

Title	GENERALIZATION OF A THEOREM OF PETER J. CAMERON
Author(s)	Numata, Minoru
Citation	
Issue Date	
Text Version	ETD
URL	<a href="http://hdl.handle.net/11094/24456">http://hdl.handle.net/11094/24456</a>
DOI	
rights	
Note	

*Osaka University Knowledge Archive : OUKA*

<https://ir.library.osaka-u.ac.jp/>

Osaka University

氏名・(本籍)	沼田稔
学位の種類	理学博士
学位記番号	第 4394 号
学位授与の日付	昭和 53 年 9 月 30 日
学位授与の要件	学位規則第 5 条第 2 項該当
学位論文題目	<b>Peter J. Cameron のある定理の一般化</b>
論文審査委員	(主査) 教授 永尾 汎 教授 中井 喜和 講師 川中 宣明

### 論文内容の要旨

$\Omega$  を有限集合とし、 $G$  を  $\Omega$  上の原始置換群とする。いま、 $G$  を  $\Omega \times \Omega$  の上に自然に作用させたときの orbit で自明でないものを

$$\Gamma_1, \dots, \Gamma_s, \Delta_1, \dots, \Delta_t$$

とし、 $\Omega$  の一点  $\alpha$  に対して、 $G_\alpha = \{g \in G \mid \alpha^g = \alpha\}$  は  $\Gamma_i(\alpha) = \{\beta \in \Omega \mid (\alpha, \beta) \in \Gamma_i\}$  上 2 重可移で、 $\Delta_j(\alpha) = \{\beta \in \Omega \mid (\alpha, \beta) \in \Delta_j\}$  上では 2 重可移でないと仮定する。この時、P. J. Cameron は

“Primitive groups with most suborbits doubly transitive,” *Geometriae Dedicata* 1 (1973)

において、次の定理を得た。

定理 (P. J. Cameron) 上で  $t=1$  ならば  $s \leq 2$  である。

この定理は、 $G_\alpha$  の orbit の間の関係を示す一つの際立った結果であるが、我々は、この定理を一般の場合に拡張して、次の結果を得た。

定理 1.  $t > 1$ ,  $|\Gamma_i(\alpha)|, |\Delta_j(\alpha)| > 3$  ( $i=1, \dots, s, j=1, \dots, t$ ) の時

$$s \leq 2t - r.$$

特に  $r=1$  の時,  $s \leq 2t - 2$ .

(ただし  $r = \#\{\Delta_j \mid \Delta_j = \Gamma_i^* \cdot \Gamma_i, i=1, \dots, s\}$ )

定理 2. 定理 1 の仮定のもとで、 $r=t$  ならば、 $t=s=2$  で、 $G$  は  $J_1$  (small Janko simple group) と同型であり、 $\Omega$  の一点  $\alpha$  に対し、 $G_\alpha$  は  $\text{PSL}(2, 11)$  に同型で  $|\Omega|=266$  となる。

定理 1, 定理 2 を証明するためには、グラフ  $(\Omega, \Gamma_i)$  ( $i=1, \dots, s$ ) の間の関係を調べる。そのた

めに permutation character に関する簡単な結果と、グラフに対応する basis matrix の積を計算し組合せ論的手法を使って、 $\Gamma_i$  と  $\Gamma_j$  の積  $\Gamma_i \cdot \Gamma_j = \{(\alpha, \beta) \mid \exists \gamma \in \Omega, (\alpha, \gamma) \in \Gamma_i, (\gamma, \beta) \in \Gamma_j, \alpha \neq \beta\}$  がどのような orbit の和になっているかを調べて次の 2 つの Lemma を証明する。

Lemma 1.  $\Gamma_i^* \cdot \Gamma_j$  は高々 2 つの orbit の和であり、ある  $\Delta_k$  を必ず含む。(ただし  $\Gamma_i^* = \{(\alpha, \beta) \mid (\beta, \alpha) \in \Gamma_i\}$ )

Lemma 2.  $\Gamma_i, \Gamma_j, \Gamma_k (\neq)$  に対し、 $\Gamma_i^* \cdot \Gamma_j \cap \Gamma_i^* \cdot \Gamma_k \supset \Delta_l$  とするならば、 $\Gamma_m^* \cdot \Gamma_m = \Delta_l$  となる  $\Gamma_m$  は存在しない。

定理 1, 定理 2 は Lemma 2 を使って証明される。今後、 $G_\alpha$  がかなり多くの suborbit 上 2 重可移に作用する原始置換群を研究するのに、Lemma 1, Lemma 2 は有力な武器となると思われる。

### 論文の審査結果の要旨

$G$  を有限集合  $\Omega$  上の原始置換群とし、 $\alpha \in \Omega$  の安定化部分群を  $G_\alpha$  とする。このとき、 $G_\alpha$  の各軌道への作用の間には密接な関係があると思われるが、それについて十分な解明がなされているとはいえない。それに関連する一つの際立った結果として、1973年に発表された Cameron の結果が有名である。

いま、 $G_\alpha$  の軌道を  $\{\alpha\}, \Gamma_1(\alpha), \dots, \Gamma_s(\alpha), \Delta_1(\alpha), \dots, \Delta_t(\alpha)$  とし、 $G_\alpha$  は  $\Gamma_i(\alpha)$  ( $i=1, \dots, s$ ) 上 2 重可移に作用し、 $\Delta_j(\alpha)$  ( $j=1, \dots, t$ ) 上では 2 重可移でないとする。このとき、Cameron の結果は「 $t=1$  ならば  $s \leq 2$ 」、すなわち自明でない軌道のうち一つを除いて他の軌道の上に  $G_\alpha$  が 2 重可移に作用しておれば、 $G$  (置換群としての) 階数は 4 以下になることを主張している。

沼田君は本論文において、上の Cameron の結果の最終的な拡張を与え、一般に  $s \leq 2t$  が成立すること、更にこれを精密化した結果を得ている。またこの観点から Janko が最初に発見した「散在する単純群」の特徴づけを与えている。主定理の証明は  $G_\alpha$  の各軌道によってきまるグラフを詳細に調べることによって得られるもので、それ自身興味深い。

以上のように、沼田君の論文は置換群論における重要な結果を含むもので、理学博士の学位論文として十分価値あるものと認める。