



|              |                                                                                   |
|--------------|-----------------------------------------------------------------------------------|
| Title        | 平坦な部分をもつカオス写像の性質と雑音による影響に関する研究                                                    |
| Author(s)    | 土居, 伸二                                                                            |
| Citation     | 大阪大学, 1989, 博士論文                                                                  |
| Version Type | VoR                                                                               |
| URL          | <a href="https://hdl.handle.net/11094/2449">https://hdl.handle.net/11094/2449</a> |
| rights       |                                                                                   |
| Note         |                                                                                   |

*The University of Osaka Institutional Knowledge Archive : OUKA*

<https://ir.library.osaka-u.ac.jp/>

The University of Osaka

平坦な部分をもつカオス写像の性質と  
雑音による影響に関する研究

1989 年 1 月

大阪大学大学院基礎工学研究科  
物理系専攻生物工学分野  
土居伸二

学位論文

平坦な部分をもつカオス写像の性質と  
雑音による影響に関する研究

1989 年 1 月

大阪大学大学院基礎工学研究科

物理系専攻生物工学分野

土居伸二

## 論文要旨

近年カオスと呼ばれる新しい不規則変動現象が物理学・生物学・工学などの様々な分野で注目を集めている。この中でも一次元の非線形差分方程式（一次元写像）で記述されるシステム（一次元離散力学系）で生成されるカオスは一次元カオスと呼ばれ最も旺盛に研究がなされている。また、この一次元離散力学系は単純なシステムであるがその示す挙動はきわめて複雑であり、カオス現象のみならず様々な自然現象の理論的研究において重要な役割を担っている。本研究の目的は一次元非線形差分方程式で記述されるシステムを提案し、その性質や雑音による影響を調べることによってカオスと雑音との関係やカオスの自然現象における意味を検討することである。このシステムはカオスを生成する写像に“平坦な部分”をつけただけの単純で一般性のあるものになっている。まずこのシステムを用いて雑音によってカオスが消滅し周期性が強まるという Noise-Induced Order の現象が観察されることを数値実験により示す。この奇妙で興味深い現象は他のシステムを用いて既に表示されているものであるが、本研究で示す数値実験結果は Noise-Induced Order の現象を解明する上で重要な意味をもつ。すなわち、これまで Noise-Induced Order の要因と考えられていた性質をここで提案したシステムはもたず、ただ“平坦な部分をもつ”という性質のみもっている。本研究の数値実験結果により Noise-Induced Order の現象において“平坦な部分”が重要な役割を担っていることが示される。

次にこのシステムの性質を詳しく調べその分岐構造を解析的に明らかにする。すなわちシステムを記述するパラメータの変化に対してシステムの示す定性的な性質が変化する様子を詳しく調べる。一次元写像はきわめて単純なシステムであるが一般にその分岐構造を解析することは難しい。しかし、本研究で提案するシステムのように平坦な部分をもっている場合、その平坦な部分に注目することによりその解析が可能になる。完全に平坦（平坦な部分の傾きが0）な場合にはその分岐構造は（測度0の）例外を除いて完全に決定される。この解析によりパラメータが変化するにつれてこのシステムがあらゆるパターンの安定な周期軌道を生成することが明らかになる。カオス写像に平坦な部分をつけることの効果はカオス写像のもつ無限個の不安定な周期軌道をすべて安定な周期軌道にすることであることが分かる。さらにその分岐構造は近年フラクタルとして注目を集めている複雑な入れ子構造をもつことがわかる。また、ここで用いた方法は

- 1) 分岐パラメータの変化に対して写像の生成する軌道の性質がどのように変化するか

という“分岐問題”を初期値の変化に対してその軌道の性質がどのように変化するかという“初期値問題”に帰着し、

2) この初期値問題を記号力学的方法を用いて解く。

という興味深い方法であり、この方法が広く“平坦な部分をもつ”カオス写像一般に適用可能な有効な方法であることを例をあげて示す。

また、雑音の存在下でのシステムのふるまいを雑音がない場合のシステムの分岐構造を用いて明らかにするという方法について議論する。特にこの方法が本研究で数値計算により示す Noise-Induced Order の現象の要因を解析的に明らかにするための有効な手段となり得ることを述べる。

最後に、平坦な部分をもつカオス写像が生物の神経系の実験において観察される例を示し、自然現象特に生命現象のカオスの研究における本研究の重要性について述べる。

## Contents

|                                        |    |
|----------------------------------------|----|
| 1. 序章                                  | 1  |
| 1.1 不規則変動現象とカオス                        | 1  |
| 1.2 一次元カオスと雑音                          | 2  |
| 1.3 本論文の目的と構成                          | 3  |
| 2. 平坦な部分をもつテント写像と Noise-Induced Order  | 5  |
| 2.1 数学的準備                              | 5  |
| 2.2 B-Z 写像と Noise-Induced Order        | 9  |
| 2.3 平坦な部分をもつテント写像 (TWFS 写像)            | 11 |
| 2.4 TWFS 写像と Noise-Induced Order       | 12 |
| 2.4.1 確率密度 (不変密度)                      | 14 |
| 2.4.2 パワースペクトル                         | 16 |
| 2.4.3 リアプノフ指数                          | 16 |
| 2.4.4 エントロピー                           | 20 |
| 2.4.5 平均相互情報量                          | 22 |
| 2.5 結論                                 | 22 |
| 3. 平坦な部分をもつテント写像の分岐構造                  | 25 |
| 3.1 数学的準備                              | 25 |
| 3.1.1 TWFS 写像の標準形                      | 25 |
| 3.1.2 記号力学的方法                          | 25 |
| 3.2 TWFS 写像の分岐構造—システムが周期的な場合—          | 28 |
| 3.2.1 TWFS 写像での“分岐問題”からテント写像での“初期値問題”へ | 28 |
| 3.2.2 システムの生成する周期軌道の性質—主要定理—           | 32 |
| 3.2.3 周期軌道を生成するパラメータの範囲                | 33 |
| 3.2.4 周期軌道の分布                          | 34 |
| 3.2.5 TWFS 写像とテント写像                    | 38 |
| 3.3 TWFS 写像の分岐構造—システムがカオティックな場合—       | 39 |
| 3.3.1 周期軌道・カオスを生成するパラメータの範囲            | 39 |
| 3.3.2 周期軌道とカオスの共存現象                    | 41 |

|                                             |    |
|---------------------------------------------|----|
| 3.4 結論 . . . . .                            | 42 |
| 4. TWFS 写像の分岐構造と Noise-Induced Order        | 45 |
| 5. 平坦な部分をもつカオス写像の分岐構造                       | 49 |
| 5.1 平坦な部分をもつ 2 進変換 . . . . .                | 49 |
| 5.2 平坦な部分をもつ単峰形写像 . . . . .                 | 51 |
| 6. 終章                                       | 53 |
| 6.1 カオスと秩序—安定と不安定— . . . . .                | 53 |
| 6.2 自然現象, 特に生命現象における平坦な部分をもつカオス写像 . . . . . | 54 |
| A 定理 1 の証明                                  | 57 |
| B 定理 2 の証明                                  | 64 |
| C 定理 4 の証明                                  | 67 |
| D 周期列の数の求め方                                 | 71 |
| E 3 章の整数論的補足                                | 73 |
| References                                  | 83 |
| 参考文献                                        | 87 |
| 謝辞                                          | 88 |

## List of Figures

|    |                                                                  |    |
|----|------------------------------------------------------------------|----|
| 1  | B-Z 写像 . . . . .                                                 | 10 |
| 2  | B-Z 写像の分岐図 . . . . .                                             | 11 |
| 3  | TWFS 写像 . . . . .                                                | 12 |
| 4  | TWFS 写像の分岐図 . . . . .                                            | 13 |
| 5  | 確率密度 $P(i)$ . . . . .                                            | 15 |
| 6  | パワースペクトル密度 . . . . .                                             | 17 |
| 7  | リアプノフ指数 $\lambda$ vs. $b$ . . . . .                              | 18 |
| 8  | リアプノフ指数 $\lambda$ vs. 雑音レベル $\sigma$ . . . . .                   | 19 |
| 9  | エントロピー $H$ vs. 雑音レベル $\sigma$ . . . . .                          | 20 |
| 10 | エントロピー $H_n$ ( $n = 1, \dots, 10$ ) vs. 雑音レベル $\sigma$ . . . . . | 21 |
| 11 | 平均相互情報量 $I(n)$ . . . . .                                         | 23 |
| 12 | TWFS 写像と標準形 . . . . .                                            | 26 |
| 13 | TWFS 写像と軌道 . . . . .                                             | 26 |
| 14 | TWFS 写像 ( $\delta = 0$ の場合) . . . . .                            | 29 |
| 15 | TWFS 写像の分岐図 ( $\delta = 0$ の場合) . . . . .                        | 29 |
| 16 | テント写像と TWFS 写像との対応 . . . . .                                     | 31 |
| 17 | 関数 $h$ . . . . .                                                 | 35 |
| 18 | 周期軌道に対応する分岐パラメータ $a$ の範囲 . . . . .                               | 35 |
| 19 | TWFS 写像の分岐図 ( $\delta \neq 0$ の場合) . . . . .                     | 39 |
| 20 | 安定な 3-周期軌道 . . . . .                                             | 40 |
| 21 | 安定な 3-周期軌道の存在するパラメータ $(a, \delta)$ の範囲 . . . . .                 | 41 |
| 22 | カオスの存在するパラメータ $(a, \delta)$ の範囲 . . . . .                        | 42 |
| 23 | 安定な不動点とカオスの共存現象 . . . . .                                        | 43 |
| 24 | 確率密度 $\tilde{P}_{\epsilon, b}(x)$ の周期解の和による表現 . . . . .          | 47 |
| 25 | 平坦な部分をもつ 2 進変換と 2 進変換の対応 . . . . .                               | 51 |
| 26 | 関数 $h$ . . . . .                                                 | 82 |

## 1. 序章

### 1.1 不規則変動現象とカオス

ブラウンが花粉の観察中に不規則に動く微粒子を発見したのは1827年のことであるが、それ以来、このような不規則変動現象に対するわれわれの理解の仕方は大きな変遷を経てきた。量子力学の誕生によって本質的に確率的な記述しかできないものがあることを知った。しかし、これはミクロの世界に限ったことであって、マクロの世界（古典系）で不規則に見える現象が現れるのは未知の自由度が多く存在するためであると考えられてきた。

1970年代後半の“カオス”と呼ばれる現象の発見によってこの考え方はさらに大きな変更を迫られることになる[16,39,48,49]。すなわち、少数自由度の簡単な系でも本質的に確率的な記述しかできないような不規則に変動する現象が存在することを知ったのである。このカオスという新しい概念を用いて多くの不規則変動現象が洗い直された。これまで単なる確率的・統計的な現象と思われていた多くの現象が実はカオスであるということがわかった。非線形の微分方程式や差分方程式で記述される系では、ほとんどすべてと言ってもいいほどたくさんの系においてカオス現象は観察されることがわかった。いまやカオスは非線形の系での“本来の現象”とまで思われるようになった。また実際の自然現象のなかにも、物理・化学・生物学・工学などさまざまな分野でカオスを示す数多くの実験的事実が報告されている[1,17,18,40,43]。

このように自然界においてはごく当り前のものであると考えられるようになってきたカオスの意味は何であろうか。自然界においてカオスはどのような役割を果たしているのか。とりわけ生物はさまざまな揺らぎを有効に利用しているものと考えられているが、カオス現象は生命現象においてどのような役割を果たしているのか。カオス現象を通して様々な自然現象における不規則変動現象の役割やその意味を明らかにすることができないだろうか。本研究の問題意識の原点はここにある。

時間的に状態が変化する系（システム）において現在の状態が決まれば将来の状態を完全に決定することのできるシステムは確定系または確定的なシステムと呼ばれる。カオスは確定的なシステムが一見確率的で不規則なふるまいを呈する現象である。しかし一方で自然界には熱揺らぎや環境変動などの様々な不確定な要因（雑音）が存在している。このような揺らぎ（雑音）によってカオスが消滅するものであるならば実際の自然現象においてはカオスは観察されないことになる。カオスと外部雑音との関係、外部雑音のカオスに与える影響を調べることは、実際の自然現象におけるカオスの役割、その意味を考える

上で極めて重要である。

## 1.2 一次元カオスと雑音

一次元の非線形差分方程式（一次元写像）で記述される離散力学系（システム）は最も単純な力学系であるにもかかわらずその力学系の示す挙動は極めて多様である [26]。この一次元離散力学系はさまざまな自然現象のモデルとして用いられてきた。例えば生物学において古くから用いられてきた個体群モデルなどはその例である [10,11,14]。

一次元離散力学系は、さまざまな自然現象を記述するモデルとして頻繁に用いられる多次元の微分方程式系（連続力学系）と密接な関連をもつ。すなわち、よく知られたポアンカレ写像などの方法を用いると多次元系での軌道のふるまいを調べる問題を一次元離散力学系上の問題に帰着することができる [15]。このように、一次元離散力学系は自然現象の研究において重要な役割を担っているが、とりわけ近年様々な分野で注目を集めているカオス現象の研究においては最も旺盛に研究がなされている分野である [12,23]。特に一次元の離散力学系上のカオスは一次元カオスと呼ばれる。

前節でも述べたように自然現象におけるカオスの役割を考えるうえで雑音のカオスに与える影響を調べることは重要な課題である。近年このような観点からの一次元カオスに関する研究がいくつかなされておき [3,4,9,22,37,38]、雑音のカオスに与える影響はおもに二つのタイプに分けることができる。第一のものは、カオスに雑音を付加するとそのカオティックな性質は強まる、すなわちカオスは外部雑音に対して安定であるという Noise-Induced Chaos の現象である。Crutchfield らは数値計算により雑音の周期倍分岐に与える影響を調べ、雑音によってカオスの乱雑さが増加すること、さらに雑音によって周期的な状態からカオティックな状態への転移が起こることを示した [7,8]。Mayer-Kress らは生態系のモデルとしてよく知られているロジスティック写像への雑音の影響を数値計算により調べ、雑音によって周期的な状態からカオティックな状態への転移が起こることを示した [27]。砂原らはロジスティック写像を区分的線形写像で近似した写像に対する雑音の影響を調べ、雑音によってカオスは消滅しないことをリアプノフ指数を用いて解析的に示した [42]。

第二のタイプのものは、上で述べた逆の転移すなわち雑音によってカオティックな状態から周期性の強い状態への転移が起こるというものである。つまりカオスが雑音によって消滅するという Noise-Induced Order の現象である。Mayer-Kress らはロジスティック写像を少し変形したものをを用いてそれに対する雑音の影響を数値計算により調べ、雑音によ

てリアプノフ指数が正から負に変化することを示した [28] . この Noise-Induced Order の現象を最も顕著に示し系統的に調べているものとして Matsumoto らによる一連の研究がある [30,31,32,33,46,47] . Matsumoto らは Belousov-Zhabotinsky 反応のモデルから得られた B-Z 写像に対する雑音の影響を調べ雑音によってカオスが消滅するという Noise-Induced Order の現象を示した. 彼らはさらに B-Z 写像を数値計算により詳しく調べ, Noise-Induced Order に関するさまざまな現象を示している. 彼らが示した Noise-Induced Order の現象はおもに次のような特徴を持つ.

- (i) 雑音によってシステムの生成する系列のスペクトルに強い周期性が現れる [31] .
- (ii) 雑音によってシステムの生成する系列のリアプノフ数が正から負に変化する [31] .
- (iii) 雑音によってシステムの生成する系列のエントロピーが減少する [30,31] .
- (iv) システムの生成する系列の平均相互情報量が振動的に振舞い, 雑音を付加すると指数的に減少する [32,33] .

Matsumoto らは, B-Z 写像の急勾配な部分に注目し様々な解析を行い, 写像に急勾配な部分が存在することによってこの現象が起こると主張した.

### 1.3 本論文の目的と構成

本研究の目的はある一次元写像で記述されるシステムを提案し, このシステムの性質や雑音の与える影響を調べることによりカオスと雑音との関係やカオスの自然現象における意味を考察することである. ここで提案するシステムはカオスを生成する写像に“平坦な部分”をつけただけのきわめて単純でかつ一般性のあるシステムになっている. 2.章では平坦な部分をもつ単峰形の区分的線形写像(平坦な部分をもつテント写像, TWFS 写像と呼ぶ)を提案する. この単純な写像を用いてシステムの生成する系列の確率密度, パワースペクトル, リアプノフ指数, エントロピー, 平均相互情報量などを計算し, Matsumoto らが一連の研究によって示した Noise-Induced Order の現象 (i)-(iv) がすべて観察されることを数値計算により示す. このことは Noise-Induced Order の現象を示すような写像できわめて単純な例を示したというだけでなく Noise-Induced Order の現象の要因を明らかにする上で重要な意味をもつ. すなわち, ここで提案した写像は, Matsumoto らが Noise-Induced Order の要因として述べた“写像に急勾配な部分が存在する”という性質を

もっていない。このことにより、Matsumoto らの考察に反して、Noise-Induced Order の現象が起こるのは写像に“急勾配な部分”でなく“平坦な部分”が存在するためであることが示される。また Noise-Induced Order の現象が写像の分岐構造と密接な関連をもつことを示す。

3.章ではこの写像の性質を詳しく調べその分岐構造を解析的に明らかにする。すなわちシステムを記述するパラメータの変化に対してシステム（写像）の定性的な性質が変化する様子を詳しく調べる。一次元写像はきわめて単純なシステムであるが一般にその分岐構造を解析することは難しい。しかし、本研究で提案する写像のように平坦な部分をもつ場合、その平坦な部分に注目することによりその解析が可能になる。完全に平坦（平坦な部分の傾きが0）な場合にはその分岐構造は（測度0の）例外を除いて完全に決定される。この解析により分岐パラメータが変化するにつれてこの写像があらゆるパターンの安定な周期軌道を生成することが明らかになる。カオス写像に平坦な部分をつけることの効果はカオス写像のもつ不安定な周期軌道をすべて安定な周期軌道にすることであることが分かる。さらにその分岐構造は近年フラクタルとして注目を集めている複雑な入れ子構造をもつことがわかる。また、ここで用いた方法は

- 1) 分岐パラメータの変化に対して写像の生成する軌道の性質がどのように変化するかという“分岐問題”を初期値の変化に対してその軌道の性質がどのように変化するかという“初期値問題”に帰着し、
- 2) この初期値問題を記号力学的方法を用いて解く。

という興味深い方法であり、この方法が広く“平坦な部分をもつ”カオス写像一般に適用可能な有効な方法であることを5.章で例をあげて示す。

4.章では、雑音の存在下でのシステムのふるまいを雑音がない場合のシステムの分岐構造を用いて明らかにするという方法を提案する。特にこの方法が2.章で数値計算により示した Noise-Induced Order の現象の要因を解析的に明らかにするための有効な手段となり得ることを述べる。

6.章では、平坦な部分をもつカオス写像が生物の神経系の実験において観察される例を示し、自然現象特に生命現象のカオスの研究における本研究の重要性について述べる。

## 2. 平坦な部分をもつテント写像と Noise-Induced Order

### 2.1 数学的準備

本節では数学的準備を行うためにいくつかの定義をする。

本論文を通して次のような一次元の離散力学系（システム）

$$x_{n+1} = f(x_n), \quad n = 0, 1, \dots \quad (1)$$

を考察することとする。ここで  $f(x)$  は単位区間  $I = [0, 1]$  上の関数とする。このとき  $x_n$  をシステム (1) の（時刻  $n$  における）状態と呼び、そのような状態の列：

$$\{x_n\} = x_0, x_1, \dots, x_n \dots \quad (2)$$

を一次元写像  $f(x)$  によって生成される軌道という。一般に軌道  $\{x_n\}$  はその初期値  $x_0$  に依存するが、物理的に興味があるのはシステムの過渡的なふるまいが消失した後のシステムの定常的なふるまいである。従って以下では特に断わらない限りシステムの生成する軌道の定常的なふるまいに注目する。システムの生成する軌道が十分時間がたった後に最終的に訪れる状態の集合はシステムのアトラクタと呼ばれる。すなわち以下では、システム  $f(x)$  のアトラクタの性質を詳しく調べる。

雑音のシステム (1) に与える影響を調べるため、次のシステムを考察する：

$$\hat{x}_{n+1} = f(\hat{x}_n) + \xi_n, \quad n = 0, 1, \dots \quad (3)$$

ここで  $\{\xi_n\}$  は、計算機で生成した微小区間  $[-\sigma/2, \sigma/2]$  上の一様乱数であり、システム (1) に対する外部雑音と考えられる。システム (1) はシステム (3) で  $\sigma = 0$  とした特別な場合であるので、以下では雑音のないシステム (1) も雑音のあるシステム (3) に含めて考える。ただし、特に雑音のある場合とない場合の区別を強調したいときは両者を区別して扱う。

システム (1), (3) の軌道のふるまいを調べるためにいくつかの定義を与える。

定義 1 ( $p$ -周期軌道) 次の式

$$f^p(x) = x, \quad f^i(x) \neq x \quad (1 \leq i \leq p-1)$$

が成り立つとき、 $x$  は  $p$ -周期点であるという。このとき

$$x, f(x), \dots, f^p(x) = x, \dots,$$

を  $p$ -周期軌道, または周期  $p$  の周期軌道などと呼ぶ. 特に 1-周期点を固定点または不動点という.

**定義 2** 一次元写像  $f(x)$  によって生成される周期軌道

$$x_0, x_1, \dots, x_{n-1}, x_0, \dots, x_{n-1}, \dots$$

に対して

$$\left| \frac{d}{dx} f^n(x) \right|_{x=x_0} = \prod_{i=0}^{n-1} \left| \frac{df(x)}{dx} \right|_{x=x_i} < 1 \quad (4)$$

となるとき, その周期軌道は安定であるという.

Lorenz や May らの研究によって軌道が上で述べたような規則的なふるまいをしない場合, すなわち軌道が一見確率的なふるまいをするカオスと呼ばれる現象が現れることが示された [16]. また, これらの研究に刺激にされて Li-Yorke は初めて数学の論文にカオスという言葉を用いた [25]. 以下に Li-Yorke によるカオスの定義を紹介しよう.

**定義 3** (Li-Yorke のカオス) 次のような非可算個の点の集合  $S$  が存在するとき Li-Yorke の意味でカオスであるという:

1)  $S \ni x, y$  ( $x \neq y$ ) に対して

$$\begin{aligned} \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} |f^n(x) - f^n(y)| &> 0, \\ \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} |f^n(x) - f^n(y)| &= 0 \end{aligned}$$

2)  $S \ni x$ , 任意の周期点  $z$  に対して

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} |f^n(x) - f^n(z)| > 0.$$

すなわち初期値の集合  $S$  の任意の点から出発した軌道は, どの周期軌道にも近づかないで不規則なふるまいをするわけである. またそのような初期値の集合は非可算個, すなわち数えられないほどたくさんあるというわけである. このようなカオスは Li-Yorke のカオスとか Li-Yorke の意味でカオスであるとか呼ばれる. では, Li-Yorke のカオスが存在するための条件は何であろうか. Li-Yorke は最初の論文の題名を“周期 3 はカオスを導く”とした [25]. すなわち 3-周期解が存在すれば上のような初期値の集合  $S$  が存在することを示した. さらに Oono はこの条件を緩めて  $2^n$  以外の周期解が存在すれば上で述べた集合  $S$  が存在することを示した [36].

このように Li-Yorke の意味でカオスであることは  $2^n$  以外の周期解の存在によって簡単に判定することができるわけであるが、以下に述べるように現実的なカオスの定義としては不十分な点がある。それは Li-Yorke の意味でカオスである場合でも、そのとき同時に安定な周期解が存在してほとんどすべての初期値から出発した軌道がこの安定な周期軌道に漸近していく場合があることである。すなわちこのときは上で述べた集合  $S$  の測度は 0 になっているわけである。このような場合には Li-Yorke のカオスは存在しても現実には観察されないことになる。このようなカオスを特に形式的 (formal) カオスと呼ぶ。ではカオスのより現実的な定義や判定条件は何であろうか。まず以下の定義を行う。

定義 4 ( $f$ -不変測度) 任意の部分集合  $A \subset [0, 1]$  に対して

$$\mu(A) = \mu(f^{-1}(A)) \quad (5)$$

が成り立つならば、 $\mu$  は  $f$ -不変測度という。 $\mu$  がルベーグ測度に関して絶対連続ならば

$$\mu(A) = \int_A g(x) dx$$

となるが、このとき関数  $g(x)$  を不変密度と呼び、 $\mu$  を絶対連続な不変測度 (absolutely continuous invariant measure, 簡単に A.C.I. 測度) と呼ぶ。

もし、 $f$  がエルゴード的ならば Birkhoff のエルゴード定理により、 $f$ -不変測度は

$$\mu(A) = \int_I \chi_A(x) d\mu(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \chi_A(x_i) \quad (6)$$

で与えられる [44]。ただし、

$$\chi(x) = \begin{cases} 1, & x \in A \\ 0, & x \notin A \end{cases}$$

である。(6) 式から不変測度  $\mu(A)$  は軌道  $\{x_n\}$  が領域  $A$  に含まれる頻度すなわち定常分布を表していることが分かる。このことよりシステムが絶対連続な不変測度をもつならば、そのシステムは Li-Yorke の意味よりもより現実的にカオティックであると言えるだろう。さらに次の定義を行う。

定義 5 (リアプノフ指数) システム (1) のリアプノフ指数は次の式で定義される:

$$\lambda \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log \left| \frac{\partial x_n}{\partial x_0} \right|. \quad (7)$$

ここで

$$\frac{\partial x_n}{\partial x_0} = \frac{\partial x_n}{\partial x_{n-1}} \frac{\partial x_{n-1}}{\partial x_{n-2}} \cdots \frac{\partial x_1}{\partial x_0} = \prod_{i=0}^{n-1} \frac{df(x_i)}{dx}$$

であるから (7) 式は

$$\lambda = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \log \left| \frac{df(x_i)}{dx} \right| \quad (8)$$

となる。このとき二つの異なる初期値から出発した軌道を  $\{\bar{x}_n\}$ ,  $\{x_n\}$  とおき

$$\Delta x_n \stackrel{\text{def}}{=} x_n - \bar{x}_n$$

とおくと、十分大きな  $n$  に対して (7) 式は

$$\lambda \simeq \frac{1}{n} \log \left| \frac{\Delta x_n}{\Delta x_0} \right|$$

すなわち

$$|\Delta x_n| \simeq |\Delta x_0| \exp(n\lambda)$$

となり、 $\lambda > 0$  ならば初期値の微小変動  $\Delta x_0$  に対して  $\Delta x_n$  が  $n$  の増大とともに指数的に増大することが分かる。このようにカオスの軌道は初期値に対する鋭敏な依存性をもつことがわかる。また、ある時点での誤差がこのように指数関数的に増加するのでカオスの軌道を長期的に予測することは不可能であることもわかる。このことを軌道の予測不能性という。

またシステム (1) の写像  $f$  がエルゴード的であればリアプノフ指数  $\lambda$  は不変測度  $\mu$  をもちいて (8) 式より

$$\lambda = \int_I \log \left| \frac{df(x)}{dx} \right| d\mu(x) \quad (9)$$

であたえられる。

これまで、カオスの定義や性質をいくつかの方法でみた。まとめると次のようになる。

- (a) Li-Yorke のカオス
- (b) 絶対連続な不変測度
- (c) 軌道の予測不能性

上で述べたように Li-Yorke の意味でカオスであることを解析的に決定することは簡単にできるが、Li-Yorke の意味でカオスであってもそのカオスは現実には観測されないことがあるという問題点があった。したがってカオスの研究においては (b), (c) の意味でカオ

スであることを示すことがより重要である。(9)式で見たように(c)のリアプノフ指数やその他の統計量を計算する上でも $f$ -不変測度は基本的な統計量である。しかし、この不変測度を解析的に求めることは難しく、不変測度が解析的に求められている写像 $f$ の例は数少ない。不変測度が解析的に計算できる例や不変測度を近似的に求める方法については文献[2,24]を参照されたい。

以上のような理由により、実際には不変測度やリアプノフ指数などを数値的に計算することによりカオスであるかどうかを判定することが多い。本研究においてもカオスという用語はこのように数値計算による判定に基づいて用いている。

## 2.2 B-Z 写像と Noise-Induced Order

次に、Matsumoto らが Noise-Induced Order の現象の生じる写像として用いた B-Z 写像  $f(x)$  を以下に示す。

$$f(x) = \begin{cases} \{a + (x - \frac{1}{8})^{1/3}\} \exp(-x) + b, & (0 \leq x < 0.3) \\ c\{10x \exp(\frac{-10x}{3})\}^{19} + b, & (0.3 \leq x \leq 1) \end{cases} \quad (10)$$

$$a = 0.50607357, \quad c = 0.121205692.$$

この写像  $f(x)$  の概形を Fig.1 に示した。このように B-Z 写像は広い平坦な部分と急勾配な部分 ( $x = 1/8$  の近傍) とをもっている。Matsumoto らはこの写像の雑音による影響を詳しく調べ Noise-Induced Order と呼ばれる興味ある現象を示した。Noise-Induced Order の現象の主な特徴は 1.2 節の (i)-(iv) にまとめた。

システム (1) の  $f(x)$  を B-Z 写像 (10) とし、パラメータ  $b$  が変化するにつれてシステム (1) のふるまいがどのように変わるかを調べる。このようにシステムのふるまいの定性的変化を調べるために注目するパラメータを特に分岐パラメータと呼ぶ。Fig.2 の分岐図は分岐パラメータ  $b$  に対してこの写像の生成する軌道の定常的なふるまいの変化を示している。横軸は分岐パラメータ  $b$  であり、縦軸は軌道  $\{x_n\}$  がほぼ定常状態に落ち着いたと考えられるときの軌道  $\{x_n\}$  が通る位置を表す。すなわち各々の  $b$  に対して、 $x_0 = 0$  なる軌道  $\{x_n\}$ ,  $n = 500, \dots, 2500$  を縦軸にプロットした。また分岐図は分岐パラメータが変化するにつれて、システムのアトラクタがどのように変化するかを示している。この図でいくつかの点が離れて打たれているように見える  $b$  の値では、B-Z 写像によって生成される軌道は周期的であり、点が重なって線のように見えるところでは軌道はカオティックなふるまいをしている。すなわち周期的な場合のアトラクタはいくつかの離散的な点で構成

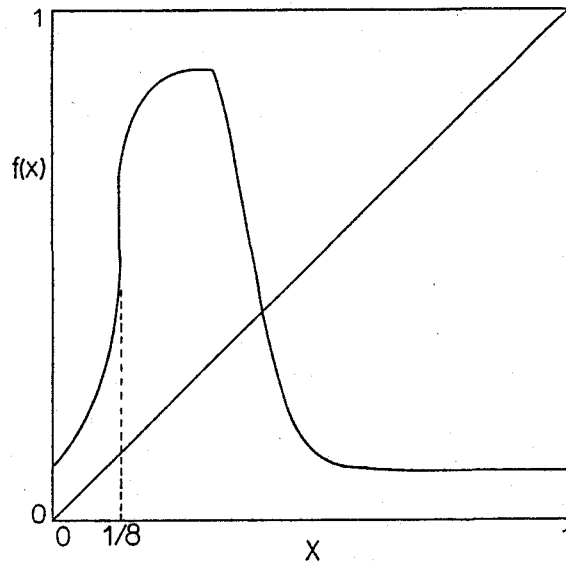


Fig.1: B-Z 写像.

され、カオティックなアトラクタは区間  $[0,1]$  内のちゅう密ないくつかのバンド（部分区間）で構成される。Matsumoto らはこの B-Z 写像を用いてシステム (1) の生成する軌道がカオティックなふるまいをするようにパラメータ  $b$  ( $b = 0.0121372859...$ ) を選び、そのとき (3) 式のようにシステムに微小な雑音を付加することにより、カオティックなふるまいが消失し周期性の強い状態への転移が起こることを示した。

B-Z 写像の分岐図はシステムが周期的なふるまいをする分岐パラメータ  $b$  の範囲が相対的に広く、その間にカオティックなふるまいをする分岐パラメータの範囲が存在するという際だった特徴をもっている。また (3), (10) 式よりわかるように、システム (1) に雑音を加えることは分岐パラメータ  $b$  をある平均値のまわりに不規則に変動させることと等しい。したがって大ざっぱに言えば、カオティックなふるまいをしているシステム (1) に雑音を加えるとそのパラメータ  $b$  の近くの周期的なふるまいをする分岐パラメータの場合の影響が強くでて、Noise-Induced Order の現象が生じるものと考えられる。もしカオティックなアトラクタの存在するパラメータの範囲が狭く周期的なアトラクタの存在するパラメータ範囲が相対的に広いならばカオティックなアトラクタは雑音を加えることによりその分岐パラメータのまわりに存在する周期的なアトラクタの影響を強く受けそして Noise-Induced Order の現象が現れることが期待される。B-Z 写像と同様な分岐構造すなわちカオティックなふるまいをするような分岐パラメータに比べて周期的な分岐パラメータの範囲がかなり広いという特徴をもつものであれば、他の様々な写像においても同様に Noise-Induced

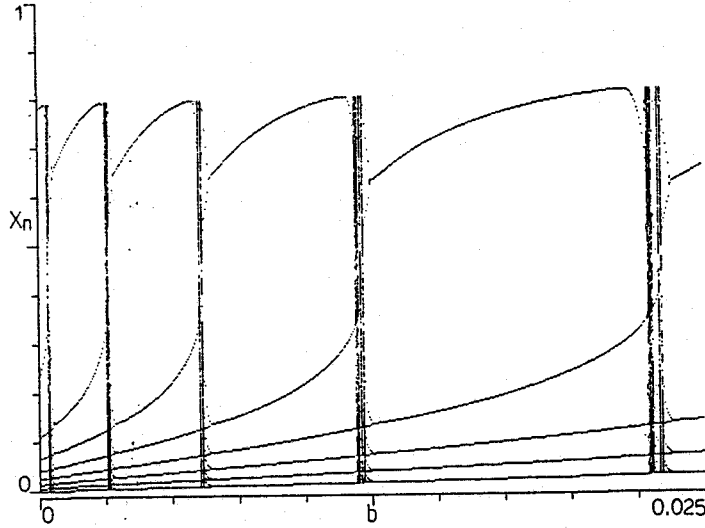


Fig.2: B-Z 写像の分岐図．各々の分岐パラメータ  $b$  に対して軌道  $\{x_n\}, (i = 500, \dots, 2500)$  をプロットした．

Order の現象が観察されることが予想される．このことを以下で見てみよう．

### 2.3 平坦な部分をもつテント写像 (TWFS 写像)

次のような写像を考える：

$$f(x) = \begin{cases} 2x + b + \epsilon, & (0 \leq x \leq \frac{a}{2}) \\ 2(a - x) + b + \epsilon, & (\frac{a}{2} < x \leq a) \\ \frac{\epsilon(x - a)}{a - 1} + b + \epsilon, & (a < x \leq 1). \end{cases} \quad (11)$$

この写像の概形を Fig.3 に示した．この写像はカオスを生成する最も簡単な写像として知られているテント写像に平坦な部分をつけただけの極めて簡単な写像になっている．以下ではこの写像を TWFS (Tent With a Flat Segment) 写像と呼ぶ． $\epsilon$  は写像の平坦さを表すパラメータであり，その値は十分小さくともものとする．TWFS 写像は，B-Z 写像を区分的に線形な写像で近似したものと考えられる．しかしながら，TWFS 写像には B-Z 写像のような急勾配な部分 (Fig.1 で  $x = 1/8$  の部分) は存在しないことは注意すべき点である．

Fig.4 に TWFS 写像の分岐図を示した．この図も Fig.2 と同様に数値計算により描いた．分岐パラメータ  $b$  の区間  $[0.06, 0.1]$  においてはシステムがカオティックになるような  $b$  の範囲は周期的になるような  $b$  の範囲に比べて相対的に狭い．一方，区間  $[0, 0.02]$  においてはカオティックなパラメータの範囲がかなり広い．(a) と (b) を比較すると，システムがカオティックになるようなパラメータの範囲は  $\epsilon$  の減少につれて狭くなることが分かる．Fig.4(c)

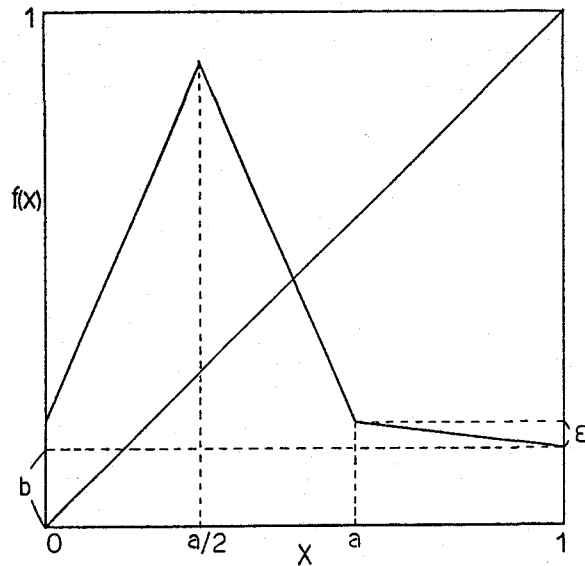


Fig.3: TWFS 写像.

と (d) は  $\epsilon = 0$  の場合である. Fig.4(d) は (c) において分岐パラメータ  $b$  の範囲  $[0.06, 0.07]$  を拡大したものである.  $\epsilon = 0$  の場合には TWFS 写像の分岐構造は複雑な入れ子構造をもち, 分岐パラメータ  $b$  が変わるにつれてさまざまな周期軌道が現れる. このように  $\epsilon = 0$  の場合の分岐図は極めて複雑であるように見えるがほとんど全ての分岐パラメータ  $b$  で軌道は周期的でありカオティックなふるまいは現れないことは注意すべき点である. このことは次の章で厳密に示す.

Fig.4(a)-(d) からわかるように, 平坦な部分の傾き  $\epsilon$  が小さくなるにつれてシステムがカオティックにふるまうような分岐パラメータ  $b$  の範囲は減少し, その分岐構造は  $\epsilon = 0$  の場合の分岐構造に近づいていく. Fig.2 と Fig.4 とを比べると TWFS 写像の分岐図と B-Z 写像の分岐図は全体的な構造は異なっているが,  $\epsilon$  が十分小さいときこれら二つの分岐図は次のような意味で似た分岐構造をもっている: すなわち, TWFS 写像は平坦な部分の傾き  $\epsilon$  が十分小さいときシステムが周期的にふるまうような分岐パラメータの範囲は広く, システムがカオティックになるような分岐パラメータの範囲は非常に狭い. 従って, TWFS 写像においても B-Z 写像と同様に Noise-Induced Order の現象が観察されることが予想される. このことを次の節で見てみよう.

## 2.4 TWFS 写像と Noise-Induced Order

この節では写像  $f(x)$  として TWFS 写像 (11) を用い, システム (1) の雑音による影響すなわちシステム (3) のふるまいを数値計算により調べる. そしてこの TWFS 写像におい

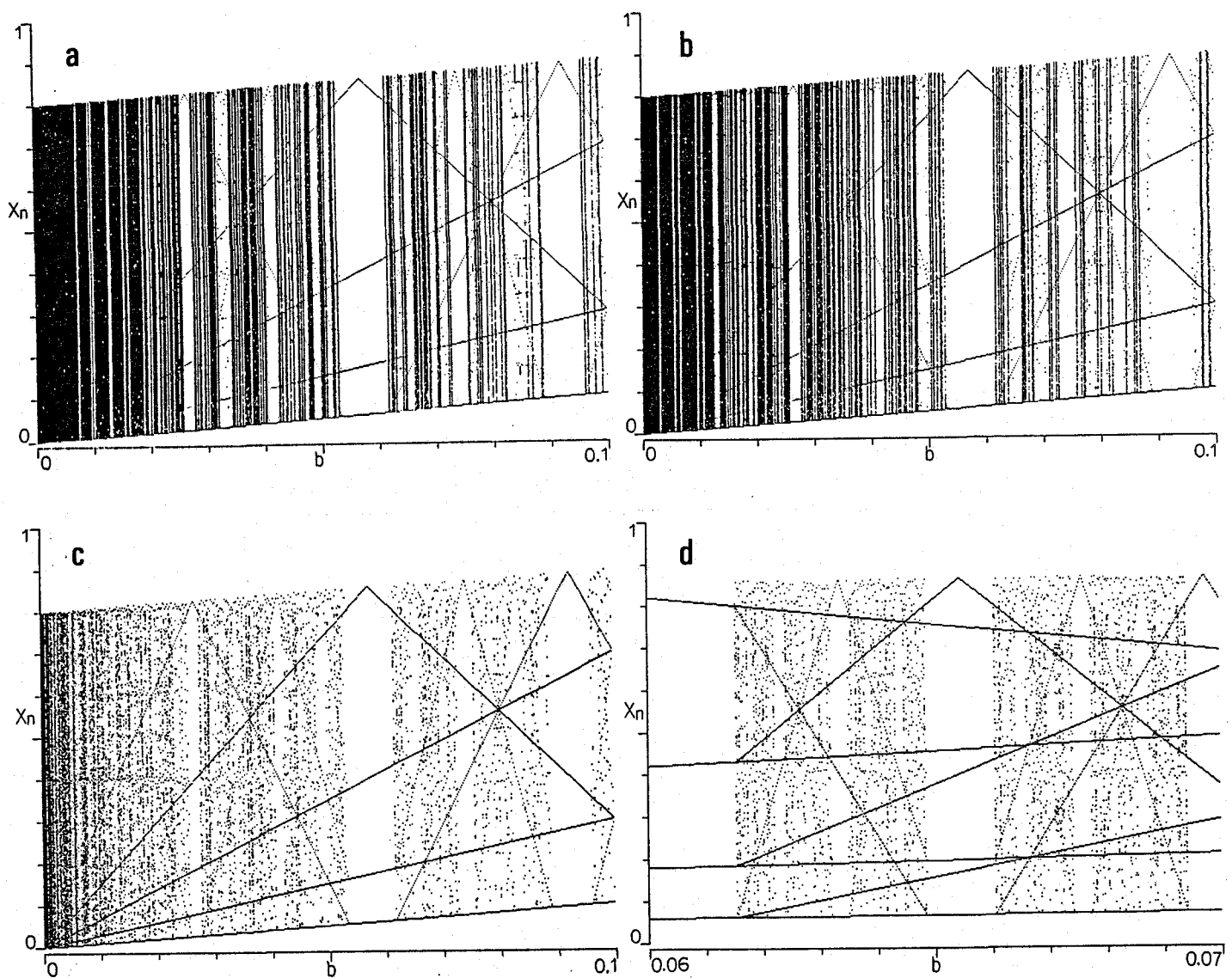


Fig.4: TWFS 写像の分岐図. Fig.2と同様に描いた.  $\epsilon$ の値は次の通り:(a) $1 \times 10^{-4}$  (b) $1 \times 10^{-5}$  (c)0 (d)0. (d)は(c)の分岐パラメータの区間 $[0.06, 0.07]$ の拡大図である.  $\epsilon = 0$ の場合様々な周期軌道が現れ, その分岐構造は複雑な入れ子構造を成している.

でも, Matsumoto らが B-Z 写像を用いて示した Noise-Induced Order の現象 (i)-(iv) がすべて観察されることを示す。これらの数値計算をもとに Noise-Induced Order の現象の生じる要因を探る。以下の数値計算では TWFS 写像 (11) のパラメータ  $a$  は 0.8 に固定するものとする。

#### 2.4.1 確率密度 (不変密度)

$\epsilon = 0.000001$  の場合, TWFS 写像 (11) で分岐パラメータ  $b$  を 0.08406 に選ぶとシステムの生成する軌道はカオティックなふるまいをする。このとき Fig.4(b) からわかるようにシステムのアトラクタは, 周期軌道の場合のように離散的な点でなく単位区間  $I = [0, 1]$  内のいくつかの稠密なバンド (部分区間) で構成される。したがって, システムのふるまいを確率的な方法を用いて記述することが必要になる。以下ではシステム (3) の確率密度 (不変密度) を数値的に計算しよう。

まず, 単位区間  $I$  を 500 個の同一なセグメントに分割する。このとき, 時刻  $n$  におけるシステムの状態  $x_n$  が  $i$  番目のセグメントに入っている確率を  $P(i)$  とする。ここでは式 (3) の  $10^5$  回の繰り返し, すなわち軌道  $\{x_n\}$ , ( $n = 500, \dots, 10^5$ ) に対してそのヒストグラムを計算し  $P(i)$  を近似する。つまり確率密度  $P(i)$ , ( $i = 1, \dots, 500$ ) はある初期値から出発した軌道  $\{x_n\}$  の単位区間内における頻度分布を与える。

確率密度  $P(i)$  を Fig.5 に示した。Fig.5(a) は雑音がない場合 ( $\sigma = 0$ ) の確率密度であり, (b) は雑音を加えた場合 ( $\sigma = 0.00004$ ) である。Fig.5(a) においては確率密度に数個の鋭いスパイクが存在する。したがってこのカオスはある種の周期性をもっていると考えられる。Fig.5(a) と (b) を比較すると, システムに雑音を加えることによってこれらの鋭いスパイクの数は減少し, それらスパイクの高さはより高くなっていることがわかる。すなわち, カオティックな軌道は雑音を加えた方が雑音を加えない場合より特定のセグメントをより頻繁に訪れる。カオティックな軌道は雑音を加えた方がより強い周期性をもつことが分かる。このことは雑音がかオティックな軌道の乱雑さを減少させていることを意味している。この意味である種の雑音に誘導された秩序 (Noise-Induced Order) が現れていることを示している。

Fig.5(c) は,  $\epsilon = 0$  としてシステムに雑音を加えた場合である。(3) と (11) 式とを比べればわかるようにシステムに雑音を加えることと分岐パラメータ  $b$  をある平均値のまわりに変動させることと等しい。また 2.3 節でも述べたように  $\epsilon = 0$  の場合システムは周期的

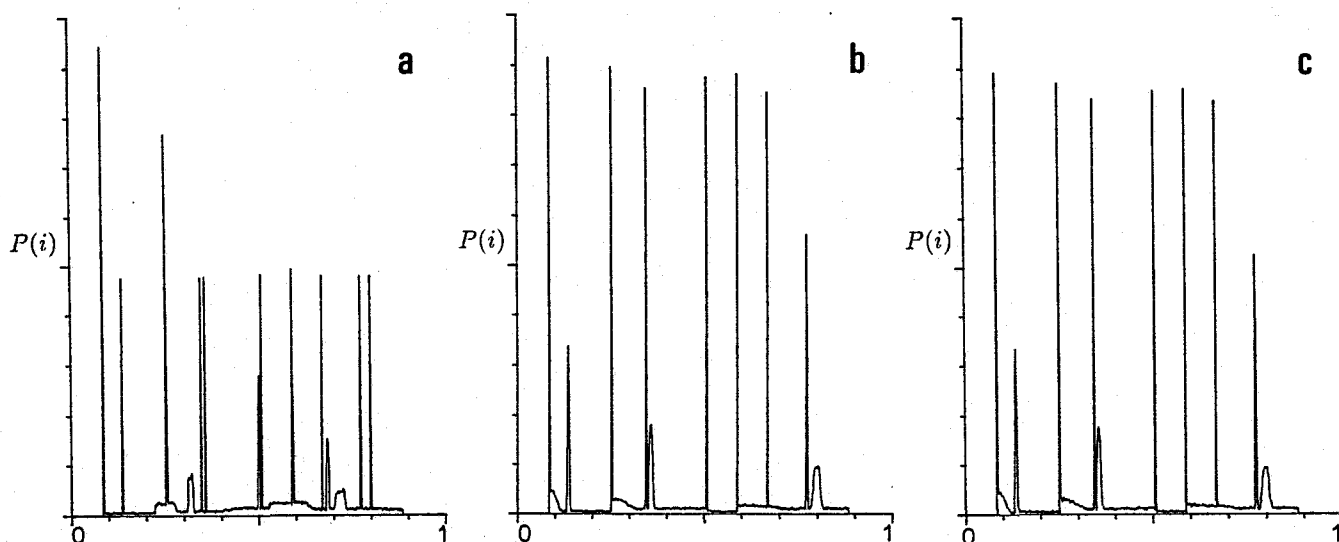


Fig.5: 確率密度  $P(i)$ .  $b = 0.08406$ . (a) カオティックな場合 ( $\epsilon = 1 \times 10^{-5}, \sigma = 0$ ) (b) カオティックな場合に雑音を付加したもの ( $\epsilon = 1 \times 10^{-5}, \sigma = 4 \times 10^{-5}$ ) (c) 周期的な場合に雑音を付加したもの ( $\epsilon = 0, \sigma = 4 \times 10^{-5}$ ).

であり、カオティックなふるまいは現れない。したがって、このときシステムに雑音を加えることの効果は分岐パラメータ  $b$  の周りに存在するさまざまな周期軌道を平均することであると考えられる。Fig.5(b) と (c) を比べるときわめて類似しており二つの図はほとんど区別がつかない。このことはシステムに雑音を加えるとシステムがカオティックにふるまう場合の影響はほとんどでず、その分岐パラメータのまわりに存在する周期軌道の影響が強くでていることと考えられる。また、このことは雑音がない場合のシステムの周期軌道の分岐構造を調べることによって雑音を加えたシステムのふるまいを調べることができる可能性を示唆している。Noise-Induced Order の現象はこのように周期軌道の分岐構造と密接な関連をもっているものと考えられる。これらのことについては4章で少し詳しく議論を行う。

もし、システムがカオティックにふるまうような分岐パラメータの範囲が狭く、そのパラメータの周りにシステムが周期的にふるまうような分岐パラメータが広く存在している場合にはそのカオスは雑音を加えることによってそのまわりの周期軌道の影響を強く受け Noise-Induced Order の現象が現れるものと考えられる。

### 2.4.2 パワースペクトル

次に Noise-Induced Order の現象を別な角度から見てみよう。すなわち 1.2節で述べた Noise-Induced Order の特徴 (i) を示す。FFT を用いて軌道  $\{\hat{x}_n\}$  のパワースペクトル密度を計算しよう。これらの結果を Fig.6 に示した。Fig.6(a) は雑音がない場合のパワースペクトルである。雑音の大きさ  $\sigma$  を少しづつ大きくし、Fig.6(b) から (d) に各々の場合のパワースペクトルを示した。Fig.6(a) ではパワースペクトルにいくつかのピークが見られる。このことは Fig.5(a) ですで見たとようにこのカオスはある種の周期性をもっていることを示している。システムに加えられる雑音が大きくなるにつれてこれらのピークの振幅は大きくなる。 $\sigma = 0.00004$  のとき、これらのピークは最も高くなる。さらに雑音の大きさが増すとこれらのピークは消滅する。

Fig.6 は前節で見たのと同様に、ある大きさの雑音に対して雑音に誘導された周期性が現れることを示している。

### 2.4.3 リアプノフ指数

この節では、システムのカオティックなふるまいを調べるために別の特性量を計算し、システムのカオティックな性質が雑音を加えることによってどのように変化するかを調べる。

2.1節で見たようにリアプノフ指数  $\lambda$  は、近い初期値から出発した二つの軌道が平均してどのくらいの割合で離れていくかを計る量である。ここでシステム (1) のリアプノフ指数は式 (8) を用いて数値的に計算することとする。システム (1) に雑音が付加された場合、すなわちシステム (3) のリアプノフ指数は式 (8) において軌道  $\{x_n\}$  を  $\{\hat{x}_n\}$  で置き換えることによって同様に計算することとする。 $\lambda < 0$  は軌道  $\{x_n\}$  が周期的または局所的に安定なことを表し、 $\lambda > 0$  は軌道がカオティックであり不安定であることを表す。

Fig.7 は分岐パラメータ  $b$  が変化するにつれて、システムのリアプノフ指数  $\lambda$  がどのように変わるかを示している。Fig.7(a) と (b) は雑音がない場合 ( $\sigma = 0$ ) であり、 $\epsilon$  は (a) 0.00001, (b) 0.000001 である。これらの図から  $\epsilon$  が減少するにつれてシステムがカオティックにふるまうような分岐パラメータ  $b$  の範囲 ( $\lambda > 0$  の範囲) は狭くなることがわかる。このことは Fig.4(a), (b) で見たことと一致している。

Fig.7(c) と (d) はそれぞれ (a) と (b) に雑音を加えた場合 ( $\sigma = 0.005$ ) である。Fig.7(b) と (d) を比べると、区間  $[0.06, 0.1]$  内のほとんどすべての  $b$  の値で雑音を加えることによってシステムのリアプノフ指数はその値を正から負に変化させていることがわかる。すな

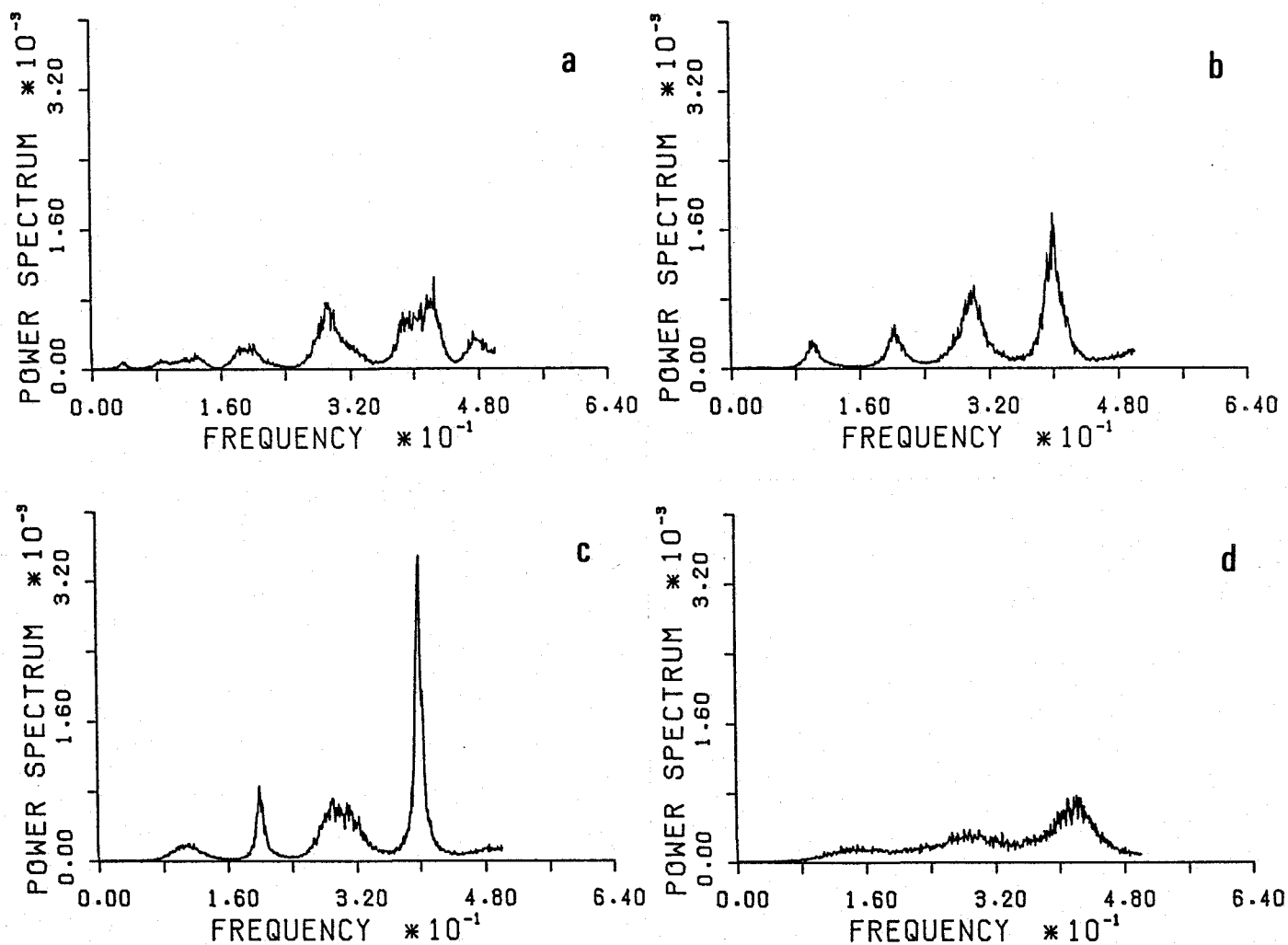


Fig.6: パワースペクトル密度.  $b = 0.08406, \epsilon = 1 \times 10^{-5}$ .  $\sigma$ の値は次のとおり: (a)0 (b) $1 \times 10^{-5}$  (c) $4 \times 10^{-5}$  (d) $1 \times 10^{-2}$ . スペクトルは1024点のFFTを50回行い, その平均により計算した.

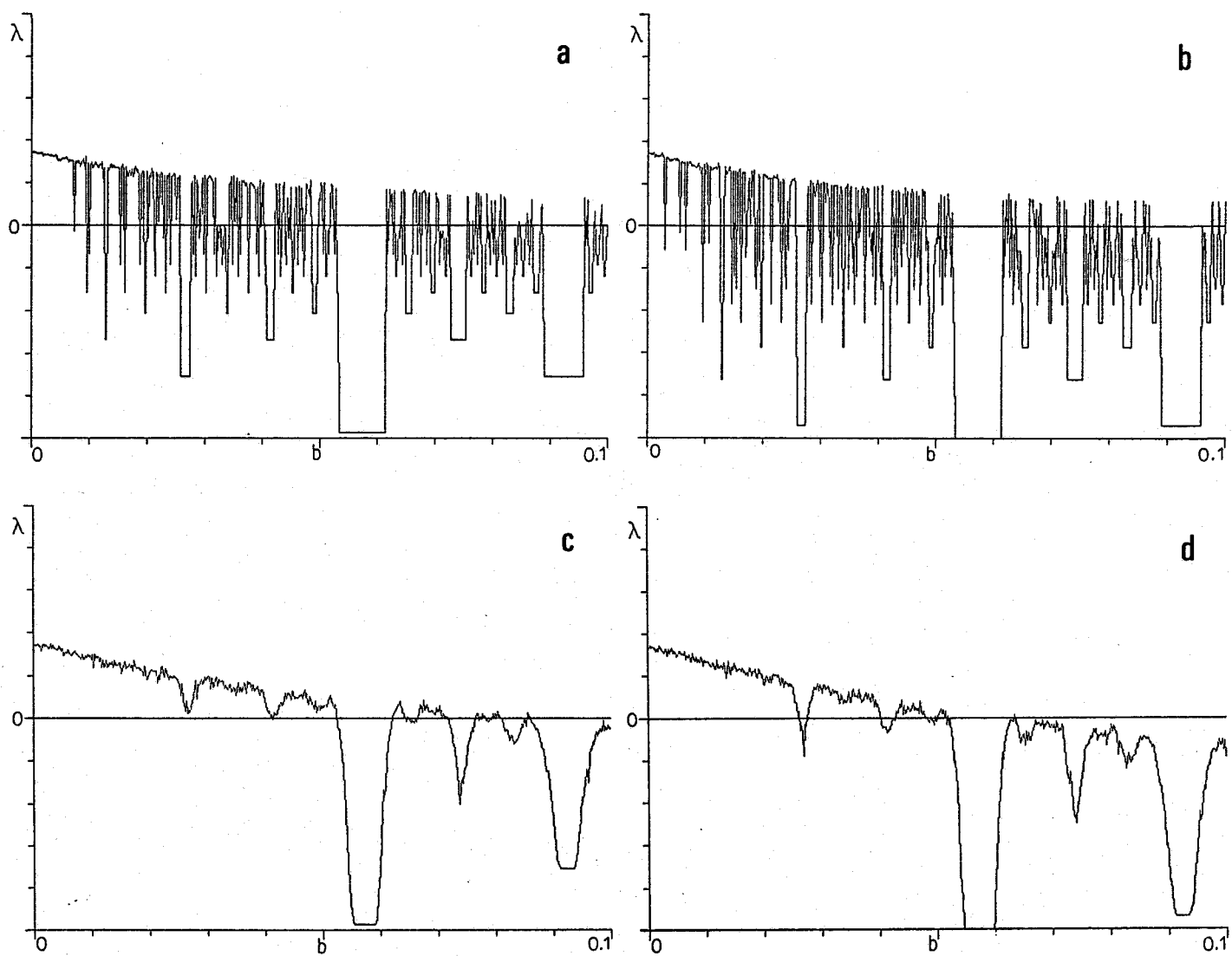


Fig.7: リアプノフ指数 $\lambda$  vs.  $b$  .  $\lambda$ は(8)式を用いて計算した. (a) $\epsilon = 1 \times 10^{-4}, \delta = 0$   
 (b) $\epsilon = 1 \times 10^{-5}, \delta = 0$  (c) $\epsilon = 1 \times 10^{-4}, \delta = 0.005$  (d) $\epsilon = 1 \times 10^{-5}, \delta = 0.005$  (c),(d) はそれぞれ雑音がない場合 (a),(b) に雑音を付加したものである.

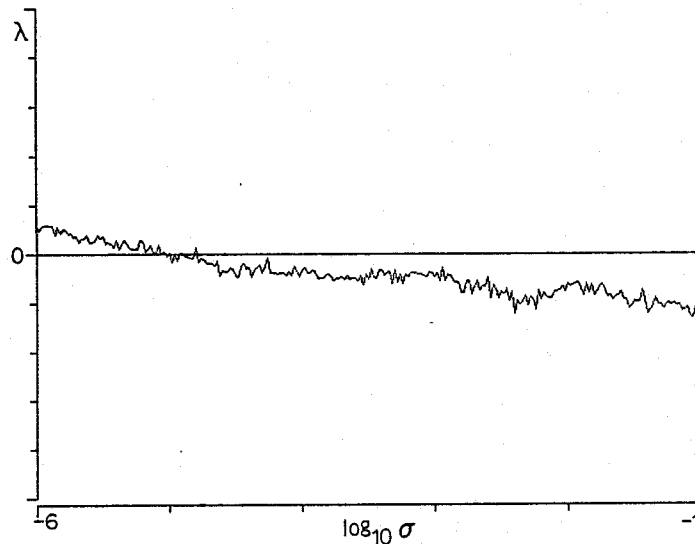


Fig.8: リアプノフ指数  $\lambda$  vs. 雑音レベル  $\sigma$ .  $b = 0.08406, \epsilon = 1 \times 10^{-5}$ .

わち、リアプノフ指数の意味でカオティックな状態から周期性の強い状態への転移が起こっていることが分かる。平坦な部分の傾き $\epsilon$ がこの場合よりも少し大きい場合は事情は異なる。(a)と(c)を比較すると、区間 $[0.06, 0.1]$ の範囲の $b$ では、システムのリアプノフ指数は雑音を加えることによって減少はしているけれども、その値は負には変化していない。しかしこの場合にも雑音の大きさ $\sigma$ を大きくすればリアプノフ指数は雑音を加えることによって正から負に変化する。このことはカオスを消滅させるために必要な雑音の大きさは $\epsilon$ が小さいほど小さくてよいことを意味している。

Fig.8は分岐パラメータ $b$ を固定し、雑音の大きさ $\sigma$ が変わるにつれてリアプノフ指数がどのように変化するかを示している。 $\sigma$ が大きくなるにつれてリアプノフ指数 $\lambda$ は減少している。 $\lambda$ はある雑音レベルでその値を正から負に変化させる。このことは雑音の大きさが大きいほど、カオスはその分岐パラメータのまわりに存在する周期軌道によって強く影響されることを表している。

雑音の大きさが非常に大きい場合、例えば $\sigma = 0.01$ の場合リアプノフ指数は負の値をとっている。しかしながらそのとき軌道のパワースペクトルにはほとんど周期性は現れていない(Fig.6(d)を見よ)。このことは、さまざまなところで指摘されているように、大きな雑音の存在下ではリアプノフ指数は軌道のカオティックなふるまいを調べるための適当な指数ではないことを示している。

この節では、リアプノフ指数を用いて、カオスが雑音によって消滅することを見た。またそのようなカオスを消滅するために必要な雑音の大きさは平坦な部分の傾き $\epsilon$ が小さく

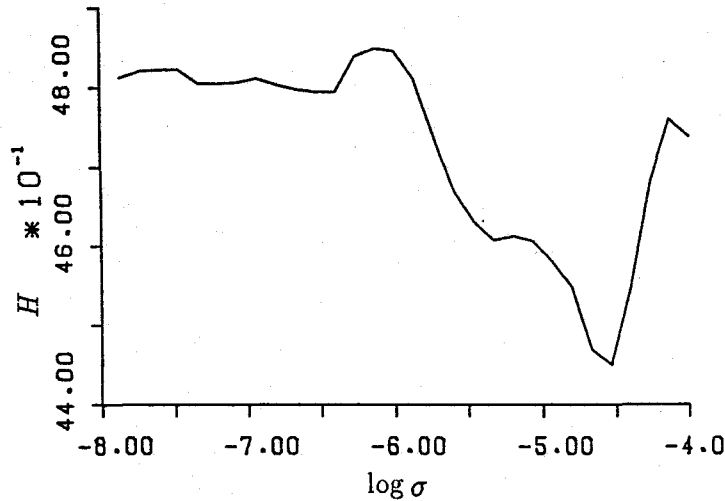


Fig.9: エントロピー  $H$  vs. 雑音レベル  $\sigma$ .  $b = 0.08406, \epsilon = 1 \times 10^{-5}$ .

なるにつれて減少することを見た。このことは Noise-Induced Order の現象において平坦な部分が重要な役割を担っていることを示唆している。

#### 2.4.4 エントロピー

2.4.1節では確率密度を用いて雑音がカオスの乱雑さを減少させることを定性的に示した。この節では、このことをエントロピーを用いて定量的に見てみよう。

単位区間  $[0,1]$  を 500 個のセグメントに分割する。この分割に対してシステム (3) のエントロピー  $H$  を次のように定義する：

$$H = - \sum_i P(i) \log P(i) \quad (12)$$

ここで  $P(i)$  は、Fig.5で示したような確率密度である。Fig.9は雑音の大きさ  $\sigma$  が増加するにつれてエントロピー  $H$  がどのように変化するかを示している。 $H$  は雑音の大きさが  $\sigma = 10^{-5}$  と  $\sigma = 10^{-4}$  の間で最小値をとっている。このことは、ある雑音のレベルでカオスの乱雑さが減少していることを表している。この結果は Matsumoto らが B-Z 写像を用いて示した結果と一致している。

Matsumoto らは、Noise-Induced Order の要因を明らかにするために記号力学的な表現を用いて B-Z 写像を詳しく調べている。彼らはシステム (3) を  $n$  次のマルコフ情報源と見なしそのエントロピーを計算している。彼らはこのエントロピーもある雑音レベルで減少することを示している。以下では、TWFS 写像に対してこのエントロピーを計算し Matsumoto らと全く同様の結果が得られることを示す。

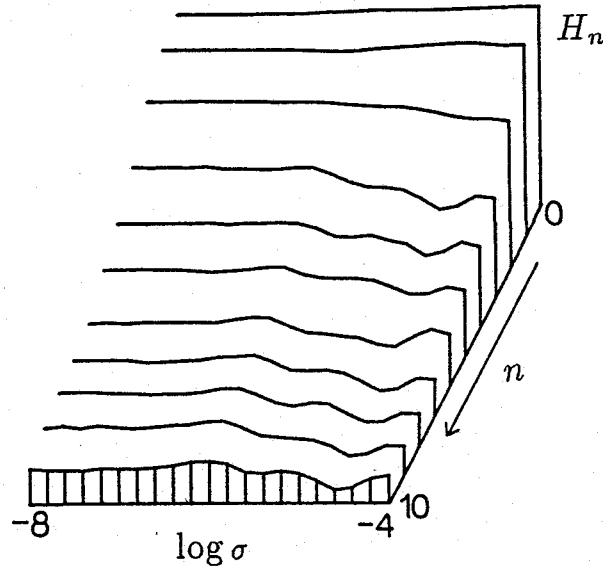


Fig.10: エントロピー  $H_n$  ( $n = 1, \dots, 10$ ) vs. 雑音レベル  $\sigma$ .  $b = 0.08406, \epsilon = 1 \times 10^{-5}$ .

単位区間  $[0,1]$  を二つのセグメント  $[0, a/2]$ ,  $(a/2, 1]$  に分割する. 各々のセグメントを記号 L,R で表す. かくしてシステム (3) の時間的な変動  $\hat{x}_0, \hat{x}_1, \hat{x}_2, \dots$  は軌道  $\{\hat{x}_n\}$  が訪れるセグメントに対応する記号の列:

$$s = \{s_0, s_1, s_2, \dots\}, \quad s_i = L, R. \quad (13)$$

で表されることになる. ここで記号列  $s = \{s_0, s_1, s_2, \dots\}$  を  $n$  次のマルコフ情報源からの出力と見なす. すなわち記号列  $s_0, s_1, s_2, \dots$  を  $n$  次のマルコフ過程であると見なす. このマルコフ情報源のエントロピー  $H_n$  を次のように定義する:

$$H_n = - \sum p(s_1, \dots, s_{n+1}) \log p(s_{n+1}/s_1, \dots, s_n) \quad (14)$$

ここで和は全ての可能な記号列  $s^{n+1} = (s_1, \dots, s_{n+1})$ ,  $s_i = L, R$  に対してとる. 確率  $p(s_1, \dots, s_{n+1})$  は記号列  $(s_1, \dots, s_{n+1})$  が生じる確率を表し,  $p(s_{n+1}/s_1, \dots, s_n)$  は記号列  $(s_1, \dots, s_n)$  を観測した後に記号  $s_{n+1}$  を見いだす確率を表す. Fig.10は雑音レベル  $\sigma$  が変化するにつれて  $H_n$ , ( $n = 1, \dots, 10$ ) がどのように変化するかを示している. 次数  $n$  が大きくなるにつれて  $H_n$  はある関数に近づいていく様子が分かる. すなわち記号列  $s_0, s_1, s_2, \dots$  を生成するシステム (3) は  $n = 10$  次のマルコフ情報源でよく近似されうることが分かる. またこの図からマルコフ情報源としてのエントロピー  $H_n$  もある雑音のレベルで減少することが分かる.

Matsumoto らはこの現象の生じる原因を詳しく調べ, マルコフ分割の幅が一様でないとき雑音は分割の幅が小さい状態を消滅させ, そのことによって Noise-Induced Order の

現象が起こるとした[30]。マルコフ分割の非一様性は写像の急勾配さによって生じる。しかしながら TWFS 写像には平坦な部分は存在するが急勾配な部分は存在しない。このことは Matsumoto らの考察に反して、雑音によるエントロピーの減少という現象においても急勾配な部分ではなく平坦な部分が重要な役割を担っていることを示唆している。

#### 2.4.5 平均相互情報量

Matsumoto らは Noise-Induced order の現象をさらに詳しく調べその“実際の”要因を明らかにするために次元写像の情報理論的な解析を行っている。すなわち、彼らは B-Z 写像を用いて相互情報量を計算し、1.2節で述べた(iv)の現象を示した。彼らは Noise-Induced Order のメカニズムを議論し、Noise-Induced Order の現象の存在は相互情報量のグラフの形から決定できると主張した[32]。この節では、TWFS 写像に対して相互情報量を計算し Matsumoto らが示したものと全く同様の現象を示す。

まず、単位区間  $[0,1]$  を 500 個の同一なセグメントに分割する。この分割に対して相互情報量  $I(n)$  を以下のように定義する：

$$I(n) = - \sum_i P(i) \log P(i) + \sum_{i,j} P(i) P_n(j/i) \log P_n(j/i) \quad (15)$$

ここで  $P(i)$  は Fig.5 に示したものと同様の確率密度であり、 $P_n(j/i)$  は  $i$  番目のセグメントから出発した軌道が  $n$  時間の後に  $j$  番目のセグメントを訪問する確率である。相互情報量  $I(n)$  を数値的に計算し Fig.11 に示した。Fig.11(a) が雑音がない場合の相互情報量であり、(b) が雑音がある場合のものである。雑音がない場合には  $I(n)$  は振動しながら減少し、一方雑音の存在下では指数関数的に減少することが分かる。この結果は Matsumoto らが B-Z 写像を用いて示したものと完全に一致している。

#### 2.5 結論

本章では平坦な部分をもつテント写像 (TWFS 写像) を提案し、この極めて簡単な写像を用いても Matsumoto らが B-Z 写像を用いて示した Noise-Induced Order の現象がすべて観察されることを数値計算により明らかにした。このことは単に簡単な写像の例を提示したというだけでなく、Noise-Induced Order の現象を解明する上で重要な意味をもつ。すなわち、Matsumoto らは一連の研究の中で Noise-Induced Order の現象が生じるのは写像に急勾配な部分があるためであると述べているが、TWFS 写像にはそのような部分

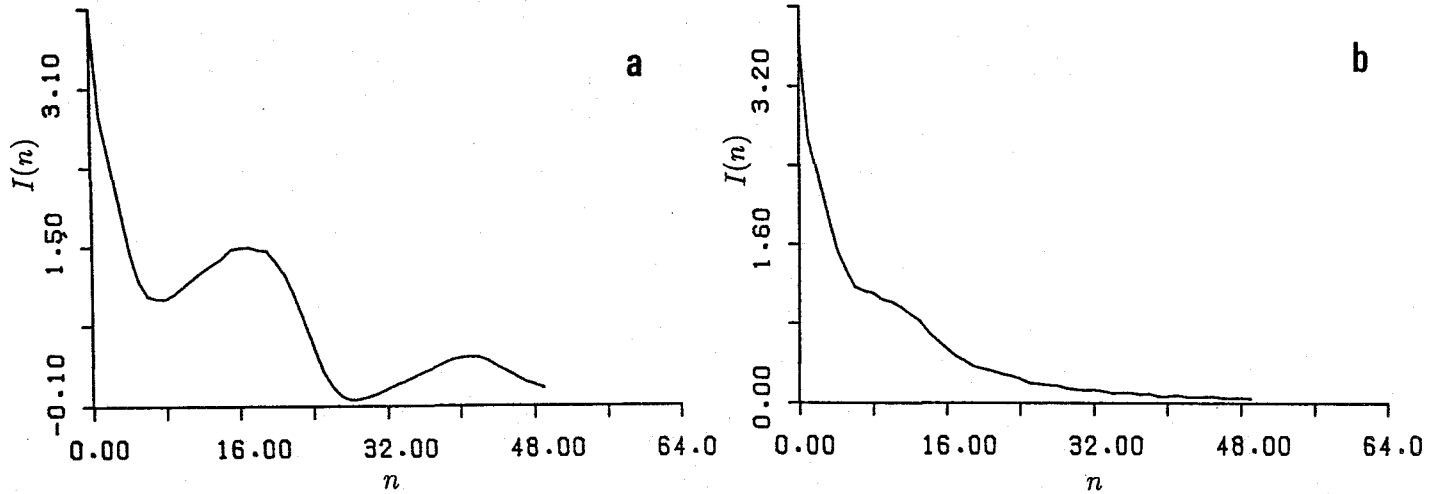


Fig.11: 平均相互情報量  $I(n)$  .  $b = 0.08406, \epsilon = 1 \times 10^{-5}$  .  $\delta$ : (a)0 (b)0.001 . (a) 雑音を加えない場合.  $I(n)$  は振動しながら減少する. (b) 雑音を加えた場合.  $I(n)$  は指数的に減少する.  $I(n)$  は(15)式を用いて計算した. ここで, 区間[0.1]を500個のセグメントに分割しそれぞれのセグメントの中に一様に分布する  $10^3$  個の点を取り  $P_n(j/i)$  を計算した.

は存在しない. TWFS 写像はただ平坦な部分をもつだけの単純な写像である. このことは, Matsumoto らの考察に反して Noise-Induced Order の現象が生じるのは写像に急勾配な部分が存在するためでなく平坦な部分が存在するためであることが強く示唆される.

本章の目的は Noise-Induced Order の現象を示すきわめて単純な写像の例を示すことであるため, さまざまな統計量, リアプノフ指数, エントロピーなどを数値計算により示すにとどめた. Noise-Induced Order の現象を解明するためにはこれらの統計量を詳しく調べる必要がある. このことは今後の課題であるが, TWFS 写像はきわめて単純な写像であるためこれらの統計量を厳密に解析するうえで大きな道が開けたといえる.

この章では特に写像  $f(x)$  が TWFS 写像の場合についてのみ Noise-Induced Order の現象が起こることを示したが, 平坦な部分をもつカオティックな写像であればそのほかの写像, 例えば  $f(x) = ax \exp(-bx^2)$  のようなものでも同様な現象が観察される. またここでは外部雑音として一様な密度をもつ一様雑音を用いたが, 数値計算によればこの雑音をガウス雑音のような他の雑音に変えてもここで観察した現象の定性的な性質にはほとんど影響がない. また, (3) 式に示したようにシステムの雑音による影響を調べるときにシステムの加法的な雑音による影響についてのみ調べ, システムの乗法的な雑音については考慮しなかったが, 一次元の離散力学系においてはこれら二種類の雑音は等価である [8] のでこのことは問題がないことに注意する.

写像に平坦な部分が存在することにより、その分岐構造はシステムが周期的にふるまうような分岐パラメータの範囲は広く、カオティックになるような範囲は極めて狭いという特徴をもつ。このような分岐構造をもつ場合、そこに生じるカオスはシステムに雑音を加えることによってその分岐パラメータのまわりに存在する周期軌道の影響を強く受け、Noise-Induced Order の現象が生じるものと考えられる。Noise-Induced Order の現象はカオスが雑音の存在下では周期軌道の影響を受け、カオスの乱雑さが減少し周期性が強まる現象であるといえる。ではこのときどのような周期性が強まるのか。Noise-Induced Order の現象を完全に理解するためにはこの質問にも答えなければならないであろう。このことは簡単ではないが本章で行った解析によりその糸口がつかめたと言える。すなわち本章で数値計算により示したように Noise-Induced Order の現象は写像の分岐構造、つまりカオスを示す分岐パラメータのまわりにどのような周期軌道が存在するかということと密接な関連をもつので、それら分岐構造に着目すれば雑音を加えたときに生じる周期性を明らかにできる可能性がある。

2.3節で示したように TWFS 写像の分岐構造は複雑な入れ子構造をなし、それ自体極めて興味深いものである。また上で述べたように Noise-Induced Order の現象は TWFS 写像の分岐構造と密接な関連をもつことが予想され、TWFS 写像の分岐構造をあきらかにすることは Noise-Induced Order の現象を解明するうえでも重要な問題である。次の章ではこの TWFS 写像の分岐構造を詳しく調べることにする。

### 3. 平坦な部分をもつテント写像の分岐構造

前章では Noise-Induced Order の現象が写像の分岐構造と密接な関連をもつことを見た。ここでは Fig.4 で数値計算により示したような TWFS 写像の分岐構造を解析的に調べる。

#### 3.1 数学的準備

##### 3.1.1 TWFS 写像の標準形

Fig.12 よりわかるように単位区間  $[0,1]$  から出発した軌道はいつかは区間  $[f^2(a/2), f(a/2)]$  に入り、そしてその区間から外に出ることはない。したがって TWFS 写像 (11) によって生成される軌道の定常的なふるまいを調べるためには写像  $f(x)$  を区間  $[f^2(a/2), f(a/2)]$  に制限したものを調べればよいことが分かる。よって以下ではこの写像に同型な写像 (標準形)  $f(x)$ :

$$f(x) = \begin{cases} 2x + 2a, & (0 \leq x \leq \frac{1}{2} - a) \\ -2x + 2 - 2a, & (\frac{1}{2} - a < x \leq \alpha) \\ 2\delta(1 - x), & (\alpha < x \leq 1) \end{cases} \quad (16)$$

$$\alpha = \frac{1 - \delta - a}{1 - \delta}, \quad (0 \leq a \leq \frac{1}{2})$$

を考察する。この写像の概形を Fig.13 に示した。以下では、この写像  $f(x)$  の性質を詳しく調べる (混乱のない限り写像 (16) も (11) と同様に TWFS 写像と呼ぶ)。

##### 3.1.2 記号力学的方法

この節では、TWFS 写像の分岐構造を解析するための準備として記号力学的方法を導入する。まず、いくつかの定義を行う。

**定義 6** 実数  $x \in [0, 1]$  に記号  $L, C, R$  を以下のように対応させる。

$$\theta(a, x) = \begin{cases} L, & (0 \leq x \leq \frac{1}{2} - a) \\ C, & (x = \frac{1}{2} - a) \\ R, & (\frac{1}{2} - a < x \leq 1) \end{cases} \quad (17)$$

このとき  $x$  から出発した軌道  $\{x_n\} : x_0 = x, x_1 = f(x), \dots, x_n = f^n(x), \dots$  の道程 (Itinerary)  $I(a, x)$  とは,

$$I(a, x) = \{I_n(a, x)\}_{n \geq 0}, \quad I_n(a, x) = \theta(a, f^n(x)) \quad (18)$$

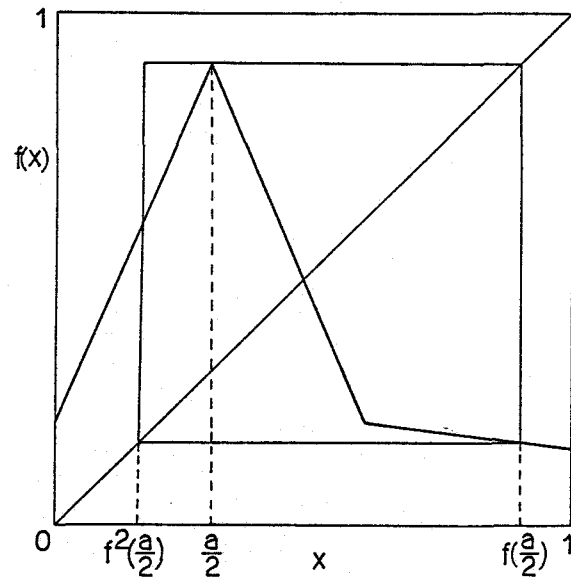


Fig.12: TWFS 写像と標準形.

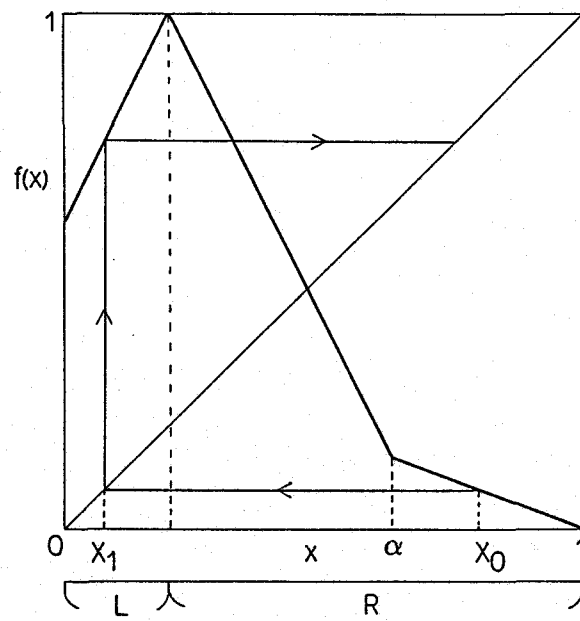


Fig.13: TWFS 写像と軌道.

で定義される記号  $L, C, R$  の列をいう。

すなわち TWFS 写像 (16) によって生成された軌道  $\{x_n\}$  に対して、その各々の時刻での軌道の点  $x_n$  が TWFS 写像の頂点 ( $x = 1/2 - a$  のところ) より左にあれば記号  $L$  で、右にあれば  $R$  で表す。Fig.13 に軌道  $x_0, x_1, \dots$  の例を示した。この軌道の道程は  $RLR \dots$  である。

次にこのように定義された  $L, C, R$  の記号列の間にいくつかの演算を定義する。

定義 7 (演算)  $A$  を有限列,  $B$  を有限または無限列とする:

$$\begin{aligned} A &= a_1 a_2 \dots a_n, \\ B &= b_1 b_2 \dots b_n \dots, \quad a_i, b_i = L, C, R \end{aligned}$$

このとき以下のようにいくつかの演算を定義する。

- (a) 有限列  $A$  に対して  $n$  をその長さといい,  $|A|$  で表す。
- (b)  $AB = a_1 \dots a_n b_1 \dots$  を  $A$  と  $B$  の連結 (concatenation) という。
- (c)  $A^*$ :  $A$  の無限の連結  $AA \dots$  を表す。
- (d)  $\bar{A}$ :  $\bar{A} = a_1 \dots C a_n$ . すなわち, 有限列の最後から 2 番目の記号を  $C$  で置き換えたものを表す。
- (e)  $\hat{A}$ :  $\hat{A} = a_1 \dots d_{n-1} a_n$ , ここで  $d_{n-1}$  は  $a_{n-1} = L$  ならば  $d_{n-1} = R$ ,  $a_{n-1} = R$  ならば  $d_{n-1} = L$ . すなわち  $\hat{A}$  は記号列  $A$  の最後から 2 番目の記号の  $L$  と  $R$  を交換したものを表す。
- (f)  $[B]_i$ :  $[B]_i = b_1 b_2 \dots b_i$ . すなわち長さ  $i$  の接頭語を表す。
- (g)  $N(A)$ : 記号列  $A$  に含まれる記号  $R$  の数を表す。
- (h)  $B = b_1 b_2 b_3 \dots$  に対して  $\varphi(B) = b_2 b_3 \dots$ . この  $\varphi$  をシフトオペレータという。また  $\varphi^n(B), n = 2, 3, \dots$  は

$$\varphi^n(B) = \varphi(\varphi^{n-1}(B)), \quad n = 2, 3, \dots$$

によって定義する。このとき, 簡単であるが重要な関係式:

$$\varphi^n(I(a, x)) = I(a, f^n(x)), \quad n = 1, 2, \dots \quad (19)$$

が成立する。

次に二つの記号列  $A, B$  の間に順序  $A < B$  を導入する（ただし，誤解のおそれのない限り普通の不等号  $<$  をそのまま用いる）。

定義 8（順序）二つの記号列

$$\begin{aligned} A &= a_1 \cdots a_{n-1} a_n \cdots, \\ B &= b_1 \cdots b_{n-1} b_n \cdots, \quad a_i, b_i = L, C, R \end{aligned}$$

を考える。まず，記号  $L, C, R$  の間の順序関係  $<$  を次のように定義する：

$$L < C < R.$$

このとき，次のどちらかの場合に  $A < B$  と定義する。

○1)  $a_1 \cdots a_{n-1} = b_1 \cdots b_{n-1}$  かつ  $N(a_1 \cdots a_{n-1})$  が偶数で  $a_n < b_n$

○2)  $a_1 \cdots a_{n-1} = b_1 \cdots b_{n-1}$  かつ  $N(a_1 \cdots a_{n-1})$  が奇数で  $b_n < a_n$ 。

また， $A > B, A \leq B, A \geq B$  などとも同様に定義することとする。

### 3.2 TWFS 写像の分岐構造—システムが周期的な場合—

#### 3.2.1 TWFS 写像での“分岐問題”からテント写像での“初期値問題”へ

この節では (16) 式において  $\delta = 0$  の場合（Fig.14）を考察する。このとき分岐パラメータ  $a$  が変化するにつれて写像  $f(x)$  の生成する軌道の性質がどのように変わるかを調べる。まず分岐図を数値計算により描き Fig.15 に示した。Fig.15(b) は (a) の一部分を拡大した図である。このように， $\delta = 0$  の場合の分岐構造は複雑な入れ子構造を成し，分岐パラメータ  $a$  が変わるにつれて様々な周期軌道が現れることがわかる。数値計算によれば分岐構造はきわめて複雑であるけれどほとんどすべてのパラメータ  $a$  で軌道  $\{x_n\}$  は周期的であり，カオティックなふるまいは現れない。

以下ではこのような平坦な部分の傾き  $\delta$  が 0 の場合の分岐構造，すなわち Fig.15 に数値計算により示した分岐構造を記号力学的方法を用いて解析的に決定する。まず (4) 式の周期軌道の安定性の定義より，写像  $f(x)$  の生成する周期軌道のなかで安定なものは 0 から出発した周期軌道

$$0, f(0), f^2(0), \dots, f^{n-1}(0), 0, \dots$$

だけであることがわかる。

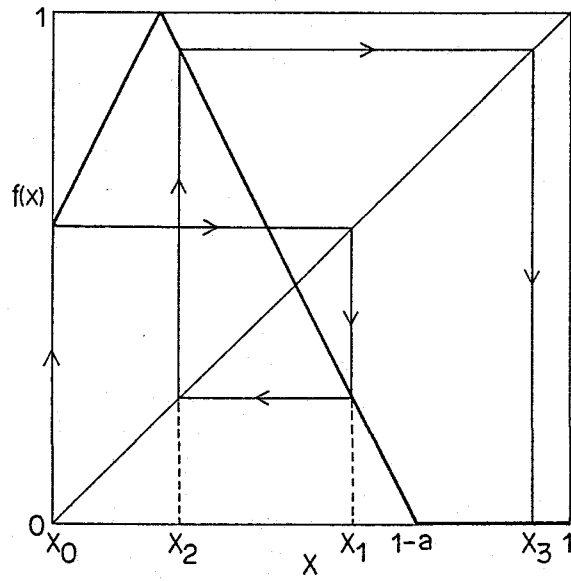


Fig.14: TWFS 写像 ( $\delta = 0$  の場合) .

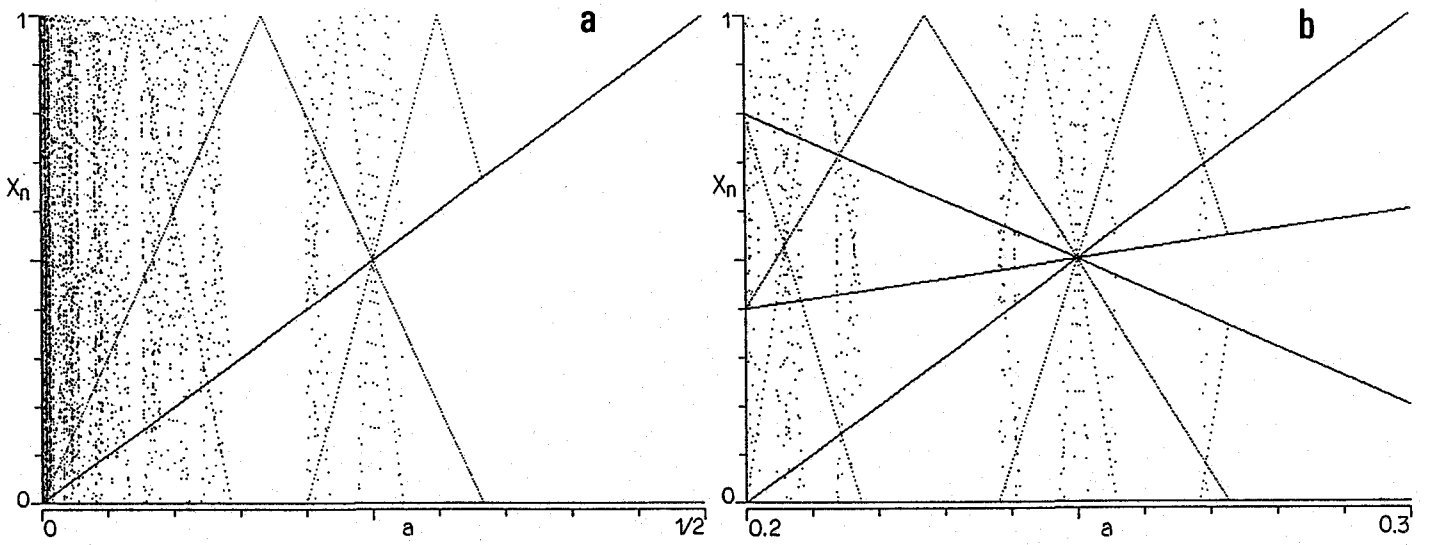


Fig.15: TWFS 写像の分岐図 ( $\delta = 0$  の場合) .

以下では分岐パラメータ  $a$  が変化するにつれて、TWFS 写像の 0 から出発する軌道  $\{x_n\} = 0, f(0), \dots$  の性質がどのように変化するかを調べる。そのため Fig.16 のように、この軌道  $\{x_n\}$  をテント写像:

$$f(x) = \begin{cases} 2x, & (0 \leq x \leq \frac{1}{2}) \\ 2(1-x), & (\frac{1}{2} < x \leq 1) \end{cases} \quad (20)$$

の生成する軌道  $\{y_n\}$  に対応させる。内側の正方形の中に描かれているのが TWFS 写像 (16) であり、テント写像のなかに TWFS 写像を埋め込んだ形になっている。この図からわかるように、TWFS 写像で 0 から出発した軌道が  $n$  回目に 0 に戻ってきて周期  $n$  の周期軌道になることは、対応するテント写像の生成する軌道  $\{y_n\}$  では、 $n$  回目にはじめて  $y_n \leq y_0$  となること:

$$\begin{aligned} y_n &\leq y_0, \\ y_i &> y_0, \quad i = 1, \dots, n-1 \end{aligned} \quad (21)$$

に対応する。このとき次のような関係が成り立つことがわかる:

$$\begin{aligned} y_0 &= \frac{2a}{1+2a}, \\ y_i &= \frac{x_i + 2a}{1+2a}, \quad i = 1, \dots, n-1 \end{aligned} \quad (22)$$

この対応により TWFS 写像で 0 から出発した周期軌道  $\{x_n\}$  の性質を調べることはテント写像上で対応する初期値  $y_0$  から出発した軌道  $\{y_n\}$  の性質を調べることに帰着される。(18) 式では TWFS 写像の軌道に対してその道程  $I(a, x)$  を定義した。TWFS 写像 (16) は  $a = 0$  のときテント写像 (20) に等しくなることに注意すれば、テント写像によって生成された軌道に対してもその道程  $I(0, x)$  を (18) 式により定義することができる。テント写像上の軌道に対しては、次のよく知られた補題が成り立つ。

**補題 1** テント写像において以下のことが成立する [6,15,19]:

$$\forall x, y \in [0, 1] \quad (x < y) \quad \Leftrightarrow \quad I(0, x) < I(0, y) \quad (23)$$

補題 1 より、テント写像上の初期値  $x, y$  の大小関係がその道程の順序関係に対応づけられる。したがって軌道  $\{y_n\}$  のふるまい (ダイナミクス) を調べることでその道程の (記号列としての) 順序関係を調べることに帰着される。(このことにより、ここで用い

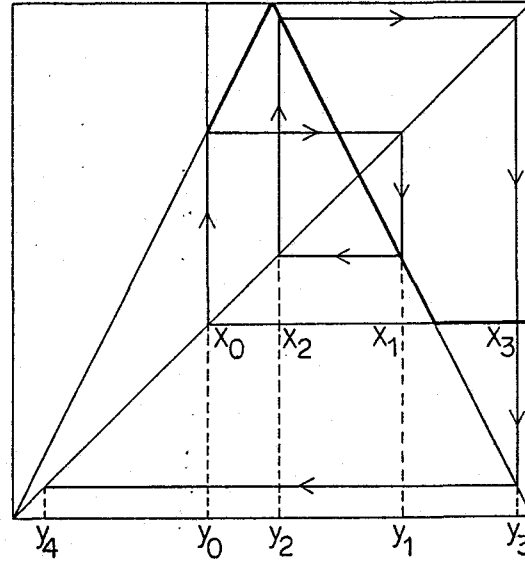


Fig.16: テント写像とTWFS写像との対応.

る方法は記号力学的方法と呼ばれる.) 補題 1 と (19) 式より, テント写像の生成する軌道  $\{y_n\} : y_0 = y, y_1, \dots$  が (21) 式を満たすことはその道程を  $I(0, y) = AB$ ,  $|A| = n$  として, 記号列  $AB$  が次の条件を満たすことと同等である.

条件 1

$$\begin{aligned} C1) \quad \varphi^n(AB) &= B \leq AB \\ C2) \quad \varphi^i(AB) &> AB, \quad i = 1, \dots, n-1 \end{aligned} \quad (24)$$

したがって TWFS 写像においてパラメータ  $a \in [0, 1/2]$  が変わるにつれて 0 から出発した軌道の道程  $I(a, 0)$  がどのように変化するかを調べるためには, テント写像で初期値  $y \in [0, 1/2]$  を変化させてその道程  $I(0, y) = AB$  がどのような  $n$  に対して条件 1 を満足するかを調べればよい. このことと (22) 式より次の命題が得られる.

命題 1

$$\begin{aligned} I(0, h(a)) &= AB, \quad |A| = n \\ h(a) &\stackrel{\text{def}}{=} \frac{2a}{1+2a}, \end{aligned} \quad (25)$$

とし, ここで記号列  $AB$  は条件 1 を満たすとする. そのとき

$$I(a, 0) = A^*$$

となる.

この命題により TWFS 写像で分岐パラメータ  $a$  が変わるにつれてその 0 から出発した軌道がどのように変化するかという“分岐問題”がテント写像において初期値の変化につれてその軌道の性質がどのように変化するかという“初期値問題”に帰着されたわけである。(  $I(a, 0)$  と書いたときは TWFS 写像の分岐パラメータ  $a$  に,  $I(0, x)$  と書いたときはテント写像上での初期値  $x$  に注目していることに注意されたい。) 以下ではこのような記号列  $A$  の性質を調べる. すなわち次の集合  $S$  の性質を調べる.

$$S \stackrel{\text{def}}{=} \{A \mid \exists x \in [0, \frac{1}{2}], \quad I(0, x) = AB, \quad AB \text{ satisfies } C1) \text{ and } C2)\} \quad (26)$$

### 3.2.2 システムの生成する周期軌道の性質—主要定理—

集合  $S$  の性質を明らかにするために次の定義をしておく:

定義 9 (最小列)  $A$  は長さ  $n$ , ( $n \geq 2$ ) の記号  $L, R$  の列とする. 次の性質を持つとき,  $A$  は最小列であるという:

$$\varphi^i(A^*) > A^*, \quad i = 1, \dots, n-1 \quad (27)$$

定義 10 (広義の最小列) 記号列  $A$  が最小列であるかまたは  $A = D^2$  とかけて  $D$  が  $N(D)$  が奇数であるような最小列であるとき, 記号列  $A$  は広義の最小列であるという. ここで  $N(D)$  は定義 7(g) で定義された関数で, 記号列  $D$  に含まれる記号  $R$  の数を表す.

記号力学的方法を用いると集合  $S$  の性質を特徴づける以下の定理が得られる (証明は付録 A, B を見よ):

定理 1  $A \in S$  ならば  $A$  は広義の最小列であるか,  $A = \bar{D}$  とかけて  $D$  は広義の最小列である.

定理 2  $A$ ,  $|A| = n$  は広義の最小列であるとする. このとき  $I(0, \alpha) = A^*$ ,  $I(0, \beta) = \bar{A}L^*$  として,  $N(A)$  が奇数 (偶数) ならば  $\alpha < x < \beta$  ( $\alpha > x > \beta$ ) のとき  $I(0, x) = AB$  となり, 記号列  $AB$  は条件 1 を満足する.

これらの定理より, 集合  $S$  は次のように特徴づけられることが分かる:

$$S = \{A, \bar{A} \mid A \text{ は広義の最小列}\} \quad (28)$$

以上により TWFS 写像の生成する安定な周期軌道の性質は (28) のように特徴づけられることがわかった. 次の節ではこれらの周期軌道に対応する分岐パラメータの範囲を計算しよう.

### 3.2.3 周期軌道を生成するパラメータの範囲

定理 2 を用いると式 (28) のように特徴づけられる任意の記号列  $A$  に対してその  $A$  に対応する  $x$  の範囲, すなわち  $I(0, x) = AB$  となってこの  $AB$  が条件 1 を満たすような  $x$  の範囲を具体的に計算することができる. そのためには  $I(0, \alpha) = A^*$ ,  $I(0, \beta) = \bar{A}L^*$  となるような  $\alpha, \beta$  が求められればよいが, それは次のようにして計算できる.

まず任意の記号列  $A = a_1 a_2 \dots$  に対して関数  $S(k, A)$  を以下のように定義する.

$$S(0, A) = 1, \\ S(k, A) = \begin{cases} 1 & \text{if } N([A]_k) \text{ is even,} \\ -1 & \text{if } N([A]_k) \text{ is odd.} \end{cases} \quad k \geq 1$$

ここでもし  $A$  が記号  $C$  を含んでいる場合, すなわち  $a_i = C$  のときは  $S(k, A) = -S(i, A)$ ,  $k > i$  とする. このとき, 次の関係式が成立することが容易に確かめられる [19].

$$x = J(A) \stackrel{\text{def}}{=} 1 - \sum_{k=0}^{\infty} 2^{-(k+1)} S(k, A), \quad (29) \\ A = I(0, x).$$

関数  $J(A)$  によって, 任意の記号列  $A$  に対して対応する初期値, すなわち  $A = I(0, x)$  となるような  $x$  を計算することができる. 具体例として定理 2 で  $A = LLR$  の場合を考えよう. そのとき

$$S(1, A^*) = 1, \quad S(2, A^*) = 1, \quad S(3, A^*) = -1, \\ S(4, A^*) = -1, \quad S(5, A^*) = -1, \quad S(6, A^*) = 1, \dots$$

であるので,

$$\alpha = 1 - (2^{-1} + 2^{-2} + 2^{-3} - 2^{-4} - 2^{-5} - 2^{-6} + 2^{-7} \dots), \\ = \frac{2}{9}$$

となる. 同様に  $\bar{A} = LCR$  であるので,

$$S(1, \bar{A}L^*) = 1, \quad S(2, \bar{A}L^*) = 1, \quad S(3, \bar{A}L^*) = -1 \\ S(4, \bar{A}L^*) = -1, \dots$$

$$\beta = 1 - (2^{-1} + 2^{-2} + 2^{-3} - 2^{-4} - 2^{-5} \dots) \\ = \frac{1}{4}$$

が得られる。したがって、 $2/9 < x < 1/4$  なる  $x$  の道程はすべて  $I(0, x) = LLRB$  となり記号列  $LLRB$  は  $A = LLR$  として条件 1 を満足することが分かる。

さらに命題 1 を用いると

$$h^{-1}\left(\frac{2}{9}\right) = \frac{1}{7} < a < h^{-1}\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{6}$$

のとき  $I(a, 0) = A^* = (LLR)^*$  となることがわかる。ここで  $h^{-1}$  は (25) 式で定義された関数  $h$  の逆関数である。この結果を言い換えれば、分岐パラメータ  $a$  が  $1/7 < a < 1/6$  のとき TWFS 写像 (16) の生成する安定な周期軌道は  $(LLR)^*$  となる。このことを簡単に周期列  $(LLR)^*$  に対応するパラメータ  $a$  の範囲は  $1/7 < a < 1/6$  であるということとする。

定理 2 で得られた結果を命題 1 を用いてまとめると次のようになる。まず、関数  $h$  のグラフを Fig.17 に示した。命題 1 よりわかるように関数  $h$  は TWFS 写像のパラメータ  $a$  とテント写像上の初期値  $x$  とを対応づける関数になっている。すなわちテント写像上で周期列  $A^*$  と  $\bar{A}L^*$  に対応する初期値をそれぞれ  $\alpha, \beta$  とする：

$$\begin{aligned} I(0, \alpha) &= A^*, \\ I(0, \beta) &= \bar{A}L^*. \end{aligned}$$

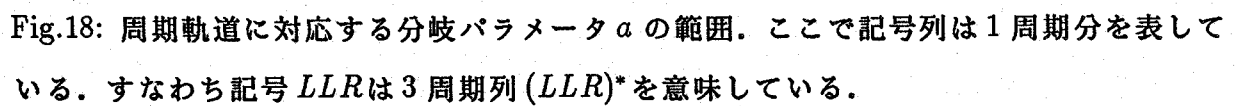
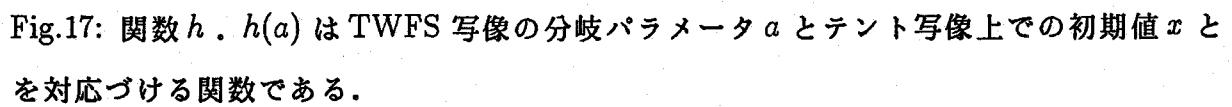
このように  $\alpha, \beta$  を定めれば、分岐パラメータ  $a$  が  $h^{-1}(\alpha)$  と  $h^{-1}(\beta)$  の間にあるとき TWFS 写像の生成する周期軌道は  $A^*$  となるのである。

周期 5 以下の周期列に対して対応するパラメータ  $a$  の範囲をそれぞれ計算し Fig.18 に示した。この図より、パラメータ  $a$  が変化するにつれて TWFS 写像の生成する安定な周期軌道が変わる様子が分かる。以上の結果をまとめると以下の定理が得られる。

**定理 3** TWFS 写像 (16) の生成する 0 から出発した軌道が周期軌道を成しその周期軌道の道程を  $I(a, 0) = A^*$  とすると  $A$  は広義の最小列である。逆に  $A$  を任意の広義の最小列であるとする、 $\alpha = J(A^*)$ ,  $\beta = J(\bar{A}L^*)$  として、 $N(A)$  が奇数 (偶数) ならば  $h^{-1}(\alpha) < a < h^{-1}(\beta)$  ( $h^{-1}(\alpha) > a > h^{-1}(\beta)$ ) のとき  $I(a, 0) = A^*$  となる。ここで  $h^{-1}$  は (25) 式で定義された関数  $h$  の逆関数である。

### 3.2.4 周期軌道の分布

前節では TWFS 写像の生成する安定な周期軌道の性質が式 (28) のように特徴づけられることがわかった。また定理 3 ではそのような周期軌道に対応する分岐パラメータ  $a$  の区間



が具体的に計算できることを示した。特に周期5以下の周期軌道については対応するパラメータの区間を例示した。ここではこれら周期軌道の性質をもう少し詳しくみてみよう。

まず、次の定理が得られる（証明は付録Cを見よ）：

定理4  $A, |A| = n, n \geq 3$  が広義の最小列であるとする。このとき  $\hat{A}$  も広義の最小列である。

Fig.18では、パラメータ  $a$  が変わるにつれてどのような周期列が現れるかを周期5以下の周期列についてのみ示した。この定理を用いるとこのような周期列の分布に関してもう少し詳しく調べることができる。まず、例として最小列  $A = LLRRR$  を考える。このとき  $\hat{A} = LLRLR$ ,  $\bar{A} = LLRCR$  であるので定理3よりパラメータ  $a$  が増加するにつれて TWFS 写像の生成する周期列は

$$LLRRR < LLRCR < LLRLR$$

の順に変わることがわかる。（ここでも Fig.18と同様に1周期分のみ表示した。すなわち  $LLRRR$  は5周期列  $(LLRRR)^*$  を意味している。）つまり、 $A$  と  $\hat{A}$  が対になって現れるのである。 $N(A)$  が奇数ならば  $A < \hat{A}$  となることは簡単にわかるので、このことは一般に、任意の  $A$  ( $N(A)$  は奇数) に対して  $A$  と  $\hat{A}$  が対になって

$$A < \bar{A} < \hat{A}$$

の順に現れることがわかる。 $N(A)$  が偶数ならばこの順序は逆になる。

また、周期倍分岐列に関しても詳しく調べることができる。まず簡単な例からはじめよう。記号列  $LR$  を考える。Fig.18において、記号列  $LR$  の左側には記号列  $LRLR$  が存在する。また、 $A = LRLR$  とすると  $\hat{A} = LRRR$  である。同様に、記号列  $LRRR$  の左側には  $LRRRLRRR$  が存在する。 $A = LRRRLRRR$  とすると  $\hat{A} = LRRRLRLR$  である。このようにして、分岐パラメータ  $a$  が減少するにつれて TWFS 写像の生成する周期軌道は

$$\begin{aligned} &LR, \\ &LRLR, LRCR, LRRR, \\ &LRRRLRRR, LRRRLRCR, LRRRLRLR, \\ &LRRRLRLRLRRRLRLR, \dots \end{aligned}$$

と変化していくことがわかる。ここで、この記号列の長さ（周期軌道の周期）に注目すると、2, 4, 8, 16, ... と変化することがわかる。すなわち周期軌道の周期は倍倍（このことを周

期倍分岐という)になっていくのである。ここでは記号列  $LR$  から出発して、周期倍分岐が存在する様子を見たが、一般に  $N(A)$  が奇数であるような任意の最小列  $A$  から出発して周期倍分岐が存在することも、定理 3 と定理 4 より容易にわかる。

このように、パラメータ  $a$  が変化するにつれて TWFS 写像の生成する周期軌道が変化する様子がわかった。つぎに、周期  $n$  の周期列の数、すなわち長さ  $n$  の広義の最小列の数を求めよう。この数は整数論でよく知られた Möbius の反転公式 [35] を用いると求められるが、広義の最小列の意味では記号列  $LR$  と  $LRLR$  を区別するため Möbius の反転公式を少し変形する必要がある。この詳細は付録 D で述べることにし、ここでは結果のみ述べる。

$M(n)$  を長さ  $n (n \geq 3)$  の広義の最小列の数であるとする。また、そのような最小列  $A$  のうち  $N(A)$  が奇数であるものの数を  $M_o(n)$  とする。定理 4 でみたように  $A$  が長さ  $n$  の広義の最小列であれば  $\hat{A}$  も長さ  $n$  の広義の最小列である。 $N(A)$  が奇数 (偶数) であれば  $N(\hat{A})$  は偶数 (奇数) である。したがって、 $M(n) = 2M_o(n)$  となっている。 $M_o(n)$  は付録 D の補題 17 で得られているので次の定理が成り立つ：

定理 5 長さ  $n, (n \geq 3)$  の広義の最小列の数  $M(n)$  は次の式で与えられる：

$$M(n) = 2M_o(n) = \frac{2}{n} \sum_{d|n} \mu(d) 2^{n/d-1}. \quad (30)$$

ここで和は  $n$  の約数  $d (1, n$  も含む) の中で奇数のものについてのみ加えることを意味し、 $\mu(d)$  は Möbius 関数である (付録 D の定義 12 を参照)。また  $M(2) = M_o(2) = 1$  である。

例えば、 $M(n)$  をいくつか計算すると

$$\begin{aligned} M(2) &= \frac{1}{2} \{ \mu(1) 2 \} = 1, \\ M(3) &= \frac{2}{3} \{ \mu(1) 2^2 + \mu(3) \} = 2(4-1)/3 = 2, \\ M(4) &= \frac{2}{4} \mu(1) 2^3 = 4, \\ &\vdots \end{aligned}$$

となる。 $M(n), (n = 1, \dots, 10)$  を table 1 に示した。

これまでの解析で、分岐パラメータ  $a$  の変化につれて TWFS 写像は広義の最小列と呼ばれる周期列を生成することがわかった。またそれら周期軌道の数や分岐構造についても詳しく調べた。では、TWFS 写像はそのほかのふるまいを呈することはないのであろう

|        |   |   |   |   |    |    |    |    |     |
|--------|---|---|---|---|----|----|----|----|-----|
| $n$    | 2 | 3 | 4 | 5 | 6  | 7  | 8  | 9  | 10  |
| $M(n)$ | 1 | 2 | 4 | 6 | 10 | 18 | 32 | 56 | 102 |

Table 1: 広義の最小列の数  $M(n)$ .

か。つまり TWFS 写像が安定な周期軌道  $A^*$  を生成するならば  $A$  は広義の最小列になっていることがわかったが、このときこれ以外の軌道例えばカオティックな軌道を TWFS 写像が生成することはないのか。そのようなことは“ほとんどない”ことが次の定理によって示される。

**定理 6** ほとんどすべてのパラメータ  $a \in [0, 1/2]$  に対して、TWFS 写像は安定な周期軌道  $A^*$  を生成する。ここで  $A$  は広義の最小列である。また、そのような  $a$  に分岐パラメータを固定したときほとんどすべての初期値  $x_0 \in [0, 1]$  に対して TWFS 写像の生成する軌道  $\{x_n\}$  は最終的には周期的になる。

**証明** 3.2.2 節で述べたように TWFS 写像に安定な周期軌道が存在することと Tent 写像上の対応する初期値  $y_0$  から出発した軌道  $\{y_n\}$  がいつかは  $y_n \leq y_0$  となることと等しい。また Tent 写像 (20) は不変密度  $g(x) \equiv 1$  をもつ単位区間  $[0, 1]$  上のエルゴード的な保測変換であるので、ほとんどすべての初期値  $y_0$  に対していつかは  $y_n \leq y_0$  となる [19, 44]。したがって TWFS 写像はほとんどすべてのパラメータ  $a$  に対して安定な周期軌道が存在する。同様にして、パラメータ  $a$  を固定したとき、ほとんどすべての初期値から出発した軌道はいつかは平坦な部分を通過することもわかるので定理の後半も明らかである。□

### 3.2.5 TWFS 写像とテント写像

$\delta = 0$  のとき、TWFS 写像 (16) は分岐パラメータ  $a$  が変わるにつれて広義の最小列として特徴づけられる周期軌道を生成することが分かった。これは、0 から出発した周期軌道  $0, f(0), f^2(0) \dots 0 \dots$  を考察したからで、この周期軌道と周期軌道  $f(0), f^2(0) \dots 0, f(0) \dots$  や  $f^2(0) \dots 0, f(0), f^2(0) \dots$  などとも同一の周期軌道を表していることに注意すれば上の結果は次のようにもいえる。すなわち、TWFS 写像 (16) は分岐パラメータ  $a$  が変わるにつれてあらゆる  $L, R$  のパターンの安定な周期軌道を生成する（ただし  $L^*$  と  $R^*$  は除いて）。一方、テント写像は初期値が変わるにつれてあらゆるパターンの不安定な周期軌道を生成することが知られている（これは (29) 式の関数  $J$  から容易に分かる）。このことはテント写像に平坦な部分をつけることによって、テント写像上の不安定な周期軌道が安定な周

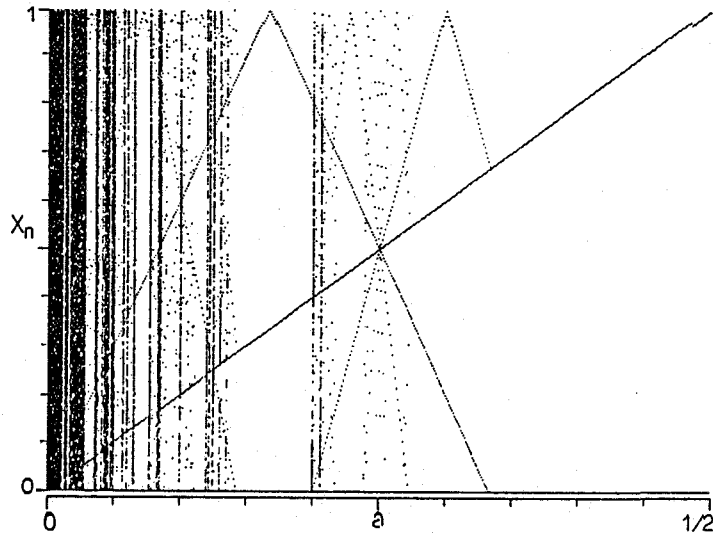


Fig.19: TWFS 写像の分岐図 ( $\delta \neq 0$  の場合)。

期軌道として現れたことを示している。ただしここで注意すべきことはテント写像上では  $LRLR\cdots$  のパターンの 4 周期軌道は存在しないが、(28) でみたように TWFS 写像においては、 $LRLR\cdots$  というパターンをもつ周期軌道は 2 周期軌道と 4 周期軌道の 2 種類現れることである。

### 3.3 TWFS 写像の分岐構造—システムがカオティックな場合—

#### 3.3.1 周期軌道・カオスを生成するパラメータの範囲

次に  $\delta \neq 0$  の場合を考える。まず、TWFS 写像 (16) の分岐図を数値計算により Fig.19 に描いた。このとき  $\delta = 0$  の場合と異なり、システムがカオティックにふるまうような分岐パラメータ  $a$  の範囲が存在する。しかし、Fig.19 と Fig.15 とを比べると  $\delta$  が十分小さければその分岐構造は  $\delta = 0$  の場合の分岐構造と密接な関係をもつことが予想される。以下では、パラメータ  $(a, \delta)$  が変化するにつれて TWFS 写像 (16) の生成する安定な周期軌道の性質がどのように変わるかを調べる。 $\delta > 1/2$  の場合には TWFS 写像の平坦な部分の傾きの絶対値が 1 より大になるので安定な周期軌道は存在しない。したがって以下では  $\delta < \frac{1}{2}$  の場合のみ調べる。 $\delta = 0$  の場合と同様に  $\delta \neq 0$  の場合にも TWFS 写像の生成する周期軌道のうち安定なものは区間  $[\alpha, 1]$  を通る周期軌道だけであることがわかる。したがって、 $\delta \neq 0$  の場合にも区間  $[\alpha, 1]$  に注目すれば TWFS 写像の生成する安定な周期軌道の性質を調べることができる。

例として  $1/7 < a < 1/5$  の場合を考える。 $\delta = 0$  であれば、Fig.18 でみたように安定な

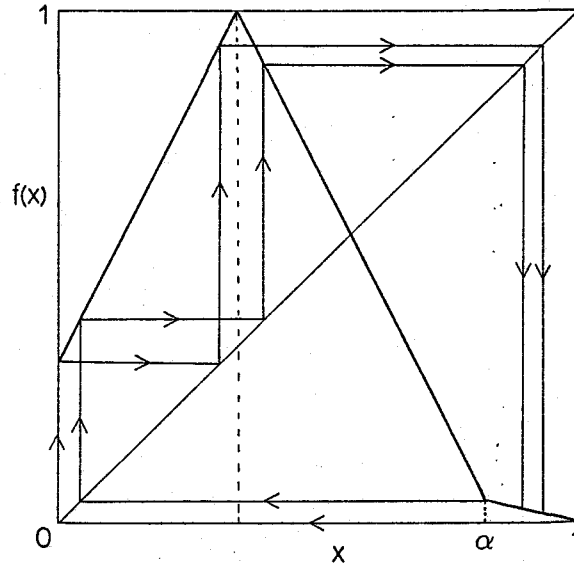


Fig.20: 安定な 3-周期軌道.

周期 3 の軌道が存在する．では  $\delta \neq 0$  のときはどうなるのであろうか． $\delta$  が十分小さければ Fig.20 のように，区間  $[\alpha, 1]$  は写像  $f^3$  によってその区間の中へ写されることがわかる．このとき写像  $f^3$  は縮小写像になっておりその区間の中に  $f^3$  の不動点（ $f$  の 3-周期軌道）が存在する． $\delta < 1/2^3$  であればこの周期軌道は安定になるが，このことは周期軌道の安定性の定義 (4) より明らかであろう．このような考え方で，パラメータ  $(a, \delta)$  が変化することによって TWFS 写像 (16) の生成する安定な周期軌道の性質を調べると次のようになる．

1.  $\frac{1}{7} < a < \frac{1}{6}$  のとき  
 $0 < \delta < \frac{1-6a}{1+2a}$  ならば安定な 3-周期軌道  $(LLR)^*$  が存在する．  
 $\frac{1-6a}{1+2a} < \delta < \frac{1}{23}$  ならば， $(LRR)^*$
2.  $\frac{1}{6} < a < \frac{1}{5}$  のとき  
 $0 < \delta < \frac{1-5a}{2a+1}$  ならば， $(LRR)^*$

これらの結果を Fig.21 に示した．すなわち，この図は TWFS 写像の生成する安定な 3-周期軌道  $(LLR)^*$  などが存在するパラメータ  $(a, \delta)$  の範囲を示している．ここで，斜線を引いた領域はそのような安定な周期軌道が存在しない領域であり，システムがカオティックなふるまいをすることが予想される（しかし次節でこの予想は必ずしも正しくないことがわかる）．

このように  $\delta \neq 0$  の場合にも， $\delta = 0$  の場合の結果を用いて TWFS 写像の生成する安

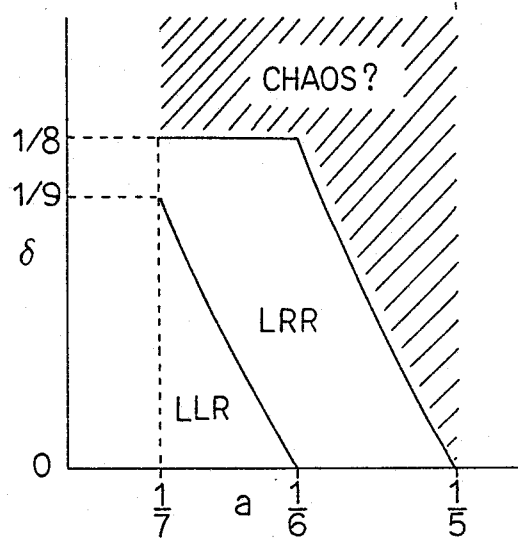


Fig.21: 安定な3-周期軌道の存在するパラメータ  $(a, \delta)$  の範囲.

定な周期軌道の性質を詳しく調べることができる。ここでは、周期3の周期軌道についてのみ計算例を示したがまったく同様に他の周期軌道についても計算できる。ただし、次節で述べるように TWFS 写像の分岐構造を完全に決定するには若干不十分な点がある。

Fig.22は、どのようなパラメータ  $(a, \delta)$  の領域でシステムのふるまいがカオティックになるかを示している。ここで、点を打った領域がシステムがカオティックになる領域である。それぞれのパラメータ  $(a, \delta)$  に対して  $x = 0$  を初期値とする軌道のリアプノフ指数を数値的に計算しカオティックであるかどうかを判定し、この図を描いた。Fig.22(b) は、(a) の一部分を拡大した図であり、パラメータ  $(a, \delta)$  領域の中でシステムがカオティックになる（またはシステムが周期的になるような）パラメータの範囲が複雑な入れ子構造をしていることがわかる。特に  $\delta$  を固定し、パラメータ  $a$  を変化させて分岐図を描けば Fig.19 のようになることもこの図よりわかる。

### 3.3.2 周期軌道とカオスの共存現象

3.3.1節では、平坦な部分の傾き  $\delta$  が0の場合と同様に、 $\delta \neq 0$  の場合にも平坦な部分  $[\alpha, 1]$  に注目することにより様々な安定な周期軌道が存在するパラメータ  $(a, \delta)$  の領域を計算できることを示した。そのような領域の外のパラメータではシステムがカオティックになると述べたがこのことは必ずしも正しくない。すなわち  $\delta$  が十分小さければ  $\delta = 0$  の場合と同様に安定な周期軌道が存在する範囲を計算できることを示したが、 $\delta$  が大きい場合には注意が必要である。例として、Fig.23のような場合を考える。これは  $a = 2/5$  の場合である。

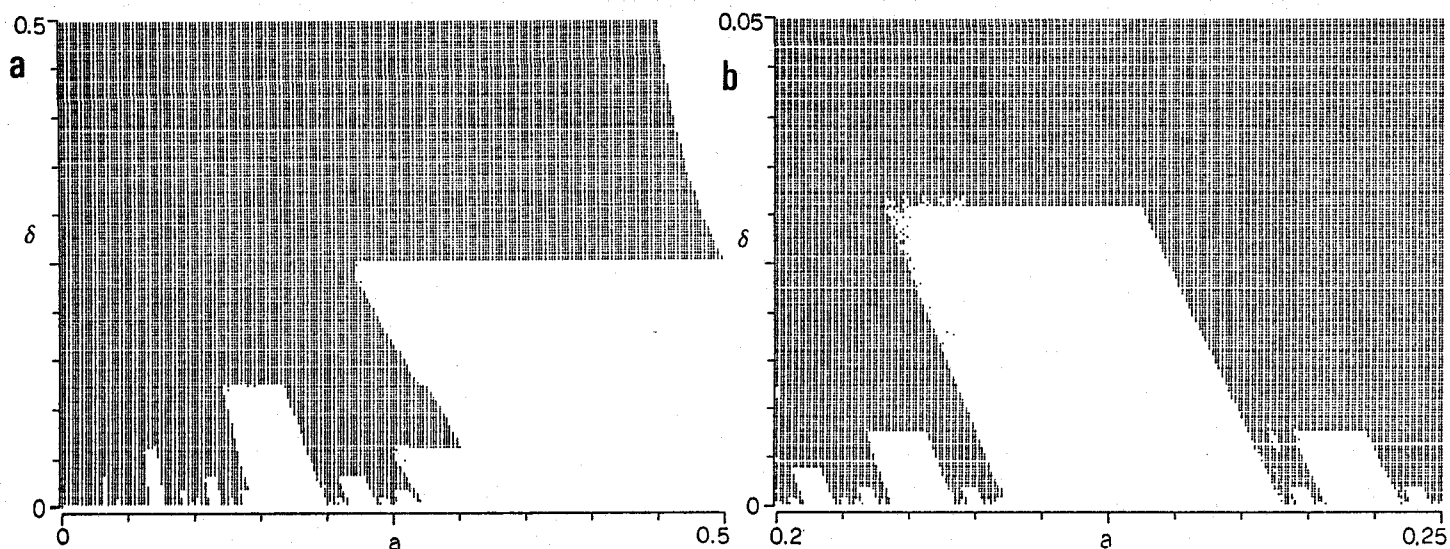


Fig.22: カオスの存在するパラメータ  $(a, \delta)$  の範囲。

このとき、 $\delta < 1/4$  ならば Fig.23(a) のように安定な 2-周期軌道が存在し、 $\delta > 1/4$  のときには安定な 2-周期軌道は存在しない。

また、 $1/2 > \delta > 1/3$  のとき、不動点  $\bar{x} = 2/5$  は安定になるが Fig.23(b) からわかるように不動点  $\bar{x}$  のまわりに不安定な 2-周期軌道が存在する。この周期軌道  $\{x_n\}$  を  $s_1, s_2, s_1, s_2, \dots$  ( $s_1 < s_2$ ) と表すと、区間  $(s_1, s_2)$  の中から出発した軌道は安定な不動点  $\bar{x}$  に漸近するが、区間  $(s_1, s_2)$  の外から出発した軌道はその区間の中へ入ることはなくカオティックなふるまいを示す。すなわち安定な不動点とカオスが共存している。このように  $\delta$  がある程度大きい場合には、TWFS 写像の分岐構造を完全に決定するためには 3.3.1 で行った解析は不十分なことが分かる。

前節では  $\delta \neq 0$  の場合にも  $\delta = 0$  の場合と同様に安定な周期軌道が存在するパラメータの領域を計算することができることを示した。しかしそのような領域の外で TWFS 写像がどのようなふるまいをするかを完全に決定するにはここで述べたように前節で述べた解析には不十分な点がある。

### 3.4 結論

この章では、Noise-Induced Order の現象を示す写像として提案した平坦な部分をもつテント写像 (TWFS 写像) の分岐構造を平坦な部分の傾き  $\delta$  が 0 の場合と 0 でない場合にわけて調べた。 $\delta = 0$  の場合にはほとんどすべての分岐パラメータ  $a$  について TWFS 写像のふるまいを決定した。TWFS 写像はテント写像に平坦な部分をつけただけの簡単な写



される。これは、例えば2個の折れ線で構成されるだけのきわめて単純な写像でもその写像の示す性質はおどろくほど多様である[19,20]ことから予想されよう。とはいえ $\delta$ が十分小さければそのふるまいは“かなり詳しく”調べることができることをここでの結果は示している。特に $\delta$ が十分小さいときに起こる現象である Noise-Induced Order の現象を調べるためには、ここで明らかにした結果は大きな意味をもつと考えられる。このことについては以下の章で述べる。

また、3.2で行った解析を整数論的な角度から見直すことによりいくつかの興味ある結果が得られる。このことは付録 E に詳しく述べた。

#### 4. TWFS 写像の分岐構造と Noise-Induced Order

2.章では Noise-Induced Order の現象が写像の分岐構造に密接な関連をもつことを述べた。また 3.章では TWFS 写像の生成する周期軌道の分岐構造を解析的に明らかにした。ここでは Noise-Induced Order の現象を理解するための解析的なアプローチについて簡単に述べる。以下では特に 2.4.1節で議論した確率密度（不変密度）について考察をおこなう。

(3) と (11) 式を比べればわかるようにシステムに雑音を加えることと分岐パラメータ  $b$  をある平均値のまわりに変動させることは同等である。このことは (3) 式を

$$\hat{x}_{n+1} = f_{\epsilon,b}(\hat{x}_n) + \xi_n = f_{\epsilon,b+\xi_n}(\hat{x}_n) \quad (31)$$

のように書き直すことによりわかる。ここで写像  $f_{\epsilon,b}$  は TWFS 写像 (11) であり、パラメータ  $\epsilon, b$  への依存性を強調するために  $f$  を  $f_{\epsilon,b}$  と表した。この式は各時点ごとに軌道に雑音  $\xi_n$  を加えることは各時点ごとに写像  $f_{\epsilon,b}$  自身を変化させることと等しいということを示している。したがってシステムに雑音を加えることにより、分岐パラメータ  $b$  の周りのシステム  $f_{\epsilon,b+\xi_n}$  の影響を受けることになる。

$\epsilon$  が十分小さいときシステムがカオティックにふるまうように分岐パラメータ  $b$  を選ぶとその分岐パラメータの周りにはシステムが周期的にふるまうようなパラメータが存在しその範囲はカオティックなふるまいに対応するパラメータの範囲に比べてかなり広い。すなわち、システムに雑音を加えることによってカオスはその周りの周期軌道の影響を強く受ける。

再び Fig.5 を見てみよう。2.4.1節で述べたように (a) は  $\epsilon \neq 0$  の場合のシステムがカオティックなときの確率密度であり、(b) はそのシステムに雑音を加えたときの確率密度である。また (c) は  $\epsilon = 0$  の場合にシステムに雑音を加えたときの確率密度である。(b) と (c) を比べればわかるようにこれら二つの確率密度はきわめて類似しておりほとんど区別がつかない。

3.章で示したように  $\epsilon = 0$  の場合にはほとんどすべての分岐パラメータでシステムの生成する軌道は周期的であり、カオティックなふるまいは現れない。すなわち  $\epsilon \neq 0$  の場合と  $\epsilon = 0$  の場合とでは一方はカオティックなふるまいが現れ、また他方はカオティックなふるまいが現れないという違いがある。しかしながら Fig.5 が示しているのは、システムに雑音を加えた場合それらの違いは確率密度にはほとんど影響がないということである。すなわち  $\epsilon$  が十分小さいとき、雑音の存在下では周期軌道の影響がかなり強く、カオティックなふ

るまいの影響はほとんどないことを示している。この周期軌道の影響を詳しく調べるために以下のような考察をおこなう。

$\epsilon = 0$  のとき雑音がなければ ( $\xi_n \equiv 0$  であれば) ほとんどすべての分岐パラメータ  $b$  でシステム (31) の生成する軌道は周期的であるので、 $\epsilon = 0$  のときのシステム (31) を特に周期的システムと呼ぶことにする。また  $\epsilon \neq 0$  のときのシステムは (分岐パラメータ  $b$  の値にかかわらず) カオティックなシステムと呼ぶ。 $P_{\epsilon,b}(x)$  と  $\tilde{P}_{\epsilon,b}(x)$  をそれぞれ雑音がない場合と雑音を付加した場合のシステムの確率密度とする。2.4.1ではこれら二つとも区別せずに  $P(i)$  で表した。Fig.5は、 $\epsilon$  が十分小さければ雑音の存在下でのカオティックなシステムの確率密度が雑音の存在下での周期的なシステムの確率密度でよく近似できること：

$$\tilde{P}_{\epsilon,b}(x) \approx \tilde{P}_{0,b}(x) \quad (32)$$

を示しているといえる。すなわち雑音の存在下で  $\epsilon \neq 0$  のシステムのふるまいを調べるためには、 $\epsilon = 0$  の場合のシステムのふるまいを調べればよい。言い換えれば、雑音の存在下では  $\epsilon = 0$  の場合のシステムの生成する周期軌道の性質を調べればよいことを示している。

上で述べたようにシステムに雑音を付加することは分岐パラメータ  $b$  を平均値のまわりに変動させることと等しいので、 $\epsilon = 0$  の場合のシステムに雑音を加えることは分岐パラメータ  $b$  のまわりのふるまいをある意味で平均することと考えられる。すなわち、雑音の存在下でのシステムの確率密度  $\tilde{P}_{0,b}(x)$  を雑音がない場合の周期的なシステムの確率密度  $P_{0,b}(x)$  の平均で近似する：

$$\tilde{P}_{0,b}(x) \approx \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n P_{0,b+\xi_i}(x). \quad (33)$$

$P_{0,b+\xi_i}(x)$  は分岐パラメータを  $b+\xi_i$  に固定したときの雑音がない場合の周期的システムの確率密度であるので、そのときシステムの生成する軌道は周期的でありその確率密度は数個のスパイクで構成されている。このときのスパイクの数は周期軌道の周期に対応する。(32) と (33) 式とをあわせると

$$\tilde{P}_{\epsilon,b}(x) \approx \tilde{P}_{0,b}(x) \approx \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n P_{0,b+\xi_i}(x) \quad (34)$$

が得られる。もしこの式が  $\tilde{P}_{\epsilon,b}(x)$  の良い近似を与えるならばカオティックなシステムに雑音を加えた場合のふるまいにおいて分岐パラメータ  $b$  の周りに存在する周期軌道の影響が強いことを示しているといえよう。すなわち、Noise-Induced Order の現象はシステムに

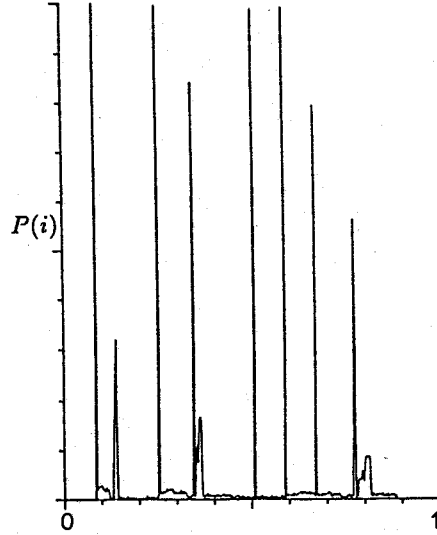


Fig.24: 確率密度  $\tilde{P}_{\epsilon,b}(x)$  の周期解の和による表現. ここで  $\tilde{P}_{\epsilon,b}(x)$  は Fig.5 と同様に区間  $[0,1]$  を 500 のセグメントに分割しヒストグラム  $P(i)$  として表した.

雑音を加えることにより分岐パラメータ  $b$  のまわりに存在する周期軌道の影響を強く受けた結果現れた現象であると考えられる.

(34) 式の右辺の和を  $n = 100$  の場合について示したのが Fig.24 である. ここでは Fig.5 と同様に区間  $[0,1]$  を 500 個の部分区間に分割し, 確率密度をヒストグラムにより表した. この図と Fig.5 とを比べると, Fig.5(b) は Fig.24 でかなり良く近似できることを示している. しかし, Fig.5(b) と (c) ほど Fig.5(c) と Fig.24 とは一致していない. すなわち (32) ほど (33) 式はよい近似を与えていないことになる. (33) 式の右辺における和の項数  $n$  を増やしても (33) の近似の精度はよくなる.

この理由を考えてみよう. すなわち (33) の近似の意味を考えてみる. まず  $\epsilon = 0$  の場合システム (31) をあらためて

$$\hat{x}_{n+1} = f_{0,b}(\hat{x}_n) + \xi_n = f_{0,b+\xi_n}(\hat{x}_n) \quad (35)$$

と書く.

(33) の右辺の和のそれぞれの項  $P_{0,b+\xi_i}(x)$  は周期軌道に対応する確率密度であるため数個のスパイクで構成されるといったが, この数個のスパイクで構成される確率密度はシステムの定常的なふるまいに対応している. つまり, システムが周期的な場合ある初期値から出発した軌道は十分時間が経過した後には安定な周期軌道に近づきそのときのシステムの確率分布が数個のスパイクで構成されるということである.

一方(33)式のような近似を行ったのは次のような考え方に基づいている：つまり(35)式のようにシステムに雑音を加えることが分岐パラメータ $b$ を変動させることと等しいことより、雑音を加えたシステムの確率密度が分岐パラメータ $b$ の近傍のふるまいの平均として表されるのではないかという考え方である。ところが(35)式で注意すべき点はこの式の右辺で分岐パラメータ $b$ を $b+\xi_n$ に固定したときシステム $f_{0,b+\xi_n}(\cdot)$ は安定な周期軌道をもつがシステム(35)において $\hat{x}_n$ は必ずしもこの安定な周期軌道の上にないということである。つまり(35)式において時刻 $n$ にかかわらずシステム $f_{0,b+\xi_n}(\cdot)$ が一定であればそのとき軌道 $\{\hat{x}_n\}$ は十分時間が経った後には安定な周期軌道に漸近していく。しかし式(35)の右辺では $n$ によってシステム $f_{0,b+\xi_n}(\cdot)$ は異なっている。したがって(35)において十分時間が経過したとき雑音を含んだシステムとしては定常状態にあっても $\hat{x}_n$ はシステム $f_{0,b+\xi_n}(\cdot)$ における定常的な状態には落ち着いていず、過渡的な状態にあるわけである。近似式(33)の右辺はこの過渡的なふるまいを考慮していないので上に述べたような誤差が出たものと考えられる。

しかし、(34)の近似はここで述べたような過渡的なふるまいは考慮していないにもかかわらずよい近似を与えている。もしシステム(31)の写像がTWFS写像でなければこれほど近似はよくなるまいだろう。写像に広い平坦な部分が存在するときには上で述べた過渡的なふるまいの影響は小さいものと考えられるからである。

本章では雑音の存在下でのカオティックなシステムのふるまいを雑音がない場合のシステムの分岐構造を用いて明らかにするという方法について述べた。ここではその方法の大まかなスケッチのみ紹介した。またこの方法にはシステムの“過渡的な”ふるまいの影響をどう評価するかなどの解決すべき問題点も残っている。しかしながらこれらの問題点が解決されここで述べた方法が精密化されればその方法は雑音の存在下でのシステムのふるまいを調べるための、特に Noise-Induced Order の現象を解明するための有効な手段となるであろうことを期待させる。

## 5. 平坦な部分をもつカオス写像の分岐構造

3.章では平坦な部分をもつテント写像について、その写像の生成する周期軌道の性質を記号力学的方法を用いてあきらかにした。ここでは、3.2.2節で用いた方法が他の平坦な部分をもつカオス写像にも応用可能であることを二つの例をあげて簡単に述べる。

### 5.1 平坦な部分をもつ2進変換

平坦な部分をもつ2進変換  $f_a$  を次の式で定義する：

$$f_a(x) = \begin{cases} 2x + 2a, & (0 \leq x < \frac{1}{2} - a) \\ 0, & (\frac{1}{2} - a \leq x < \frac{1}{2}) \\ 2x - 1, & (\frac{1}{2} \leq x \leq 1) \end{cases} \quad (36)$$

$$(0 \leq a \leq \frac{1}{2})$$

この写像は数論やエルゴード理論の研究において古くより用いられてきた2進変換 [21]

$$f(x) = \begin{cases} 2x, & (0 \leq x < \frac{1}{2}) \\ 2x - 1, & (\frac{1}{2} \leq x \leq 1) \end{cases} \quad (37)$$

に平坦な部分をつけたものになっている。以下では平坦な部分をもつ2進変換 (36) の生成する安定な周期軌道の性質が分岐パラメータ  $a$  が変わるにつれてどのように変化するかを調べる。

まず、3.1.2節と同様に記号力学的方法を導入する。 $x$  から出発した軌道  $\{x_n\} : x_0 = x, x_1 = f_a(x), \dots, x_n = f_a^n(x), \dots$  の道程 (Itinerary)  $I(a, x)$  とは、

$$I(a, x) = \{I_n(a, x)\}_{n \geq 0},$$

$$I_n(a, x) = \theta(f_a^n(x))$$

で定義される記号  $0, C, 1$  の列をいう。ただし

$$\theta(x) = \begin{cases} 0, & (0 \leq x < \frac{1}{2}) \\ C, & (x = \frac{1}{2}) \\ 1, & (\frac{1}{2} < x \leq 1) \end{cases}$$

である。ここで、TWFS 写像の場合とは異なり記号  $L, R$  の代わりに記号  $0, 1$  を用いたことに注意されたい。また記号  $0, 1$  からなる記号列に対してその順序は記号  $0, C, 1$  の間の

順序

$$0 < C < 1$$

を用いて普通の辞書式順序で定義することも TWFS 写像の場合とは違っている。このように道程とその順序を定義しておけば TWFS 写像の場合とまったく同様にして解析を行うことができる。その概略を以下に示す。

3.2.2節と同様に分岐パラメータ  $a$  が変化するにつれて、写像 (36) の 0 から出発する軌道  $\{x_n\} = 0, f_a(0) \cdots$  の性質がどのように変化するかを調べる。そのため Fig.25 のように、この軌道  $\{x_n\}$  を 2 進変換 (37) 上の軌道  $\{y_n\}$  に対応させる。内側の正方形の中に描かれているのが平坦な部分をもつ 2 進変換であり、この写像を外側の 2 進変換の中に埋め込んだ形になっている。このとき Fig.25 から明らかなように、写像 (36) で 0 から出発した軌道が  $n$  回目にはじめて 0 に戻ってきて周期  $n$  の周期軌道を生成することは、対応する 2 進変換 (37) の生成する軌道  $\{y_n\}$  では、 $n$  回目にはじめて  $y_n \leq y_0$  となること：

$$\begin{aligned} y_n &\leq y_0, \\ y_i &> y_0, \quad i = 1, \dots, n-1 \end{aligned}$$

に対応する。このとき軌道  $\{x_n\}$  と  $\{y_n\}$  との間には (22) 式と同じ式が成立する。さらに命題 1 も同様になりたち、写像 (36) の生成する安定な周期軌道を表す集合

$$S \stackrel{\text{def}}{=} \{A | I(a, 0) = A^*, \quad a \in [0, \frac{1}{2}]\}$$

に関して定理 3 に対応する以下の定理が成立する（証明は省略するが定理 1, 2, 3 などと同様に証明される）。

**定理 7** 平坦な部分をもつ 2 進変換 (36) の生成する 0 から出発した安定な周期軌道の道程を  $I(a, 0) = A^*$  とすると  $A$  は最小列である。逆に  $A$  を任意の最小列であるとするとき、 $\alpha = J'(A^*)$ ,  $\beta = J'(\bar{A}0^*)$  として、 $h^1(\alpha) < a < h^{-1}(\beta)$  のとき  $I(a, 0) = A^*$  となる。ここで  $h^{-1}$  は (25) 式で定義された関数  $h$  の逆関数である。

ここで最小列は定義 9 と同様に定めるが、その順序はこの節で定義したものである。また、 $J'(B)$  は記号列  $B = b_1 b_2 \cdots$  が記号  $C$  を含まなければ

$$J'(B) = b_1 2^{-1} + b_2 2^{-2} + \cdots$$

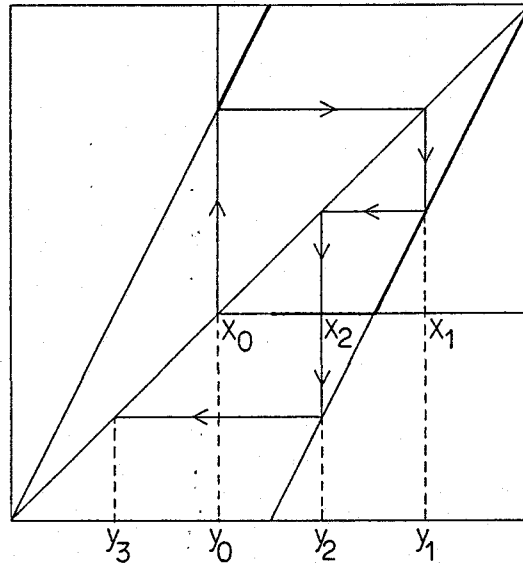


Fig.25: 平坦な部分をもつ 2 進変換と 2 進変換の対応.

で定義され,  $B = b_1 b_2 \cdots b_n C 10 \cdots$  の場合は

$$J'(B) = b_1 2^{-1} + \cdots + b_n 2^{-n} + 2^{-(n+1)}$$

で定義されるものとする.  $\bar{A}$  は  $A = a_1 a_2 \cdots a_n$  に対して最後の記号  $a_n$  を  $C$  に替えること:

$$\bar{A} = a_1 a_2 \cdots C$$

で定義することも TWFS 写像の場合とは異なっている (定義 7(d) を参照せよ). この定理において  $A$  は最小列であり定理 3 のように広義の最小列となっていないことは注意すべき点である. また, 2 進変換 (37) のエルゴード性より定理 6 と同様な定理も成立し, ほとんどすべての分岐パラメータ  $a$  に対して写像 (36) の生成する軌道はここに述べたような周期軌道であることがわかる. これらの結果より TWFS 写像の場合と同様に写像 (36) のふるまいを詳しく調べるができる.

## 5.2 平坦な部分をもつ単峰形写像

**定義 11 (単峰形写像)** 単位区間  $[0,1]$  上の写像  $f$  が次の条件を満たすときその写像は単峰形写像と呼ばれる:

U1)  $f$  is continuous,

U2)  $f(1/2) = 1$ .

U3)  $f$  is strictly decreasing on  $[1/2, 1]$  and strictly increasing on  $[0, 1/2]$ .

3.章では TWFS 写像での分岐問題をテント写像上での初期値問題に帰着させ、そのテント写像上での初期値問題を記号力学的方法により詳しく調べた (付録 A, B, C). そこで用いた記号力学的方法はテント写像のみならず上のような単峰形写像という広いクラスの写像に対して用いられた方法である [6]. したがって TWFS 写像のようにテント写像に平坦な部分をつけた写像のみならず、上のような単峰形写像に平坦な部分をつけた写像に対しても 3.章で用いた方法が適用できる可能性がある. そのとき 3.章で得られたものと同様な結果が成立することが期待される.

特にテント写像に平坦な部分をつけたとき “テント写像上の不安定な軌道が安定な軌道として現れる” という結果がこの単峰形写像に対して成り立つかどうかはきわめて興味深い問題である. ただし平坦な部分をもつ単峰形写像の定義の仕方などいくつか技術的な問題が残っており前節で平坦な部分をもつ 2 進変換に適用したようには解析は簡単でなく、現在のところその結果を示すことはできていない.

## 6. 終章

### 6.1 カオスと秩序—安定と不安定—

本研究では平坦な部分をもつテント写像 (TWFS 写像) という一次元の差分方程式で記述されるシステムを提案した。2.章ではこの写像を用いて雑音によってカオスが消滅し周期性が強まるという Noise-Induced Order の現象が観察されることを数値計算により示した。この Noise-Induced Order の現象は Mayer-Kress らによっても示されているが [28], この現象を最も顕著に示し系統的に調べているのは Matsumoto らの B-Z 写像を用いた一連の研究 [30,31,32,33,46,47] 以外にはない。本研究ではこの Matsumoto らの研究によって示された Noise-Induced Order の現象の様々な性質がここで提案した TWFS 写像を用いてもすべて観察されることを示した。この TWFS 写像は Matsumoto らの B-Z 写像よりもきわめて単純であるというだけでなく Noise-Induced Order の現象の要因を解明する上で重要な意味をもつ。

すなわち, Matsumoto らは一連の研究の中で写像の急勾配な部分に注目し様々な考察を行い “Noise-Induced Order の現象が起こるのは写像に急勾配な部分があるため” であると述べているが TWFS 写像にはそのような部分は存在しない。TWFS 写像はただ平坦な部分をもつだけである。したがって 2.章での数値実験結果は, Noise-Induced Order の現象の要因が “写像に急勾配な部分がある” ことではなく “写像に平坦な部分がある” ことであることを十分示しているといえる。

3.章ではこの TWFS 写像の分岐構造を調べた。すなわちパラメータが変わるにつれて TWFS 写像の生成する安定な周期軌道の性質が変化する様子を詳しく調べた。特に平坦な部分の傾きが 0, つまり写像が完全に平坦な部分をもつ場合については (測度 0 の) 例外的な場合を除いて完全に決定した。この解析により分岐パラメータが変化するにつれてシステムはあらゆる安定な周期軌道を生成することがわかった。カオティックな写像に平坦な部分を付け加えることの効果はカオティックな写像のもつ様々な不安定な周期軌道が安定な周期軌道として現れるというものである。平坦な部分の傾きが 0 でない場合には分岐パラメータ平面上でカオティックなふるまいが現れ, カオスの存在する領域が複雑なフラクタル構造をもつことをみた。またここで用いた解析方法は

- 1) TWFS 写像の “分岐問題” をテント写像上での “初期値問題” に帰着し,
- 2) その初期値問題を記号力学的方法を用いて解く。

という興味深いものであった。5.章ではこの解析方法が平坦な部分をもつテント写像のみならず一般に平坦な部分をもつカオス写像に応用可能な有効な方法であることを述べた。また付録 E に述べたように 3.2 節で議論した分岐問題を整数論的な角度から見直すことによりいくつかの興味ある性質が示された。

4.章ではこのような写像の分岐構造に注目することにより、雑音の存在下での（カオティックな）システムのふるまいを雑音のない場合のシステムの分岐構造を用いて明らかにするという方法を提案した。特に 2.章で述べた Noise-Induced Order の要因を厳密に解析する可能性についてその概略を述べた。

以上の解析により平坦な部分をもつカオス写像がもつ様々な興味ある性質を明らかにした。ここでこの写像の意味、すなわちカオス写像が平坦な部分をもつことの意味を考えてみよう。周期軌道の安定性の定義 (4) よりわかるように一次元写像においては平坦さはシステムやその生成する軌道が安定であることを意味している。一方カオスは軌道の不安定性を示す現象である。すなわち平坦な部分をもつカオス写像は安定な部分と不安定な部分とを兼ね備えたシステムである。このようにシステムに安定な部分と不安定な部分とが共存する場合、両者の“力関係”によってシステムの示すふるまいが決まると考えられる。例えば平坦な部分が完全に平坦（傾きが 0）である場合には 3.章で見たように安定な部分の影響が強くカオティックなふるまいは現れないことになる。平坦な部分が完全な平坦でない（傾き  $\neq 0$ ）と、カオティックなふるまいが“少し”現れる。しかしこのときシステムに雑音を加えるとカオスの影響は打ち消され周期軌道の影響が強く出る。

以上のように平坦な部分をもつカオス写像はカオティックなふるまいを示すことはあるけれども全体としては安定なふるまいを示す写像であるといえる。特に、雑音の存在下ではそのような全体としての安定性が助長されカオスの影響はほとんど出ないことになる。

## 6.2 自然現象、特に生命現象における平坦な部分をもつカオス写像

平坦な部分をもつカオス写像は不安定な部分と安定な部分とを合わせもつシステムであるので、様々な自然現象の研究においてこのような写像が観察されることが期待される。実際、以下のような生物の神経細胞に関する実験結果が最近報告されている。

林らは、軟体動物であるイソアワモチのシナプス結合を切った 1 個のニューロンの自発放電活動を調べている [18]。ある条件下でこのニューロンを自発放電させるとそのスパイク間隔は一見不規則な様相を呈する。彼らはこのスパイク間隔から一次元写像を構成

することによりこの一見不規則な自発放電活動がカオスであることを示した。彼らが示している一次元写像は本研究で述べた平坦な部分をもつ単峰形写像になっている。まだ、この写像（自発放電活動）のふるまいの大域的な分岐構造は詳しく調べられていないが、本研究で述べたような様々なふるまいが観察されることが予想される。

また、高橋らはヤリイカ巨大軸索を周期的な電流パルスで刺激するという実験を行い、周期刺激と神経軸索に発生する神経インパルスの応答パターンとの関係を詳しく調べている [45]。そこでは周期刺激が変化するにつれて神経インパルスの応答パターンがどのように変化するかという大域的な分岐構造が明らかにされている。そのとき応答パターンとして様々な周期応答パターンやカオスが現れることが示された。この分岐図は広い範囲の分岐パラメータで周期的なふるまいが現れその中に狭い範囲の分岐パラメータでカオティックなふるまいが現れるという特徴をもつ。このような応答パターンがどのようなメカニズムによって現れるかについてはまだ（例えば数理モデルを用いた）解析は行われていない。しかし、彼らが示した分岐図は本研究で述べたような平坦な部分とカオティックな部分とを合わせもつというメカニズムの存在を強く示唆している。特に彼らはこの応答パターンを記号 0,1 のパターンで表し分岐図を示しているが、そのパターンは 5.章で示した平坦な部分をもつ 2 進変換のようなメカニズムが内在している可能性を示唆している。

さらに彼らは単位時間当りのスパイク頻度と刺激電流の強さとの関係を調べその関係がコントロール関数に近いものになっていることを示している。このような、コントロール性は近年フラクタルとして注目を集めているが、神経細胞の数理モデルによる研究においては古くからよく知られている [34,50]。Nagumo-Sato らは Caianiello の神経モデルから一次元写像を導出し、この写像の性質を詳しく調べることによってこのコントロール性が現れることを解析的に示した [34]。しかしここで注意しなければならないのは Nagumo-Sato らのモデルでは周期的なふるまいしか現れないが高橋らの実験においてはカオティックなふるまいも現れるということである。このような周期的なふるまいとカオティックなふるまいとの“折り合い”をつけるモデルとして 5.章で述べた平坦な部分をもつ 2 進変換は有用であることが期待される。

これまで特に神経細胞の実験での例をあげて平坦な部分をもつカオス写像の有用性を述べた。カオスが神経系の情報処理においてどのような役割を果たしているのか。特にカオティックな部分と安定な部分を合わせもつというメカニズムが存在している場合どのような情報処理が可能であるのか。また、生物の様々な細胞や細胞集団のモデルにおいてもカ

カオス現象が現れることはよく知られている [5,13,41] . カオスが生物の発生過程においてどのような役割を果たしているのか. これらの問題はきわめて興味深い問題であるが今のところその解答は得られていない. カオスと外部雑音との関係や自然界におけるカオスの役割を明らかにしようとする研究はまだその緒についたばかりである. 一見矛盾する二つの性質, すなわちカオティックな部分と安定な部分 (平坦な部分) を合わせもつという写像がこの研究において重要な知見を与えるであろうことを期待して稿を終えることとする.

## A 定理 1 の証明

ここでは、3.2.2節で示した定理 1 の証明を行う。まず以下にいくつかの補題を用意する。特に断わらない限り  $a_i, b_i$  などは記号  $L, R$  のどちらかを表し、 $A, B$  などはそれら記号の列を表すものとする。また補題 8 と 10 以外は記号列の中に記号  $C$  が現れる場合は考慮しない。

**補題 2**  $A$  は長さ  $n$  の記号列とし  $\varphi^i(A^*) = A^*$ ,  $1 \leq i \leq n-1$  を満たすとする。そのとき  $A = B^k$ ,  $k = n/(n, i)$  とかける。ここで  $(n, i)$  は  $n$  と  $i$  の最大公約数を表す。

**証明**  $A = a_1 a_2 \cdots a_n$  とする。仮定より  $\varphi^i(A^*) = A^*$  であるので

$$\begin{aligned} A &= \varphi^i(A)[A]_i, \\ a_1 \cdots a_i a_{i+1} \cdots a_{2i} \cdots a_n &= a_{i+1} \cdots a_{2i} \cdots a_n a_1 \cdots a_i. \end{aligned}$$

したがって、 $i$  が  $n$  の約数ならば

$$a_1 \cdots a_i = a_{i+1} \cdots a_{2i} = \cdots = a_{n-i+1} \cdots a_n \stackrel{\text{def}}{=} B$$

となり、明らかに補題は成り立つ。 $i$  が  $n$  の約数でないならば、

$$n = qi + r, \quad 0 < r < i$$

と書け、このとき  $D = a_1 \cdots a_i$  とおけば

$$\begin{aligned} D &= a_1 \cdots a_i = a_{r+1} \cdots a_i a_1 \cdots a_r \\ &= \varphi^r(D)[D]_r. \end{aligned}$$

となることがわかる。したがって、この  $D$  をもとの  $A$  とし、また  $r$  を  $i$  と考えれば全く同じ議論が記号列  $D$  に対してできる。この手順は明らかに有限回で終わり、最終的には  $A = B^k$  とかける。このとき  $|B| = (n, i)$  となることは記号列の長さに着目すれば上の手順はユークリッドの互除法と等価であることから明らかである。□

**補題 3**  $A \in S$  ならば  $A = L \cdots R$  とかける。

**証明**  $|A| = n$  とする。 $A = L \cdots$  となることは自明。仮定より条件 1 を満たす記号列  $B$  が存在する。したがって、

$$\varphi^n(AB) = B \leq AB,$$

$$\varphi^i(AB) > AB, \quad i = 1, \dots, n-1$$

となる。もし  $A = \dots L$  となっているとすると

$$\varphi^{n-1}(AB) = LB \leq LAB < L\varphi(AB) = AB$$

となり、条件 1 の  $C1)$  に反する。 □

**補題 4**  $A \in S$  は長さ  $n$  の記号列とする。そのとき条件 1 の  $C1)$  を満たす記号列  $B$  が存在するならば  $B \leq A^*$  となり、特に

$$N(A) \text{ が奇数のとき } A^* \leq AB < \bar{A}L^*,$$

$$N(A) \text{ が偶数のとき } A^* \geq AB > \bar{A}L^*.$$

**証明** 条件  $C1)$  で等号が成立するとき、すなわち  $B = AB$  ならば  $B = A^*$  となるので、この場合は明らかである。よって以下では条件  $C1)$  のかわりに

$$C1') \quad \varphi^n(AB) = B < AB$$

を仮定し、 $N(A)$  が奇数、偶数それぞれの場合について補題の後半を証明する。

(i)  $N(A)$  が奇数のとき補題 3 より  $A = \dots LR$  または  $A = \dots RR$  であるが、どちらの場合にも

$$AB < \bar{A}L^*.$$

もし  $AB \leq A^*$  であるとする、そのとき

$$B \geq A^*,$$

$$B \geq A^* \geq AB$$

となり、仮定  $C1')$  に反する。したがって

$$A^* < AB < \bar{A}L^*.$$

(ii)  $N(A)$  が偶数のとき  $AB > \bar{A}L^*$  となることも (i) と同様にしてわかる。条件  $C1')$  より

$$B < AB,$$

$$AB < A^2B,$$

$$A^2B < A^3B,$$

⋮

となるので

$$AB < A^*.$$

したがって

$$A^* > AB > \bar{A}L^*.$$

以上の結果より (i), (ii) どちらの場合にも  $B \leq A^*$  となることは明きらかである。 □

#### 補題 5

$$B \leq A^* \Rightarrow \forall i \geq 0, B \leq A^i B$$

#### 証明

i)  $N(A^i)$  が偶数のとき, もし  $B > A^i B$  ならば

$$A^i B > A^{2i} B,$$

$$A^{2i} B > A^{3i} B,$$

⋮

で, 任意の  $k$  に対して

$$B > A^{ki} B$$

となり,  $B \leq A^*$  に反する.

ii)  $N(A^i)$  が奇数のとき  $B \leq A^*$  より

$$A^i B \geq A^i A^* = A^* \geq B$$

□

#### 補題 6

$$A \in S, |A| = n \Rightarrow \varphi^i(A^*) \geq A^*, i = 1, 2, \dots$$

証明  $A \in S$  より, ある記号列  $B$  が存在して条件 1 を満足する. このとき

$$\varphi^i(A^*) < A^*, (1 \leq i \leq n-1)$$

となるような  $i$  が存在すると仮定して矛盾を導く。このとき

$$\varphi^i(A)[A]_i < [A]_{n-i}\varphi^{n-i}(A) = A \quad (38)$$

である。このとき  $\varphi^i(A) < [A]_{n-i}$  であれば,

$$\begin{aligned} \varphi^i(AB) &= \varphi^i(A)B \\ &< [A]_{n-i}\varphi^{n-i}(A)B = AB \end{aligned}$$

となり条件 C2) に矛盾する。したがって,

$$\varphi^i(A) = [A]_{n-i} \quad \text{---(39)}$$

でなければならない。

(i)  $N(\varphi^i(A))$  が奇数のとき (38),(39) より

$$[A]_i > \varphi^{n-i}(A)$$

であるので

$$\varphi^{n-i}(A)B < [A]_i\varphi^i(A)B = AB$$

となり, 条件 C2) に反する。

(ii)  $N(\varphi^i(A))$  が偶数のとき (38),(39) より

$$\varphi^{n-i}(A) > [A]_i.$$

また, 補題 4 より

$$B \leq A^* = [A]_i\varphi^i(A)A^*$$

であるので

$$[B]_i \leq [A]_i$$

となる。したがって

$$\begin{aligned} [\varphi^i(AB)]_n &= \varphi^i(A)[B]_i = [A]_{n-i}[B]_i \\ &\leq [A]_{n-i}[A]_i < [A]_{n-i}\varphi^{n-i}(A) = A \end{aligned}$$

であるので

$$\varphi^i(AB) < AB$$

となり, 条件 C2) に反する。 □

補題 7  $A \in S$ ,  $|A| = n$  とする. そのとき  $\varphi^i(A^*) = A^*$ ,  $(0 < i < n)$  ならば  $i = n/2$  で  $A = D^2$  と書ける. ここで  $D$  は最小列であり,  $N(D)$  は奇数である.

証明  $A \in S$  であるので, ある記号列  $B$  が存在して条件 1 を満足する:

$$\begin{aligned}\varphi^n(AB) &= B \leq AB, \\ \varphi^i(AB) &> AB, \quad i = 1, \dots, n-1.\end{aligned}$$

補題 2 より,  $\varphi^i(A^*) = A^*$ ,  $(0 < i < n)$  ならば  $A = D^k$ ,  $k \geq 2$  とかける. このとき  $|D| = m$  とすると  $mk = n$  である. 補題 4 より

$$B \leq A^* = D^*.$$

(i)  $N(D)$  が偶数のとき, 補題 5 より  $B \leq DB$  であるので

$$\begin{aligned}\varphi^m(A)B &= D^{k-1}B \\ &\leq D^{k-1}DB = D^k B = AB, \quad m < n\end{aligned}$$

となり, 条件 C2) に矛盾する.

(ii)  $N(D)$  が奇数のとき, もし  $k \geq 3$  ならば補題 5 より  $B \leq D^{k-2}B$  であるので

$$\begin{aligned}\varphi^{(k-2)m}(A)B &= D^2B \\ &\leq D^2 D^{k-2}B = D^k B = AB, \quad 0 < (k-2)m < n\end{aligned}$$

となり, 条件 C2) に矛盾する. したがって  $k = 2$  となり,

$$\varphi^i(A^*) = A^*, \quad (0 < i < n)$$

となるのは  $i = n/2$  のときに限ることがわかる.

また  $A = D^2$  で,  $D$  が最小列:

$$\varphi^i(D^*) > D^*, \quad i = 1, \dots, \frac{n}{2} - 1$$

でないとする, ある  $s$  が存在して

$$\varphi^s(D^*) \leq D^*, \quad (0 < s < \frac{n}{2})$$

となる. もし,  $\varphi^s(D^*) = D^*$  とすると

$$\varphi^s(A^*) = A^*, \quad (0 < s < \frac{n}{2})$$

となり，上の結果に反する．また， $\varphi^s(D^*) < D^*$ ならば

$$\varphi^s(A^*) < A^*, \quad (0 < s < \frac{n}{2})$$

となり，補題 6 に反する．したがって  $D$  は最小列である．  $\square$

**補題 8** 記号列  $AB$  が条件 1 を満たすとする．このとき記号列  $A$  が記号  $C$  を含んでいるとすると  $A = \bar{D}$  と書け， $D$  は

$$\varphi^i(D) \geq [D]_{n-i}, \quad i = 1, \dots, n-1$$

を満たす．ここで等号が成立する場合は  $N(\varphi^i(D)) = N([D]_{n-i})$  は奇数である．

証明 記号列  $A$  が記号  $C$  を含んでいる場合

$$AB = \dots CRL^*$$

となっているがこのとき記号列  $AB$  が条件 1 を満足することにより

$$A = a_1 \dots a_{n-2} CR, \quad B = L^*$$

となることがわかる．よって  $L, R$  の記号列  $D$  に対して  $A = \bar{D}$  とかける．このとき条件 C2) より

$$\begin{aligned} \varphi^i(AB) &= \varphi^i(a_1 \dots a_{n-2} CRL^*) \\ &= a_{i+1} \dots a_{n-2} CRL^* > a_1 \dots a_{n-2-i} a_{n-1-i} \dots a_{n-2} CRL^*, \quad i = 1, \dots, n-1 \end{aligned}$$

が成立するので

$$\varphi^i(a_1 \dots a_{n-2}) = a_{i+1} \dots a_{n-2} \geq a_1 \dots a_{n-2-i}.$$

もしここで等号が成立する場合

$$\varphi^i(a_1 \dots a_{n-2}) = a_1 \dots a_{n-2-i}$$

は， $N(a_1 \dots a_{n-2-i})$  が奇数で  $a_{n-1-i} = L$  であるかまたは  $N(a_1 \dots a_{n-2-i})$  が偶数で  $a_{n-1-i} = R$  である．このどちらの場合も

$$\varphi^i(D) \geq [D]_{n-i}$$

が成り立つことがわかる．ここで等号が成立するならば

$$N(\varphi^i(D)) = N([D]_{n-i}) : \text{odd}$$

であることもわかる．  $\square$

補題 9 記号列  $A$ ,  $|A| = n$  が

$$\varphi^i(A) \geq [A]_{n-i} \quad i = 1, \dots, n-1$$

を満たし、ここで等号が成立する場合は

$$N(\varphi^i(A)) = N([A]_{n-i}) : \text{odd}$$

となっているとする。このとき  $A$  は広義の最小列である。

証明 補題の仮定より

$$\begin{aligned} \varphi^{n-i}(A) &\geq [A]_i, \\ \varphi^i(A) &\geq [A]_{n-i}, \quad i = 1, \dots, n-1 \end{aligned}$$

が成立する。この二つ目の式で等号が成立する場合は

$$N(\varphi^i(A)) = N([A]_{n-i}) : \text{odd}$$

であるので

$$\varphi^i(A)[A]_i \geq [A]_{n-i}\varphi^{n-i}(A) = A$$

となる。したがって

$$\varphi^i(A^*) \geq A^*, \quad i = 1, \dots, n-1$$

が成り立つ。この式で等号が成立する場合は補題 2 より

$$A = D^k, \quad |D| = m, \quad k \geq 2$$

とかける。もし  $k \geq 3$  ならば

$$\varphi^{(k-2)m}(A) = D^2 = [A]_{2m}$$

となり、 $N(\varphi^{(k-2)m}(A))$  は偶数であるがこれは補題の仮定に反する。したがって  $A = D^k$  となるのは  $k = 2$  の場合に限る。このとき  $N(D)$  が奇数になることも補題の仮定から明らかである。ゆえに  $A$  は広義の最小列である。  $\square$

補題 10 記号列  $AB$  が条件 1 を満たすとする。このとき記号列  $A$  が記号  $C$  を含んでいるとすると  $A = \bar{D}$  と書け、 $D$  は広義の最小列である。

証明 補題 8 と補題 9 より明らかである。  $\square$

(定理 1 の証明) 補題 6, 7 と 10 をまとめれば定理 1 が得られる。  $\square$

## B 定理 2 の証明

補題 11  $A, |A| = n$  を広義の最小列とする. このとき

$$\varphi^i(A) = [A]_{n-i}, \quad (0 < i < n)$$

ならば,  $N(\varphi^i(A)) = N([A]_{n-i})$  は奇数である.

証明 まず,  $A$  が最小列の場合に証明をする. そのとき  $\varphi^{n-i}(A^*) > A^*$  であるので

$$\varphi^{n-i}(A)[A]_{n-i} > A \quad (40)$$

また  $\varphi^i(A^*) > A^*$  より

$$\begin{aligned} \varphi^i(A)A &> A[A]_{n-i} = [A]_{n-i}\varphi^{n-i}(A)[A]_{n-i} \\ &= \varphi^i(A)\varphi^{n-i}(A)[A]_{n-i} \end{aligned}$$

これと (40) とより,  $N(\varphi^i(A))$  は奇数であることがわかる.

$A = D^2$  とかけるとき,  $i \neq n/2$  のときは  $A$  が最小列の場合とまったく同様に証明できる.  $i = n/2$  の場合はこの補題の仮定から明らかである.  $\square$

### (定理 2 の証明)

(i)  $N(A)$  が奇数のとき,  $\alpha < x < \beta$  ならば補題 1 より

$$A^* < I(0, x) < \bar{A}L^*$$

であるので, ある記号列  $B$  が存在し

$$I(0, x) = AB$$

とかける. したがって

$$\begin{aligned} B &< A^* \\ \varphi^n(AB) &= B < A^* < AB \end{aligned} \quad (41)$$

となり, 記号列  $AB$  は条件 C1) を満足する.

次に, 記号列  $AB$  が条件 C2) を満たすことを示す. 仮定より  $\varphi^i(A^*) \geq A^*$  であるので

$$\varphi^i(A) \geq [A]_{n-i}, \quad i = 1, \dots, n-1$$

である. ここで, 等号が成り立つような  $i$  が存在しない場合は

$$\varphi^i(A)B > [A]_{n-i}\varphi^{n-i}(A)B = AB$$

となり、条件 C2) の成立はあきらかである。したがって、ある  $i$ , ( $0 < i < n$ ) に対して

$$\varphi^i(A) = [A]_{n-i}$$

となる場合を考える。このとき補題 11 より  $N(\varphi^i(A))$  は奇数である。よって、(41) より

$$\varphi^i(AB) = \varphi^i(A)B > \varphi^i(A)A^* = \varphi^i(A^*) \quad (42)$$

また、 $N(A)$  が奇数のとき  $A$  は最小列であるので

$$\varphi^i(A^*) > A^*$$

となり

$$\begin{aligned} \varphi^i(A)[A]_i &> A, \\ \varphi^i(A^*) &= (\varphi^i(A)[A]_i)^* > AB. \end{aligned}$$

これと (42) とより、 $\varphi^i(AB) > AB$  となる。

(ii)  $N(A)$  が偶数のとき、 $\alpha > x > \beta$  ならば補題 1 より、(i) と同様に

$$A^* > I(0, x) > \bar{A}L^*,$$

であるので、ある記号列  $B$  が存在して

$$I(0, x) = AB$$

となる。したがって  $B < A^*$  が得られる。もし

$$\varphi^n(AB) = B \geq AB$$

とすると、

$$\begin{aligned} AB &\geq A^2B, \\ A^2B &\geq A^3B, \\ &\vdots \\ &\geq A^k B \end{aligned}$$

となり、これが任意の  $k$  について成り立つので  $AB < A^*$  に反する。したがって、記号列  $AB$  は条件 C1) を満足する。次に記号列  $AB$  が条件 C2) を満足することを示す。(i) と全く同様に (42) 式が得られる。仮定より  $A$  は広義の最小列であるので

$$\varphi^i(A^*) \geq A^* > AB.$$

これと (42) より  $\varphi^i(AB) > AB$  が得られ, 記号列  $AB$  が条件  $C2$ ) を満たすことがわかる.

□

## C 定理 4 の証明

補題 12  $A, |A| = n$  は広義の最小列であるとする。このとき

$$\varphi^i(\hat{A}) \geq [\hat{A}]_{n-i} \quad i = 1, \dots, n-1 \quad (43)$$

証明

$$\varphi^{n-1}(\hat{A}) = R > L = [\hat{A}]_1$$

となり,  $i = n-1$  の場合は明らかであるので,

$$\exists i, (1 \leq i \leq n-2) \quad \varphi^i(\hat{A}) < [\hat{A}]_{n-i} \quad (44)$$

と仮定して矛盾を導く。まず,  $\hat{A}$  と  $A$  とは最後から 2 番目の記号が異なるだけであるので,  $A = a_1 a_2 \cdots a_n$  として

$$[\hat{A}]_{n-2} = [A]_{n-2} = a_1 a_2 \cdots a_{n-2} \quad (45)$$

であることに注意する。このとき, もし

$$[\varphi^i(\hat{A})]_{n-i-2} < [\hat{A}]_{n-i-2}$$

であるとする (45) 式より

$$[\varphi^i(A)]_{n-i-2} < [A]_{n-i-2}$$

であるので

$$\varphi^i(A^*) < A^*$$

となり, 補題の仮定に反する。したがって

$$[\varphi^i(\hat{A})]_{n-i-2} = [\hat{A}]_{n-i-2} = [\varphi^i(A)]_{n-i-2} = [A]_{n-i-2}$$

である。以下では  $i \geq 2$  の場合に証明を行うが,  $i = 1$  のときは以下の証明からほとんど明らかである。

(i)  $A = a_1 \cdots a_{n-2} R R, \hat{A} = a_1 \cdots a_{n-2} L R$  の場合

(a)  $N([\varphi^i(\hat{A})]_{n-i-2}) = N([\hat{A}]_{n-i-2})$  が奇数の場合

このとき (44) より

$$\varphi^i(\hat{A}) = [\varphi^i(\hat{A})]_{n-i-2} L R < [\hat{A}]_{n-i-2} a_{n-i-1} a_{n-i}$$

であるので

$$LR > a_{n-i-1}a_{n-i}$$

となり, したがって

$$a_{n-i-1}a_{n-i} = LL$$

となる. ところが, このことより

$$\varphi^i(A) = [\varphi^i(A)]_{n-i-2}RR < [A]_{n-i-2}LL = [A]_{n-i}$$

となり, 補題の仮定に反する.

(b)  $N([\varphi^i(\hat{A})]_{n-i-2}) = N([\hat{A}]_{n-i-2})$  が偶数の場合

(a) と同様の考察より

$$LR < a_{n-i-1}a_{n-i}$$

となり, したがって

$$a_{n-i-1}a_{n-i} = RL \text{ or } RR$$

が得られるが,  $a_{n-i-1}a_{n-i} = RL$  の場合は

$$\varphi^i(A) = [\varphi^i(A)]_{n-i-2}RR < [A]_{n-i-2}RL = [A]_{n-i}$$

となって補題の仮定に反する.  $a_{n-i-1}a_{n-i} = RR$  のときは

$$\varphi^i(A) = [\varphi^i(A)]_{n-i-2}RR = [A]_{n-i-2}RR = [A]_{n-i}$$

となるが, このとき  $N(\varphi^i(A)) = N([A]_{n-i})$  が偶数となり, 補題 11 に反する.

(ii)  $A = a_1 \cdots a_{n-2}LR, \hat{A} = a_1 \cdots a_{n-2}RR$  の場合

(a)  $N([\varphi^i(\hat{A})]_{n-i-2}) = N([\hat{A}]_{n-i-2})$  が奇数の場合

このとき, (i) と同様な考察より

$$RR > a_{n-i-1}a_{n-i}.$$

よって  $a_{n-i-1}a_{n-i} = LL, LR$  であるが  $a_{n-i-1}a_{n-i} = LL$  ならば

$$\varphi^i(A) = [\varphi^i(A)]_{n-i-2}LR < [A]_{n-i-2}LL = [A]_{n-i}$$

となり補題の仮定に反する。また  $a_{n-i-1}a_{n-i} = LR$  ならば

$$\varphi^i(A) = [\varphi^i(A)]_{n-i-2}LR = [A]_{n-i-2}LR = [A]_{n-i}$$

となるが、ここで  $N(\varphi(A))$  が偶数であるので補題 11 に反する。

(b)  $N([\varphi^i(\hat{A})]_{n-i-2}) = N([\hat{A}]_{n-i-2})$  が偶数の場合

同様にして

$$RR < a_{n-i-1}a_{n-i}.$$

したがって  $a_{n-i-1}a_{n-i} = RL$  となる。このとき

$$\varphi^i(A) = [\varphi^i(A)]_{n-i-2}LR < [A]_{n-i-2}RL = [A]_{n-i}$$

となり補題の仮定に反する。

**補題 13**  $A, |A| = n$  は広義の最小列であるとする。このとき

$$\varphi^i(\hat{A}) = [\hat{A}]_{n-i}, \quad i = 1, \dots, n-1$$

ならば  $N(\varphi^i(\hat{A}))$  は奇数である。

**証明** 補題 12 の証明で (i)(b) の場合、すなわち

$$\varphi(\hat{A}) = [\varphi(\hat{A})]_{n-i-2}LR, \quad N([\varphi(\hat{A})]_{n-i-2}) : \text{even}$$

の場合か、(ii)(a) の場合：

$$\varphi(\hat{A}) = [\varphi(\hat{A})]_{n-i-2}RR, \quad N([\varphi(\hat{A})]_{n-i-2}) : \text{odd}$$

のどちらの場合しか補題の仮定は成り立たないことがわかる。どちらの場合も  $N(\varphi(\hat{A}))$  は奇数である。  $\square$

**補題 14**  $A, |A| = n$  は広義の最小列であるとする。このとき

$$\varphi^i(\hat{A}^*) \geq [\hat{A}^*], \quad i = 1, \dots, n-1.$$

証明 もし

$$\varphi^i(\hat{A}^*) = (\varphi^i(\hat{A})[\hat{A}]_i)^* < ([\hat{A}]_{n-i}\varphi^{n-i}(\hat{A}))^* = \hat{A}^*$$

ならば、補題 12 より

$$\varphi^i(\hat{A}) = [\hat{A}]_{n-i}$$

でなければならない。このとき補題 13 より  $N(\varphi^i(\hat{A}))$  が奇数であるので

$$[\hat{A}]_i > \varphi^{n-i}(\hat{A})$$

となる。ところがこれは補題 12 に反する。 □

(定理 4 の証明)  $\varphi^i(\hat{A}^*) = \hat{A}^*$  ならば、補題 2 より

$$\hat{A} = D^k, \quad k \geq 2, \quad |D| = m, \quad mk = n$$

とかける。ここでもし  $k \geq 3$  とすると

$$\varphi^{(k-2)m}(\hat{A}) = D^2 = [\hat{A}]_{2m}$$

となる。よって補題 13 より  $N(D^2)$  が奇数となるがこれは有り得ない。よって  $k = 2$  の場合、すなわち  $\hat{A} = D^2$  の場合に限る。このことと補題 14 より、 $\hat{A}$  が広義の最小列となる。 □

## D 周期列の数の求め方

定義 12 Möbius 関数  $\mu(n)$  は次の式で定義される：

$$\mu(n) = \begin{cases} 1, & \text{if } n = 1, \\ 0, & \text{if } n \text{ is divisible by a prime square,} \\ (-1)^r, & \text{if } n \text{ is the product of } r \text{ distinct primes.} \end{cases} \quad (46)$$

このとき次の補題が成立する（証明は文献 [35] を見よ）：

### 補題 15

$$\sum_{d|n} \mu(d) = \begin{cases} 1, & \text{if } n = 1, \\ 0, & \text{if } n > 1. \end{cases} \quad (47)$$

ここで和は  $n$  のすべての約数  $d$  ( $1, n$  も含む) について加えることを意味する。

この補題を用いると次の結果が得られる：

補題 16 (Möbius の反転公式の変形)  $f(n)$ ,  $g(n)$  はすべての正整数について定義された関数で、任意の  $n$  のついて

$$f(n) = \sum_{d \parallel n} g(d) \quad (48)$$

が成り立つとする。ここで和は  $n$  の約数  $d$  のうち  $n/d$  が奇数になるものすべてについて加えることを意味する。このとき次の反転公式が成立する：

$$g(n) = \sum_{d \parallel n} \mu(d) f\left(\frac{n}{d}\right) \quad (49)$$

ここで和は  $n$  の約数  $d$  のうち奇数であるものについて加えることを意味する。

### 証明

$$n = 2^{e_0} p_1^{e_1} \cdots p_r^{e_r}, \quad (2, p_1, \dots, p_r \text{ are distinct primes})$$

のとき、

$$n' = p_1^{e_1} \cdots p_r^{e_r}$$

とする。  $d \mid n'$  ( $d$  が  $n'$  の約数である) ならば式 (48) より

$$f\left(\frac{n}{d}\right) = \sum_{d_1 \parallel \frac{n}{d}} g(d_1) = \sum_{d_1 \mid \frac{n'}{d}} g(2^{e_0} d_1)$$

であるので

$$\sum_{d|n'} \mu(d) f\left(\frac{n}{d}\right) \sum_{d|n'} \mu(d) \sum_{d_1 | \frac{n'}{d}} g(2^{e_0} d_1)$$

となる。ここで  $n' = dd_1 n_1$  と書けば、 $d_1$  を固定すると  $d$  は  $n'/d_1$  の約数全体を動く。したがって、補題 15 より、 $d_1 = n'$  を除いて  $\sum_{d | \frac{n'}{d_1}} \mu(d) = 0$  であるから

$$\sum_{d|n'} \mu(d) \sum_{d_1 | \frac{n'}{d}} g(2^{e_0} d_1) = \sum_{d_1 | n'} g(2^{e_0} d_1) \sum_{d | \frac{n'}{d_1}} \mu(d) = g(2^{e_0} n') = g(n).$$

ゆえに証明は完了した。 □

この補題より次の補題が得られる。

補題 17  $M_o(n)$  を長さが  $n$  の最小列  $A$  で  $N(A)$  が奇数であるものの数とする。このとき

$$M_o(n) = \frac{1}{n} \sum_{d|_o n} \mu(d) 2^{n/d-1}$$

となる。

証明 まず記号  $L, R$  の列  $A, |A| = n$  で  $N(A) : \text{odd}$  なるものは  $2^{n-1}$  個あることに注意する。

この中で

$$A = B^k, \quad |B| = d, \quad k = \frac{n}{d} : \text{odd}$$

となるものは  $dM_o(d)$  個あるので、 $d$  について和をとると

$$\sum_{d|_o n} dM_o(d) = 2^{n-1}$$

となる。したがって、Möbius の反転公式の変形 (49) で、 $f(n) = 2^{n-1}$ ,  $g(n) = dM_o(d)$  とすれば、求める式が得られる。 □

### E 3 章の整数論的補足

ここでは、3.2節で得られた結果を整数論的な角度から見直し、いくつか興味ある問題を示す。この節を通して写像  $f$  はテント写像 (20) を表すこととし、テント写像上での初期値問題すなわちテント写像によって生成される軌道の道程  $I(0, x)$  の性質が初期値  $x$  に対してどのように変化するか注目する。まず次の定理が成り立つ：

定理 8 記号  $L, R$  の列  $A$  が次の条件を満たすとする：

$$A = a_1 a_2 \cdots a_n, \quad a_n = R, \quad N(A) : \text{odd integer.} \quad (50)$$

またテント写像 (20) で記号列  $A^*$  に対応する初期値を  $x$  とする：

$$I(0, x) = A^*. \quad (51)$$

このとき、

$$x = \frac{2}{2^n + 1} l, \quad l(1 \leq l \leq 2^{n-1} - 1) : \text{odd integer.} \quad (52)$$

とかける。逆に  $x$  が式 (52) のようにかけられるならば

$$I(0, x) = A^* \quad (53)$$

となり、ここで  $A$  は式 (50) のようになる。

証明 記号列  $A$  が (50) のようにかけるとすると

$$\begin{aligned} A &= \overbrace{L \cdots R}^{n_1} \overbrace{L \cdots R}^{n_2} \cdots \overbrace{L \cdots R}^{n_k} \\ &= A_1 A_2 \cdots A_k, \quad |A_i| = n_i \ (n_i \geq 1), \quad k : \text{odd integer} \end{aligned} \quad (54)$$

と表すことができる。すなわち記号列  $A$  をそれぞれ  $R$  を一つだけ含む  $k$  個のブロック  $A_1 \cdots A_k$  にわけるのである。ここで  $n_i = 1$  となるのは  $A_i = R$  の場合である。また  $N(A)$  が奇数であることより  $k$  も奇数になることはあきらかである。このとき 3.2.2 節の (29) 式より

$$\begin{aligned} x = J(A^*) &= \frac{2}{2^n + 1} (2^{n-n_1} - 2^{n-n_1-n_2} + \cdots - 2^{n-n_1-\cdots-n_{k-1}} + 1) \\ &= \frac{2}{2^n + 1} (2^{n_2+\cdots+n_k} - 2^{n_3+\cdots+n_k} + \cdots - 2^{n_k} + 1) \\ n &= n_1 + \cdots + n_k \end{aligned} \quad (55)$$

となることがわかる。よって定理の前半部分(52)は証明された。つぎに後半を証明する。  
まず任意の奇数  $l$  の  $(-2)$  進展開をつぎのように定義する：

$$l = 2^{n_2+\dots+n_k} - 2^{n_3+\dots+n_k} + \dots + 2^{n_{k-1}+n_k} - 2^{n_k} + 1 \quad (56)$$

ここで、この  $(-2)$  進展開が一意的に決まることは  $l$  の  $2$  進展開を考えれば容易にわかる。  
したがって  $x$  が (52) 式のようにかけるとき

$$n_1 = n - n_2 - \dots - n_k$$

とおけば

$$I(0, x) = A^*$$

となり、 $A$  は (50) のようになるとわかる。  $\square$

この定理により (50) 式のように表される記号列と奇数  $l (1 \leq l \leq 2^{n-1} - 1)$  とが 1 対 1  
に対応することがわかる。

例として記号列  $A = LLRRLR$  を考える。ここでテント写像 (20) で周期列  $A^*$  に対応する  
初期値を  $x$  とする：

$$I(0, x) = A^* = (LLRRLR)^*. \quad (57)$$

このとき

$$x = J(A^*) = J((LLRRLR)^*) = \frac{2}{2^6 + 1}(2^3 - 2^2 + 1) = \frac{2}{2^6 + 1}5 \quad (58)$$

となる。同様にして

$$J(\varphi^3(A^*)) = J((RLRLLR)^*) = \frac{2}{2^6 + 1}25 \quad (59)$$

$$J(\varphi^4(A^*)) = J((LRLLRR)^*) = \frac{2}{2^6 + 1}15 \quad (60)$$

となる。ここで

$$J(\varphi^i(A^*)) = f^i(J(A^*)) \quad (61)$$

なることを用いると

$$f^3\left(\frac{2}{2^6 + 1}5\right) = \frac{2}{2^6 + 1}25 \quad (62)$$

$$f\left(\frac{2}{2^6 + 1}25\right) = \frac{2}{2^6 + 1}15 \quad (63)$$

$$f^2\left(\frac{2}{2^6 + 1}15\right) = \frac{2}{2^6 + 1}5 \quad (64)$$

が成り立つこともわかる。すなわち 3 点

$$\frac{2}{2^6+1}5, \frac{2}{2^6+1}25, \frac{2}{2^6+1}15$$

は同一の周期軌道上の点である。このとき (52) 式のように書き表したときの奇数  $l$  に注目する。すなわちこの例では数 5, 25, 15 に着目する。3 つの奇数 5, 25, 15 は同一の周期軌道上にあるという意味である種の組をなしている。このことをもう少し正確にみるために (62) 式をテント写像 (20) の式を使って具体的に表す：

$$\begin{aligned} f^3\left(\frac{2}{2^6+1}5\right) &= 2\left(1 - 2^2\frac{2}{2^6+1}5\right) \\ &= 2\frac{2^6+1-2^3\cdot 5}{2^6+1} \\ &= \frac{2}{2^6+1}(2^6+1-2^3\cdot 5) = \frac{2}{2^6+1}25. \end{aligned} \quad (65)$$

この最後の等式より、関係式

$$2^6+1 = 2^3\cdot 5 + 25 \quad (66)$$

が成立していることがわかる。同様に (63), (64) 式から

$$\begin{aligned} 2^6+1 &= 2^1\cdot 25 + 15, \\ 2^6+1 &= 2^2\cdot 15 + 5 \end{aligned} \quad (67)$$

が得られる。以上のように 3 つの奇数 5, 25, 15 は関係式 (66), (67) によって組をなしていることがわかる。ここでは 5, 25, 15 を例にとって議論を行ったが、ここで述べたことは一般に成立する。まず次の定義を行う。

**定義 13** (変換  $T_n$ ) 奇数の集合  $Q(n)$ , ( $n \geq 2$ ) を次のように定義する：

$$Q(n) = \{1, 3, \dots, 2^{n-1} - 1\}$$

このとき  $s, t \in Q(n)$  として、ある整数  $k (\geq 1)$  に対して関係式

$$2^n + 1 = 2^k s + t \quad (68)$$

が成り立つとき変換  $T_n$  を用いて

$$T_n(s) = t \quad (69)$$

と表す。変換  $T_n$  が  $Q(n)$  から  $Q(n)$  の上への可逆な変換となっていることは後に示す。このとき (68) 式の  $k$  を (変換  $T_n$  に関する)  $s$  の指数と呼び

$$Ind(n, s) = k$$

とあらわす。

(68) 式によって変換  $T_n$  がうまく定まること、すなわち任意の  $s \in Q(n)$  に対して  $t \in Q(n)$  が一意的に決まることは次のようにしてわかる。まず (68) 式を満たす  $t \in Q(n)$  が少なくとも一つ定まることは明らかであろう。このとき  $t$  と異なる  $t' \in Q(n)$  に対して (68) が成り立ったとする：

$$2^n + 1 = 2^{k'} s + t'.$$

このとき

$$t' - t = (2^k - 2^{k'}) s$$

が成り立っている。まず、 $k > k'$  の場合を考える。このとき

$$\begin{aligned} t' &= t + (t' - t) = t + (2^k - 2^{k'}) s \\ &\geq t + (2^k - 2^{k-1}) s \\ &= t + \frac{2^k}{2} s \\ &= \frac{t + 2^k s}{2} + \frac{t}{2} \\ &= \frac{2^n + 1}{2} + \frac{t}{2} \\ &= 2^{n-1} + \frac{1}{2} + \frac{t}{2} > 2^{n-1} - 1. \end{aligned}$$

となり、 $t' \notin Q(n)$  となる。また  $k < k'$  のときは

$$\begin{aligned} t' &= t + (t' - t) = t - (2^{k'} - 2^k) s \\ &\leq t - (2^{k+1} - 2^k) s \\ &= t - 2^k s \\ &= 2t - (t + 2^k s) \\ &= 2t - 2^n - 1 \\ &\leq 2^n - 2 - 2^n - 1 < 0 \end{aligned}$$

となり、 $t' \notin Q(n)$  である。また逆に  $t \in Q(n)$  を一つ定めたとき (68) を満たすような  $s \in Q(n)$  がただ一つ定まることは明らかである。したがって定義 13 で定めた変換  $T_n$  は  $Q(n)$  上の可逆な変換となっている。

この変換  $T_n$  をもちいて集合  $Q(n)$  を類別することができる。

定義 14 集合  $Q(n)$  の類別  $\{R_i\}$  を考える：

$$Q(n) = R_1 \cup \dots \cup R_m, \quad R_i \cap R_j = \emptyset \ (i \neq j).$$

ここで  $s, t \in Q(n)$  に対してある整数  $j \ (> 0)$  が存在して

$$T_n^j(s) = t$$

となっているときまたそのときに限り  $s$  と  $t$  は同じ類  $R_i$  に属するとする。ここで  $T_n^j$  は変換  $T_n$  の  $j$  回の繰返しを意味する。

さらにつぎのような定義を行う。

定義 15 定義 14 の類別  $\{R_i\}$  において、それぞれの類  $R_i$  の指数  $Ind(n, R_i)$  を次のように定義する：

$$Ind(n, R_i) = \sum_{s \in R_i} Ind(n, s)$$

ここで、和は類  $R_i$  のすべての要素  $s$  についてとるものとする。

定義 16 (最小元) 集合  $Q(n)$  の最小元の集合  $U(n)$  とは、集合  $Q(n)$  の類別  $\{R_i\}$  において指数が  $n$  に等しいような類  $R_i$  の最小の要素の集合をいう：

$$U(n) = \{s | s = \min(R_i), \quad Ind(n, R_i) = n\}. \quad (70)$$

ここで  $\min(R_i)$  は類  $R_i$  の要素の中で (普通の意味で) 最小の要素を表す。  $R_i$  が 1 個の要素だけからなる場合はその要素をあらわす。

ここで定義された最小元の集合  $U(n)$  と 3.2.2 で定義した広義の最小列の集合  $S$  との関係は次の定理によって明らかになる：

定理 9

$$\{x | x = J(A^*), \ A \in S, \ |A| = n, \ N(A): \text{odd}\} = \left\{ \frac{2}{2^n + 1} s | s \in U(n) \right\} \quad (71)$$

定義と定理の羅列で話が少し抽象的になったのでこれらの意味を取るために例を考える。  $n = 6$  の場合を考える。このとき

$$Q(6) = \{1, 3, \dots, 31\}$$

であり、定義 14 の類別は

$$\begin{aligned}
Q(6) &= R_1 \cup \cdots \cup R_6, \\
R_1 &= \{1\}, \\
R_2 &= \{3, 17, 31\}, \\
R_3 &= \{5, 25, 15\}, \\
R_4 &= \{7, 9, 29\}, \\
R_5 &= \{11, 21, 23, 19, 27\}, \\
R_6 &= \{13\}
\end{aligned}$$

となる。ここでそれぞれの類の中での順序は

$$5 \xrightarrow{\tau_6} 25 \xrightarrow{\tau_6} 15$$

などとなることを表している。またこれらの類の指数は

$$Ind(6, R_1) = \cdots = Ind(6, R_5) = 6, \quad Ind(6, R_6) = 2$$

となるので、最小元の集合は類  $R_1, \dots, R_5$  それぞれの最小の要素からなる集合

$$U(6) = \{1, 3, 5, 7, 11\}$$

となる。(58),(59),(60) 式で見たように、3 個の奇数 5, 25, 15 はそれぞれ 3 個の周期列  $(LLRRLR)^*$ ,  $(RLRLLR)^*$ ,  $(LRLLLR)^*$  に対応していた。これら 3 個の周期列は順序が異なるだけで同一の周期列  $(LLRRLR)^*$  を表していることに注意すれば、すなわち類

$$R_3 = \{5, 25, 15\}$$

は周期列  $(LLRRLR)^*$  に対応していることになる。ここで、記号列  $LLRRLR$  は最小列であり、類  $R_3$  の最小要素 5 が最小列  $LLRRLR$  に対応している。

このことより定理 9 の意味も明らかであろう。ここで注意しなければならないことは最小元の集合  $U(6)$  を構成するときに類  $R_6 = \{13\}$  を除いていることである。この理由は次の通りである。すなわち類  $R_6$  の要素 13 は周期列  $(LRLRLR)^*$  に対応しているが周期列  $(LRLRLR)^*$  は周期列  $(LR)^*$  と同一であり、その周期は 6 ではなく 2 である。したがって集合  $U_n$  からこれを除いたのである。この周期 2 が類  $R_6$  の指数になっている。すなわち集

合  $U(n)$  を構成するときに指数が  $n$  であるような類を用いたのは“真に”周期  $n$  であるものを選び出すためである。

また、広義の最小列の集合  $S$  においては 2-周期列  $(LR)^*$  と 4-周期列  $(LRLR)^*$  とを区別していたが、今は  $N(A)$  が奇数であるような記号列  $A$  を考えているのでこの区別はここでは問題にならない。集合  $U(6)$  の要素と最小列の対応関係をまとめておくと以下のようになる。

$$\begin{aligned}\min(R_1) &= 1 \leftrightarrow LLLLLL, \\ \min(R_2) &= 3 \leftrightarrow LLLRRR, \\ \min(R_3) &= 5 \leftrightarrow LLRRLR, \\ \min(R_4) &= 7 \leftrightarrow LLRLRR, \\ \min(R_5) &= 11 \leftrightarrow LRRRRR.\end{aligned}$$

定義 14 で類別  $\{R_i\}$  がうまく定まることや定理 9 は証明なしで述べたが、ここで証明の概略のみ紹介することとする。まず、定理 8 とその証明で述べたことにより (50) を満たすような記号列  $A$  と集合  $Q(n)$  の要素が 1 対 1 に対応することに注意する。このとき、(54) 式より  $A$  は

$$A = A_1 A_2 \cdots A_k, \quad k : \text{odd integer} \quad (72)$$

とかけ、周期列  $(A_1 A_2 \cdots A_k)^*$ ,  $(A_2 A_3 \cdots A_k A_1)^*$  に対応する奇数をそれぞれ  $s, t \in Q(n)$  とすると

$$s \xrightarrow{T_n} t$$

となることがわかる。すなわち記号列  $A$  を (72) 式のように  $k$  個のブロックで表したとき、集合  $Q(n)$  上の変換  $T_n$  は記号列ではブロックを一つずらすことに対応することがわかる。したがって集合  $Q(n)$  は定義 14 のように類別されることがわかる。このとき最小元の集合  $U(n)$  が最小列に対応するので定理 9 も証明される。

これらのことより類別  $R_i$  に関する次の補題も明らかであろう。

**補題 18** 類別  $\{R_i\}$  においてそれぞれの類  $R_i$  の要素の個数  $|R_i|$  は奇数である。

また定理 9 よりわかるように、集合  $U(n)$  の要素の個数  $|U(n)|$  は長さ  $n$  の最小列  $A$ ,  $(N(A): \text{odd})$  の数と等しいので補題 17 より、次の補題が得られる。

**補題 19**

$$|U(n)| = M_o(n) = \frac{1}{n} \sum_{d|n} \mu(d) 2^{n/d-1}$$

定理 6 を用いると次の定理が証明される。

定理 10

$$\frac{1}{10} + \sum_{n=3}^{\infty} \frac{4}{(2^n + 1)(2^n - 1)} \sum_{s \in U(n)} s = \frac{1}{2}$$

証明  $A$  を  $N(A)$  : odd なる長さ  $n$  の最小列とし、テント写像において周期列  $A^*$  に対応する初期値を  $x$  とする：

$$I(0, x) = A^*.$$

このとき定理 9 より

$$x = \frac{2}{2^n + 1} s$$

とかける。また、周期列  $\hat{A}^*$  に対応する初期値を  $z$  とすると

$$z = \frac{2}{2^n - 1} s$$

となることも容易にわかる。このとき

$$\alpha = h^{-1}(x), \quad \gamma = h^{-1}(z).$$

とおく。ここで  $h^{-1}(\cdot)$  は (25) 式で定義された関数  $h$  の逆関数である。したがって、 $\alpha < \gamma$  のとき TWFS 写像の生成する安定な周期軌道は  $A^*$  か  $\hat{A}^*$  のどちらかであることがわかる。すなわち、TWFS 写像の生成する周期軌道が  $A^*$  か  $\hat{A}^*$  のどちらかになるようなパラメータ  $a$  の区間の長さ（測度）は  $\gamma - \alpha$  となる。 $A$  を  $N(A)$  が奇数であるような最小列とすると、定理 4 で述べたように TWFS 写像が生成する周期軌道は  $A^*$  か  $\hat{A}^*$  の形のものですべて尽くされる。よって TWFS 写像が  $n$ -周期軌道 ( $n \geq 3$ ) を生成するパラメータ  $a$  の集合を  $\mathcal{A}_n$  とおくと定理 9 より

$$\mu(\mathcal{A}_n) = \sum_{s \in U(n)} \left\{ h^{-1}\left(\frac{2}{2^n - 1}s\right) - h^{-1}\left(\frac{2}{2^n + 1}s\right) \right\} \quad (73)$$

となる。ここで  $\mu(\mathcal{A}_n)$  は集合  $\mathcal{A}_n$  のルベグ測度である。また TWFS 写像が生成する 2-周期軌道は  $(LR)^*$  だけであり、

$$\begin{aligned} I(0, \frac{2}{5}) &= (LR)^*, \\ h^{-1}(\frac{2}{5}) &= \frac{1}{3} \end{aligned}$$

となるので, TWFS 写像が 2-周期軌道を生成するようなパラメータ  $a$  の範囲の測度 (長さ) は

$$\mu(A_2) = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6} \quad (74)$$

となる. 定理 6 よりほとんどすべてのパラメータ  $a$  ( $0 \leq a \leq \frac{1}{2}$ ) に対して TWFS 写像の生成する軌道は周期軌道であるので, このことは

$$\sum_{n=2}^{\infty} \mu(A_n) = \frac{1}{2}$$

が成立することを意味している. したがって (73), (74) 式より以下の式が示された:

$$\frac{1}{6} + \sum_{n=3}^{\infty} \sum_{s \in U(n)} \{h^{-1}(\frac{2}{2^n-1}s) - h^{-1}(\frac{2}{2^n+1}s)\} = \frac{1}{2}. \quad (75)$$

Fig.26 にも示したように関数

$$h(a) = \frac{2a}{1+2a}$$

は, TWFS 写像の分岐パラメータ  $a$  の集合  $A_n$  とテント写像上の初期値を対応させる関数であるので (75) 式より

$$\begin{aligned} & \frac{1}{10} + \sum_{n=3}^{\infty} \sum_{s \in U(n)} \left\{ \frac{2}{2^n-1}s - \frac{2}{2^n+1}s \right\} \\ &= \frac{1}{10} + \sum_{n=3}^{\infty} \sum_{s \in U(n)} \frac{4}{(2^n-1)(2^n+1)}s \\ &= \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

となる. □

以上のように整数の集合  $Q(n)$  上で定義される変換  $T_n$  とその変換によって定義される集合  $U(n)$  に関する定理 10 を TWFS 写像の分岐問題 (テント写像での初期値問題) に対応づけて “間接的に” 証明した. しかし, この問題の整数論的方法による直接的な証明は得られていない.

最後に例として  $U(n)$ , ( $n = 2, \dots, 10$ ) を table 2 に示した.

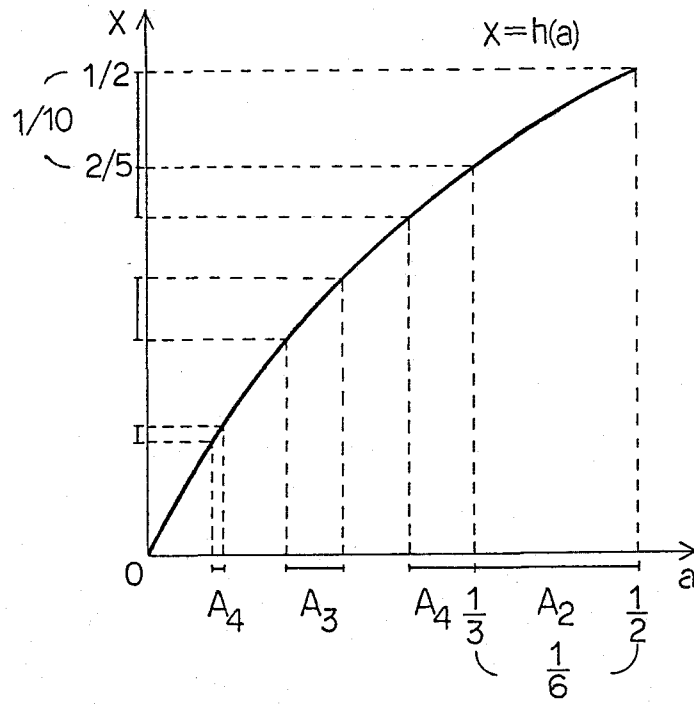


Fig.26: 関数  $h$  .  $h(a)$  によって TWFS 写像で安定な周期軌道が存在する分岐パラメータ  $a$  の範囲  $A_n$  とテント写像上での初期値の範囲が対応づけられる.

| $n$ | $U(n)$                                                                                                           |
|-----|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| 2   | $\{ 1 \}$                                                                                                        |
| 3   | $\{ 1 \}$                                                                                                        |
| 4   | $\{ 1, 3 \}$                                                                                                     |
| 5   | $\{ 1, 3, 5 \}$                                                                                                  |
| 6   | $\{ 1, 3, 5, 7, 11 \}$                                                                                           |
| 7   | $\{ 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 19, 21 \}$                                                                            |
| 8   | $\{ 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 19, 21, 23, 25, 27, 37, 43, 45 \}$                                                |
| 9   | $\{ 1, \dots, 29, 35, \dots, 45, 51, 53, 55, 75, 77, 83, 85 \}$                                                  |
| 10  | $\{ 1, \dots, 31, 35, \dots, 59, 69, \dots, 77, 83, \dots, 93, 101, \dots, 109, 147, 149, 155, 171, 173, 179 \}$ |

Table 2: 最小元の集合  $U(n)$  .

## References

- [1] K.I.Agladze et al., Chaos in the non-stirred Belousov-Zhabotinsky reaction is induced by interaction of waves and stationary dissipative structures, *Nature* 308, 834-835 (1984).
- [2] A.Boyarsky and M.Scarowsky, On a class of transformations which have unique absolutely continuous invariant measures, *Trans. Am. Math. Soc.* 255, 243-262 (1979).
- [3] A.Boyarsky, Randomness implies order, *J. Math. Anal. Appl.* 76, 483-497 (1980).
- [4] A.Boyarsky, Singular perturbations of piecewise monotonic maps of the interval, *J. Stat. Phys.* 48, 561-569 (1987).
- [5] T.R.Chay, Chaos in a three-variable model of an excitable cell, *Physica* 16D, 233-242 (1985).
- [6] P.Collet and J.P.Eckmann, *Iterated maps of the interval as dynamical systems*: Birkhäuser 1980.
- [7] J.P.Crutchfield and B.A.Huberman, Fluctuations and the onset of chaos, *Phys. Lett.* 77A, 407-410 (1980).
- [8] J.P.Crutchfield, J.D.Farmer and B.A.Huberman, Fluctuations and simple chaotic dynamics, *Phys. Rep.* 92, 45-82 (1982).
- [9] J.P.Crutchfield and N.H.Packard, Symbolic dynamics of noisy chaos, *Physica* 7D, 201-223 (1983).
- [10] P.Cull, Local and global stability for population models, *Biol. Cybern.* 54, 141-149 (1986).
- [11] P.Cull, Stability of discrete one-dimensional population models, *Bull. Math. Biol.* 50, 67-75 (1988).
- [12] B.Derrida, A.Gervois and Y.Pomeau, Universal metric properties of bifurcations of endomorphisms, *J. Phys. A.* 12, 269-296 (1979).

- [13] S.Doi and S.Sato, Regulation of differentiation in a population of cells interacting through a common pool, J. Math. Biol. 26, 435-454 (1988).
- [14] J.Guckenheimer et al., The dynamics of density dependent population models, J. Math. Biol. 4, 101-147 (1977).
- [15] J.Guckenheimer and P.Holmes, Nonlinear oscillations, dynamical systems, and bifurcations of vector fields: Springer 1983.
- [16] B-L Hao, Chaos : World Scientific 1984. (カオスに関する代表的な論文はここに収録されている.)
- [17] H.Hayashi, S.Ishizuka and K.Hirakawa, Chaotic response of the pacemaker neuron, J. Phys. Soc. Jpn. 54, 2337-2346 (1986).
- [18] 林初男, 石塚智, ニューロンの自発性放電に見られるカオス現象, 信学技報 NLP86-34 (1986).
- [19] S.Ito, S.Tanaka and H.Nakada, On unimodal linear transformations and chaos I, Tokyo J. Math. 2, 221-239 (1979).
- [20] S.Ito, S.Tanaka and H.Nakada, On unimodal linear transformations and chaos II, Tokyo J. Math. 2, 241-259 (1979).
- [21] S.Ito and Y.Takahashi, Markov subshifts and realization of  $\beta$ -expansions, J. Math. Soc. Jpn. 26, 33-55 (1974).
- [22] T.Kapitaniak, Chaos in systems with noise : World Scientific 1988.
- [23] J.P.Keener, Chaotic behavior in piecewise continuous difference equations, Trans. Amer. Math. Soc. 261, 589-604 (1980).
- [24] 香田徹, 村尾健次, 一次元非線形差分方程式の不変密度の有限要素法的解法, 信学論 (A), J65-A, 6, 505-512 (1982).
- [25] Period three implies chaos, Amer. Math. Monthly, 82, 985-992 (1975).

- [26] R.M.May, Simple mathematical models with very complicated dynamics, *Nature* 261, 459-467 (1976).
- [27] G.Mayer-Kress and H.Haken, The influence of noise on the logistic model, *J. Stat. Phys.* 26, 149-171 (1981).
- [28] G.Mayer-Kress and H.Haken, Transition to chaos for maps with positive Schwarzian derivative. In: H.Haken (ed.) *Evolution of order and chaos*, pp.183-186. Berlin, Heidelberg, New York: Springer 1982.
- [29] G.Mayer-Kress and H.Haken, Attractors of convex maps with positive Schwarzian derivative in the presence of noise, *Physica* 10D, 329-339 (1984).
- [30] K.Matsumoto, Noise-induced order II, *J. Stat. Phys.* 34, 111-127 (1984).
- [31] K.Matsumoto and I.Tsuda, Noise-induced order, *J. Stat. Phys.* 31, 87-106 (1983).
- [32] K.Matsumoto and I.Tsuda, Information theoretical approach to noisy dynamics, *J. Phys. A*, 18, 3561-3566 (1985).
- [33] K.Matsumoto and I.Tsuda, Extended information in one-dimensional maps, *Physica* 26D, 347-357 (1987).
- [34] J.Nagumo and S.Sato, On a response characteristic of a mathematical neuron model, *Kybernetik* 10, 155-164 (1972).
- [35] I.Niven and H.S.Zuckerman, *An introduction to the theory of numbers*: John Wiley & Sons 1980.
- [36] Y.Oono, Period  $\neq 2^n$  implies chaos, *Prog. Theor. Phys.*, 59, 1028-1038 (1978).
- [37] Y.Oono and Y.Takahashi, Chaos, external noise and Fredholm theory, *Prog. Theor. Phys.* 63, 1804-1807 (1980).
- [38] D.Ruelle, Small random perturbations of dynamical systems and the definition of attractors, *Commun. Math. Phys.* 82, 137-151 (1981).

- [39] R.Shaw, Strange attractors, chaotic behavior, and information flow, *Z. Naturforsch.* 36a, 80-112 (1981).
- [40] R.H.Simoyi, A.Wolf and H.L.Swinney, One-dimensional dynamics in a multicomponent chemical reaction, *Phys. Rev. Lett.* 26, 245-248 (1982).
- [41] O.Sporns, S.Roth and F.F.Seelig, Chaotic dynamics of two coupled biochemical oscillators, *Physica* 26D, 215-224 (1987).
- [42] 砂原, 森田, 安田, 木村, 微小な不規則摂動を受ける力学系のカオス的挙動, 計測自動制御学会論文集 20, 389-395 (1984).
- [43] H.L.Swinney, Observations of order and chaos in nonlinear systems, *Physica* 7D, 3-15 (1983).
- [44] 十時東生, エルゴード理論入門, 共立出版
- [45] 高橋信行 et al., ヤリイカ巨大軸索の周期刺激応答に見られるカオス, The 3rd Symposium on Biological and Physiological Engineering, Osaka, 175-178 (1988).
- [46] I.Tsuda and K.Matsumoto, Noise-induced order – complexity theoretical digression. In: Y.Kuramoto (ed.) *Chaos and statistical methods*, pp.102-108. Berlin, Heidelberg, New York, Tokyo: Springer 1984.
- [47] 津田一郎, 松本健司, Noise-Induced Order, *日本物理学会誌*, 第 40 巻, 第 3 号, 203-207 (1985).
- [48] Y.Ueda et al., Computer simulation of nonlinear ordinary differential equations and nonperiodic oscillations, *Trans. IECE Japan*, 56-A, 218-225 (1973) ; English Translation, Scripta Publ. Co., pp.27-34.
- [49] Y.Ueda, Randomly transitional phenomena in the system governed by Duffing's equation, *J. Stat. Phys.* 20, 181-196 (1979).
- [50] S.Yoshizawa, H.Osada, and J.Nagumo, Pulse sequences generated by a degenerate analog neuron model, *Biol. Cybern.* 45, 23-33 (1982).

## 参考文献

本論文は以下の参考文献に基づいている：

- [1] 土居伸二, 一次元写像における雑音に誘導される周期性について, 信学技報 NLP 86-79 (1987).
- [2] 土居伸二, 平坦な部分をもつ単峰形写像の性質について, 信学技報 CAS87-189 (1987).
- [3] S.Doi, On a noise-induced order in a one-dimensional mapping, Second Japan-China Bilateral Symposium on Biophysics. 1988 Kyoto Japan, 265-266.
- [4] 土居伸二, 平坦な部分をもつテント写像の性質について, 信学技報 NLP 88-10 (1988).
- [5] 土居伸二, 平坦な部分をもつテント写像の性質について — 周期解・カオス・雑音 —, 京都大学数理解析研究所, 講究録.
- [6] S.Doi, A chaotic map with a flat segment can produce a noise-induced order, J. Stat. Phys. to appear.
- [7] S.Doi, On a chaotic map with a flat segment. in preparation.

## 謝辞

5年前、生物が“非線形”であること、様々な意味で“揺らいで”いることの意味を数理的に理解したいという初心を抱いてこの生物工学科にやってきました。以来カオスとも思えるような研究経歴をたどりつつ、ようやく本研究をまとめることができました。この間、佐藤俊輔先生には研究上での御指導はいうまでもなく様々な面で励ましや援助をいただきました。また、小林欣吾先生は常に厳しい助言を与えて下さいました。本研究は博士後期課程の研究をまとめたものですが、前期課程の研究では東京大学工学部鈴木良次先生、ATR 川人光男氏、京都大学理学部梅田民樹氏に有益な議論をしていただきました。ここに深く感謝します。



