OUKA
The University of Osaka
Institutional Knowledge Archive

Title	日本の中等教育における統計的モデリングを志向した実践研究
Author(s)	河﨑, 哲嗣; 稲葉, 芳成; 紀平, 武宏 他
Citation	大阪大学教育学年報. 2013, 18, p. 3-19
Version Type	VoR
URL	https://doi.org/10.18910/24314
rights	
Note	

The University of Osaka Institutional Knowledge Archive : OUKA

https://ir.library.osaka-u.ac.jp/

The University of Osaka

日本の中等教育における統計的モデリングを志向した実践研究

河 﨑 哲 嗣　稲 葉 芳 成　紀 平 武 宏　前 迫 孝 憲

要旨

2012年 4 月から先行実施された高等学校数学科及び理科の新学習指導要領では，キーワードの 1 つである「数学的活動」が，教育目標から教育内容の扱いへ変更された。現在では「数学化」「数学的実験」「問題解決」「数学活用」などの概念的に類似した用語も教育界に浸透しつつある。しかし，それらの用語の大意や使用される場面に大きな差は見られない。本稿ではそれらの用語を統一する概念として，国際的に既に体系化された「数学的モデリング」の観点に立ち，高校 1 年生全員に対する学習が必修となった統計教育の在り方を検討することにする。一方，現状として統計分野の効果的な教育実践については，学校の先生が教育現場での指導経験が乏しく，また学んだこともないという障壁も危惧されるところである。そこで新学習指導要領の実施に先立って，旧学習指導要領の下で扱われた内容も含んだ「単元：データの分析」について教育実践を行った。それらは「数学的活動」かつ「統計的モデリング」の実践事例でもあり，今後の中等教育と大学教育の接続や教育の国際性を意識した教材開発の方向を示すものとなろう。

1. はじめに　―研究の背景と問題の所在：教育現場に於ける「数学的活動」をめぐる状況―

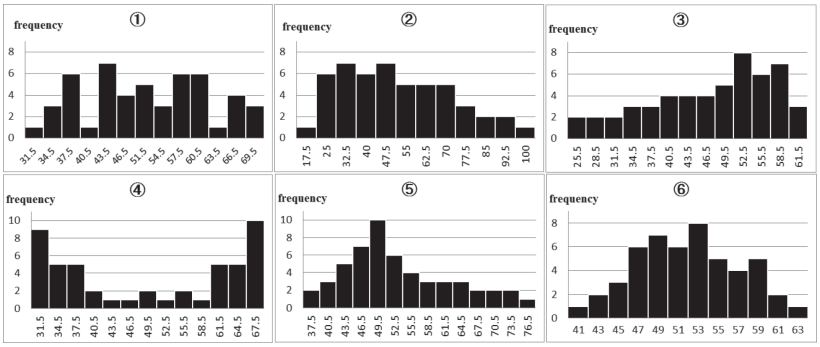
昨今のコンピュータ等の教育情報機器の性能やツールの目覚ましい発達により，複雑な数式・数量・図形に対しての計算処理や作図表現が，豊かでかつ簡便になった。このことは先生の学習指導のやり方が「解法の技法」だけを教え込む立場から，生徒達とともに現実事象をどのように解明・表現したら良いかを考える学習活動に展開する立場へと，拡張・転換する機会をもたらした。激しく変容する現代社会において充実した生活を過ごして賢く生きていくためには，身の回りの現象を的確に分析し課題を達成する創造性や主体性が必要となる。またそれらの素養を持った児童・生徒を育成するカリキュラムや環境は，発達段階にある彼らに対して早期から学校教育に導入すべき学習活動である。換言すれば，先生が天下り的に与える数学概念や問題を児童・生徒がステレオティピカルに理解する従来の教育方法とともに，児童・生徒が主体的に現実事象を数学で表現して解決する活動も重要なのである。

日本学術会議統計学研究連絡委員会の提言（2005，pp.2）では「21世紀の知識創造社会創出のためには，“知恵”，生きていく知識を活用し，知識の体系化に高める中で問題解決能力・課題探求能力に富んだ国民を育成することが重要であり，統計教育はその基盤を与えるものである.」としている。

したがって小学校や中学校では，問題解決型あるいは課題探究型の教育観点がこれまでも採用され，一部は実践されてきていた。しかし，高等学校・大学の教育現場や児童・生徒の課題への取り組み方に，その成果としての形跡が充分に見られない。その原因については，例えば小学校では，算数の授業において算数を

扱わない問題解決学習へと変貌して，児童同士の議論・発表だけの場に留まる場合，教科担任制となる中学校では，数学的活動の体現の方策に試行錯誤を繰り返すだけで「課題学習」の目標さえも充分に達成できない場合が多い。高等学校においても「数学（算数）的活動」や「課題学習」を採り入れようとしても，当然同様な現象が起こるであろう。それはこうした「数学的活動」や「課題学習」の実践していくためには，指導する側の知識の豊富さや教科指導の力量，授業の準備に対する多大な労力と時間がこれまでになく必要となったことである。先生達が今まで経験したことのない新たな授業内容の開拓や方法へ転換が困難であるだけでなく，教科横断的な内容を含む必要性が生じたり，必ずしも一意的で理想的な解が定まらなくても良いオープンエンド的な課題も扱えるようになったりと多様である。つまり学校の先生自身にとっては，教室内での方法論を大きく転換しなければならない場面が訪れたのである。そうして，それは学校の先生を学校現場に送り出している大学教育にも関係する。現在は「数学（算数）的活動」や「課題学習」を扱う数学講義を行っている大学が少ないため，数学教育的位置づけを知らない，またはそれを経験したことのない先生が多く，課題の設定から授業の組み立て方まで戸惑う姿が存在する。すなわち先生の時点で既に，教員養成の段階から「経験がない」「知らない」ということが障壁となっている。そして，学校現場からの需要とする教育の質や力量に対して，それらの担保となる先生の能力や環境が追いついていない現状がある。さらには，学習指導要領の改訂による教育内容や教育方法の変化に対して，教育現場の危機感や使命感は極めて希薄である傾向が強い。これは，現在の数学教育の方法論や意味づけが検定教科書をベースに柔軟性がなく，従来の固定観念から脱却できないという背景や，学校の先生達が校務の多忙な状況が進行し，充分な教材研究の時間と場所が確保できていないことも要因として大いに考えられる。

図１は，新学習指導要領の発表以降，統計分野を指導するだろう先生達が，果たして記述統計における各数値とヒストグラムの形状を十分理解しているのかどうかの認識調査の問題である。問題の解き方は，全ての中央値が等しいことが前提であり，その値と平均値との関係，散らばりとヒストグラムの範囲との関係の条件を少しずつ狭めて，試行錯誤しながらヒストグラムのモデルを決定していくのである。この作業は一種の統計的モデリングとも言える。



Data group	Average	Median	Standard deviation	Histogram No.
A	50	50	10	
B	50	50	15	
C	53	50	10	
D	53	50	20	
E	47	50	10	
F	50	50	5	

図１　要約統計量の問題　cf. Meletiou & Lee（2003）

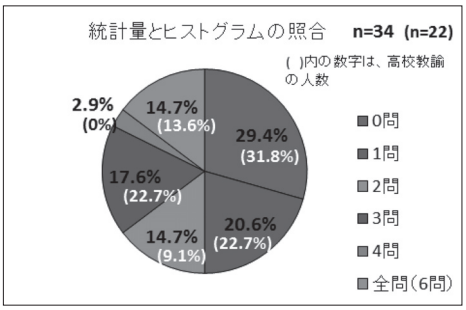


図２　要約統計量の認識調査の結果

図２は，その問題を高等学校の現職，社会人を対象に2011年に実施した調査の結果（河崎ら 2012）である。高等学校の先生からの解答は22名であったが，いま仮に４問正答が最低知識の合格基準とするならば，その達成率は13.6%であった。「高等学校の先生は，統計用語や数学理論を良く理解している」という解釈は，彼らの８割以上が既に統計量データの認識とそのデータから作り上げるモデル（分布やグラフのイメージ）とを結びつけることができない状況にあるということである。つまり今のほとんどの高校数学の先生達は，１人で考えて統計的モデリングを達成させることはできないのである。このことは，彼らから指導を受けて学ぶ生徒達自身の統計に対する見方や考え方に当然大きく影響してくるであろう。

このような背景や問題点から，新学習指導要領による統計分野の実施を直前にして，これからの授業で起こりうる課題を取り上げながら，いち早く対処をすることを目的に，教育実践を行ってきた。また，それらは将来的な展望も抱いた教材作りも目指している。このことが，学校で算数・数学を教える先生方への提言と励ましになって，より良い統計分野の内容の教材化の取り組みに役立ててもらうことを望んでいる。本稿では，そのような観点に立ち，統計分野におけるモデリングを志向して教育内容とその方法の実践を踏まえた上で考察する。

2. 数学的モデリングの一般論　―数学的モデリングとは―

「数学的モデリング」とは，日常生活や科学における現実事象（現実世界の問題）を，方程式・関数・統計というような内容を有した「数学モデル」を用いて近似（疑似）表現をするものであり，さらにその数学的な内容を含むモデルを通じてそれらの問題を数学的に解決する活動のことである。現実事象に類似するレベルは，児童・生徒の発達段階によって要求する正確性は様々である。

柳本（2011，pp.15-16）はこの数学的モデリングを「最初は詳細な要因は捨象し，主要な要因についてのみ取り上げ，定数や変数で数値化するなどして数学の問題となるようにし，数学モデルをつくる。そして，方程式や関数などの数学的処理による結果（解）に到達し，その結果をもとの問題に当てはめて妥当なものかどうか検討する。それが不充分であるとすれば，加味する要因は何か，修正すべき要因は何かを考え，修正した数学モデルをつくり，そのモデルによる結果について再び検証する。」としている。

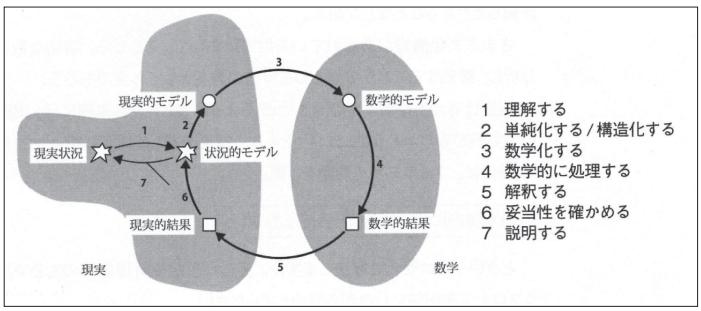


図３　BlumとLeissの数学的モデリングのサイクル（2005）

図３の数学的モデリングのサイクルの説明をすれば，現実的な問題場面（現実状況）において，どのような状況であるかを把握するために粗モデル（状況的モデル）を作る。このモデルは，児童・生徒の知識・経験・状況理解度によっては不要となる。そして，どのような条件が作用し，どのような条件設定が必要かを数理的な分析・整理をして，要因を抽出した上で現実的モデルを作成する。次に数学化（方程式や作図等）を行い，数学的モデルを作成する。さらに，数学的な処理を行い数学的な結果を出して，解釈をして現実的結果を求める。その結果を現実状況に翻訳・検証して合わないならば，さらに条件整理をやり直して，数学的モデルの改善を行う。このようなサイクルを繰り返すのである。モデルの整合性を調べるためには，方程式や不等式を解くことやコンピュータによるシミュレーションによって検証をすれば良いのである。

ここで若干注意すべきは，このプロセスを生徒１人で考えさせることに無理な授業場面が多いことであり，グループ活動や集団討論を利用するなど工夫を加えることも必要である。また他方で生徒が自立して考えられるまで教師のサポートも最小限に留めるべきである。天下り的に教え込む指導の立場よりも支援者としての立場であることが必要である。

3. 数学的リテラシーから見た数学的モデリング

OECD-PISA2003年調査の評価の枠組みで，児童・生徒に必要な能力として「数学的リテラシー」という概念が用いられて以来，数学教育の分野で，数学的リテラシーに関する議論が盛んになったとも言える。ここでいう数学的リテラシーとは，「数学が世界で果たす役割を見つけ，理解し，現在及び将来の個人の生活，職業生活，友人や家族や親族との社会生活，建設的で関心を持った思慮深い市民としての生活において確実な数学的根拠に基づき判断を行い，数学に携わる能力」（国立教育政策研究所 2004，pp.16）を指すものとする。他方では「数学化サイクル」の定式化を持つものでもある。

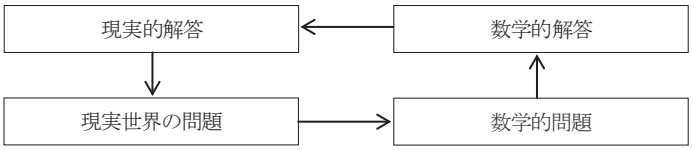


図４　数学化サイクル

さらに「統計的リテラシー」という場合には，統計教育国際連合に於けるInternational Statistical Literacy Projectから引用する。それについてはwebページに詳しいが，一例として中華人民共和国教育部の義務制の標準的教育課程に示されたものを紹介する（J. Li 2004, pp.221）。

“Three components of statistical literacy [are]
1. Familiarity with using statistical thinking to deal with problems containing data.
2. Appreciating the role statistics plays in decision making by going through the process of collecting, displaying, analyzing data, and making reasonable decisions.
3. Being able to critically read data resources, data analyses, and summarized information.”

すなわち，データを含む問題の取り扱いについて統計的な思考に通じると共に，批判的に読む態度が含ま

れているのが特徴である。そのような意味においては「リテラシー」という言葉が「識字」という古典的な意味を超えたものとして用いられていることに留意する必要がある。さらにこのことを具体的に高校数学における統計教育の中で顧みるならば，「教科書的な概念理解とデータ処理の手法に通じること，即ち，主には記述統計についての正確な理解と計算手法などの習熟」については一定の具体化が考えられる。しかも，過去の統計教育を含む数学教育の中で行われてきた講義・演習形式でも，成果が期待できる部分である。しかし「統計的にデータを処理することにより，そのデータの特徴を捉え，様々な判断や意志決定に役立てること」や「与えられた統計データやその分析結果について批判的な検討の目を養うこと」については，学校で使用する教科書の内容程度の理解力では不充分な場面が多い。巷には「統計グラフの錯覚を用いた嘘」が数多く見られることなど，この部分での「統計的リテラシー」の育成は，個別のケーススタディ及び，統計全般の基本的な見地を育成する地道な努力を必要とするだろう。

こうした中で，統計的モデリングは，先の数学化サイクルのひとつの具体化であり，現実社会の中から抽出されたデータを分析･特徴付ける場面での，数学化と現実化のプロセスであることから，数学的リテラシーの獲得に貢献しうる方法である。さらにはその評価についてもPISA2003年調査では，学力レベルを６つの段階に分けている。例えば，「レベル１」が「情報がすべて与えられ，問いも明確な見慣れた場面で，問いに答えることができる」というものから，最高位の「レベル６」では「複雑な問題場面において，探究やモデル化を基に，情報を概念化し一般化し利用できる」とある。とりわけ「レベル４」で「複雑だが具体的な場面で，明示されたモデルを効果的に使うことができる」，「レベル５」で「複雑な場面でモデルを発展させ使うことができる」と規定されていることから，数学的モデリングが果たす役割は特にレベルの中程度以上において重要である。

4. 統計教育とモデリング

統計分野でのモデリングについては，よく確率分布の例が挙げられる。しかし，そもそもデータ解析そのものが，データの有り様の集団的モデルとしての特徴づけをするという側面を持つ。それは確率分布が回帰直線や相関係数のような図形的あるいは定量的なもので特徴づけをすることを含んでいる。それ故に統計学そのものが，モデリングを意識するものなのかに拘わらず，それ無しでは成り立たないものである。ところがこれまで統計教育の分野では，「数学的活動」や「数学的モデリング」といった視点は前面に出されずに進められて来た。与えられたデータ，若しくは観測して集積したデータを分析しようとする場合の多くのデータは，ある集団の中の一部についての，ある特徴を持った数的あるいは質的なデータの集まりである。しかもそのデータを分析するということは，それらを数学モデル（統計モデル）としてのよく知られた確率分布などに当てはめることによって，そのデータの特徴を分析し，さらにはその基となった集団の特徴までも推測・分析しようとする態度なのである。

そして，この場合の「統計モデル」は久保 (2012，pp.2) を参照すれば，「①観察によってデータ化された現象を説明するために作られるものであり，②その形式として確率分布という表現手段を用い，③モデルとデータとを対応する手つづきが準備されている」ものとして捉えることができる。

一例を挙げれば，全校生徒を母集団としての標本調査としての身長データを解析する場合がある。ここでのデータ（標本データ）を表現するものは，正規分布という統計モデルであり，そのモデルに固有な性質から

母集団の平均値などのデータの諸性質を推定する方法が確立されている。統計分野は勿論データから出発する数学の分野のひとつであるが，データから知識を得る方策などについては，例えば「データ」→「情報」→「知識」→「知恵」というピラミッド型階層的構造DIKW（Data-Information-Knowledge-Wisdom）モデル（Bellingerら2004）などが当てはまる分野でもある。これはデータという意味を持たない（見かけ上）数値群から出発してその理解の結果が知恵であるというものである。

このような観点から統計的モデリングを志向する場合に，必然的に必要となる教育内容が考えられるが，中等教育の場面では次のような事柄が考えられる。

(1) データを集積する方法やマナー
(2) 集積したデータを図や表など視覚的に表現する方法やマナー
(3) 集積したデータの特徴を量的に表現する方法やマナー
(4) 統計モデルとなるいくつかの確率分布の性質の理解
(5) 集積したデータと確率分布とのフィッティングとデータの解析

そして，確率分布におけるモデルは，正規分布，二項分布，ポアソン分布が教科書の扱いとして妥当であろう。

さらに，高校数学での統計教育の内容として，統計的モデリングを目指した場合に必要な記述統計の項目は，検定教科書の文中の太字で示されたものを取り出してみると次のようになる。

データ、変量、階級、階級の幅、階級値、度数、度数分布、度数分布表、相対度数、代表値、平均値、中央値（メジアン）、最頻値（モード）、第１四分位数、第２四分位数、第３四分位数、四分位数、箱ひげ図、範囲（レンジ）、四分位範囲、四分位偏差、偏差、分散、標準偏差、散布図、正の相関、負の相関、共分散、相関係数、仮平均、はずれ値、基準化（標準化）、偏差値

図５　高校の教科書に太字で記載された記述統計の項目一覧

これらの記述統計の中に，歪度や尖度といった分布の形状に関する統計量は含まれていない。中等教育レベルの記述統計としては充分な項目であると首肯できる。したがって，指導されるべき項目に大きな変更は必要無いが，モデリングを意識した場合は，

① データの数と質の両面をしっかり見極めた上で，数値のもつ集団としての特徴を量的に把握させる
② 集団の量的特徴の把握と共に，その集団の「散らばり」を意識させる
③ データの散らばりの特徴を視覚的に把握し，その背景となる統計モデルを意識させる

ことが重要である。また，統計的モデリングを視座に置くことで，次のような教育的効果を期待できる。

（ｉ）データの集団的特徴付けの意識から，記述統計を単なるデータからの代表値などの統計量の導出に終わらせることなく，グラフの見方などモデルと統計量の関係を捉える視点を育くむ。
（ii）集団的なものの見方から確率分布などの数学モデルの性質を利用した推測統計への理解が容易となる。

続いてこれらの統計量とグラフや表の学習をした後で，データ解析の手法としての統計的モデリングの基礎的な知識を与えるとしよう。例えば「散らばり」を意識させる場面での一例を示すならば，歪度を考慮しない前提で，平均値かあるいは分散が等しいからデータの分布が等しくなるとは限らない。また，計算した統計量１個でデータ自体を全て表しているとも限らない。

ゴンザレスら（2011）は,「数学科で，統計的ちらばり処理（統計表現），数学的ちらばり処理（数値計算）においてちらばりについて考えることを学び，それを前提に統計的問題解決を行えば，高校生であれば高校生らしい活動を行えるようになる.」としている。

これは推測統計（t検定, F検定等）や多変量解析などに繋がる統計的モデリングへの観点である。そして，この統計概念は学習者にしっかり指導すべき事柄でもある。データの散らばりの教育内容に，ドットプロットや幹葉図を使って描くヒストグラムと箱ひげ図とをまとめた教育内容にするなどの工夫も考えられる。「度数分布表」→「ヒストグラム」に時間を費やすために，リテラシー教育やモデリングのような学習活動に発展する内容まで辿り着けないことがあるかもしれない。背後にある現象の文脈の適否・整理する力が足りなければ，統計的モデリングやリテラシーは身につかない。統計表現や統計量の導出に時間を十分にかける必要があるのは，そのためである。

図６はドットプロットの作業から，ヒストグラム・箱ひげ図・度数分布表を効率的にまとめて一覧にする例である。３つのグラフが同一紙面に展開され，効果的な視覚によって分布の数量的な理解ができるのである。

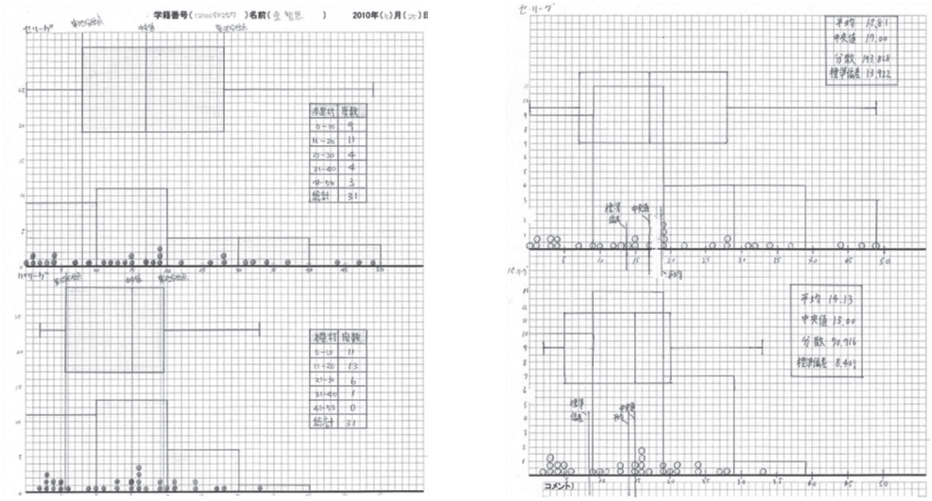


図６　学生のワークシート：ドットプロット図からの展開　cf. 二宮（2011）

5. モデリングを志向した実践授業　その１

統計教育の分野は長らく高校では選択科目での扱いが続き, 事実上の空白期間が続いていたと言って良い。例えば千葉県高等学校教育研究会数学部会研究委員会が行った平成23年度の大学入試センター試験に関するアンケートでは，数学Ⅱ・Bの選択科目の統計分野の問題選択状況について，有効回答数1400名強のうちわずか３名の選択者しかいなかったとの報告がなされている。こうした状況は，大学入試における２次試験の数学で統計分野を課されることが無いことが最も大きな理由として考えられる。

さて統計分野の重要性に鑑みて，統計的リテラシーの獲得を目標に掲げた地道な統計教育が現場で続けられている。その一部は，単純に「単元：ベクトル」を苦手とする文系生徒への代替授業の措置であったり，

先生の好みであったり,「総合的な学習」の時間を利用しての教科横断的な活動に発展させたりと様々である。ここでは，京都での高等学校と専門学校で行われた教育実践を示すことにする。

5－1．京都市M高等学校での実践

京都市のM高等学校では,「総合的な学習の時間」の取り組みとして2008年度から継続的に記述統計の内容を第２学年の進学系の生徒40名を対象として，チームティーチングの形式で２時間（50分×２），12回～14回，半期１単位の授業として提供してきている。例として2010年度の内容を表１に示す。

回	日付	内容	場所
1	４月20日	講義概要説明，シグマの記号，度数分布表と平均	普通教室
2	４月27日	平均値の性質，分散，標準偏差	普通教室
3	５月18日	平均値，度数分布表とヒストグラム	コンピュータ室
4	５月25日	変量の変換，偏差値	普通教室
5	６月１日	度数分布表とヒストグラム，分散，標準偏差	コンピュータ室
6	６月８日	分散，標準偏差，変量の変換	コンピュータ室
7	６月15日	共分散，相関係数	普通教室
8	６月29日	散布図，共分散，相関係数	コンピュータ室
9	７月６日	平均値，分散，標準偏差，相関係数，相関行列	コンピュータ室
10	９月７日	発表内容作成	コンピュータ室
11	９月14日	発表	コンピュータ室
12	９月28日	予備	普通教室

表１　2010年度前期指導計画

高校の統計分野の標準的な内容であって，今般の数学Ⅰ「データの分析」の内容とは，四分位数や四分位範囲や箱ひげ図を除けばほぼ合致している。特徴的なのは2008年という段階で，統計教育に積極的に取り組んできたこと自体がまず高い評価に値する。数学的な活動を意識し,生徒に積極的にデータに触れさせたり,それらの意味を考えさせたりという，統計リテラシーの獲得を意識した実践が為されてきたことが，従前の教科書の指導内容と異なる点である。勿論，当面の目標が統計的モデリングを設定して取り組まれてきたわけではない。しかし，授業展開の中で，単なる統計分野の計算と知識の獲得から一歩進んだ「統計的なものの見方や考え方の獲得」をねらいとしたところに大きな特徴がある。「総合的な学習」の時間の自由な取り組みとして，教科横断的な科目を扱おうとした意義が充分に反映されたと言ってよい。

例えば，記述統計において平均値は重要な概念ではあるけれども,「分布を考えない平均値」の取り扱い,あるいは「平均値がデータ分析のすべて」といった悪い慣習の克服は，最も重要な課題点の１つである。この課題の克服においても,データの散らばりを把握させるためにプロットに描かせて,分散や標準偏差といった平均値以外の統計量との組み合わせで比較させることによって，およその統計データの分布という感覚的なものをつかみ取らせることもできる。変量の変換によって，平均と標準偏差を求めるテーマでは，数学的な式変形も勿論重要である。しかし，データの分布の移動，変形といった説明を加えることで図形的理解を促し，変換の様子が大まかではあるが直観的に理解できる。さらに偏差値では，平均値と標準偏差を与えれば求まることによって，データの全体における位置の普遍性を分布の中心からどれだけ離れているかを理解させる。そこには理想的な正規分布というモデルを仮定しているが，高校生が理解できる統計モデルの導入

としては充分に意味のあることである。

さて，そのような指導方法を前提とした上で，具体的な授業の様子は，

(1) 変量変換の授業では変量の変換後の平均値や標準偏差をこちらがあらかじめ決めておく。

(2) それらの値を求めるためには，どのようにして変換すればよいかを考えさせる。

さらに，その他の内容の様子としては，

(3) データの数や値を増減して平均値を半分にする方法は，多くの生徒達は思いつく。

(4) しかし平均値と標準偏差を共にこちらが指定した値にする方法は，データをどのように変化させれば良いかは難しい。

また偏差値の内容を扱う授業の様子では，

(5) 平均点と標準偏差を与えた後，各自で偏差値を算出させる。そこで，偏差値が100点を超えることがありうるのか，あるいは負の数になることがありうるのか。その例も考えさせる。

そして授業全体の終盤には，それまでの学習内容を踏まえての課題学習とその発表が行われた。その扱う内容は，２つのデータ群の相関に関する内容についてである。ここではまず，生徒自身が興味を持って統計データを得ることができる項目を複数選ばせ，そしてその項目間にどのような相関が存在するかを検討させるというものである。データを分析する前に生徒達が抱く予想や思惑を「正の相関をもつデータ群」という結果を得たモデルになることを想定しながら，確かめていく活動を行うことになる。

5－2. 京都府宇治市R高等学校での実践

京都府の私学R高等学校では，学校設定科目である第３学年選択科目の「統計学：３単位」を設置している。設置してから既に十余年の歴史があり，人文科学・社会科学系の進路選択者を対象にして，毎年開講している。その授業内容は，前期が記述統計，後期が推測統計の基礎（正規分布の簡単な推定・検定）である。実際のデータを正規分布というモデルを通して分析していく課題を推測統計の授業内容に多く含んでいる。年を追って内容の改訂も行われているが，特に2012年度の授業では，統計的モデリングを志向して，考えさせる場面をできるだけ多く設定しようとしている。前期の授業内容では記述統計の基本的な概念把握を中心にしながら，統計的なものの見方・考え方に重点を置いた指導を心がけ，さらに数学的活動にも取り組ませた（表２）。

時間数(50分)	内容	場所
3	度数分布・ヒストグラム・ドットプロット，平均値	教室
3	メジアン，四分位偏差，箱ひげ図	教室
2	実習（Excel/Geogebra）	PC室
3	分散，標準偏差	教室
2	グラフの種類，見方	教室
3	演習，中間考査	教室
6	紙ヘリコプター実習	教室
5	散布図，共分散，相関係数，相関行列	教室
1	実習（Excel）	PC室
2	演習，期末考査	教室

表２　2012年度前期指導計画

このカリキュラムの特徴としては，記述統計としての数学Ⅰ「単元：データの分析」の内容を意識した。特に授業時間数が潤沢であるので，独自の題材「グラフの種類，グラフの見方・考え方」「ソフトウェアによる実習」「紙ヘリコプター実習」などを扱った。授業の狙いは，まず説明・例題・演習といった伝統的な授業の進め方をベースにしながらも，統計的な考えや発想は，中学校の学習の中で一定の素地があると考え，生徒達にじっくり考える時間を多くとった。例えば，データの相関を視覚的・体感的に考察・把握させるために，「平均値，中央値，分散・標準偏差」などをデータの分布の中から考えさせて，統計量を実感として捉えさせ，散布図もきちんと手書きで作らせた。

図７は，与えられた平均値と標準偏差に対応したヒストグラムと箱ひげ図を選ばせる問題である。この考査問題の正答率は約９割であった。さらに数学的活動あるいは課題研究的な内容として，実習を採り入れた。実習の内容はよく知られた「紙ヘリコプター実習」であり，紙でできた回転翼を持つ小片を複数個製作し，その落下時間を測定する。できるだけ標準偏差が小さくなるように，４人グループで考えながら改善していくというものである。ここでは観測されたデータが正規分布状の単峰性のモデルをもつものと仮定して，その上での散らばりの改善を考えさせるものである。誤差を生じる因子が，設計・製作・測定の過程でいくつも生じるので，その原因を考え，また改善させなければならない。

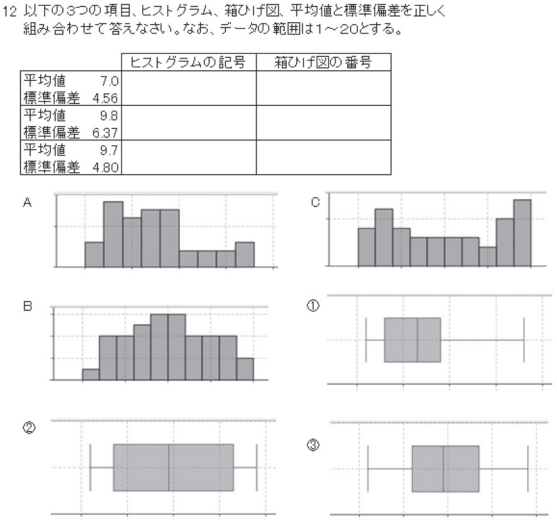


図７　要約統計量と統計表現に関する問題（前期中間考査問題）

一方で，学習した標準偏差を求めるために電卓を用いて計算させ，統計スキルの定着も同時に図ろうというものでもある。こうした標準偏差を利用した試行は本来，SQCなど品質管理の場面で多用されるものであるが，日常の教室の中でデータの分析と統計的モデリングを融合させる手軽に行える実習の一つである。この活動の中で生徒達は，最初のうちは戸惑いを隠せなかったが，指導者側のヒントを基にしながら，徐々に改善の方策を見つけ出した。生徒の中から３人の測定データを抽出し，代表値はデータの平均値が良いのかメジアンなのかを考えさせた。やがて落とす高さをいかにして揃えるかなど，その中にはいくつもの工夫が見られるようになった。実習の時間は考察も含めて６時間程で済ませたが，生徒の感想の中からは，「実際に測定したデータを工夫して改善していく過程が楽しかった。」などが見られた。特性要因図などの紹介も

加えたが，定期考査で標準偏差の計算に生徒の８割以上から正答を得た。それはこのような実習を経験させたことによって，生徒の知識・理解も向上したことを示している。

6　モデリングを志向した実践授業　その２

京都府のT高等学校（以降，T校とする）ではサイエンス・パートナーシップ・プロジェクト事業（以降，SPPとする）を活用して，2011年度に統計分野「データの分析」の先行研究を実施した（山本，勝間 他 2011)。ところがそれを支えるフィールドや実践研究が身近に必要となった。そのため，看護師・保健師を目指す専門学校生を対象とした京都府の看護系専門学校（以降,K校とする）での基礎研究･調査を実施した。数学Ⅰ「単元：データの分析」は，旧学習指導要領の「確率・統計」以来十数年ぶりの必修統計の復活と言える。しかし不幸にもこれからの高校数学を実践する柱となる30歳代前半までの先生は，自らの学生時代に統計学や統計教育を受けていない。さらに学校の年齢構成によっては，彼らが最年長となることもあり，統計概念・数学概念・統計教育の意義等の継承や研究を校内で行われない事態も起こりうる。

そのような状況では，先生が統計の意味を充分理解しないで生徒達を指導する場面も予想される。T校の統計教育に関するSPPは，京都府下の算数・数学教育界において初の事業となり，通常の授業に付加した取り組みとしての研究と実践を行った。その形式は,京都府の一つのモデルになるものと期待された。しかし，実践の経過でいくつか問題点も見えてきている。それは，

① 数学科の一部教員の研究から教科全体，学校全体の研究へと広がりが持てるのか（コンセンサス）
② 研究対象とする生徒達に，研究の意図を十分に理解させ，日常の学習に影響を与えないか（マネージメント）
③ 新たに教材開発をするために克服しなければならない教員の資質と能力が満たされているか（クォリティー）
④ 度々揺らぐ研究をしなければならない教員の意識と姿勢の維持ができるか（モティベーション）

というものである。それらに理解を示した上で共同研究をしなければならない。

一方，K校は看護師と保健師の両方の資格取得を目指した４年制の専門学校である。入学前から統計を学んでいない状況はT校と似ている。顕著に異なるのは調査の有効回答数69のうち，大卒・社会人が13（うち1980年旧課程４，2002年旧課程６，理系２）であることから，人生経験によって蓄えられた教養が豊富な点である。また高校時の履修科目から進学コースを判断すると，人数は理系17と文系52であり，やや高度な数学を学んでいる学生も存在している。また保健師資格取得のために，国家試験の疫学・保健統計において統計分野が出題されることや，統計の学習がその後の学生自身の人生に大きく関わることから，学習レディネスのレベルが非常に高いことも考慮に入れなければならない。

さて，授業実践の対象者はK校３年生（79名）で授業回数は７回（１回90分間)。50分単位での授業が中心の高校と成果を直接比較できないが，90分間の大半を作業や問題演習に配当している。また，授業①②と③の前半は中学校の履修内容である。授業内容では国家試験の出題傾向を参考にして，実用の中に数学理論を少しでも融合させる授業方法を採り入れた。講座人数分のパソコンが設置された部屋を使用できる環境であったが，今の高校の現状に近い状況になるために電卓を使用させた。ただし，関数電卓を学生に紹介し，14名が購入して確認テストでも普通の電卓と併用させることにした。

各回の授業（表３）の様子とその考察について述べる。

①は，データ全体の特徴を捉えるために，度数分布表やヒストグラムのような統計表現をさせた。それに

加えて，統計量を使ってデータを捉えることも必要とした。階級値を決定して平均値を求めるためには，階級幅を適度に調整する必要がある。調整してどのような変化が生じるか経験がなかった学生達に，実際にヒストグラムの階級幅を色々と変えさせた。そして，階級幅が分布の特徴の把握に差が出ることに気づかせた。その後，ヒストグラムの階級幅の決め方の１つの基準を示した。

②は，歪度については触れなかった。しかしヒストグラムが左右に歪んでいる場合は，代表値として中央値を選択させた。このときの平均値と中央値の大小関係やデータの代表値として，どちらが好ましいかも考えさせた。

③は，ドットプロットから箱ひげ図を描かせることに注意し，箱ひげ図とヒストグラムの対照比較をしながら散らばりについて意識させた。また，散らばりの統計量との両方で現実事象の問題を把握させた。

④は，度数分布表の穴埋め問題用に必要であったために，標準偏差の計算に，$\sqrt{(x^2\text{の平均値})-(x\text{の平均値})^2}$を用いた。

⑤は，数学理論に深入りせず，相関係数の算出方法を説明した。共分散のイメージ作りのために，③④と同じデータを用いた。①③の進め方と同様に，散布図から正負の相関の特徴を掴むことと統計量（相関係数）の両方で現実事象の問題を把握させた。

⑥は，手作業や電卓計算で行った学習内容を，表計算ソフトを用いて取り組ませた。回帰直線の算出や相関図の提示も行い，回帰直線の傾きと相関係数との違いについては詳細に説明しなかった。

次に，確認テストは電卓持ち込みを認め，全体の得点率は66.4%であった。度数分布表を使わずに算出す

回	テーマ	内容	回	テーマ	内容
① 5 / 9	平均だけでデータの全ての特徴は掴めない（ばらつきを判断尺度に加えよう） 度数分布とヒストグラム 度数分布多角形 ヒストグラムの形状	２つのデータのヒストグラムを見て，特徴の違いを直観で考える。 中心や広がりの傾向などの特徴を捉える。 階級幅を10点としてテストのデータのヒストグラムを作る。 ２峰性，左右に歪む分布の特徴	④ 6 / 6	標準偏差の求め方（その２） ・演習	２乗の平均，平均の２乗 度数分布表から求める
② 5 /16	データの傾向を捉える 分布の中心を捉える（代表値） ・演習	分布の中心・広がり・歪み 平均値･中央値･最頻値 例）中小企業の社員も所得 国家試験２題	⑤ 6 /13	２つの量的データの関係を捉える ・相関関係の方向と強さの判断 ・演習	①散布図（相関図）をかく ②相関係数を求める 例）売上高と広告費 ・売上高と値引率 ・木の太さと高さ ・呼吸数と脈拍数
③ 5 /30	分布の拡がりを捉える（ばらつき） ばらつきを表す統計量 標準偏差の求め方（その１） ・演習	平均値も中央値も等しい２つのデータを比較して，特徴を掴む方法を考える。 （手順）範囲→箱ひげ図→四分位範囲→分散・標準偏差 国家試験１題 整理されていない生データから求める。 度数分布表から求める	⑥ 6 /20	表計算ソフトによる処理 ・コンピュータ演習	国家試験１題
			⑦ 6 /27	確認テスト	

表３　実施内容　cf. 二宮（2000）

る問題を大問５題中３題とした。そのうち２題の結果（表４）が示すように，データの個体数が少なくても標準偏差や相関係数の統計量を求める作業に手間取っていた。関数電卓を利用すると，標準偏差や相関係数の統計量は,簡易な操作によって求めることができる。その利便性に気づいて関数電卓を使用するようになった学生達は，答えのみの解答記入で済ませた。しかし相関係数のついては，電卓機能の習熟に到達しておらず，正答に辿り着かない学生が多かった。また，四分位範囲に関する基本問題の正答率が平均53.6%と高くなかったことから，特に箱ひげ図の教材開発の必要性を感じる。

項目名	平均値	中央値	最頻値	標準偏差	散布図	相関係数
全体得点率	98.7%	80.5%	97.4%	57.1%	60.8%	63.4%
関数電卓有得点率(14名)	92.9%	85.7%	100.0%	64.3%	57.1%	53.4%
関数電卓無得点率(64名)	100.0%	79.4%	96.8%	55.6%	61.6%	65.6%

表４　テスト結果（一部抜粋）

7　統計的モデリングを含んだ授業実践の評価

数学的活動の一形態としての統計的モデリングの授業や教育内容に対する評価は，学力測定のための筆記テストによる評価ではなく，別の評価方法を考えなければならない。

その前にまず，統計分野の授業時間数について触れておかなければならない。新学習指導要領下での「単元：データの分析」は，あくまでも科目：数学Ⅰのひとつの分野である。数学Ⅰは１週間に３時間（50分単位），年間標準100時間程度の限られた時間数の中で授業を工夫して実施しなければならない。また数学Ⅰでは，４つの大きな単元（数と式・２次関数・図形と計量・データの分析）があり，別途他に課題学習の時間を確保しなければならず，新たに単元として加わった統計分野自体がどれほど重要なのか理解されていないこともある。実態としては，せいぜい10時間程度の授業での扱い程度と予想される。

つまりこの単元における学習評価は，他の単元と同様に知識・理解だけを評価対象にする恐れがある。記述統計だけに限っても，それを扱う授業時間数は充分であるとは言えない。前項の教育実践のような実習的な取り組みや，調べ学習，ディスカッションなどの取り組みとその評価は，限られた授業時間内に組み込みにくいであろう。統計分野において統計学という概念を理解することも不可欠なのである。どれだけ学力が向上したかどうかを測るペーパーテストによる成績での評価は重要な評価であるのは間違いない。

しかし統計的モデリングを志向した授業内容を実践した場合に，数値に表現しきれないデータ分布の様子や，統計的なものの見方・考え方，そして，データを扱う上での方法論などの評価については，記述あるいは論述で問えるだろうとしても，満足できる授業内容がこなせるとは限らない。それよりも，目標とする知識・理解に到達するだけの授業時間さえも足らなくなるのである。そこで，統計的モデリングの評価に関しては，実習した内容やその様子，課題レポートなどによって評価するようなことも必然的に起こりうるだろう。

その際に参考となるのは「パフォーマンス課題」と「パフォーマンス・アセスメント」である。パフォーマンス課題とは，学んだ知識やスキルを応用して実践したり表現したりすることを求めるような，複雑で総合的な課題のことであり（西岡 2008，pp.10-12），さらに，課題は必ずしも実技的なものである必要はなく，重要なのは，「評価したいと思っている能力ができるだけ直接あらわれる課題」であったり「知識や技能などを複合的に用いる課題」であるとされる。そしてそのパフォーマンス課題を基に評価するのが「パフォー

マンス･アセスメント」である。その際の評価の基準となるのは「ルーブリック」と呼ばれる尺度である。ルーブリックとは，ペーパーテストなどでは評価が難しい学力について，どのような力をどの場面で評価するのかをあらかじめ定めておくものであって，その到達レベルを設定した評価指標である。

記述統計における統計的モデリングの実践で考えると，パフォーマンス課題の一例は「ある母集団から抽出されたデータの特徴を表現する」といったある程度漠然としたものでも構わない。この課題に対して，生徒は記述統計の知識を駆使して，グラフ化したり，５数要約を求めたりといったモデリングに基づく考察を行うことになる。もちろんかなり学習の進んだ者は単なる数値計算だけでなく，分布を正規分布などに仮定して，母平均などの推定を行うかも知れない。先の教育実践でも，M高校やR高校では２つのデータ群に対する相関を意識したレポート課題を与えた。到達して欲しい評価レベルは，それぞれのデータの特徴を捉えると同時に，散布図や外れ値を除外して相関係数を算出するまでのレベルが身についているかであろう。残念ながら，生徒から提出された作品の中には，単純に直感的な相関の判断など，充分な成果を持ち得ていないものも多い。したがって出題する側が，課題に対してあらかじめ到達点レベル別に段階的に設定しておけば，それがルーブリックとなる。その評価は客観的というよりは主観的になることから，ルーブリックに基づく評価にあたっては，厳密性が求められる。場合によっては，１人で評価するのではなく，２人以上で相談しながら評価をすることも必要となる。このように，新たな評価法を加えることで，より豊かな評価活動が行われるだろう。さらに，評価される側になる児童・生徒達の授業へのモティベーションを向上させるものでもあろう。

さて，参考となる課題学習の方向性として，ニュージーランドの統計的課題探究のプロセスがある。そこでは，課題探究のプロセスをPPDAC（Problem→Plan→Data→Analysis→Conclusion）として表している。「国際的にみると，統計教育の方法は，昔の確率モデルを教えることから，現象の統計的モデリングの有用性を理解させ，その概念を理解させることに，その重点を移している。」（渡辺 2007，pp.45）と指摘されている。したがって，今後は統計的モデリングと結びつけての課題解決のプロセスが重要視され，さらにその活動が適当な評価の指標を用いて評価する教育内容を構築すべきであろう。

8　まとめと展望

中等教育段階における統計教育の中で「数学的活動」や「課題学習」を進める場合において，数学的リテラシーの獲得を目標にして，教育内容を豊かにする統計的モデリングの教育実践が有効であると考える。具体的には，パフォーマンス課題によるパフォーマンス・アセスメントの導入やニュージーランドにおけるPPDACサイクルの導入などが考えられる。そしてその評価方法についてはペーパーテストに加えての課題毎のルーブリックに基づく評価も求められる。しかもこのような評価方法の転換は，今まで慣れ親しんだ評価方法をベースにしていることから，準備をしながら徐々に付け加えて全体像を作っていくこともできる。教育現場の指導力量を高めながら，今後の統計教育の充実が図られるべきである。

本来児童・生徒達自らは，算数・数学の楽しみを発見し考えを深め，また新たな知見を生み出したり驚きを感じたりすることを持ち合わせている。また，自ら整理してときには友達と議論することもできる。このような特性や資質を奪ってしまわないためにも，数学の授業が，「数学の問題を解く」ことだけに終始してしまわないように工夫するべきであろう。これからの数学の学習に必要となるものは，天下り的な教師の教え込みだけではなく，教師と生徒と協同に議論しながら授業を作り上げていく活動的な内容を採り入れることである。「数学は自分で考えるもの」という自主性と放任主義とを同一視してしまい，「課題学習」として

取り組ませていれば，大きな間違いである。本稿では，数学的モデリングという観点で新しい学習指導要領に対応する授業改善の教育実践を行った。

そして小学校・中学校・高等学校・大学に共通していることは，教える側の意識が変わらなければ，児童・生徒・学生が，次の進学先・生活における学習や研究の場面においても，豊かな数学観への変容を求められないということである。今後，新学習指導要領による学校現場の変化・成果の動向には，急な展開も予想され，十分に注視し続ける必要があるだろう。

それは，現在の日本で国際的なスタンダードをめぐる動きが急展開を示そうとしているのである。国際バカロレア機構が行う国際的な大学入試資格については，文部科学省のwebページにおいてもその概要を知ることができる。グローバル30に認定されていた諸大学においては，グローバル人材の育成に向けて秋入学制度等についての検討が始まっている。当然，新しい教育の質（評価）についての研究も中等教育段階において始まっている。そして，国際水準となっているディプロマ認定校の数も増やしつつあり，今後の発展が見込まれるだろう。国際バカロレアで行われる国際的なスタンダードでの数学教育や統計教育の扱いは，数学的モデリングに含まれるような「課題発見・問題解決能力」や「論理的思考力」が必要であり，如何にして思考力・判断力・表現力等を育てて，評価していくかが大切であろう。

この国際水準となっているカリキュラムでは，Mathematics SL（standard level）の統計と確率の章を設け，標準30時間の授業時間数が配当されている。またMathematics HL（higher level）では，Coreと呼ばれる部分の統計と確率の章に40時間が配当されている。さらにOptionでは，選択としてさらに40時間も配当されている。もちろん，全ての学生がSLとHLの全てを履修するわけでは無いが，今の新学習指導要領の「単元：データの分析」に対して，たった数時間程度の授業で終わるものとは比べ様の無い分量である。このカリキュラムの導入をする際には，日本の伝統と風習に沿うように，中等教育での数学や他教科とを含む学校全体のカリキュラムのバランスも考慮して，教育内容の検討が必要であろう。しかしそのレベルの包括的内容は明らかに国際的な標準であり，国際化の波の中で今後の我が国の初等中等教育における数学教育（統計教育）が，さらに充実するように発展していくことが重要であろう。

9　参考・引用文献

- Bellinger. G, Castro. D, and Mills. A 2004 “Data, information, knowledge, and wisdom.” http://www.systems-thinking.org/dikw/dikw.htm
- ゴンザレス・オルランド，磯田正美　2011 「数学科における統計的リテラシー教育のための「ちらばり（ばらつき）」についての考え―海外におけるVariabilityの調査研究を手掛かりにして―」『科学教育研究』Vol. 35 No. 2, 139-152頁
- 河﨑哲嗣　2011 「学校数学（小学校から高等学校）を見渡す高大連携の数学教育―数学的モデリングに視座したカリキュラム―」. 第 9 回高大連携教育フォーラム報告集　第 3 部分科会Ⅱ，京都高大連携研究協議会（京都府教育委員会, 京都市教育委員会, 京都府私立中学高等学校連合会, 京都商工会議所, 財団法人大学コンソーシアム京都），平成23年，120-140頁
- 河﨑哲嗣　2011 「高等学校における単元「データの分析」に関わる基礎的研究―看護師・保健師を目指す専門学校生を対象とするカリキュラムからの考察―」『2011年度数学教育学会秋季例会発表論文集　数学教育学会誌臨時増刊』，129-131頁
- 河﨑哲嗣他　2012 「記述統計の重要性―研究会・講演会等から分かってきた実態―」『2012年度数学教育学会春季年会発表論文集　数学教育学会誌臨時増刊』，141-143頁
- 久保拓弥　2012 『データ解析のための統計モデリング入門　一般化線形モデル・階層ベイズモデル・MCMC』岩波書店
- 国立教育政策研究所　2004 『PISA2003 調査 評価の枠組み：OECD 生徒の学習到達度調査』ぎょうせい

- Li Jun 2004 “Statistics Education for Junior High Schools in China” Curricular Development in Statistics Education, Sweden, 2004, pp219-229
- 千葉県高等学校教育研究会数学部会研究委員会　2011 「平成23年度「大学入試センター試験（数学）」のアンケート調査結果について」『数学部会誌 α-ω』第49号
- 文部科学省　2011 『高等学校数学科用　文部科学省検定済教科書　数学Ⅰ』東京書籍
- 西岡加名恵　2008 『逆向き設計で確かな学力を保障する』明治図書
- 二宮智子他　2000 『文系の学生のためのExcelによる統計解析』弘学出版
- 二宮智子　2011 「これから始まる数学Ⅰにおけるデータ分析の授業実践」『2011年度数学教育学会秋季例会発表論文集　数学教育学会誌臨時増刊』, 123-125頁
- 日本学術会議統計学研究連絡委員会　2005 『知識創造社会に向けた統計教育の推進について』
- 柳本哲　2011 『数学的モデリング』明治図書出版
- 山本健司, 勝間典司他　2011 「高等学校におけるデータの分析を目指した数学的活動の実践研究―サイエンス・パートナーシップ・プロジェクト（SPP）事業を通して（その１）―」『2011年度数学教育学会秋季例会発表論文集　数学教育学会誌臨時増刊』, 120-122頁
- 渡辺美智子 「統計教育の新しい枠組み―新しい学習指導要領で求められているもの―」『数学教育学会誌』48（３・４）, 39-51頁, 2007.
- W. Blum/D. Liess 2005 “Modellieren im Unterricht mit ”Tanken” -Aufgabe“ mathematic lehren H. 128, Deutschland, 2005, pp. 18-21.

A Practical Study of Statistical Modeling in Secondary Education

KAWASAKI Tetsushi, INABA Yoshinari, KIHIRA Takehiro, MAESAKO Takanori

In the new government teaching guidelines for mathematics and science introduced in April 2012, the keyword, "mathematical activity" was changed from a category of educational goals to educational contents. At present, several conceptually similar technical terms are in use, such as "mathematization," "mathematical experiment," "problem solving," and "mathematics utilization." However, no great difference exists regarding the meaning and application of these terms. In this paper, using the well-known and systematized term "mathematical modeling" to unify all the previous terms, we describe the study of statistics, which has become a compulsory course in the new curriculum. We anticipate that difficulties will arise in effectively implementing the statistics classes because of the lack of experience in many schools. Therefore, we propose introducing tentative lessons from previously taught "data analysis" courses, which are also examples of "mathematical activity" and "statistical modeling." Furthermore, these lessons could become a proposal for the development of teaching materials in cooperation with high schools and colleges.