



Title	ON THE LIMIT DISTRIBUTIONS -OF DECOMPOSABLE GALTON-WATSON PROCESSES WITH THE PERRON-FROBENIUS ROOT 1
Author(s)	Sugitani, Sadao
Citation	大阪大学, 1980, 博士論文
Version Type	VoR
URL	https://hdl.handle.net/11094/24331
rights	
Note	

The University of Osaka Institutional Knowledge Archive : OUKA

<https://ir.library.osaka-u.ac.jp/>

The University of Osaka

氏 名・(本籍)	杉 谷 貞 男
学 位 の 種 類	理 学 博 士
学 位 記 番 号	第 5 1 1 8 号
学位授与の日付	昭 和 55 年 12 月 19 日
学位授与の要件	学位規則第 5 条第 2 項該当
学 位 論 文 題 目	ペロニーフロベニウス根が 1 の分解可能なゴルトン—ワトソン過程の極限分布について
論 文 審 査 委 員	(主査) 教 授 渡 辺 毅 (副査) 教 授 池 田 信 行 教 授 石 井 恵 一 教 授 福 島 正 俊 助教授 中尾慎太郎

論 文 内 容 の 要 旨

$\mathbf{Z}(n) = (Z_i(n))_{1 \leq i \leq d}$ を d 個のタイプより成るゴルトン—ワトソン過程とする。これらのタイプを同値類 C_α ($1 \leq \alpha \leq N$) に分けてその間に半順序を入れる。各同値類は臨界的, 劣臨界的, 最終的のいずれかに分類される。

本論文においては, 臨界的あるいは最終的クラスが少なくとも 1 つ存在する場合に, $\mathbf{Z}(n)$ の極限問題を考える。筆者は, $\mathbf{Z}(n)$ を各クラス毎に適当に正規化することにより, 正規化された過程が分布収束することを示し, さらに極限分布の特徴づけに成功した。本論文より以前に小倉 [5] は最終類が存在しない場合に, $\{n^{-1}\mathbf{Z}(n) \mid \mathbf{Z}(n) \neq \mathbf{0}\}$ が分布収束することを証明している。また Foster-Ney [2] は, 同値類が全順序になっているという仮定のもとで, (1) 全ての C_α が臨界的な場合, (2) C_N は 1-タイプの最終類, 他の C_α は全て臨界的な場合, にはクラス毎に適当な正規化を行うことによる極限分布の存在を示した。更に極限分布のラプラス変換をある偏微分方程式の解として特徴づけた。彼らは一般のゴルトン—ワトソン過程に対しても同様な結果が得られると予想したが, 本論文の結果は彼らの予想を完全に解決したものである。以下主要な結果を述べる。

記述の便宜上 $\mathbf{Z}_\alpha(n) = (Z_i(n))_{i \in C_\alpha}$ と書く。各クラス C_α に対し, 正規化の次数 $\nu(\alpha)$ が定まる。一般性を失うことなく, クラス C_N に属するタイプから出発するゴルトン—ワトソン過程を考えれば十分である。

定理 1. C_N は臨界的とする。

- (1) $\{(n^{-\nu(\alpha)} \mathbf{Z}_\alpha(n))_{1 \leq \alpha \leq N} \mid \mathbf{Z}_N(n) \neq \mathbf{0}\}$ は分布収束する。(2) 極限分布は \mathbf{R}^d 上の無限分解可能な分布である。(3) そのラプラス変換はリッカチ型の微分方程式によって特徴づけられる。

定理 2. C_N は最終的とする。

(1) $(n^{-\nu(\alpha)+1} Z_\alpha(n))_{1 \leq \alpha \leq N}$ は分布収束する。(2) 極限分布は離散型測度と他の測度 μ の直積である。(3) μ はいくつかの無限分解可能な測度の合成積である。各々のラプラス変換はリッカチ型の微分方程式によって特徴づけられる。

最後に小倉の結果と Foster-Ney の結果を結びつける次の極限定理を得た。

定理 3. $1 \leq k \leq \max \nu(\alpha)$ をとる。 $A_k = \{\alpha : \nu(\alpha) \leq k-1 \text{ 又は } \nu(\alpha) = k \text{ かつ } C_\alpha \text{ は劣臨界的でない}\}$ とおく。このとき各クラス C_α に対し整数 $\nu(k, \alpha)$ を定めることができる。 A_k が最終類を含まないとすれば $\{(n^{-\nu(k, \alpha)} Z_\alpha(n))_{1 \leq \alpha \leq N} \mid (Z_\alpha(n))_{\alpha \in A_k} \neq 0\}$ が分布収束する。

論文の審査結果の要旨

d 個のタイプより成る Galton-Watson 過程 $Z(n) = (Z_i(n))_{1 \leq i \leq d}$ であって、その平均行列の Perron-Frobenius 根が 1 であるものを考える。到達可能の概念を用いてタイプの間に擬順序を入れ、それによる同値類を $\{C_\alpha\}_{1 \leq \alpha \leq N}$ とする。各同値類は臨界的、劣臨界的、最終的のいずれかに分類される。各同値類の平均行列は positively regular と仮定する。

このような Galton-Watson 過程の極限分布については、これ迄にいくつかの部分的結果が得られている。以下いずれも C_N は上の順序に関して最大の類であり、 C_N のタイプから出発する場合を考える。例えば Foster-Ney [2] は同値類が全順序になっているという仮定の下で、(1) すべての C_α が臨界的、(2) C_N が 1 タイプの最終類で他の C_α が臨界的、という 2 つの場合にクラス毎に適当な正規化を行うことにより、非退化な極限分布の存在を示した。また Polin [6] は $N=2$ で、 C_2 が最終類、 C_1 が臨界的な場合に極限分布を具体的に決定している。

杉谷君は本論文において、上記のような一切の制約なしに次の結果を得た。まず同値類毎に適当な正規化の次数 $\nu(\alpha)$ を定め、正規化された平均行列が非退化な極限 M^* をもつことを示した。ついで $Z_\alpha(n) = (Z_i(n))_{i \in C_\alpha}$ とするとき、(1) C_N が最終類のときは $(n^{-\nu(\alpha)+1} Z_\alpha(n))_{1 \leq \alpha \leq N}$ (2) C_N が臨界的なときは $\{(n^{-\nu(\alpha)} Z_\alpha(n))_{1 \leq \alpha \leq N} \mid Z_N(n) \neq 0\}$ が、それぞれ無限分解可能な極限分布に収束することを示し、いずれの場合にも極限分布の Laplace 変換が M^* の要素から具体的に定まる常微分方程式の解によって表現されることを示した。さらに (3) C_N が劣臨界的のときにも (2) に類似の条件付極限定理を得ている。

杉谷君の結果は前述の Foster-Ney, Polin 等の結果を完全に含むだけでなく、極限分布を具体的に決定する有効な手段を与えている点、また証明法においてもまず 1 つの基本的極限定理を示し、それから系統的に上記 3 つの主要極限定理を導いている点など、従来のこの方面の研究に見られない優れた内容をもつものとして高く評価される。

以上本論文における杉谷君の研究は、確率論における極限定理の研究に大きく寄与するものであり、理学博士の学位論文として十分価値あるものと認められる。