\ (\ddot{q}) + [(d/dt)J]\ (\dot{q}) \qquad (4.21)$$

式(4.19)と式(4.21)を対比することによる，次式の成立することがわかる．

$$J = \begin{bmatrix} A_n\ \Omega^* \\ A_n\ \Gamma \end{bmatrix}$$
$$[(d/dt)J]\ (\dot{q}) = \begin{bmatrix} A_n\ \Theta^* \\ A_n\ \Phi \end{bmatrix} \qquad \text{以上(4.22)}$$

すなわち，アッペル法による運動方程式の導出過程で得られるΩ^*，ΓやΘ^*，Φは，それぞれΣ_n 系で表現したヤコビ行列，およびヤコビ行列の時間微分と関節速度の積に相当しており，Σ_0 系への変換は，姿勢変換行列A_n を乗ずることによって可能となる．

閉ループ力学系の解析には，開ループ力学系の解析に加えて，ヤコビ行列，およびこの時間微分と関節速度の積が必要となる．重心に関する値がアッペル法の導出過程で既に求まっているので，これを手先に関する値に変換するのは容易であり，これを閉ループ力学系の運動解析に利用できる．

これまでに述べた閉ループ力学系の運動解析の流れを，開ループのそれと対比させて，図4-1 にまとめる．図に示すようにアッペル法では，開ループ系から閉ループ系への拡張がきわめて容易であることがわかる．

4.4　解析例

前章で採用したロボットについて再び解析する．解析の対象としたロボットの運動は，図4-2 に示すように，手先がx_0-y_0平面に押し付けられた状態でy_0方向に移動する軌道である．拘束される方向はz_0方向である．

手先の目標軌道を次式に示す．

$$\bar{r}_x = -0.693 \quad (m)$$
$$\bar{r}_y = -0.028+t^2/2 \quad (m)$$
$$\bar{r}_z = 0.515 \quad (m)$$
$$\bar{\phi}_x = -\pi \quad (rad)$$
$$\bar{\phi}_y = 0 \quad (rad)$$
$$\bar{\phi}_z = -\pi \quad (rad)$$

以上(4.23)

関節座標での初期値，

$$(q_1, q_2, \cdots, q_n) = (0^\circ, 60^\circ, 60^\circ, 0^\circ, 60^\circ, 0^\circ) \tag{4.24}$$

より運動を開始して時間に対する目標軌道を表4-1 に示す．前章で述べた方法を用いて目標軌道の逆変換を行ない，各関節の回転角と必要駆動トルクを求めた．結果を表4-2 に示す．ここで駆動トルクは，ロボットの駆動に要するトルクだけでなく，拘束面からの反力を10(N) として，次式によって求めている．

$$(p) = [W](\ddot{q}) - (Y - V^T) - [J^T](\bar{P}_R) \tag{4.25}$$

ここで，

$$\bar{P}_R = (0,0,10,0,0,0)^T \tag{4.26}$$

で，摩擦力は考慮していない．

式(4.25)より求まる駆動トルクを各関節に作用させ，式(4.13)を適用して，ロボットの運動と拘束面からの反力を求めた．なお，式(4.13)において拘束面が運動しないので，右辺の$\dot{k}(t)$ は0となる．

シミュレーション結果を表4-3 に示す．同表には，同時に得られた関節変位から正変換によって求めた手先の位置と姿勢も示す．表4-3 のシミュレーション結果について，次式に示す数値計算の誤差を時間に対してプロットして図4-3 に示す．

$$E_f = |P_R - \bar{P}_R| / \bar{P}_R$$

$$E_P = \sqrt{(x-\bar{x})^2 + (y-\bar{y})^2 + (z-\bar{z})^2} / L_0 + \sqrt{(\phi_x - \bar{\phi}_x)^2 + (\phi_y - \bar{\phi}_y)^2 + (\phi_z - \bar{\phi}_z)^2} / 2\pi$$

以上(4.27)

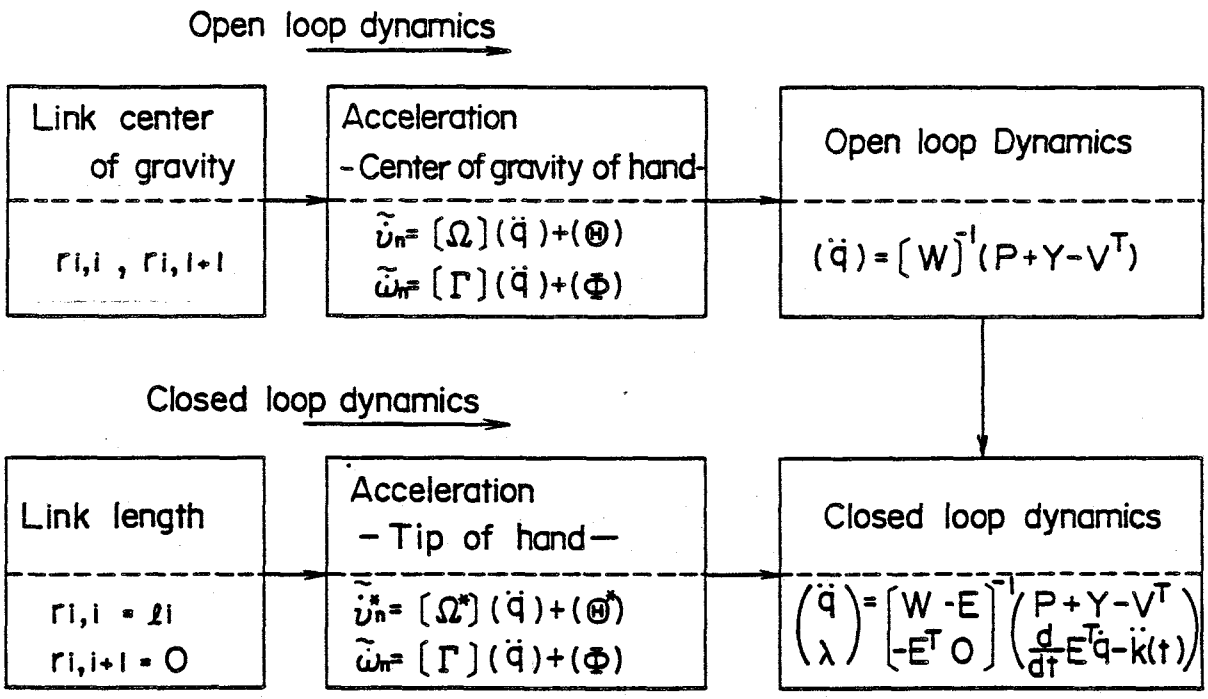


図 4-1　開ループおよび閉ループ力学系の解析の流れ

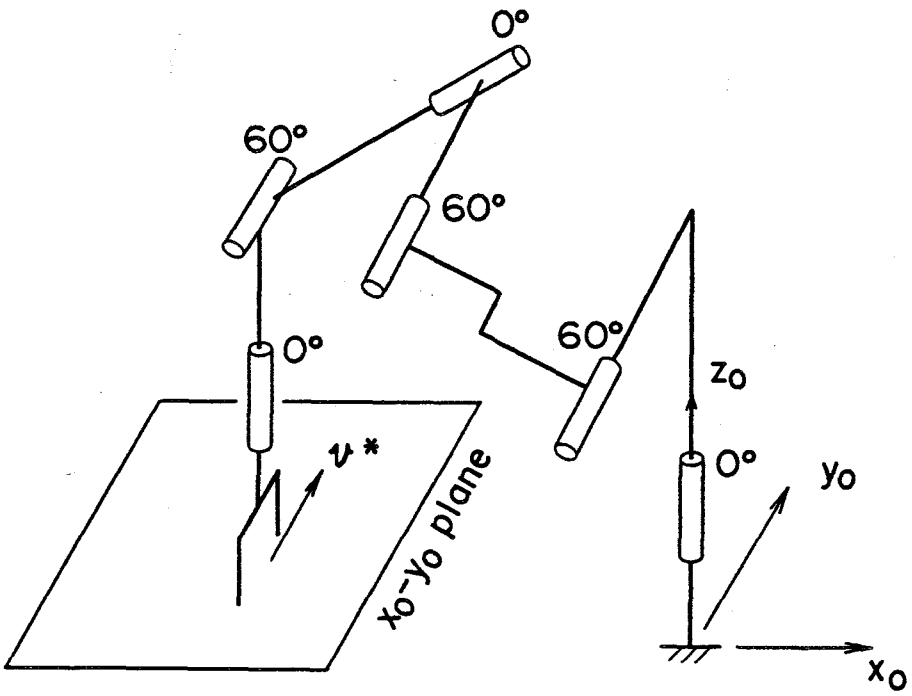


図 4-2　解析したロボットの運動

表 4-1 目標軌道

Time (S)	Hand position (m)			Hand rotational angles (rad)		
	$\bar{r}_x$	$\bar{r}_y$	$\bar{r}_z$	$\bar{\phi}_x$	$\bar{\phi}_y$	$\bar{\phi}_z$
0	-.69282	-.028	.515	-3.14159	.000001	-3.14159
0.1	"	-.023	"	"	"	"
0.2	"	-.008	"	"	"	"
0.3	"	.017	"	"	"	"
0.4	"	.052	"	"	"	"
0.5	"	.097	"	"	"	"

表 4-2 逆変換，逆ダイナミックスの数値解析

Time (S)	Joint rotational angles (rad)					
	q_1	q_2	q_3	q_4	q_5	q_6
0	0.0	1.04270	1.04270	0.0	1.04270	0.0
0.1	-.007218	1.04674	1.04812	"	1.04674	- .007218
0.2	-.028876	1.04590	1.04979	"	1.04590	- .028876
0.3	-.064946	1.04630	1.04898	"	1.04630	- .064946
0.4	-.115227	1.05067	1.04025	"	1.05067	- .115227
0.5	-.179138	1.06290	1.01578	"	1.06290	- .179138
Time (S)	Driving torques (N.m)					
	p_1	p_2	p_3	p_4	p_5	p_6
0	-4.548	-18.979	4.092	-.01502	0.0	0.0
0.1	-4.545	-18.865	4.074	-.01499	-.00019	"
0.2	-4.531	-18.529	4.020	-.01493	-.00076	"
0.3	-4.492	-17.991	3.935	-.01504	-.00172	"
0.4	-4.407	-17.256	3.820	-.01560	-.00305	"
0.5	-4.253	-16.277	3.669	-.01698	-.00472	"
Time (S)	Hand position (m)			Hand rotational angles (rad)		
	r_x	r_y	r_z	ϕ_x	ϕ_y	ϕ_z
0	-.69282	-.028	.515	-3.14159	.000001	-3.14159
0.1	"	-.023	"	"	-.000001	"
0.2	"	-.008	"	"	-.000002	"
0.3	"	.017	"	"	.0	"
0.4	"	.052	"	"	-.000001	"
0.5	"	.097	"	"	.0	"

表 4-3 シミュレーション結果

Time (S)	Joint rotational angles (rad) q_1	q_2	q_3	q_4	q_5	q_6	P_R (N)
0	0.0	1.04720	1.04720	0.0	1.04720	0.0	10.0000
0.1	-.007218	1.04674	1.04812	"	1.04674	-.007218	9.99998
0.2	-.028876	1.04590	1.04979	"	1.04590	-.028876	"
0.3	-.064946	1.04630	1.04898	"	1.04631	-.064946	"
0.4	-.115227	1.05067	1.04025	"	1.05068	-.115227	9.99994
0.5	-.179137	1.06290	1.01578	"	1.06298	-.179137	9.99992

Time (S)	Hand position (m) r_x	r_y	r_z	Hand rotational angles (rad) ϕ_x	ϕ_y	ϕ_z	↑
0	-.692820	-.028	.515	-3.14159	.000001	-3.14159	Constrained force
0.1	"	-.023	"	"	-.000001	"	
0.2	"	-.007	"	"	.0	"	
0.3	"	.017	"	"	.000004	"	
0.4	-.692819	.052	"	"	.000014	"	
0.5	-.692815	.96998	"	-3.14158	.000069	"	

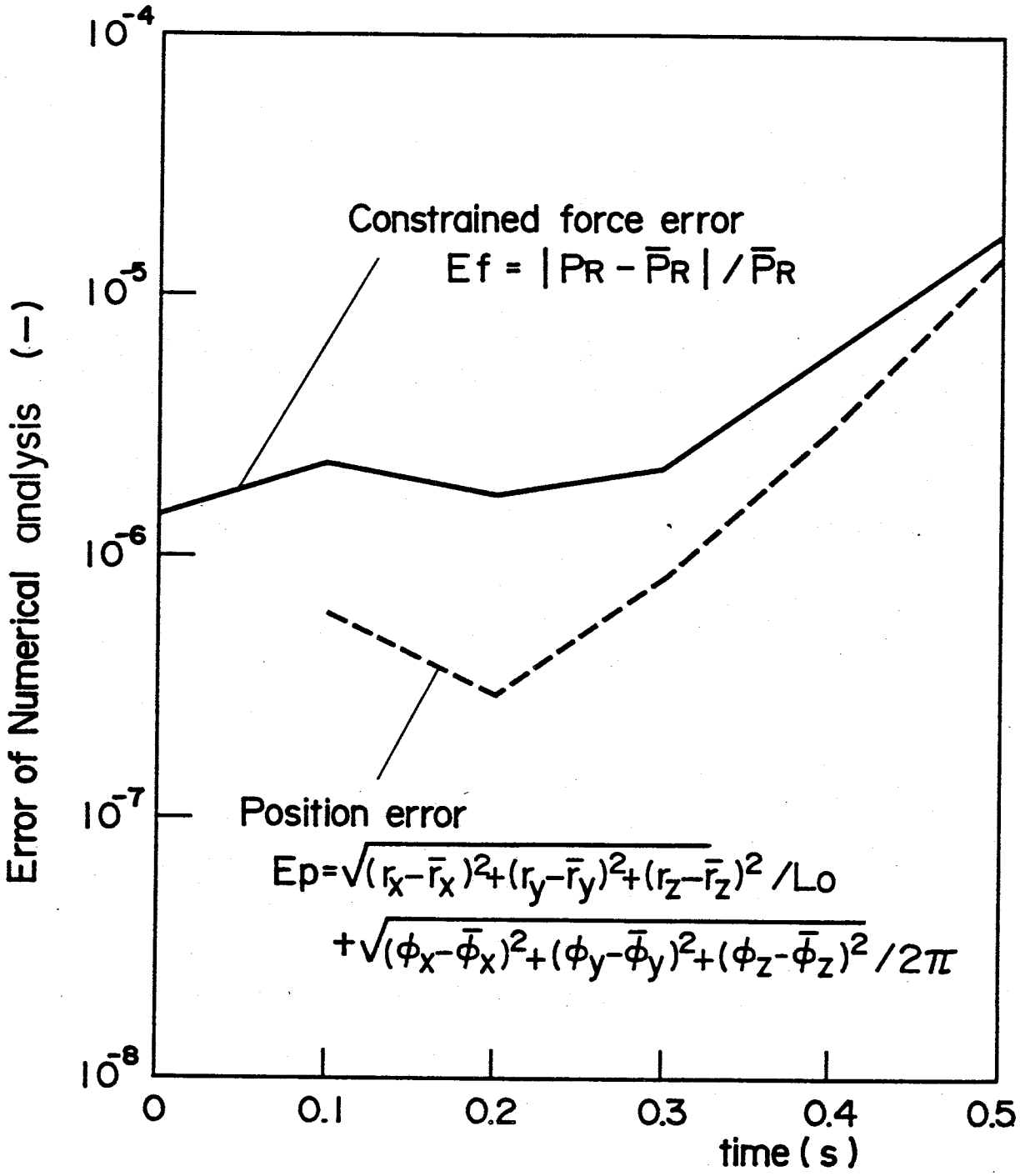


図 4-3　閉ループ力学系の数値解析誤差

ここで，L_0 はロボットの全長で，1.485(m)である．

表4-3 ，図4-3 は，次の条件のもとでの数値解析結果である．

(1) すべての変数は32ビットの単精度実数

(2) 数値積分は，ルンゲ・クッタ・ギル法

(3) 計算の時間きざみ幅は，0.005 秒

図4-3 より，軌道と拘束力の誤差がともに，10^{-5}%のオーダであり，通常に用いられる数値計算法により，拘束条件付き力学系の解析が実用上十分の精度で解析可能であることがわかる．

4.5 まとめ

産業用ロボットでは，物の挿入やばり取り作業の際など，閉ループ力学系の運動解析を必要とする場合がしばしば生ずる．このような作業のダイナミックスシミュレーションを可能にするため，ラグランジュ乗数を用いたアッペル法による閉ループ力学系の運動解析法を明らかにした．さらに，解析例についてこの方法の数値計算の精度を評価した．

得られた結論は，以下の通りである．

(1) 検討した解析法では，アッペル法の運動方程式の導出過程において，リンク重心位置を関節位置に置き換えることにより，ラグランジュ乗数を用いた閉ループ力学系の解析に必要な拘束点のヤコビ行列，およびこの時間微分と関節速度の積を得る．

(2) この方法を用いると，従来の開ループ力学系の運動解析から閉ループへの拡張がきわめて容易になり，かつ拘束される自由度の数や方向をプログラム中で任意に選定できるなどの利点がある．

(3) 解析例について，本方法の数値計算精度を検討した結果，実用上十分な精度で拘束条件付き力学系の運動シミュレーションが可能であることが明らかになった．

第５章　関節座標上の拘束条件付力学系の解析とその応用

5.1　まえがき

本章では，多自由度剛体ダイナミックスの解析機能の拡張に拘束条件が関節座標で与えられる運動解析の適用を提案している．これまでに開発したシミュレータ中のプログラムでは任意の自由度配分・軸数の単一チェーンの力学系の解析が可能である．これに拘束条件が関節座標で与えられる時のダイナミックス解析を付与することにより，ある関節については運動が，残りの関節については駆動力が与えられる逆ダイナミックス（Inverse dynamics）と順ダイナミックス（Direct dynamics ）の複合した解析が可能となる．

機構，[45),46)] ロボットマニピュレータ[47),48)] ，および歩行機械[49)-51)] を対象として，拘束条件付きの力学系の解析について，これまで多くの研究が行なわれている．そして，これらの研究では，手先と作業対象物の間の幾何学的関係や力の相互作用を考慮したダイナミックスが取り扱われている．すなわち，拘束条件が作業座標（空間座標）で表わされる場合である．

本章では，拘束条件が関節座標で表わされる場合の解析について述べる．用いた解析法は，拘束される関節駆動力／トルクにラグランジュ乗数を導入して解く方法である．解析法は，従来の拘束条件が空間座標で表わされる場合に比べ，関節座標と空間座標の間の相互変換が不要なため，より簡略なものとなっている．本解析法を任意の自由度配分・軸数の力学系のダイナミックス解析が可能なプログラムと組み合わせることにより，下記に示すような様々な解析に応用することが可能である．以下これらの解析法，および解析例について述べる．

(1) 運転中のリンクの応力や軸受荷重の解析

(2) 基準座標に運動を伴う時（地震等による）のシミュレーション

(3) 枝分れ力学系（トリー構造）の運動解析

なお単一チェーンの力学系について，逆ダイナミックスと順ダイナミックスの複合した解析については，慣性行列を変形する方法[52),53)] が既に述べられている．しかしこの方法では枝分れ力学系への拡張には適用できない．

5.2　単一チェーンの解析

5.2.1　解析法

単一チェーン，先端自由の力学系において，そのうちの複数個の関節の運動が時間の関数として陽に与えられる場合の力学解析について考える．この解析の意味するところは，総ての関節の運動が与えられた時に必要な関節駆動力／トルクを求める逆ダイナミックス（Inverse　dynamics）ではなく，ある関節については運動が与えられ，残りの関節については駆動力／トルクが与えられる時の力学系の挙動を求める順ダイナミックス（Direct dymanics ）の解析法である．すなわち，逆ダイナミックスと順ダイナミックスの複合した運動解析である．この解析で運動が与えられる関節を拘束された関節と考え，拘束力に

ラグランジュ乗数を導入する．

図5-1 に示すように，単一チェーン，自由度nの力学系に基準座標の側からすべての関節に番号を付す．これを，

$$i = 1, 2, \cdots, n \qquad (5.1)$$

とする．n個の関節のうちm個が拘束されるとして拘束される関節の番号を

$$k = k_1, k_2, \cdots, k_m \qquad (5.2)$$

とする．時間の関数として与えられる関節の運動を拘束条件とみなし，次式で与える．

$$q_k = f_k(t) \qquad (k = k_1, k_2, \cdots, k_m) \qquad (5.3)$$

拘束条件の時間に対する２階微分は次式となる．

$$\ddot{q}_k = (d^2/dt^2) f_k(t)$$

$$(k = k_1, k_2, \cdots, k_m) \qquad (5.4)$$

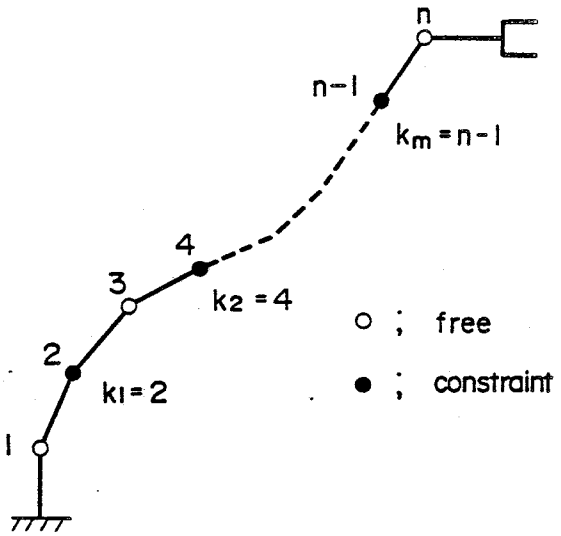


図 5-1 関節座標上の拘束を受ける単一チェーンの力学系

このような力学系の運動方程式を簡略に記述するため次の対角成分のみより成る拘束条件行列Cを導入する．

$$C = \mathrm{diag}(c_{11}, c_{22}, \cdots, c_{nn})$$

で，

$$c_{ii} = 1 \qquad (i = k_1, k_2, \cdots, k_m)$$

$$c_{ii} = 0 \qquad (i \neq k_1, k_2, \cdots, k_m) \qquad \text{以上}(5.5)$$

である．

拘束される関節駆動力／トルクに次式のラグランジュ乗数λを導入する．

$$\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_m)^T \qquad (5.6)$$

運動方程式は，ラグランジュ乗数λを用いて次式で表わされる．

$$[W](\ddot{q}) = [\bar{C}](p) + Y - V^T + [\tilde{C}](\lambda) \qquad (5.7)$$

ここで，

$W \in R^{n \times n}$ ；慣性行列

$q \in R^n$ ；関節にとった一般化座標の変位

$p \in R^{n-m}$ ；拘束されない関節駆動力

$Y \in R^n$ ；重力項

$V \in R^n$　　；遠心力・コリオリ力の項

$\lambda \in R^m$　　；ラグランジュ乗数

$\tilde{C} \in R^{n \times m}$　　；拘束条件行列［C］のうち，0ベクトルの列を除いた小行列

$\bar{C} \in R^{n \times (n-m)}$　；行列［I_n −C］のより，0ベクトルの列を除いた小行列

$I_j \in R^{j \times j}$　　；単位行列

添字^T　　；転置

である．

単一チェーン，先端自由の力学系を対象として，上記の慣性行列Wや非線形項V^T，Yを得る方法につては，既に多くの提案がなされている．筆者らは，アッペル法を用いてこれらの項を求めている．

式(5.4)，および式(5.7) より次式が得られる．

$$\begin{bmatrix} W & -\tilde{C} \\ \tilde{C}^T & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{q} \\ \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} [\bar{C}]\ (p) + Y - V^T \\ (d^2/dt^2) f_k(t) \end{pmatrix} \tag{5.8}$$

式(5.8) より，

$$\begin{pmatrix} \ddot{q} \\ \lambda \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} W & -\tilde{C} \\ \tilde{C}^T & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} [\bar{C}]\ (p) + Y - V^T \\ (d^2/dt^2) f_k(t) \end{pmatrix} \tag{5.9}$$

が得られ，式(5.9) より力学系の運動と拘束された関節の駆動力／トルクを同時に求めることができる．

5.2.2 応用と解析例

関節座標で拘束条件の与えられる場合の解析は，運転中のリンクの応力解析や軸受荷重の解析，および地震時の応答のように基準座標に運動を伴う時のシミュレーションに利用できる．ダイナミックスシミュレーションプログラムによるリンクの応力解析は，以下の手順で行なう．

(1) 応力解析を希望する箇所に新たに1自由度の関節を設ける．この時，引っ張り・圧縮応力であれば直動関節を，曲げモーメントであれば回転関節をとる．

(2) この新たに設けた関節を拘束された関節とみなし拘束条件が関節座標で与えられる場合の運動解析を行なう．これにより求まる当該関節の駆動力やトルクが引っ張り・圧縮力や曲げモーメントとなる．この解析での関節の拘束条件は次式となる．

$$q_k = 0 \qquad (k = k_1, k_2, \cdots, k_m) \tag{5.10}$$

運転中の軸受荷重の解析も同一手順である．

以下に，基準座標に運動を伴う時のシミュレーション例を示す．解析の対象としたロボットは，4自由度の水平関節形である．その力学モデルを図5-2 に示す．ロボットの基準座標に運動を与えるため，図5-3 に示すように，根元にさらに一つの直動関節を設けている．解析したロボットのアーム諸元を表5-1 に示す．解析結果を表5-2 に示す．表5-2 では，解析の妥当性を検証するため，次の二つの計算結果を比較している．

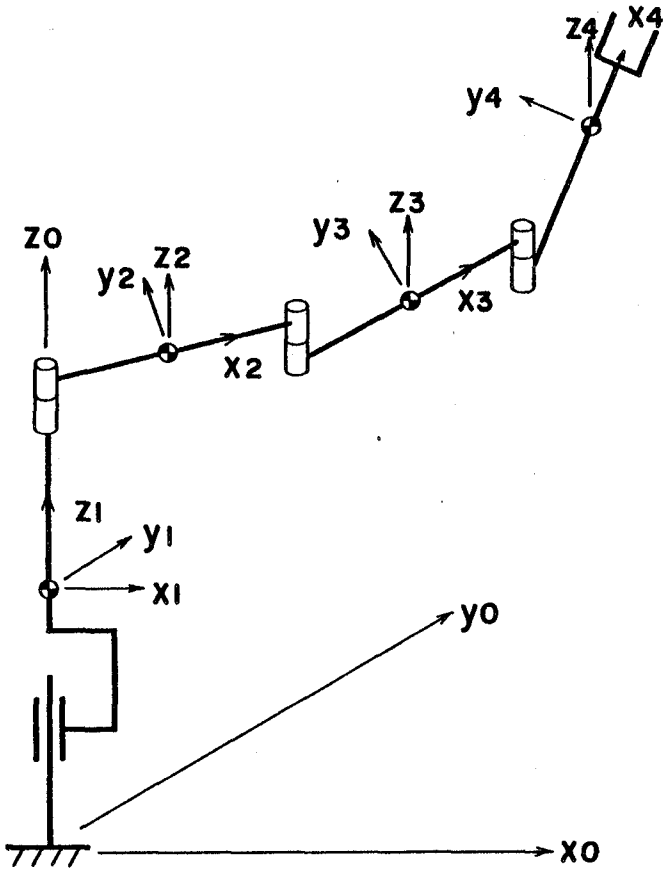


図 5-2　4自由度水平関節形ロボット

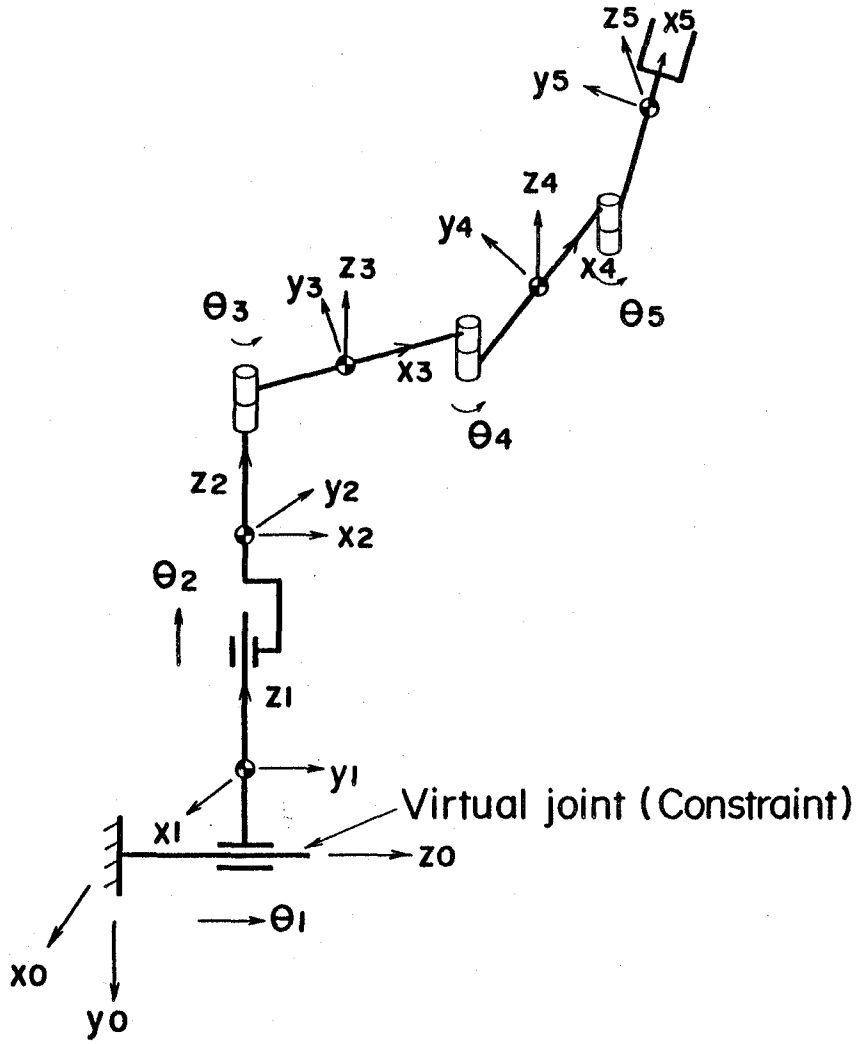


図 5-3　基準座標系に運動を伴う解析モデル

表 5-1 ロボットアーム諸元

	Center of gravity (m)			Length (m)		
	x_g	y_g	z_g	x_ℓ	y_ℓ	z_ℓ
Link - 1	.0	.25	.0	.0	.5	.0
" - 2	.0	.0	.053	.0	.0	.5
" - 3	.148	.0	.09	.4	.0	.025
" - 4	.135	.0	-.064	.25	.0	-.114
" - 5	.188	.0	-.049	.2	.0	-.049

	Mass M(kg)	Moment of inertia ($kg \cdot m^2$)		
		I_{xx}	I_{yy}	I_{zz}
Link - 1	19.1	.0	.0	.0
" - 2	19.1	.0	.0	.0
" - 3	28.2	.0	.984	.984
" - 4	7.25	.0	.108	.108
" - 5	10.65	.0	.024	.024

表 5-2 基準座標系に運動を伴う数値解析例

Time (S)	Link	Inverse dynamics Position θ (m) or (rad)	Inverse dynamics Force P (N) or (Nm)	Direct dynamics Position θ (m) or (rad)	Direct dynamics Constrained Force λ (N)
0.0	Link - 1	.0	151.740	.0	151.740
	" - 2	"	756.753	.0	
	" - 3	"	165.444	.0	
	" - 4	"	73.2576	.0	
	" - 5	"	28.3047	.0	
0.25	Link - 1	.046875	-88.4326	.046875	-88.4324
	" - 2	"	698.037	.046875	
	" - 3	.245436	60.0897	.245437	
	" - 4	"	33.2542	.245435	
	" - 5	"	15.0534	.245428	
0.5	Link - 1	.15	26.2466	.15	26.2462
	" - 2	"	639.393	.149999	
	" - 3	.785397	-62.5471	.785396	
	" - 4	"	.3391	.785391	
	" - 5	"	13.3060	.785398	
0.75	Link - 1	.253125	40.4462	.253125	40.4463
	" - 2	"	580.713	.253124	
	" - 3	1.32536	-49.9416	1.32535	
	" - 4	"	-17.1829	1.32536	
	" - 5	"	2.4303	1.32535	
1.0	Link - 1	0.3	-101.534	.3	-101.534
	" - 2	"	522.033	.299999	
	" - 3	1.57080	-23.4936	1.57079	
	" - 4	"	-24.4503	1.57081	
	" - 5	"	-7.3773	1.57078	

Inverse dynamics : $\Delta t = 0.0025$ sec.

Runge-Kutta-Gill Method : $\Delta t = 0.005$ sec.

(1) まず，すべての関節の運動を時間に対して陽に与え，逆ダイナミックスにより各関節の駆動力／トルクを求める．与えた各関節の目標軌道は時刻をt として次式で表わされる．

$$\theta_{1,2} = 0.3\ (-2t^3 + 3t^2) \quad (\mathrm{m})$$

$$\theta_{3,4,5} = \pi/2\ (-2t^3 + 3t^2) \quad (\mathrm{rad}) \qquad \text{以上(5.11)}$$

(2) 次いで，第 1関節については，式(5.11)の目標軌道を与え，残りの関節については，(1) の逆ダイナミックスで求めた駆動力／トルクを作用させ，式(5.9) の順ダイナミックスにより運動をシミュレートする．すなわち，インプットは，関節1 の運動と関節 2～5 の駆動力／トルクであり，アウトプットは，関節1 の駆動力と関節 2～5 の運動である．

両解析結果がよく一致しており，関節座標上の拘束条件付き力学系の解析の妥当性が明らかである．

5.3 枝分れ力学系の解析

5.3.1 解析法

本章の主題である関節座標上の拘束条件付き力学系の解析を枝分れ（トリー構造）力学系の解析へ適用することも可能である．他にダイレクトパス[54]を用いる方法などが提案されている．

本解析法の枝分れ力学系の解析への適用について述べる．二つに分岐した力学系の例を図5-4 に示す．以下では，最も単純な二つに分岐した枝分れ力学系の解析法について述べる．さらに複雑な多数分岐のある枝分れ力学系の解析についても，分岐した数だけの単一チェーンの総合とすることにより，同様に解析可能である．

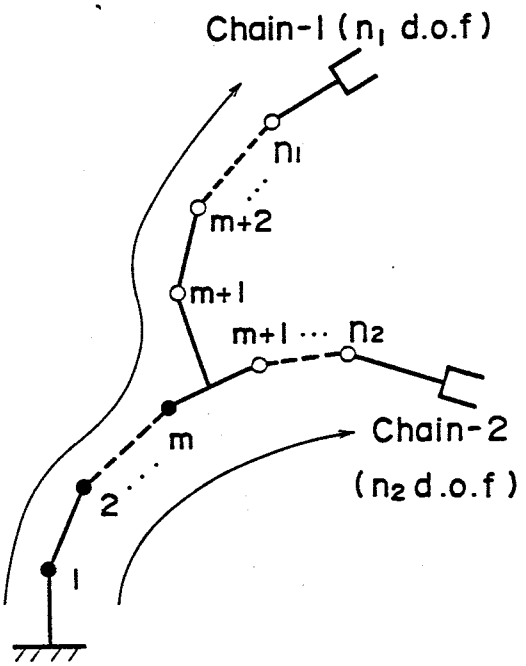


図 5-4 枝分れ力学系

枝分れ力学系の解析法を要約すると以下の通りとなる．分岐のない共通の基準座標系の側から，個々のチェーン先端までたどる分岐した数だけの単一チェーンを考える．即ち，共通関節の部分は，個々の単一チェーンの総てに重複して存在する．これらの単一チェーンの各々を独立した力学系とみなした上で，共通関節の運動が等しいという条件を付加して全体の力学系の運動方程式を得るものである．

図5-4 について二つに分岐した力学系の解析を述べる．図に示すように，自由度n_1 の

チェーン－1と自由度n_2のチェーン－2からなる．両チェーンとも，自由度は基準座標系から数えている．そして，二つの単一チェーンが自由度mの関節まで共通である．

二つの単一チェーンのうち，主チェーンを一つ選定する．ここでは，チェーン－1とし右上に添字1を付けてあらわす．共通の関節に加わる駆動力／トルクは，主チェーンに加わるものとみなし，従チェーン（右上に添字2を付して表す）の共通関節に加わる駆動力／トルクは運動が主チェーンに拘束される条件から求める．

従チェーンの共通関節の駆動力／トルクに下記のラグランジュ乗数λを導入する．

$$\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_m)^T \tag{5.12}$$

ラグランジュ乗数λを用いることにより，個々の単一チェーンの運動方程式は次式であらわされる．

$$[W^1](\ddot{q}^1) = (p^1) + Y^1 - V^1 - [\tilde{C}^1](\lambda)$$
$$[W^2](\ddot{q}^2) = [\bar{C}^2](p^2) + Y^2 - V^2 + [\tilde{C}^2](\lambda)$$

以上(5.13)

ここで，運動方程式の記述を簡略にするため，次の拘束条件行列を導入している．

$C^1 \in R^{n_1 \times n_1}$ ；チェーン-1 の拘束条件行列 $\begin{bmatrix} I_m & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

$C^2 \in R^{n_2 \times n_2}$ ；チェーン-2 の拘束条件行列 $\begin{bmatrix} I_m & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

また，$I_j \in R^{j \times j}$ ；単位行列

$W^1 \in R^{n_1 \times n_1}$ ；慣性行列

$W^2 \in R^{n_2 \times n_2}$ ；〃

$q^1 \in R^{n_1}$ ；関節変位，$q^1 = (q^1_1, q^1_2, \cdots, q^1_{n_1})^T$

$q^2 \in R^{n_2}$ ；〃 ，$q^2 = (q^2_1, q^2_2, \cdots, q^2_{n_2})^T$

$p^1 \in R^{n_1}$ ；主チェーンの関節駆動力／トルク

$p^2 \in R^{n_2-m}$ ；従チェーンの関節m+1 から関節n_2 までの駆動力／トルク

$Y^1, V^1 \in R^{n_1}$ ；
$Y^2, V^2 \in R^{n_2}$ ；
主チェーン，従チェーンそれぞれの重力項と遠心力・コリオリ力の和の項

$\tilde{C}^i \in R^{n_i \times m}$ ；チェーン-i の拘束条件行列［C^i］のうち，0ベクトルの列を除いた小行列

$\bar{C}^i \in R^{n_i \times (n_i - m)}$ ；行列［$I_{n_i} - C^i$］のうち，0ベクトルの列を除いた小行列

である．

拘束条件は，主チェーンと従チェーンの関節m までの変位が等しいことにより，

$$q^1_j = q^2_j \qquad (j = 1, 2, \cdots, m) \tag{5.14}$$

で，この2階微分をとると，

$$\ddot{q}^1_j = \ddot{q}^2_j \qquad (j = 1, 2, \cdots, m) \tag{5.15}$$

を得る．

式(5.13)および式(5.15)より枝分れの力学系の運動方程式の逆ダイナミックス表現として次式が得られる．

$$\begin{bmatrix} W^1 & 0 & \tilde{C}^1 \\ 0 & W^2 & -\tilde{C}^2 \\ \tilde{C}^{1T} & -\tilde{C}^{2T} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{q}^1 \\ \ddot{q}^2 \\ \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p^1 + Y^1 - V^{1T} \\ [\bar{C}^2](p^2) + Y^2 - V^{2T} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (5.16)$$

式(5.16)より式(5.17)の順ダイナミックス表現が得られ，枝分れ力学系の各関節の駆動力／トルクが与えられた時の運動シミュレーションが可能となる．

$$\begin{bmatrix} \ddot{q}^1 \\ \ddot{q}^2 \\ \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} W^1 & 0 & \tilde{C}^1 \\ 0 & W^2 & -\tilde{C}^2 \\ \tilde{C}^{1T} & -\tilde{C}^{2T} & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} p^1 + Y^1 - V^{1T} \\ [\bar{C}^2](p^2) + Y^2 - V^{2T} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (5.17)$$

5.3.2 解析例

枝分れ力学系の運動解析例を示す．解析の対象としたロボットは前節と同じ図5-2 の水平関節形ロボットである．図5-5 に示すように，このロボットの三つの回転関節について解析しており，リンク1,2,3 と称する．枝分れの力学系を構成するため，リンク1 は共通とし，リンク2,3 については，同一のアームが二つあるものとしている．解析した運動は図5-5 に示すようにアーム1 は直線状から施回した状態へ（図5-5(a)），アーム2 は施回した状態から直線状に（図5.5(b)）それぞれの関節が90° 回転する運動である．

解析結果を表5-3 に示す．表5-3 では，本解析法による枝分れ力学系の妥当性を検証するため，次の二つの計算結果を比較している．

(1) アーム1 ，アーム2 をそれぞれ独立した一つの単一チェーンと考え，すべての関節の運動を与えて逆ダイナミックスにより各関節の駆動トルクを求める．与えた各関節の目標軌道は，次式の通りである．

$$\theta_1^1 \triangleq \theta_1^2 = (\pi/2)(-2t^3 + 3t^2)$$
$$\theta_2^1 = \theta_3^1 = (\pi/2)(-2t^3 + 3t^2)$$
$$\theta_2^2 = \theta_3^2 = (\pi/2)(-2t^3 + 3t^2 - 1) \qquad \text{以上(5.18)}$$

なお，この逆ダイナミックスの計算では，枝分れ力学系であることを考慮し，アーム諸元の入力の際，従チェーンであるアーム2 ，リンク1 の質量や慣性モーメントを 0としている．

(2) アーム1 を主チェーンとして，枝分れ力学系として運動をシミュレートしている．この時，式(5.17)に入力する第1 関節の駆動トルク p_1^1 としては，(1) の逆ダイナミックス計算の際，アーム1 とアーム2 の個々の単一チェーンの第1 関節の駆動トルクの和を用いている．そして，従ループの第1 関節の駆動トルクは与えず，ラグランジュの未定乗数として求めている．

表5-3 に示すように，両解析結果がよく一致しており，本解析法による枝分れ力学系の解析の妥当性が明らかである．

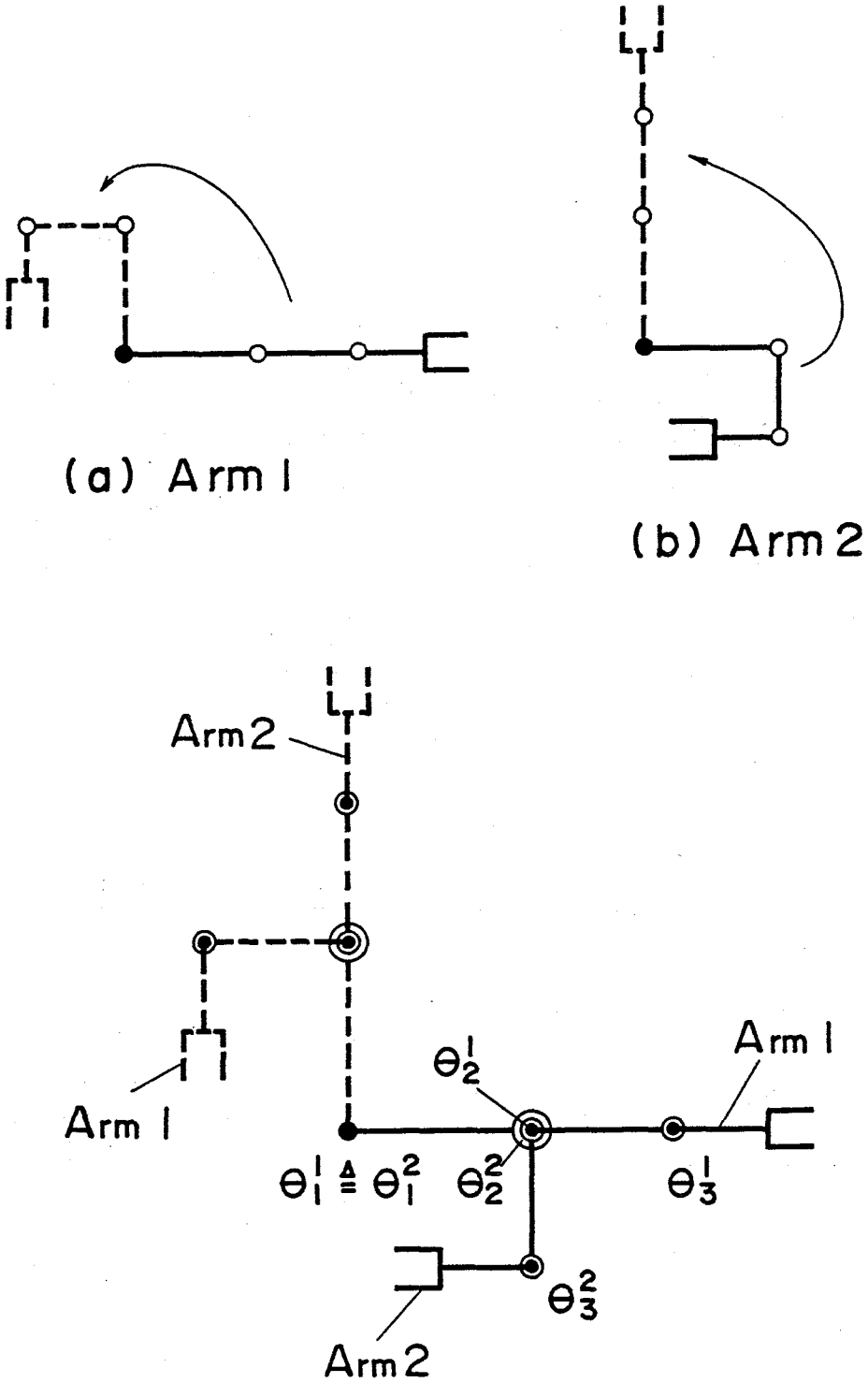


図 5-4　解析の対象とした枝分れ力学系

表 5-3　枝分れ力学系の数値解析例

Time (S)	Dynamical system	Inverse dynamics Position θ (rad)	Inverse dynamics Torque P (N.m)	Direct dynamics Position θ (rad)	Direct dynamics Constrained Force λ (N.m)
0.0	Chain-1, Link - 1	0.0	165.444	0.0	
	" - 2	"	73.258	"	
	" - 3	"	28.305	"	
	Chain-2, Link - 1	0.0	25.195	0.0	25.195
	" - 2	-1.57080	20.846	-1.57080	
	" - 3	"	3.773	"	
0.25	Chain-1, Link - 1	.24544	64.478	.24544	
	" - 2	"	35.164	.24543	
	" - 3	"	15.827	.24544	
	Chain-2, Link - 1	.24544	54.566	.24544	54.566
	" - 2	-1.32536	19.461	-1.32536	
	" - 3	"	-3.329	-1.32536	
0.5	Chain-1, Link - 1	.78540	-66.308	.78539	
	" - 2	"	-3.422	.78539	
	" - 3	"	10.661	.78540	
	Chain-2, Link - 1	.78540	66.308	.78539	66.307
	" - 2	-.78540	3.422	-.78539	
	" - 3	"	-10.661	-.78542	
0.75	Chain-1, Link - 1	1.32536	-62.115	1.32535	
	" - 2	"	-19.461	1.32535	
	" - 3	"	3.329	1.32537	
	Chain-2, Link - 1	1.32536	-56.930	1.32534	-56.930
	" - 2	-.24544	-35.164	-.24544	
	" - 3	"	-15.827	-.24543	
1.0	Chain-1, Link - 1	1.57080	-40.290	1.57078	
	" - 2	"	-20.846	1.57079	
	" - 3	"	-3.773	1.57080	
	Chain-2, Link - 1	1.57080	-150.349	1.57078	-150.348
	" - 2	0.0	-73.257	.00001	
	" - 3	"	-28.305	-.00003	

Inverse dynamics : $\Delta t = 0.0025$ sec.

Runge-Kutta-Gill Method : $\Delta t = 0.005$ sec.

5.4　まとめ

拘束条件が関節座標で与えられる場合の力学解析とその応用について述べた．解析法は，拘束される関節の駆動力／トルクにラグランジュ乗数を導入して解く方法である．本解析法を用いることにより，ある関節については運動が，残りの関節については駆動力／トルクが与えられる逆ダイナミックス（Inverse dynamics）と順ダイナミックス（Direct dynamics）の複合した解析が可能となる．本解析法の応用範囲は広く，下記に示すように種々の条件の解析に適用できる．

(1) 運転中のリンク応力や軸受荷重の解析

(2) 基準座標に運動を伴う時のシミュレーション

(3) 枝分れ（トリー構造）力学系の運動解析

本稿では，これらの解析法について述べると共に，(2),(3) の条件については，解析例を示し，妥当性を明らかにした．

第６章　関節座標拘束を用いたループ機構を含む力学系の解析

6.1 まえがき

産業用ロボットは，一般に単一チェーン，先端自由の多自由度リンク系として取り扱われる．このような力学系について，研究は，与えられた関節駆動力／トルクをもとにロボットアームの挙動を求める順動力学問題と所定の目標軌道に沿って動かすのに必要な各関節の駆動力／トルクを求める逆動力学問題の双方に及ぶ．特に，逆動力学問題は，ロボットを制御する時の入力として必要であるので，その高速演算アルゴリズムについて多くの研究がなされている．[24)-27)]

しかし，垂直多関節形の産業用ロボットでは，第３軸のモータを第２軸のモータと同様，第１軸に取り付けた構成が多い．そして２本のリンクを第２軸，第３軸と並列に設けて平行四辺形の４節リンクを形成している．このようなロボットアームの動力学特性を正確に解析するためには，もはや単一チェーンの力学系としては扱えず，ループを含む力学系としての取り扱いが必要になる．しかし，これまで単一チェーンの力学系を対象とした研究は多いが，ループを含む力学系に関する研究は比較的少ない．

これまでのループを含む力学系の取り扱い法は，下記の三つに大別される．

(1) 拘束条件を考慮して選定した独立な自由度の数の変数を用いて運動方程式を立てる方法[55)]

(2) 駆動行列を用いて外力を変換する方法[56)]

(3) 一旦，ループの一端を切り離し，木構造(Tree-structure)の力学系とした上で切り離した二つの端点の変位が等しいという拘束条件を導入して解析する方法[47)]

近年ロボットの最適設計を効率良く進めるため，ロボットアームの動特性シミュレーションプログラムの開発が各方面で活発に進められている．これらのプログラムでは，ロボットアームの構成や自由度は任意に設定できるようになっている．しかし，取り扱える力学系は，単一チェーン，先端自由に限られるものが多い．

これらのシミュレーションプログラムを対象として，ループを含む力学系の解析への拡張を考える時，(1) の方法では，並設リンクの運動の取り扱いが困難である．(2) の方法は，最も容易に適用可能であるが，近似解析にとどまる．(3) の方法は，単一チェーンから木構造の力学系への拡張が必要であるが，汎用性に富み，コンピュータシミュレーションに適している．しかし，拘束点のヤコビ行列の計算が必要となると共に拘束される自由度が５ないし，６と多くなってしまう．

本章では，ループを含む力学系の解析法として，関節座標上の拘束条件の利用を提案する．(3) の方法と同様，一端を切り離して木構造の力学系とするが，拘束条件として，各関節の角度（回転関節）／変位（直動関節）の関係式を与えて解く方法である．本方法は (1) 切り離し点のヤコビ行列の計算が不要で拡張が容易，(2) 与える拘束条件の数が必要最小限，(3) ループ機構を含む力学系の関節駆動力／トルクが単一チェーンの駆動力／ト

ルクから容易に求まり，順動力学，逆動力学の定義が明確という特長を持っている．以下解析方法について述べ，解析例によりループを含むロボットの駆動トルクについて考察している．

6.2 解析方法

ループを含む機構の例を図6-1 に示す．最もよく用いられる４節リンクで構成されるループである．このロボットはモデル化すると，図 6-2（左）で表現することができる．本章で提案した解析法では，まず，このロボットを図 6-2（右）に示すように，二つの単一チェーンに分割する．

個々のｎ自由度の単一チェーンの運動方程式は，次式で与えられる．

$$[W](\ddot{\theta}) = (p + Y - V^{T}) \qquad (6.1)$$

ここで，

$W \in R^{n \times n}$ ； 慣性行列

$\theta \in R^{n}$ ； 関節角／変位

$p \in R^{n}$ ； 関節駆動力／トルク

$Y \in R^{n}$ ； 重力項

$V^{T} \in R^{n}$ ； 遠心力・コリオリ力項

で" ˙ " は時間についての微分，Ｔは転置をあらわす．

ループを含む力学系の解析は，図 6-2（右）に示す二つの単一チェーンを連成して解析する．ループを表現するため，本章では，各単一チェーンのリンク回転角の関係式を拘束条件として与える．これらの関係式は，関節座標上の拘束条件とみなすことができる．

与える拘束条件は，図6-3 に示すように，二つの単一チェーンの合計５自由度の力学系に対し，下記の三つのリンク回転角の関係式となる．

$$\theta_1^1 = \theta_1^2 + \theta_2^2$$

$$\theta_1^1 + \theta_1^2 = \theta_1^2 + \theta_2^2 + \theta_3^2$$

$$\theta_2^2 + \theta_3^2 = \pm\pi \qquad \text{以上}(6.2)$$

ここで，θに付した右上の数字はチェーンの番号を示し，右下の数字はリンクの番号を示す．

このようにして，一旦，二つの単一チェーンに分割し，これらに式(6.2) の拘束条件を付与してループ機構とみなすようにすれば，これまで各方面で開発されてきた単一チェーンの運動方程式の生成プログラムが利用可能となる．

6.2.1 順ダイナミックス

個々の単一チェーンの運動方程式は，それぞれが独立であると仮定すると，次式で与えられる．

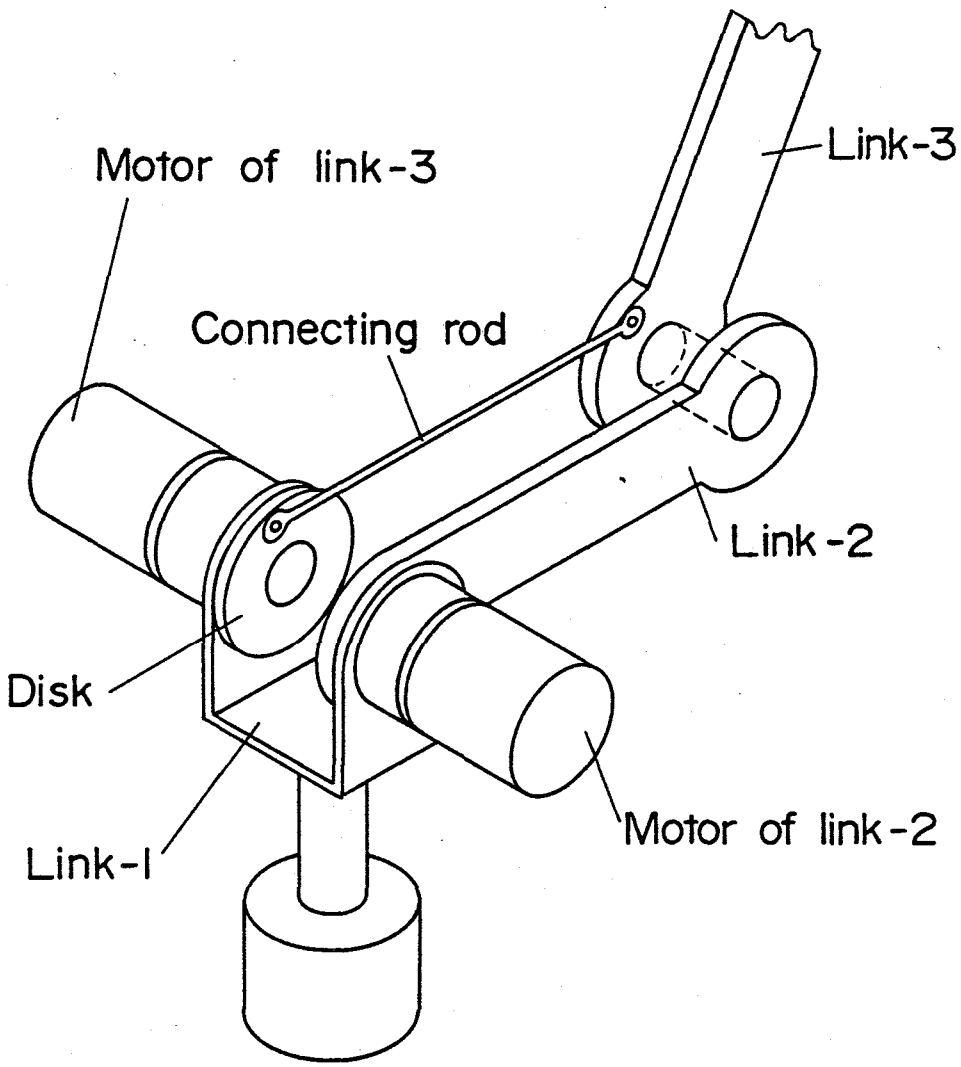


図 6-1 ループ機構を持つ産業用ロボット

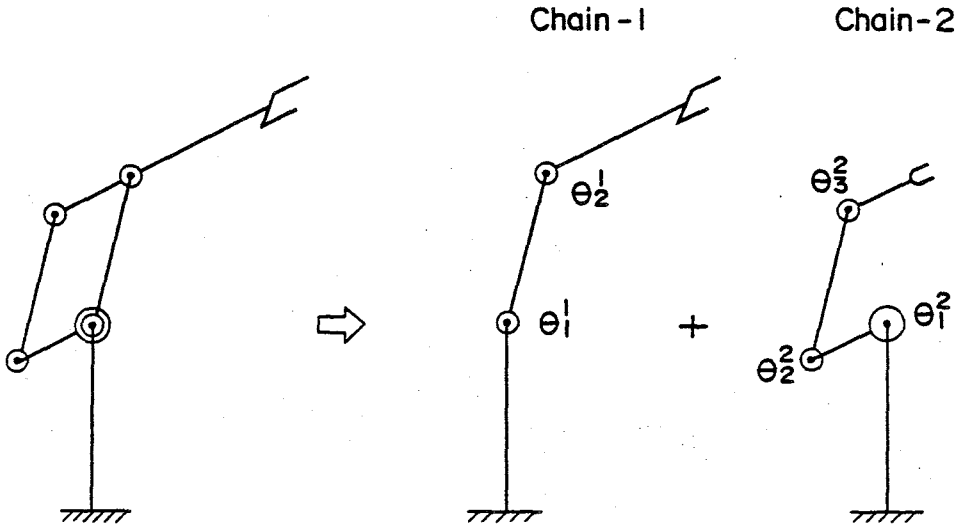


図 6-2　ループ機構を持つ力学系の単一チェーンへの分割

$$\theta_1^1 = \theta_1^2 + \theta_2^2 \qquad (\mathrm{Link}_2^2 // \mathrm{Link}_1^1)$$

$$\theta_1^1 + \theta_2^1 = \theta_1^2 + \theta_2^2 + \theta_3^2 \qquad (\mathrm{Link}_3^2 // \mathrm{Link}_2^1)$$

$$\theta_2^2 + \theta_3^2 = \pm\pi \qquad (\mathrm{Link}_3^2 // \mathrm{Link}_1^2)$$

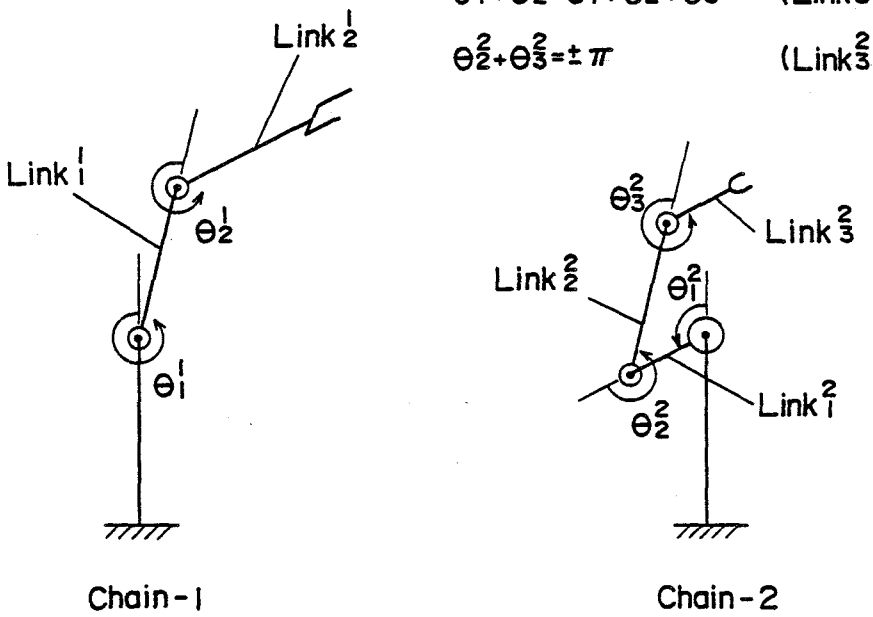


図 6-3　関節座標上の拘束条件

$$[W^1]\,(\ddot{\theta}^1) = (p^1 + Y^1 - V^1{}^T) \tag{6.3.1}$$

$$[W^2]\,(\ddot{\theta}^2) = (p^2 + Y^2 - V^2{}^T) \tag{6.3.2}$$

式(6.2) で表わされる拘束条件の２階微分は，次式となる．

$$\ddot{\theta}^1_1 = \ddot{\theta}^2_1 + \ddot{\theta}^2_2 \tag{6.4.1}$$

$$\ddot{\theta}^1_1 + \ddot{\theta}^1_2 = \ddot{\theta}^2_1 + \ddot{\theta}^2_2 + \ddot{\theta}^2_3 \tag{6.4.2}$$

$$\ddot{\theta}^2_2 + \ddot{\theta}^2_3 = 0 \tag{6.4.3}$$

上式の三つの拘束条件を満足する関節駆動トルクに相当する項に次式のラグランジュ乗数λを導入する．

$$\lambda = (\lambda_1,\ \lambda_2,\ \lambda_3)^T \tag{6.5}$$

式(6.3.1),式(6.3.2) の二つの単一チェーンの運動方程式に式(6.4.1) ～式(6.4.3) の拘束条件を付与することにより，次式のループを含む力学系の順ダイナミックスの運動方程式を得る．

$$\begin{bmatrix} \ddot{\theta}^1_1 \\ \ddot{\theta}^1_2 \\ \ddot{\theta}^2_1 \\ \ddot{\theta}^2_2 \\ \ddot{\theta}^2_3 \\ \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} W^1 & 0 & \begin{matrix} -1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{matrix} \\ 0 & W^2 & \\ \begin{matrix} 1 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{matrix} & & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} p^1_1 + Y^1_1 - V^1_1 \\ Y^1_2 - V^1_2 \\ p^2_1 + Y^2_1 - V^2_1 \\ Y^2_2 - V^2_2 \\ Y^2_3 - V^2_3 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{6.6}$$

ここで，二つの慣性行列と拘束条件を統合して得られる行列のうち，拘束条件をあらわす部分は，仮想仕事の原理により，歪対称行列を構成するように生成される．

6.2.2 逆ダイナミックス

式(6.6) の順ダイナミックスの運動方程式を右辺のベクトルを求める形で展開すると，次式と拘束条件を表わす式(6.4.1) ～式(6.4.3) が得られる．

$$\begin{bmatrix} p^1_1 \\ p^1_2 \\ p^2_1 \\ p^2_2 \\ p^2_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} W^1 & 0 \\ 0 & W^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\theta}^1_1 \\ \ddot{\theta}^1_2 \\ \ddot{\theta}^2_1 \\ \ddot{\theta}^2_2 \\ \ddot{\theta}^2_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} Y - V^T \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\lambda_1 - \lambda_2 \\ -\lambda_2 \\ \lambda_1 + \lambda_2 \\ \lambda_1 + \lambda_2 - \lambda_3 \\ \lambda_2 - \lambda_3 \end{bmatrix} \tag{6.7}$$

ここで，式(6.7) では，各関節の駆動トルクを求めるという考え方から，形式上，実際には０である p^1_2 ，p^2_2 ，p^2_3 をも求める形にしている．

式(6.7) の右辺のラグランジュ乗数を左辺に移項すると，左辺各項は次式となる．

$$p^1_1 + \lambda_1 \tag{6.8.1}$$

$$p^1_2 + \lambda_2 \tag{6.8.2}$$

$$p^2_1 - \lambda_1 - \lambda_2 \tag{6.8.3}$$

$$p^2_2 - \lambda_1 - \lambda_2 + \lambda_3 \tag{6.8.4}$$

$$p^2_3 - \lambda_2 + \lambda_3 \tag{6.8.5}$$

上式のうち，式(6.8.2),(6.8.4) ，および式(6.8.5) に相当する関節の駆動トルクが０であることから，次式が成立する．

$$p_2^1 + \lambda_2 = 0$$
$$p_2^2 - \lambda_1 - \lambda_2 + \lambda_3 = 0$$
$$p_3^2 - \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \qquad \text{以上(6.9)}$$

式(6.9) より三つのラグランジュ乗数を求め，式(6.8.1) ，式(6.8.3) に代入することにとにより，ループ機構のロボットに必要な関節駆動トルクが次式で求まる．

$$(p_1^1)^L = (p_1^1 - p_2^1 + p_2^2 - p_3^2)^S \qquad (6.10.1)$$
$$(p_1^2)^L = (p_1^2 + p_2^1 - p_2^2 + p_3^2)^S \qquad (6.10.2)$$

ここで，添字Ｌはループ機構での値を示し，Ｓは各シングルチェーンでの値を示す．

なお，このループ機構において併設リンクの質量や慣性モーメントの値を０とすると，

$$p_1^2 = p_2^2 = p_3^2 \triangleq 0 \qquad (6.11)$$

であり，式(6.10)の２式は，

$$(p_1^1)^L = (p_1^1 - p_2^1)^S$$
$$(p_1^2)^L = (p_2^1)^S \qquad (6.12)$$

と変形され，駆動行列を用いて外力を変換する考え方と同じ関係式が得られる．

6.3 解析例と考察

解析の対象は，前出の図6-1 の垂直多関節形ロボットの第２，第３軸である．二つのシングルチェーンに分割し，各力学系をホームポジションの状態で図6-4 に示す．各リンクに設定した座標系に関するリンク諸元を表6-1 ，および表6-2 に示す．解析したロボットの運動は次式で表わされる．

$$\theta_1^1 = (\pi/2) \times (-2t^3 + 3t^2) + \pi/4$$
$$\theta_1^2 = (\pi/2) \times (-2t^3 + 3t^2) + \pi/2$$
$$\theta_2^1 = \theta_2^2 = \theta_3^2 = 0 \qquad \text{以上(6.13)}$$

ここで，ｔは時刻を示す．与えたロボットの運動の初期と終端の姿勢を図6-5 に示す．

運動に必要な二つのモータ設置関節の駆動トルクの計算結果を図6-6 ，図6-7 に示す．図6-6 は併設リンクを縦横比２：１の平行四辺形とし，リンク質量と慣性モーメントをパラメータとして駆動トルクをプロットしている．合わせてシングルチェーンの場合をも示している．図6-6 より次のことがわかる．

(1) 第１軸の駆動トルクはループ機構を採用することによって減少する．そして，併設リンクの質量がイナーシャが小さいほど減少量は大きい．しかし，併設リンクの質量や慣性モーメントが元のリンクと同じ値になると，かえって駆動トルクは増加する．

(2) 第２軸の駆動トルクはシングルチェーンの時と併設リンクの質量等が０の場合と等しくなる．また，併設リンクの質量等が増加するに従って駆動トルクは小さくなるが，これ以上大きくすると，逆の回転方向にトルクが大きくなる．

以上のことから，このロボットについては，ループ機構を採用しても，ほとんど駆動トルクが変らないことがわかる．

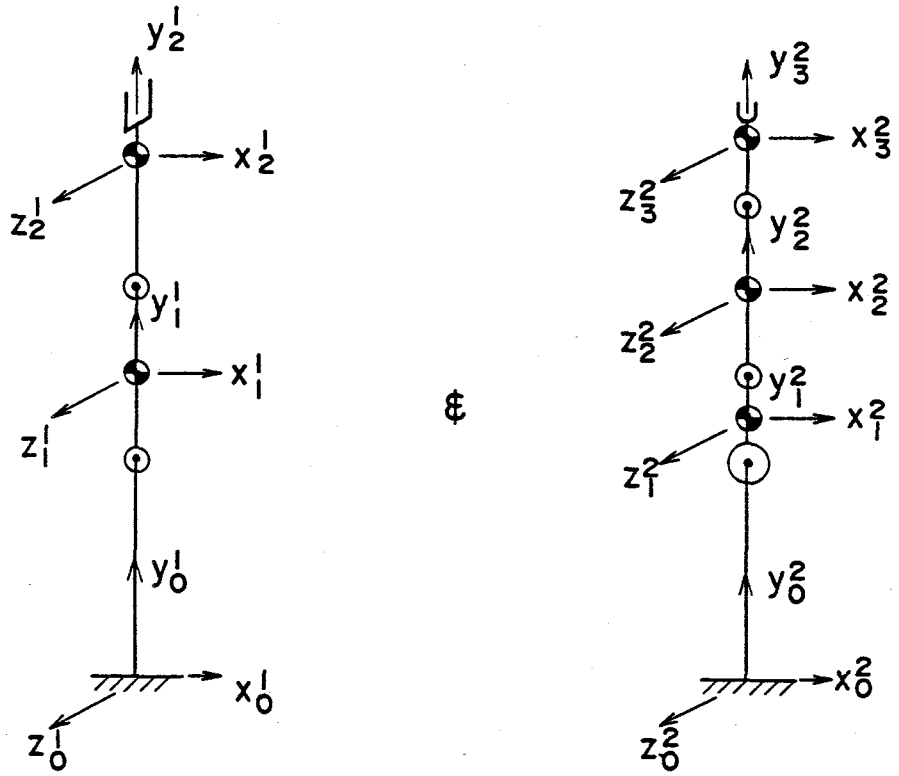


図 6-4　二つの単一チェーン

表 6-1　リンク長と重心位置

Dynamical system	Center of gravity(m)			Length(m)		
	x_g	y_g	z_g	x_ℓ	y_ℓ	z_ℓ
Chain-1, Link-1	.0	.125	.0	.0	.25	.0
-2	.0	.15	.0	.0	.3	.0
Chain-2, Link-1	.0	.0625	.0	.0	.125	.0
-2	.0	.125	.0	.0	.25	.0
-3	.0	.0625	.0	.0	.125	.0

表 6-2　質量と慣性モーメント

Dynamical system	Mass	Moment of inertia ($kg \cdot m^2$)		
	M (kg)	I_{xx}	I_{yy}	I_{zz}
Chain-1, Link-1	6.0	0.06	.0	0.06
-2	4.0	0.05	.0	0.05
Chain-2, Link-1	3.0	0.015	.0	0.015
-2	6.0	0.06	.0	0.06
-3	3.0	0.015	.0	0.015

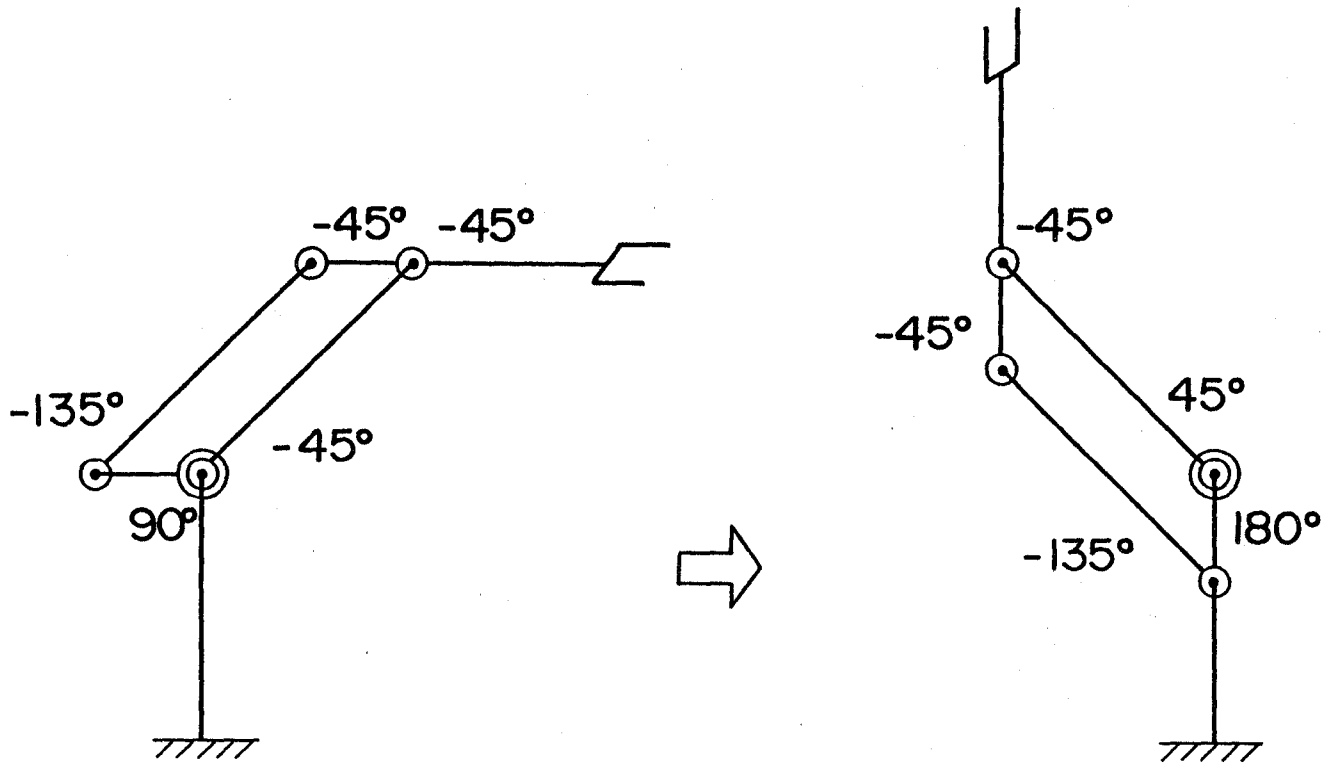


図 6-5　解析したロボットの運動

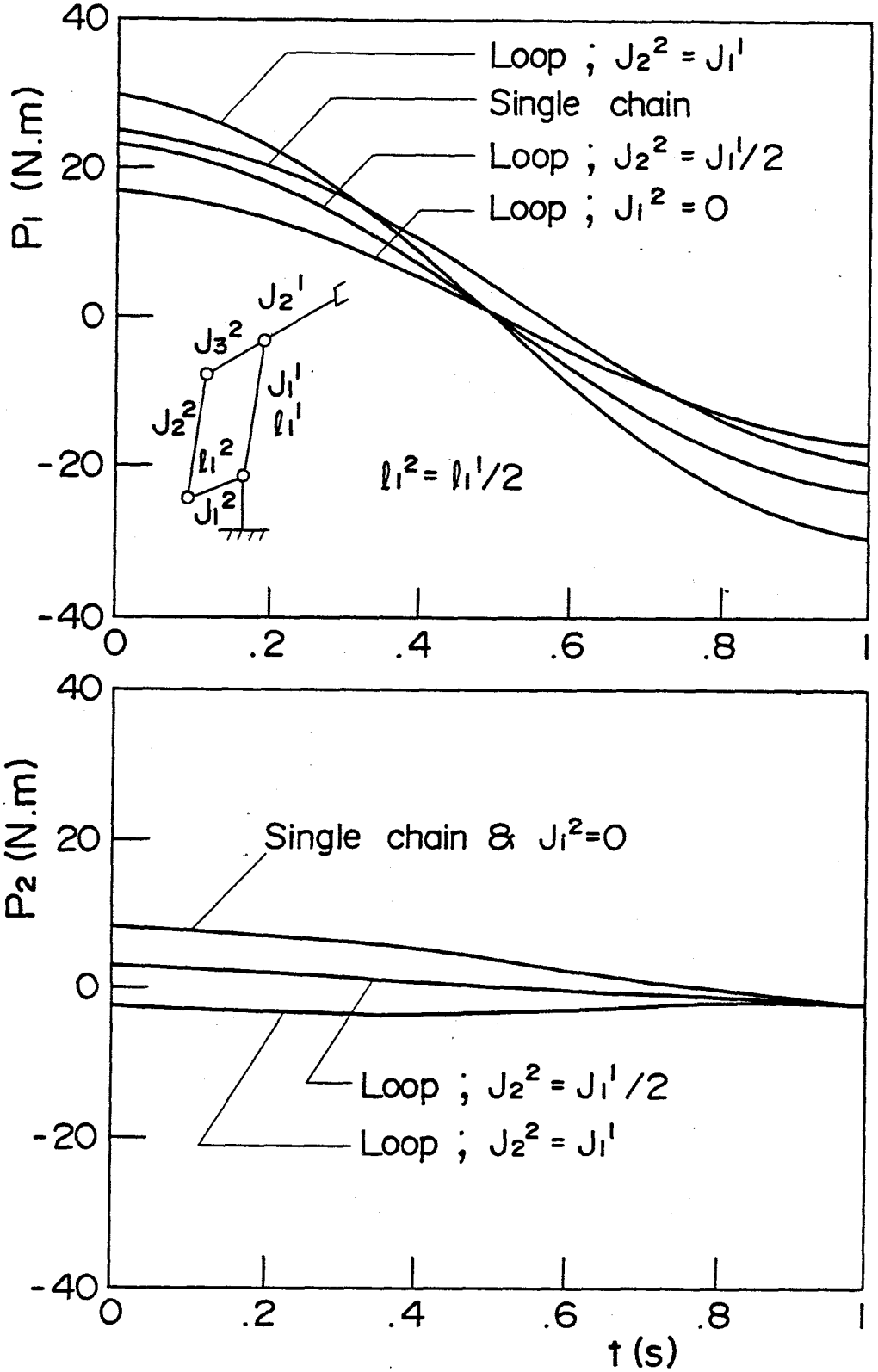


図 6-6 ループ機構の動力学解析（Ｎｏ．１）

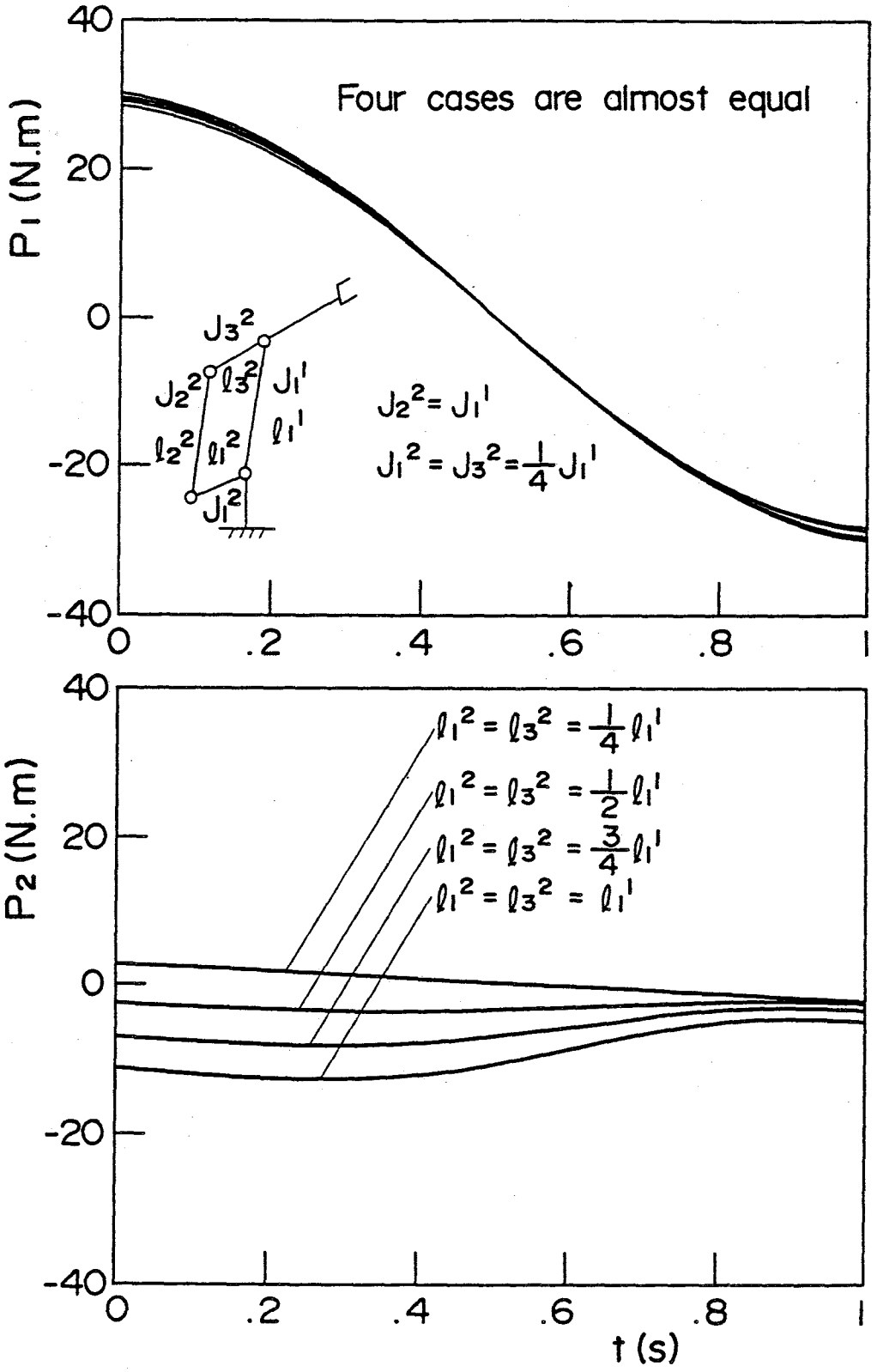


図 6-7　ループ機構の動力学解析（No．2）

図6-7 は，併設リンクのイナーシャを一定として，平行四辺形の縦横比をパラメータとして駆動トルクを描いている．図6-7 より次のことがわかる．

(1) 第１軸の駆動トルクは併設リンクの縦横比を変えてもほとんど変らない．

(2) 第２軸の駆動トルクは，併設リンクの縦横比を一致させ，形状をひし形に近づけるほど駆動トルクは逆の符号で増加する．

本解析の妥当性を検証するため，次の解析を行った．運転条件は，図6-6 ，図6-7 と同一である．

(1) まず，二つのシングルチェーンとして，逆ダイナミックスにより各関節の駆動トルクを求める．

(2) 次に，(1) で求めた駆動トルクをもとに，式(6.10.1),(6.10.2) により，ループ機構のモータに必要な駆動トルクを求める．

(3) (2) で求めた二つの関節の駆動トルクをループ機構に作用させ，式(6.6) によってループ機構の運動をシミュレーションする．

シミュレーション結果を表6-3 に示す．逆ダイナミックスで与えた運動と順ダイナミックスで求めた運動がきわめてよく一致しており，本解析の妥当性が明らかである．

6.4 まとめ

ループ機構を含む力学系の解析法として，関節座標上の拘束条件の利用を提案した．ループ機構の一端を切り離して木構造(Tree-structure)の力学系とし，これに拘束条件として，各関節の角度（回転関節）／変位（直動関節）の関係式を与えて解く方法である．本方法は，

(1) 切り離し点のヤコビ行列の計算が不要で拡張が容易

(2) 与える拘束条件の数が必要最小限

(3) ループ機構を含む力学系の関節駆動力／トルクが単一チェーンのそれから容易に求まり，順ダイナミックス，逆ダイナミックスの定数が明確

という特徴を持っている．解析例により，本解析法の妥当を示すと共にループ機構の設計指針について検討した．

表 6-3 ループ機構を持つロボットの解析例

Time	Dynamical system ($Link_i^j$)	Inverse dynamics		Direct dynamics	
		Position θ_i^j(rad)	Torque P_i^j(Nm)	Torque P_i^j(Nm)	Position θ_i^j(rad)
0.0	Chain-1, Link-1	- .785398	25.1431	29.6205	- .785398
	-2	- .785398	8.20310	.0	- .785398
	Chain-2, Link-1	1.57080	2.09811	- 2.37933	1.57080
	-2	-2.35619	14.8626	.0	-2.35619
	-3	- .785398	2.18206	.0	- .785398
0.25	Chain-1, Link-1	- .539962	18.2581	20.1550	- .539964
	-2	- .785398	6.70160	.0	- .785396
	Chain-2, Link-1	1.81623	- 1.56785	- 3.46476	1.81623
	-2	-2.35619	10.4503	.0	-2.35620
	-3	- .785398	1.85179	.0	- .785396
0.5	Chain-1, Link-1	- .000001	4.45506	0.40490	- .000014
	-2	- .785398	3.86619	.0	- .785383
	Chain-2, Link-1	2.35619	- 7.43308	- 3.38292	2.35619
	-2	-2.35619	0.93221	.0	-2.35621
	-3	- .785398	1.11618	.0	- .785383
0.75	Chain-1, Link-1	.539958	-10.7895	-19.6994	.539897
	-2	- .785398	0.10455	.0	- .785326
	Chain-2, Link-1	2.89615	-11.4006	- 2.49064	2.89616
	-2	-2.35615	- 8.63379	.0	-2.35627
	-3	- .785398	0.17162	.0	- .785326
1.0	Chain-1, Link-1	.785398	-19.2591	-29.6205	.785126
	-2	- .785398	- 2.31910	.0	- .785099
	Chain-2, Link-1	3.14159	-13.1306	- 2.76921	3.14162
	-2	-2.35619	-13.0238	.0	-2.35649
	-3	- .785398	- 0.34331	.0	- .785099

第７章　駆動・伝達系を含むロボットアーム動力学解析

7.1 まえがき

多くの産業用ロボットのアームは，減速機を介して直流サーボモータによって駆動される．ハーモニックドライブ減速機では，モータのロータ回転角速度は，リンク角速度の50～100 倍に達する．当然，このロータの回転による遠心力・コリオリ力がロボットアームの動特性に影響を及ぼす．しかし，筆者の知るかぎり，駆動モータの回転の効果を厳密に解析した文献はほとんどない．[57]

駆動モータの回転の効果を考慮するために一般に取られている方法は，慣性行列の対角項に減速比を考慮してロータ慣性モーメントのリンク慣性モーメント相当値を加えて新たに慣性行列とみなす方法[28] である．しかし，この方法では，ロータの慣性効果については考慮できるが，遠心力・コリオリ力や重力の効果は考慮されていない．

本章では，モータのロータの回転を考慮したロボットアームの動力学解析法を提案し，解析例によってその効果を明らかにする．本解析を行なうためには，運動方程式中での伝達機構の取り扱いを明らかにする必要がある．提案した解析法は，モータのロータも一つのリンクとみなし，リンクとロータの角速度の関係，すなわち伝達機構の機能を拘束条件とみなし，これを力学系に付与して解析する方法である．多くのロボットアームのダイナミックスシミュレータは，任意の構成の単一チェーンの力学系が取り扱えるようになっており，慣性行列，遠心力，コリオリ力，重力項等が計算機で自動生成される．提案した解析法は，この様なシミュレータ中のプログラムを用いて容易に拡張可能な方法である．

7.2 解析方法

直流サーボモータ，減速機，およびリンクよりなるロボットの１関節の構成を図7-1 に示す．ロータが回転した状態でのダイナミックスを取り扱うため，ロータも一つのリンクとみなす．一つの関節をロータと本来のアームを構成するリンクとがシリーズで結合された２自由度の力学モデルで考えている．

図において，ロータの回転角をθ_m，リンクの回転角をθ_ℓ，減速比をＮとすると，運動学的に等価な減速機の機能は，次式を用いてあらわすことができる．

$$\theta_\ell = -\frac{N-1}{N}\theta_m \tag{7.1}$$

ここで，式(7.1) は，ロータがθ_mだけ回転した時，リンクが$-(N-1)\theta_m/N$だけ回転し，ベース側からみたリンクの回転角，すなわち，両者の回転角の和がθ_m/Nとなることを表わしている．

ロボットアームの一つの関節をロータとリンクで構成される２自由度の力学系とみなして式(7.1) の拘束条件を加えて解析することにより，モータのロータが所定の回転数で回転している時のロボットアームのダイナミックスを取り扱うことができる．これには既に

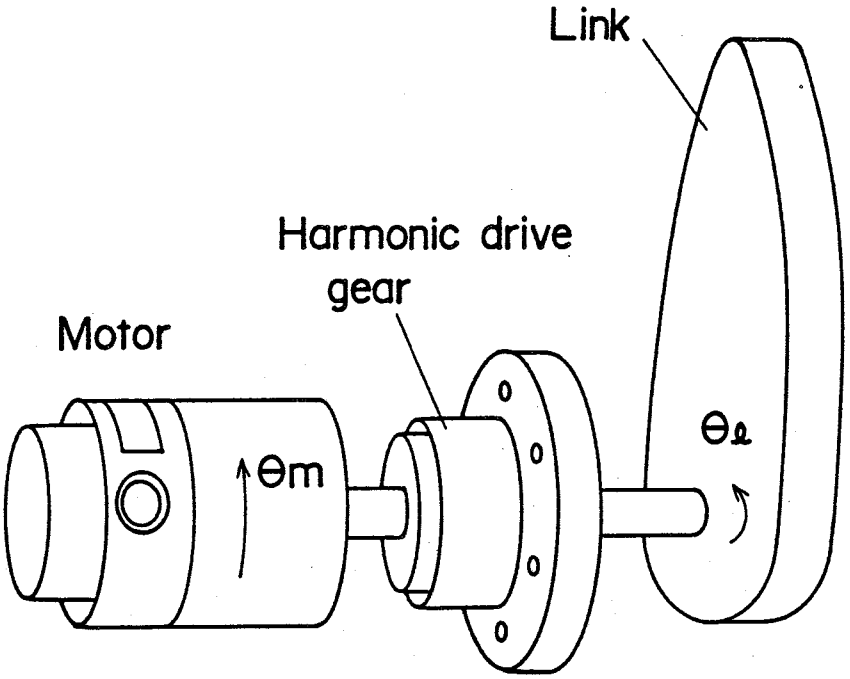


図 7-1　ロボットアームの関節構成

提案している関節空間での拘束条件付の力学系の解析を適用することができる．

7.2.1 逆ダイナミックス

リンクの運動から必要な駆動力／トルクを求める計算である．各リンクの運動を与えることができるので，ロータとリンクそれぞれに式(7.1) の条件を満足する運動を与える．

運動方程式は，ロボットアームに一般に用いられる次式を適用することができる．

$$(p) = [W]\,(\ddot{\theta}) - Y + V^{T} \qquad (7.2)$$

ここで，

p：関節駆動力／トルクベクトル

W：慣性行列

θ：関節変位ベクトル

Y：重力項ベクトル

V：遠心力とコリオリ力項ベクトル

である．

式(7.2) より求まるロータに相当するリンクの駆動トルクに対し，次式の変換を行うことにより，モータのロータ部における真に必要なトルクを求めることができる．

$$p_m^R = p_m^c + \frac{N-1}{N}\, p_\ell^{\,c} \qquad (7.3)$$

ここでp_m^c，$p_\ell^{\,c}$ は，それぞれ，式(7.2) の逆ダイナミックス計算で求まるロータとリンク部の駆動トルクであり，p_m^R はモータで実際に必要となる駆動トルクである．

7.2.2 順ダイナミックス

モータのロータ駆動トルクを与えてロボットアームの挙動を求める計算である．前述のようにロータとリンクのそれぞれに自由度を持たせ，両者の変位の間に式(7.1) の拘束条件を与えて解析する．

拘束条件を満足する関節駆動トルク，すなわち，減速機構よりの発生トルクに相当する項に次式のラグランジュ乗数を導入する．

$$\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_j) \tag{7.4}$$

ここで，ベクトルλの次元jは，ロボットアームに含まれる減速機の個数と一致する．

式(7.4) のλを用いることにより，モータのロータをも含めたロボットアームの運動方程式は次式で与えられる．

$$[W](\ddot{\theta}) = (p) + (Y - V^T) + \left(\frac{N-1}{N}\lambda_1, \lambda_1, \cdots, \frac{N-1}{N}\lambda_j, \lambda_j\right) \tag{7.5}$$

ここで，外部からの駆動トルクベクトルpは，モータのロータ回転に相当する関節のみに与えられ，他は0である．またλの係数は，ロータの回転に相当する関節が（N－1）／Nで，リンクの回転に相当する関節については1である；

式(7.1) の拘束条件を2階微分することにより，次式が得られる．

$$\ddot{\theta}_1 = -\frac{N-1}{N}\ddot{\theta}_m \tag{7.6}$$

式(7.5) ，式(7.6) を連立させることにより次式が得られ，

$$\begin{bmatrix} \ddot{\theta} \\ \hline \lambda \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{c|c} W & \begin{matrix} (1-N)/N & & \\ & -1 & \\ & & (1-N)/N \\ & & & -1 \\ & & & & \ddots \end{matrix} \\ \hline \begin{matrix} (N-1)/N & 1 & & \\ & (N-1)/N & 1 & \\ & & \ddots & \ddots \end{matrix} & 0 \end{array}\right]^{-1} \left[\begin{array}{c} p + Y - V^T \\ \hline 0 \end{array}\right] \tag{7.7}$$

与えられたモータの駆動トルクに対し，モータのロータ回転を考慮してロボットアームの挙動を求めることができる．

7.3 解析例と考察

本解析を垂直多関節形ロボットに適用してモータのロータ回転の効果を明らかにする．解析の対象としたロボットの力学モデルを図7-2 に示す．図に示すようにロボットの自由度は5である．このロボットに対し，モータのロータ回転の効果を明らかにするため，ロータも1つのリンク要素とみなした10自由度の力学モデルを図7-3 に示す．図7-3 の解析モデルについてロボットアームの諸元を表7-1 ，および表7-2 に示す．表7-2 に示すよ

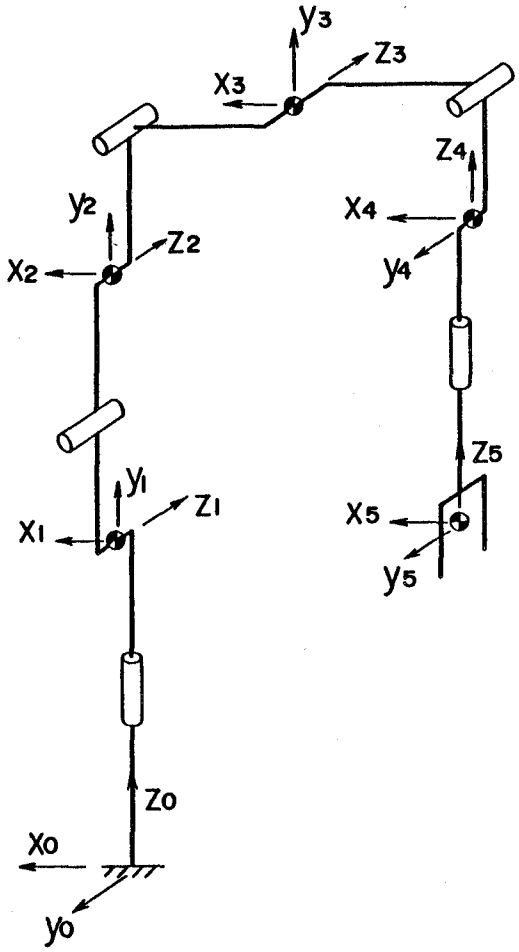


図 7-2　5自由度垂直多関節形ロボット

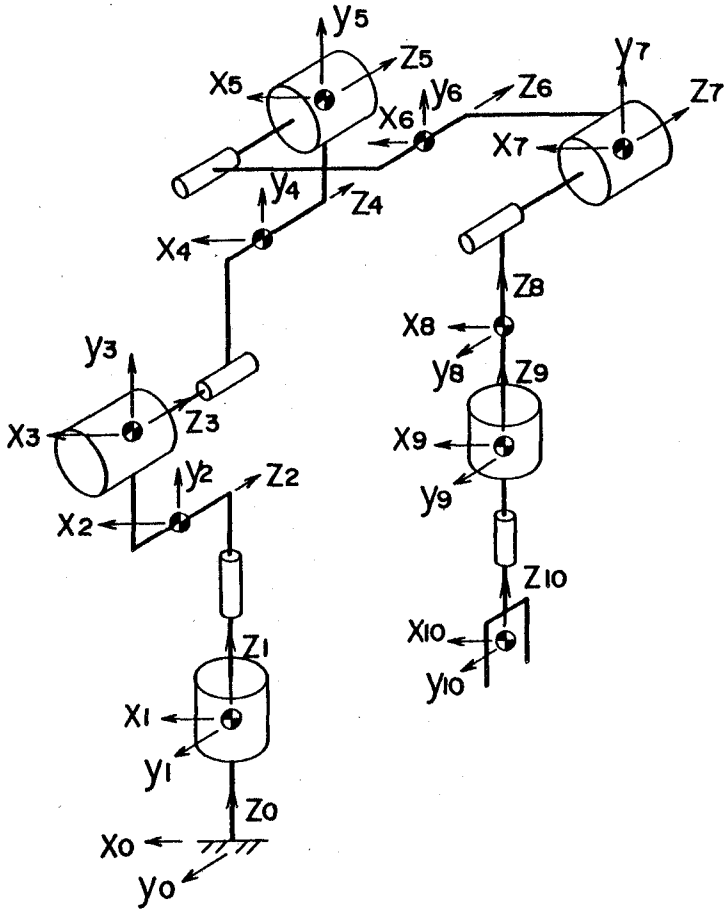


図 7-3　モータを含む10自由度ロボットの力学モデル

表 7-1　リンク長と重心位置

	Center of gravity (m)			Length (m)		
	x_g	y_g	z_g	x_ℓ	y_ℓ	z_ℓ
Link- 1	.0	.0	.0	.0	.0	.0
- 2	.0014	.1048	.0	.0	.136	-.033
- 3	.0	.0	.0	.0	.0	.0
- 4	.0	.0712	.0074	.0	.250	.015
- 5	.0	.0	.0	.0	.0	.0
- 6	-.0773	.0	.0020	-.016	.0	.040
- 7	.0	.0	.0	.0	.0	.0
- 8	.0	.0173	.0146	.0	.022	-.049
- 9	.0	.0	.0	.0	.0	.0
-10	.0	.0	-.0635	.0	.0	-.0635

表 7-2　質量と慣性モーメント

	Mass	Moment of inertia (kg·m)			N
	M(kg)	I_{xx}	I_{yy}	I_{zz}	(-)
Link- 1	0.280	.0	.0	6.53×10^{-6}	100
- 2	5.390	.0378	.250	.0179	-
- 3	0.280	.0	.0	6.53×10^{-6}	100
- 4	1.784	.0194	.00137	.0205	-
- 5	0.280	.0	.0	6.53×10^{-6}	100
- 6	1.294	.00108	.00647	.00627	-
- 7	0.093	.0	.0	3.22×10^{-6}	100
- 8	0.662	.00062	.00061	.00029	-
- 9	0.093	.0	.0	3.22×10^{-6}	100
-10	1.774	.00637	.00637	.00265	-

N :　Reduction ratio

うに，モータのロータはリンクの関節と同一位置に設けると共に，その質量と回転軸に関する慣性モーメントのみを考慮している．

与えたロボットの運動を次式に示す．

$$\bar{\theta}_1 = (\pi/2) \times (-2(t/0.8)^3+3(t/0.8)^2)$$

$$\bar{\theta}_2 = (\pi/2) \times (-2(t/0.8)^3+3(t/0.8)^2)$$

$$\bar{\theta}_3 = (\pi/2) \times (-2(t/0.8)^3+3(t/0.8)^2)$$

$$\bar{\theta}_4 = (\pi/2) \times (-2(t/0.8)^3+3(t/0.8)^2-1)$$

$$\bar{\theta}_5 = \pi \times (-2(t/0.8)^3+3(t/0.8)^2) \qquad \text{以上(7.8)}$$

ここで，tは時刻を示し，0.8 秒で各関節がπ／2ないしπrad 回転する運動である．ロボットの運動の初期と終端の姿勢を図7-4 にしめす．

解析結果を図7-5 に示す．求めた各関節の駆動トルクを時刻に対して示している．図中Case#1は，従来よりよく用いられる解析法，すなわち，図7-2 の5自由度のモデルの慣性行列の対角項にモータのロータのリンクイナーシャ相当値を加える解析法に基いて計算したものであり，Case#2は本稿で提案した解析法，すなわち，図7-3 の解析モデルによるものである．

図7-5 よりロータの重量や，回転による遠心力・コリオリ力の効果は小さく，従来の慣性行列の対角項にロータのリンクイナーシャ相当値に加える解析法は妥当であると考えられる．ただし，本解析例は現用の一般的なロボット諸元についてのものであり，アームの高速化や軽量化，およびロータ重量の増大に伴って，これらの効果は大きくなる．

7.4 まとめ

モータのロータ回転の効果を考慮できるロボットアームのダイナミックス解析法を提案した．提案した解析法は，ロータも一つのリンク要素とみなし，リンクとロータの角速度の関係，すなわち伝達機構の機能を拘束条件とみなして解析する方法である．

解析例により本解析法の妥当性を明らかにすると共に，本解析法を5自由度の垂直多関節形ロボットに適用してモータのロータ重量や回転による遠心力・コリオリ力の効果を見積った．その結果，それらの効果は小さく，従来の慣性行列の対角項にロータのリンクイナーシャ相当値を加える解析法の妥当性が明らかになった．しかしアームの軽量化，高速化やロータ重量の増大に伴って，これらの効果は大きくなり，本章で提案した解析が必要となる．

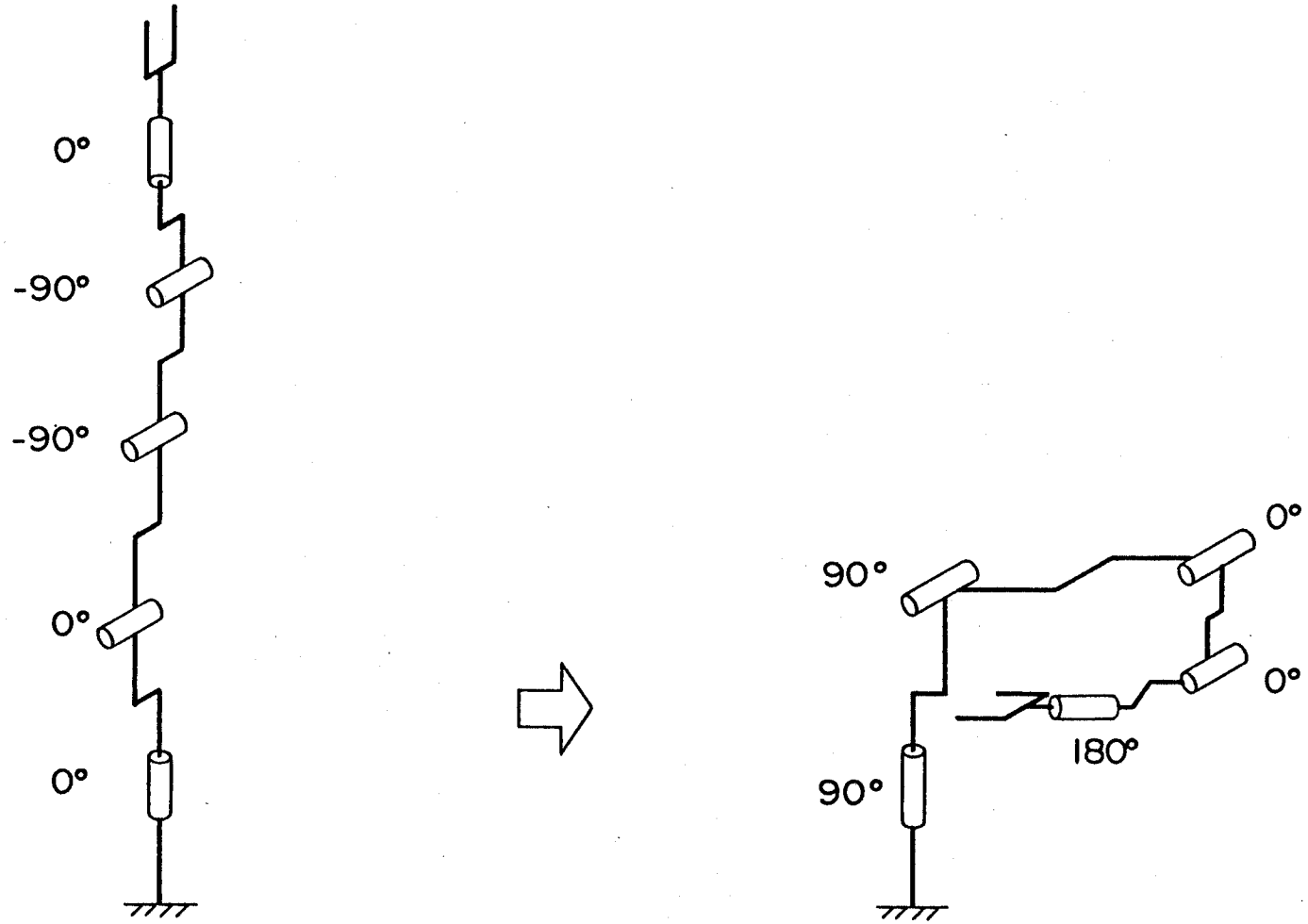


図 7-4　解析したロボットの運動

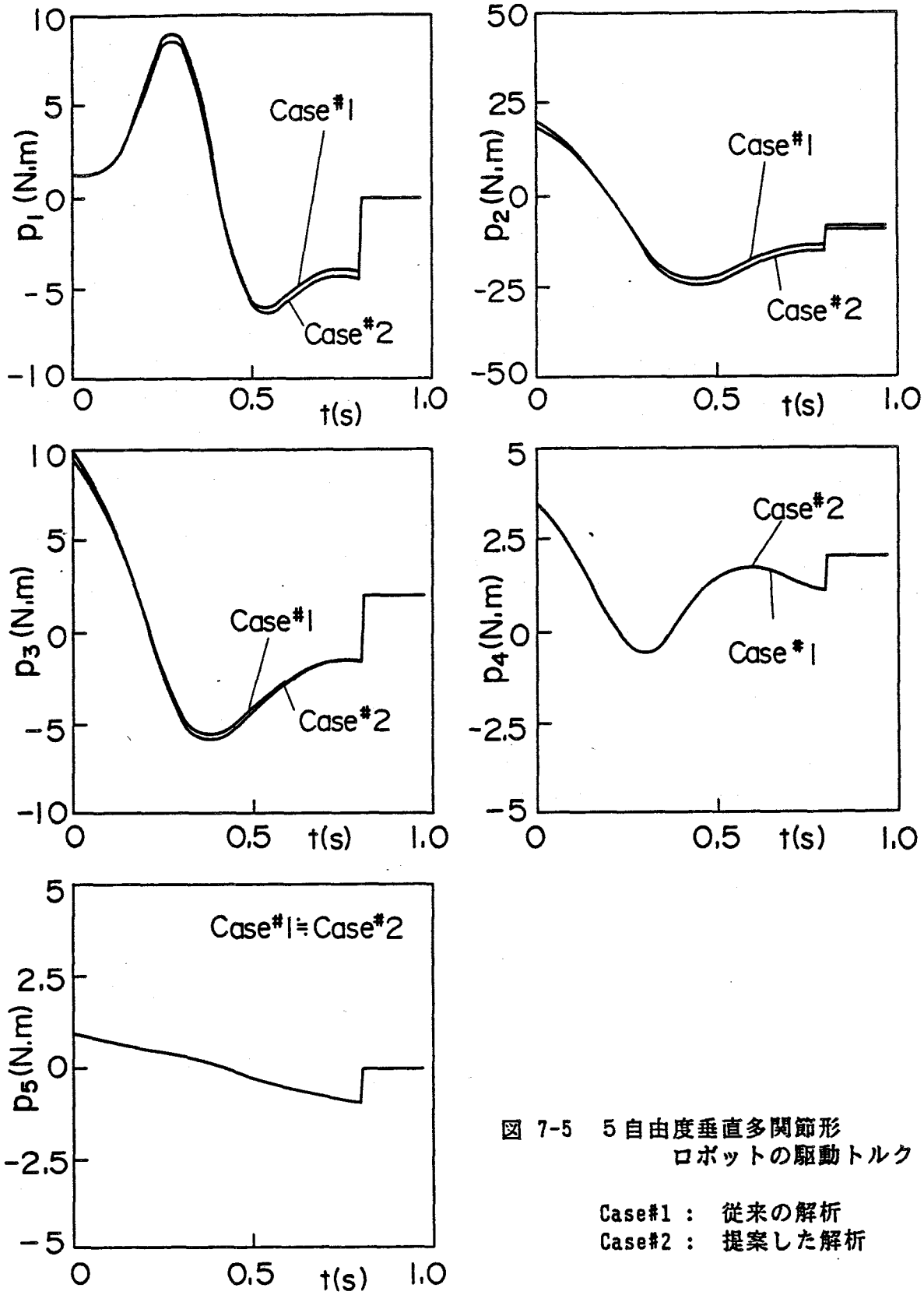


図 7-5　5自由度垂直多関節形
ロボットの駆動トルク

Case#1 :　従来の解析
Case#2 :　提案した解析

第８章　水平関節形ロボットの設計検討（パラメータスタディ）

8.1　まえがき

産業用ロボットは，従来の機械装置に比べて，構造上必ずしも安定ではないため，振動が生じやすい．しかし組立ラインなどにおいては，高精度の位置決めを高速で達成することが要求される．このため，ロボットの設計では，この二律背反する問題を解決して，速応性を高め，定常偏差を小さくすると共に，停止後に発生する振動を極力抑制する必要がある．

振動の仰制と精度の確保の両面から，Paul[28] やLuh[58]は，１軸ごとの基本的な制御系の設計法を検討し，重力やクーロン摩擦，および運動に必要な力を補償するフィードフォワード制御を推奨している．ここでは，リンク慣性とモータ軸の慣性の和を等価慣性として，両者を一体として取り扱い，動力伝達系の剛性をロボットの構造共振周波数の形で考慮している．そして，フィードフォワード制御の有効性は，浅田他 [59]によって実験的に検証されている．しかし，現実の産業用ロボットは，ほとんど固定ゲインのコントローラを用いて制御されており，このような構成の制御系の設計法を検討した報告は少ない．

本章では，シミュレーションプログラムをアームの動特性のみではなく，制御系，駆動系，および動力伝達系を含む産業用ロボットシステムの総合的なシミュレーションができるように拡張し，水平関節形ロボットを一例に，多軸連成時の振動特性とこれに及ぼす各種パラメータの効果について検討する．

そして，産業用ロボットに多用されている駆動モータの回転角を検知してアームの運動を制御するセミクローズドループのロボットシステムについて，アームに発生する振動の性質やその低減法を明らかにする．さらに一連の結果に基づいて，ロボットシステムの設計指針について論じる．

8.2　解析法

ロボットシステムの構成を図8-1 に示す．図に示すようにロボットシステムは，大別すると，制御系，駆動系，伝達系，およびアーム運動系より構成される．制御法は，駆動モータの回転角を検知してアームを制御するセミクローズドループである．これらを考慮したロボットシステムの動特性の総合的なシミュレーションには，図8-2 に示すブロック線図が適用できる．[60] 図において，制御系，駆動系，伝達系は各軸に設けられ，これらがアーム運動系で連成する．ただし図では，ロボットアームの軸の順序を示す添字ｉを省略し，一軸のみのブロック線図を描いている．以下各系の動特性の解析法について述べる．

(1) 制御系

制御系では，位置，および速度のフィードバックを行なう．制御系では，各リンクの現在位置と現在速度を駆動モータ軸の回転角で検出し，目標位置との偏差に位置フィードバックゲイン（以下位置ゲインン）$G_p{}^i$を乗じた電圧と，目標速度との偏差に速度フ

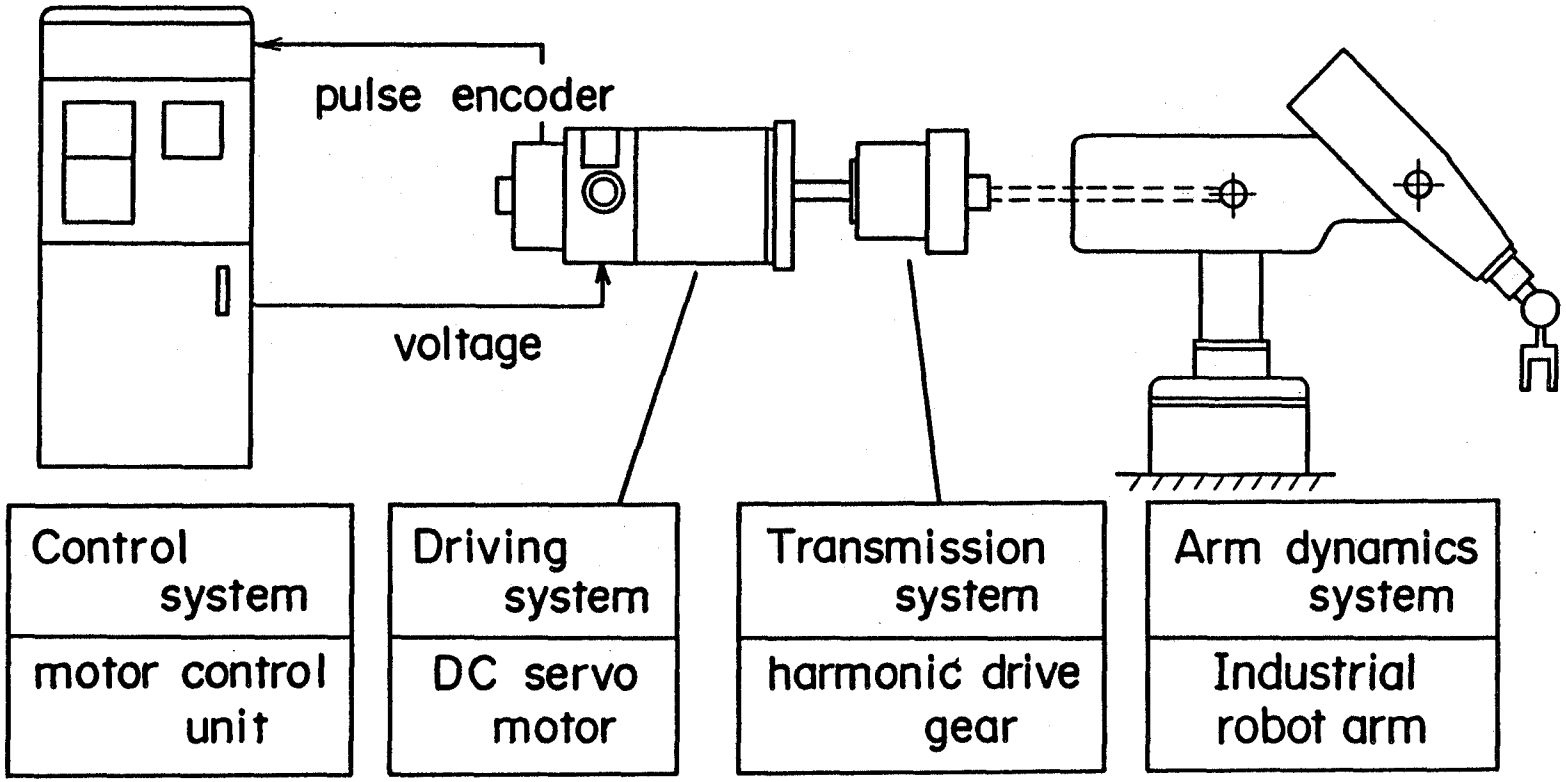


図 8-1 ロボットシステムの構成

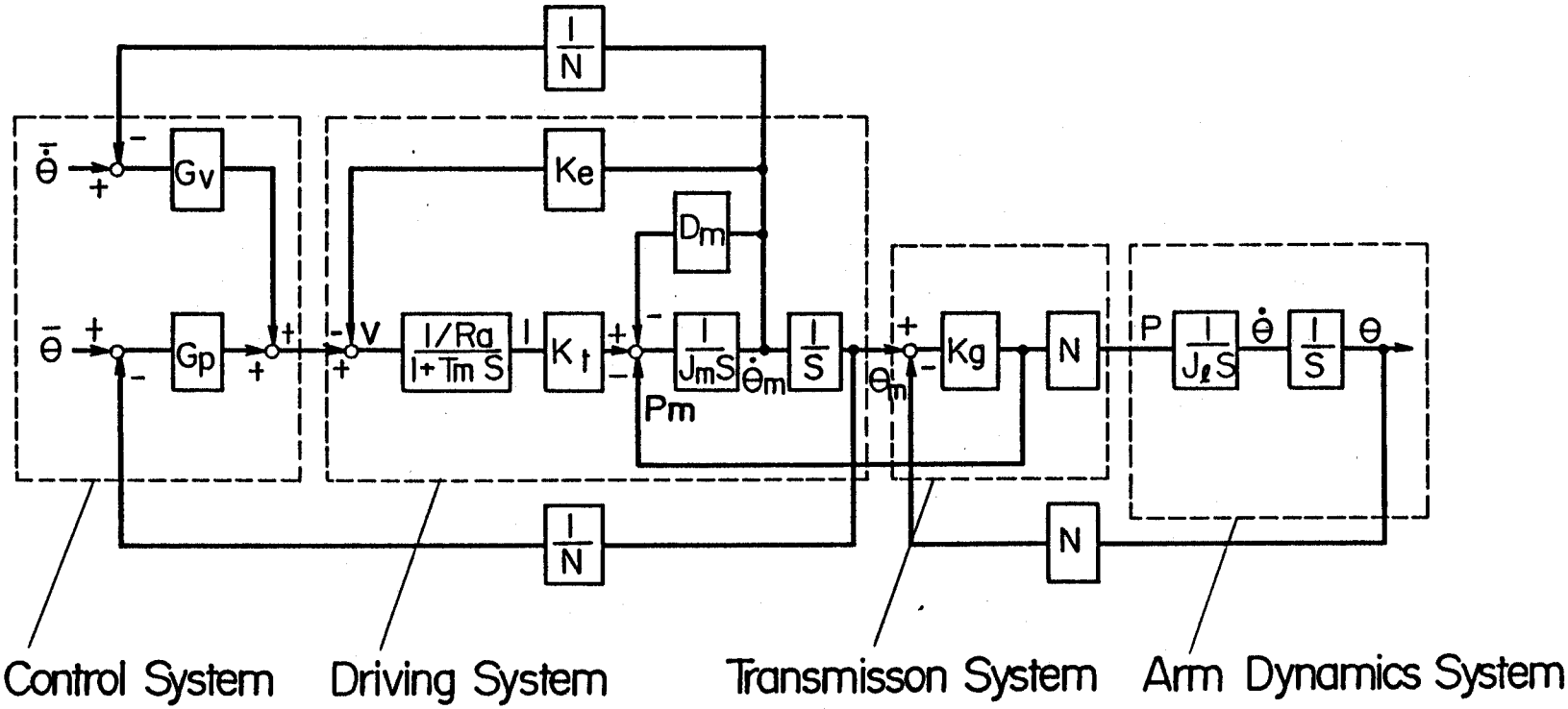


図 8-2 ロボットシステムのブロック線図

ィードバックゲイン（以下速度ゲイン）G_v^iを乗じた電圧の和を駆動系へ出力する．すなわち，モータの入力電圧V_iは，次式で与えられる．

$$V_i = G_p^i(\bar{\theta}_i - \theta_m^i/N_i) + G_v^i(\dot{\bar{\theta}}_i - \dot{\theta}_m^i/N_i) \qquad (8.1)$$

ここで，$\bar{\theta}_i$，$\dot{\bar{\theta}}_i$は，それぞれ軸iの目標位置と目標速度，θ_m^i，$\dot{\theta}_m^i$は，軸iを駆動するモータの回転角と角速度，N_iは動力伝達系の減速比である．

(2) 駆動系

直流サーボモータを想定している．印加電圧V_iを受け，モータトルクP_m^iを発生し，これによって慣性モーメントJ_m^iを持つモータ軸を回転させる．モータ電流I_iを表わす微分方程式は，次式で与えられる．

$$R_a^i(I_i + T_m^i\dot{I}_i) = V_i - K_e^i \cdot \dot{\theta}_m^i \qquad (8.2)$$

ここで，K_e^i，R_a^i，T_m^iは，それぞれ軸iを駆動するモータの逆起電力定数，電機子抵抗，電機子時定数である．

モータ軸に作用するトルクP_m^iは，モータのトルク定数K_t^iを用いて次式で与えられる．

$$P_m^i = K_t^i \cdot I_i \qquad (8.3)$$

モータ軸の運動方程式は，次式で与えられる．

$$J_m^i\ddot{\theta}_m^i + D_m^i\dot{\theta}_m^i = P_m^i - p_i/N_i \qquad (8.4)$$

ここで，J_m^i，D_m^iは，それぞれ軸iを駆動するモータ軸の慣性モーメント，制動定数であり，右辺第 2項は，軸iに作用する反作用トルクである．

(3) 動力伝達系

動力伝達系として，ハーモニックドライブ減速機を想定し，減速比N_iと剛性K_g^iをもつ伝達要素としてモデル化する．駆動系より出力されたモータの回転角θ_m^iと軸iの回転角θ_iの偏差にハーモニックドライブ減速機の剛性を乗じた外力p_iがリンクに作用する．

$$p_i = K_g^i(\theta_m^i - N_i\,\theta_i)N_i \qquad (8.5)$$

(4) アーム運動系

ロボットアームの運動方程式は，関節の摩擦などを無視すると，次式によって与えられる．

$$(\ddot{\theta}) = [W]^{-1}(p + U) \qquad (8.6)$$

ここで，θは関節変位を表わすθ_iを要素とするベクトル，Wは慣性行列，pは関節駆動力を表わすp_iを要素とするベクトル，Uは各関節に作用する遠心力，コリオリ力，および重力の総和のベクトルで，θ，$\dot{\theta}$に依存する．シミュレーションでは，式(8.6)の慣性行列Wや非線形項を表わすベクトルUを，第２章で述べたアッペル法を用いて求めている．

式(8.1) ～式(8.6) を連立させて解くことにより，制御系，駆動系，動力伝達系，およびアーム運動系の各軸相互の連成を考慮したロボットシステム全体の総合的なシミュ

レーションが可能となる．

この時の各軸と，これを駆動するモータの回転角や角速度の初期値は，次式で与えられる．

$$[\theta_i]_{t=0} = [\bar{\theta}_i]_{t=0}$$
$$[\dot{\theta}_i]_{t=0} = 0$$
$$[\theta_m{}^i]_{t=0} = [\bar{\theta}_i]_{t=0} \cdot N_i$$
$$[\dot{\theta}_m{}^i]_{t=0} = 0 \qquad \text{以上(8.7)}$$

式(8.7) 中の目標軌道を表わす$\bar{\theta}_i$，$\dot{\bar{\theta}}_i$については後述する．なお，シミュレーションの数値積分法は，ルンゲ・クッタ・ギル法を用いている．

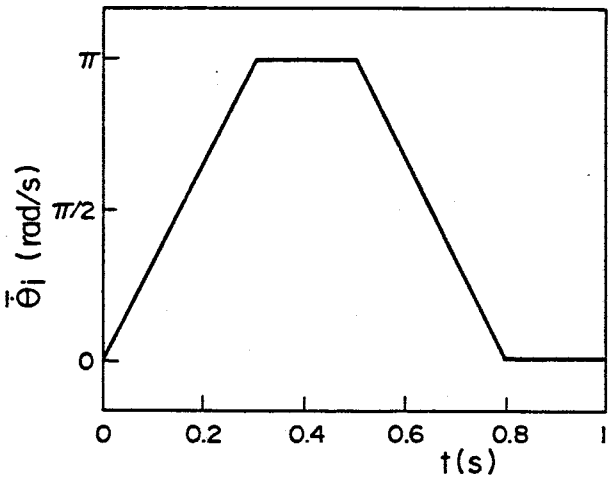


図 8-5　軸2,3,4 の目標速度

8.3　シミュレーション諸元

解析の対象としたロボットは，図8-3 に示す 4自由度の水平関節形である．その力学モデルと各リンク（軸）に設定した座標系を図8-4 に示す．座標系の原点は，各軸の重心位置としている．アーム運動系諸元を表8-1 に示す．表中，基準座標側の関節から重心までの位置ベクトル，および手先側の関節までの位置ベクトルを該当軸に取った座標系で表わしている．慣性モーメントも同様である．駆動系諸元，および動力伝達系の減速比を表8-2 に示す．

以下では，表8-1 と表8-2 の諸元を一定として，制御系の位置ゲイン，速度ゲイン，および動力伝達系の剛性がロボットの振動特性に及ぼす効果を検討している．

関節の目標速度を時間に対して図8-5 に示す．軸1 と軸2 ～軸4 相互に運動の連成がないので軸2 ～軸4 をこの速度パターンで動かし，軸1 は動かさない．図に示すように，加減速時間 0.3秒，一定速度時間 0.2秒，最高角速度 180°／秒の台形の速度パターンについてシミュレーションした．目標位置は，目標速度を積分したもので，両者を制御系に入力した．運動の様子を図8-6 に示す．直線状態から各関節が同時に回転を始め，それぞれの関節が90° 旋回する運動につてシミュレーションした．

制御系の剛性ベクトル$\vec{K}_c$ を次式で定義する．

$$\vec{K}_c = (G_p{}^i K_t{}^i N_i / R_a{}^i) \qquad (i = 2 \sim 4) \qquad (8.8)$$

現在位置と目標位置との差に応じて駆動モータはトルクを発生するので，制御系の位置ゲインは，発生トルクを偏差で除した剛性を持つばねと同等の効果を有する．上式は，減速比を考慮して，リンクの回転偏差に対するリンクトルクとして制御系の位置ゲインを剛性に変換している．

同様に，動力伝達系の剛性ベクトル$\vec{K}_G$ は次式となる．

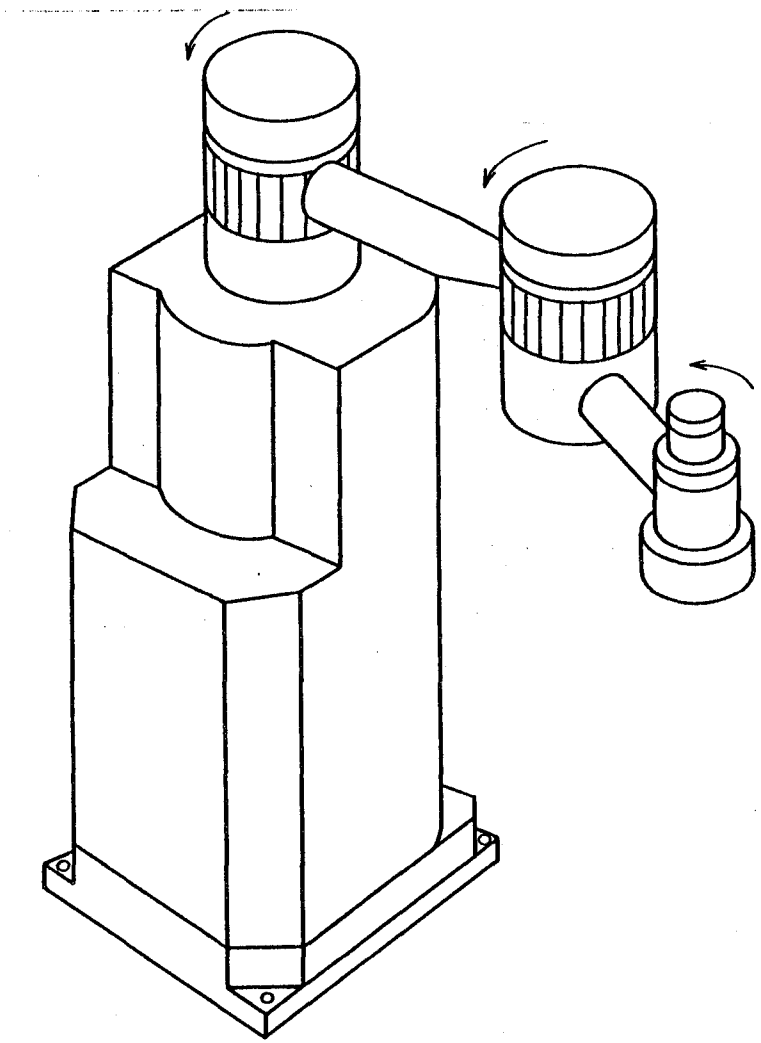


図 8-3　4 自由度水平関節形ロボット

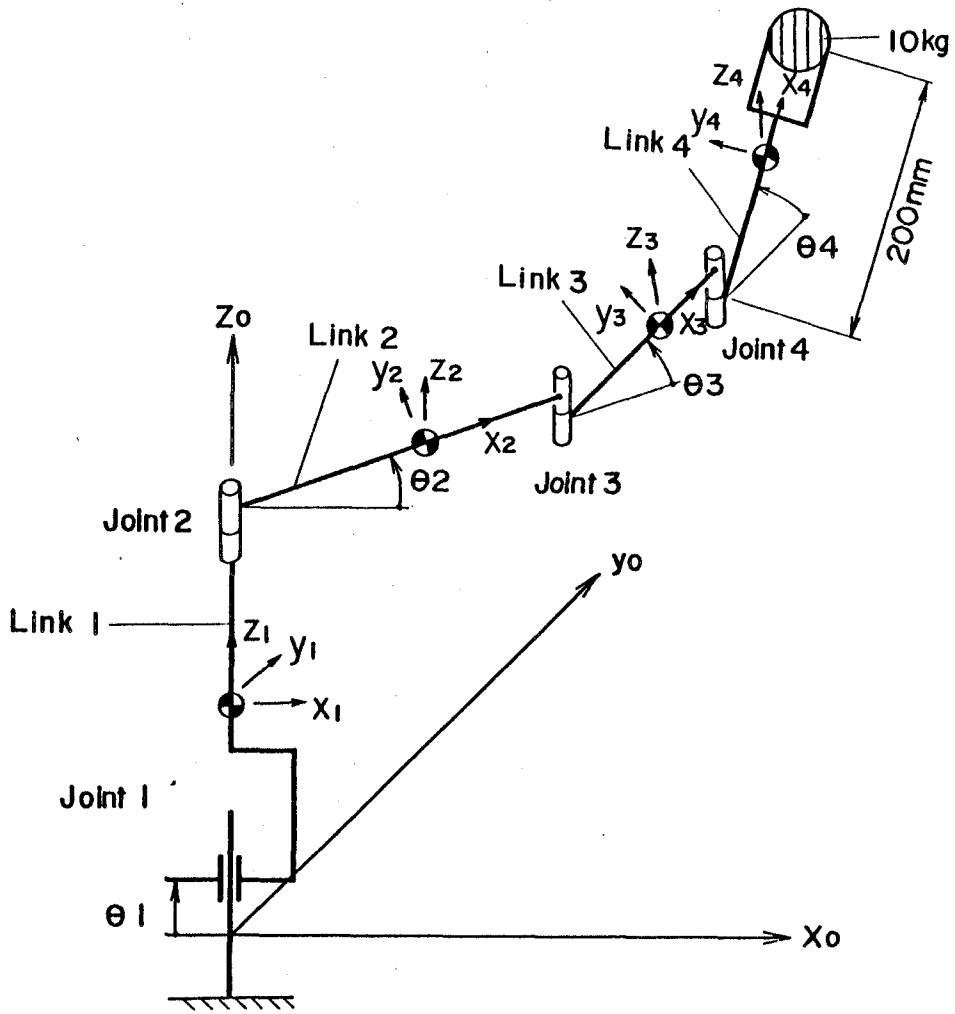


図 8-4　4 自由度水平関節形ロボットの力学モデル

表 8-1 アーム運動系諸元

	Center of Gravity			Length		
	x_g(m)	y_g (m)	z_g (m)	x_ℓ(m)	y_ℓ(m)	z_ℓ(m)
Link-1	.0	.0	.053	.0	.0	.5
Link-2	.148	.0	.09	.4	.0	.025
Link-3	.135	.0	-.064	.25	.0	-.114
Link-4	.188	.0	-.049	.2	.0	-.049

	Mass	Moment of Inertia		
	m(kg)	I_{xx}(kg·m^2)	I_{yy}(kg·m^2)	I_{zz}(kg·m^2)
Link-1	19.1	.0	.0	.0
Link-2	28.2	.0	.984	.984
Link-3	7.25	.0	.108	.108
Link-4	10.65	.0	.024	.024

表 8-2 駆動・伝達系諸元

	Ra (Ω)	Tm (s)	Kt (N·m/A)	Dm (N·m·s/rad)	Ke (V·s/rad)
Joint-1	1.17	.0303	.389	4.45×10^{-2}	.389
Joint-2	1.6	.0239	.265	3.46×10^{-2}	.265
Joint-3	2.21	.0275	.216	1.33×10^{-2}	.216
Joint-4	13.36	.0113	.188	1.87×10^{-3}	.188

	Jm (kg·m^2)	N (-) or (rad/m)
Joint-1	3.72×10^{-3}	325.1
Joint-2	9.6×10^{-4}	100.0
Joint-3	5.58×10^{-4}	100.0
Joint-4	3.13×10^{-5}	100.0

Ra : Armature Resistance
Tm : Electrical Time Constant
Kt : Torque Constant
Dm : Viscous Damping
Ke : Back Electromotive Force Constant
Jm : Rotor Moment of Inertia
N : Reduction Ratio

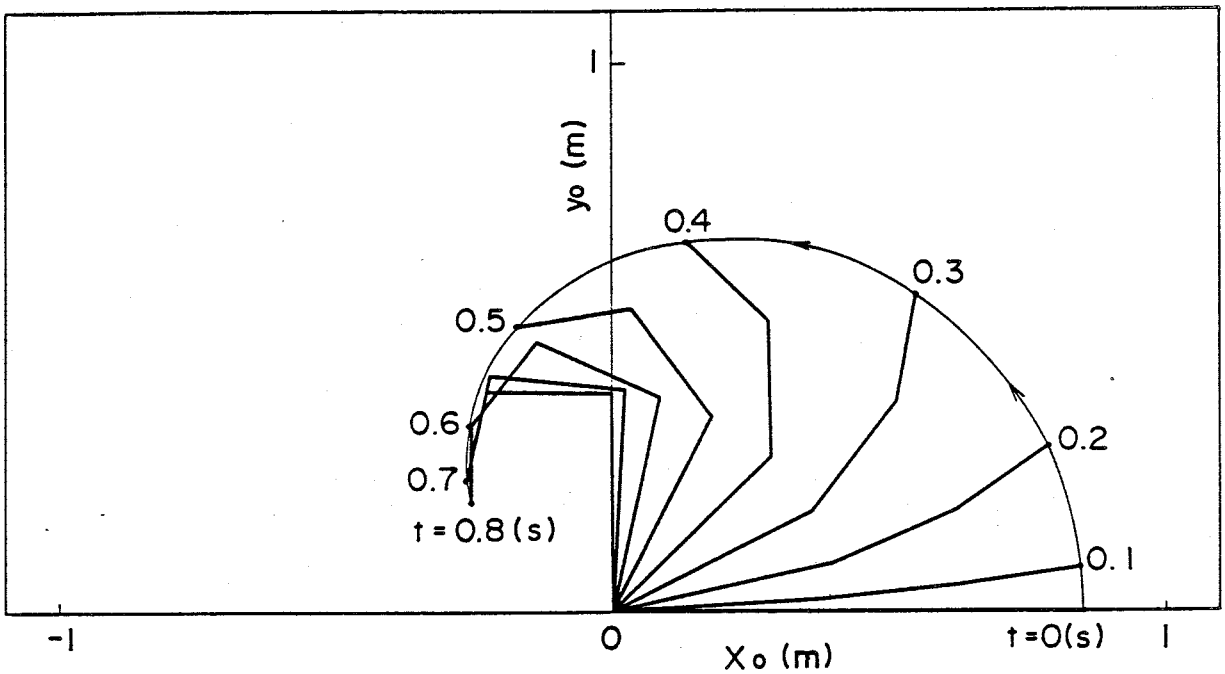


図 8-6　シミュレーションしたロボットの運動

$$\vec{K}_G = K_{gi}(N_i)^2 \qquad (i=2 \sim 4) \qquad (8.9)$$

式(8.8) の制御系の剛性と式(8.9) の動力伝達系の剛性の大小により，シミュレーションの条件を次の 2つに分類し，それぞれについて以下の節で検討する．

(1) 制御系の剛性が動力伝達系の剛性に比べて十分大きい場合（$\vec{K}_C \gg \vec{K}_G$）

(2) 動力伝達系の剛性が制御系の剛性に比べて十分大きい場合（$\vec{K}_G \gg \vec{K}_C$）

8.4　シミュレーション結果と考察

8.4.1　制御系の剛性≫伝達系の剛性の場合

(1)　シミュレーション結果

前節で定義した制御系の剛性ベクトルが，

$$\vec{K}_{CS} = (8\times10^5,\ 4\times10^5,\ 1\times10^5) \qquad (\mathrm{N\cdot m/rad}) \qquad (8.10)$$

動力伝達系の剛性ベクトルが，

$$\vec{K}_{GS} = (4\times10^4,\ 2\times10^4,\ 0.5\times10^4) \qquad (\mathrm{N\cdot m/rad}) \qquad (8.11)$$

速度ゲインベクトルが，

$$\vec{D}_{CS} = \vec{K}_{CS}/20 \qquad (\mathrm{N\cdot m/rad}) \qquad (8.12)$$

を基準としてシミュレーションを行なう．すなわち，基準値は，制御系の剛性が動力伝達系の剛性の20倍となっている．パラメータを変更する際は，各軸とも同一の比率で変化させる．変更後の値は，先の基準値にスカラーを乗じて表わす．

上記の条件でのシミュレーション結果を図8-7 に示す．図は軸2 ～軸4 の角速度変化を

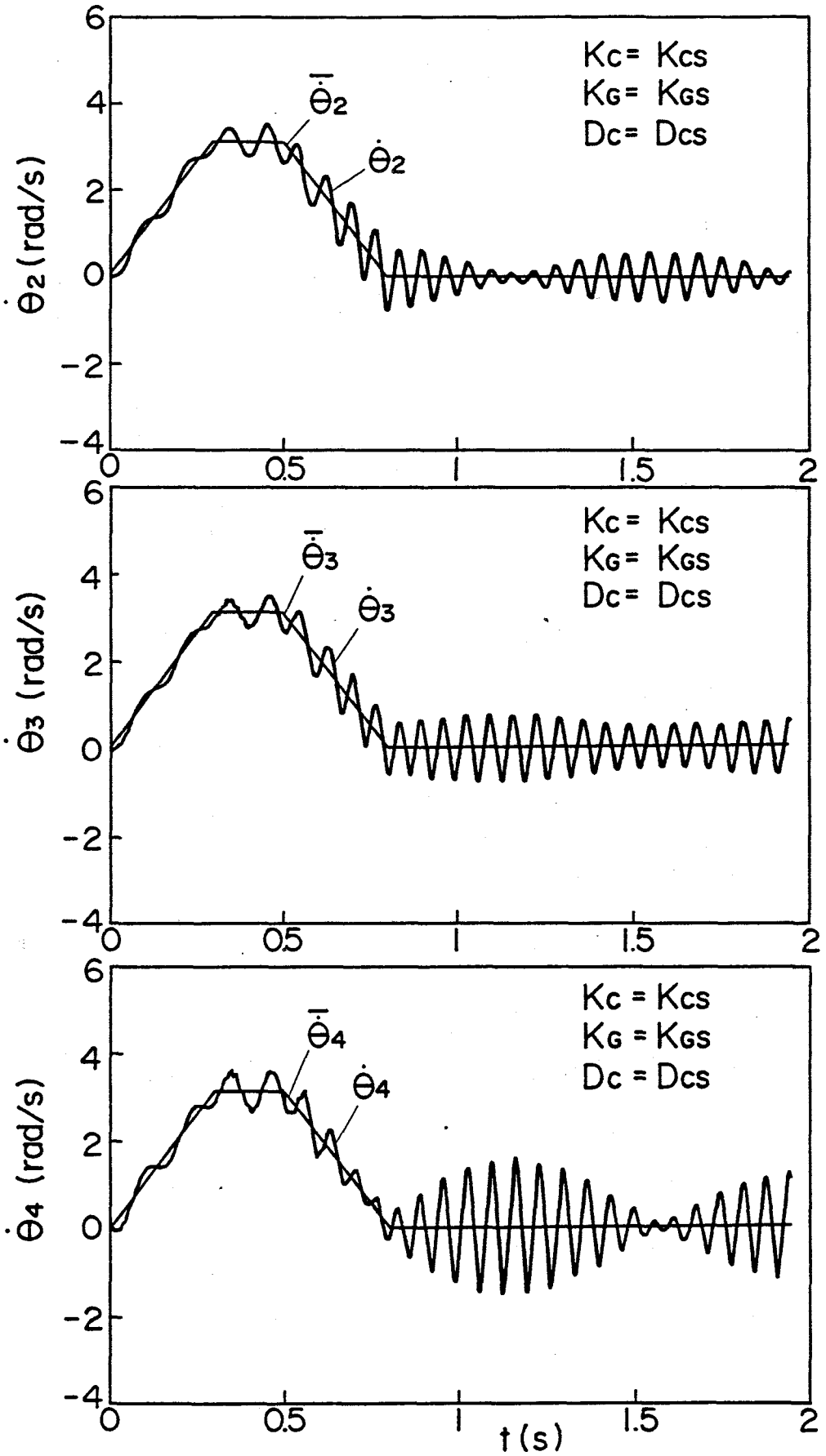


図 8-7 シミュレーション結果（$\vec{K}_c \gg \vec{K}_c$）

示す．また，ロボットの各姿勢における固有振動数は，本シミュレーションとは別に付録に示す解析式より求めた．アームの旋回角Θ（$=\theta_2=\theta_3=\theta_4$）と解析式により求めた固有振動数の関係を図8-8 に示す．

図8-7 と図8-8 より，次の事項が明らかである．

(1) 運転中にロボットに発生する振動は，各関節とも同一周波数で関節に動力伝達系のばねを設けたアーム運動系の一次固有振動数である．

(2) ロボットに発生する振動周波数は，アームが旋回するにしたがって徐々に高くなる．

(3) ロボットの停止後に発生する振動は，図8-8 のアームの旋回角が90° の時の 1次固有振動と一致している．そして，この場合には，1 次と 2次の固有振動数が近接しているため，うなり現象が発生している．

停止後の振動にうなり現象が発生した．1 次と 2次の固有振動数が近接しているためである．これに対し，1 次と 2次の固有振動数がかなり異なる場合の例として，ロボットに逆の運動，すなわち各軸が90° 旋回した状態から直線状態で終る運動させた場合のシミュレーション結果を図8-9 に示す．図は一例として関節4 の角速度をとりあげている．停止後の各軸が直線の状態では，高次モードも含まれているが，1 次の固有振動が卓越していることが明らかであり，うなりは発生しない．

(2) 振動の低減法

（ i ） 制御系の速度ゲインの増大

制御系の速度ゲイン，すなわち，系のダンピングを増加させた時のシミュレーション結果を図8-10に示す．図は基準値に対して制御系の速度ゲインを2,4 倍したものを，関節4 の角速度について先の基準値の場合と比較したものである．図より，系のダンピングが増加してもロボットに発生する振動はほとんど変化しないことがわかる．

この時の駆動モータの角速度を図8-11に示す．ただし，図はモータ軸の角速度を減速比で除してアームの角速度に変換したものである．いずれの場合についても，モータ軸は運転終了後すみやかに停止している．この結果から，アームのみが動力伝達系のばねで振動していることがわかる．このため，制御系のダンピングを増加しても制振効果が期待できないと考えられる．

（ ii ）動力伝達系の剛性の増減

ロボットアームの振動特性に及ぼす動力伝達系の剛性の効果を図8-12に示す．図は動力伝達系の剛性を基準値に比べ 2倍，1/2 倍，1/6 倍のシミュレーションを関節4 の回転角について基準値と比較したものである．図より，動力伝達系の剛性を大きくする程，ロボットアームに発生する振動が小さくなることが明らかである．また，動力伝達系の剛性の増減に応じて振動周波数が変化していることもわかる．

（ iii ）制御系のフィードバックゲインの低下

ロボットアームの振動特性に及ぼす制御系のフィードバックゲインの効果を図8-13に示す．図は関節4 の回転角速度について制御系の位置ゲインと速度ゲインを，基準値に比べ

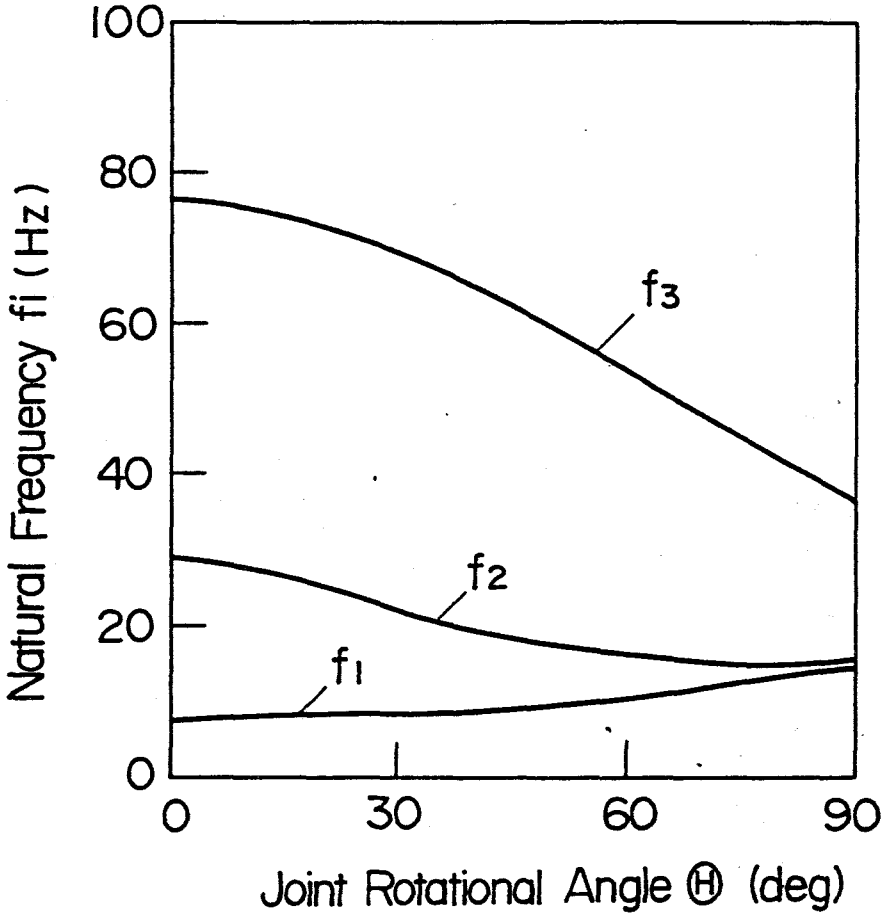


図 8-8　各姿勢の固有振動数

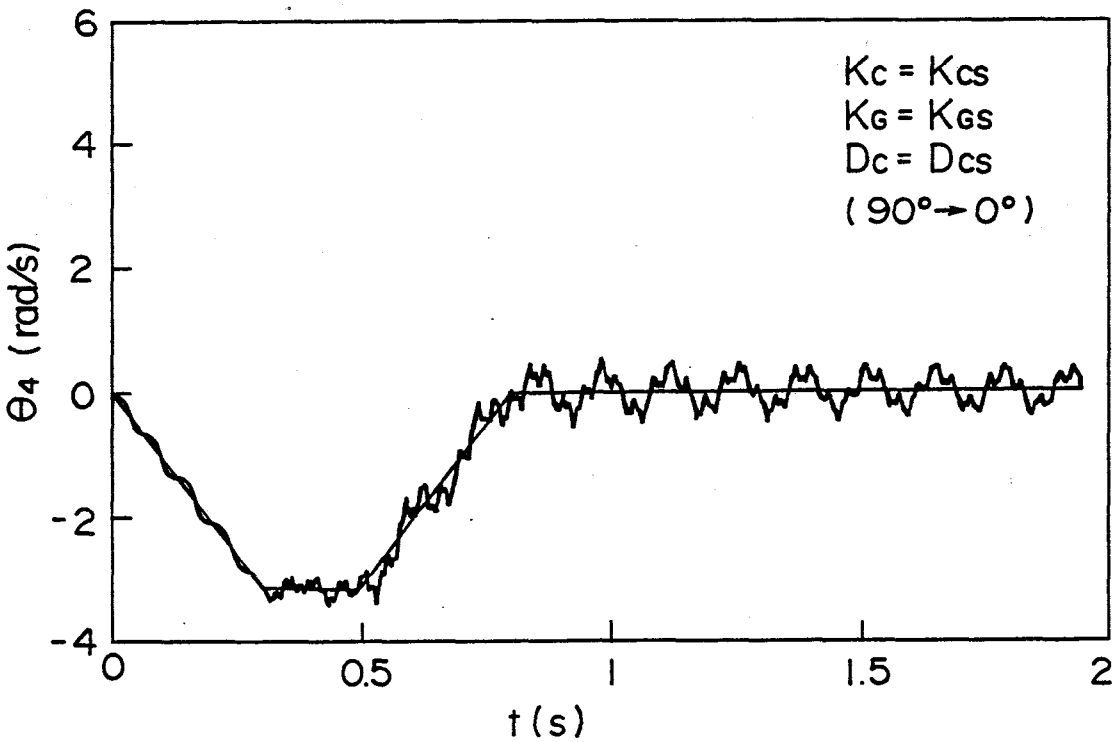


図 8-9　シミュレーション結果（90°→ 0°）

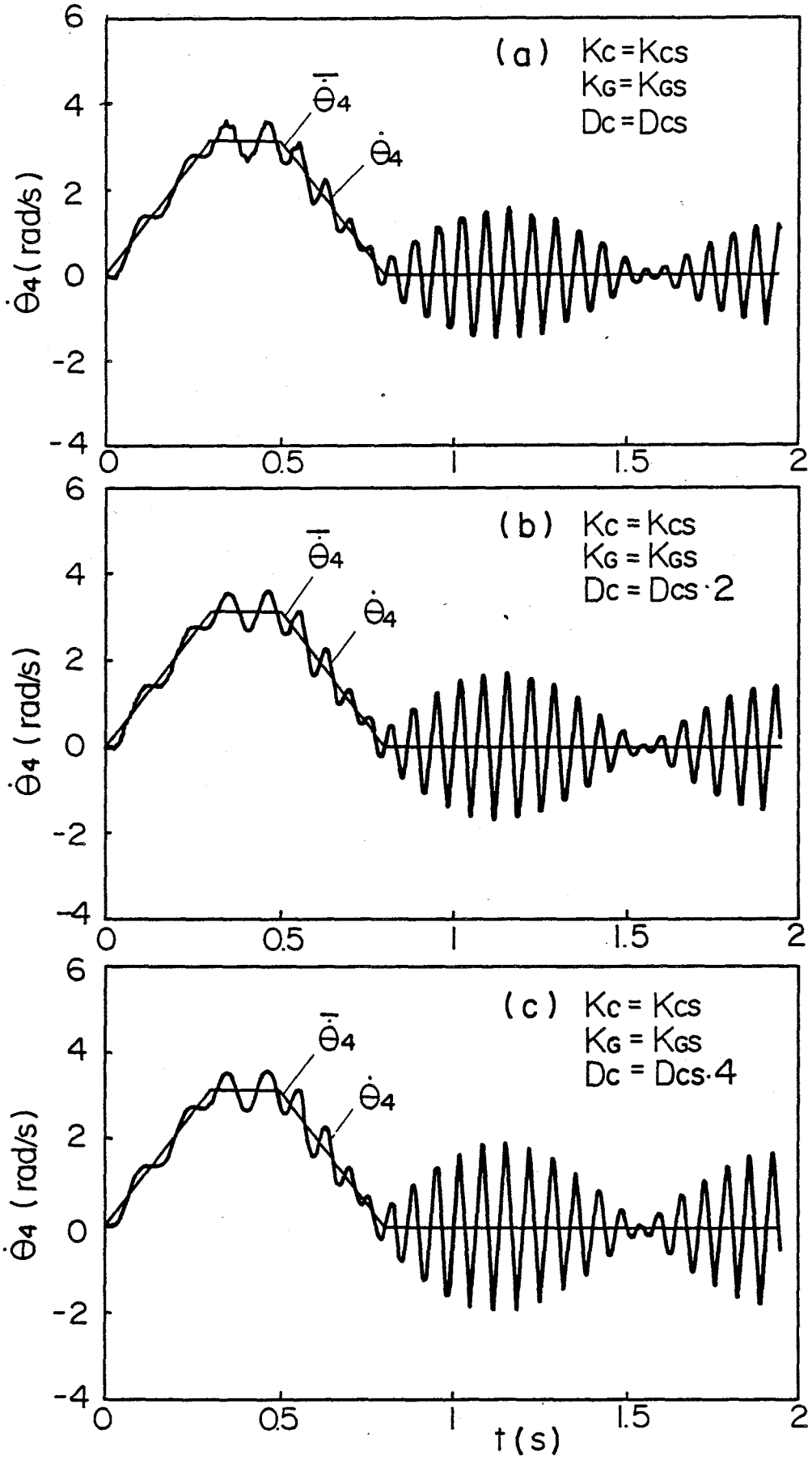


図 8-10 ロボットの振動に及ぼす速度ゲインの効果

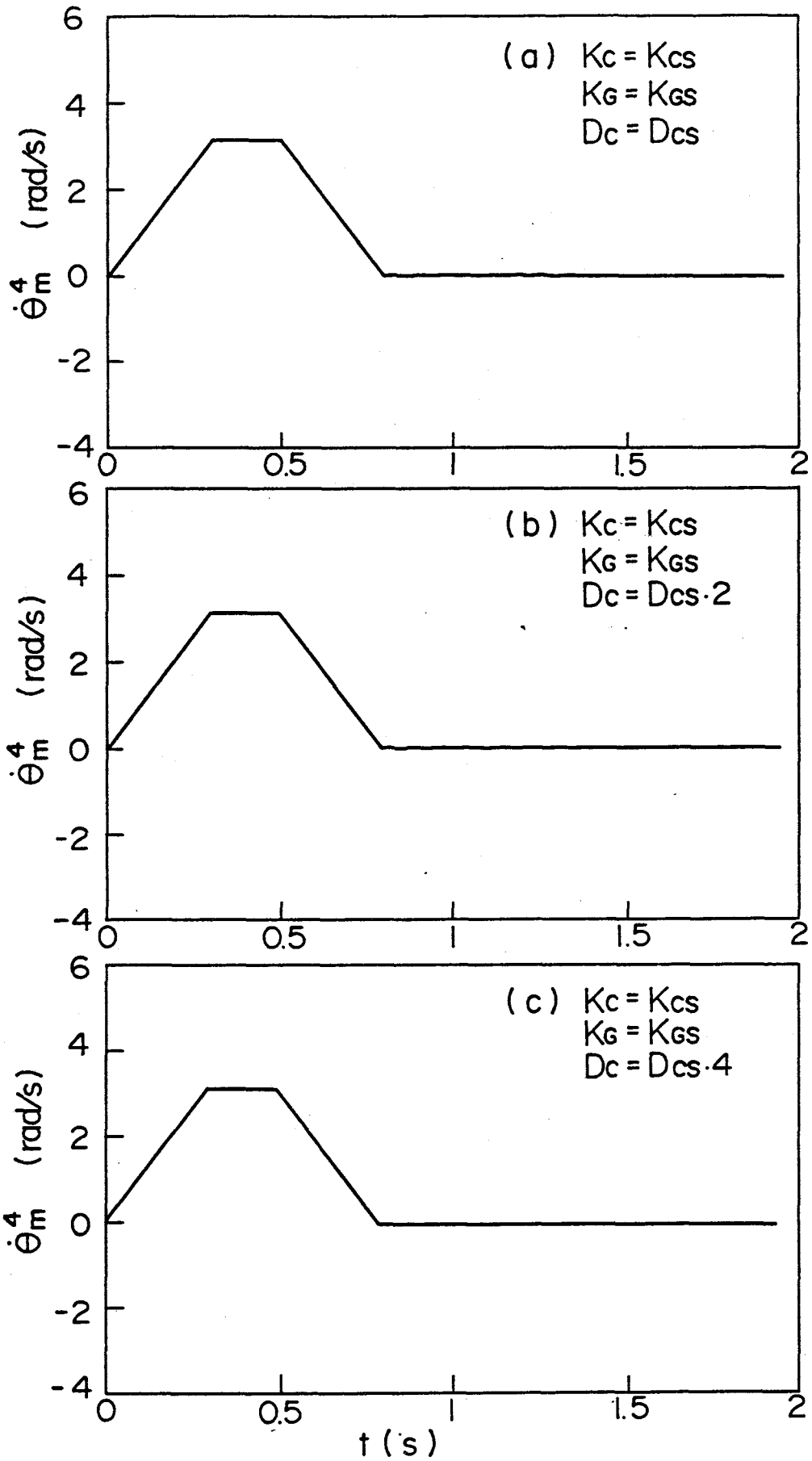


図 8-11 駆動モータの振動に及ぼす速度ゲインの効果

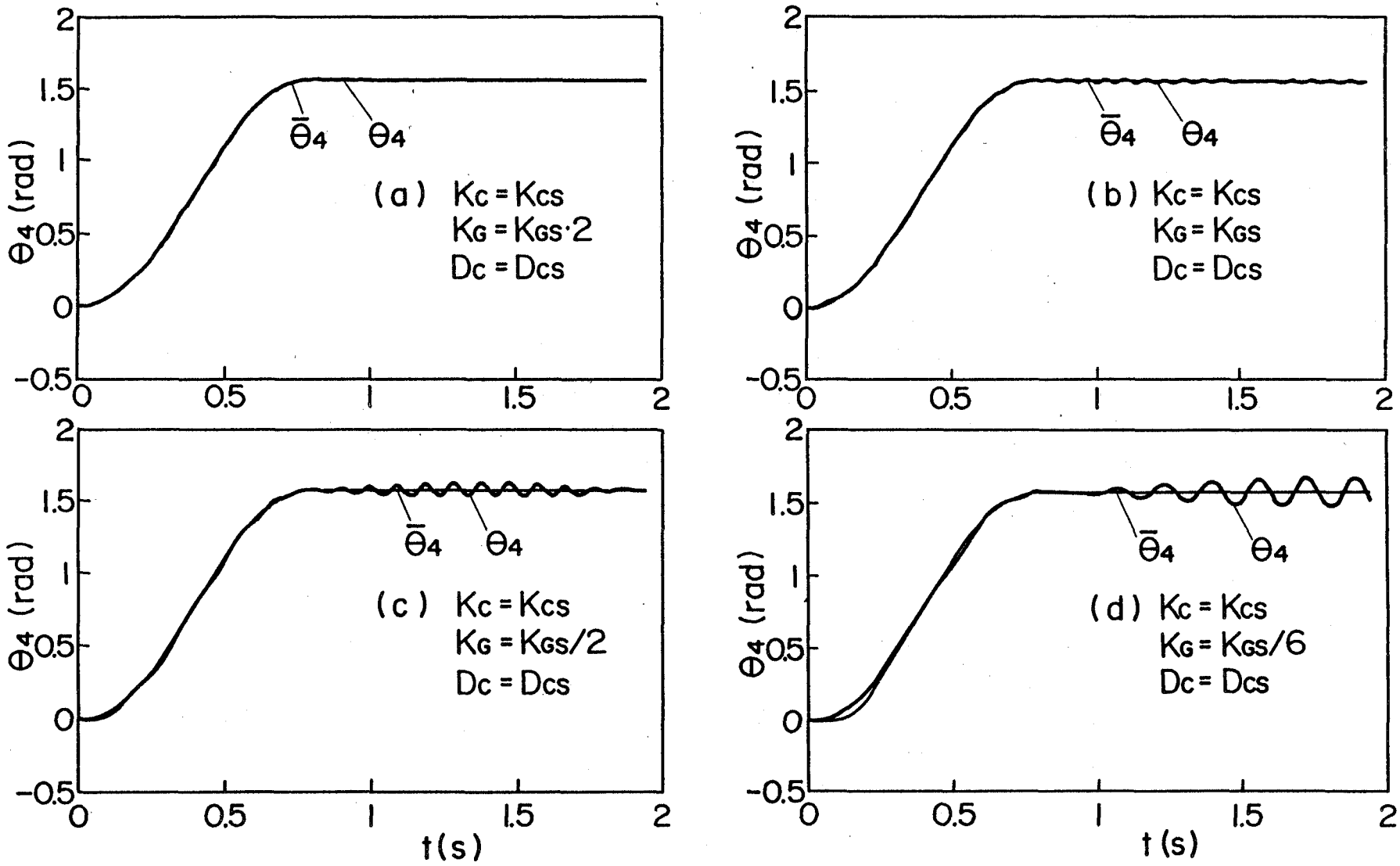


図 8-12 ロボットの振動に及ぼす伝達系の剛性の効果

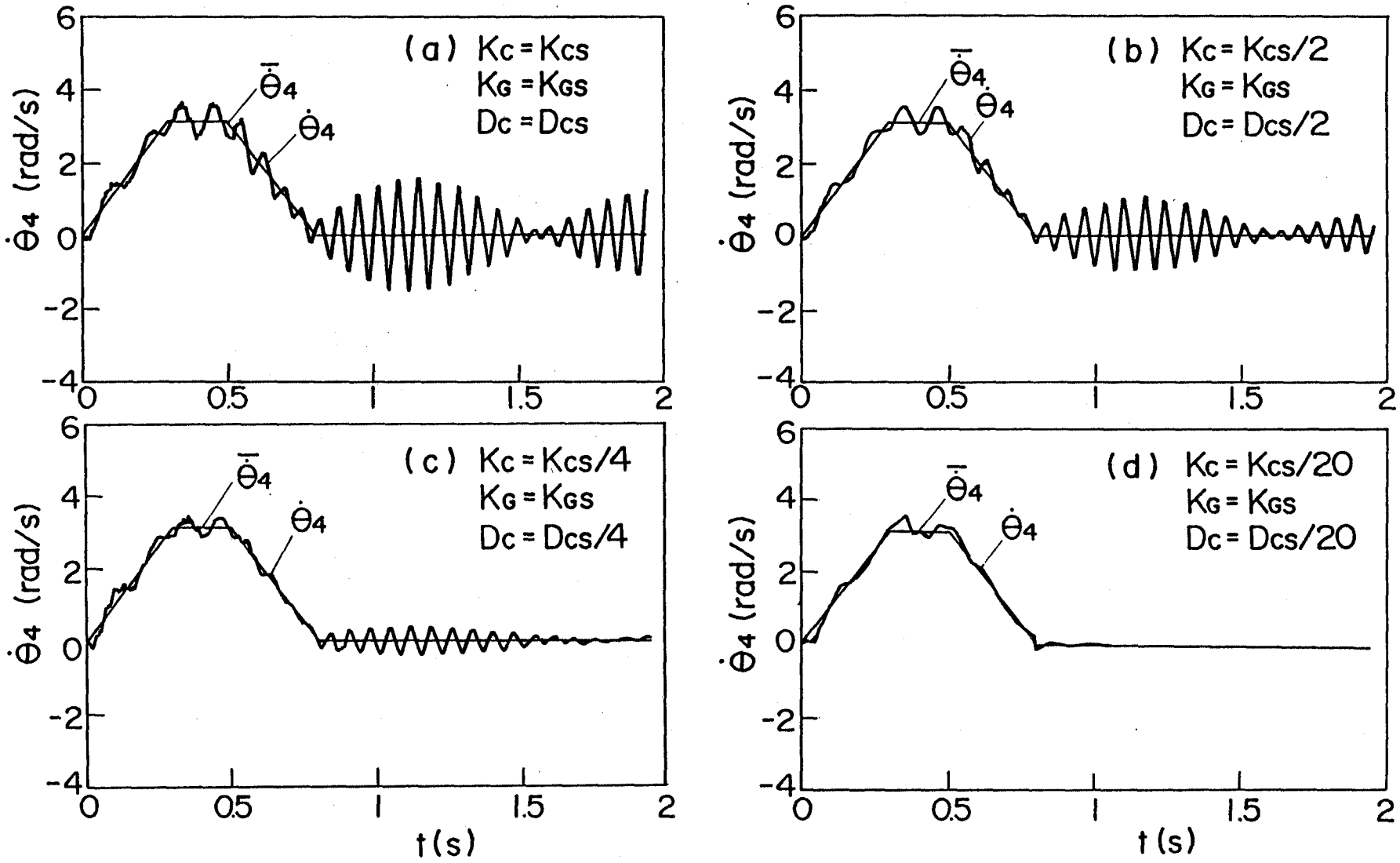


図 8-13 ロボットの振動に及ぼす位置ゲインの効果

て1/2 倍，1/4 倍，1/20倍したものを基準値の場合と比較したものである．図より制御系の剛性とダンピングを小さくする程，ロボットアームに発生する振動が小さくなることがわかる．特に図8-13(d) は，制御系の剛性と動力伝達系の剛性が同一の条件であるが，停止後には，アームに振動がほとんど発生していない．

以上のシミュレーション結果より，制御系の剛性が動力伝達系の剛性に比べて十分大きい場合には，次の 2つの制振法が考えられる．

（Ⅰ） 動力伝達系の剛性の増大

（Ⅱ） 制御系のフィードバックゲインの低下

このうち（Ⅰ）は，現実には困難な場合が多く，（Ⅱ）の制御系のフィードバックゲインの低下が有効であり，制御系の剛性と動力伝達系の剛性とをほぼ同一のオーダにすると振動が非常に小さくなる．

8.4.2 伝達系の剛性≫制御系の剛性の場合

動力伝達系の剛性が制御系の剛性に比べて十分大きい場合のシミュレーション結果を図8-14に示す．図は前節の基準値に比べて動力伝達系の剛性を10倍，制御系の剛性を1/40倍にした時の結果で，両者の比率は，20:1となっている．図8-14は，この条件で，関節4の角速度で代表して，ロボットの振動特性に及ぼす速度ゲインの効果を表わす．最も速度ゲインの低い図8-14(a) をみると，動力伝達系の剛性を前節の基準値の10倍としたにもかかわらず，振動周波数が低下していることがわかる．したがってここで発生している振動は，制御系の剛性に起因して生じていると考えられる．また，これに続く下の図8-14(b)，(C) より，動力伝達系の剛性が大きい場合，振動は速度ゲインを大きくすることによって低減可能であることも明らかである．

8.4.3 考察

ロボットシステムの速応性を高め，定常偏差を小さくするには，制御系を含む関節の剛性を高くする必要がある．関節の剛性に着目すると，図8-2 のブロック線図は，制御系の剛性を持つばねによってモータ軸が支持され，モータ軸とリンクが動力伝達系のばねによって結合されたモデルになっている．したがって関節の剛性は，制御系のばねと動力伝達系のばねをシリーズ結合したものとみなすことができる．

前節のシミュレーションにより，制御系の剛性が低いほど制振が容易であることが明らかである．制御系の剛性が動力伝達系の剛性に比べて十分小さい場合は，極端に小さい速度ゲインを取らない限り制振可能である．しかし，この場合には，ロボットの関節の剛性が制御系の位置ゲインで決まるので，制御系の位置ゲインを大きくすることによって関節の剛性向上が可能である．

ロボットの速応性や定常偏差の観点からは，関節の剛性が高い方が望ましい．このためには，勿論動力伝達系の剛性の高いのが望ましい．しかし，さらに本質的な問題は，制振が可能な範囲で制御系の剛性を動力伝達系の剛性に比べどの程度まで向上させ得るかである．Paul [28]は，構造的な振動を起こさず，かつリンクを含めたロボットシステムの安定

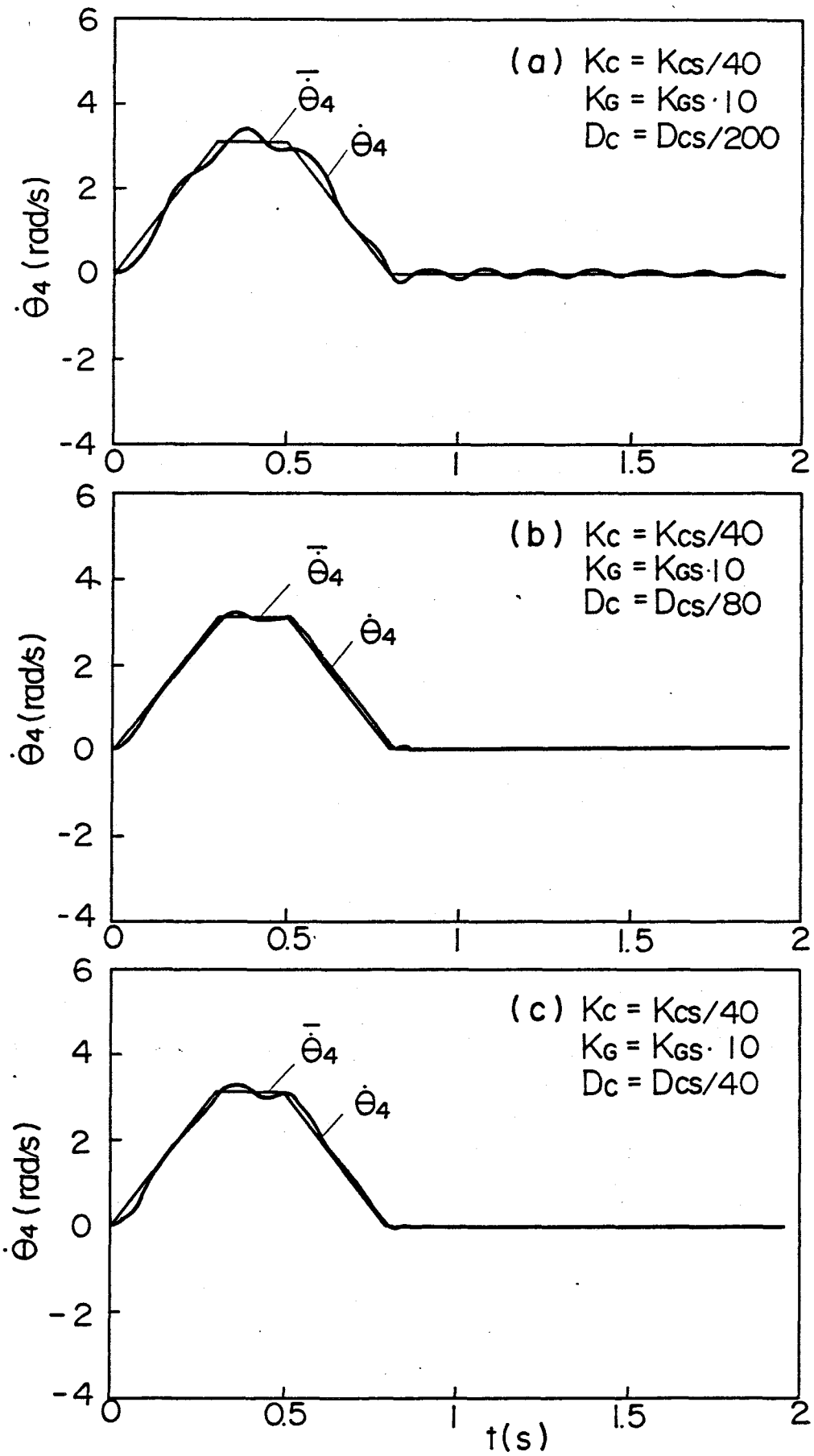


図 8-14 ロボットの振動に及ぼす速度ゲインの効果（$\vec{K}_c \ll \vec{K}_c$）

性を確保するためには，制御系の剛性を動力伝達系の剛性の1/4 以下にすべきであるとしている．また，Luh [58] もこの考え方をとっている．

上記二つの文献では，直接剛性の比では示しておらず，次式の形で表現している．

$$k_e k_m < \pi^2 f_0^2 J_0 \tag{8.13}$$

ここで$k_e k_m$が本報告の制御系の剛性に相当する．J_0がロボット慣性の代表値，f_0は，ロボット慣性がJ_0の時の構造共振周波数である．構造共振周波数を決める剛性を動力伝達系の剛性K_0とすると，f_0，K_0，J_0の間には次の関係が成立する．

$$f_0 = (1/2\pi) K_0 / J_0 \tag{8.14}$$

式(8.13)に式(8.14)を適用すると，

$$k_e k_m < (1/4) K_0 \tag{8.15}$$

となり，表現をかえると，制御系の剛性を動力伝達系の剛性の 1/4以下に設定するのが望ましいということになる．Luh はこれを，構造共振周波数の点で，安全率 200%にとった控えめな設計と評している．[58] 安全率を 100%に下げ，剛性の比に換算すると，制御系の剛性と動力伝達系の剛性が同一になる．本稿では，この条件で十分制振が可能であることを示した．

一方，関節の剛性を高くするため，制御系の剛性を動力伝達系の剛性以上に大きくしても，これら二つの剛性はシリーズに結合されているので，全体の剛性は，動力伝達系の剛性以上に大きくならない．したがって，ロボットシステム全体の剛性と振動低減の双方の観点から，制御系の剛性と動力伝達系の剛性を等しくするような設計が妥当であると考えられる．

8.5 まとめ

現在の産業用ロボットの制御法は，駆動モータの回転角を検知してアームを制御するセミクローズドループである．このようなロボットシステムについて，多自由度のアーム運動系のみでなく，制御系，駆動系，および動力伝達系を含む総合的なシミュレーションを行ないロボットアームに発生する振動とその低減法について検討した．得られた結論は，次の通りである．

(1) 動力伝達系の剛性が制御系の剛性に比べて十分低い場合，アーム運動系の 1次固有振動が卓越する．各軸が剛体で，関節に動力伝達系の剛性を持つばねを配した振動モデルの 1次固有振動である．

(2) これに対し，制御系の剛性が動力伝達系の剛性に比べて十分低い場合には，制御系の剛性に起因する振動が発生する．

(3) 振動が動力伝達系の剛性に起因する場合には，これを高める対策，あるいは制御系のフィードバックゲインの低下（位置ゲイン，速度ゲインとも）が有効である．

(4) 振動が制御系の剛性に起因する場合には，制御系の速度フィードバックゲインを高める対策が有効である．

(5) 水平関節形ロボットの標準的な運転条件について，シミュレーションによるパラメータスタディにより，制御系の剛性と動力伝達系の剛性が同一の場合が良好であることを示し，本設計指針が振動低減のみでなく，速応性や定常偏差などを総合的な観点から有効であることを明らかにした．

(6) 一連のシミュレーション結果は，これまでの経験とよく一致し，本稿のブロック線図を用いたロボットシステムの設計検討が可能であることを明らかにした．

【 付録 】

図8-15に示す解析モデルを用いて水平関節形ロボットの振動特性を解析する．ここで，各軸は長さのみを持ち，質量と慣性モーメントは重心に集中させている．ロボットのある姿勢における微小振動を取扱うため，関節の回転角Φ_iを次式のように記述する．

$$\Phi_i = \bar{\phi}_i + \phi_i \qquad (i = 2 \sim 4) \qquad (8.16)$$

ここで，$\bar{\phi}_i$は一定で，ϕ_iのみが時間に対して変化する．各軸の重心位置を式(8.16)と同様に平衡点回りの微小振動として次式のように記述する．

$$X_i = \bar{x}_i + x_i$$
$$Y_i = \bar{y}_i + y_i \qquad (i = 2 \sim 4) \qquad \text{以上(8.17)}$$

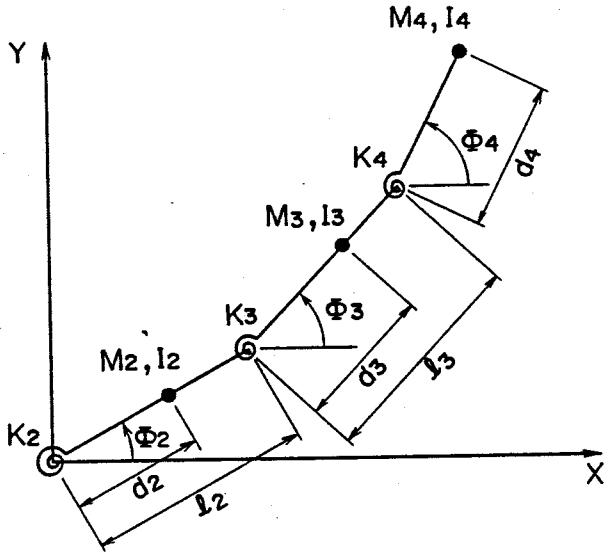


図 8-15 振動解析モデル

各軸の重心位置を関節の回転角を用いて表し，時間に対して変化する項のみを抽出すると，

$$x_2 = -d_2 \sin\bar{\phi}_2 \cdot \phi_2$$
$$y_2 = d_2 \cos\bar{\phi}_2 \cdot \phi_2$$
$$x_3 = -l_2 \sin\bar{\phi}_2 \cdot \phi_2 - d_3 \sin\bar{\phi}_3 \cdot \phi_3$$
$$y_3 = l_2 \cos\bar{\phi}_2 \cdot \phi_2 + d_3 \cos\bar{\phi}_3 \cdot \phi_3$$
$$x_4 = -l_2 \sin\bar{\phi}_2 \cdot \phi_2 - l_3 \sin\bar{\phi}_3 \cdot \phi_3 - d_4 \sin\bar{\phi}_4 \cdot \phi_4$$
$$y_4 = l_2 \cos\bar{\phi}_2 \cdot \phi_2 + l_3 \cos\bar{\phi}_3 \cdot \phi_3 + d_4 \cos\bar{\phi}_4 \cdot \phi_4 \qquad \text{以上(8.18)}$$

ただし，ϕ_iは微小として次式の近似を用いた．

$$\sin\phi_i \fallingdotseq \phi_i$$
$$\cos\phi_i \fallingdotseq 1 \qquad \text{以上(8.19)}$$

ラグランジェ法を用いて系の運動方程式を求める．系の運動エネルギーTは，

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i=2}^{4} \{ m_i (\dot{x}_i^2 + \dot{y}_i^2) + I_i \dot{\phi}_i^2 \} \qquad (8.20)$$

系のポテンシャルエネルギーUは，

$$U = \frac{1}{2}\{K_2\phi_2^2 + K_3(\phi_3 - \phi_2)^2 + K_3(\phi_4 - \phi_3)^2\} \tag{8.21}$$

である．これらをラグランジュの運動方程式，

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}_i}\right] - \frac{\partial L}{\partial \phi_i} = 0 \qquad (i = 2\sim4) \tag{8.22}$$

ただし，　$L = T - U$

に代入すれば，系の運動方程式として次式が得られる．

$$[W]\ (\ddot{\phi}) + [K]\ (\phi) = (0) \tag{8.23}$$

ここで，

$$\phi = (\phi_2, \phi_3, \phi_4)^T$$

$$W = \begin{bmatrix} m_2d_2^2+J_2+(m_3+m_4)l_2^2 & (m_3l_2d_3+m_4l_2l_3)\cos(\bar{\phi}_2-\bar{\phi}_3) & m_4l_2d_4\cos(\bar{\phi}_4-\bar{\phi}_2) \\ (m_3l_2d_3+m_4l_2l_3)\cos(\bar{\phi}_2-\bar{\phi}_3) & m_3d_3^2+J_3+m_4l_3^2 & m_4l_3d_4\cos(\bar{\phi}_4-\bar{\phi}_3) \\ m_3l_2d_4\cos(\bar{\phi}_4-\bar{\phi}_2) & m_4l_3d_4\cos(\bar{\phi}_4-\bar{\phi}_3) & m_4d_4^2+J_4 \end{bmatrix}$$

$$K = \begin{bmatrix} K_1+K_2 & -K_2 & \\ -K_2 & K_2+K_3 & -K_3 \\ & -K_3 & K_3 \end{bmatrix} \qquad \text{以上}(8.24)$$

である．

系の固有振動数は，次式を満足するω_nとして求まる．

$$\det\ ([K] - \omega_n^2\ [W]) = 0 \tag{8.25}$$

図8-8 は，$K_2 \sim K_4$ に動力伝達系のばね定数を用い（$\phi_4 - \phi_3$）＝（$\phi_3 - \phi_2$）＝ϕ_2（＝Θ）として，Θに対する固有振動数をプロットしたものである．

第９章　水平関節形ロボットの設計検討（軽量化）

9.1　まえがき

ロボットの高速化には，アームの軽量化が大きな課題である．アームの軽量化は，必然的にアームの剛性低下を招く．[61)-64)] アームの確保すべき剛性が明らかになれば，これに従っての軽量化が可能であり，アームの軽量化に関する設計指針とすることができる．

以下では，アームを構成する各リンク（以下，軸と称す）を剛体とみなした剛体軸（リジッド）モデルと各軸を 3分割し，これらの間をばね要素で結合した柔軟軸（フレキシブル）モデルの二つについて，ロボットシステム全体の総合的な運動シミュレーションを行ない，軸の確保すべき剛性を伝達系の剛性との比の観点から評価している．

9.2　解析法

ロボットシステムは，大別すると，制御系，駆動系，伝達系，およびアーム運動系より構成される．制御法は，駆動モータの回転角を検知してアームを制御するセミクローズドループである．これらを考慮したロボットシステムの動特性の総合的なシミュレーションを行う．前章と同様，制御系，駆動系，伝達系各軸に設けられ，これらがアーム運動系で連成する解析モデルを採用する．以下にその解析式を要約する．

軸ｉに設けられた制御系，駆動系，動力伝達系の特性は，次の式(9.1) ～式(9.5) で表わされる．[60)]

$$V_i = G_p^i(\theta_m^i/N_i - \bar{\theta}_i) + G_v^i(\theta_m^i/N_i - \bar{\theta}_i) \qquad (9.1)$$

$$R_a^i(I_i + T_m^i\dot{I}_i) = V_i - K_e^i\dot{\theta}_m^i \qquad (9.2)$$

$$P_m^i = K_t^i I_i \qquad (9.3)$$

$$J_m^i\theta_m^i + D_m^i\theta_m^i = P_m^i - p_i/N_i \qquad (9.4)$$

$$P_i = K_g^i(\theta_m^i - N_i\theta_i)N_i \qquad (9.5)$$

ここで，$\bar{\theta}_i$ は軸ｉの目標値，θ_m^iは軸ｉを駆動するモータの回転角である．また，G_p^i，G_v^i，K_g^i はそれぞれ制御系の位置ゲイン，速度ゲイン，および伝達系の剛性，V_i，I_i，P_m^iはそれぞれ，直流サーボモータのアマチュア電圧，電流，および駆動トルクである．

アームの運動方程式は，次式となる．

$$(\ddot{\theta}) = [W]^{-1}(P+U) \qquad (9.6)$$

ここで，θは各関節変位θ_i を要素とするベクトル，Ｗは慣性行列，ｐは関節駆動力，Ｕは各関節に作用する遠心力，コリオリ力，重力などの非線形項の総和のベクトルである．

式(9.1) ～式(9.6) を連立させて解くことにより，ロボットシステム全体の総合的シミュレーションが可能となる．

9.3　シミュレーション諸元

9.3.1 ロボットシステム諸元

解析の対象としたのは，前章と同じ水平関節形ロボットの回転 3軸である．そのロボットのリジッドモデルの軸構成と各軸にとった座標系を図9-1 に示す．同じロボットのフレキシブルモデルを図9-2 に示す．各軸を 3分割し，分割点をばね要素で結合している．分割した各軸片は剛体で，フレキシビリティを分割点の関節に設けたばね要素で表現している．そして，このモデルは，制御系，駆動系，伝達系をもつ三つの関節と六つのばね要素のみの関節より成る 9自由度のロボットアームとして，その運動を解析している．開発した運動解析プログラムは，任意の自由度配分，軸数のロボットに適用できるので，両モデルが一つのプログラムで解析できる．

リジッドモデルのアーム運動系，および駆動・伝達系諸元をそれぞれ表9-1 ，表9-2 に示す．但し，アーム運動系諸元は，前章に比べ， 3分割し易いように少し変更している．

9.3.2　軸の剛性と制御系諸元

制御系の剛性ベクトルを次式で定義する．

$$\vec{K}_C = (G_p{}^i K_t{}^i N_i / R_a{}^i) \qquad (i=1\sim3) \qquad (9.7)$$

伝達系の剛性ベクトルを次式で定義する．

$$\vec{K}_G = (K_g{}^i \cdot (N_i)^2) \qquad (i=1\sim3) \qquad (9.8)$$

シミュレーションの基準値として，伝達系の剛性をとる．ハーモニックドライブ減速機を想定し，剛性ベクトルを次の値とする．

$$\vec{K}_G = (\ 4X10^4\ ,\ 2X10^4\ ,\ 0.5X10^4\ ) \qquad (N\cdot m/rad) \qquad (9.9)$$

軸の剛性を伝達系の剛性との比の観点から次のように設定する．すなわち，図9-3 に示すように，軸の先端に力Fが作用した場合，

$$K_\ell = K_g \qquad (9.10)$$

の時に，伝達系の剛性に起因する関節のたわみ角，

$$\Delta\theta_0 \qquad (9.11)$$

と軸のたわみ角

$$\Delta\theta_1 + \Delta\theta_2 \qquad (9.12)$$

が等しくなる．シミュレーションでは，各軸の剛性を表わすK_i を次式のように

$$K_L = (K_\ell{}^i) \qquad (i=1\sim3) \qquad (9.13)$$

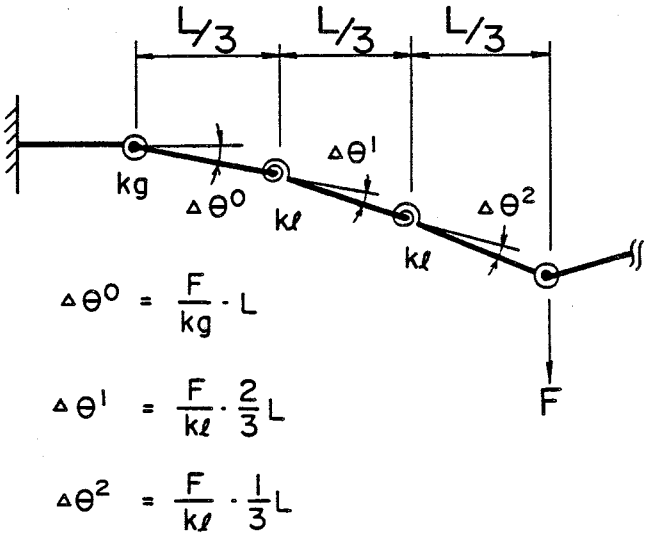


図 9-3　フレキシブルリンクのモデル

ベクトルと考え，パラメータとしている．また，以下のシミュレーションでは，制御系

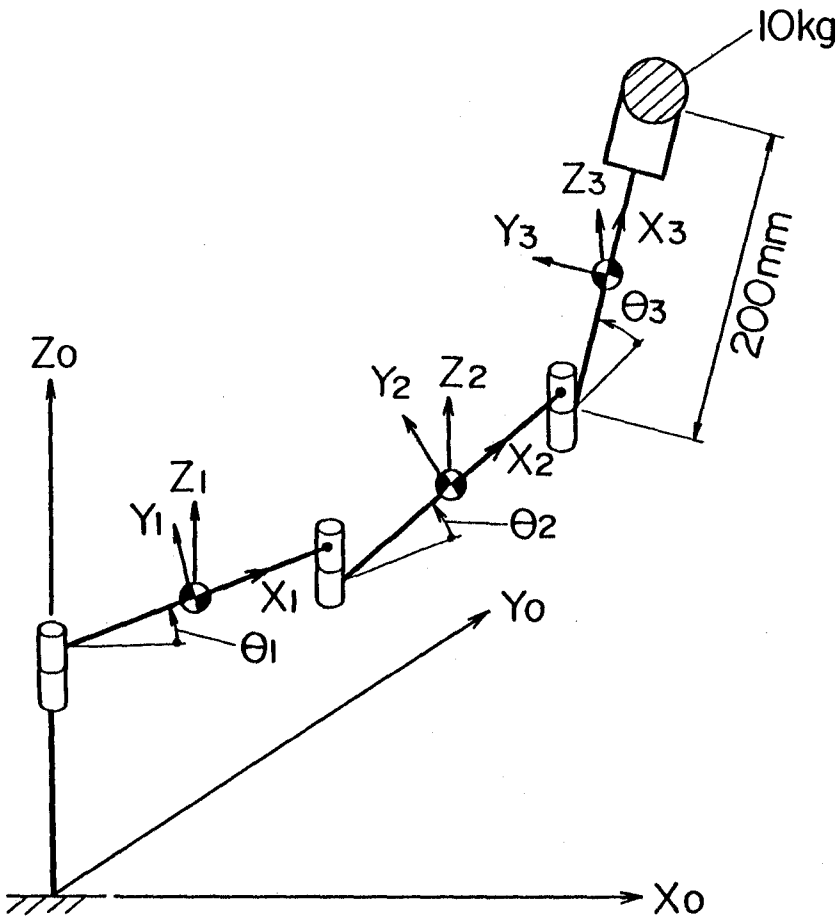


図 9-1　リジッドモデル

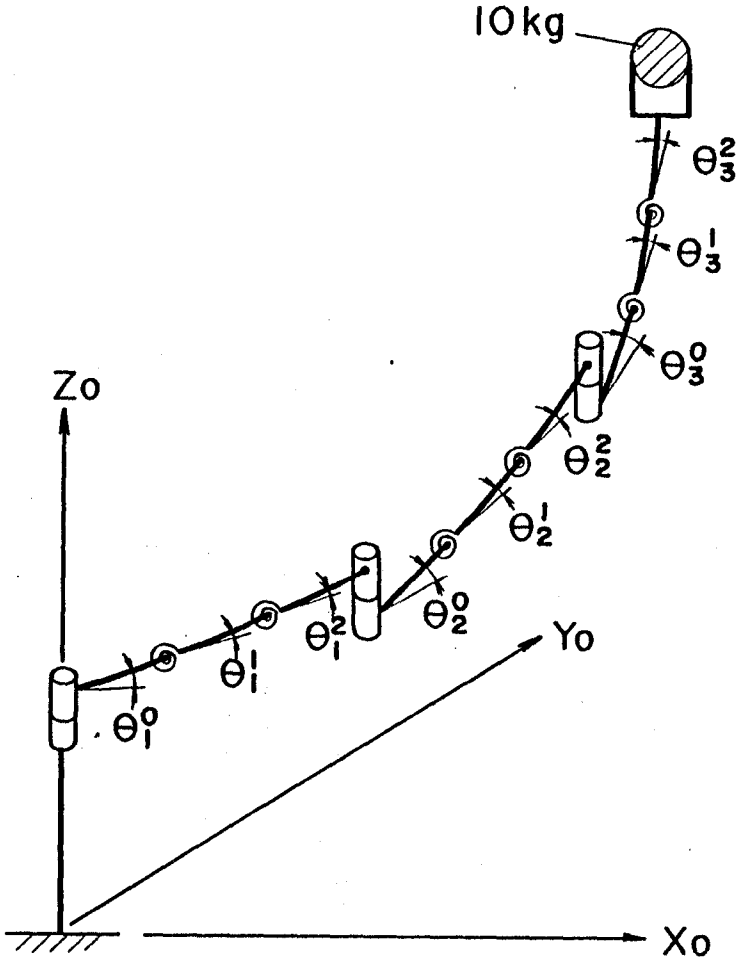


図 9-2　フレキシブルモデル

表 9-1 アーム運動系諸元

	Center of Gravity (m)			Length (m)		
	x_g	y_g	z_g	x_ℓ	y_ℓ	z_ℓ
Link-1	0.2	0	0	0.4	0	0
Link-2	0.125	0	0	0.25	0	0
Link-3	0.192	0	0	0.2	0	0

	Mass (kg)	Inertia (kg.m^2)		
	M	I_{xx}	I_{yy}	I_{zz}
Link-1	30.0	0	.4	.4
Link-2	9.0	0	.0469	.0469
Link-3	10.9	0	.103	.103

(x_g, y_g, z_g) : Vector from joint-i to link-i center of gravity.

(x_ℓ, y_ℓ, z_ℓ) : Vector from joint-i to joint-i+1

All values are expressed in Σ_i-coordinates system.

表 9-2 駆動・伝達系諸元

	Ra (Ω)	Tm (S)	Kt (N.m/A)	Dm (N.m.s/rad)	Ke (V.S/rad)
Joint-1	1.6	.0239	.265	3.46×10^{-2}	.265
Joint-2	2.21	.0275	.216	1.33×10^{-2}	.216
Joint-3	13.36	.0113	.188	1.87×10^{-3}	.188

	Jm (kg.m^2)	N (-)
Joint-1	9.6×10^{-4}	100
Joint-2	5.58×10^{-4}	100
Joint-3	3.13×10^{-5}	100

Ra : Armature resistance
Tm : Electrical time constant
Kt : Torque constant
Dm : Viscous damping
Ke : Back electromotive force constant
Jm : Rotor inertia
N : Transmission ratio

諸元を一定値に設定している．その値は，伝達系の剛性の基準値を考慮し，次の値としている．

$$\vec{K}_C = \vec{K}_G$$
$$\vec{G}_V = \vec{G}_P / 20 \qquad \text{以上(9.14)}$$

9.4　シミュレーション結果と考察

リジッドモデルのシミュレーション結果を図9-4 ，図9-5 に示す．図9-4 が基準値の場合で，図9-5 は，伝達系の剛性を基準値の 1/2とした場合である．図は，各関節の角速度の時間的変化を目標値と共に示したものである．

フレキシブルモデルのシミュレーション結果を図9-6 ～図9-8 に示す．三つの図は軸の剛性が伝達系の剛性に比べ，それぞれ4 ，2 ，1 倍の場合のシミュレーションで，関節と軸のたわみ角の比に換算すると，1/4 ，1/2 ，1/1 となる．図では，軸の剛性の効果を評価するため，関節の角速度のみ，および関節とばね要素の角速度の総和の二つについて，それらの時間的変化を比較して示す．図9-6 では両者がほとんど一致し，運転中，軸にほとんどたわみが発生しない．図9-7 では，わずかにフレキシビリティの影響があらわれ，図9-8 では，これがかなり大きくなる．

図9-4 ，図9-5 のリジッドモデル，および図9-6 ～図9-8 のフレキシブルモデルの運動シミュレーションより，次の事項が明らかである．

(1) 伝達系の剛性に比べて軸の剛性を２，ないし４倍確保すれば，剛体軸とみなせる．これ以上の軸の剛性強化は必要なく，伝達系の剛性を考慮しての軽量化が可能である．

(2) 軸の剛性と伝達系の剛性が等しい時は，軸が剛体で伝達系の剛性を 1/2としたモデルとほぼ等価である．このことから，軸の剛性と伝達系のそれが同一オーダであっても，両者を直列結合として関節の剛性に含めることにより，剛体軸モデルでの制御系の設計が可能である．なお，上記は伝達系を有するロボットについての結論であるが，ダイレクトドライブのロボットについても，伝達系の剛性を制御系の剛性に置きかえての考察が可能と考えられる．

9.5　まとめ

伝達機構を有し，駆動モータの回転角を検知してアームを制御するセミクローズドループのロボットシステムについて，軸の剛性を伝達系の剛性との比から評価する方法を提案した．さらに，剛体軸と柔軟軸の二つのモデルについてロボットシステムの総合的なシミュレーションにより，

(1) 軸の剛性を伝達系の剛性の 2，ないし 4倍確保すれば，軸は剛体軸とみなせる．

(2) 軸の剛性を伝達系の剛性と同一のオーダまでは，これを関節の剛性に含めて制御系を設計することができる．

などの知見を得た．

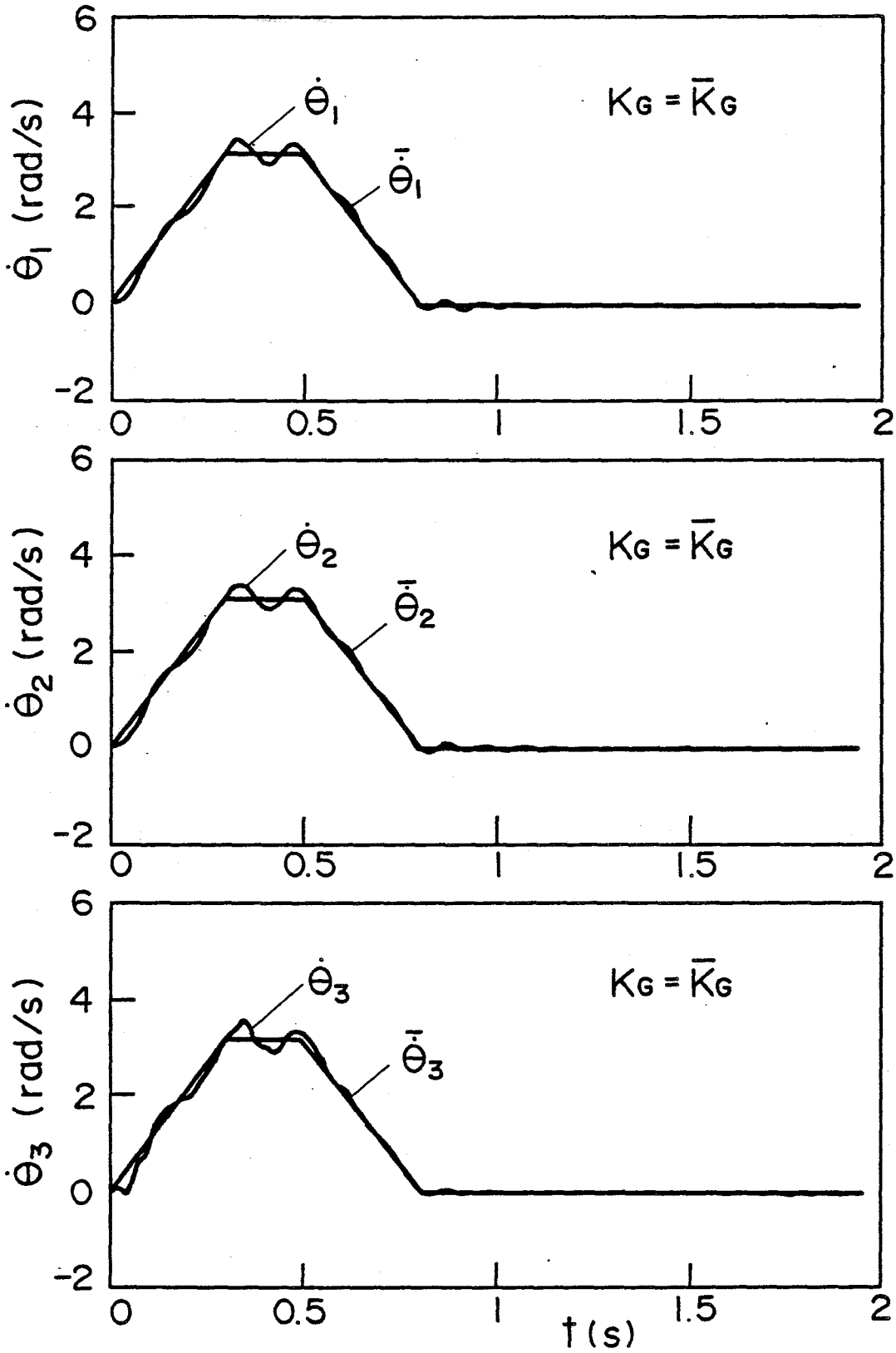


図 9-4　リジッドモデルのシミュレーション

(a)　$K_c = \bar{K}_c$　　: $K_c = \bar{K}_c$

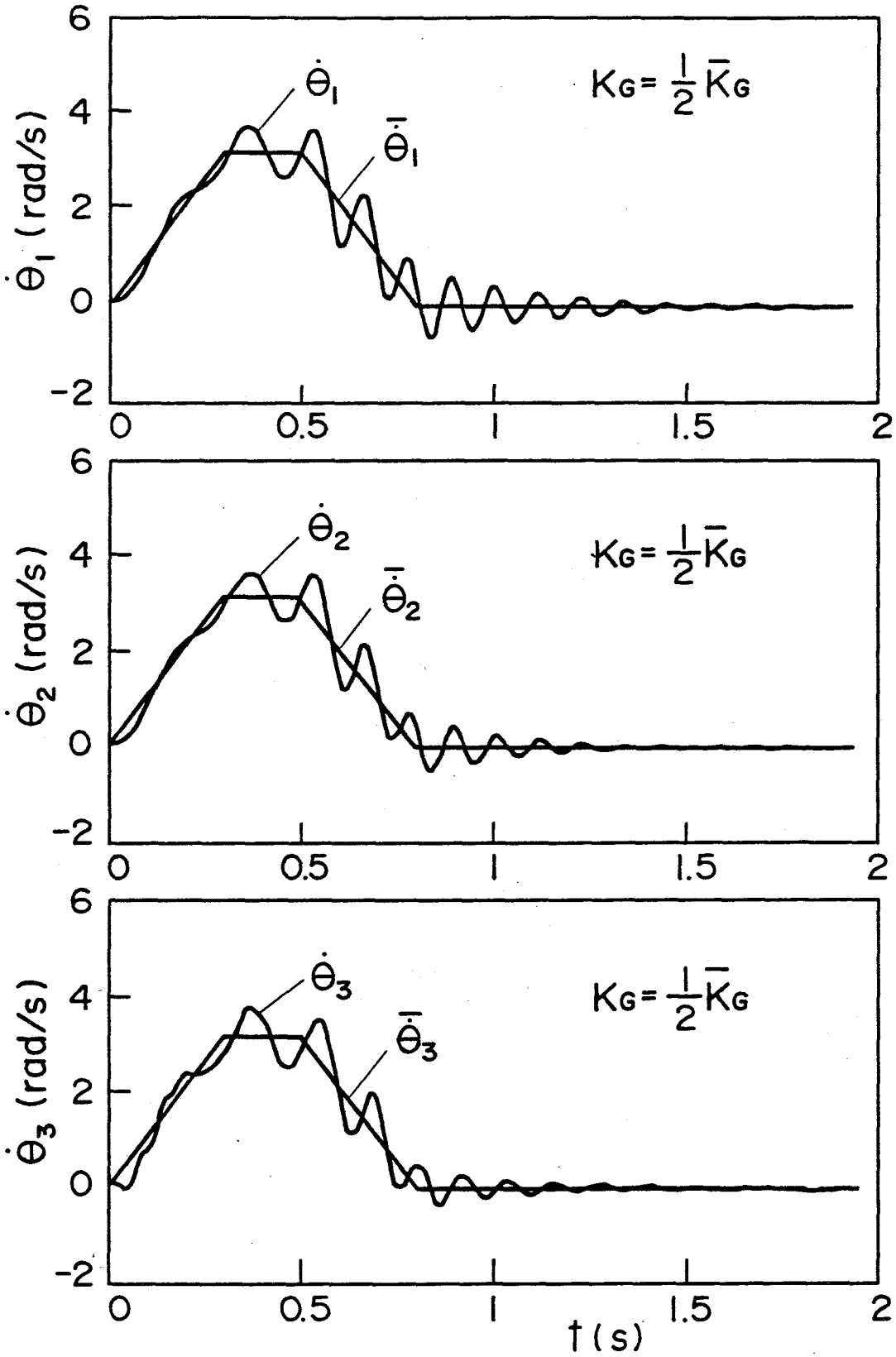


図 9-5　リジッドモデルのシミュレーション

(b)　$K_c = \bar{K}_c/2$　: $K_c = \bar{K}_c$

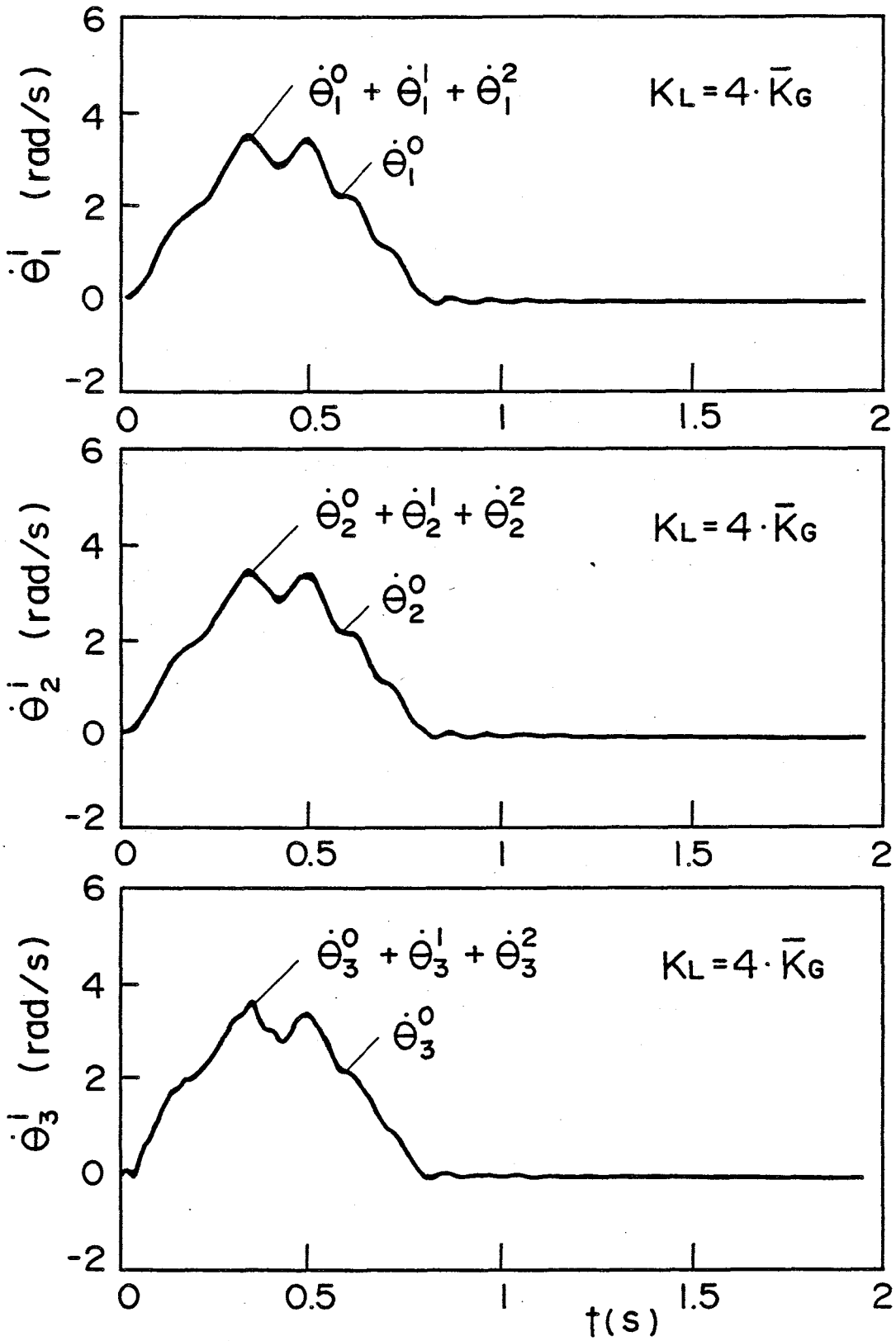


図 9-6 フレキシブルモデルのシミュレーション

(a) $K_L = \bar{K}_G \cdot 4$

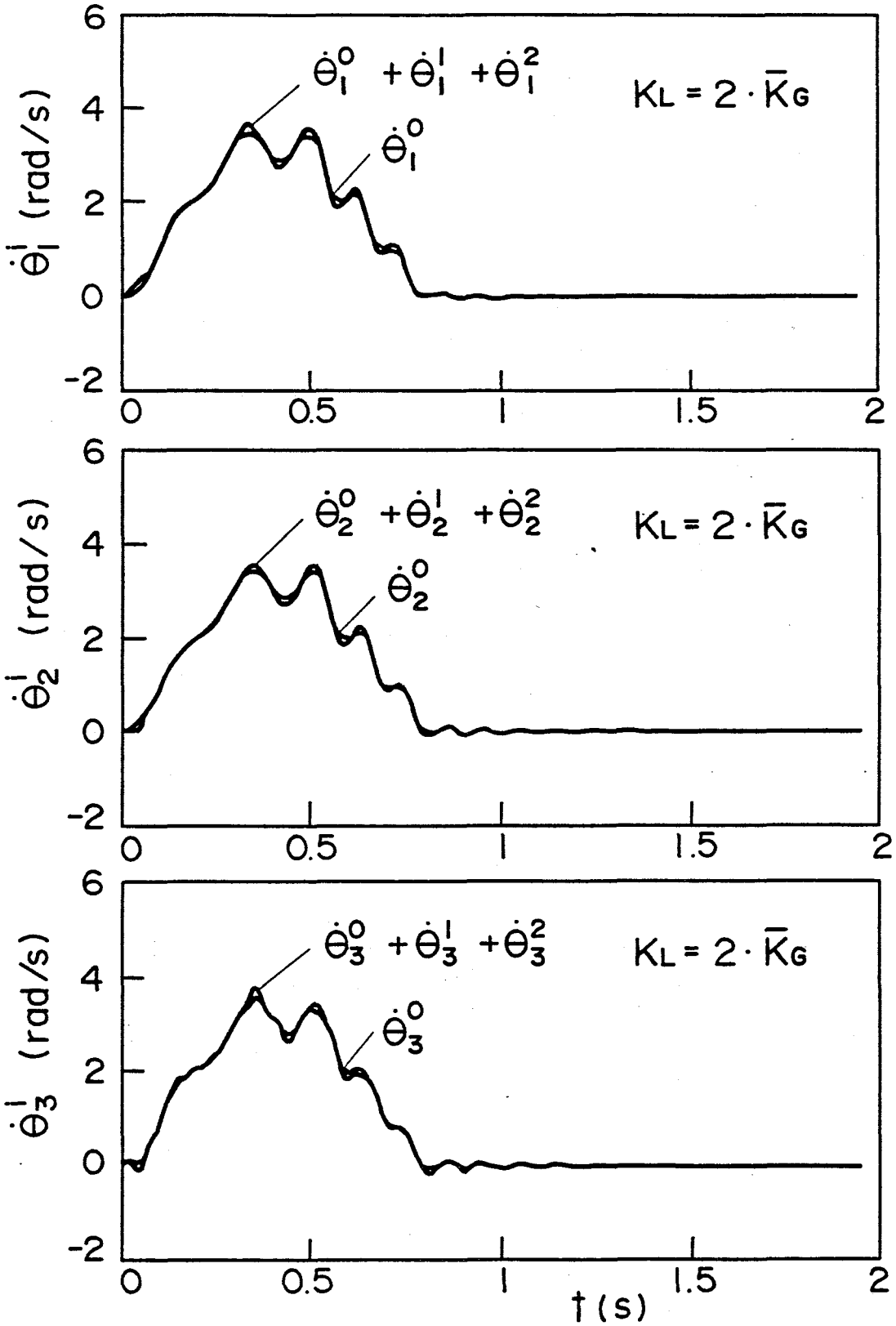


図 9-7　フレキシブルモデルのシミュレーション

(b)　$K_L = \bar{K}_G \cdot 2$

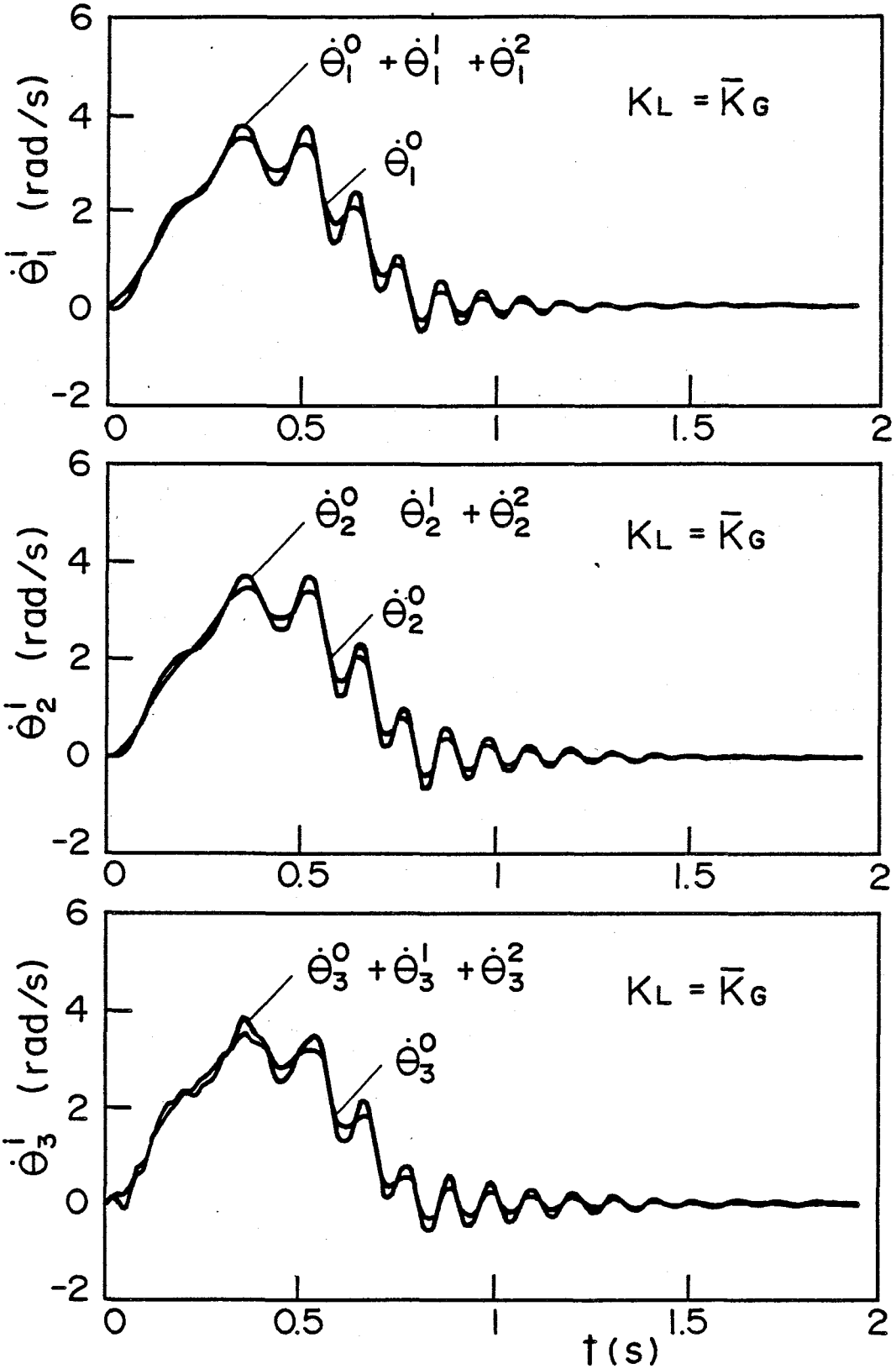


図 9-8 フレキシブルモデルのシミュレーション

(c) $K_L = \bar{K}_G$

第10章　関節の剛性を考慮した逆ダイナミックス制御と軌道生成

10.1　まえがき

産業用ロボットは，組立ラインなどにおいては，高い精度の位置決めを高速で達成することが要求される．このためには，ロボットの停止時の残留振動をできるだけ抑制して，すみやかに目標位置に停止させる必要がある．

ロボットを目標軌道にできるだけ忠実に追従させる制御法の一つとして，逆ダイナミックス制御法がある．[24),65)] 目標軌道を実現するのに必要な関節駆動力をあらかじめ計算し，これを制御入力としてダイナミックスに起因する非線形項を補償する方法である．しかし，この方法を実際に適用した例は少ない．[59)] これは，関節駆動力の計算が繁雑で時間を要することも一つの理由であるが，現実の多くのロボットが伝達機構を有し，この部分の剛性が弱いため，計算された関節駆動力／トルクと制御入力が必ずしも一致しないことがもう一つの大きな理由と考えられる．

近年，リンクのフレキシビリティに着目したダイナミックスや制御法に関する研究は多い．[61)-64)] しかし，多くの産業用ロボットは伝達機構を有する．そして，前章，前々章で述べたように，産業用ロボットではリンクのフレキシビリティがよほど小さい場合を除き，むしろ伝達系の剛性に着目するのがより重要であると考えられる．

伝達機構を有し，ＰＤ制御によって駆動されるロボットのシステム全体を対象として，速応性を高め，残留振動をできるだけ低く抑えるための制御系や伝達系の諸元の設定法については既に論じた．そして，得られたロボット挙動が従来の経験とよく一致するところから，ここで提案したブロック線図がロボットの挙動をよくシミュレートすることを示した．しかし，この方法では，残留振動をより小さくすることができるが，消滅しない．

本章では，伝達系を有するロボットシステム全体の特性を考慮した逆ダイナミックス制御法を提案し，その有効性をシミュレーションによって明らかにしている．さらに，これを実現するための目標軌道として，関節変位の初期値，および終端値の時間に対する 1階微分から 3階微分が 0となる目標軌道を得ている．目標軌道の例としてとり上げた 7次多項式は，1 自由度のタイプヘッドを駆動するカム曲線として既に提案[66),67)] されているものと一致するが，この軌道が多自由度のＰＤ制御で駆動されるロボットの残留振動の低減に有効であることを示している．

10.2　逆ダイナミックス制御と軌道生成

10.2.1　逆ダイナミックス制御

産業用ロボットに多用されている制御法は，駆動モータの回転角を検知してアームを制御するセミクローズドループであり，両者の間には動力伝達機構が介在する．このようなロボットシステムは，モデル化すると，図10-1に示すブロック線図となる．図に示すように，ロボットシステムは，制御系，駆動系，伝達系，およびアーム運動系に大別される．

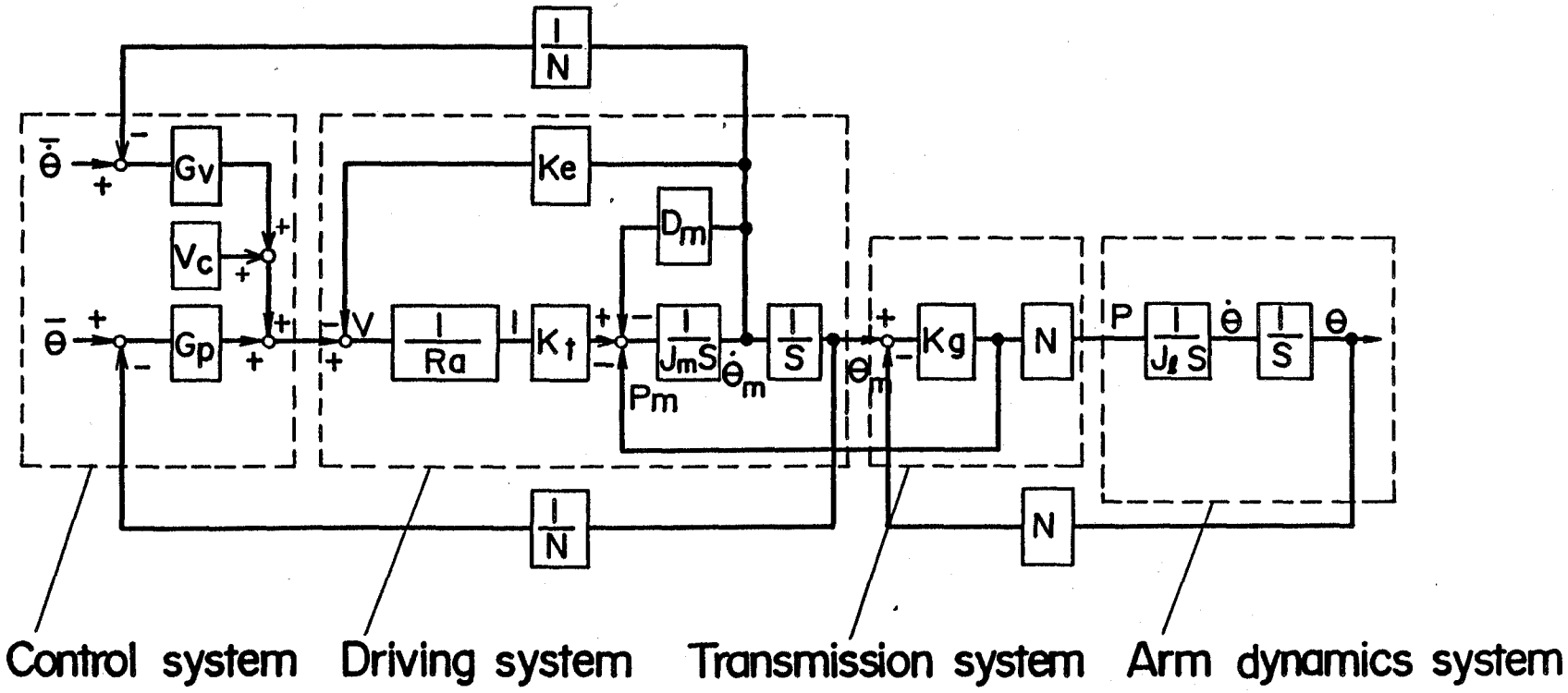


図 10-1 ロボットシステムのブロック線図

これらのうち，制御系，駆動系，伝達系は各軸に設けられ，これらがアーム運動系で連成する．

図10-1の制御入力V_cとして，ロボットシステム全体の特性を考慮した逆ダイナミックス制御法について考える．ロボットアームを目標軌道に沿って動かすために必要な関節駆動力は，次式で与えられる．

$$(p) = [W](\ddot{\bar{\theta}}) + V^T(\bar{\theta}, \dot{\bar{\theta}}) - Y(\bar{\theta}) \qquad (10.1)$$

ここで，Wは慣性行列，$\bar{\theta}$，pはそれぞれ$\bar{\theta}_i$，p_iを要素とするベクトルで，各リンク（以下軸と称す）の目標値と関節駆動力／トルクである．また，V^TとYは，それぞれ，遠心力とコリオリ力項，および重力項である．伝達系の出力を式(10.1)の駆動力／トルクpとするためのモータの回転角を図10-1のブロック線図を考慮して求めると次式となる．

$$\bar{\theta}_m{}^i = p_i / (K_g{}^i N_i) + N_i \bar{\theta}_i \qquad (i=1\sim n) \qquad (10.2)$$

ここで，$\theta_m{}^i$は軸iを駆動するモータ軸の回転角であり，その目標値という意味で$\bar{\theta}_m{}^i$としている．また，$K_g{}^i$，N_iはそれぞれ伝達系の剛性と減速比である．

モータ軸を式(10.2)で与えられる目標値に従って回転させるための駆動トルクと電機子電圧を求めると，次式となる．

$$p_m{}^i = J_m{}^i \ddot{\bar{\theta}}_m{}^i + D_m{}^i \dot{\bar{\theta}}_m{}^i + p_i / N_i \qquad (i=1\sim n) \qquad (10.3)$$

$$V_c{}^i = p_m{}^i R_a{}^i / K_T{}^i + K_e{}^i \dot{\bar{\theta}}_m{}^i \qquad (i=1\sim n) \qquad (10.4)$$

ここで，$p_m{}^i$，$V_c{}^i$，$R_a{}^i$，$K_T{}^i$，$D_m{}^i$，$K_e{}^i$，$J_m{}^i$は，それぞれ軸iを駆動するモータの駆動トルク，電機子電圧，電機子抵抗，トルク定数，制動定数，逆起電力定数，ロータイナーシャである．

以上述べたように，式(10.4)で与えられる電機子電圧$V_c{}^i$を制御系より送出することにより，ロボットシステム全体の特性を考慮しての逆ダイナミックス制御が実現できる．

しかし，実際には，パラメータの見積誤差や外乱で目標軌道からの偏差が予想される．この対策としてPD制御を併用する．PD制御の目標値としては，各軸の変位や速度をモータ軸で検出しているので，$\bar{\theta}_i$や$\dot{\bar{\theta}}_i$ではなく，式(10.2)，およびその時間微分となることに着目する必要がある．また，式(10.2),(10.3) に示すように，この逆ダイナミックス制御を行なうためには，$\ddot{\bar{\theta}}_m{}^i$，すなわち$\ddot{p}_i$の計算が必要となるが，これについては，後のシミュレーションで検討する．

10.2.2 軌道生成

前節に示すように，モータ軸を式(10.2)で与えられる目標軌道に沿って動かすことができれば，駆動系，伝達系を考慮した逆ダイナミックス制御が可能となる．しかし，モータ軸は，停止時には次の状態にある．

$$[\theta_m{}^i]_{t=0,T} = -Y_i(\bar{\theta}) / (K_g{}^i N_i) + N_i \bar{\theta}_i \qquad (i=1\sim n)$$

$$[\dot{\theta}_m{}^i]_{t=0,T} = 0 \qquad (i=1\sim n) \qquad \text{以上}(10.5)$$

ここで，Tは到達時刻である．

一方，モータ軸の目標軌道は，式(10.2)より次式となる．

$$\bar{\theta}_{m^i} = p_i / (K_{g^i} N_i) + N_i \bar{\theta}_i \qquad (i=1\sim n)$$

$$\dot{\bar{\theta}}_{m^i} = \dot{p}_i / (K_{g^i} N_i) + N_i \dot{\bar{\theta}}_i \qquad (i=1\sim n) \qquad \text{以上(10.6)}$$

それ故，モータ軸が式(10.6)の目標軌道を実現するためには，

$$[p + Y(\theta)]_{t=0,T} = \{ [W] (\ddot{\bar{\theta}}) + V(\bar{\theta}, \dot{\bar{\theta}}) \}_{t=0,T} = 0$$

$$[\frac{d}{dt} p]_{t=0,T} = \{ [W] (\dddot{\bar{\theta}}) + [\dot{W}] (\ddot{\bar{\theta}}) + \dot{V}^T (\theta, \dot{\bar{\theta}}) + \dot{Y}(\theta) \}_{t=0,T} = 0 \qquad \text{以上(10.7)}$$

が成立しなければならない．

式(10.7)を満足する目標軌道を設定することによって，提案している逆ダイナミックス制御が可能となる．すなわち，$\bar{\theta}$，$\dot{\bar{\theta}}$，$\ddot{\bar{\theta}}$，の初期値，および終端値が 0となる軌道である．この軌道の例として，次式で与えられる７次多項式軌道があげられる．

$$\bar{\theta}_i = (\theta_{e^i} - \theta_{s^i}) \{-20(t/T)^7 + 70(t/T)^6 - 84(t/T)^5 + 35(t/T)^4\} \qquad (10.8)$$

ここで，θ_{e^i}，θ_{s^i}は，軸ｉの初期位置と到達位置である．

10.3 シミュレーション

提案した逆ダイナミックス制御と軌道生成の有効性をシミュレーションによって検討する．

10.3.1 ロボットシステム諸元と目標軌道

シミュレーションの対象としたロボットは水平関節形の回転 3軸より構成される．その構成と各軸にとった座標系を図10-2に示す．このロボットは，通常の設置状態では，回転 3 軸に重力の作用はない．重力の作用下での有効性を検討するため，ロボットがx_0 軸まわりに90° 回転して設置される場合を想定する．すなわち，重力の方向がy_0 軸と一致する場合のシミュレーションを行う．ロボットシステムのアーム運動系諸元を表10-1に，駆動系諸元を表10-2に，制御系と伝達系諸元を表10-3に示す．

目標軌道は，図10-3に示すように，手先が×印の 2点をPTP 制御で結ぶ軌道で，到達時間は 1秒である．本軌道に対し，前節の軌道生成法を適用すると，関節座標系で表わされる目標軌道は次式となる．

$$\theta_i = \frac{\pi}{2} (-20t^7 + 70t^6 - 84t^5 + 35t^4) \qquad (i=1\sim 3) \qquad (10.9)$$

10.3.2 逆ダイナミックス制御

式(10.9)で与えられる目標軌道を図10-4に示す．これに沿ってアームを動かすための駆動トルクを逆ダイナミックスにより求めた結果を図10-5に示す．駆動トルクの初期値と終端値の時間に対する勾配が 0となっており，式(10.7)の目標軌道が満たすべき条件を満足していることがわかる．

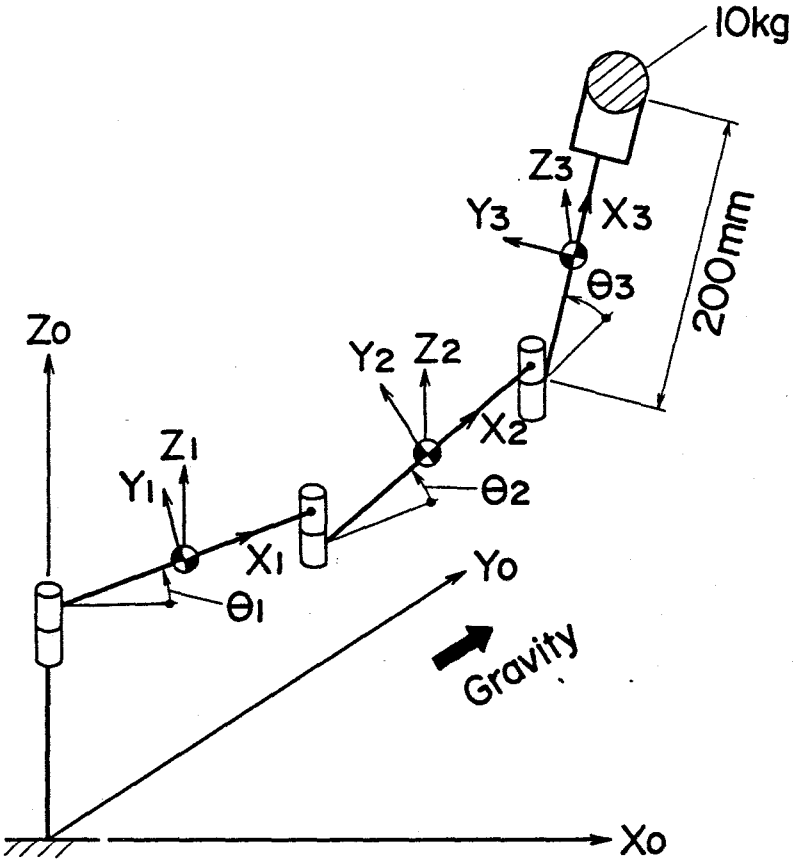


図 10-2 シミュレーションしたロボットの力学モデル

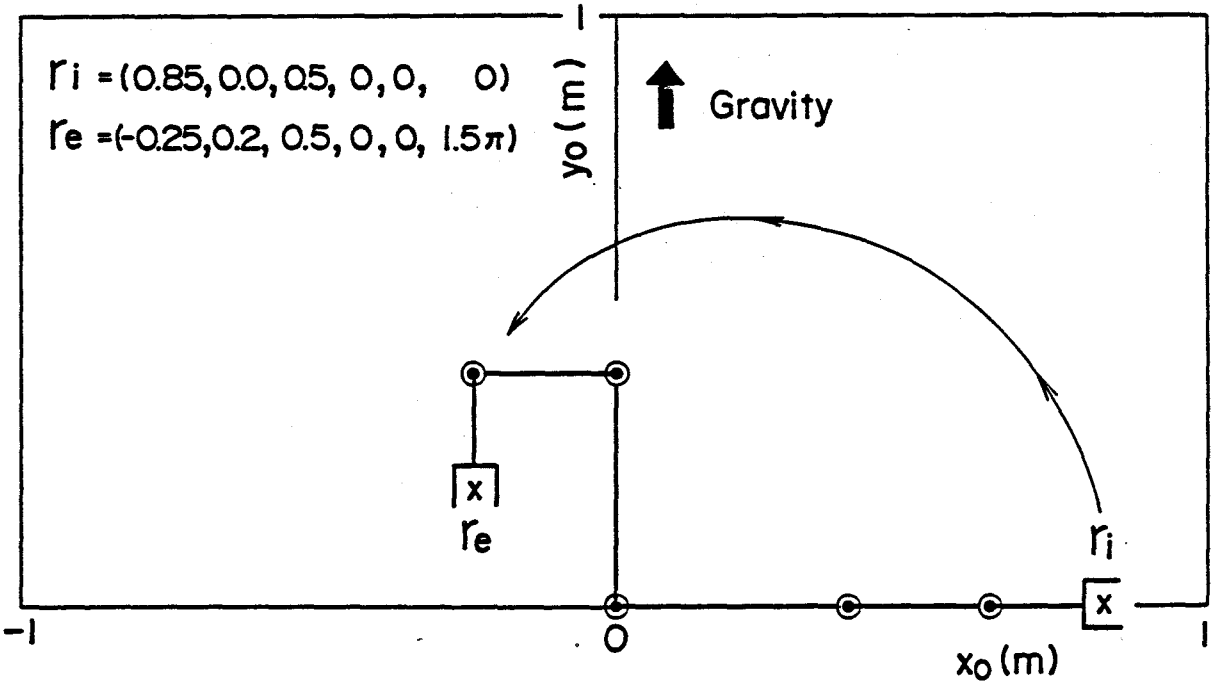


図 10-3 シミュレーションしたロボットの運動

表 10-1 アーム運動系諸元

	Center of gravity (m)			Length (m)		
	x_g	y_g	Z_g	x_ℓ	y_ℓ	Z_ℓ
Link - 1	.148	.0	.728	.4	.0	.663
Link - 2	.135	.0	-.064	.25	.0	-.114
Link - 3	.188	.0	-.049	.2	.0	-.049

	Mass (kg)	Moment of inertia ($kg \cdot m^2$)		
	M	I_{xx}	I_{yy}	I_{zz}
Link - 1	28.2	.0	.984	.984
Link - 2	7.25	.0	.108	.108
Link - 3	10.65	.0	.024	.024

表 10-2 駆動系諸元

	Ra (Ω)	Kt (N.m/A)	Dm (N.m.s/rad)	Ke (V.s/rad)	Jm ($kg.m^2$)
Joint-1	1.6	.265	3.46×10^{-2}	.265	9.60×10^{-4}
Joint-2	2.21	.216	1.33×10^{-2}	.216	5.58×10^{-4}
Joint-3	13.36	.180	1.87×10^{-3}	.188	3.13×10^{-5}

Ra : Armature resistance

Kt : Torque constant

Dm : Viscous damping

Ke : Back electromotive force constant

Jm : Rotor moment of inertia

表 10-3 制御・伝達系諸元

	Gp (V/rad)	Gv (V.s/rad)	Kg (N.m/rad)	N (-)
Joint - 1	2.42×10^3	121	4.0	100
Joint - 2	2.05×10^3	102	1.0	100
Joint - 3	3.71×10^3	186	0.5	100

Gp : Position feedback gain of control system

Gv : Velocity feedback gain of control system

Kg : Stiffness of transmission system

N : Reduction ratio

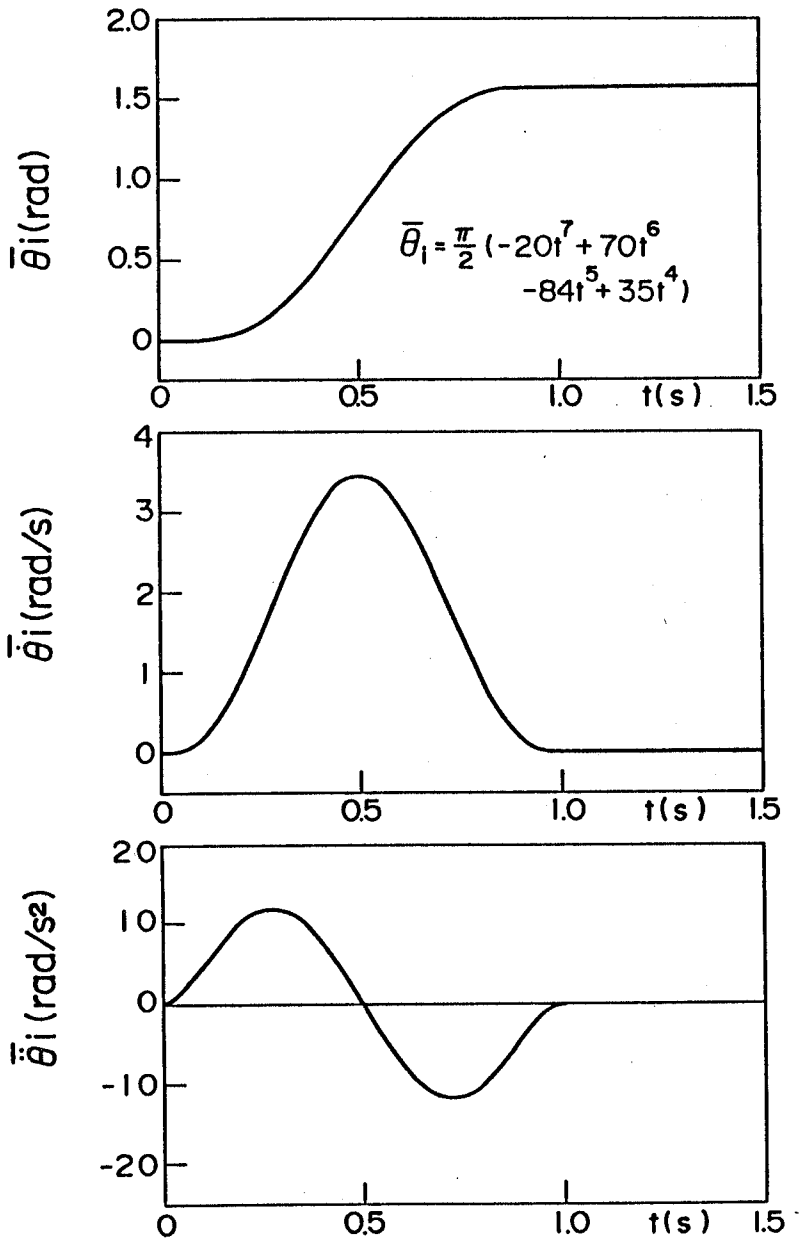


図 10-4 目標軌道

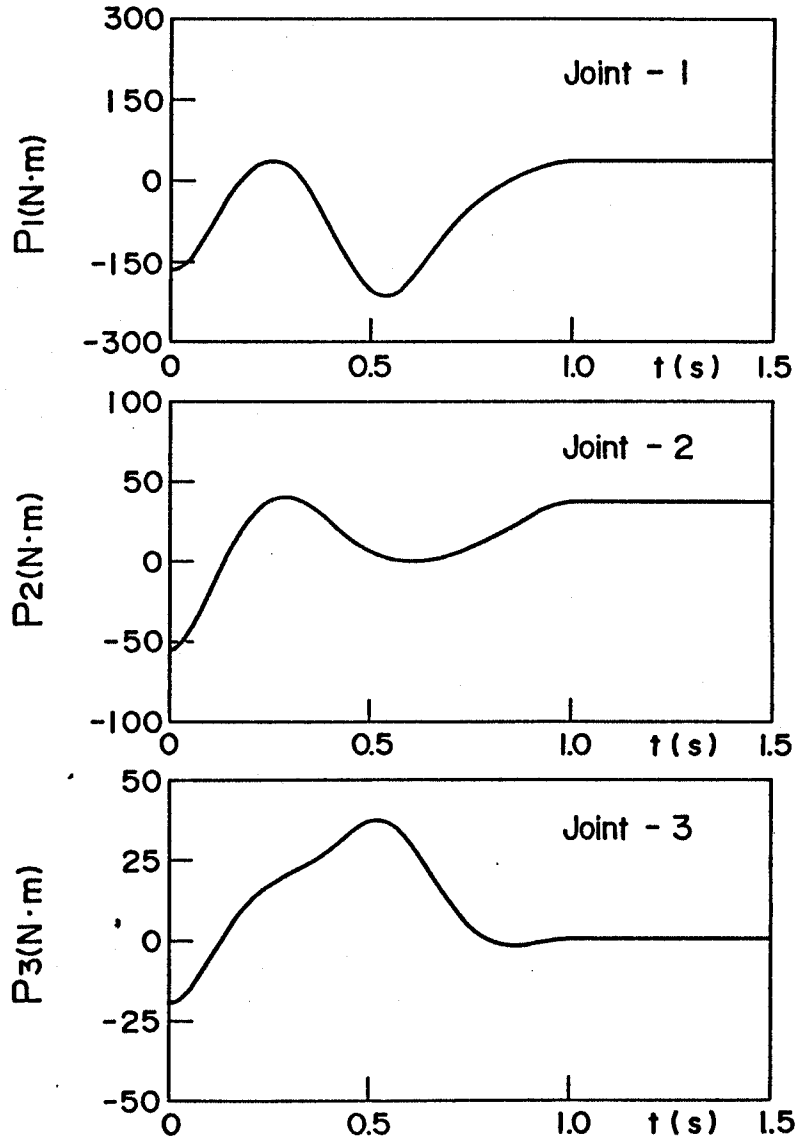


図 10-5 各リンクの駆動トルク

また，提案した逆ダイナミックス制御を行なうためには，駆動トルクの時間に対する 2階微分が必要となる．微分法として，次式の 3点公式による数値微分

$$\dot{p}_i^j = (p_i^{j+1} - p_i^{j-1}) / (2\Delta t)$$

$$\ddot{p}_i^j = (p_i^{j+1} + p_i^{j-1} - 2p_i^j) / (\Delta t)^2 \qquad \text{以上}(10.10)$$

およびトルク波形のフーリエ級数近似後の微分をとる二つの方法について検討している．但し後者の場合，トルク波形を周期関数とみなすため，周期を到達時刻の 2倍とし，到達時刻に関して線対称な波形についてフーリエ級数近似を行なっている．すなわち，

$$p_i = \frac{a_0^i}{2} + \sum_{k=1}^{n} \{ a_k^i \cos(\pi kt) + b_k^i \sin(\pi kt) \} \qquad (10.11)$$

である．

シミュレーションでは，数値積分法としてルンゲ・クッタ・ギル法を用いている．時間きざみ幅は，0.0025秒である．このため，駆動トルクやその微分を 0.00125秒おきに計算している．

次の五つの条件でシミュレーションを行ない，次式の偏差を時間に対しプロットして，

$$E = \sum_{i=1}^{3} | \bar{\theta}_i - \theta_i | \qquad (10.12)$$

図10-6に示す．なお，シミュレーションでは，偏差をより明瞭に評価するため，大部分ＰＤ制御を加えない条件で行っている．

(1) トルク波形の式(10.10) による数値微分　，　ＰＤ制御なし
(2) トルク波形のフーリェ級数(n=5) 近似　，　〃
(3)　〃　(n=10)　，　〃
(4)　〃　(n=20)　，　〃
(5)　〃　(n=5)　，　ＰＤ制御を併用

図10-6より以下の事項が明らかである．

(1) いずれの条件でも，関節変位の偏差の総和は 10^{-3}rad以下である．
(2) 初期の偏差は，数値微分が小さく，フーリェ級数近似によるものが大きいが，到達点付近での偏差は，いずれの場合も 10^{-4}radのオーダである．
(3) ＰＤ制御を併用することにより誤差は小さくなる．

これらのことから，逆ダイナミックス制御を行なうためには，関節トルクの時間に対する 2階微分を得る必要があるが，計算結果の微分であること，およびトルク波形がなめらかであることから，数値微分に問題なく，提案した逆ダイナミックス制御が実現可能であることがわかる．

10.3.3 ＰＤ制御

目標軌道として式(10.9)の 7次多項式軌道をとり，逆ダイナミックス制御を行なわず，ＰＤ制御のみによってロボットを駆動した場合のシミュレーション結果を図10-7～図10-8

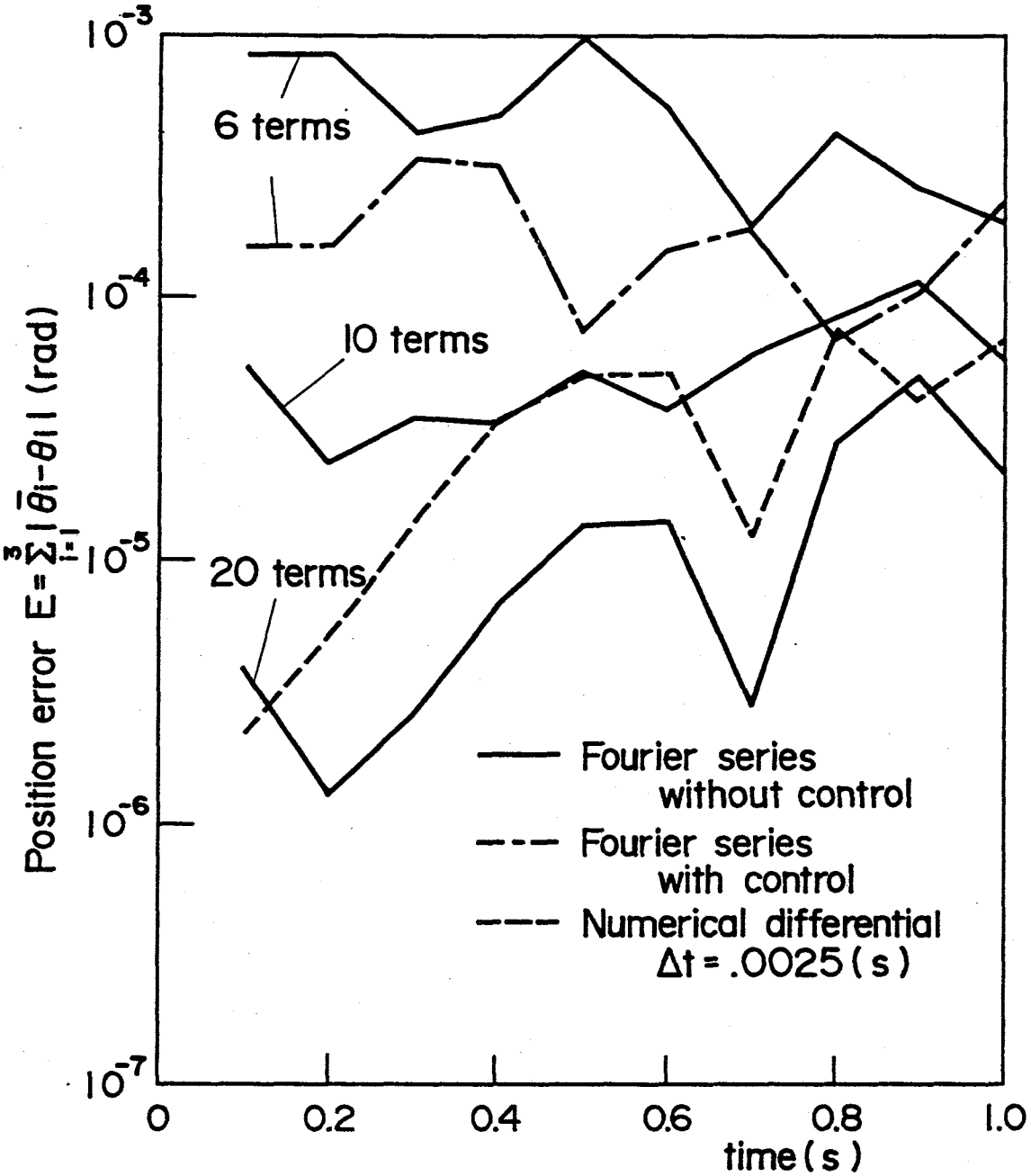


図 10-6 シミュレーションの軌道誤差

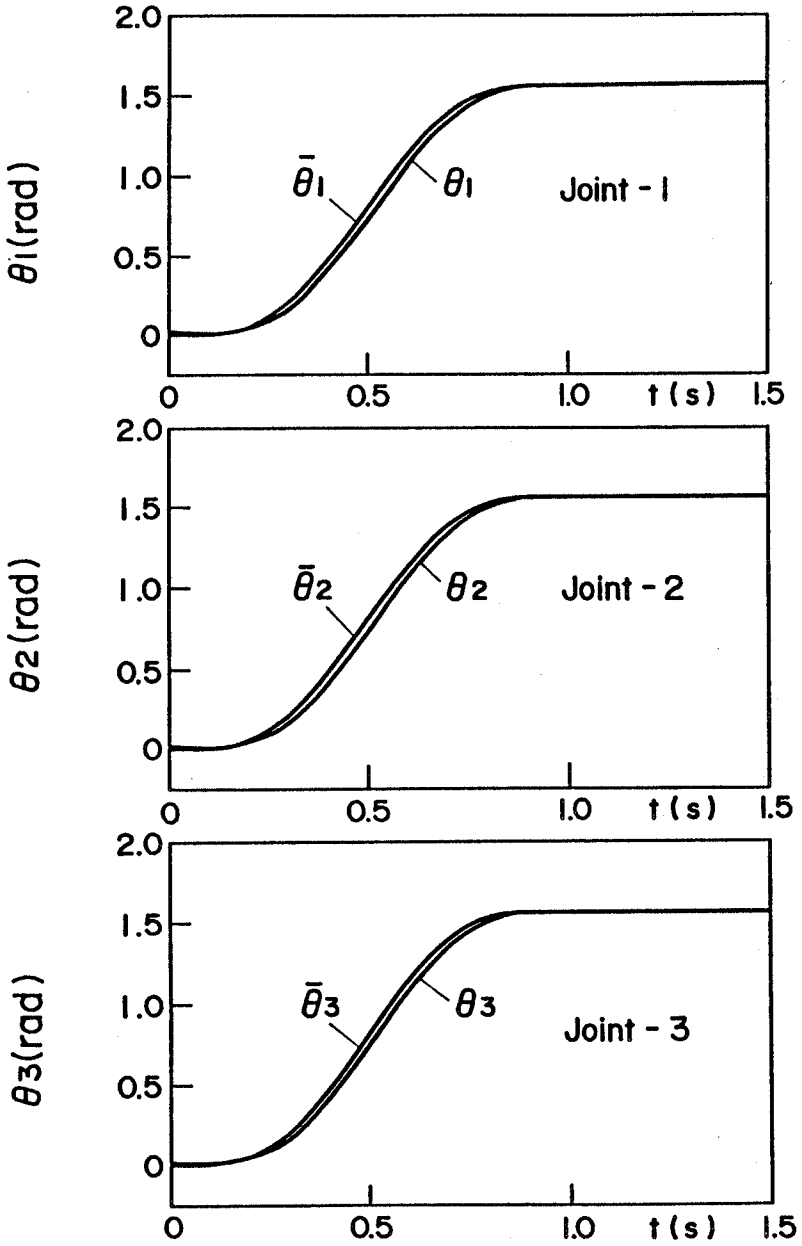


図 10-7 ＰＤ制御のシミュレーション（変位）

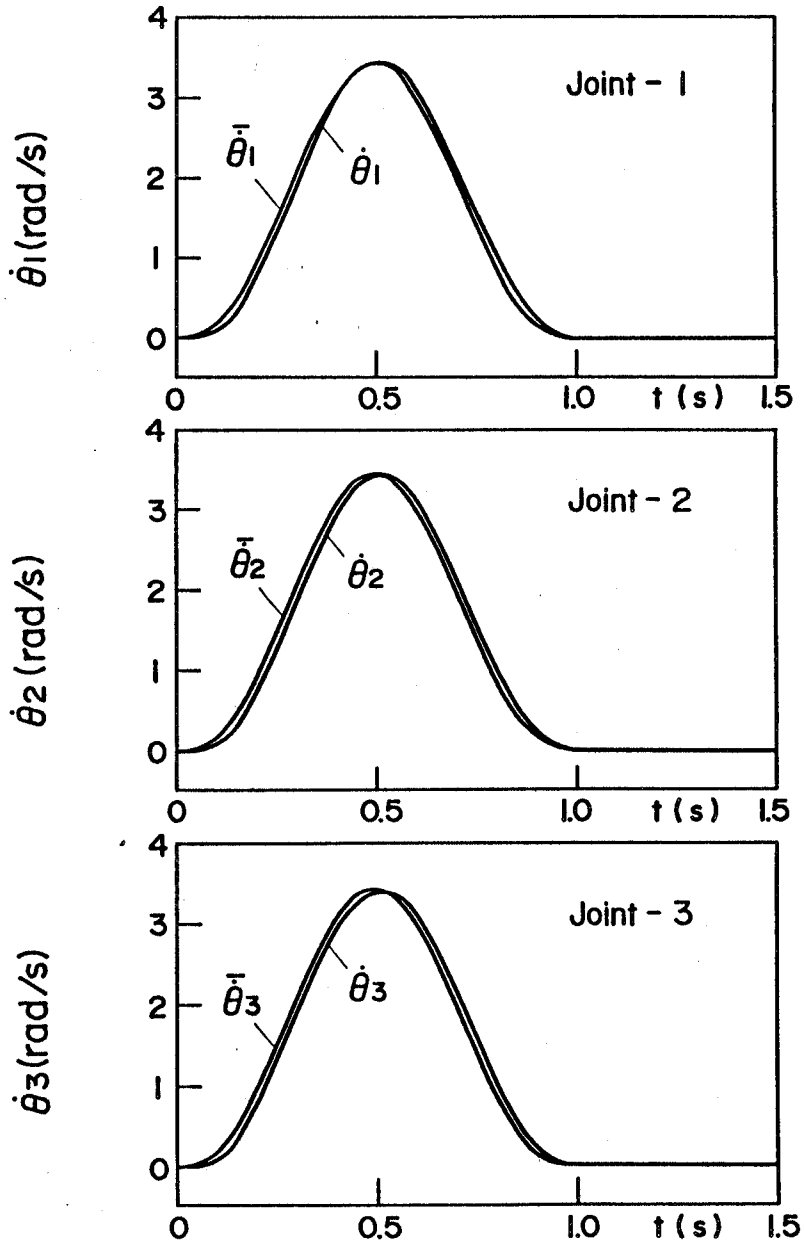


図 10-8 ＰＤ制御のシミュレーション（速度）

に示す．図10-7は時間に対する関節の回転角，図10-8は角速度の変化である．図より，

(1) 重力が作用するため，回転角に初期偏差が認められる．

(2) 応答に少し遅れが認められるものの，アームに残留振動は発生しない．

ことが明らかである．

もう一つのシミュレーション例を図10-9に示す．初期外乱の存在する場合のシミュレーションである．初期インパルスによる初速を全リンクについて 0.25 rad/s と仮定している．図10-9より初期外乱に起因する振動は，運転中に消滅し，停止後残留振動が発生しないことがわかる．

これらのことより，前節で得た目標軌道は，ＰＤ制御のみによって駆動されるロボットの軌道生成にも有効であることがわかる．

10.4 まとめ

伝達機構を有し，駆動モータの回転角を検知してアームを制御するセミクローズドループのロボットシステムに適用できる逆ダイナミックス制御法を提案した．そして，この逆ダイナミックス制御を実現するため，関節変位の初期値，および終端値の時間に対する 1 階微分から 3階微分が 0となる目標軌道を得た．この条件を満たす軌道として，時間に関する 7次多項式軌道に対してシミュレーションを行ない，以下の事項を明らかにした．

(1) 提案した逆ダイナミックス制御を行なうためには，関節駆動力／トルクの時間に対する 2階微分を得る必要がある．この方法として数値微分とトルク波形のフーリェ級数近似の微分の二つの方法を検討した．いずれの場合も，関節変位の偏差の総和が10^{-3}rad 以下であり，本逆ダイナミックス制御は実現可能である．

(2) 7次多項式の目標軌道を設定し，ＰＤ制御のみによってロボットを駆動した場合も，残留振動は発生せず，本目標軌道はロボットの軌道生成に有用である．

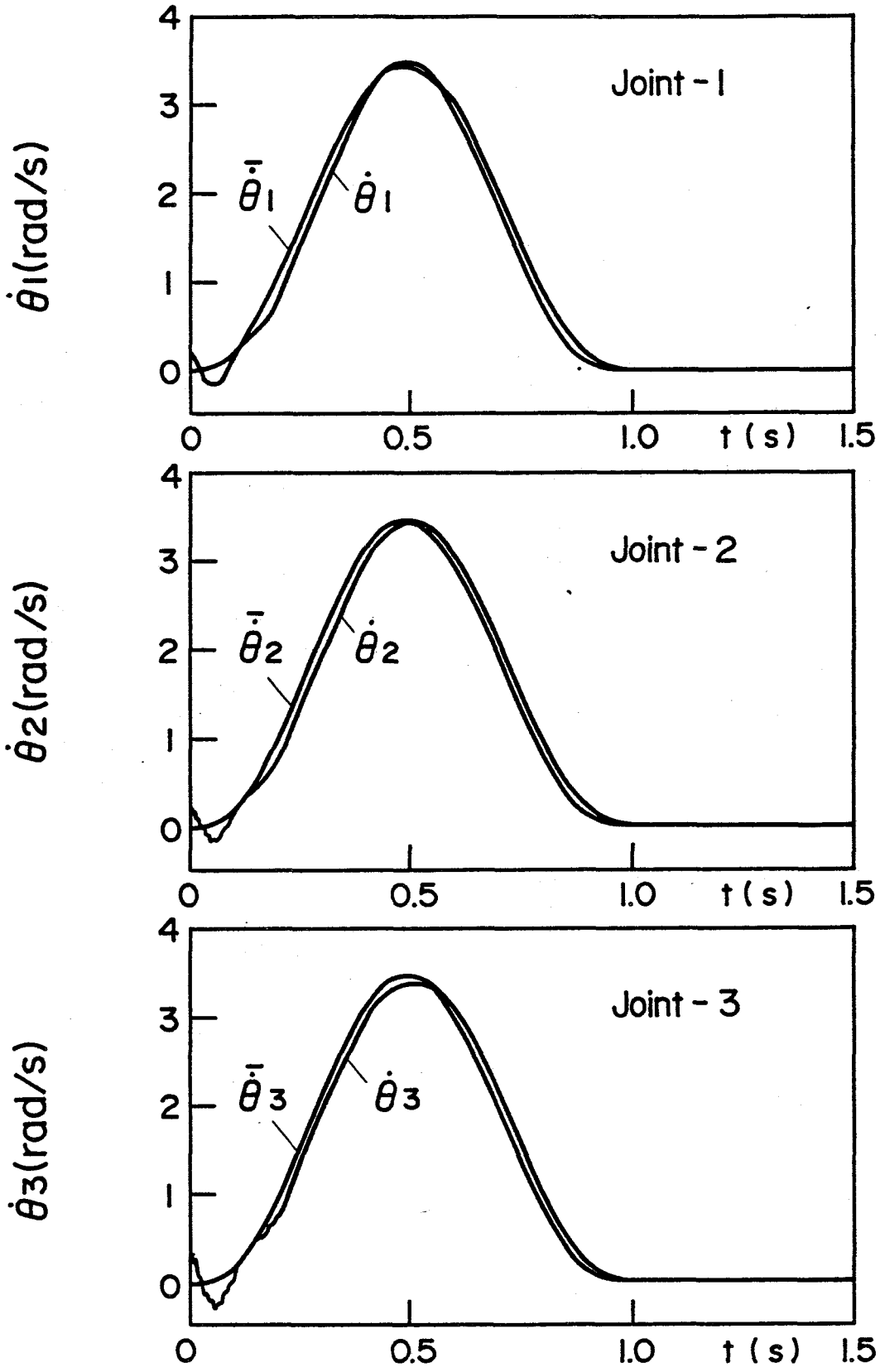


図 10-9 ＰＤ制御のシミュレーション（初期外乱）

第11章　関節摩擦力に関する一考察

11.1　まえがき

多くの産業用ロボットは，減速機を介して直流モータによって駆動される．このようなロボットの関節にはかなりの摩擦力が作用していると推測される．[68] 制御する時の補償やダイナミックスシミュレーションでは，通常摩擦力は一定として取り扱われている．

しかし，クーロンの法則によれば摩擦力は垂直荷重に比例して増減する．そして，運転中のロボットにおいても，この垂直荷重は，重力や遠心力，コリオリ力のために時々刻々変化している．

本章では，水平関節形ロボットを対象として，ダイナミックス解析により，摩擦力の荷重依存性を考慮したシミュレーションのアルゴリズムについての検討や運転中の摩擦力の変化を見積った結果について述べる．

11.2　解析モデルと解析法

クーロンの法則によれば，関節の摩擦力は垂直荷重に比例する．この法則に基づいて関節の摩擦力を求めるためには，運転中の関節の駆動力／トルクや加速度だけでなく，その関節に作用する垂直荷重をも同時に求める必要がある．

このことを可能とするため，図11-1に示す解析モデルを考える．一般に関節に作用する垂直荷重は３次元ベクトルとなる．このベクトルを求めるため，解析モデルとしては，図に示すように通常のロボットの一つの関節に対して，三つの仮想的な直動関節を設ける．そしてこの三つの関節の駆動力として垂直荷重を求める．これらがロボットの本来の関節の摩擦力を決める．なお，ここでは，水平関節形ロボットを解析の対象としているが，以下の議論は，この形式のロボットに限定されるわけではない．

水平関節形ロボットは，一つの直動関節と三つの回転関節により構成される．それぞれの回転関節に三つの仮想直動関節を設ける．直動関節については，この関節と互いに直角方向に二つの仮想直動関節を設けると，解析するロボットは，図11-2に示すような15自由度のロボットアームとなる．

11.2.1　逆ダイナミックス

ロボットアームの運動方程式は，次式で与えられる．

$$(p) = [W]\ (\ddot{q}) - (Y - V^{T}) \qquad (11.1)$$

ここで，

$W \in R^{15\times15}$　；慣性行列

$p \in R^{15}$　；関節駆動力／トルク

$q \in R^{15}$　；関節変位

$V \in R^{15}$　；遠心力・コリオリ力項

$Y \in R^{15}$　；重力項

である．

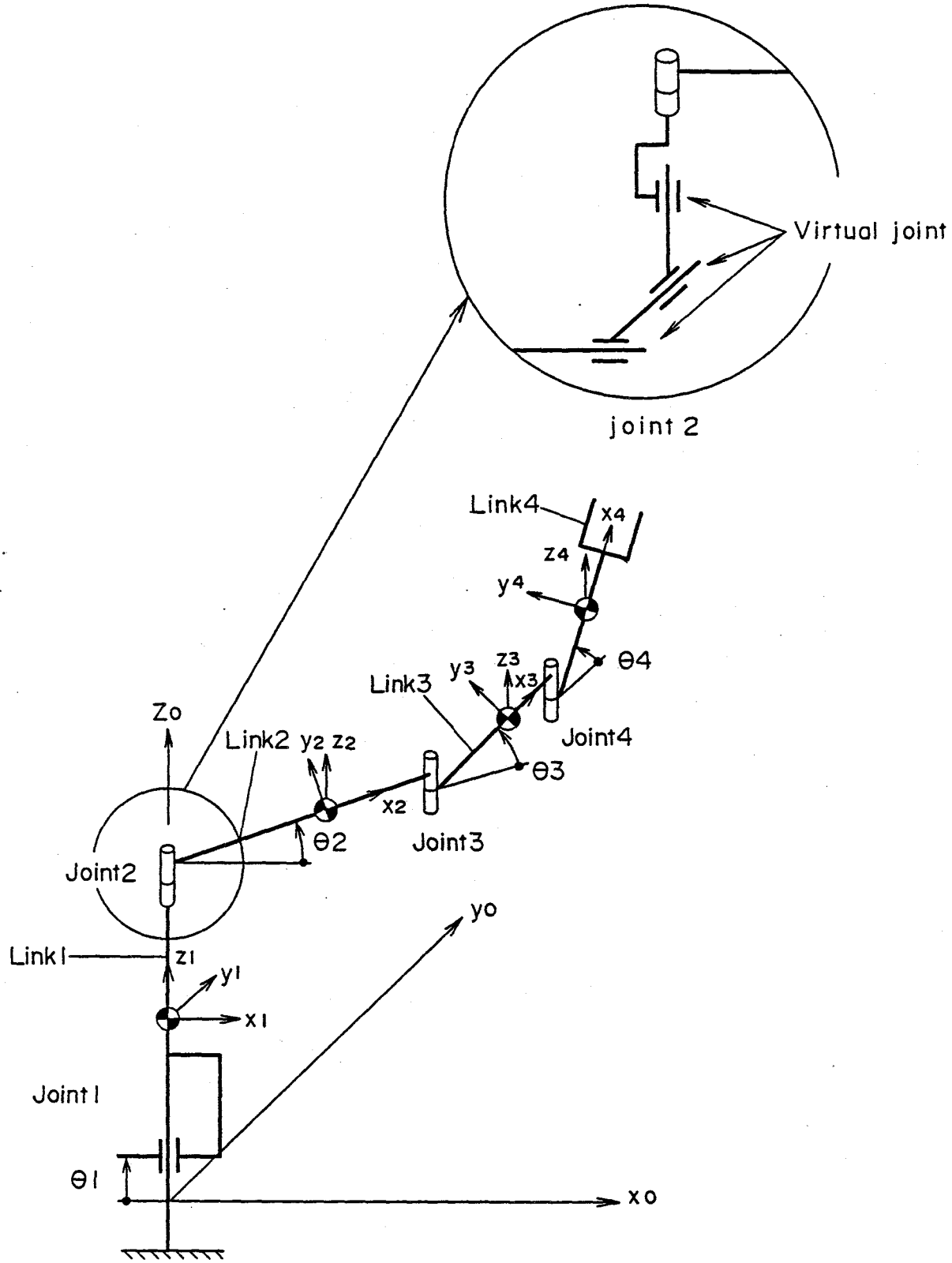

Virtual joint
joint 2
Link4
x4
z4
y4
θ4
Link3
y3
z3
x3
Joint4
Zo
Link2
y2 z2
θ3
x2
θ2
Joint3
Joint2
yo
Link1
z1
y1
x1
Joint1
θ1
xo

図 11-1 解析モデル

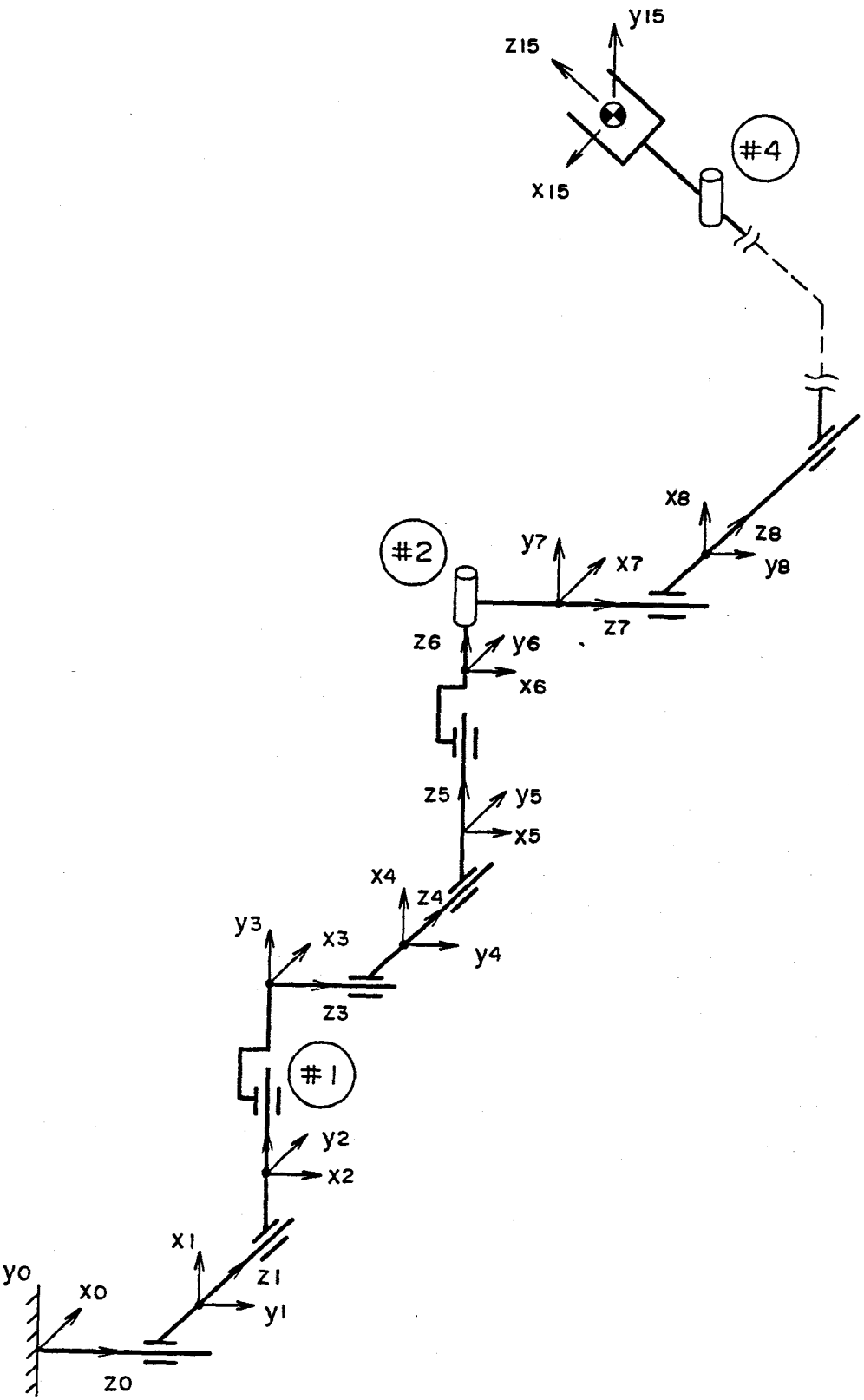


図 11-2 １５自由度ロボットアーム(SCARA)

運動方程式の次数は，仮想関節を含むすべての関節の数と一致する．与える関節の運動は，本来のロボットの関節と仮想関節では異なり，次式となる．

$$q_i = \overline{q}_i(t) \quad (i=3,7,11,15) \qquad (11.2.1)$$

$$q_j = 0 \quad (j=1,2,4,5,6,8,9,10,12,13,14) \qquad (11.2.1)$$

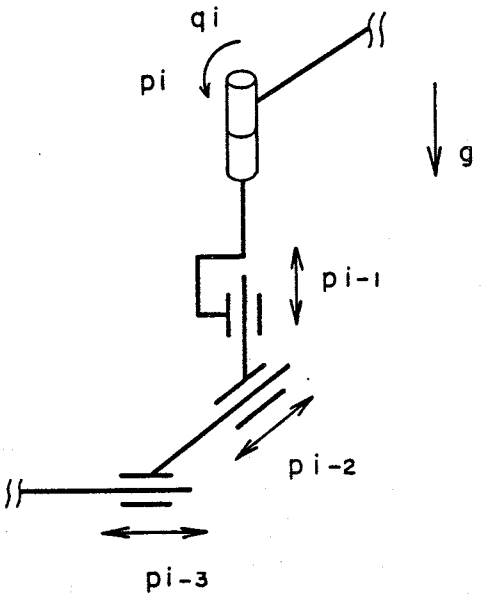


図 11-3 一つの回転関節

式(11.2)の目標軌道を式(11.1)に代入することにより，各関節の駆動力／トルクpが求まる．これらの値のうち，ロボット本来の関節の駆動力／トルクp_iは，摩擦のない時の値に相当し，仮想関節の駆動力p_jはこの時の垂直荷重に相当する．これらの値をもとに摩擦のある時の関節駆動力／トルクを求める．摩擦力の見積については，種々の考え方がある．ここでは，図11-3の記号を用いて表わされる次の３例について求めている．

$$f_i = \mathrm{sig}(\dot{q}_i)\,\mu_i\,|p_{i-1}| \qquad (11.3.1)$$

$$f_i = \mathrm{sig}(\dot{q}_i)\,\mu_i\,\sqrt{p_{i-1}^2 + p_{i-2}^2 + p_{i-3}^2} \qquad (11.3.2)$$

$$f_i = \mathrm{sig}(\dot{q}_i)\sum_{k=1}^{3}\mu_{ik}\,|p_{i-k}| \qquad (11.3.3)$$

上式で式(11.3.1)は，水平関節形ロボットでは摩擦力一定の場合に相当し，式(11.3.2)は，負荷荷重の合力に摩擦力が比例する場合であり，式(11.3.3)はそれぞれの方向の摩擦係数を考えたものである．

式(11.3)のf_iを用いて，摩擦を考慮した時の運動に必要な関節駆動力／トルクは次式で与えられる．

$$p_i^f = p_i + f_i \qquad (11.4)$$

11.2.2 順ダイナミックス

摩擦力の荷重依存性を考慮したシミュレーションを行うためには，与えられた関節駆動力p_iをもとに，関節加速度と，摩擦力を決めるための垂直荷重を同時に求める必要がある．これを行うには，後述のように摩擦力の評価式が式(11.3.2)で表わされる場合は困難である．ここでは，摩擦力が式(11.3.3)で与えられる時のシミュレーション法について述べる．

これには第５章で提案している関節座標上の拘束条件付力学系の解析が適用できる．ロボットアームを構成する15の関節のうち，11ケの仮想関節には式(11.2.2)の拘束条件を，四つのロボットの本来の関節にはモータトルクを与えて求まる拘束力をもとに摩擦力を考慮しつつシミュレーションを行う．運動方程式は，次式で与えられる．

$$\begin{bmatrix} \ddot{q} \\ \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} W & -\tilde{C} \\ \tilde{C} & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} [\bar{C}]\,(p_f) + Y - V \\ 0 \end{bmatrix} \qquad (11.6)$$

ここで，拘束条件行列［C］を下記のように定義すると，

$$C = \mathrm{diag}\,[C_{11},\ C_{22},\ \cdots,\ C_{1515}] \qquad (11.7)$$

$C_{kk} = 0$　　(k=3,7,11,15)

$C_{kk} = 1$　　(Otherwise)

$\tilde{C} \in R^{15\times 11}$ ；［C］から０の列ベクトルを除いた小行列

$\bar{C} \in R^{4\times 11}$ ；［I－C］から０の列ベクトルを除いた小行列

であり，$\tilde{C}^f$ の（i，k）要素$\tilde{C}_{ik}$は，

$$\tilde{C}_{fk} = \tilde{C}_{fk} \pm \mu_{ik}\ \mathrm{sgn}\,(\dot{q}_i) \qquad (11.8)$$

である．また，

$\lambda \in R^{11}$；ラグランジュ乗数

$P_f \in R^4$ ；関節駆動力／トルク

である．

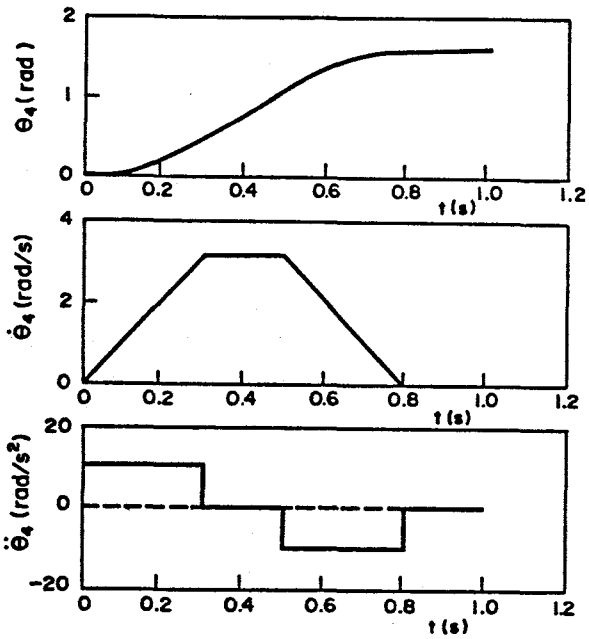


図 11-4 目標軌道

式(11.8)の±の符号は，仮想関節の垂直荷重の正負によって変化するため，一義には決定できない．このことは，摩擦力の評価式として垂直荷重の絶対値を取っていることに対応している．

ここでは，初めに与えた符号と求まったラグランジュ乗数の符号が一致するまで繰り返し計算を行ってこの問題点を解消している．このようにして，求まる拘束力をもとに，摩擦力を考慮して関節加速度を求め，これを数値積分することによってロボットの挙動をシミュレートする．

11.3 解析例と考察

11.3.1 逆ダイナミックス

解析の対象とした水平関節形ロボットのアーム諸元を表11-1に示す．表に示すように仮想リンクの長さ，質量は０としている．与えた目標軌道は図11-4に示す台形の速度軌道である．この速度パターンで回転関節については 0.8秒で90° 直動関節については，0.3 m 移動させる．与えた摩擦係数μ_i ，μ_{ik}等はすべて 0.1である．

逆ダイナミックスの計算結果を図11-5に示す．図では，式(11.3)に対応して，次の４種類の摩擦力の評価について運動に必要な駆動力／トルクをプロットしている．

表 11-1 アームダイナミックス諸元

Items / Link No.	α_i (deg)	θ_i (deg)	Length $r_{i,i}-r_{i,i+1}$(m) x_ℓ	y_ℓ	z_ℓ	Center of gravity $r_{i,i}$(m) x_g	y_g	z_g	Mass m_i (kg)	Moment of Inertia I_i(kg.m^2) I_{xx}	I_{yy}	I_{zz}
Link-1 (L)	90.0	90.0	.0	.0	.0	.0	.0	.0	.0	.0	.0	.0
" 2 (L)	"	"	"	"	"	"	"	"	"	"	"	"
" 3 (L)	"	"	"	.5	"	"	.053	"	19.1	"	"	"
" 4 (L)	"	"	"	.0	"	"	.0	"	.0	"	"	"
" 5 (L)	"	"	"	"	"	"	"	"	"	"	"	"
" 6 (L)	0.0	0.0	"	"	"	"	"	"	"	"	"	"
" 7 (R)	90.0	90.0	"	.025	.4	"	.09	.148	28.2	.984	.984	"
" 8 (L)	"	"	"	.0	.0	"	.0	.0	.0	.0	.0	"
" 9 (L)	"	"	"	"	"	"	"	"	"	"	"	"
" 10 (L)	0.0	0.0	"	"	"	"	"	"	"	"	"	"
" 11 (R)	90.0	90.0	"	-.064	.25	"	-.064	.135	7.25	.108	.108	"
" 12 (L)	"	"	"	.0	.0	"	.0	.0	.0	.0	.0	"
" 13 (L)	"	"	"	"	"	"	"	"	"	"	"	"
" 14 (L)	0.0	0.0	"	"	"	"	"	"	"	"	"	"
" 15 (R)	90.0	90.0	"	-.049	.2	"	-.049	.188	10.65	.024	.024	"

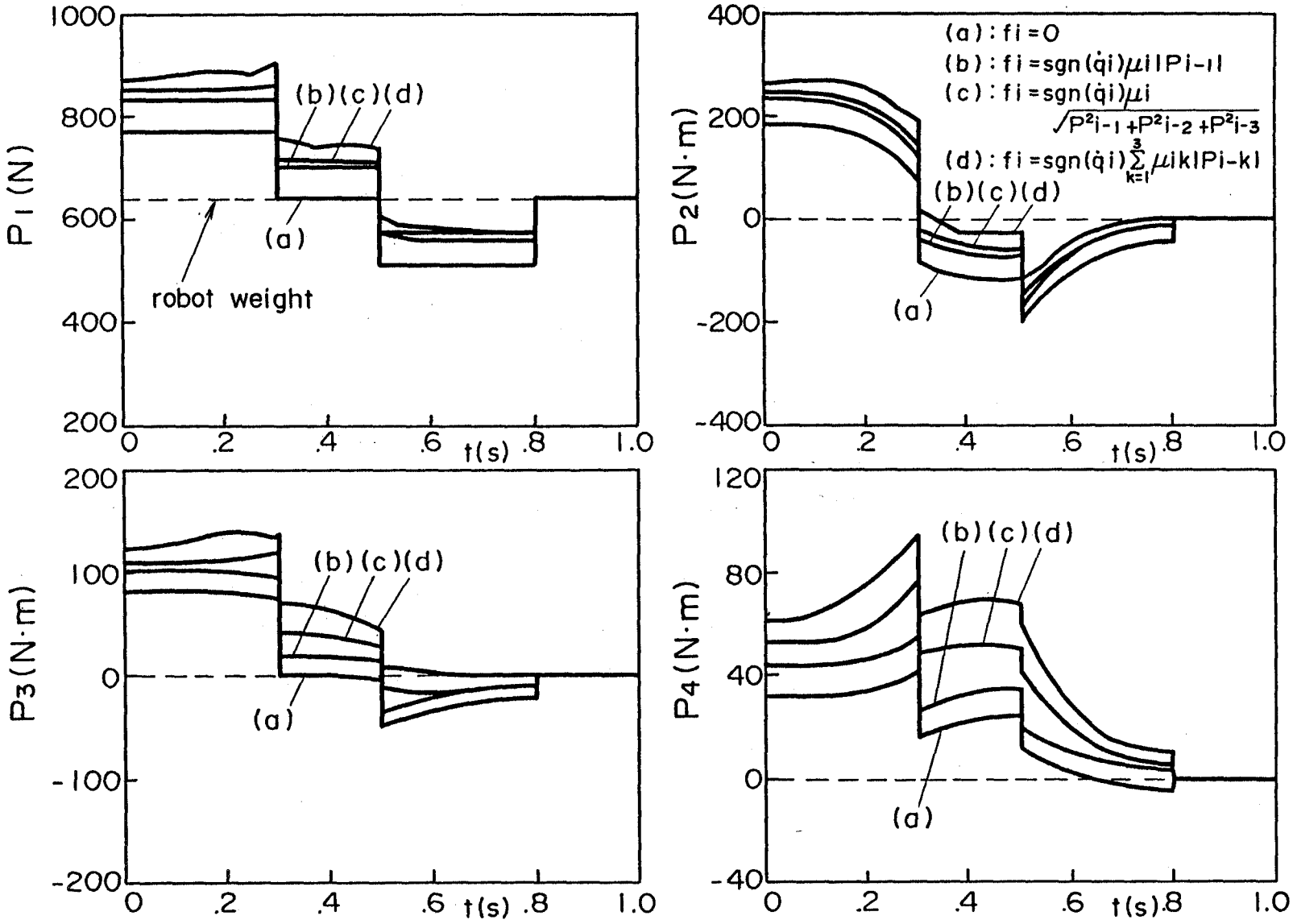


図 11-5 摩擦を考慮した関節駆動力／トルク

(a) 摩擦力なし

(b) 式(11.3.1)　（摩擦力一定）

(c) 式(11.3.2)　（摩擦力が荷重に依存）

(d) 式(11.3.3)　（摩擦力が荷重に依存）

図より，p_1 から p_3 については，運転中の摩擦力の変化が小さいが，p_4 については垂直荷重の変化により，摩擦力がかなり変化することがわかる．

11.3.2 順ダイナミックス

提案したダイナミックス解析法の妥当性を検証するため次のシミュレーションを行っている．すなわち，ロボットの本来の関節には，式(11.4)であらわされる逆ダイナミックスで求めた駆動力／トルクと摩擦力の和を，仮想関節には式(11.2.2)の拘束条件を与えて求まる拘束力をもとに関節摩擦力の荷重依存性をを考慮しつつ式(11.5)によりシミュレーションを行っている．実施条件は次の通りである．

(1) 変数は，32ビットの単精度実数

(2) 数値積分は，ルンゲ・クッタ・ギル法

(3) 時間きざみ幅は，0.005 秒

なお，シミュレーションでは，ラグランジュ乗数の符号決定のための繰り返し計算は，最大５ないし６回で収束した．逆ダイナミックで与えた目標軌道とシミュレーションで得られたロボットの運動の誤差を時刻に対してプロットして図11-6に示す．計算精度の比較を前節の台形の速度パターンと次式の位置に関して３次式で表わされる目標軌道の両者に

$$q_3 = 0.3\times(-2(T/0.8)^3+3(T/0.8)^2) \qquad (11.9.1)$$

$$q_{7,11,15} = (\pi/2)\times(-2(T/0.8)^3+3(T/0.8)^2) \qquad (11.9.2)$$

ついて行なっている．図11-6より次の事項が明らかである．

(1) 台形と３次式軌道共，初期の誤差は，10^{-5}のオーダで一致しており，本解析法の妥当性が検証できた．

(2) ３次式軌道については誤差がほぼ同一オーダで推移するのに対し，台形軌道では，0.3 秒以降誤差が急激に大きくなる．これは，ルンゲ・クッタ・ギル法が元々連続関数の仮定から導かれたものであるのに対し，台形の速度軌道は，加速度に不連続が生じるためと推測される．

また，得られた双方の数値計算結果を表11-2，表11-3に示す．

11.4 まとめ

各関節に垂直荷重をモニタする仮想関節を設け，ロボットアームに作用する摩擦力の荷重依存性を考慮したロボットのダイナミックス挙動について検討した．得られた結論は以下の通りである．

(1) ロボットアームでは運動に伴う遠心力，コリオリ力，および重力によって関節に加わる荷重が変化する．これらの垂直荷重の変化によって摩擦力がかなり大きく変化する．

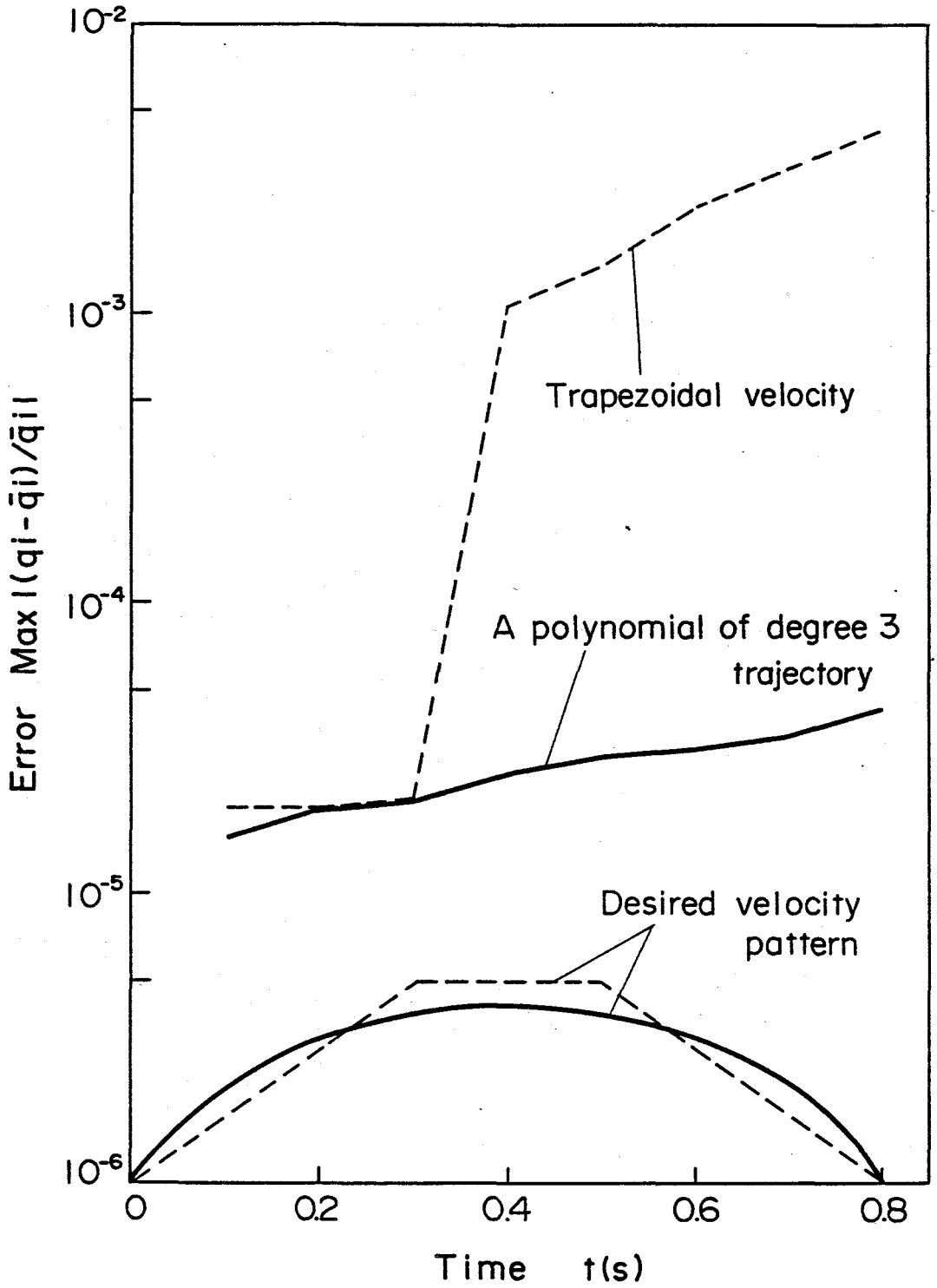


図 11-6 シミュレーションの誤差

表 11-2 関節摩擦力を考慮したシミュレーション（台形軌道）

Time (s)	Link No.	Inverse dynamics		Direct dynamics		
		Position q (m) or (rad)	Force p (N) or (Nm)	Force p (N) or (Nm)	Position q (m) or (rad)	Constrained Force λ (N)
0.0	Link-1	0.0	.000386	-	0.0	.000386
	2	"	257.848	-	"	257.845
	3	"	769.792	883.974	"	-
	4	"	.000557	-	"	.000557
	5	"	257.847	-	"	257.845
	6	"	544.286	-	"	544.284
	7	1.5780	183.827	264.040	1.5780	-
	8	0.0	.000360	-	0.0	.000360
	9	"	214.162	-	"	214.141
	10	"	211.339	-	"	211.339
	11	1.5780	81.3972	123.945	1.5780	-
	12	0.0	.000233	-	0.0	.000233
	13	"	163.275	-	"	163.274
	14	"	125.741	-	"	125.740
	15	1.5780	31.4496	60.3511	1.5780	-
0.4	Link-1	0.0	46.6591	-	0.0	46.5349
	2	"	-348.604	-	0.0	-348.995
	3	0.15	639.393	754.355	.150156	-
	4	0.0	46.6596	-	0.0	46.5355
	5	"	-348.605	-	-.000001	-348.995
	6	"	452.086	-	0.0	452.066
	7	2.35619	-111.195	-26.4603	2.35756	-
	8	0.0	-172.315	-	0.0	-172.545
	9	"	-279.495	-	-.000002	-279.855
	10	"	179.539	-	-.000001	175.531
	11	2.35619	.602686	63.3375	2.35682	-
	12	0.0	-260.599	-	0.0	-261.037
	13	"	-96.0275	-	0.0	-95.9038
	14	"	104.441	-	0.0	104.436
	15	2.35619	21.8773	67.9841	2.35386	-
0.8	Link-1	0.0	55.7844	-	0.0	54.3089
	2	"	76.2619	-	-.000001	77.0910
	3	0.3	508.993	580.219	0.301284	-
	4	0.0	55.7845	-	0.0	54.3091
	5	"	76.2618	-	-.000002	77.0909
	6	"	359.886	-	-.000001	359.930
	7	3.14159	-44.7669	4.42632	3.15794	-
	8	0.0	76.2620	-	.000001	76.2070
	9	"	-12.0786	-	-.000003	-12.3294
	10	"	139.739	-	-.000003	139.756
	11	3.14159	-23.1626	-.354660	3.12654	-
	12	0.0	18.2902	-	0.0	18.8562
	13	"	-55.7632	-	-.000001	-55.5965
	14	"	83.1408	-	0.0	83.1510
	15	3.14159	-4.19256	11.5269	3.14795	-

Runge-Kutta-Gill Method : Δt = 0.005 sec.

表 11-3 関節摩擦力を考慮したシミュレーション（3次式軌道）

Time (s)	Link No.	Inverse dynamics		Direct dynamics		
		Position q (m) or (rad)	Force p (N) or (Nm)	Force p (N) or (Nm)	Position q (m) or (rad)	Constrained Force λ (N)
0.0	Link-1	0.0	.000542	-	0.0	.000542
	2	"	362.598	-	"	362.593
	3	"	822.767	954.474	"	-
	4	"	.000681	-	"	.000681
	5	"	362.598	-	"	362.594
	6	"	581.742	-	"	581.741
	7	1.5780	258.507	352.940	1.5780	-
	8	0.0	.000426	-	0.0	.000426
	9	"	301.137	-	"	301.136
	10	"	225.883	-	"	225.882
	11	1.5780	114.465	167.167	1.5780	-
	12	0.0	.000256	-	0.0	.000256
	13	"	229.605	-	"	229.605
	14	"	134.394	-	"	131.394
	15	1.5780	44.2260	80.6259	1.5780	-
0.4	Link-1	0.0	41.0092	-	0.0	41.0128
	2	"	-306.390	-	0.0	-306.394
	3	0.15	639.393	749.036	0.149996	-
	4	0.0	41.0096	-	0.0	41.0131
	5	"	-306.390	-	-.000001	-306.394
	6	"	452.086	-	0.0	452.084
	7	2.35619	-97.7299	-17.7813	2.35623	-
	8	0.0	-151.448	-	0.0	-151.454
	9	"	-245.649	-	-.000002	-245.646
	10	"	175.539	-	-.000001	175.538
	11	2.35619	.529782	57.7934	2.35617	-
	12	0.0	-229.042	-	0.0	-229.040
	13	"	-84.3990	-	-.000001	-84.4008
	14	"	104.441	-	0.0	104.440
	15	2.35619	19.2281	61.0163	2.35620	-
0.8	Link-1	0.0	78.4466	-	0.0	78.4374
	2	"	107.243	-	-.000001	107.250
	3	0.3	456.018	527.319	.299987	-
	4	0.0	78.4467	-	.000001	78.4375
	5	"	107.243	-	-.000002	107.250
	6	"	322.430	-	-.000001	322.429
	7	3.14159	-62.9533	-12.1413	3.14167	-
	8	0.0	107.243	-	.000001	107.243
	9	"	-16.9854	-	-.000003	-16.9880
	10	"	125.195	-	-.000003	125.195
	11	3.14159	-32.5724	-7.62997	3.14152	-
	12	0.0	25.7206	-	0.0	25.7237
	13	"	-78.4169	-	-.000001	-78.4163
	14	"	74.4877	-	0.0	74.4875
	15	3.14159	-5.89578	11.9667	3.14162	-

Runge-Kutta-Gill Method : Δt = 0.005 sec.

(2) シミュレーションでは与えられた関節駆動力をもとに，関節加速度と摩擦力を決める垂直荷重を同時に求める必要がある．しかし一般に正負の符号も含め，摩擦係数が摩擦力の関数となるため，関数加速度の決定に繰り返し計算を必要とする．解析例について，正負の符号に関する収束性を確認した．

(3) 摩擦力の荷重依存性を考慮したシミュレーション解析の妥当性が検証できた．同時に台形の速度軌道ではシミュレーションの誤差の大きくなることが明らかになった．関節加速度に不連続があるためと考えられる．

第12章　結論

本論文は，ロボット，特に産業用ロボットの機構・制御系の設計技術を確立するため，ロボットのダイナミックスやそのシミュレーション技法について研究したものである．そして，開発したシミュレータを用いてロボットの設計法や制御法について検討を行ったものである．

以下に具体的な主要結果を示す．

［1］ロボットの設計支援を行うために必要なダイナミックスシミュレータの持つべき機能をハード，ソフトの両面から明らかにし，そのモデルを開発した．

［2］シュミレータ中の運動方程式の計算機生成にアッペル法を適用した．本方法をシミュレータに適用する過程で，アッペル法の種々の利点を指摘し，他の方法との比較からアッペル法の評価を与えた．アッペル法は，演算が高速であるだけでなく，運動方程式の導出過程で手先加速度が得られるので，開ループから閉ループ力学系のシミュレーションへの拡張がきわめて容易であることを明らかにした．

［3］特に，設計支援シミュレータは，適用範囲を特定の軸構成のロボットに限定されてはならない．この時に問題となるのが，汎用性のある逆変換の計算法である．運動方程式の計算機生成法は，既に確立されている．本論文では，アッペル法の運動方程式の導出過程を利用し手先加速度をデカルト座標から関節座標へ変換する方法で，知能ロボットに必要な手先の運動から必要駆動力／トルクが直接に得られ，かつ逆変換も求まる計算法を提案した．

現在，多くの産業用ロボットは，駆動モータの回転角を検知してアームを制御するセミクローズドループの制御法を採用している．そしてリンクと駆動モータの間には，比較的剛性の低いハーモニックドライブ減速機等の伝達機構が介在する．このようなロボットシステムについて，

［4］シミュレータの設計への適用として試作試験に相当するものを計算機シミュレーションによって実施した．解析モデルは，アームのダイナミックスのみでなく，制御系および駆動・伝達系の特性を考慮した総合的なものになっている．パラメータスタディの結果，得られた傾向は，これまでの経験とよく一致し，シミュレーションによる設計が十分可能であることを明らかにした．

［5］そして，速応性と振動制御の観点から，設計では，動力伝達系の剛性に着目する必要があり，これと制御ゲインの等価剛性を等しくする設計指針を提案した．

［6］また，動力伝達系の剛性との比較の観点から確保すべきリンク剛性を明らかにし，アーム軽量化の設計指針を与えた．

［7］さらに，動力伝達系の剛性を考慮したフィードフォワード制御を提案した．

次に，本論文で得られた結果についての考察，および今後の課題等について述べる．

［1］ロボットの機構は，高機能化と共に，ますます複雑化し，生体に近づくと予測される．力学系をその構成により分類すると図12-1のようになる．これまでのダイナミッ

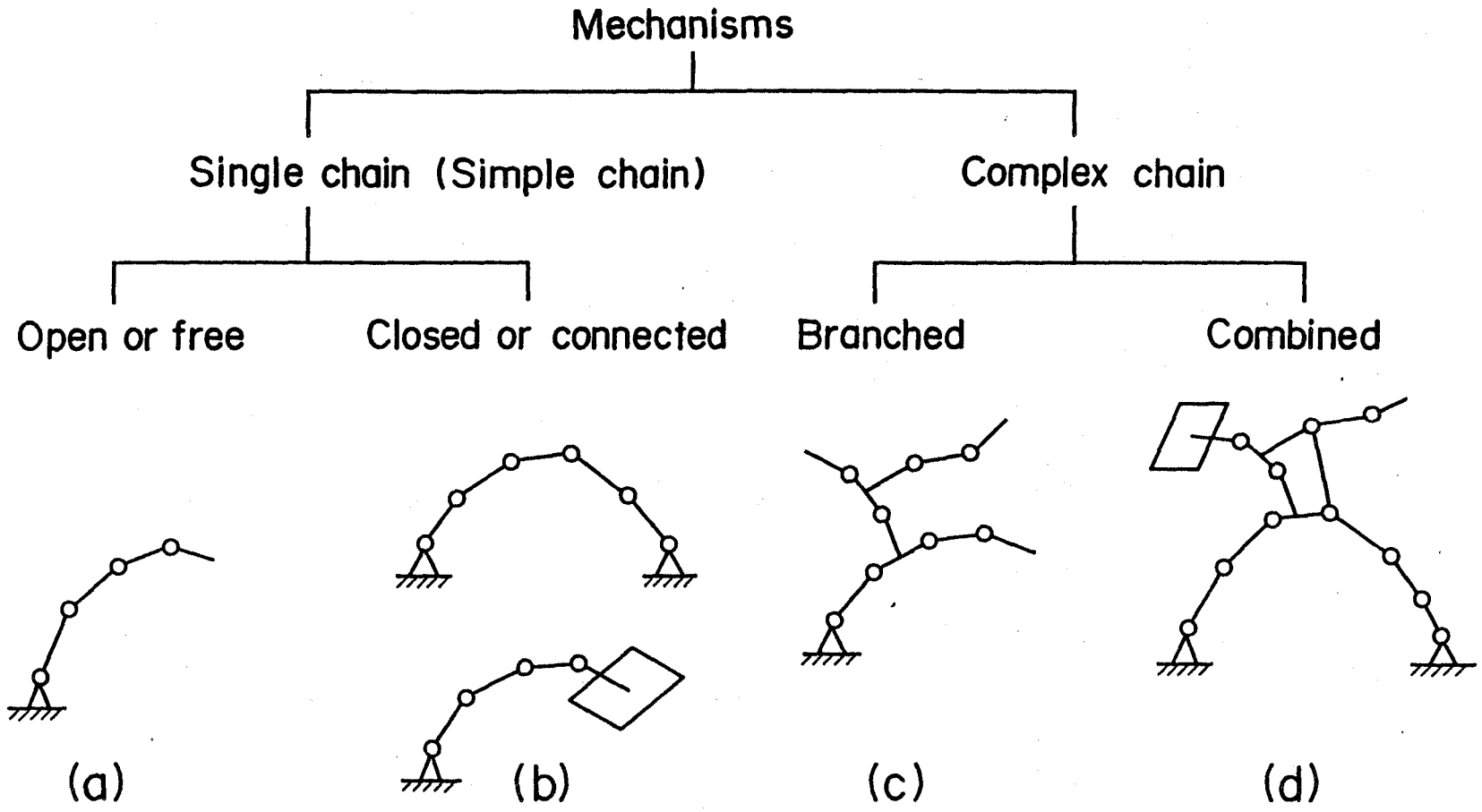

Mechanisms
Single chain (Simple chain)
Complex chain
Open or free
Closed or connected
Branched
Combined
(a)
(b)
(c)
(d)

図 12-1 力学系の分類

クスシミュレータでは，図12-1(a) の単一チェーン・先端自由の力学系を取り扱ってきた．そして先端自由の開ループ力学系の解析から図12-1(b) の手先が拘束された閉ループ力学系への拡張については第４章で取り扱った．しかし，ハンドや歩行機械のダイナミックスの取り扱いには，枝分れ，あるいはこれに様々な拘束の伴う複合力学系の運動解析を必要とする．このため拘束条件が関節座標系で表わされる力学系の動力学解析を提案し，枝分れ（第５章）やループ機構を含む力学系の解析（第６章），およびモータロータの挙動を考慮した動力学解析（第７章）に適用可能であることを明らかにした．今後は，提案した解析法を応用してハンドや歩行機械のダイナミックス挙動を明らかにすると共に，その制御法を検討するため，生体のダイナミックスや制御メカニズムの解明をはかりたい．

［２］ロボットシステム全体の特性を考慮したシミュレーションの定性的傾向は，これまでの経験とよく一致し，パラメータを異にした二つのシミュレーション結果を比較することによりロボットシステム設計検討が可能である．しかし，シミュレーションにより的確に，実機挙動を予測するためには，結果が定量的にもよく一致することが望ましい．実験とシミュレーションの比較を実施しつつあるが，定量的一致をみるためには，関節の摩擦や減速機・制御回路の非線系特性を反映したシミュレーションを行なう必要がある．このうちの一つの試みとして，関節摩擦力の荷重依存性を考慮したシミュレーション法について第11章で検討した．

［３］アームの軽量化のためには，リンクのフレキシビリティを考慮した解析が必要になる．第 9章では，アームを構成する各リンクを 3分割し，それらをばね要素で結合することによりフレキシビリティのモデリングを行った．しかし，この方法では，フレキシビリティを考慮する一つの自由度につき１関節の追加が必要になる．一般によく用いられる有限要素への分割[64] においても，一つの要素につき，最低 6自由度が必要となり，取り扱わなければならない自由度の数が飛躍的に増加する．

この時に問題となるのは，演算時間である．一例のみのシミュレーションでは，設計は困難である．設計では，パラメータスタディが必要であり，多数の条件でのシミュレーションを行う必要がある．これを能率よく可能ならしめるためには，モデリング技術をも含め演算量や演算時間の少ないシミュレーション手法が望まれる．

なお本論文は，後にあげた関係論文，および講演予稿[69)-77)] をまとめたものである．

謝辞

本研究を行うにあたり，大阪大学基礎工学部　有本卓教授，宮崎文夫助教授，立命館大学理工学部　川村貞夫助教授には終始多大な御指導，御助言また励ましの御言葉を賜りました．ここに心より感謝いたします．そして，論文作成にあたっては，大阪大学基礎工学部　瀬口靖幸教授，並びに吉川孝雄教授から多くの貴重な御意見を賜りました．ここに深く感謝いたします．

この研究は，三菱電機株式会社　中央研究所，長崎製作所，名古屋製作所，稲沢製作所の協力を得て行ったもので，研究の機会をお与え下さると共に多くの指導と援助をいただいた　長崎製作所部長　二川暁美博士，名古屋製作所　志賀康宣次長，産業システム研究所グループリーダ　萩原史朗博士，中央研究所部長　山中晤郎博士，苗村康次グループリーダはじめ関係各位に厚く御礼申し上げます．

また，本論文中でとりあげたシミュレーションについては，長崎製作所　古賀英士君，稲沢製作所　井上健二君，名古屋製作所　青木良明君，西村隆朗君，諸氏の共働，討論を得ました．さらに，アニメーションのハード，ソフトに関して中央研究所　武田宗久君，小崎左智子君，山田直志君に御協力頂きました．ここに心より御礼申しあげます．

最後に，ここには書ききれない程多くの方がたに学会，研究会などで御意見，御指摘をいただきました．合わせて深く感謝いたします．

参考文献

1) M.W.Walker and D.E.Orin , " Efficient Dynanmic Computer Simulation of Robotic Mechanisms " , Trans. ASME J. of D.S.M.C. , Vol. 104 , No. 3 , PP. 205-211 , 1982.

2) M.Takano et al. , " Development of Computer Simulation System of Kinematics and Dynamics " , J. of the Faculty of Engineering the University of Tokyo , Vol. 34 , No. 4 , 1982.

3) 松家他，" ロボット設計支援システムの開発" ，第 1回日本ロボット学会学術講演会予稿集，PP. 223-224 , 1983.

4) 杉内他，" 多関節形マニピュレータの剛性を考慮したシミュレータ，第 1回日本ロボット学会学術講演会予稿集，PP. 225-226 , 1983.

5) 増井他，" サーボ系を考慮した多自由度機構動特性シミュレータ，第24回 SICE 学術講演会予稿集，PP. 525-526 , 1983.

6) N.M.Swartz , " Arm dynamics simuration " , J. of Robotic Systems , Vol. 1 , No. 1 , PP. 83-100 , 1984.

7) 中土他，" ロボット設計のための計算機援用システム" ，第28回システムと制御講演会予稿集，PP. 151-152 , 1984.

8) 花房他，" 任意形状のロボットマンピュレータのための動特性シミュレータの開発" ，第 2回日本ロボット学会学術講演会予稿集，PP. 215-216 , 1984.

9) 田所他，" 多関節形ロボットのシミュレータ，第 2回ＦＡシンポジウム予稿集，PP. 113-114 , 1985.

10) 井上他，" ロボットシミュレーション" ，第 2回ＦＡシンポジウム予稿集，PP. 115-116 , 1985.

11) 三好，大野，" 制御系を考えたロボットアームの動特性評価" ，第 2回日本ロボット学会学術講演会予稿集，PP. 189-192 , 1984.

12) 遠山・高野，" ロボットの運動解析シミュレータの開発" ，精密機械，Vol.51 , No. 8 , PP. 129-131 , 1985.

13) 長松他，" ロボットのシミュレーションに関する研究（第 1報，位置，速度および加速度の数値解析）" ，日本機械学会論文集（Ｃ編），Vol.51 , No. 470 , PP. 2668-2676 , 1985.

14) 長松他，" ロボットのシミュレーションに関する研究（第 2報，力の数値解析）" 日本機械学会論文集（Ｃ編），Vol.51 , No. 470 , PP. 2677-2683 , 1985.

15) 長松他，" ロボットのシミュレーションに関する研究（第 3報，振動解析，その1 ）" 日本機械学会論文集（Ｃ編），Vol.51 , No. 470 , PP. 2677-2683 , 1985.

16) 黒岩他，" 機構設計用シミュレーション・システム（機構のトポロジカル解析）" ，

日本機械学会論文集（C編），Vol.52 , No. 484 , PP. 3214-3220 , 1986.
17) 黒岩他，″機構設計用シミュレーション・システム（機構の運動解析）″，
日本機械学会論文集（C編），Vol.53 , No. 486 , PP. 499-507 , 1986.
18) J.J.Uicker , " Dynamic Force Analysis of Spacial Linkages " , Trans. ASME J. of Applied Mechanics , Vol. 34 , No. 2 , PP.418-424 , 1967.
19) J.J.Uicker , " Dynamic Behavior of Spatial Linkages Part 1-Exact Equation of Motion " , Trans. ASME J. of Eng. for Industry , Vol. 91 , No. 1 , PP. 251-258 , 1969.
20) P.N.Sheth and J.J.Uicker , " A Generalized Symbolic Notation for Mechanisms " , Trans. ASME , J. of Eng. for Industry , Vol. 93 , No. 1 , PP. 102-112 , 1971.
21) P.N.Sheth and J.J.Uicker , " IMP(Integrated Mechanisms Program) , A Computer-Aided Design Analysis System for Mechanisms and Linkage " , Trans. ASME , J. of Eng. for Industry , Vol. 94 , No. 2 , PP.454-464 , 1972.
22) N.Orlandea , M.A.Chace , and D.A.Calahan , " A Sparsity-Oriented Approach to the Dynamic Analysis and Design of Mechanical Systems - Part 1 " , Trans. ASME , J.of Eng.for Industry , Vol. 99 , No. 3 , PP. 773-779 , 1977.
23) N.Orlandea , D.A.Calaham , and M.A.Chace , " A Sparsity-Oriented Approach to the Dynamic Analysis and Design of Mechanical Systems - Part 2 " , Trans. ASME , J.of Eng.for Industry , Vol. 99 , No. 3 , PP. 780-784 , 1977.
24) J.Y.S. Luh et al , " On-Line Computational Scheme for Mechanical Manipulators " , ASME Trans. , J. of Dyn. Sys. Mes. and Cont. Vol. 102 , No. 6 , PP. 69-76 , 1980.
25) J.M.Hollerbach, "A Recursive Lagrangian Formulation of Manipulator Dynamics and a Comparative Study of Dynamics Formulation Complexity " , IEEE , Trans. on Systems , Man , and Cybernetics , Vol. SMC-10 , No. 11 , PP. 730-736 , 1980.
26) M.Vukobratovic and V.Potknjak , " Contribution of Forming of Computer Methods for Automatic Modelling of Spatial Mechanisms Motions " , Mechanism and Machine Theory , Vol.14 , PP.179-188 , 1979.
27) R.C.Waters, " Mechanical Arm Control " , MIT Artificial Intelligence Lab. Memo. 549 , 1979.
28) R.P.Paul , "Robot Manipulators" , PP. 197-215 , The MIT Press , 1981.
29) C.S.G.Lee , B.H.Lee , and R.Nigam , " An Efficient Formulation of Robot Arm Dynamics for Control analysis and Manipulator Design " Center for Robotics and Integrated Manifacturing (CRIM) Tech. Report RSD-TR-8-82 , University of

Michigan , 1982.

30) Popov E.P. et al , " Design of Robot Control using Dynamic Mode of Manipulat Maniopulater Devices " , Proc. VI IFAC Symp. on Automatic Control in Space , Erevan , 1974.

31) M.Vukobratovic , " Synthesis of Functional Artificial Motion " , Mechanism and Machine Theory , Vol. 13 , No. 1 , PP. 41-56 , 1978.

32) V.Potknjak and M.Vukobratovic , " Two New Method for Computer Forming of Dynamic Equations of Active Mechanisms ", Mechanism and Machine Theory , Vol. 14 , NO.3 , PP. 189-200 , 1978.

33) ヴコブラトビッチ，加藤訳，" ロボットの手　一力学と運動一　" , PP. 93-98 , 日刊工業新聞社 , 1979.

34) V.Cvetkovic and M.Vukobratovic , " Computer-Oriented Algorithm for Modeling Active Spatial Mechanisms for Robotics Applications " , IEEE trans. Systems, Man,and Cybernetics , Vol.SMC-12 , No.6 , 1982.

35) M.Vukobratovic and V.Potknjak , " Scientific Fundamentals of Robotics 1 (Dynamics of Manipulation Robots) " , PP. 128-141 , Spring-Verlag , 1982.

36) M.Vukobratovic and V.Potknjak , " Scientific Fundamentals of Robotics 6 (Applied Dynamics and CAD of Manipulation Robots) " , PP. 142-149 , Springer-Verlag , 1985.

37) E.A.Desloge , " Classical Mechanics " , PP. 720-732 , A Wiley-Interscience Publication , 1982.

38) J.Denavit and R.S.Hartenberg , " A Kinematic Notation for Lower Pair Mechanisms Baced on Matrices , Trans. ASME , J. of Applied Mechanics , Vol. 22 , No. 2 , PP.215-221 , 1955.

39) C.S.Lee , "Robot Arm Kinematics, Dynamics and Control" , Computer , December , PP. 62-82 , 1982.

40) M.Takano , " A New Effective Solution for Inverse Kinematics Problem (Synthesis) of a robot with Any Type of Configuration , J. of the Fac. of Eng. , The Univ. of Tokyo(B) , Vol. 38 , No.2 , PP. 107-135 , 1985.

41) 山内他，" 電子計算機のための数値計算法Ｉ" , PP. 128-137 , 培風館，1965.

42) 例えば，E,J,Givens and J.C.Wolford,"Dynamic Characteristics of Spatial Mechanisms" , ASME Trans. Eng. for Industry , Vol.91 , No.2 , PP. 228-234 , 1969.

43) M.Vukobratovic and V.Potknjak , " Scientific Fundamentals of Robotics 1 (Dynamics of Manipulation Robots) " , PP. 141-148 , Spring-Verlag , 1982.

44) 宮崎他，" 拘束条件付きの力学系に関する一考察" , 第８回制御理論シンポジウム

（前刷） PP. 127-130 , 1979.

45) D.A.Smith , " Reaction Force Analysis in Generalized Machine Systems " , Trans. ASME , J. of Eng. for Industry , Vol. 95 , No. 2 , PP. 617-623, 1973.

46) D.A.Smith , M.A.Chace , and A.c.Rubens , " The Automatic Generation of a Mathmatical Model for Machinery Systems " , Trans. ASME , J. of Eng. for Industry , Vol. 95 , No. 2 , PP. 629-635 , 1973.

47) J.Y.S.Luh and Y.E.Zheng , " Computation of Input Generalized Force for Robots with Closed Kinematic Chain Mechanisms " , IEEE Trans. J of Robots and Automation , Vol. RA-1 , No.2 , PP. 95-103 , 1985.

48) C.Wampler, et al , " Formulation of Equation of Motion for Systems Subject to Constraints " , Trans. ASME , J. of Applied Mechanics , Vol. 52 , No. 2 , PP. 465-470 , 1985.

49) 成清他，" 拘束条件付力学系の一解法" ，計測自動制御学会論文集，Vol. 18 , No. 4 , PP. 371-376 , 1982.

50) H.Hemami and B.F.Wyman , " Modeling and Control of Constrained Dynamic Systems with Application to Biped Locomotion in Flontal Plane " , IEEE Trans. on Automatic Control , Vol. AC-24 , No.4 , PP. 526-535 , 1979.

51) D.E.Orin and S.Y.Oh , " Control of Force Distribution in Robotic Mechanisms Containing Closed Kinematic Chain " , ASME Trans. J. of Dynamical System , Measurement, and Control, Vol.102 , No. 3 , PP. 134-141 , June 1981.

52) Yu.Stepanenko and M.Vukobratovic , " Dynamics of Articulated Open-chain Active Mechanisms " , Mathematical Biosciences , Vol.28 , PP.137-170 , 1776.

53) M．ブコブラトビッチ，加藤・山下訳，" 歩行ロボットと人工の足" , PP.29-30 , 日刊工業新聞社，1976.

54) J.Y.L.Ho , " Direct Path Method for Flexible Multibody Spacecraft Dynamics " , J. Spacecraft , Vol. 14 , No. 2 , PP. 102-110 , 1977.

55) 例えば坂和他，" 3自由度フレキシブルマニピュレータのモデリングと加速度センサを用いた振動制御" ，日本ロボット学会誌，Vol.6 , No.1 , PP.42-51 , 1988.

56) M.Vukobratovic and V.Potknjak , " Scientific Fundamentals of Robotics 6 (Applied Dynamics and CAD of Manipulation Robots) " , PP. 150-177 , Springer-Verlag , 1985.

57) H.Springer et al , " Equation of Motion for Manipulators Including Dynamic Effects of Active Mechanism " , IFAC Robot Control , PP.425-430 , 1985.

58) J.Y.S.Luh , "Conventional Controller Design for Industrial Robots - A Tutrial" , IEEE Trans. on Systems, Man, and Cybernetics , Vol. SMC-13 ,

No. 3, , PP. 298-316 , 1983.

59) 浅田，“ダイレクト・ドライブロボットの開発とその制御性能の評価”，計測自動制御学会論文集，Vol. 19 , No. 1 , PP. 77-84 , 1983.

60) 山田，中川，”機械的な振動特性を考慮したサーボモータ系の位置決め制御”，計測自動制御学会論文集，Vol. 18 , No. 1 , PP. 84-91 , 1979.

61) W. Sunada and S. Dubowsky , ” On the Dynamic Analysis and Behavior of Industrial Robotic Manipulators with Elastic Members ” , Trans. ASME J. of Mechanisms,Transmissions, and Automation in Design , Vol. 105 , No. 3 , PP. 42-51 , 1983.

62) P.C. Hughes , ” Dynamics of a Chain of Flexible Bodies ” , J. of the Astronautical Science , Vol. 27 , No. 4 , PP. 359-380 , 1979.

63) R.P.Judd and D.R.Falkenbug , ” Dynamics of Nonrigid Articulated Robot Linkages ” , IEEE Trens. on Automatic Control , Vol. AC-30 , No. 5 , PP. 499-502 , 1985.

64) 三好，″有限要素法によるロボットの動力学解析″，精密機械，Vol. 51 , No. 11 , PP. 2020-2027 , 1985.

65) 井上，”ソフトウェアサーボによるロボットの制御”，日本機械学会誌，Vol.81 , No. 713 , PP. 387-393 , 1978.

66) 板生，神崎，”ポリダインカムによるタイプヘッドの高速位置決め”，精密機械，Vol. 37 , No. 3 , PP. 204-211 , 1971.

67) F.Miyazaki et al , ”Extension of Learning Control Scheme to a Class of Robot Systems with Elasiticy ” , 1-st Japan-U.S.A. Symposium on Flexible Automation(Preprint) , 1986.

68) 川崎他，″マニピュレータにおけるモータ駆動トルクの計算法と軌道制御法″，精密機械，Vol.51 , No.5 , PP. 977-983 , 1985.

69) 増田隆広，萩原史朗，二川暁美，有本卓，宮崎文夫，”対話形汎用ロボットシミュレーションシステムの開発（第１報）”，第26回自動制御連合講演会予稿集，PP. 263-264 , 1983.

70) 増田隆広，二川暁美，有本卓，″ロボットアームの逆変換の数値解法″，第 2回日本ロボット学会学術講演会（前刷），PP. 187-188 , 1984.

71) 増田隆広，二川暁美，武田宗久，有本卓，”ロボットアームの軽量化可能性に関する一考察”，第 3回日本ロボット学会学術講演会（前刷），PP. 83-86 , 1985.

72) 増田隆広，小崎左智子，二川暁美，有本卓，″ロボットダイナミックスシミュレータの開発″，昭和61年度精密工学会春季大会学術講演会論文集（前刷），PP. 547-550 , 1986.

73) 増田隆広，二川暁美，有本卓，宮崎文夫，”関節座標上の拘束条件付き力学系の解析

とその応用″，第 4回日本ロボット学会学術講演会（前刷），PP. 39-40 ，1985.
74) 増田隆広，二川暁美，苗村康次，有本卓，”ロボットの関節摩擦力に関する一考察″ ＳＩＣＥ関西支部シンポジウム（前刷），PP. 117-120 ，1987.
75) 増田隆広，二川暁美，有本卓，宮崎文夫，”ロボットのダイナミックス解析法としてのアッペル法の評価″，第 5回ロボット学会学術講演会（前刷），PP. 413-414 ，1987.
76) 増田隆広，二川暁美，苗村康次，有本卓，”ロボットアームの動力学特性に及ぼす駆動モータの回転の効果″，第31回自動制御連合講演会（前刷），PP. 341-344 ，1988.
77) 増田隆広，青木良明，西村隆朗，寺内常雄，今泉武男，志賀康宣，″ムーブマスターＥＸ（ＲＶ－Ｍ１）の開発シミュレーション″，第 6回ロボット学会学術講演会（前刷），PP. 415-418 ，1988.

関係論文

1) 増田隆広，萩原史朗，”ロボットアームの逆変換とダイナミックスの数値解法”，日本ロボット学会誌，Vol. 2 , No. 4 , PP. 359-364 ,1984.

2) 増田隆広，二川暁美，古賀英士，井上健二，”シミュレーション解析によるロボットアームの振動に関するパラメータスタディ”，日本ロボット学会誌，Vol. 3 , No.3 , PP. 197-205 , 1985.

3) 増田隆広，二川暁美，有本卓，宮崎文夫，”アッペル法による閉ループ力学系の運動解析”，日本ロボット学会誌，Vol. 4 , No. 1 , PP. 9-15 , 1986.

4) Takahiro Masuda and Shiro Hagihara , ' Numerical Solution of Robot Arm Inverse Kinematics and Dynamics ' , Advanced Robotics , Vol. 1 , No.1 , PP. 21-31 , 1986.

5) Takahiro Masuda , Akemi Futakawa , and Suguru Arimoto , ' Dynamics Compensation Control and Trajectory Generation of Robot Considering Driving and Transmission System ' , Japan-U.S.A. Symposium on Flexible Automation , PP. 179-184 , Osaka , Japan , 1986.

6) Takahiro Masuda , Akemi Futakawa , Eiji Koga and Kenji Inoue , ' A parametric study of robot arm vibration by simulation analysis ' , Advanced Robotics , Vol. 1 , No.4 , PP. 325-342 , 1986.

7) Takahiro Masuda , Akemi Futakawa , Suguru Arimoto and Fumio Miyazaki , ' Analysis of Dynamical Linkage Systems with Constraints in Joint Space and its Applications ' , ASME PAP 87-WA/DSC-24 , 1987.

8) Takahiro Masuda , Akemi Futakawa , Suguru Arimoto and Fumio Miyazaki , ' Closed-loop dynamics analysis by Appel's method ' , Advanced Robotics, Vol.2 , No.3, PP. 227-240, 1987.