【25】

氏名・(本籍)	杉谷貞男（すぎ たに さだ お）
学位の種類	理学博士
学位記番号	第 5118 号
学位授与の日付	昭和55年12月19日
学位授与の要件	学位規則第5条第2項該当
学位論文題目	**ペロンーフロベニウス根が1の分解可能なゴルトンーワトソン過程の極限分布について**
論文審査委員	(主査) 教授 渡辺 毅 (副査) 教授 池田 信行 教授 石井 恵一 教授 福島 正俊 助教授 中尾慎太郎

論文内容の要旨

$\mathbf{Z}(n)=(Z_i(n))_{1\leq i\leq d}$ をd 個のタイプより成るゴルトンーワトソン過程とする。これらのタイプを同値類$\{C_\alpha\}_{1\leq\alpha\leq N}$に分けてその間に半順序を入れる。各同値類は臨界的，劣臨界的，最終的のいずれかに分類される。

本論文においては，臨界的あるいは最終的クラスが少くとも1つ存在する場合に，$\mathbf{Z}(n)$の極限問題を考える。筆者は，$\mathbf{Z}(n)$を各クラス毎に適当に正規化することにより，正規化された過程が分布収束することを示し，さらに極限分布の特徴づけに成功した。本論文より以前に小倉〔5〕は最終類が存在しない場合に，$\{n^{-1}\mathbf{Z}(n)\mid\mathbf{Z}(n)\neq\mathbf{O}\}$が分布収束することを証明している。またFoster-Ney[2]は，同値類が全順序になっているという仮定のもとで，(1)全てのC_αが臨界的な場合，(2)C_Nは1ータイプの最終類，他のC_αは全て臨界的な場合，にはクラス毎に適当な正規化を行うことによる極限分布の存在を示した。更に極限分布のラプラス変換をある偏微分方程式の解として特徴づけた。彼らは一般のゴルトンーワトソン過程に対しても同様な結果が得られると予想したが，本論文の結果は彼らの予想を完全に解決したものである。以下主要な結果を述べる。

記述の便宜上$\mathbf{Z}_\alpha(n)=(Z_i(n))_{i\in C_\alpha}$と書く。各クラス$C_\alpha$に対し，正規化の次数$\nu(\alpha)$が定まる。一般性を失うことなく，クラス$C_N$に属するタイプから出発するゴルトンーワトソン過程を考えれば十分である。

定理1．C_Nは臨界的とする。

(1)$\{(n^{-\nu(\alpha)}\mathbf{Z}_\alpha(n))_{1\leq\alpha\leq N}\mid\mathbf{Z}_N(n)\neq\mathbf{O}\}$は分布収束する。(2)極限分布は$\mathbf{R}^d_+$上の無限分解可能な分布である。(3)そのラプラス変換はリッカチ型の微分方程式によって特徴づけられる。

定理２．C_Nは最終的とする。

(1)$(n^{-\nu(\alpha)+1}Z_\alpha(n))_{1\leq\alpha\leq N}$は分布収束する。(2)極限分布は離散型測度と他の測度μの直積である。(3)μはいくつかの無限分解可能な測度の合成積である。各々のラプラス変換はリッカチ型の微分方程式によって特徴づけられる。

最後に小倉の結果とFoster-Neyの結果を結びつける次の極限定理を得た。

定理３．$1\leq k\leq \max\ \nu(\alpha)$をとる。$A_k=\{\alpha:\nu(\alpha)\leq k-1$又は$\nu(\alpha)=k$かつ$C_\alpha$は劣臨界的でない$\}$とおく。このとき各クラス$C_\alpha$に対し整数$\nu(k,\alpha)$を定めることができる。$A_k$が最終類を含まないとすれば$\{(n^{-\nu(k,\alpha)}Z_\alpha(n))_{1\leq\alpha\leq N}\mid(Z_\alpha(n))_{\alpha\in A_k}\neq O\}$が分布収束する。

論 文 の 審 査 結 果 の 要 旨

d個のタイプより成るGalton-Watson過程$Z(n)=(Z_i(n())_{1\leq i\leq d}$であって，その平均行列のPerron-Frobenius根が１であるものを考える。到達可能の概念を用いてタイプの間に擬順序を入れ，それによる同値類を$\{C_\alpha\}_{1\leq\alpha\leq N}$とする。各同値類は臨界的，劣臨界的，最終的のいずれかに分類される。各同値類の平均行列は positively regular と仮定する。

このようなGalton-Watson過程の極限分布については，これ迄にいくつかの部分的結果が得られている。以下いずれもC_Nは上の順序に関して最大の類であり，C_Nのタイプから出発する場合を考える。例えばFoster-Ney[2]は同値類が全順序になっているという仮定の下で，(1)すべてのC_αが臨界的，(2)C_Nが1タイプの最終類で他のC_αが臨界的，という２つの場合にクラス毎に適当な正規化を行うことにより，非退化な極限分布の存在を示した。またPolin[6]は$N=2$で，C_2が最終類，C_1が臨界的な場合に極限分布を具体的に決定している。

杉谷君は本論文において，上記のような一切の制約なしに次の結果を得た。まず同値類毎に適当な正規化の次数$\nu(\alpha)$を定め，正規化された平均行列が非退化な極限M^*をもつことを示した。ついで$Z_\alpha(n)=(Z_i(n))_{i\in C\alpha}$とするとき，(1)$C_N$が最終類のときは$(n^{-\nu(\alpha)+1}Z_\alpha(n))_{1\leq\alpha\leq N}(2)C_N$が臨界的なときは$\{(n^{-\nu(\alpha)}Z_\alpha(n))_{1\leq\alpha\leq N}\mid Z_N(n)\neq O\}$が，それぞれ無限分解可能な極限分布に収束することを示し，いずれの場合にも極限分布のLaplace変換がM^*の要素から具体的に定まる常微分方程式の解によって表現されることを示した。さらに(3)C_Nが劣臨界的のときにも(2)に類似の条件付極限定理を得ている。

杉谷君の結果は前述のFoster-Ney，Polin等の結果を完全に含むだけでなく，極限分布を具体的に決定する有効な手段を与えている点，また証明法においてもまず１つの基本的極限定理を示し，それから系統的に上記３つの主要極限定理を導いている点など，従来のこの方面の研究に見られない優れた内容をもつものとして高く評価される。

以上本論文における杉谷君の研究は，確率論における極限定理の研究に大きく寄与するものであり，理学博士の学位論文として十分価値あるものと認められる。