超流動He^4における音響子型素励起の熱力学的性質に関する理論的研究

大　矢　正　人

超流動He^4における音響子型素励起の熱力学的性質に関する理論的研究

昭和５７年１２月

大　矢　正　人

要　旨

液体He^4は、λ点とよばれる温度（約2.17K）以下で超流動状態に転移する。この相転移現象を微視的立場から解明する努力は、長い歴史を有するが、まだ成功していない。ここでは、He^4の体系としてもっとも広く採用されているボーズ粒子モデルを使い、音響子型素励起の熱力学的性質を対称性の破れの観点に立って解析し、液体He^4の実験結果と比較検討を行う。

本研究の主要な目的は、第一は、超流動状態における長波長域の音響子型素励起のエネルギースペクトルの微視的表現を求めること、そしてその結果を液体He^4の中性子非弾性散乱実験の素励起の音速の温度依存性の結果と比較することである。第二は、中性子非弾性散乱実験によって観測される超流動状態における動的構造因子の二成分構造の理論的解明を行うことである。

まず、前半において、凝縮体を有しかつ二体の相互作用をしているボーズ粒子系の、有限温度における集団励起のエネルギースペクトルを求める。この計算は、有限温度に拡張された素励起場展開法を基礎にして、一般化されたペア近似を使って行われる。計算の結果、ギャップのない音響子型のエネルギースペクトルをもつ集団励起が存在し、その集団励起の音速は

ほとんど温度に依存しないことが示される。この結論は、液体He⁴の中性子非弾性散乱実験によって観測される密度のゆらぎの音速の温度依存性と定性的に一致する。また、この音速の微視的表現は、絶対零度の場合、高野によって計算された集団励起から求められる結果と厳密に一致しており、この意味で現在の研究は、絶対零度における微視的理論の有限温度への拡張として有効なものであると考えられる。

次に後半において、低周波数、長波長域における流束密度応答関数および密度応答関数に対する集団励起の寄与を明らかにする。流束密度応答関数は回転容器中でのボーズ粒子系の応答を示しており、流束密度応答関数の微視的表現は、この応答が個別励起対からなる集団励起による部分と熱的に励起された個別励起による部分からなることを示している。超流体部分は集団励起によって担われ、常流体部分は熱的個別励起部分によって担われることがわかる。静的極限から求められた超流体密度と凝縮体密度の関係は、碓井およびPasqualeらによる結果と一致している。中性子非弾性散乱実験によって観測されるλ点以下における動的構造因子の二成分構造は、密度応答関数を集団励起による部分と熱的に励起された個別励起部分に分離することによって説明される。この指摘は新しい知見である。

対称性の破れの立場からいえば、この集団励起は超流動状態の出現にともなうゲージ対称性の破れに対するGoldstoneモードである。通常、このGoldstoneモードは中性子非弾性散乱実験で観測されるフォノンと同一視されている。しかしこのフォノンスペクトルはλ点以上でも存在し、Goldstoneモードとは認めがたい。本研究の結果が示すように、Goldstoneモードと熱的に励起された個別励起（ボゴロン）による集団振動の分散関係は一致しており、かつ長波長域（波数 $k < 0.2\,\text{Å}^{-1}$）ではlife timeも同程度であると考えられるので分離されることはない。しかし、kが少し大きくなるとlife timeの相違のためスペクトルの形が異なり分離されると考えられる。この事実は、動的構造因子の二成分構造という形をとる。ゲージ対称性の回復の役割を担うGoldstoneモードによる寄与は ρ_s に比例しているため、λ点以上では消滅する。Woodsらの動的構造因子の二成分構造を、このような立場から解明したのは本研究が最初である

目　次

第一章　序　論

対称性の自発的破れ[1]は平衡系の相転移現象に共通する概念である。微視的な原子の集合からなる巨視的な系は、分子間の相互作用にもとづく協力現象により相転移を起こし、ある温度以下で、さまざまな秩序状態を実現する。この秩序状態の発生は、原子の運動を支配するハミルトニアンのもつ対称性が基底状態において破れているという、いわゆる対称性の破れをともなっている。例えば、結晶構造においては並進対称性、強磁性体においてはスピン回転対称性、超電導および超流動状態ではゲージ対称性の破れが生じている。連続的な対称性の自発的破れが生じている系には、この対称性の破れを回復するため、エネルギーギャップをもたないエネルギースペクトルをもつ集団励起、いわゆるGoldstoneモード[2]が存在する。結晶中の音響形フォノン、外部磁場のない場合の強磁性体マグノン、中性超電導体のBogoliubov-Anderson[3]の集団励起はその例であり、超流動状態ではHugenholtz-Pines[4]の定理によりその存在が示されている。この論文は、超流動状態におけるGoldstoneモードである集団励起の有限温度における性質およびその存在を問題にする。

超流動状態を示す物質は、極低温での液体He^4と液体He^3である。

ここでは、液体He^4を取り上げ、相互作用しているボーズ粒子モデルを適用する。液体He^4の超流動現象を理論的に説明する立場には二つの流れがあった。第一はLondon[5]による理想ボーズ気体モデルを基礎にした立場である。液体He^4は強い原子間相互作用のため、理想ボーズ気体として取り扱うことはできないけれども、正常相と超流動相の間の相転移は、Bose-Einstein凝縮に関連すると考えた。つまり液体He^4においても、空間に巨視的な広がりをもつ一つの波束であらわされる状態、すなわち運動量空間では非常に狭い波束で表現される量子状態を巨視的な数の原子が占めるという立場である。いいかえると、超流動現象の本質が巨視的な量子現象であると考える立場である。London[5]とTisza[6]はこの立場に立ち、液体He^4が超流体と正常流体からなるという二流体モデルをつくり、超流体は運動量零($p=0$)の最低エネルギー準位を巨視的に占める粒子によって荷なわれ、すべての熱的無秩序を運ぶ正常流体は励起状態($p\neq0$)にある粒子によって担われると考えた。

第二の流れはLandau[7]による素励起モデルである。Landauは液体He^4には強い原子間相互作用が存在するため、励起状態は理想気体のように単純なものでなく原子の集団運動であると考えた。そして、集団運動の励起量子(素励起)のエネルギースペクトルはフォノン・ロトン型からなると仮定した。このモデルでは、

正常流体としてふるまうのは、$\vec{P}\neq 0$の状態に励起されたHe^4原子ではなく、素励起であり、超流体は素励起に参加しない部分である。　また系の低温での熱力学的な性質や粘性などの輸送現象は、系の微視的な構造を知らなくても素励起の知識だけあれば取り扱うことができる。このようにLandau理論の大きな特徴は、基底状態および素励起の微視的な構造に関する知識なしに、物理的な現象のきわめて有効な取り扱いを与えるところにある。しかし、転移温度T_λに近づいた場合は、素励起間の相互作用が重要になり、この描象は直接適用できない。　Landauの素励起モデルにより、二流体モデルは次のように変更された。つまり、超流体は絶対零度の場合、運動量空間で凝縮状態にある原子だけではなく、全流体であるということである。ここで、凝縮状態にある原子と二流体モデルの超流体成分を構成する原子の間の関係を明らかにする問題が生じてくる。さらに理論を発展させる立場に立てば、より微視的な理論、つまり液体He^4をHe^4原子の集合とみる多体問題の立場から素励起理論を基礎づけなければならない。

その第一歩となったのが、Bogoliubov[8]によって提案された弱い相互作用をしているボーズ粒子系の理論である。この理論は、運動量零のボーズ粒子を作り出す演算子C_0と消す演算子C_0を古

典量c^*とcに置き換えることによって、基底状態のエネルギーおよびフォノン型の励起エネルギーを求めた。置き換えの正当化は零運動量状態にある粒子数$c_0^+c_0$の期待値は巨視的な量であること、そのためc_0^+とc_0は交換する古典量とみなせるということにもとづいている。この考えを一般化させ、Anderson[9]とHohenberg-Martin[10]は超流動状態を特徴づける古典的凝縮体波動関数$\Psi(\vec{r})$は、量子論的粒子場の演算子$\psi(\vec{r}) = V^{-1/2}\Sigma_{\vec{k}} c_{\vec{k}} e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}}$の統計平均で書かれると考えた。この場合、全粒子数が明確に定義された状態$|\Phi_N\rangle$による期待値$\langle\Phi_N|\psi(\vec{r})|\Phi_N\rangle$は零となるので、カノニカル平均、グランドカノニカル平均でも同様に平均は零となる。$\psi(\vec{r})$の平均が有限の値をもつためには、系の状態は全粒子数が異なる状態の重ね合わせの状態、つまりその波束が粒子数$\bar{N}$で最大となり、その最大値のまわりに小さなゆらぎをもつ状態でなければならない。

$$|\Phi_\theta\rangle = \Sigma_N C_N |\Phi_N\rangle \qquad (1\text{-}1)$$

係数C_Nは複素数であり、位相θによって特徴づけられ、状態もθに依存する。このように粒子数の明確に定義されていない状態を含ませることは、量子統計力学での有用かつ必要な拡張であった。超電導状態を表現するBCS状態[11]は、このようにある位相をもったコヒーレント状態[12]であり、この状態は全電子数の保

存を破っている。

全粒子数の異なる状態を重ね合わせた状態が必要となる物理的理由は、ラムダ転移が第2種の相転移の一例であるという事実による。対称性の破れ、つまり転移温度以下において、系の熱力学的状態はハミルトニアンの全対称性を示さないという事実と第2種の相転移が関連あることは、すでにLandau[13]によって認識されていた。液体He⁴すなわち相互作用しているボーズ系の場合、系の全粒子数は運動の定数である。この場合、ユニタリ演算子$U(\theta)=e^{i\theta N}$によってつくられるゲージ変換は、ハミルトニアンを不変にする。すなわち、$H=U^{+}(\theta)HU(\theta)$である。これはハミルトニアンに含まれている生成および消滅演算子の数が等しいことを意味している。一方、T_λ以下で実現している状態は、ゲージ変換によって不変ではなく、巨視的に区別される状態に移るので、ハミルトニアンよりも低い対称性をもつ状態である。相互作用をしているボーズ粒子系の超流動基底状態の形を具体的に示すことは重要な課題である。附録Iでは、この課題に答えて、今まで提案されている超流動基底状態の形を列挙する。

次に、T_λ以下で対称性の破れた状態にある系には、長波長域でギャップレスのエネルギースペクトルをもつ集団励起モード

が存在すること[1]を一般的に議論する。対称性の破れを議論するため、巨視系のハミルトニアンHと交換可能な、対称性を表わす変換の母関数Qを導入する。Qはその局所的密度$\rho(\vec{r},t)$の積分で次のように書けるとする。

$$Q = \int d\vec{r}\, \rho(\vec{r},t) \tag{1-2}$$

QはハミルトニアンHと交換するので、$U(\theta) = \exp(i\theta Q)$による対称性を表わす変換に対して、ハミルトニアンは不変である。つまり、$U(\theta)H U^{\dagger}(\theta) = H$。またこれは$Q(t)$が保存されることを意味する。

$$\frac{dQ}{dt} = 0 \quad \text{または} \quad \frac{\partial \rho(\vec{r},t)}{\partial t} + \vec{\nabla}\cdot\vec{j}_{\rho}(\vec{r},t) = 0 \tag{1-3}$$

ここで$\vec{j}_{\rho}(\vec{r},t)$はQに対応する流束密度である。今、変換の母関数Qが局所的エルミート演算子$A(\vec{r})$を演算子$B(\vec{r})$に変換すると仮定する。

$$[Q, A(\vec{r})] = B(\vec{r}) \tag{1-4}$$

もし、統計平均$\langle B(\vec{r})\rangle$が零でないようなA, Bの組が存在すれば、熱力学的状態はQ対称性を破っていることになる。この仮定から次のような結論が導かれる。最初に、(1-2)を使い(1-4)を次のように変形する。

$$\int d\vec{r} \langle [\, g(\vec{r}, t=0),\ A(\vec{r}')\,] \rangle = \langle B(\vec{r}') \rangle \tag{1-5}$$

次に g, A および $\vec{j}_g$, A のスペクトル関数 $\tau_{gA}(\vec{r}, \vec{r}'; t)$, $\tau_{\vec{j}_g A}(\vec{r}, \vec{r}'; t)$

$$\tau_{gA}(\vec{r}, \vec{r}'; t) = \langle [\, g(\vec{r}, t),\ A(\vec{r}', 0)\,] \rangle$$

$$\tau_{\vec{j}_g A}(\vec{r}, \vec{r}'; t) = \langle [\, \vec{j}_g(\vec{r}, t),\ A(\vec{r}', 0)\,] \rangle \tag{1-6}$$

を定義し、そのフーリエ変換を

$$\tau_{gA}(\vec{r}, \vec{r}'; t) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int \tau_{gA}(\vec{k}, \omega)\, e^{i\vec{k}(\vec{r}-\vec{r}') - i\omega t}\, d\vec{k}\, d\omega$$

$$\tau_{\vec{j}_g A}(\vec{r}, \vec{r}'; t) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int \tau_{\vec{j}_g A}(\vec{k}, \omega)\, e^{i\vec{k}(\vec{r}-\vec{r}') - i\omega t}\, d\vec{k}\, d\omega \tag{1-7}$$

とする。$\tau_{gA}(\vec{k}, \omega)$ と $\tau_{\vec{j}_g A}(\vec{k}, \omega)$ の間には、(1-3)を使って、

$$\vec{k} \cdot \tau_{\vec{j}_g A}(\vec{k}, \omega) - \omega\, \tau_{gA}(\vec{k}, \omega) = 0 \tag{1-8}$$

の関係がある。また(1-5)は(1-7)を使って次のように表現される。

$$\frac{1}{2\pi} \int \tau_{gA}(\vec{k}, \omega)\, \delta(\vec{k})\, d\vec{k}\, d\omega = \langle B \rangle \tag{1-9}$$

もし、$\lim_{\vec{k} \to 0} \vec{k} \cdot \tau_{\vec{j}_g A}(\vec{k}, \omega) = 0$ とすれば、(1-8) から $\lim_{\vec{k} \to 0} \omega\, \tau_{gA}(\vec{k}, \omega) = 0$ となり、(1-9)を考慮すれば、$\tau_{gA}(\vec{k}, \omega)$ は

$$\lim_{\vec{k} \to 0} \tau_{gA}(\vec{k}, \omega) = 2\pi \langle B \rangle\, \delta(\omega) \tag{1-10}$$

となることがわかる。この関係は、$g(\vec{r}, t)$のフーリエ変換である

演算子 $g(\vec{k})$ によって励起され、$\vec{k}\to 0$ のとき励起エネルギー $\omega(\vec{k})$ が 0 に収束する素励起（Goldstone モード）が存在することを示している。（Goldstone の定理[2]）

$$\tau_{gA}(\vec{k},\omega) = 2\pi\langle B\rangle\,\delta(\omega-\omega(\vec{k}))$$

$$\lim_{\vec{k}\to 0}\omega(\vec{k}) = 0 \qquad (1\text{-}11)$$

次に、A および g のスペクトル関数 $\tau_{AA}(\vec{r},\vec{r}';t)$, $\tau_{gg}(\vec{r},\vec{r}';t)$

$$\tau_{AA}(\vec{r},\vec{r}';t) = \langle[A(\vec{r},t),\ A(\vec{r}',0)]\rangle$$

$$\tau_{gg}(\vec{r},\vec{r}';t) = \langle[g(\vec{r},t),\ g(\vec{r}',0)]\rangle \qquad (1\text{-}12)$$

を定義し、そのフーリエ変換を

$$\tau_{AA}(\vec{r},\vec{r}';t) = \frac{1}{(2\pi)^4}\int \tau_{AA}(\vec{k},\omega)\, e^{i\vec{k}(\vec{r}-\vec{r}')-i\omega t}\, d\vec{k}\, d\omega$$

$$\tau_{gg}(\vec{r},\vec{r}';t) = \frac{1}{(2\pi)^4}\int \tau_{gg}(\vec{k},\omega)\, e^{i\vec{k}(\vec{r}-\vec{r}')-i\omega t}\, d\vec{k}\, d\omega \qquad (1\text{-}13)$$

とする。次の Bogoliubov 不等式[4]を使い、静的感受率 $\chi_{AA}(\vec{k})$ は、

$$\chi_{AA}(\vec{k}) = \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{d\omega}{2\pi}\,\frac{\tau_{AA}(\vec{k},\omega)}{\omega} \ \geq\ \frac{\left|\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{d\omega}{2\pi}\,\tau_{gA}(\vec{k},\omega)\right|^2}{\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{d\omega}{2\pi}\,\omega\,\tau_{gg}(\vec{k},\omega)} \qquad (1\text{-}14)$$

となる。そして保存則(1-3)より次の関係を考慮すると、

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{d\omega}{2\pi}\,\omega\,\tau_{gg}(\vec{k},\omega) = k^2\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{d\omega}{2\pi}\,\frac{\tau_{j_g j_g}(\vec{k},\omega)}{\omega}\quad, \tag{1-15}$$

$\chi_{AA}(\vec{k})$は少なくとも$1/k^2$で発散すると期待される。もし発散が最小のものであるとすれば、

$$\chi_{AA}(\vec{k}) = \frac{\langle B\rangle^2}{R_A k^2}\qquad(\vec{k}\to 0) \tag{1-16}$$

であり、ここでR_Aはスティフネス定数である。

$$R_A \leq \lim_{\vec{k}\to 0}\frac{1}{k^2}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{d\omega}{2\pi}\,\omega\,\tau_{gg}(\vec{k},\omega) \tag{1-17}$$

このk^{-2}型の発散は変数Aが長距離にわたって強い相関をもつことを示している。このように連続的対称性の破れから、ギャップレスのエネルギースペクトルをもつGoldstoneモードの存在と長波長相関の存在が一般的に結論される。超流動状態の場合、変換の母関数が全粒子数演算子Nであるゲージ対称性の破れが起っており、演算子Aは粒子場演算子$\psi(\vec{r})$の位相であり、一方$\langle B\rangle^2$は凝縮体密度n_0である。さらにスティフネス定数R_Aは通常ρ_sと書かれる超流体密度であり、T_λ以上では消滅する量である。このように、超流動状態におけるGoldstoneモードは位相場であるが、そのエネルギースペクトル$\omega(\vec{k})$の具体的な形は、以上の一般論から導かれない。エネルギースペクトルを計算するためには、まず位相場自身を定義しなければならない。通常、流体力学領域で使われている定義[10]は次のものである。

$$\varphi^{op}(\vec{r}) = \frac{1}{2i\langle\psi(\vec{r})\rangle\langle\psi(\vec{r})\rangle}\left[\langle\psi^{+}(\vec{r})\rangle\psi(\vec{r}) - \langle\psi(\vec{r})\rangle\psi^{+}(\vec{r})\right] \tag{1-18}$$

ここで $\psi(\vec{r})$ は粒子場の演算子であり、$\langle\psi(\vec{r})\rangle = n_0^{1/2}$ である。粒子数のゆらぎの演算子である $n^{op}(\vec{r})$ を次のように定義すると、

$$n^{op}(\vec{r}) = \langle\psi^{+}(\vec{r})\rangle\psi(\vec{r}) + \langle\psi(\vec{r})\rangle\psi^{+}(\vec{r}) \tag{1-19}$$

$\varphi^{op}(\vec{r})$ が対称性の回復変数A，$n^{op}(\vec{r})$ が対称性の破れ変数Bに対応し、(1-4)の関係を満足していることがわかる。

$$\langle[N, \varphi^{op}(\vec{r})]\rangle = \frac{i}{2n_0}\langle n^{op}(\vec{r})\rangle = i \tag{1-20}$$

ここで全粒子数演算子 $N = \int d\vec{r}\,\psi^{+}(\vec{r})\psi(\vec{r})$ であり、交換関係

$[\psi(\vec{r}), \psi^{+}(\vec{r}')] = \delta(\vec{r}-\vec{r}')$，$[\psi^{+}(\vec{r}), \psi^{+}(\vec{r}')] = [\psi(\vec{r}), \psi(\vec{r}')] = 0$ を使った。

超流動状態における液体 He^4 の流体力学を考えるとき必要な超流体速度演算子 $\vec{v}_s^{op}(\vec{r})$ は、次の関係[10]によって導入される。

$$\vec{v}_s^{op}(\vec{r}, t) = \frac{1}{m}\vec{\nabla}\varphi^{op}(\vec{r}, t) \tag{1-21}$$

(1-18)の位相場の定義に従い、v_s^{op} の応答関数

$$i\theta(t-t')\langle[v_{si}(\vec{r}, t), v_{sj}(\vec{r}', t')]\rangle = \frac{1}{(2\pi)^4}\int \chi_{v_{si}v_{sj}}(\vec{k}, \omega)e^{i\vec{k}(\vec{r}-\vec{r}')-i\omega(t-t')}d\vec{k}\,d\omega \tag{1-22}$$

と一体の Green 関数 $G^{(1)}(\vec{k}, \omega)$ の間には、次の関係が導かれる。

$$\chi_{v_{si} v_{sj}}(\vec{k}, \omega) = \frac{k_i k_j}{n_0 m^2} \left[G_{12}(\vec{k}, \omega) - G_{11}(\vec{k}, \omega) \right] \tag{1-23}$$

ここで一体のGreen関数 $G_{11}(\vec{k}, \omega)$, $G_{12}(\vec{k}, \omega)$ は次のように定義される。

$$\langle T[\psi(\vec{r}, t)\psi^{\dagger}(\vec{r}', t')]\rangle - \langle\psi(\vec{r}, t)\rangle\langle\psi^{\dagger}(\vec{r}', t')\rangle = \frac{1}{(2\pi)^4}\int iG_{11}(\vec{k}, \omega)\, e^{i\vec{k}(\vec{r}-\vec{r}') - i\omega(t-t')} d\vec{k}\, d\omega$$

$$\langle T[\psi(\vec{r}, t)\psi(\vec{r}', t')]\rangle - \langle\psi(\vec{r}, t)\rangle\langle\psi(\vec{r}', t')\rangle = \frac{1}{(2\pi)^4}\int iG_{12}(\vec{k}, \omega)\, e^{i\vec{k}(\vec{r}-\vec{r}') - i\omega(t-t')} d\vec{k}\, d\omega \tag{1-24}$$

(1-18)で定義された位相場を考えるかぎり、位相場つまりGoldstoneモードのエネルギースペクトル $\omega(\vec{k})$ は、一体のGreen関数の極の計算から求められることになる。

一体のGreen関数の近似計算には二つの立場がある。一つは粒子数保存則を満足するが、エネルギースペクトルにギャップを生ずるGirardeau－Arnowitt[15]近似の立場であり、もう一つは粒子数保存則は満足しないが、ギャップのないエネルギースペクトルを示すBogoliubov[16]近似の立場である。Hugenholtz－Pines[4]はBogoliubov近似の立場から、摂動展開の各次数で化学ポテンシャル μ が、一体のGreen関数の自己エネルギーと次の関係があることを見つけた。

$$\mu = \Sigma_{11}(0, 0) - \Sigma_{02}(0, 0) \tag{1-25}$$

自己エネルギー $\Sigma_{11}(\vec{k}, \omega)$, $\Sigma_{02}(\vec{k}, \omega)$ の定義は文献4に与えられて

いる。Girardeau−Arnowitt 近似の立場では、摂動展開の有限の次数まで計算した場合、Hugenholtz−Pines の関係を満足しないが、全摂動展開を加え合わせた場合はこの関係があらわれることが示されている。この関係の有限温度の拡張は、Parry−Turner[17]によって行われた。絶対零度の場合、Gavoret−Nozières[18]は全摂動展開により、長波長極限で一体の Green 関数と密度の相関関数に対するエネルギースペクトルが一致し、その位相速度が巨視的な音速に一致することを示した。有限温度の場合、今までのところ、Gavoret−Nozières の理論と相当する正確な理論は存在していない。

位相場 $\varphi^{p}(\vec{r})$ を (1-18) で定義して展開した上の議論とは別に、Umezawa[19]は素励起場展開を基礎にした立場から、対称性の破れた系に存在する Goldstone モードである位相場の存在およびその役割を明らかにした。超流動状態の場合、位相場が二流体のふるまいを支配すること、即ち位相場 $B(\vec{r})$ と $\dot{B}(\vec{r})$ が素励起、一方位相場の Bose−Einstein 凝縮である凝縮位相場が基底状態を特徴づけることを示した。この立場は、Landau の立場を対称性の破れの観点から見なおしたものとなっている。Umezawa は、変換の母関数 N を対称性の回復場である位相場 $B(\vec{r})$ の正準共役場である $\dot{B}(\vec{r})$ で表現し、かつ粒子場 $\psi(\vec{r})$ を位相場 $B(\vec{r})$ の汎

関数として表現した。つまり、相互作用の非常に強い裸の粒子によって表現された物理量を、相互作用が弱くほとんど自由とみなせる素励起場で記述し直す素励起場展開(あるいはdynamical map)と呼ばれる方法を基礎においている。この方法では、位相場の定義は(1-18)に制限されず、粒子場の二次以上の寄与を考慮することが基本的に可能である。そして位相場のエネルギースペクトルは、一体のGreen関数の計算ではなく、素励起場展開の方法に従って、Bethe-Salpeterの方程式を解いて求めなければならない。この素励起場展開を基礎にしたボゾン理論は、超電導[20]、遍歴電子による強磁性[21]、結晶の転位構造[22]、磁性超電導[23]などの物性理論の巾広い分野に適用され、その有効性が示されている[24]。

本論文では、超流動状態における位相場の性質およびその存在を問題とするが、その立場はUmezawaによる素励起場展開の方法にもとづくものである。Umezawaによる超流動状態に対する指摘は一般的なものであり、位相場のエネルギースペクトルを求めるためには、モデルハミルトニアンによる近似計算が必要となる。RPAの範囲での計算は、絶対零度の場合、Coniglio－Marinaro[25]によって行なわれている。しかし、対称性の破れとGoldstoneモードの関連という立場で興味があるのは有限温度の場合である。この場合、エネルギースペクトルおよびスティフネス定数である

超流体密度ρ_sが温度に依存してくる。さらに、ゲージ対称性の回復する転移温度での位相場の存在が問題となる。しかし、現在の所、超流動状態における有限温度の位相場の性質およびその存在について、明らかにされていない。本論文の主要な目的は、上述の問題を解決するために、第一に、Coniglio - Marinaroの議論を有限温度に拡張することによって、転移温度以下の温度においての位相場のエネルギースペクトルを求め、そしてその結果を液体Heの中性子非弾性散乱実験における素励起の音速の温度依存性と比較することである。第二は、中性子非弾性散乱実験によって観測される超流動状態における動的構造因子の二成分構造の理論的解明を行ない、位相場の存在を示すことである。

ここで、この論文の構成についてふれておこう。第二章では、本論文で必要となる方法の紹介を行う。まず凝縮体を有するボーズ粒子系の運動を支配するハミルトニアンを示し（第一節）、次に素励起場展開の方法を説明する（第二節）。最後には、素励起場展開の方法を有限温度の場合に適用するに必要なthermo-field-dynamicsの方法[26)]について述べる（第三節）。第三章では、ゲージ対称性の破れに対するGoldstoneモードである位相場のエネルギースペクトルをBethe-Salpeterの方法によって求める。さらに、計算で使った一般化されたペア近似の方法が、局所的粒子数保存則を満足していることを示す。計算の結果、ゲー

ジ対称性の破れているTλ以下において、エネルギーギャップのないフォノン型のエネルギースペクトルをもつ位相場の存在が示される。第四章では、低周波数、長波長極限での流束密度の応答関数を計算する。その結果、流束密度応答関数に対する位相場の寄与および超流体密度、正常流体密度の微視的表現を得る。第五章では、Tλ以下の液体He^4の中性子非弾性散乱実験で観測された動的構造因子にあらわれた二成分構造と位相場との関連が指摘される。最後に、Tλにおけるゲージ対称性の回復と位相場の存在についての議論がなされる。第六章では、本論文のまとめと今後の課題が示される。附録Ⅰでは、超流動基底状態に対して、今まで提案されているいくつかの考えを示し、附録Ⅱでは、絶対零度の場合、個別励起の高次の相互作用を考慮して、ギャップレスの集団励起スペクトルを導いたTakano[27]による研究と本論文の研究の関連を明らかにする。

第二章　有限温度における素励起場展開の方法

この章では、凝縮体を有するボーズ粒子系のGoldstone モードである位相場のエネルギースペクトルを求める上で、必要となる方法を紹介する。

第一節 凝縮体を有するボーズ粒子系のハミルトニアン

超流動状態にある液体He^4のモデルとして、二体の相互作用をしている、凝縮体を有するボーズ粒子系を考える。位置$\vec{r}$における ボーズ粒子の消滅・生成演算子を$\psi(\vec{r})$, $\psi^\dagger(\vec{r})$とすると、ボーズ粒子系のハミルトニアンは

$$H = \int d\vec{r}\,\psi^\dagger(\vec{r})\left(-\frac{\nabla^2}{2m}-\mu\right)\psi(\vec{r}) + \frac{1}{2}\iint d\vec{r}d\vec{r}'\,\psi^\dagger(\vec{r})\psi^\dagger(\vec{r}')V(|\vec{r}-\vec{r}'|)\psi(\vec{r}')\psi(\vec{r}) \tag{2-1}$$

である。mはボーズ粒子の質量、μは化学ポテンシャルであり、$V(|\vec{r}-\vec{r}'|)$は2粒子間の相互作用エネルギーである。簡単のため、$\hbar=1$としたが、以後を$\hbar$を省略する。ボーズ粒子場の演算子$\psi(\vec{r})$, $\psi^\dagger(\vec{r})$の間には、次の交換関係がある。

$$[\,\psi(\vec{r}),\ \psi^\dagger(\vec{r}')\,] = \delta(\vec{r}-\vec{r}')$$

$$[\,\psi(\vec{r}),\ \psi(\vec{r}')\,] = [\,\psi^\dagger(\vec{r}),\ \psi^\dagger(\vec{r}')\,] = 0 \tag{2-2}$$

場の演算子$\psi(\vec{r})$, $\psi^\dagger(\vec{r})$を平面波で次のように展開する。

$$\psi(\vec{r}) = \frac{1}{\sqrt{V}}\sum_{\vec{k}} e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} C_{\vec{k}} \quad , \qquad \psi^\dagger(\vec{r}) = \frac{1}{\sqrt{V}}\sum_{\vec{k}} e^{-\vec{k}\cdot\vec{r}} C^\dagger_{\vec{k}} \tag{2-3}$$

ここで$C^\dagger_{\vec{k}}$は運動量$\vec{k}$のボーズ粒子を作り出す演算子、$C_{\vec{k}}$は消す演算子である。(2-3)を使って、ハミルトニアン(2-1)を$C_{\vec{k}}, C^\dagger_{\vec{k}}$で表現すると、

$$H = \sum_{\vec{k}}\left(\frac{k^2}{2m}-\mu\right) C^\dagger_{\vec{k}} C_{\vec{k}} + \frac{1}{2}\sum_{\vec{k}\vec{k}'}\sum_{\vec{\kappa}\vec{\kappa}'} V_{\vec{k}\vec{k}',\vec{\kappa}\vec{\kappa}'} C^\dagger_{\vec{\kappa}'} C^\dagger_{\vec{k}'} C_{\vec{k}} C_{\vec{\kappa}} \tag{2-4}$$

である。$V_{\vec{k}\vec{k}',\vec{\kappa}\vec{\kappa}'}$は相互作用エネルギーのフーリエ係数であり、

$$V_{\vec{k}\vec{\kappa}',\vec{k}\vec{\kappa}} = \frac{1}{V^2}\int d\vec{r}\int d\vec{r}'\, V(|\vec{r}-\vec{r}'|)\, e^{i(\vec{k}-\vec{k}')\vec{r}+i(\vec{\kappa}-\vec{\kappa}')\vec{r}'} \tag{2-5}$$

で与えられ、Vはボーズ系を含む容器の体積である。ここで相互作用はS波の散乱を考えて、運動量に無関係な有効ポテンシャル$\frac{g}{V} = \frac{4\pi a}{mV}$におきかえる。ただし$a$は散乱長であり、剛体球ポテンシャルの場合には、剛体球の直径を表わす。(2-4)は

$$H = \sum_{\vec{k}}\left(\frac{k^2}{2m}-\mu\right) C^\dagger_{\vec{k}} C_{\vec{k}} + \frac{g}{2V}\sum_{\vec{k},\vec{k}',\vec{q}} C^\dagger_{\vec{k}} C^\dagger_{\vec{k}'} C_{\vec{k}-\vec{q}} C_{\vec{k}'+\vec{q}} \tag{2-6}$$

となる。演算子$C^\dagger_{\vec{k}}$, $C_{\vec{k}}$は、次の交換関係を満足する。

$$[C_{\vec{k}}, C^\dagger_{\vec{k}'}] = \delta_{\vec{k},\vec{k}'} \quad , \quad [C_{\vec{k}}, C_{\vec{k}'}] = [C^\dagger_{\vec{k}}, C^\dagger_{\vec{k}'}] = 0 \tag{2-7}$$

Bogoliubovの方法に従い、演算子$C^\dagger_{\vec{k}}, C_{\vec{k}}$を新しい個別励起(Bogolon)演算子$a^\dagger_{\vec{k}}$, $a_{\vec{k}}$に正準変換

$$C_{\vec{k}} = V^{1/2}\chi\,\delta_{\vec{k},0} + u_{\vec{k}}\,a_{\vec{k}} - v_{\vec{k}}\,a^{\dagger}_{-\vec{k}}$$

$$C^{\dagger}_{\vec{k}} = V^{1/2}\chi\,\delta_{\vec{k},0} + u_{\vec{k}}\,a^{\dagger}_{\vec{k}} - v_{\vec{k}}\,a_{-\vec{k}} \tag{2-8}$$

することにより、この演算子 $a^{\dagger}_{\vec{k}}$, $a_{\vec{k}}$ に関する ハミルトニアンを考察する。 ここで χ^2 は運動量 $\vec{k}=0$ の状態に凝縮している粒子数密度 n_0 である。(2-7)に示された交換関係から、$u_{\vec{k}}$ と $v_{\vec{k}}$ の間に次の関係があることがわかる。

$$u_{\vec{k}}^2 - v_{\vec{k}}^2 = 1 \tag{2-9}$$

ハミルトニアン(2-6)に正準変換(2-8)を行ない、演算子 $a^{\dagger}_{\vec{k}}$, $a_{\vec{k}}$ で表現し、ノーマル積の形に整理すると、

$$H = W_0 + A(0)(a_0 + a_0^{\dagger}) + \Sigma_{\vec{k}} B_{\vec{k}}(0)(a_{\vec{k}}a_{-\vec{k}} + a^{\dagger}_{\vec{k}}a^{\dagger}_{-\vec{k}}) + \Sigma_{\vec{k}} C_{\vec{k}}(0)a^{\dagger}_{\vec{k}}a_{\vec{k}} + :H_I(a, a^{\dagger}): \tag{2-10}$$

となる。 ここで係数 W_0, $A(0)$, $B_{\vec{k}}(0)$, $C_{\vec{k}}(0)$ は

$$W_0 = V\left[\frac{1}{V}\Sigma_{\vec{p}}\left(\frac{p^2}{2m}-\mu\right)v_{\vec{p}}^2 + g\left(\frac{1}{V}\Sigma_{\vec{p}} v_{\vec{p}}^2\right)^2 + \frac{g}{2}\left(\frac{1}{V}\Sigma_{\vec{p}} u_{\vec{p}}v_{\vec{p}}\right)^2 + \chi^2\left(\frac{2g}{V}\Sigma_{\vec{p}} v_{\vec{p}}^2 - \frac{g}{V}\Sigma_{\vec{p}} u_{\vec{p}}v_{\vec{p}}\right) + \frac{1}{2}g\chi^4\right]$$

$$A(0) = V^{1/2}\chi(u_0 - v_0)\left[-\mu + g\chi^2 + \frac{2g}{V}\Sigma_{\vec{p}} v_{\vec{p}}^2 - \frac{g}{V}\Sigma_{\vec{p}} u_{\vec{p}}v_{\vec{p}}\right]$$

$$B_{\vec{k}}(0) = \frac{1}{2}(u_{\vec{k}}^2 + v_{\vec{k}}^2)\left(g\chi^2 - \frac{g}{V}\Sigma_{\vec{p}} u_{\vec{p}}v_{\vec{p}}\right) - u_{\vec{k}}v_{\vec{k}}\left(\frac{k^2}{2m} - \mu + 2g\chi^2 + \frac{2g}{V}\Sigma_{\vec{p}} v_{\vec{p}}^2\right)$$

$$C_{\vec{k}}(0) = (u_{\vec{k}}^2 + v_{\vec{k}}^2)\left(\frac{k^2}{2m} - \mu + 2g\chi^2 + \frac{2g}{V}\Sigma_{\vec{p}} v_{\vec{p}}^2\right) - 2u_{\vec{k}}v_{\vec{k}}\left(g\chi^2 - \frac{g}{V}\Sigma_{\vec{p}} u_{\vec{p}}v_{\vec{p}}\right) \tag{2-11}$$

である。さらに

$$:H_I(a,a^+):$$

$$= \sum_{\vec{k},\vec{p},\vec{q}} \left[\left\{ g_3^{(1)}(\vec{k},\vec{p},\vec{q}) a_{\vec{k}}^+ a_{\vec{p}}^+ a_{\vec{q}} + h.c. \right\} + \left\{ g_3^{(2)}(\vec{k},\vec{p},\vec{q}) a_{\vec{k}}^+ a_{\vec{p}}^+ a_{\vec{q}}^+ + h.c. \right\} \right] +$$

$$+ \sum_{\vec{k},\vec{r},\vec{s},\vec{t}} \left[g_4^{(1)}(\vec{k},\vec{r},\vec{s},\vec{t}) a_{\vec{k}}^+ a_{\vec{r}}^+ a_{\vec{s}} a_{\vec{t}} + \left\{ g_4^{(2)}(\vec{k},\vec{r},\vec{s},\vec{t}) a_{\vec{k}}^+ a_{\vec{r}}^+ a_{\vec{s}}^+ a_{\vec{t}} + h.c. \right\} + \right.$$

$$\left. + \left\{ g_4^{(3)}(\vec{k},\vec{r},\vec{s},\vec{t}) a_{\vec{k}}^+ a_{\vec{r}}^+ a_{\vec{s}}^+ a_{\vec{t}}^+ + h.c. \right\} \right] \tag{2-12}$$

である。ここで

$$g_3^{(1)}(\vec{k},\vec{p},\vec{q}) = \frac{g\chi}{V^{1/2}} \left[v_{\vec{k}}(u_{\vec{p}} - v_{\vec{p}}) u_{\vec{q}} + v_{\vec{k}}(u_{\vec{p}} - v_{\vec{p}}) v_{\vec{q}} + u_{\vec{k}} v_{\vec{p}} (v_{\vec{q}} - u_{\vec{q}}) \right] \delta_{\vec{k}+\vec{p},\vec{q}}$$

$$g_3^{(2)}(\vec{k},\vec{p},\vec{q}) = \frac{g\chi}{V^{1/2}} u_{\vec{k}} (v_{\vec{p}} - u_{\vec{p}}) v_{\vec{q}} \, \delta_{\vec{k}+\vec{p},-\vec{q}}$$

$$g_4^{(1)}(\vec{k},\vec{r},\vec{s},\vec{t}) = \frac{g}{2V} (u_{\vec{k}} u_{\vec{t}} + v_{\vec{k}} v_{\vec{t}})(u_{\vec{r}} u_{\vec{s}} + v_{\vec{r}} v_{\vec{s}}) \delta_{\vec{k}+\vec{r},\vec{s}+\vec{t}} + \frac{g}{V} u_{\vec{k}} v_{\vec{r}} v_{\vec{s}} u_{\vec{t}} \, \delta_{\vec{k}+\vec{r},\vec{s}+\vec{t}}$$

$$g_4^{(2)}(\vec{k},\vec{r},\vec{s},\vec{t}) = -\frac{g}{V} u_{\vec{k}} (u_{\vec{r}} u_{\vec{t}} + v_{\vec{r}} v_{\vec{t}}) v_{\vec{s}} \, \delta_{\vec{k}+\vec{r}+\vec{s},\vec{t}}$$

$$g_4^{(3)}(\vec{k},\vec{r},\vec{s},\vec{t}) = \frac{g}{2V} u_{\vec{k}} u_{\vec{r}} v_{\vec{s}} v_{\vec{t}} \, \delta_{\vec{k}+\vec{r},-\vec{s}-\vec{t}} \tag{2-13}$$

である。

次に $:H_I(a,a^+):$ に含まれているすべての $a_{\vec{k}}^+ a_{\vec{k}}$ 型の演算子を温度Tでの統計平均値 $\langle a_{\vec{k}}^+ a_{\vec{k}} \rangle$ ($f_{\vec{k}}(T)$ とおく) に置き換えたものを $:\overline{H}_I(a,a^+):$ とおく。

$$:\overline{H}_I(a,a^\dagger):$$

$$= \frac{2g\chi}{V^{1/2}}(u_0 - v_0)\left[\Sigma_{\vec{k}}(u_{\vec{k}}^2 + v_{\vec{k}}^2)f_{\vec{k}}(T) - \Sigma_{\vec{k}} u_{\vec{k}} v_{\vec{k}} f_{\vec{k}}(T)\right](a_0^\dagger + a_0) +$$

$$+ 2g\Sigma_{\vec{k}}\left[(u_{\vec{k}}^2 + v_{\vec{k}}^2)\frac{1}{V}\Sigma_{\vec{p}}(u_{\vec{p}}^2 + v_{\vec{p}}^2)f_{\vec{p}}(T) + 2u_{\vec{k}}v_{\vec{k}}\frac{1}{V}\Sigma_{\vec{p}} u_{\vec{p}} v_{\vec{p}} f_{\vec{p}}(T)\right] a_{\vec{k}}^\dagger a_{\vec{k}} -$$

$$- g\Sigma_{\vec{k}}\left[(u_{\vec{k}}^2 + v_{\vec{k}}^2)\frac{1}{V}\Sigma_{\vec{p}} u_{\vec{p}} v_{\vec{p}} f_{\vec{p}}(T) + 2u_{\vec{k}}v_{\vec{k}}\frac{1}{V}\Sigma_{\vec{p}}(u_{\vec{p}}^2 + v_{\vec{p}}^2)f_{\vec{p}}(T)\right](a_{\vec{k}}^\dagger a_{-\vec{k}}^\dagger + a_{\vec{k}} a_{-\vec{k}}) \tag{2-14}$$

$:\overline{H}_I(a,a^\dagger):$ をハミルトニアンの係数 $A(0), B_{\vec{k}}(0), C_{\vec{k}}(0)$ に取り込むことによって、係数 $A(T), B_{\vec{k}}(T), C_{\vec{k}}(T)$ をつくる。ハミルトニアン H は

$$H = W_0 + A(T)(a_0 + a_0^\dagger) + \Sigma_{\vec{k}} B_{\vec{k}}(T)(a_{\vec{k}} a_{-\vec{k}} + a_{\vec{k}}^\dagger a_{-\vec{k}}^\dagger) + \Sigma_{\vec{k}} C_{\vec{k}}(T) a_{\vec{k}}^\dagger a_{\vec{k}} +$$

$$+ :H_I(a,a^\dagger): - :\overline{H}_I(a,a^\dagger): \tag{2-15}$$

となる。ここで $A(T), B_{\vec{k}}(T), C_{\vec{k}}(T)$ は

$$A(T) = V^{1/2}\chi(u_0 - v_0)\left[-\mu + g\chi^2 + \frac{2g}{V}\Sigma_{\vec{p}}\{v_{\vec{p}}^2 + (u_{\vec{p}}^2 + v_{\vec{p}}^2)f_{\vec{p}}(T)\} - \frac{g}{V}\Sigma_{\vec{p}} u_{\vec{p}} v_{\vec{p}}(1 + 2f_{\vec{p}}(T))\right]$$

$$B_{\vec{k}}(T) = \frac{1}{2}(u_{\vec{k}}^2 + v_{\vec{k}}^2)\Delta - u_{\vec{k}} v_{\vec{k}} U_{\vec{k}}$$

$$C_{\vec{k}}(T) = (u_{\vec{k}}^2 + v_{\vec{k}}^2)U_{\vec{k}} - 2u_{\vec{k}}v_{\vec{k}}\Delta \tag{2-16}$$

である。但し、$U_{\vec{k}}$，Δ は

$$U_{\vec{k}} = \frac{k^2}{2m} - \mu + 2g\chi^2 + \frac{2g}{V}\Sigma_{\vec{p}}\{v_{\vec{p}}^2 + (u_{\vec{p}}^2 + v_{\vec{p}}^2)f_{\vec{p}}(T)\}$$

$$\Delta = g\chi^2 - \frac{g}{V}\Sigma_{\vec{p}} u_{\vec{p}} v_{\vec{p}}(1 + 2f_{\vec{p}}) \tag{2-17}$$

である。

(2-15)の $(a_0+a_0^+)$ の係数 $A(T)$を零と置くと、凝縮体が存在する場合（$\chi \neq 0$）、μとχ^2の関係が次のように求まる。

$$\mu = g\chi^2 + \frac{2g}{V}\Sigma_{\vec{p}}\{v_{\vec{p}}^2 + (u_{\vec{p}}^2 + v_{\vec{p}}^2) f_{\vec{p}}(T)\} - \frac{g}{V}\Sigma_{\vec{p}} u_{\vec{p}} v_{\vec{p}} (1+2f_{\vec{p}}(T)) \quad (2\text{-}18)$$

$(a_{\vec{k}}a_{-\vec{k}} + a_{\vec{k}}^+ a_{-\vec{k}}^+)$ の係数 $B_{\vec{k}}(T)$を零と置くと、演算子 $a_{\vec{k}}$, $a_{\vec{k}}^+$ の3次以上の項が無視できる場合、ハミルトニアンは演算子 $a_{\vec{k}}^+$, $a_{\vec{k}}$に関して対角化され、$C_{\vec{k}}(T)$は個別励起のエネルギースペクトル$E_{\vec{k}}$を表わすことになる。(2,9) と $B_{\vec{k}}(T)=0$ より、$u_{\vec{k}}$, $v_{\vec{k}}$ および$E_{\vec{k}}$は

$$u_{\vec{k}}^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{U_{\vec{k}}}{E_{\vec{k}}} + 1\right), \quad v_{\vec{k}}^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{U_{\vec{k}}}{E_{\vec{k}}} - 1\right)$$

$$E_{\vec{k}} = \sqrt{U_{\vec{k}}^2 - \Delta^2} \quad (2\text{-}19)$$

となる。ここで(2-18)を使うと、$U_{\vec{k}}$とΔは

$$U_{\vec{k}} = \frac{k^2}{2m} + g\chi^2 + \frac{g\Delta}{2V}\Sigma_{\vec{p}}\frac{1}{E_{\vec{p}}}(1+2f_{\vec{p}}(T))$$

$$\Delta = g\chi^2 - \frac{g\Delta}{2V}\Sigma_{\vec{p}}\frac{1}{E_{\vec{p}}}(1+2f_{\vec{p}}(T)) \quad (2\text{-}20)$$

となり、温度Tでの統計平均$\langle a_{\vec{k}}^+ a_{\vec{k}} \rangle$は個別励起のエネルギー$E_{\vec{k}}$を使って次のようになる。

$$f_{\vec{k}}(T) = \langle a_{\vec{k}}^+ a_{\vec{k}} \rangle = [\exp(\beta E_{\vec{k}}) - 1]^{-1} \quad \left(\beta = \frac{1}{k_B T}\right) \quad (2\text{-}21)$$

以上の結果、ハミルトニアンHは次のようになる。

$$H = W_0 + \Sigma_{\vec{k}} E_{\vec{k}} \alpha_{\vec{k}}^{+} \alpha_{\vec{k}} + :H_I(a, a^{+}): - :\bar{H}_I(a, a^{+}): \tag{2-22}$$

ここで $:H_I(a, a^{+}): - :\bar{H}_I(a, a^{+}):$ を無視する近似を行なえば、よく知られた Hartree - Fock - Bogoliubov 理論[28]を導く。本論文ではこの無視された高次の相互作用を考慮に入れて、集団励起を調べる。

(2-20)を使うと、個別励起のエネルギー $E_{\vec{k}}$ は

$$E_{\vec{k}} = \left[\left(\frac{k^2}{2m} + 2g\chi^2 - \Delta \right)^2 - \Delta^2 \right]^{1/2} \tag{2-23}$$

となる。ここで $\Delta = g\chi^2$ と近似すれば、$E_{\vec{k}}$ はよく知られた Bogoliubov のスペクトル

$$E_{\vec{k}}^{B} = \left[\left(\frac{k^2}{2m} + g\chi^2 \right)^2 - (g\chi^2)^2 \right]^{1/2} \tag{2-24}$$

になる。Bogoliubov の弱い相互作用の理論では、凝縮体から励起した粒子の力学的効果を完全に無視しているが、この節で述べた $E_{\vec{k}}$ の計算は、励起粒子間の力学的効果のうち、直接および交換相互作用と運動量 $\vec{k}$ と $-\vec{k}$ をもつ粒子対の散乱過程を取り込んでいる。しかし、このエネルギー $E_{\vec{k}}$ は(2-20)の Δ を使うと、$\vec{k} \to 0$ の極限で次のようなエネルギーギャップ E_0 をもつ。

$$E_0 = \lim_{\vec{k} \to 0} E_{\vec{k}} = 2\chi \left[g(g\chi^2 - \Delta) \right]^{1/2} \tag{2-25}$$

このようなエネルギーギャップの存在は、(2-8)の展開にもとづくペア近似に相当する以上の展開の不充分さを示しており、この点を解決することが必要である。最後に、平均粒子数nは次のようになる。

$$n = \frac{1}{V}\Sigma_{\vec{k}}\langle c_{\vec{k}}^{+} c_{\vec{k}}\rangle = \chi^2 + \frac{1}{2V}\Sigma_{\vec{k}}\left(\frac{U_{\vec{k}}}{E_{\vec{k}}} - 1\right) + \frac{1}{V}\Sigma_{\vec{k}}\frac{U_{\vec{k}}}{E_{\vec{k}}} f_{\vec{k}}(T) \qquad (2\text{-}26)$$

ここで、第1項は$\vec{k}=0$の状態を占める凝縮体密度、第2項は粒子間相互作用により$\vec{k}\neq 0$の状態にある平均粒子数密度、第3項は熱的効果により、$\vec{k}\neq 0$の状態にある平均粒子数密度である。

第二節　素励起場展開の方法

上で述べた困難は絶対零度では解決されているので、有限温度での解決をはかるため、Umezawa によって提案された素励起場展開の方法の説明に移る。この方法は、系を構成する粒子場$\psi(\vec{r},t)$

$$\psi(\vec{r},t) = \frac{1}{\sqrt{V}}\Sigma_{\vec{k}}\, c_{\vec{k}}(t)\, e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} \qquad (2\text{-}27)$$

を直接観測にかかる素励起場の組に展開する方法であり、粒子の運動を支配する力学がこの展開係数を決定するので、力学的写像(dynamical map)とも呼ばれている。ハミルトニアン(2.1)で支配される系の場合、粒子場$\psi(\vec{r},t)$に対する運動方程式は

$$i\frac{\partial}{\partial t}\psi(\vec{r},t) = \left(-\frac{\nabla^2}{2m}-\mu\right)\psi(\vec{r},t) + \int \psi^{+}(\vec{r}',t)V(|\vec{r}-\vec{r}'|)\psi(\vec{r}',t)d\vec{r}'\,\psi(\vec{r},t) \qquad (2\text{-}28)$$

である。次に素励起場の真空状態および生成・消滅演算子の存在を仮定し、その真空状態に生成演算子を作用することによって素励起場に関するフォック空間を構成する。そして、粒子場は次のように素励起場のノーマル積の形に書くことができるとする。

$$\psi(\vec{r},t) = \chi + C\varphi(\vec{r},t) + R\,[\,\varphi(\vec{r},t),\ \varphi^{+}(\vec{r},t)\,] \tag{2-29}$$

ここで、χ および C は C 数、$\varphi(\vec{r},t)$ は Bogolon を一般化した個別励起場を表わし、$R[\varphi(\vec{r},t), \varphi^{+}(\vec{r},t)]$ は $\varphi(\vec{r},t)$, $\varphi^{+}(\vec{r},t)$ の2個以上からなる高次のノーマル積である。$R[\varphi(\vec{r},t), \varphi^{+}(\vec{r},t)]$ の中にあらわれる素励起は集団励起であり、個別励起と区別する意味で $B(\vec{r},t)$ と表わす。一般に(2-29)の展開を素励起場展開と呼び、(2-8)で示される Bogoliubov 変換の一般化になっている。

この展開を行なう上での問題は、(2-29)の右辺にいくつの素励起場が存在するかを決定すること、素励起場のエネルギースペクトルを決めること、そして展開係数を求めることである。この問題は次のようにして解かれる。最初に、さまざまな物理的考察によって、自由場の方程式に従う素励起場の組を用意する。これらの自由場を場の理論でいう入射漸近場とみなす。そしてそのエネルギースペクトルは未知のままにしておく。粒子場 $\psi(\vec{r})$ を(2-29)の形に展開し、展開係数に対する方程式を粒子場 $\psi(\vec{r})$ の方程式から、

Bethe−Salpeterの方法によって求める。これらの方程式を解くことにより、素励起場のエネルギースペクトルと同時に展開係数を決定する。もし、展開係数に対する方程式がどのような解もゆるさないとすれば、最初の素励起場の組を変化し、計算をくりかえすことになる。この方法は出発点では、今与えられた力学でどのような素励起場が存在するかについては知らないで、最後になって始めてそれが決まるという点で、一種の自己無撞着の方法である。

次に、素励起場展開の方法が対称性の自発的破れをどのように反映しているかを示そう。超流動状態では先に述べたように、ゲージ変換に対する対称性の破れが生じている。ゲージ変換

$$\psi(\vec{r},t) \to e^{i\theta}\psi(\vec{r},t) \tag{2-30}$$

は、公式的に次の変換でつくられる。

$$e^{i\theta N}\psi(\vec{r},t)e^{-i\theta N} = e^{i\theta}\psi(\vec{r},t) \tag{2-31}$$

ここでNは全粒子数演算子

$$N = \int d\vec{r}\,\rho(\vec{r},t) = \int d\vec{r}\,\psi^{\dagger}(\vec{r},t)\psi(\vec{r},t) \tag{2-32}$$

である。上で述べた粒子場に関する変換は、対称性の自発的破れが生じている場合、素励起場に関して異なる形の変換を生じ

る。第一章で述べたように、連続対称性の破れから、Goldstone ボゾンの存在が結論される。この Goldstone ボゾン場 $B(\vec{r},t)$ を

$$B(\vec{r},t)=\frac{1}{\sqrt{V}}\sum_{|\vec{k}|<k_c}\frac{1}{\sqrt{2\omega(\vec{k})}}\left\{B_{\vec{k}}\,e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega(\vec{k})t)}+B_{\vec{k}}^{+}\,e^{-i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega(\vec{k})t)}\right\} \qquad (2\text{-}33)$$

とする。ここで $B_{\vec{k}}$ は $B(\vec{r})$ のフーリエ成分であり、k_c は切断運動量である。この場は、充分よい近似で、$|\vec{k}|<k_c$ のとき、$\omega(\vec{k})=v_0|\vec{k}|$ とおけるので、時間に関して2階の微分方程式

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2}-v_0^2\vec{\nabla}^2\right)B(\vec{r},t)=0 \qquad (2\text{-}34)$$

を満足している。$B(\vec{r},t)$ の正準共役場を $\pi(\vec{r},t)$ とすると、

$$[\,B(\vec{r},t),\ \pi(\vec{r}',t)\,]=i\delta(\vec{r}-\vec{r}') \qquad (2\text{-}35)$$

であり、$\pi(\vec{r}',t)$ は $B(\vec{r}',t)$ を使って、

$$\pi(\vec{r}',t)=\dot{B}(\vec{r}',t) \qquad (2\text{-}36)$$

で表わされる。Umezawa ら[19]は一般論を展開し、Goldstone ボゾン場が母関数 N に線形に寄与しなければならないことを指摘した。さらに、N が時間に依存しない量であることから、N は

$$N=-\eta\int d\vec{r}\,\dot{B}(\vec{r},t) \qquad (2\text{-}37)$$

となることを指摘した。ここで η は C 数である。この関係は N の

正準共役が $(1/\eta)B(\vec{r},t)$ であることを示している。

$$[\, N \,,\, \frac{1}{\eta} B(\vec{r},t) \,] = i \tag{2-38}$$

この場合、ゲージ変換(2-31)は $B(\vec{r},t)$ を次のように変換する。

$$e^{i\theta N} B(\vec{r},t) e^{-i\theta N} = B(\vec{r},t) + \eta\theta \tag{2-39}$$

このことから、粒子場 $\psi(\vec{r},t)$ は Goldstone ボゾン場 $B(\vec{r},t)$ を使い、次のように汎関数表現されることがわかる。

$$\psi(\vec{r},t) = \exp\left[\frac{i}{\eta} B(\vec{r},t)\right] F\,[\,\varphi(\vec{r},t),\, \vec{\nabla} B(\vec{r},t),\, \dot{B}(\vec{r},t)\,] \tag{2-40}$$

ここで $\varphi(\vec{r},t)$ は個別励起場である。F は $\varphi(\vec{r},t)$, $\vec{\nabla} B(\vec{r},t)$, $\dot{B}(\vec{r},t)$ の汎関数であるが、その具体的な形は知られていない。Goldstone ボゾン場 $B(\vec{r},t)$ は以上の役割から位相場とも呼ばれる。粒子数密度 $\rho(\vec{r},t)$ や流束密度 $\vec{j}(\vec{r},t)$ への Goldstone ボゾン場 $B(\vec{r},t)$ の寄与は、それらをそれぞれ $\rho^B(\vec{r},t)$, $\vec{j}^B(\vec{r},t)$ とすると、

$$\begin{aligned} \rho^B(\vec{r},t) &= -\eta\, \dot{B}(\vec{r},t) \\ \vec{j}^B(\vec{r},t) &= v_0^2 \eta \vec{\nabla} B(\vec{r},t) \end{aligned} \tag{2-41}$$

である。(2-34)と(2-41)から、$\rho^B(\vec{r},t)$ と $\vec{j}^B(\vec{r},t)$ は保存則

$$\frac{\partial \rho^B(\vec{r},t)}{\partial t} + \vec{\nabla}\cdot \vec{j}^B(\vec{r},t) = 0 \tag{2-42}$$

を満足することがわかる。

最後に、ハミルトニアン(2-22)で表現される凝縮ボーズ粒子系でのGoldstoneボゾン場、即ち位相場$B(\vec{r})$を考える。粒子場をBogoliubov変換した個別励起場は、前節で示されたように対相関を正確に考慮した場合、そのエネルギースペクトルはギャップE_0をもつ。そのため、この個別励起場は位相場には適さない。そこで、ハミルトニアン(2-22)の個別励起の三体以上の相互作用により、ギャップレスのエネルギースペクトルをもつ集団励起、即ち、位相場が存在すると考えられる。粒子場$\psi(\vec{r},t)$の汎関数表現(2-40)から、素励起場展開の形を知ることができる。凝縮体が存在しているとき、規格化定数Zを用いて、

$$F[\varphi(\vec{r},t),\vec{\nabla}B(\vec{r},t),\pi(\vec{r},t)] = \chi + Z^{1/2}\varphi(\vec{r},t) + \cdots \qquad (2\text{-}43)$$

と展開できるので、粒子場$\psi(\vec{r},t)$は

$$\psi(\vec{r},t) = \chi + Z^{1/2}\varphi(\vec{r},t) + i\frac{\chi}{\eta}B(\vec{r},t) + \cdots \qquad (2\text{-}44)$$

となる。ここで、$(\cdots)$は素励起場$\varphi(\vec{r},t)$, $B(\vec{r},t)$の2次以上のノーマル積の項をあらわす。この関係を使い、

$$\begin{aligned} \psi(\vec{r},t) + \psi^{+}(\vec{r},t) &= 2\chi + 2Z^{1/2}\varphi(\vec{r},t) + \cdots \\ \psi(\vec{r},t) - \psi^{+}(\vec{r},t) &= 2i\frac{\chi}{\eta}B(\vec{r},t) + \cdots \end{aligned} \qquad (2\text{-}45)$$

となる。同様に$\psi(\vec{r},t)$の２次の項も次のように展開される。

$$
\begin{aligned}
\psi(\vec{r},t)\psi(\vec{r},t)+\psi^{\dagger}(\vec{r},t)\psi^{\dagger}(\vec{r},t) &= 2\chi^{2}+4\chi Z^{1/2}\varphi(\vec{r},t)+\cdots \\
\psi(\vec{r},t)\psi(\vec{r},t)-\psi^{\dagger}(\vec{r},t)\psi^{\dagger}(\vec{r},t) &= i4\frac{\chi^{2}}{\eta}B(\vec{r},t)+\cdots \qquad (2\text{-}46) \\
\psi^{\dagger}(\vec{r},t)\psi(\vec{r},t)+\psi^{\dagger}(\vec{r},t)\psi(\vec{r},t) &= 2\chi^{2}+4\chi Z^{1/2}\varphi(\vec{r},t)+\cdots
\end{aligned}
$$

位相場$B(\vec{r},t)$は$\psi(\vec{r},t)$の線形項$\psi(\vec{r},t)-\psi^{\dagger}(\vec{r},t)$に寄与すると同様に、二次の項$\psi(\vec{r},t)\psi(\vec{r},t)-\psi^{\dagger}(\vec{r},t)\psi^{\dagger}(\vec{r},t)$にも寄与していることがわかる。ここで素励起場展開を、$\varphi(\vec{r})$のフーリエ成分である個別励起演算子$a_{\vec{k}}$の対演算子$a_{\vec{p}}a_{\vec{k}-\vec{p}}$, $a^{\dagger}_{\vec{p}-\vec{k}}a_{\vec{p}}$に対して行なう。これらの対演算子を位相場演算子$B_{\vec{k}}$, $B^{\dagger}_{\vec{k}}$で次のように展開する。

$$
\begin{cases}
a_{\vec{p}}a_{\vec{k}-\vec{p}} = A^{(1)}_{\vec{k}}(\vec{p})B_{\vec{k}} + A^{(2)}_{\vec{k}}(\vec{p})B^{\dagger}_{-\vec{k}} + \cdots \\
a^{\dagger}_{\vec{p}-\vec{k}}a_{\vec{p}} = A^{(3)}_{\vec{k}}(\vec{p})B_{\vec{k}} + A^{(4)}_{\vec{k}}(\vec{p})B^{\dagger}_{-\vec{k}} + \cdots
\end{cases}
\qquad (|\vec{k}|<k_c) \qquad (2\text{-}47)
$$

ここで、$A^{(1)}_{\vec{k}}$, $A^{(2)}_{\vec{k}}$, $A^{(3)}_{\vec{k}}$, $A^{(4)}_{\vec{k}}$は展開係数であり、$(\cdots)$は演算子$B_{\vec{k}}$, $B^{\dagger}_{\vec{k}}$の二次以上のノーマル積である。k_cは切断運動量である。k_cを導入する理由は、次のように説明される。位相場のエネルギースペクトル$\omega(\vec{k})$はフォノン型$V_0$$|\vec{k}|$であり、個別励起のエネルギーは$k\to 0$でギャップ$E_0$をもつため、条件

$$
\omega(\vec{k}) > E_{\vec{p}} + E_{\vec{k}-\vec{p}} \qquad (2\text{-}48)
$$

が満足されれば、位相場は二つの個別励起場に分解した方が、エ

ネルギー的には有利である。そこで限界運動量k_cは次のように決められる。

$$k_c = 2E_0 / v_0 \qquad (2\text{-}49)$$

そこで、位相場は運動量領域$|k| < k_c$においてのみ存在できる。このように、この限界運動量k_cの存在が、位相場の存在を規定しており、後に示すように、T_λ以上での位相場の消滅は限界運動量k_cが零になることによって説明される。

第一章で述べた位相場$\varphi^{op}(\vec{r},t)$の定義との関連を議論しておこう。(2-45)で示された展開は、$B(\vec{r},t)$が$\varphi^{op}(\vec{r},t)$と同様に$\psi(\vec{r},t)$の線形項で表現できるように見える。しかし、(2-45)に示されたように$\psi(\vec{r},t) - \psi^{\dagger}(\vec{r},t)$が$B(\vec{r},t)$で表現されることと、逆に$B(\vec{r},t)$が$\psi(\vec{r},t) - \psi^{\dagger}(\vec{r},t)$で表現されること($\varphi^{op}(\vec{r},t)$)とは同じではない。(2-46)に示されるように$B(\vec{r},t)$を$\psi(\vec{r},t)\psi(\vec{r},t) - \psi^{\dagger}(\vec{r},t)\psi^{\dagger}(\vec{r},t)$で表現することも可能である。Forster[29]は位相場が$\varphi^{op}(\vec{r},t)$のように$\psi(\vec{r},t)$の線形項のみで定義されている点について異議をとなえ、特に有限温度の場合には、$\psi^3(\vec{r},t)$の項も考慮して定義しなければならないと主張した。本論文の位相場$B(\vec{r},t)$の定義は、(2-47)に示されるように、個別励起対$a_{\vec{p}} a_{\vec{p}-\vec{q}}$で定義されている点で、Forsterの主張に沿ったものといえる。

位相場のエネルギースペクトル$W(\vec{q})$を求めるためには、素励起

場展開の展開係数に対する方程式の組を、Bethe－Salpeterの方法に従って求めなければならない。有限温度での$w(\bar{x})$を求める場合、有限温度に拡張されたBethe－Salpeter波動関数を定義し、その波動関数の従うBethe－Salpeter方程式を解かなければならない。有限温度への拡張は、次節で述べるThermo－Field－Dynamicsの方法を利用する。

第三節　有限温度における場の理論の方法
（Thermo Field Dynamicsの方法）

この節では、Takahashi－Umezawa[26]によって提案された有限温度の系に場の理論の方法を適用するための試みの一つであるThermo Field Dynamicsの方法について説明する。この方法は温度に依存する真空状態を導入し、その真空期待値が通常のアンサンブル平均と一致するように真空状態を定義する。この方法によると、有限温度における束縛状態の問題を、場の理論におけるBethe－Salpeterの立場から取り扱うことができる。

最初に真空状態の構造を求める。通常、物理量Aの熱平衡状態における平均値は

$$\langle A \rangle = Z^{-1}(\beta)\,\mathrm{Tr}\left[\, e^{-\beta \mathcal{H}} A \,\right] \tag{2-50}$$

で与えられる。ここで

$$Z(\beta) = Tr[e^{-\beta\mathcal{H}}] \tag{2-51}$$

であり、$\mathcal{H}$は系のハミルトニアンである。ここで温度T（$\beta = \frac{1}{kT}$）に依存するある状態$|0(\beta)\rangle$を定義することによって、$\langle A \rangle$を次のように表現する。

$$\langle A \rangle = \langle 0(\beta)| A |0(\beta)\rangle \tag{2-52}$$

$\mathcal{H}$を対角化する状態$|n\rangle$を考え、$\mathcal{H}|n\rangle = E_n|n\rangle$とする。$|0(\beta)\rangle$が完全系$|n\rangle$で展開できたとする。

$$|0(\beta)\rangle = \Sigma_n f_n(\beta)|n\rangle \tag{2-53}$$

(2-53)を(2-52)へ代入し、(2-50)と一致するためには、

$$f_n^*(\beta) f_m(\beta) = Z^{-1}(\beta) e^{-\beta E_n} \delta_{n,m} \tag{2-54}$$

でなければならない。この条件は$f_n(\beta)$の直交条件であるから、$f_n(\beta)$は普通のc数ではなく、あるヒルベルト空間のベクトルでなければならない。そこで$\mathcal{H}$と同じスペクトルを有する新しいハミルトニアン演算子$\tilde{\mathcal{H}}$、状態$|\tilde{n}\rangle$を考え、$\tilde{\mathcal{H}}|\tilde{n}\rangle = E_n|\tilde{n}\rangle$とする。そして、$f_n(\beta)$として

$$f_n(\beta) = |\tilde{n}\rangle Z^{-\frac{1}{2}}(\beta) e^{-\frac{1}{2}\beta E_n} \tag{2-55}$$

とおくと、(2-54)の関係が満足される。(2-55)を(2-53)へ代入すると

$$|0(\beta)\rangle = Z^{-\frac{1}{2}}(\beta)\sum_n e^{-\frac{1}{2}\beta E_n}|n\rangle \otimes |\tilde{n}\rangle \tag{2-56}$$

このように(2-52)で表現するためには、もとのヒルベルト空間と同じものをもう一つ考え、その二つのヒルベルト空間の直積空間を考えなければならない。

具体例として、振動数ωをもつ自由ボーズ粒子を考える。ハミルトニアン

$$\mathcal{H} = \omega a^\dagger a \tag{2-57}$$

および交換関係 $[a, a^\dagger] = 1$，$[a, a] = [a^\dagger, a^\dagger] = 0$ で記述される系を考える。状態空間は真空 $|0\rangle$ と一粒子状態 $a^\dagger|0\rangle$ で構成される。先の議論に従い、$\mathcal{H}$ と同じスペクトルをもつ系を導入する。そのハミルトニアンを $\tilde{\mathcal{H}} = \omega \tilde{a}^\dagger \tilde{a}$ とし、演算子 $\tilde{a}, \tilde{a}^\dagger$ は交換関係 $[\tilde{a}, \tilde{a}^\dagger] = 1$，$[\tilde{a}, \tilde{a}] = [\tilde{a}^\dagger, \tilde{a}^\dagger] = 0$ を満足し、さらに演算子 $\tilde{a}$，$\tilde{a}^\dagger$ は a，$a^\dagger$ と可換であるとする。

$$[a, \tilde{a}] = [a, \tilde{a}^\dagger] = [a^\dagger, \tilde{a}] = [a^\dagger, \tilde{a}^\dagger] = 0 \tag{2-58}$$

定義(2-56)より、真空状態は

$$|0(\beta)\rangle = Z^{-\frac{1}{2}}(\beta)\sum_n e^{-\frac{\beta n \omega}{2}}|n\rangle \otimes |\tilde{n}\rangle \tag{2-59}$$

である。ここで $|n\rangle$，$|\tilde{n}\rangle$，$Z(\beta)$ は

$$|n\rangle = \frac{1}{\sqrt{n!}}(a^{+})^{n}|0\rangle \quad , \quad |\hat{n}\rangle = \frac{1}{\sqrt{n!}}(\hat{a}^{+})^{n}|\hat{0}\rangle$$

$$Z(\beta) = [\,1 - e^{-\beta\omega}\,]^{-1} \tag{2-60}$$

である。以上を(2-59)へ代入すると

$$|0(\beta)\rangle = [\,1 - e^{-\beta\omega}\,]^{\frac{1}{2}} \exp\left(e^{-\frac{1}{2}\beta\omega} a^{+}\hat{a}^{+} \right)|0\rangle \otimes |\hat{0}\rangle \tag{2-61}$$

となる。新しい量 $u(\beta)$, $v(\beta)$

$$u(\beta) = [\,1 - e^{-\beta\omega}\,]^{-\frac{1}{2}} \quad , \quad v(\beta) = [\,e^{\beta\omega} - 1\,]^{-\frac{1}{2}} \tag{2-62}$$

を導入すると、真空状態は

$$|0(\beta)\rangle = \frac{1}{u(\beta)} \exp\left(\frac{v(\beta)}{u(\beta)} a^{+}\hat{a}^{+} \right) |0\rangle \otimes |\hat{0}\rangle$$

$$= e^{-iG}|0\rangle \otimes |\hat{0}\rangle \tag{2-63}$$

となる。ここで

$$G = -i\theta(\beta)(\hat{a}a - \hat{a}^{+}a^{+}) \quad , \quad \theta(\beta) = \cosh^{-1} u(\beta) \tag{2-64}$$

である。$u(\beta)$, $v(\beta)$ は次の関係を満足する。

$$u^{2}(\beta) - v^{2}(\beta) = 1 \tag{2-65}$$

次に $|0(\beta)\rangle$ に対応して、温度に依存した演算子を導入する。

$$a(\beta) = e^{-iG} a e^{iG} = u(\beta) a - v(\beta) \tilde{a}^{+}$$
$$\tilde{a}(\beta) = e^{-iG} \tilde{a} e^{iG} = u(\beta) \tilde{a} - v(\beta) a^{+} \tag{2-66}$$

この演算子を$|0(\beta)\rangle$に作用すると、

$$a(\beta)|0(\beta)\rangle = e^{-iG} a |0\rangle \otimes |\tilde{0}\rangle = 0$$
$$\tilde{a}(\beta)|0(\beta)\rangle = e^{-iG} |0\rangle \otimes \tilde{a}|\tilde{0}\rangle = 0 \tag{2-67}$$

であり、状態$|0(\beta)\rangle$は$a(\beta)$, $\tilde{a}(\beta)$の「真空」と呼んでよい量であることがわかる。$|0(\beta)\rangle$と$a(\beta)$, $\tilde{a}(\beta)$の正準共役な演算子$a^{+}(\beta)$, $\tilde{a}^{+}(\beta)$とから Fock空間を構成することができる。全ハミルトニアン$\hat{H} = H - \tilde{H}$を考えると、$|0(\beta)\rangle$, $a^{+}(\beta)|0(\beta)\rangle$および$\tilde{a}^{+}(\beta)|0(\beta)\rangle$は次の関係を満足する。

$$\hat{H}|0(\beta)\rangle = 0 \ , \quad \hat{H} a^{+}(\beta)|0(\beta)\rangle = \omega a^{+}(\beta)|0(\beta)\rangle \ , \quad \hat{H} \tilde{a}^{+}(\beta)|0(\beta)\rangle = -\omega \tilde{a}^{+}(\beta)|0(\beta)\rangle \tag{2-68}$$

次に、Kubo - Martin - Schwingerの関係（ＫＭＳ関係という）

$$\langle 0(\beta)| A(t) B(t') |0(\beta)\rangle = \langle 0(\beta)| B(t') A(t+i\beta) |0(\beta)\rangle \tag{2-69}$$

を使い、Green関数と相関関数の関係を導いておく。ここで$A(t)$および$B(t)$は任意のハイゼンベルグ演算子である。相関関数に対するスペクトル表現を

$$\langle 0(\beta)|A(t)B(t')|0(\beta)\rangle = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} dp_0\, e^{-ip_0(t-t')} I_{AB}(p_0) \tag{2-70}$$

とする。ここでKMS関係(2-69)を考えて、

$$\begin{aligned}\langle 0(\beta)|B(t')A(t)|0(\beta)\rangle &= \langle 0(\beta)|A(t-i\beta)B(t')|0(\beta)\rangle \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} dp_0\, e^{-ip_0(t-t')} I_{AB}(p_0)\, e^{-\beta p_0}\end{aligned} \tag{2-71}$$

となる。次に遅延Green関数のスペクトル表現を求める。A, Bはともにボーズ統計に従う演算子であるとし、遅延Green関数

$$R(A(t),B(t')) = \theta(t-t')\,[A(t),\ B(t')] \tag{2-72}$$

を考える。階段関数$\theta(t-t')$は次のように表現されるので、

$$\theta(t-t') = \frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{+\infty} dp_0\, \frac{1}{p_0 - i\alpha}\, e^{ip_0(t-t')} \tag{2-73}$$

遅延Green関数のスペクトル表現は

$$\langle 0(\beta)|R(A(t),B(t'))|0(\beta)\rangle = \frac{i}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} dp_0\, e^{-ip_0(t-t')} R_{AB}(p_0) \tag{2-74}$$

であり、$R_{AB}(p_0)$は$I_{AB}(p_0)$を使い、

$$R_{AB}(p_0) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} dp_0'\, \frac{I_{AB}(p_0')}{p_0 - p_0' + i\alpha}\,(1 - e^{-\beta p_0'}) \tag{2-75}$$

となる。因果Green関数は

$$\langle 0(\beta)|T(A(t)B(t'))|0(\beta)\rangle = \theta(t-t')\langle 0(\beta)|A(t)B(t')|0(\beta)\rangle + \theta(t'-t)\langle 0(\beta)|B(t')A(t)|0(\beta)\rangle \tag{2-76}$$

と定義され、そのスペクトル表現は

$$\langle 0(\beta)|T(A(t)B(t'))|0(\beta)\rangle = \frac{i}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} dp_0\, e^{-ip_0(t-t')} G_{AB}(p_0) \qquad (2\text{-}77)$$

であり、$G_{AB}(p_0)$ は $I_{AB}(p_0)$ を使い、

$$G_{AB}(p_0) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} dp_0'\, I_{AB}(p_0')\left\{\frac{1}{p_0-p_0'+i\alpha} - \frac{e^{-\beta p_0'}}{p_0-p_0'-i\alpha}\right\} \qquad (2\text{-}78)$$

となる。自由ボーズ粒子の場合、ハミルトニアン $\mathcal{H}$ を

$$\mathcal{H} = \Sigma_{\vec{p}}\, \varepsilon(\vec{p})\, a_{\vec{p}}^{+} a_{\vec{p}} \qquad (2\text{-}79)$$

とし、先に述べた $A(t)$, $B(t)$ を

$$A(t) = a_{\vec{p}}(t) = a_{\vec{p}}\, e^{-i\varepsilon(\vec{p})t}, \quad B(t) = a_{\vec{p}}^{+}(t) = a_{\vec{p}}^{+}\, e^{i\varepsilon(\vec{p})t} \qquad (2\text{-}80)$$

とおくと、相関関数、遅延Green関数、因果Green関数のスペクトル表現はそれぞれ

$$I_{aa^+}(\vec{p}, p_0) = 2\pi e^{\beta p_0} n_{\vec{p}}\, \delta(p_0-\varepsilon(\vec{p})) = 2\pi \frac{e^{\beta p_0}}{e^{\beta\varepsilon(\vec{p})}-1}\, \delta(p_0-\varepsilon(\vec{p})) \qquad (2\text{-}81)$$

$$R_{aa^+}(\vec{p}, p_0) = \frac{1}{p_0-\varepsilon(\vec{p})+i\alpha} \qquad (2\text{-}82)$$

$$G_{aa^+}(\vec{p}, p_0) = \left[\frac{1}{p_0-\varepsilon(\vec{p})+i\alpha} - \frac{e^{-\beta\varepsilon(\vec{p})}}{p_0-\varepsilon(\vec{p})-i\alpha}\right]\frac{1}{1-e^{-\beta\varepsilon(\vec{p})}} \qquad (2\text{-}83)$$

となる。

束縛状態が存在する場合も、同様に考えてよい。第二節の

新励起場展開(2-47)により、位相場の生成・消滅演算子$B_{\vec{k}}^{\dagger}$, $B_{\vec{k}}$は二つの個別励起演算子によって構成されているので、ある種の束縛状態を示す演算子であると考えてよい。新励起場表現ではハミルトニアンは対角化されるので、ハミルトニアン(2-22)は

$$H = \sum_{|\vec{k}|<k_c} \omega(\vec{k}) B_{\vec{k}}^{\dagger} B_{\vec{k}} \tag{2-84}$$

となる。ただし、個別励起に関する寄与は省略した。全ハミルトニアン$\hat{H}$は

$$\hat{H} = H - \tilde{H} = \sum_{|\vec{k}|<k_c} \omega(\vec{k}) \left(B_{\vec{k}}^{\dagger} B_{\vec{k}} - \tilde{B}_{\vec{k}}^{\dagger} \tilde{B}_{\vec{k}} \right) \tag{2-85}$$

であり、$\tilde{H}$はHと同じスペクトルをもつ系である。温度に依存する束縛状態の演算子は、

$$\begin{aligned} B_{\vec{k}}(\beta) &= B_{\vec{k}} U_{\vec{k}}^{(B)}(\beta) - \tilde{B}_{\vec{k}}^{\dagger} V_{\vec{k}}^{(B)}(\beta) \\ \tilde{B}_{\vec{k}}(\beta) &= \tilde{B}_{\vec{k}} U_{\vec{k}}^{(B)}(\beta) - B_{\vec{k}}^{\dagger} V_{\vec{k}}^{(B)}(\beta) \end{aligned} \tag{2-86}$$

で定義され、ここで$U_{\vec{k}}^{(B)}(\beta)$と$V_{\vec{k}}^{(B)}(\beta)$は

$$U_{\vec{k}}^{(B)}(\beta) = \left[1 - e^{-\beta\omega(\vec{k})} \right]^{-\frac{1}{2}}, \quad V_{\vec{k}}^{(B)}(\beta) = \left[e^{\beta\omega(\vec{k})} - 1 \right]^{-\frac{1}{2}} \tag{2-87}$$

である。温度に依存する真空$|0(\beta)\rangle$および$B_{\vec{k}}^{\dagger}(\beta)|0(\beta)\rangle$は

$$\hat{H}|0(\beta)\rangle = 0, \quad \hat{H} B_{\vec{k}}^{\dagger}(\beta)|0(\beta)\rangle = \omega(\vec{k}) B_{\vec{k}}^{\dagger}(\beta)|0(\beta)\rangle \tag{2-88}$$

の性質をもつ。エネルギー $W(\vec{q})$ および素励起場展開(2-47)の係数は次に定義された有限温度での Bethe − Salpeter 波動関数

$$\chi_1(\vec{q};t) = \langle 0(\beta)|\, a_{\vec{q}}(t) B^{\dagger}_{\vec{\ell}}(\beta)|0(\beta)\rangle$$

$$\chi_2(\vec{q};t) = \langle 0(\beta)|\, a^{\dagger}_{\vec{q}}(t) B^{\dagger}_{\vec{\ell}}(\beta)|0(\beta)\rangle$$

$$\chi_3(\vec{p},\vec{q};t_1,t_2) = \langle 0(\beta)|\, T[\, a_{\vec{p}}(t_1) a_{\vec{q}}(t_2)]\, B^{\dagger}_{\vec{\ell}}(\beta)|0(\beta)\rangle$$

$$\chi_4(\vec{p},\vec{q};t_1,t_2) = \langle 0(\beta)|\, T[\, a^{\dagger}_{\vec{p}}(t_1) a^{\dagger}_{\vec{q}}(t_2)]\, B^{\dagger}_{\vec{\ell}}(\beta)|0(\beta)\rangle$$

$$\chi_5(\vec{p},\vec{q};t_1,t_2) = \langle 0(\beta)|\, T[\, a^{\dagger}_{\vec{p}}(t_1) a_{\vec{q}}(t_2)]\, B^{\dagger}_{\vec{\ell}}(\beta)|0(\beta)\rangle \qquad (2\text{-}89)$$

に対する方程式を解くことにより求められる。

このように、Thermo Field Dynamics は温度に依存する真空状態と、温度に依存する演算子を用いて、Fock空間を構成することにより、場の理論を統計力学に応用する一つの試みである。この方法は真空期待値を問題にしているかぎり、今までの統計力学のやり方とあまり違わないが、上で述べたように、有限温度における束縛状態の問題を、場の理論における Bethe − Salpeter の方法の立場から議論することができる点に特徴がある。

第三章　位相場のエネルギースペクトル

この章では、素励起場展開の方法に従い、有限温度のBethe-Salpeter波動関数に対する方程式を導き、位相場のエネルギースペクトルを求める。次いで、この計算で使った一般化したペア近似の方法が、粒子数に関する保存則を満足していることを示す。

第一節　Bethe-Salpeter方程式

この節では、Bethe-Salpeter波動関数 $\chi_1(\vec{q};t), - - -, \chi_5(\vec{p},\vec{q};t_1,t_2)$ に関する方程式をハミルトニアン(2-22)から導き出す。最初に $a_{\vec{k}}$ に対する方程式を導く。

$$i\frac{\partial}{\partial t}a_{\vec{k}} = [\ a_{\vec{k}}\ ,\ H\ ] = E_{\vec{k}}a_{\vec{k}} + J_{\vec{k}} - \overline{J}_{\vec{k}} \tag{3-1}$$

ここで $J_{\vec{k}}$ は

$$\begin{aligned}
J_{\vec{k}} = \Sigma_{\vec{p},\vec{q}} \Big[& \{ g_3^{(1)}(\vec{k},\vec{p},\vec{q}) + g_3^{(1)}(\vec{p},\vec{k},\vec{q}) \} a_{\vec{p}}^{+} a_{\vec{q}} + g_3^{(1)}(\vec{p},\vec{q},\vec{k}) a_{\vec{p}} a_{\vec{q}} + \{ g_3^{(2)}(\vec{k},\vec{p},\vec{q}) + g_3^{(2)}(\vec{p},\vec{k},\vec{q}) + \\
& + g_3^{(2)}(\vec{p},\vec{q},\vec{k}) \} a_{\vec{p}}^{+} a_{\vec{q}}^{+} \Big] + \Sigma_{\vec{r},\vec{s},\vec{t}} \Big[\{ g_4^{(1)}(\vec{k},\vec{r},\vec{s},\vec{t}) + g_4^{(1)}(\vec{r},\vec{k},\vec{s},\vec{t}) \} a_{\vec{r}}^{+} a_{\vec{s}} a_{\vec{t}} + \\
& + \{ g_4^{(2)}(\vec{k},\vec{r},\vec{s},\vec{t}) + g_4^{(2)}(\vec{r},\vec{k},\vec{s},\vec{t}) + g_4^{(2)}(\vec{r},\vec{s},\vec{k},\vec{t}) \} a_{\vec{r}}^{+} a_{\vec{s}}^{+} a_{\vec{t}} + g_4^{(2)}(\vec{r},\vec{s},\vec{t},\vec{k}) a_{\vec{r}} a_{\vec{s}} a_{\vec{t}} + \\
& + \{ g_4^{(3)}(\vec{k},\vec{r},\vec{s},\vec{t}) + g_4^{(3)}(\vec{r},\vec{k},\vec{s},\vec{t}) + g_4^{(3)}(\vec{r},\vec{s},\vec{k},\vec{t}) + g_4^{(3)}(\vec{r},\vec{s},\vec{t},\vec{k}) \} a_{\vec{r}}^{+} a_{\vec{s}}^{+} a_{\vec{t}}^{+} \Big]
\end{aligned} \tag{3-2}$$

である。$g_3^{(1)}(\vec{k},\vec{p},\vec{q})$, ---, $g_4^{(3)}(\vec{r},\vec{s},\vec{t},\vec{k})$は(2-13)に与えられている。$\bar{J}_{\vec{k}}$は$:H_I(a,a^+):$から$:\bar{H}_I(a,a^+):$を求めたと同様に、$J_{\vec{k}}$中のすべての演算子$a_{\vec{k}}^+a_{\vec{k}}$の組を統計平均値$\langle a_{\vec{k}}^+a_{\vec{k}}\rangle$に置き換えるという方法によって求められ、

$$\bar{J}_{\vec{k}} = \Sigma_{\vec{p}}\{g_3^{(1)}(\vec{k},\vec{p},\vec{p})+g_3^{(1)}(\vec{p},\vec{k},\vec{p})\}\langle a_{\vec{p}}^+a_{\vec{p}}\rangle + \Sigma_{\vec{r},\vec{t}}\{g_4^{(1)}(\vec{k},\vec{r},\vec{r},\vec{t})+g_4^{(1)}(\vec{r},\vec{k},\vec{r},\vec{t})+$$

$$+g_4^{(1)}(\vec{k},\vec{r},\vec{t},\vec{r})+g_4^{(1)}(\vec{r},\vec{k},\vec{t},\vec{r})\}\langle a_{\vec{r}}^+a_{\vec{r}}\rangle a_{\vec{t}} + \Sigma_{\vec{r},\vec{x}}\{g_4^{(2)}(\vec{k},\vec{r},\vec{x},\vec{r})+g_4^{(2)}(\vec{r},\vec{k},\vec{x},\vec{r})+$$

$$+g_4^{(2)}(\vec{r},\vec{x},\vec{k},\vec{r})+g_4^{(2)}(\vec{k},\vec{x},\vec{r},\vec{r})+g_4^{(2)}(\vec{x},\vec{k},\vec{r},\vec{r})+g_4^{(2)}(\vec{x},\vec{r},\vec{k},\vec{r})\}\langle a_{\vec{r}}^+a_{\vec{r}}\rangle a_{\vec{t}}^+ \tag{3-3}$$

となる。個別励起のエネルギー$E_{\vec{k}}$を決定するとき、J_kの中の$\bar{J}_k$部分を既に考慮している点で、我々の方法は絶対零度の場合、Coniglio と Marinaro[25]によってなされた同様な計算の有限温度への拡張となっている。

次に、$\chi_1(\vec{l},t)$と$\chi_3(\vec{g}_1,\vec{g}_2;t_1,t_2)$に対するBethe-Salpeter方程式を導く。(3,1)の両辺を$\langle 0(\beta)|$と$B_{\vec{l}}^+(\beta)|0(\beta)\rangle$ではさむことによって、$\chi_1(\vec{l},t)$に対する方程式

$$i\frac{\partial}{\partial t}\chi_1(\vec{l},t) = E_{\vec{l}}\chi_1(\vec{l},t)+\langle 0(\beta)|(J_{\vec{l}}(t)-\bar{J}_{\vec{l}}(t))B_{\vec{l}}^+(\beta)|0(\beta)\rangle \tag{3-4}$$

が得られる。さらに(3,1)を使って$\chi_3(\vec{g}_1,\vec{g}_2;t_1,t_2)$に対する方程式を求めると次のようになる。

$$\left(i\frac{\partial}{\partial t_2}-E_{\vec{\xi}_2}\right)\left(i\frac{\partial}{\partial t_1}-E_{\vec{\xi}_1}\right)\chi_3(\vec{\xi}_1,\vec{\xi}_2;t_1,t_2)$$

$$=-i\delta(t_1-t_2)\langle 0(\beta)|[(J_{\vec{\xi}_1}(t_1)-\bar{J}_{\vec{\xi}_1}(t_1)),a_{\vec{\xi}_2}(t_2)]B^{+}_{\xi}(\beta)|0(\beta)\rangle+$$

$$+\langle 0(\beta)|T[(J_{\vec{\xi}_1}(t_1)-\bar{J}_{\vec{\xi}_1}(t_1)),(J_{\vec{\xi}_2}(t_2)-\bar{J}_{\vec{\xi}_2}(t_2))]B^{+}_{\xi}(\beta)|0(\beta)\rangle \qquad (3\text{-}5)$$

同様にして、$\chi_2(\vec{\xi};t)$，$\chi_4(\vec{\xi}_1,\vec{\xi}_2;t_1,t_2)$，$\chi_5(\vec{\xi}_1,\vec{\xi}_2;t_1,t_2)$に対する方程式も導かれる。本論文で採用する一般化されたペア近似とは、凝縮体の存在を考慮した上で、個別励起対の効果まで考慮に入れる近似である。この近似は(3-4)の右辺第二項のうち$J_{\vec{\xi}}$中の個別励起演算子三個からなる項および(3-5)の右辺の第二項全部を無視することに相当し、ダイヤグラムで示すと、後に図示するように鎖ダイヤグラムだけを考慮する近似である。

次に、Bethe-Salpeter波動方程式にもとづき、$\chi_1(\vec{\xi};t)$，・・・，$\chi_5(\vec{\xi}_1,\vec{\xi}_2;t_1,t_2)$間の関係式を導くことが課題となる。Heisenberg演算子$a_{\vec{\xi}}(t)$は$\hat{H}$と可逆であることから、次のように表現される。

$$a_{\vec{\xi}}(t)=e^{iHt}a_{\vec{\xi}}(0)e^{-iHt}=e^{i\hat{H}t}a_{\vec{\xi}}(0)e^{-i\hat{H}t} \qquad (3\text{-}6)$$

ここで(2-89)で定義された$\chi_1(\vec{\xi};t)$は

$$\langle 0(\beta)|a_{\vec{\xi}}(t)B^{+}_{\xi}(\beta)|0(\beta)\rangle=\langle 0(\beta)|e^{i\hat{H}t}a_{\vec{\xi}}(0)e^{-i\hat{H}t}B^{+}_{\xi}(\beta)|0(\beta)\rangle$$

$$=e^{-i\omega(\xi)t}\langle 0(\beta)|a_{\vec{\xi}}(0)B^{+}_{\xi}(\beta)|0(\beta)\rangle \qquad (3\text{-}7)$$

となる。さらに(2-88)を使うと

$$\langle 0(\beta)|\, a_{\vec p}(t)\, a_{\vec q}(t')\, B_{\vec l}^{\dagger}(\beta)|0(\beta)\rangle = \langle 0(\beta)|\, a_{\vec p}(0)\, e^{-i\hat H(t-t')}\, a_{\vec q}(0)\, e^{-i\hat H t'}\, B_{\vec l}^{\dagger}(\beta)|0(\beta)\rangle$$

$$= \langle 0(\beta)|\, a_{\vec p}(0)\, e^{-i(\hat H-\frac{1}{2}\omega(\vec l))(t-t')}\, a_{\vec q}(0)\, B_{\vec l}^{\dagger}(\beta)|0(\beta)\rangle\, e^{-i\omega(\vec l)\frac{t+t'}{2}} \tag{3-8}$$

となり、$\chi_3(\vec p,\vec q\,;t_1,t_2)$が時間に関して、$(t-t')$の関数と$(t+t')$の関数に分離できることがわかる。

$$\langle 0(\beta)|\, T[\, a_{\vec p}(t)\, a_{\vec q}(t')]\, B_{\vec l}^{\dagger}(\beta)|0(\beta)\rangle = \chi_3(\vec p,\vec q\,;t-t')\, e^{-i\omega(\vec l)\frac{t+t'}{2}} \tag{3-9}$$

ここで $\chi_3(\vec p,\vec q\,;t-t')$ は

$$\chi_3(\vec p,\vec q\,;t-t') = \theta(t-t')\langle 0(\beta)|\, a_{\vec p}(0)\, e^{-i(\hat H-\frac{1}{2}\omega(\vec l))(t-t')}\, a_{\vec q}(0)\, B_{\vec l}^{\dagger}(\beta)|0(\beta)\rangle$$

$$+\,\theta(t'-t)\langle 0(\beta)|\, a_{\vec q}(0)\, e^{i(\hat H-\frac{1}{2}\omega(\vec l))(t-t')}\, a_{\vec p}(0)\, B_{\vec l}^{\dagger}(\beta)|0(\beta)\rangle \tag{3-10}$$

である。以上の結果を使うと、Bethe-Salpeter 波動関数はそれぞれ次のようになる。

$$\chi_1(\vec l\,;t) = \chi_1(\vec l\,;0)\, e^{-i\omega(\vec l)t}\,, \qquad \chi_2(\vec l\,;t) = \chi_2(\vec l\,;0)\, e^{-i\omega(\vec l)t}\,,$$

$$\chi_3(\vec p,\vec q\,;t_1,t_2) = \chi_3(\vec p,\vec q\,;t_1-t_2)\, e^{-i\omega(\vec l)\frac{t_1+t_2}{2}}$$

$$\chi_4(\vec p,\vec q\,;t_1,t_2) = \chi_4(\vec p,\vec q\,;t_1-t_2)\, e^{-i\omega(\vec l)\frac{t_1+t_2}{2}}$$

$$\chi_5(\vec p,\vec q\,;t_1,t_2) = \chi_5(\vec p,\vec q\,;t_1-t_2)\, e^{-i\omega(\vec l)\frac{t_1+t_2}{2}} \tag{3-11}$$

以後、$t_1=t_2$ のときの $\chi_i(\vec p,\vec q\,;t_1-t_2)$ $(i=3,4,5)$ を $\chi_i(\vec p,\vec q)$ とおく。

(3-4), (3-5) および $\chi_2(\vec{\ell};t)$, $\chi_4(\vec{p},\vec{q};t_1,t_2)$, $\chi_5(\vec{p},\vec{q};t_1,t_2)$ に対する同様な方程式から、一般化されたペア近似で、$\chi_1(\vec{\ell})$, - - -, $\chi_5(\vec{p},\vec{q})$ は次のようになる。

$$\chi_1(\vec{\ell}) = G^{(0)}(\vec{\ell},\omega(\vec{\ell}))\Big[\sum_{\vec{p},\vec{q}} g_3^{(1)}(\vec{p},\vec{q},\vec{\ell})\chi_3(\vec{p},\vec{q}) + \sum_{\vec{p},\vec{q}}\{g_3^{(2)}(\vec{\ell},\vec{p},\vec{q}) + g_3^{(2)}(\vec{p},\vec{\ell},\vec{q}) +$$

$$+ g_3^{(2)}(\vec{p},\vec{q},\vec{\ell})\}\chi_4(\vec{p},\vec{q}) + \sum_{\vec{p},\vec{q}}\{g_3^{(1)}(\vec{\ell},\vec{p},\vec{q}) + g_3^{(1)}(\vec{p},\vec{\ell},\vec{q})\}\chi_5(\vec{p},\vec{q})\Big] \tag{3-12}$$

$$\chi_2(\vec{\ell}) = G^{(0)}(\vec{\ell},-\omega(\vec{\ell}))\Big[\sum_{\vec{p},\vec{q}} g_3^{(1)}(\vec{p},\vec{q},\vec{\ell})\chi_4(\vec{p},\vec{q}) + \sum_{\vec{p},\vec{q}}\{g_3^{(2)}(\vec{\ell},\vec{p},\vec{q}) + g_3^{(2)}(\vec{p},\vec{\ell},\vec{q}) +$$

$$+ g_3^{(2)}(\vec{p},\vec{q},\vec{\ell})\}\chi_3(\vec{p},\vec{q}) + \sum_{\vec{p},\vec{q}}\{g_3^{(1)}(\vec{\ell},\vec{q},\vec{p}) + g_3^{(1)}(\vec{q},\vec{\ell},\vec{p})\}\chi_5(\vec{p},\vec{q})\Big] \tag{3-13}$$

$$\chi_3(\vec{p},\vec{q}) = \frac{i}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} d\omega\, G^{(0)}(\vec{p},\omega)\, G^{(0)}(\vec{q},\omega(\vec{\ell})-\omega)$$

$$\times\Big[\sum_{\vec{k}}\{g_3^{(1)}(\vec{p},\vec{k},\vec{q}) + g_3^{(1)}(\vec{q},\vec{p},\vec{k})\}\chi_1(\vec{k}) + \sum_{\vec{k}}\{g_3^{(2)}(\vec{p},\vec{k},\vec{q}) + g_3^{(2)}(\vec{k},\vec{p},\vec{q}) +$$

$$+ g_3^{(2)}(\vec{k},\vec{q},\vec{p}) + g_3^{(2)}(\vec{p},\vec{q},\vec{k}) + g_3^{(2)}(\vec{q},\vec{p},\vec{k}) + g_3^{(2)}(\vec{q},\vec{k},\vec{p})\}\chi_2(\vec{k}) +$$

$$+ \sum_{\vec{h},\vec{k}}\{g_4^{(1)}(\vec{p},\vec{q},\vec{h},\vec{k}) + g_4^{(1)}(\vec{q},\vec{p},\vec{h},\vec{k})\}\chi_3(\vec{h},\vec{k}) +$$

$$+ \sum_{\vec{h},\vec{k}}\{g_4^{(3)}(\vec{p},\vec{q},\vec{h},\vec{k}) + g_4^{(3)}(\vec{q},\vec{p},\vec{h},\vec{k}) + g_4^{(3)}(\vec{q},\vec{h},\vec{p},\vec{k}) + g_4^{(3)}(\vec{q},\vec{h},\vec{k},\vec{p}) +$$

$$+ g_4^{(3)}(\vec{p},\vec{h},\vec{q},\vec{k}) + g_4^{(3)}(\vec{h},\vec{p},\vec{q},\vec{k}) + g_4^{(3)}(\vec{h},\vec{q},\vec{p},\vec{k}) + g_4^{(3)}(\vec{h},\vec{q},\vec{k},\vec{p}) +$$

$$+ g_4^{(3)}(\vec{p},\vec{h},\vec{k},\vec{q}) + g_4^{(3)}(\vec{h},\vec{q},\vec{k},\vec{p}) + g_4^{(3)}(\vec{h},\vec{k},\vec{p},\vec{q}) + g_4^{(3)}(\vec{h},\vec{k},\vec{q},\vec{p})\}\chi_4(\vec{h},\vec{k}) +$$

$$+ \sum_{\vec{h},\vec{k}}\{g_4^{(2)}(\vec{p},\vec{q},\vec{h},\vec{k}) + g_4^{(2)}(\vec{q},\vec{p},\vec{h},\vec{k}) + g_4^{(2)}(\vec{q},\vec{h},\vec{p},\vec{k}) + g_4^{(2)}(\vec{p},\vec{h},\vec{q},\vec{k}) +$$

$$+ g_4^{(2)}(\vec{h},\vec{p},\vec{q},\vec{k}) + g_4^{(2)}(\vec{h},\vec{q},\vec{p},\vec{k})\}\chi_5(\vec{h},\vec{k})\Big] \tag{3-14}$$

$$\chi_4(\vec{p},\vec{q}) = \frac{i}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} d\omega\, G^{(0)}(\vec{p},\omega)\, G^{(0)}(\vec{q},-\omega(\vec{l})-\omega)$$

$$\times \Big[\sum_{\vec{k}} \{ g_3^{(1)}(\vec{p},\vec{q},\vec{k}) + g_3^{(1)}(\vec{q},\vec{p},\vec{k}) \} \chi_2(\vec{k}) + \sum_{\vec{k}} \{ g_3^{(2)}(\vec{p},\vec{q},\vec{k}) + g_3^{(2)}(\vec{q},\vec{p},\vec{k}) +$$

$$+ g_3^{(2)}(\vec{q},\vec{k},\vec{p}) + g_3^{(2)}(\vec{p},\vec{k},\vec{q}) + g_3^{(2)}(\vec{k},\vec{p},\vec{q}) + g_3^{(2)}(\vec{k},\vec{q},\vec{p}) \} \chi_1(\vec{k}) +$$

$$+ \sum_{\vec{h},\vec{k}} \{ g_4^{(1)}(\vec{p},\vec{q},\vec{k},\vec{h}) + g_4^{(1)}(\vec{q},\vec{p},\vec{k},\vec{h}) \} \chi_4(\vec{h},\vec{k}) +$$

$$+ \sum_{\vec{h},\vec{k}} \{ g_4^{(2)}(\vec{p},\vec{k},\vec{q},\vec{h}) + g_4^{(2)}(\vec{k},\vec{p},\vec{q},\vec{h}) + g_4^{(2)}(\vec{k},\vec{q},\vec{p},\vec{h}) + g_4^{(2)}(\vec{p},\vec{q},\vec{k},\vec{h}) +$$

$$+ g_4^{(2)}(\vec{q},\vec{p},\vec{k},\vec{h}) + g_4^{(2)}(\vec{q},\vec{k},\vec{p},\vec{h}) \} \chi_5(\vec{h},\vec{k}) +$$

$$+ \sum_{\vec{h},\vec{k}} \{ g_4^{(3)}(\vec{p},\vec{q},\vec{h},\vec{k}) + g_4^{(3)}(\vec{q},\vec{p},\vec{h},\vec{k}) + g_4^{(3)}(\vec{q},\vec{h},\vec{p},\vec{k}) + g_4^{(3)}(\vec{q},\vec{h},\vec{k},\vec{p}) +$$

$$+ g_4^{(3)}(\vec{p},\vec{h},\vec{q},\vec{k}) + g_4^{(3)}(\vec{h},\vec{p},\vec{q},\vec{k}) + g_4^{(3)}(\vec{h},\vec{q},\vec{p},\vec{k}) + g_4^{(3)}(\vec{h},\vec{q},\vec{k},\vec{p}) +$$

$$+ g_4^{(3)}(\vec{p},\vec{h},\vec{k},\vec{q}) + g_4^{(3)}(\vec{h},\vec{p},\vec{k},\vec{q}) + g_4^{(3)}(\vec{h},\vec{k},\vec{p},\vec{q}) + g_4^{(3)}(\vec{h},\vec{k},\vec{q},\vec{p}) \} \chi_3(\vec{h},\vec{k}) \Big]$$

(3-15)

$$\chi_5(\vec{p},\vec{q}) = \frac{i}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} d\omega\, G^{(0)}(\vec{p},\omega)\, G^{(0)}(\vec{q},\omega(\vec{l})+\omega)$$

$$\times \Big[\sum_{\vec{k}} \{ g_3^{(1)}(\vec{p},\vec{k},\vec{q}) + g_3^{(1)}(\vec{k},\vec{p},\vec{q}) \} \chi_1(\vec{k}) +$$

$$+ \sum_{\vec{k}} \{ g_3^{(1)}(\vec{k},\vec{q},\vec{p}) + g_3^{(1)}(\vec{q},\vec{k},\vec{p}) \} \chi_2(\vec{k}) +$$

$$+ \sum_{\vec{h},\vec{k}} \{ g_4^{(1)}(\vec{p},\vec{k},\vec{h},\vec{q}) + g_4^{(1)}(\vec{k},\vec{p},\vec{h},\vec{q}) + g_4^{(1)}(\vec{p},\vec{k},\vec{q},\vec{h}) + g_4^{(1)}(\vec{k},\vec{p},\vec{q},\vec{h}) \} \chi_5(\vec{h},\vec{k}) +$$

$$+ \sum_{\vec{h},\vec{k}} \{ g_4^{(2)}(\vec{p},\vec{k},\vec{h},\vec{q}) + g_4^{(2)}(\vec{k},\vec{p},\vec{h},\vec{q}) + g_4^{(2)}(\vec{k},\vec{h},\vec{p},\vec{q}) \} \chi_3(\vec{h},\vec{k}) +$$

$$+ \sum_{\vec{h},\vec{k}} \{ g_4^{(2)}(\vec{q},\vec{h},\vec{k},\vec{p}) + g_4^{(2)}(\vec{h},\vec{q},\vec{k},\vec{p}) + g_4^{(2)}(\vec{h},\vec{k},\vec{q},\vec{p}) \} \chi_4(\vec{h},\vec{k}) \} \Big] \quad (3\text{-}16)$$

ここで $G^{(0)}(\vec{p},\omega)$ はエネルギー $E_{\vec{p}}$ を有する自由な個別励起の因果Green関数のスペクトル表現であり、(2-77)から

$$G^{(0)}(\vec{p},\omega)=\frac{1}{1-e^{-\beta E_{\vec{p}}}}\left[\frac{1}{\omega-E_{\vec{p}}+i\alpha}-\frac{e^{-\beta E_{\vec{p}}}}{\omega-E_{\vec{p}}-i\alpha}\right] \tag{3-17}$$

となる。以上の関係を直観的に理解するために、ダイヤグラムで表現すると次のようになる。

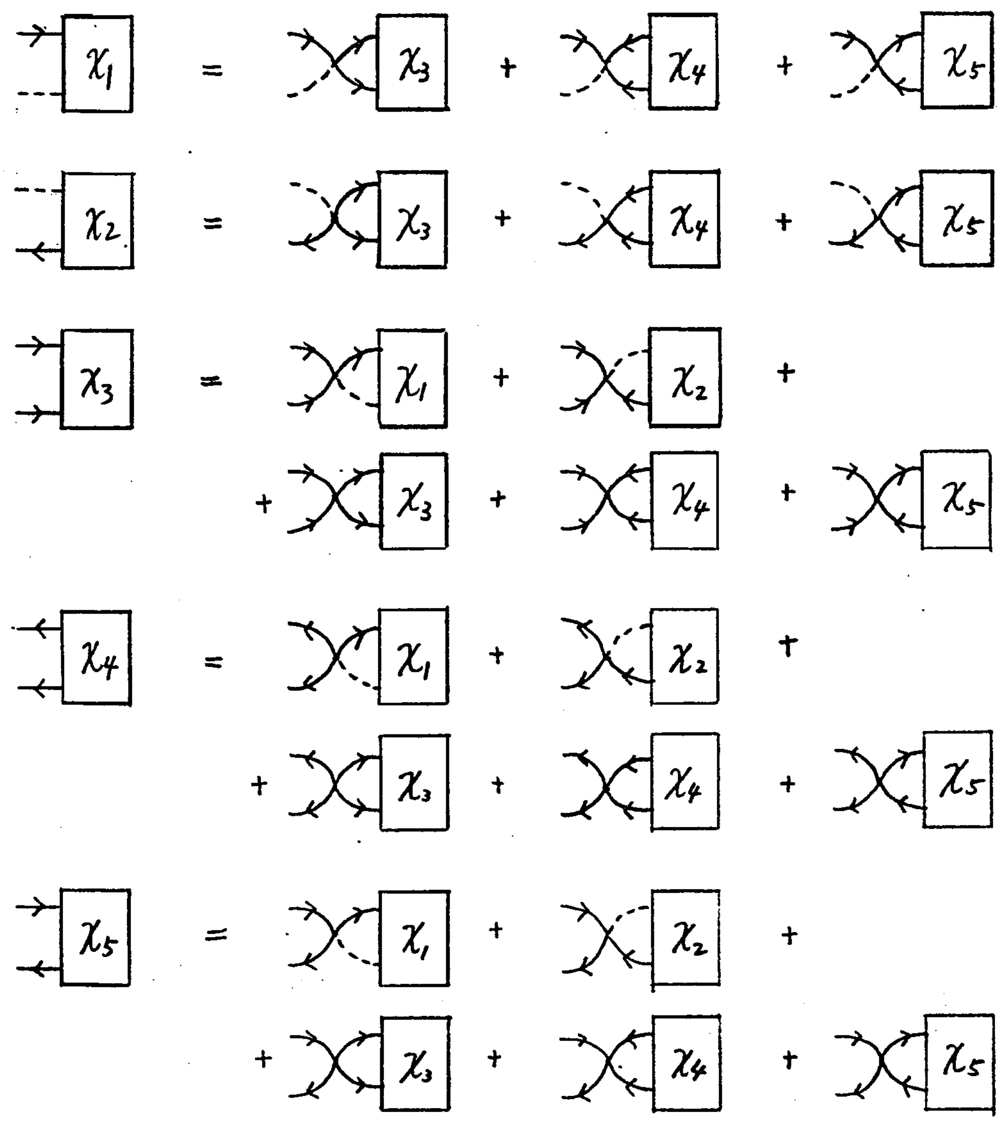


Fig.1　$\chi_1(\vec{q})$, $\chi_2(\vec{q})$, - - -, $\chi_5(\vec{p},\vec{q})$ の方程式のダイヤグラム表現
実線は演算子 a, a^{+} で表現される個別励起の自由な因果Green関数である。

(3-12)から(3-16)までの式を整理するため、次の $\chi_A(\vec{l})$, $\chi_B(\vec{l})$, $\chi_C(\vec{l})$を導入すると、

$$\chi_A(\vec{l}) = \sum_{\vec{p}} \{ u_{\vec{p}} u_{\vec{l}-\vec{p}} \chi_3(\vec{p},\vec{l}-\vec{p}) + v_{\vec{p}} v_{\vec{l}+\vec{p}} \chi_4(\vec{p},-\vec{l}-\vec{p}) - 2v_{\vec{p}-\vec{l}} u_{\vec{p}} \chi_5(\vec{p}-\vec{l},\vec{p}) \}$$

$$\chi_B(\vec{l}) = \sum_{\vec{p}} \{ v_{\vec{p}} v_{\vec{l}-\vec{p}} \chi_3(\vec{p},\vec{l}-\vec{p}) + u_{\vec{p}} u_{\vec{l}+\vec{p}} \chi_4(\vec{p},-\vec{l}-\vec{p}) - 2u_{\vec{p}-\vec{l}} v_{\vec{p}} \chi_5(\vec{p}-\vec{l},\vec{p}) \}$$

$$\chi_C(\vec{l}) = \sum_{\vec{p}} \{ -u_{\vec{p}} v_{\vec{l}-\vec{p}} \chi_3(\vec{p},\vec{l}-\vec{p}) - u_{\vec{p}} v_{\vec{l}+\vec{p}} \chi_4(\vec{p},-\vec{l}-\vec{p}) + (u_{\vec{p}-\vec{l}} u_{\vec{p}} + v_{\vec{p}-\vec{l}} v_{\vec{p}}) \chi_5(\vec{p}-\vec{l},\vec{p}) \} \quad (3\text{-}18)$$

$\chi_1(\vec{l})$, ・・・, $\chi_5(\vec{k}-\vec{l},\vec{l})$ は次のように簡単になる。

$$\chi_1(\vec{l}) = \frac{g\chi}{V^{1/2}} G^{(0)}(\vec{l};\omega(\vec{l})) [u_{\vec{l}} \chi_A(\vec{l}) - v_{\vec{l}} \chi_B(\vec{l}) + 2(u_{\vec{l}} - v_{\vec{l}}) \chi_C(\vec{l})] \quad (3\text{-}19)$$

$$\chi_2(\vec{l}) = \frac{g\chi}{V^{1/2}} G^{(0)}(\vec{l};-\omega(\vec{l})) [-v_{\vec{l}} \chi_A(\vec{l}) + u_{\vec{l}} \chi_B(\vec{l}) + 2(u_{\vec{l}} - v_{\vec{l}}) \chi_C(\vec{l})] \quad (3\text{-}20)$$

$$\begin{aligned}\chi_3(\vec{k},\vec{l}-\vec{k}) = & \{ u_{\vec{l}} G_{11}(\vec{k},\vec{l}-\vec{k}) - v_{\vec{l}} G_{21}(\vec{k},\vec{l}-\vec{k}) + u_{\vec{k}} u_{\vec{l}-\vec{k}} G_{31}(\vec{k},\vec{l}-\vec{k}) \} \chi_A(\vec{l}) + \\ & + \{ -v_{\vec{l}} G_{11}(\vec{k},\vec{l}-\vec{k}) + u_{\vec{l}} G_{21}(\vec{k},\vec{l}-\vec{k}) + v_{\vec{k}} v_{\vec{l}-\vec{k}} G_{31}(\vec{k},\vec{l}-\vec{k}) \} \chi_B(\vec{l}) + \\ & + \{ 2(u_{\vec{l}} - v_{\vec{l}}) G_{11}(\vec{k},\vec{l}-\vec{k}) + 2(u_{\vec{l}} - v_{\vec{l}}) G_{21}(\vec{k},\vec{l}-\vec{k}) - 2(u_{\vec{k}} v_{\vec{l}-\vec{k}} + v_{\vec{k}} u_{\vec{l}-\vec{k}}) \times \\ & \times G_{31}(\vec{k},\vec{l}-\vec{k}) \} \chi_C(\vec{l}) \end{aligned} \quad (3\text{-}21)$$

$$\begin{aligned}\chi_4(\vec{k},-\vec{l}-\vec{k}) = & \{ -v_{\vec{l}} G_{12}(\vec{k},-\vec{l}-\vec{k}) + u_{\vec{l}} G_{22}(\vec{k},-\vec{l}-\vec{k}) + v_{\vec{k}} v_{\vec{l}+\vec{k}} G_{32}(\vec{k},-\vec{l}-\vec{k}) \} \chi_A(\vec{l}) + \\ & + \{ u_{\vec{l}} G_{12}(\vec{k},-\vec{l}-\vec{k}) - v_{\vec{l}} G_{22}(\vec{k},-\vec{l}-\vec{k}) + u_{\vec{k}} u_{\vec{l}+\vec{k}} G_{32}(\vec{k},-\vec{l}-\vec{k}) \} \chi_B(\vec{l}) + \\ & + \{ 2(u_{\vec{l}} - v_{\vec{l}}) G_{12}(\vec{k},-\vec{l}-\vec{k}) + 2(u_{\vec{l}} - v_{\vec{l}}) G_{22}(\vec{k},-\vec{l}-\vec{k}) - 2(u_{\vec{k}} v_{\vec{l}+\vec{k}} + v_{\vec{k}} u_{\vec{l}+\vec{k}}) \\ & \times G_{32}(\vec{k},-\vec{l}-\vec{k}) \} \chi_C(\vec{l}) \end{aligned} \quad (3\text{-}22)$$

$$\chi_5(\vec{k}-\vec{l},\vec{k}) = \{ u_{\vec{l}} G_{13}(\vec{k}-\vec{l},\vec{k}) - v_{\vec{l}} G_{23}(\vec{k}-\vec{l},\vec{k}) + v_{\vec{k}-\vec{l}} u_{\vec{k}} G_{33}(\vec{k}-\vec{l},\vec{k}) \} \chi_A(\vec{l}) +$$

$$+ \{ -v_{\vec{l}} G_{13}(\vec{k}-\vec{l},\vec{k}) + u_{\vec{l}} G_{23}(\vec{k}-\vec{l},\vec{k}) + u_{\vec{k}-\vec{l}} v_{\vec{k}} G_{33}(\vec{k}-\vec{l},\vec{k}) \} \chi_D(\vec{l}) +$$

$$+ \{ 2(u_{\vec{l}} - v_{\vec{l}}) G_{13}(\vec{k}-\vec{l},\vec{k}) + 2(u_{\vec{l}} - v_{\vec{l}}) G_{23}(\vec{k}-\vec{l},\vec{k}) -$$

$$- 2(u_{\vec{k}-\vec{l}} u_{\vec{k}} + v_{\vec{k}-\vec{l}} v_{\vec{k}}) G_{33}(\vec{k}-\vec{l},\vec{k}) \} \chi_c(\vec{l}) \qquad (3\text{-}23)$$

ここで $G_{11}(\vec{k},\vec{l}-\vec{k})$, - - -, $G_{33}(\vec{k}-\vec{l},\vec{k})$ は

$$G_{11}(\vec{k},\vec{l}-\vec{k}) = (-i) Q_1(\vec{k},\vec{l}-\vec{k}; w(\vec{l})) \left(\frac{g\chi}{V^{1/2}}\right) \{ g_3^{(1)}(\vec{k},\vec{l}-\vec{k},\vec{l}) + g_3^{(1)}(\vec{l}-\vec{k},\vec{k},\vec{l}) \} G^{(0)}(\vec{l}, w(\vec{l}))$$

$$G_{21}(\vec{k},\vec{l}-\vec{k}) = (-i) Q_1(\vec{k},\vec{l}-\vec{k}; w(\vec{l})) \left(\frac{g\chi}{V^{1/2}}\right) \{ g_3^{(1)}(\vec{k},-\vec{l},\vec{l}-\vec{k}) + g_3^{(1)}(-\vec{l},\vec{k},\vec{l}-\vec{k}) +$$

$$+ g_3^{(2)}(-\vec{l},\vec{l}-\vec{k},\vec{k}) + g_3^{(2)}(\vec{k},\vec{l}-\vec{k},-\vec{l}) + g_3^{(2)}(\vec{l}-\vec{k},\vec{k},-\vec{l}) + g_3^{(2)}(\vec{l}-\vec{k},-\vec{l},\vec{k}) \} G^{(0)}(\vec{l}, -w(\vec{l}))$$

$$G_{31}(\vec{k},\vec{l}-\vec{k}) = (-i) Q_1(\vec{k},\vec{l}-\vec{k}; w(\vec{l})) \frac{g}{V}$$

$$G_{12}(\vec{k},-\vec{l}-\vec{k}) = (-i) Q_2(\vec{k},-\vec{l}-\vec{k}; w(\vec{l})) \left(\frac{g\chi}{V^{1/2}}\right) \{ g_3^{(1)}(\vec{k},-\vec{l}-\vec{k},-\vec{l}) + g_3^{(1)}(-\vec{l}-\vec{k},\vec{k},-\vec{l}) \} G^{(0)}(\vec{l}, -w(\vec{l}))$$

$$G_{22}(\vec{k},-\vec{l}-\vec{k}) = (-i) Q_2(\vec{k},-\vec{l}-\vec{k}; w(\vec{l})) \left(\frac{g\chi}{V^{1/2}}\right) \{ g_3^{(2)}(\vec{k},-\vec{l}-\vec{k},\vec{l}) + g_3^{(2)}(-\vec{l}-\vec{k},\vec{k},\vec{l}) +$$

$$+ g_3^{(2)}(-\vec{l}-\vec{k},\vec{l},\vec{k}) + g_3^{(2)}(\vec{k},\vec{l},-\vec{k}-\vec{l}) + g_3^{(2)}(\vec{l},\vec{k},-\vec{l}-\vec{k}) + g_3^{(2)}(\vec{l},-\vec{l}-\vec{k},\vec{k}) \} G^{(0)}(\vec{l}, w(\vec{l}))$$

$$G_{32}(\vec{k},-\vec{l}-\vec{k}) = (-i) Q_2(\vec{k},-\vec{l}-\vec{k}; w(\vec{l})) \frac{g}{V}$$

$$G_{13}(\vec{k}-\vec{l},\vec{k}) = (-i) Q_3(\vec{k}-\vec{l},\vec{k}; w(\vec{l})) \left(\frac{g\chi}{V^{1/2}}\right) \{ g_3^{(1)}(\vec{k}-\vec{l},\vec{l},\vec{k}) + g_3^{(1)}(\vec{l},\vec{k}-\vec{l},\vec{k}) \} G^{(0)}(\vec{l}, w(\vec{l}))$$

$$G_{23}(\vec{k}-\vec{l},\vec{k}) = (-i)\,Q_3(\vec{k}-\vec{l},\vec{k};\omega(\vec{l}))\left(\frac{g\chi}{V^{1/2}}\right)\{g_3^{(1)}(-\vec{l},\vec{k},\vec{k}-\vec{l}) + g_3^{(1)}(\vec{k},-\vec{l},\vec{k}-\vec{l})\}\,G^{(1)}(\vec{l},-\omega(\vec{l}))$$

$$G_{33}(\vec{k}-\vec{l},\vec{k}) = (-i)\,Q_3(\vec{k}-\vec{l},\vec{k};\omega(\vec{l}))\left(-\frac{g}{V}\right) \tag{3-24}$$

である。但し、

$$Q_1(\vec{k},\vec{l}-\vec{k};\omega(\vec{l})) = -\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} d\nu\, G^{(1)}(\vec{k},\nu)\,G^{(1)}(\vec{l}-\vec{k},\omega(\vec{l})-\nu)$$

$$Q_2(\vec{k},-\vec{l}-\vec{k};\omega(\vec{l})) = -\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} d\nu\, G^{(1)}(\vec{k},\nu)\,G^{(0)}(-\vec{l}-\vec{k},-\omega(\vec{l})-\nu)$$

$$Q_3(\vec{k}-\vec{l},\vec{k};\omega(\vec{l})) = -\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} d\nu\, G^{(0)}(\vec{k}-\vec{l},\nu)\,G^{(1)}(\vec{k},\omega(\vec{l})+\nu) \quad . \tag{3-25}$$

ここで、(3-21)(3-22)(3-23)は(3-12)(3-13)を(3-14)(3-15)(3-16)へ代入して求めた。(3-18)で定義された$\chi_A(\vec{l})$, $\chi_B(\vec{l})$, $\chi_C(\vec{l})$の間の関係は、(3-21)(3-22)(3-23)を使うと、次のようになる。

$$\begin{cases} A(\vec{l};\omega(\vec{l}))\chi_A(\vec{l}) + B(\vec{l};\omega(\vec{l}))\chi_B(\vec{l}) + C(\vec{l};\omega(\vec{l}))\chi_C(\vec{l}) = 0 & \text{(3-26a)} \\ D(\vec{l};\omega(\vec{l}))\chi_A(\vec{l}) + E(\vec{l};\omega(\vec{l}))\chi_B(\vec{l}) + F(\vec{l};\omega(\vec{l}))\chi_C(\vec{l}) = 0 & \text{(3-26b)} \\ H(\vec{l};\omega(\vec{l}))\chi_A(\vec{l}) + I(\vec{l};\omega(\vec{l}))\chi_B(\vec{l}) + L(\vec{l};\omega(\vec{l}))\chi_C(\vec{l}) = 0 & \text{(3-26c)} \end{cases}$$

係数$A(\vec{l};\omega(\vec{l}))$, ・・・, $L(\vec{l};\omega(\vec{l}))$の値は付録Ⅲに示される。付録Ⅲは各係数の$\vec{l}\to 0$の極限の値も同時に示してある。(3-26)の関係式は絶対零度の場合、ConiglioとMarinaroが求めた結果と同形である。しかし、今の計算は係数$A(\vec{l};\omega(\vec{l}))$, ---, $L(\vec{l};\omega(\vec{l}))$がGreen関数

$G^{(0)}(\vec{l};w(\vec{l}))$を通して温度に依存している点、$\chi_A(\vec{l})$, $\chi_B(\vec{l})$および$\chi_C(\vec{l})$が個別励起の散乱過程の位相場への寄与を示す$\chi_S(\vec{p},\vec{q})$を含んでいる点で、個別励起の熱的効果による有限温度への拡張になっている。

最後に、$\chi_A(\vec{l})$, $\chi_B(\vec{l})$, $\chi_C(\vec{l})$の物理的意味を明らかにする。正準変換(2-3)の右辺を次のように書き換える。

$$
\begin{aligned}
C_{\vec{p}} &= V^{1/2}\chi\,\delta_{\vec{p},0} + \hat{C}_{\vec{p}} \\
C^{+}_{\vec{p}} &= V^{1/2}\chi\,\delta_{\vec{p},0} + \hat{C}^{+}_{\vec{p}}
\end{aligned}
\tag{3-27}
$$

演算子$\hat{a}^{+}_{\vec{p}}$, $\hat{a}_{\vec{p}}$と$a^{+}_{\vec{p}}$, $a_{\vec{p}}$の間の関係を考えると、$\chi_A(\vec{l})$, $\chi_B(\vec{l})$, $\chi_C(\vec{l})$は

$$
\begin{aligned}
\chi_A(\vec{l}) &= \sum_{\vec{p}} \langle 0(\beta)|\, \hat{a}_{\vec{p}}\hat{a}_{\vec{l}-\vec{p}} B^{+}_{\vec{l}}(\beta)|0(\beta)\rangle \\
\chi_B(\vec{l}) &= \sum_{\vec{p}} \langle 0(\beta)|\, \hat{a}^{+}_{\vec{p}}\hat{a}_{-\vec{l}-\vec{p}} B^{+}_{\vec{l}}(\beta)|0(\beta)\rangle \\
\chi_C(\vec{l}) &= \sum_{\vec{p}} \langle 0(\beta)|\, \hat{a}^{+}_{\vec{p}}\hat{a}_{\vec{l}+\vec{p}} B^{+}_{\vec{l}}(\beta)|0(\beta)\rangle
\end{aligned}
\tag{3-28}
$$

であることがわかる。$\chi_A(\vec{l})$, $\chi_B(\vec{l})$, $\chi_C(\vec{l})$はそれぞれ凝縮状態から励起している粒子の対消滅過程、対生成過程、散乱過程の位相場に対する寄与を示している。このように、$\chi_S(\vec{p},\vec{q})$を含ませることによって、凝縮体から励起している粒子の二体間の力学的効果および相関効果を完全に考慮することができる。位相場のエネルギースペクトルは、第二章で述べたように、展開係数つまりBethe–Salpeter波動関数に対する関係式(3-26)を解くこと

により決定される。この点は通常の統計力学の立場とするどく区別されることに注意しよう。通常の場合、絶対零度でのエネルギースペクトルが最初に与えられ、温度効果はアンサンブル平均を通して導入される。しかし現在の方法は絶対零度でのエネルギースペクトルを先験的に必要とせず、各温度に対するエネルギースペクトルを求めることができる。この方法が、有限温度での超電導状態の議論をするとき、有効性を発揮したことは、既によく知られている。[21)26)]

第二節　エネルギースペクトル

この節では $\chi_A(\xi)$, $\chi_B(\xi)$, $\chi_C(\xi)$ の関係式(3-26)から、$\xi=0$ 付近でのエネルギースペクトル $W(\xi)$ を計算する。そのため、$\chi_A(\xi)$, $\chi_B(\xi)$, $\chi_C(\xi)$ および $W(\xi)$ を ξ の巾で展開する。

$$\chi_i(\xi) = \chi_i(0) + \chi_i^{(1)}(\xi) + \chi_i^{(2)}(\xi) + \cdots \qquad (i = A, B, C)$$

$$W(\xi) = W(0) + W^{(1)}(\xi) + W^{(2)}(\xi) + \cdots \tag{3-29}$$

右辺の各項はそれぞれ ξ に関して、0次、1次、2次の量である。$A(\ell;W(\ell))$, ---, $L(\ell;W(\ell))$ の ξ に関する展開は付録Ⅲに示されている。

最初に(3-26)の ξ に関する0次の式を書き下すと、次式になる。

(3-26a) より、

$$\left[\frac{1}{2}(1+4g\Delta iQ)-\frac{W(0)}{2g\chi^2-2\Delta}\left\{\frac{g\chi^2-\Delta}{\Delta}-g\Delta iQ-6g\Delta iR+4g^2\chi^2 iR\right\}\right]\chi_A(0)+$$

$$+\left[\frac{1}{2}(1+4g\Delta iQ)-\frac{W(0)}{2g\chi^2-2\Delta}\left\{g\Delta iQ-2g\Delta iR+4g^2\chi^2 iR\right\}\right]\chi_B(0)+$$

$$+\left[-2\left\{\frac{g\chi^2-\Delta}{\Delta}-2g\Delta iQ-4g\Delta iR\right\}-\frac{W(0)}{\Delta}(1+2g\Delta iQ+4g\Delta iR)\right]\chi_C(0)=0 \tag{3-30a}$$

(3-26b) より、

$$\left[\frac{1}{2}(1+4g\Delta iQ)+\frac{W(0)}{2g\chi^2-2\Delta}\left\{g\Delta iQ-2g\Delta iR+4g^2\chi^2 iR\right\}\right]\chi_A(0)+$$

$$+\left[\frac{1}{2}(1+4g\Delta iQ)+\frac{W(0)}{2g\chi^2-2\Delta}\left\{\frac{g\chi^2-\Delta}{\Delta}-g\Delta iQ-6g\Delta iR+4g^2\chi^2 iR\right\}\right]\chi_B(0)+$$

$$+\left[-2\left\{\frac{g\chi^2-\Delta}{\Delta}-2g\Delta iQ-4g\Delta iR\right\}+\frac{W(0)}{\Delta}(1+2g\Delta iQ+4g\Delta iR)\right]\chi_C(0)=0 \tag{3-30b}$$

(3-26c) より、

$$\left[4g\Delta iR-\frac{1}{2}gy+\frac{W(0)}{2g\chi^2-2\Delta}\left\{g\Delta iQ+2g\Delta iR-\frac{1}{2}gy\right\}\right]\chi_A(0)+$$

$$+\left[4g\Delta iR-\frac{1}{2}gy-\frac{W(0)}{2g\chi^2-2\Delta}\left\{g\Delta iQ+2g\Delta iR-\frac{1}{2}gy\right\}\right]\chi_B(0)+$$

$$+\left(1+4g\Delta iQ+8g\Delta iR-gy\right)\chi_C(0)=0 \tag{3-30c}$$

ここで iQ, iR, y は付録III で定義されている。上式から、$\chi_A(0)$, $\chi_B(0)$, $\chi_C(0)$, $W(0)$ に関する関係式を求めるため、次のように変形する。(3-30a) + (3-30b) より、

$$(1+4g\Delta iQ)(\chi_A(0)+\chi_B(0))-\frac{1}{2g\chi^2-2\Delta}\left\{\frac{g\chi^2-\Delta}{\Delta}-2g\Delta iQ-4g\Delta iR\right\}W(0)(\chi_A(0)-\chi_B(0))-$$

$$-4\left\{\frac{g\chi^2-\Delta}{\Delta}-2g\Delta iQ-4g\Delta iR\right\}\chi_C(0)=0 \tag{3-31}$$

となる。

また、(3-30a)−(3-30b)より、

$$-\frac{W(0)}{2\Delta}(1+8g\Delta iR)(\chi_A(0)+\chi_B(0))-\frac{2W(0)}{\Delta}(1+2g\Delta iQ+4g\Delta iR)\chi_C(0)=0 \qquad (3\text{-}32)$$

(3-30c)より、

$$(4g\Delta iR-\tfrac{1}{2}gy)(\chi_A(0)+\chi_B(0))+\frac{1}{2g\chi^2-2\Delta}(g\Delta iQ+2g\Delta iR-\tfrac{1}{2}gy)W(0)(\chi_A(0)-\chi_B(0))+$$

$$+(1+4g\Delta iQ+8g\Delta iR-gy)\chi_C(0)=0 \qquad (3\text{-}33)$$

となる。(3-31)(3-32)および(3-33)を同時に満足する、$\chi_A(0), \chi_B(0), \chi_C(0)$, $W(0)$の解は

$$\chi_A(0)+\chi_B(0)=0\ ,\quad \chi_C(0)=0\ ,\quad W(0)(\chi_A(0)-\chi_B(0))=0 \qquad (3\text{-}34)$$

である。ここで、(2-46)を考慮して $\chi_A(0)-\chi_B(0)\neq 0$ とすると $W(0)=0$ となり、位相場のエネルギースペクトルは $\vec{l}=0$ のとき、ギャップレスになることがわかる。$\chi_A(0)-\chi_B(0)\neq 0$ の条件は、(3-28)を使うと、$\langle 0(\beta)|\Sigma_p(\hat{C}_p\hat{C}_{-p}-\hat{C}^+_p\hat{C}^+_{-p})B^+_0(\beta)|0(\beta)\rangle\neq 0$ であり、$\Sigma_p(\hat{C}_p\hat{C}_{-p}-\hat{C}^+_p\hat{C}^+_{-p})$ が $\vec{l}=0$ の位相場に寄与していることをあらわしている。(2-39)から$(\hat{C}_0-\hat{C}^+_0)$も $\vec{l}=0$ の位相場に寄与することがわかるが、$\langle 0(\beta)|(\hat{C}_0-\hat{C}^+_0)B^+_0(\beta)|0(\beta)\rangle$ と$(\chi_A(0)-\chi_B(0))$の関係は(3-51)で示される。

次に(3-34)を使い、(3-26)の $\vec{l}$ に関する1次の方程式を導くと次のようになる。

(3-26a)+(3-26b)より、

$$(1+4g\Delta iQ)(\chi_A^{(1)}(\vec{l})+\chi_B^{(1)}(\vec{l}))-\left\{\frac{4(g\chi^2-\Delta)}{\Delta}-8g\Delta iQ-16g\Delta iR\right\}\chi_C^{(1)}(\vec{l})$$

$$=\frac{\omega^{(1)}(\vec{l})}{2g\chi^2-2\Delta}\left\{\frac{g\chi^2-\Delta}{\Delta}-2g\Delta iQ-4g\Delta iR\right\}(\chi_A(0)-\chi_B(0)) \tag{3-35}$$

(3-26c)より、

$$\left\{4g\Delta iR-\frac{g}{2}y(\vec{l},w(\vec{l}))\right\}(\chi_A^{(1)}(\vec{l})+\chi_B^{(1)}(\vec{l}))+\left\{1+4g\Delta iQ+8g\Delta iR-gy(\vec{l},w(\vec{l}))\right\}\chi_C^{(1)}(\vec{l})$$

$$=-\frac{\omega^{(1)}(\vec{l})}{2g\chi^2-2\Delta}\left\{g\Delta iQ+2g\Delta iR-\frac{g}{2}y(\vec{l},w(\vec{l}))\right\}(\chi_A(0)-\chi_B(0)) \tag{3-36}$$

上式から、$\chi_A^{(1)}(\vec{l})+\chi_B^{(1)}(\vec{l})$と$\chi_C^{(1)}(\vec{l})$を$\frac{\omega^{(1)}(\vec{l})}{2g\chi^2-2\Delta}(\chi_A(0)-\chi_B(0))$であらわすことができる。

次に、$\vec{l}$に関して2次の式を考える。(3-26)から次の関係式を導き出す。

$$[\{A(\vec{l};w(\vec{l}))-B(\vec{l};w(\vec{l}))\}-\{D(\vec{l};w(\vec{l}))-E(\vec{l};w(\vec{l}))\}](\chi_A(\vec{l})-\chi_B(\vec{l}))+$$

$$+[\{A(\vec{l};w(\vec{l}))-D(\vec{l};w(\vec{l}))\}+\{B(\vec{l};w(\vec{l}))-E(\vec{l};w(\vec{l}))\}](\chi_A(\vec{l})+\chi_B(\vec{l}))+$$

$$+2\{C(\vec{l};w(\vec{l}))-F(\vec{l};w(\vec{l}))\}\chi_C(\vec{l})=0 \tag{3-37}$$

ここで(III-4)より

$$\{A(\vec{l};w(\vec{l}))-D(\vec{l};w(\vec{l}))\}+\{B(\vec{l};w(\vec{l}))-E(\vec{l};w(\vec{l}))\}=-\frac{\omega^{(1)}(\vec{l})}{\Delta}(1+8g\Delta iR) \tag{3-38}$$

$$\{C(\vec{l};w(\vec{l}))-F(\vec{l};w(\vec{l}))\}=-2\frac{\omega^{(1)}(\vec{l})}{\Delta}(1+2g\Delta iQ+4g\Delta iR) \tag{3-39}$$

である。$\chi_A(\vec{l})-\chi_B(\vec{l})$の係数は正確に次のように分割される。

$$A(\vec{l};\omega(\vec{l})) - B(\vec{l};\omega(\vec{l})) - \left\{ D(\vec{l};\omega(\vec{l})) - E(\vec{l};\omega(\vec{l})) \right\} = \omega^2(\vec{l}) S(\vec{l};\omega(\vec{l})) - \overline{\omega}^2(\vec{l}) \tag{3-40}$$

ここで$S(\vec{l};\omega(\vec{l}))$および$\overline{\omega}^2(\vec{l})$は次のように与えられる。

$S(\vec{l};\omega(\vec{l}))$

$$= \frac{2}{\omega^2(\vec{l}) - E_{\vec{l}}^2} \left[1 - \frac{g}{2} \left\{ \frac{2}{V} \sum_{\vec{k}} \frac{1 - e^{-\beta(E_+ + E_-)}}{(1-e^{-\beta E_+})(1-e^{-\beta E_-})} \left(\frac{(E_+ + E_-)(-\omega^2(\vec{l}) + (U_+ - U_-)^2)}{4E_+E_-((E_+ + E_-)^2 - \omega^2(\vec{l}))} - \frac{E_+ + E_-}{4E_+E_-} \right) + \right.\right.$$

$$\left. + \frac{1}{V} \sum_{\vec{k}} \frac{e^{-\beta E_+} - e^{-\beta E_-}}{(1-e^{-\beta E_+})(1-e^{-\beta E_-})} \left(\frac{(E_+ - E_-)(U_+U_- - \Delta^2 - E_+E_-)}{E_+E_-(\omega^2(\vec{l}) - (E_+ - E_-)^2)} \right) \right\} +$$

$$+ g^2\chi^2 \left\{ \frac{1}{V} \sum_{\vec{k}} \frac{1 - e^{-\beta(E_+ + E_-)}}{(1-e^{-\beta E_+})(1-e^{-\beta E_-})} \left(\frac{U_+E_- + U_-E_+ - 2\Delta(E_+ + E_-)}{E_+E_-((E_+ + E_-)^2 - \omega^2(\vec{l}))} \right) + \right.$$

$$\left.\left. + \frac{1}{V} \sum_{\vec{k}} \frac{e^{-\beta E_+} - e^{-\beta E_-}}{(1-e^{-\beta E_+})(1-e^{-\beta E_-})} \left(\frac{U_-E_+ - E_-U_+ - 2\Delta(E_+ - E_-)}{E_+E_-(\omega^2(\vec{l}) - (E_+ - E_-)^2)} \right) \right\} \right]$$

$\overline{\omega}^2(\vec{l})$ (3-41)

$$= \frac{2}{\omega^2(\vec{l}) - E_{\vec{l}}^2} \left[\frac{l^4}{4m^2} + 2(2g\chi^2 - \Delta)\frac{l^2}{2m} + 2g\chi^2(2g\chi^2 - 2\Delta) - \left\{ \frac{g}{2}\cdot\frac{l^4}{4m^2} + g(g\chi^2 - \Delta)\frac{l^2}{2m} - 2\Delta g^2\chi^2 \right\} \times \right.$$

$$\times \left\{ \frac{2}{V} \sum_{\vec{k}} \frac{1 - e^{-\beta(E_+ + E_-)}}{(1-e^{-\beta E_+})(1-e^{-\beta E_-})} \left(\frac{(E_+ + E_-)(-\omega^2(\vec{l}) + (U_+ - U_-)^2)}{4E_+E_-((E_+ + E_-)^2 - \omega^2(\vec{l}))} - \frac{E_+ + E_-}{4E_+E_-} \right) + \right.$$

$$\left.\left. + \frac{1}{V} \sum_{\vec{k}} \frac{e^{-\beta E_+} - e^{-\beta E_-}}{(1-e^{-\beta E_+})(1-e^{-\beta E_-})} \left(\frac{(E_+ - E_-)(U_+U_- - \Delta^2 - E_+E_-)}{E_+E_-(\omega^2(\vec{l}) - (E_+ - E_-)^2)} \right) \right\} \right] \tag{3-42}$$

ここで、$E_+ = E_{\vec{k}+\frac{\vec{l}}{2}}$, $E_- = E_{\vec{k}-\frac{\vec{l}}{2}}$, $U_+ = U_{\vec{k}+\frac{\vec{l}}{2}}$, $U_- = U_{\vec{k}-\frac{\vec{l}}{2}}$である。

(2-20)から次の関係式を導き出し、

$$\frac{g\Delta}{V}\sum_{\vec{k}} \frac{1-e^{-\beta(E_++E_-)}}{(1-e^{-\beta E_+})(1-e^{-\beta E_-})} \frac{E_++E_-}{E_+E_-} = 4(g\chi^2-\Delta) \tag{3-43}$$

$\omega(\vec{l})$が$\vec{l}$に関して1次の量であることと(3-43)を使うと、$S(\vec{l};\omega(\vec{l}))$

の$\vec{l}$に関する第0次の項は、

$$S(\vec{l};\omega(\vec{l})) = \frac{(-1)}{\Delta(2g\chi^2-2\Delta)}\Big[1+\frac{g\Delta}{2V}\sum_{\vec{k}}\frac{U_{\vec{k}}-2\Delta}{E_{\vec{k}}^3}\coth\left(\frac{\beta E_{\vec{k}}}{2}\right)+$$

$$+\frac{g\Delta}{V}\sum_{\vec{k}}\frac{e^{-\beta E_+}-e^{-\beta E_-}}{(1-e^{-\beta E_+})(1-e^{-\beta E_-})}\frac{U_-E_+-E_-U_+-2\Delta(E_+-E_-)}{E_+E_-(\omega^2(\vec{l})-(E_+-E_-)^2)}-$$

$$-\frac{\Delta}{2\chi^2 V}\sum_{\vec{k}}\frac{e^{-\beta E_+}-e^{-\beta E_-}}{(1-e^{-\beta E_+})(1-e^{-\beta E_-})}\frac{(E_+-E_-)(U_+U_--\Delta^2-E_+E_-)}{E_+E_-(\omega^2(\vec{l})-(E_+-E_-)^2)}\Big] \tag{3-44}$$

となる。一方、$\overline{\omega^2(\vec{l})}$の$\vec{l}$に関する最低次の項は2次であり、

$$\overline{\omega^2(\vec{l})} = \frac{(-1)}{\Delta(2g\chi^2-2\Delta)}\Big[\frac{g\chi^2}{m}l^2+\frac{g\Delta^2}{2V}\sum_{\vec{k}}\frac{-\omega^2(\vec{l})+\left(\frac{\vec{k}\cdot\vec{l}}{m}\right)^2}{E_{\vec{k}}^3}\coth\left(\frac{\beta E_{\vec{k}}}{2}\right)+$$

$$+\frac{2g\Delta^2}{V}\sum_{\vec{k}}\frac{e^{-\beta E_+}-e^{-\beta E_-}}{(1-e^{-\beta E_+})(1-e^{-\beta E_-})}\frac{(E_+-E_-)(U_+U_--\Delta^2-E_+E_-)}{E_+E_-(\omega^2(\vec{l})-(E_+-E_-)^2)}\Big] \tag{3-45}$$

となる。(3-44)(3-45)を(3-40)へ代入すると

$$A(\vec{l};\omega(\vec{l}))-B(\vec{l};\omega(\vec{l}))-\{D(\vec{l};\omega(\vec{l}))-E(\vec{l};\omega(\vec{l}))\}$$

$$=\frac{(-1)}{\Delta(2g\chi^2-2\Delta)}\Big[\omega(\vec{l})^2\Big\{1+\frac{g\Delta}{2V}\sum_{\vec{k}}\frac{U_{\vec{k}}-\Delta}{E_{\vec{k}}^3}\coth\left(\frac{\beta E_{\vec{k}}}{2}\right)\Big\}-$$

$$-\Big\{\frac{g\chi^2}{m}l^2+\frac{g\Delta^2}{2V}\sum_{\vec{k}}\frac{\left(\frac{\vec{k}\cdot\vec{l}}{m}\right)^2}{E_{\vec{k}}^3}\coth\left(\frac{\beta E_{\vec{k}}}{2}\right)\Big\}\Big] \tag{3-46}$$

となる。ここで準粒子の散乱過程の寄与を無視した。以後、散乱過程の効果の寄与のうち、$y(\vec{l};\omega(\vec{l}))$の項は残し、他はすべて無視するという近似を行なう。以上の計算から、(3-37)は次のようになる。

$$
\begin{aligned}
&\left[\omega^{(1)}(\vec{l})^2\left\{1+2g\Delta iQ+4g\Delta iR\right\}-\left\{\frac{g\chi^2}{m}l^2+\frac{g\Delta^2}{2V}\Sigma_{\vec{k}}\frac{\left(\frac{\vec{k}\cdot\vec{l}}{m}\right)^2}{E_{\vec{k}}^3}\coth\left(\frac{\beta E_{\vec{k}}}{2}\right)\right\}\right](\chi_A(0)-\chi_B(0)) \\
&+\omega^{(1)}(\vec{l})(2g\chi^2-2\Delta)(1+8g\Delta iR)(\chi_A^{(1)}(\vec{l})+\chi_B^{(1)}(\vec{l}))+ \\
&+4\omega^{(1)}(\vec{l})(2g\chi^2-2\Delta)(1+2g\Delta iQ+4g\Delta iR)\chi_C^{(1)}(\vec{l})=0
\end{aligned}
\tag{3-47}
$$

(3-36)を考慮すると最終的に$\omega^{(1)}(\vec{l})$は

$$
\begin{aligned}
\omega^{(1)}(\vec{l})^2=&\frac{\omega^{(1)}(\vec{l})(\chi_A(0)-\chi_B(0))}{\omega^{(1)}(\vec{l})(\chi_A(0)-\chi_B(0))+(2g\chi^2-2\Delta)(\chi_A^{(1)}+\chi_B^{(1)}+2\chi_C^{(1)})} \\
&\times\left[\frac{g\chi^2}{m}l^2+\frac{g\Delta^2}{2V}\Sigma_{\vec{k}}\frac{\left(\frac{\vec{k}\cdot\vec{l}}{m}\right)^2}{E_{\vec{k}}^3}\coth\left(\frac{\beta E_{\vec{k}}}{2}\right)\right]-\omega^{(1)}(\vec{l})^2\,g\,y(\vec{l};\omega(\vec{l}))
\end{aligned}
\tag{3-48}
$$

となり、長波長極限での位相場のエネルギースペクトルは運動量$\vec{l}$に比例するギャップレスのスペクトルであることがわかる。この結果はT=0の場合、Coniglioらの結果と一致する。また、Takano[27]も同じ一般化されたペア近似でT=0の集団励起のエネルギースペクトルを求めており、その結果とも正確に一致することが示される。(付録II) われわれの計算は彼らの計算の有限温度への拡張になっている。(2-34)で現象論的に導入された位相場の速度v_0の微視的表現は次のように与えられる。

$$v_0^2 = \frac{\omega^{(1)}(\vec{\ell})(\chi_A(0) - \chi_D(0))}{\omega^{(1)}(\vec{\ell})(\chi_A(0) - \chi_B(0)) + (2g\chi^2 - 2\Delta)(\chi_A^{(1)} + \chi_B^{(1)} + 2\chi_C^{(1)})}$$

$$\times \frac{g}{m}\left[\chi^2 + \frac{1}{3V}\sum_{\vec{k}} \frac{\Delta^2}{E_{\vec{k}}^3} \frac{k^2}{2m} \coth\left(\frac{\beta E_{\vec{k}}}{2}\right)\right] - \frac{g}{m}\frac{1}{3V}\sum_{\vec{k}}\left(1 + \frac{\Delta^2}{E_{\vec{k}}^2}\right)\frac{\vec{k}^2}{m}\frac{df_{\vec{k}}}{dE_{\vec{k}}} \tag{3-49}$$

最後に、Bethe-Salpeter波動関数 $\langle 0(\beta)|(C_{\vec{\ell}} + C_{-\vec{\ell}}^{+})B_{\vec{\ell}}^{+}(\beta)|0(\beta)\rangle$ および $\langle 0(\beta)|(C_{\vec{\ell}} - C_{-\vec{\ell}}^{+})B_{\vec{\ell}}^{+}(\beta)|0(\beta)\rangle$ と $\chi_A(\vec{\ell}), \chi_B(\vec{\ell}), \chi_C(\vec{\ell})$ の関係を $\vec{\ell} \to 0$ の極限の場合に調べる。(3-35)と(3-36)から、小さい $\vec{\ell}$ に関して $\chi_A(\vec{\ell}) - \chi_B(\vec{\ell})$ は 0 次の量、$\chi_A(\vec{\ell}) + \chi_B(\vec{\ell})$, $\chi_C(\vec{\ell})$ は 1 次の量であることがわかる。さらに、(3-19)と(3-20)を使うと、

$$\langle 0(\beta)|(C_{\vec{\ell}} + C_{-\vec{\ell}}^{+})B_{\vec{\ell}}^{+}(\beta)|0(\beta)\rangle = \frac{1}{\sqrt{V}\chi}\frac{(-1)}{2(2g\chi^2 - 2\Delta)}\left[\omega^{(1)}(\vec{\ell})(\chi_A(0) - \chi_B(0)) + (2g\chi^2 - 2\Delta)(\chi_A^{(1)}(\vec{\ell}) + \chi_D^{(1)}(\vec{\ell}) - 2\chi_C^{(1)}(\vec{\ell}))\right] \tag{3-50}$$

$$\langle 0(\beta)|(C_{\vec{\ell}} - C_{-\vec{\ell}}^{+})B_{\vec{\ell}}^{+}(\beta)|0(\beta)\rangle = \frac{1}{\sqrt{V}\chi}\frac{(-g\chi^2)}{(2g\chi^2 - 2\Delta)}\left[\chi_A(0) - \chi_B(0)\right] \tag{3-51}$$

であるので、(3-50)は小さい $\vec{\ell}$ に関して 1 次、(3-51)は 0 次の量であることがわかる。この結果は、長波長域において素励起場展開(2-45)に対応した関係が成立していることを示している。

第三節　粒子数保存則

この節では、前節の近似計算（一般化されたペア近似）が、局所的な粒子数保存則を満足していることを示す。そのためには、粒子数密度 $\rho(\vec{r},t)$, 流束密度 $\vec{j}(\vec{r},t)$ を次のように定義したとき、

$$\rho(\vec{r},t) = \psi^{\dagger}(\vec{r},t)\psi(\vec{r},t) \tag{3-52}$$

$$\vec{j}(\vec{r},t) = -i\left\{ \psi^{\dagger}(\vec{r},t)\vec{\nabla}\psi(\vec{r},t) - \left(\vec{\nabla}\psi^{\dagger}(\vec{r},t)\right)\psi(\vec{r},t) \right\} \tag{3-53}$$

両密度の行列要素間に、次の関係

$$\frac{\partial}{\partial t}\langle 0(\beta)|\rho(\vec{r},t)\,B_{\vec{\ell}}^{\dagger}(\beta)|0(\beta)\rangle + \vec{\nabla}\cdot\langle 0(\beta)|\vec{j}(\vec{r},t)\,B_{\vec{\ell}}^{\dagger}(\beta)|0(\beta)\rangle = 0 \tag{3-54}$$

が成立することを示せばよい。最初に、(2-3)(2-22) を使い、$\rho(\vec{r},t)$を演算子 $a_{\vec{k}}(t)$, $a_{\vec{k}}^{\dagger}(t)$ で表現する。

$$\rho(\vec{r},t) = \chi^2 + \frac{\chi}{\sqrt{V}}\sum_{\vec{k}}\left\{ \left(u_{\vec{k}}a_{\vec{k}}(t) - v_{\vec{k}}a_{-\vec{k}}^{\dagger}(t)\right)e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} + \left(u_{\vec{k}}a_{\vec{k}}^{\dagger}(t) - v_{\vec{k}}a_{-\vec{k}}(t)\right)e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}} \right\} +$$

$$+\frac{1}{V}\sum_{\vec{p},\vec{q}}\left\{ u_{\vec{p}}v_{\vec{q}}a_{\vec{p}}^{\dagger}(t)a_{\vec{q}}(t) - u_{\vec{p}}v_{\vec{q}}a_{\vec{p}}^{\dagger}(t)a_{-\vec{q}}^{\dagger}(t) - v_{\vec{p}}u_{\vec{q}}a_{-\vec{p}}(t)a_{\vec{q}}(t) + v_{\vec{p}}v_{\vec{q}}a_{-\vec{p}}(t)a_{-\vec{q}}^{\dagger}(t) \right\} e^{-i\vec{p}\cdot\vec{r}+i\vec{q}\cdot\vec{r}} \tag{3-55}$$

行列要素 $\langle 0(\beta)|\rho(\vec{r},t)B_{\vec{\ell}}^{\dagger}(\beta)|0(\beta)\rangle$ は $\chi_1(\vec{\ell})$, $\chi_2(\vec{\ell})$, $\chi_c(\vec{\ell})$ を使って次のようにあらわされる。

$$\langle 0(\beta)|\rho(\vec{r},t)B_{\vec{\ell}}^{\dagger}(\beta)|0(\beta)\rangle = \left[\frac{\chi}{\sqrt{V}}(u_{\vec{\ell}} - v_{\vec{\ell}})\left(\chi_1(\vec{\ell}) + \chi_2(-\vec{\ell})\right) + \frac{1}{V}\chi_c(\vec{\ell}) \right] e^{i\vec{\ell}\cdot\vec{r} - i\omega(\vec{\ell})t} \tag{3-56}$$

(3-19)(3-20)を使うと、上式は$\chi_A(\vec{l}),\chi_B(\vec{l}),\chi_C(\vec{l})$のみで表わされる。

$$\langle 0(\beta)|\rho(\vec{r},t)B_{\vec{l}}^{+}(\beta)|0(\beta)\rangle$$

$$= \frac{g\chi^2}{V}\Big[\{(-iG^{(10)}(+))-(-i\hat{G}^{(10)})\}\chi_A(\vec{l})+\{(-iG^{(10)}(-))-(-i\hat{G}^{(10)})\}\chi_B(\vec{l})+$$

$$+2\{(-iG^{(10)}(+))+(-iG^{(10)}(-))-2(-i\hat{G}^{(10)})+\frac{1}{2g\chi^2}\}\chi_C(\vec{l})\Big]e^{i\vec{l}\cdot\vec{r}-i\omega(\vec{l})t} \tag{3-57}$$

ここで$G^{(10)}(+)$, $G^{(10)}(-)$, $\hat{G}^{(10)}$は(III-2)に定義されている。$\chi_i(\vec{l})$ $(i=A,B,C)$の$\vec{l}$に関する展開(3-29)を使うと、長波長極限$\vec{l}\to 0$での行列要素の値は次のようになる。

$$\langle 0(\beta)|\rho(\vec{r},t)B_{\vec{l}}^{+}(\beta)|0(\beta)\rangle$$

$$=\frac{1}{V}\frac{(-1)}{2(2g\chi^2-2\Delta)}\Big[\omega^{(1)}(\vec{l})(\chi_A(0)-\chi_B(0))+(2g\chi^2-2\Delta)(\chi_A^{(1)}(\vec{l})+\chi_B^{(1)}(\vec{l})+2\chi_C^{(1)}(\vec{l}))\Big]e^{i\vec{l}\cdot\vec{r}-i\omega(\vec{l})t} \tag{3-58}$$

同様に、$\vec{j}(\vec{r},t)$を演算子$a_{\vec{k}}$, $a_{\vec{k}}^{+}$で表現する。

$$\vec{j}(\vec{r},t)=\frac{\chi}{\sqrt{V}}\Sigma_{\vec{p}}\frac{\vec{p}}{2m}(u_{\vec{p}}a_{\vec{p}}(t)-v_{\vec{p}}a_{-\vec{p}}^{+}(t))e^{i\vec{p}\cdot\vec{r}}+\frac{\chi}{\sqrt{V}}\Sigma_{\vec{p}}\frac{\vec{p}}{2m}(u_{\vec{p}}a_{\vec{p}}^{+}(t)-v_{\vec{p}}a_{-\vec{p}}(t))e^{-i\vec{p}\cdot\vec{r}}+$$

$$+\frac{1}{V}\Sigma_{\vec{p},\vec{q}}\frac{(\vec{p}+\vec{q})}{2m}(u_{\vec{p}}u_{\vec{q}}a_{\vec{p}}^{+}(t)a_{\vec{q}}(t)-u_{\vec{p}}v_{\vec{q}}a_{\vec{p}}^{+}(t)a_{-\vec{q}}^{+}(t)-v_{\vec{p}}u_{\vec{q}}a_{-\vec{p}}(t)a_{\vec{q}}(t)+v_{\vec{p}}v_{\vec{q}}a_{-\vec{p}}(t)a_{-\vec{q}}^{+}(t))e^{-i\vec{p}\cdot\vec{r}+i\vec{q}\cdot\vec{r}} \tag{3-59}$$

$\chi_1(\vec{l})$, ---, $\chi_5(\vec{p},\vec{q})$を使うと、行列要素$\langle 0(\beta)|\vec{l}\cdot\vec{j}(\vec{r})B_{\vec{l}}^{+}(\beta)|0(\beta)\rangle$は

$$\langle 0(\beta)|\vec{l}\cdot\vec{j}(\vec{r},t)B_{\vec{l}}^{+}(\beta)|0(\beta)\rangle$$

$$=\frac{\chi}{\sqrt{V}}\frac{l^2}{2m}(u_{\vec{l}}+v_{\vec{l}})(\chi_1(\vec{l})-\chi_2(-\vec{l}))e^{i\vec{l}\cdot\vec{r}-i\omega(\vec{l})t}-\frac{1}{V}\Big[\Sigma_{\vec{k}}\frac{\vec{l}\cdot(\vec{l}-2\vec{k})}{2m}v_{\vec{k}}u_{\vec{l}-\vec{k}}\chi_3(\vec{k},\vec{l}-\vec{k})+$$

$$+\Sigma_{\vec{k}}\frac{\vec{l}\cdot(\vec{l}+2\vec{k})}{2m}u_{\vec{k}}v_{\vec{l}+\vec{k}}\chi_4(\vec{k},-\vec{l}-\vec{k})+\Sigma_{\vec{k}}\frac{\vec{l}\cdot(\vec{l}-2\vec{k})}{2m}(u_{\vec{k}-\vec{l}}u_{\vec{k}}-v_{\vec{k}}v_{\vec{k}-\vec{l}})\chi_5(\vec{k}-\vec{l},\vec{k})\Big]e^{i\vec{l}\cdot\vec{r}-i\omega(\vec{l})t} \tag{3-60}$$

となる。さらに(3-19), - - -, (3-23)を使うと、$\chi_A(\vec{l}), \chi_B(\vec{l}), \chi_C(\vec{l})$ のみで表現される。

$$\langle 0(\beta)|\vec{l}\cdot\vec{j}(\vec{r},t)B^{\dagger}_{\vec{l}}(\beta)|0(\beta)\rangle$$

$$= \frac{1}{V} g\frac{\chi^2 l^2}{2m}\Big[\{-iG^{(1)}(+)-(-i\hat{G}^{(0)})\}\chi_A(\vec{l})+\{-iG^{(0)}(-)-(-i\hat{G}^{(0)})\}\chi_B(\vec{l})+2\{G^{(1)}(\vec{l},\omega(\vec{l}))-G^{(1)}(\vec{l},-\omega(\vec{l}))\}\chi_C(\vec{l})\Big]e^{i\vec{l}\cdot\vec{r}-i\omega(\vec{l})t}$$

$$-\frac{1}{V}\Big[\sum_{\vec{k}}\frac{\vec{l}(\vec{l}-2\vec{k})}{2m}v_{\vec{k}}u_{\vec{l}-\vec{k}}\{u_{\vec{l}}G_{11}(\vec{k},\vec{l}-\vec{k})-v_{\vec{l}}G_{21}(\vec{k},\vec{l}-\vec{k})+u_{\vec{k}}u_{\vec{l}-\vec{k}}G_{31}(\vec{k},\vec{l}-\vec{k})\}+$$

$$+\sum_{\vec{k}}\frac{\vec{l}(\vec{l}+2\vec{k})}{2m}u_{\vec{k}}v_{\vec{l}+\vec{k}}\{-v_{\vec{l}}G_{12}(\vec{k},-\vec{l}-\vec{k})+u_{\vec{l}}G_{22}(\vec{k},-\vec{l}-\vec{k})+v_{\vec{k}}v_{\vec{l}-\vec{k}}G_{32}(\vec{k},-\vec{l}-\vec{k})\}+$$

$$+\sum_{\vec{k}}\frac{\vec{l}(\vec{l}-2\vec{k})}{2m}(u_{\vec{k}-\vec{l}}u_{\vec{k}}-v_{\vec{k}-\vec{l}}v_{\vec{k}})\{u_{\vec{l}}G_{13}(\vec{k}-\vec{l},\vec{k})-v_{\vec{l}}G_{23}(\vec{k}-\vec{l},\vec{k})+v_{\vec{k}-\vec{l}}u_{\vec{k}}G_{33}(\vec{k}-\vec{l},\vec{k})\}\Big]\chi_A(\vec{l})e^{i\vec{l}\cdot\vec{r}-i\omega(\vec{l})t}$$

$$-\frac{1}{V}\Big[\sum_{\vec{k}}\frac{\vec{l}(\vec{l}-2\vec{k})}{2m}v_{\vec{k}}u_{\vec{l}-\vec{k}}\{-v_{\vec{l}}G_{11}(\vec{k},\vec{l}-\vec{k})+u_{\vec{l}}G_{21}(\vec{k},\vec{l}-\vec{k})+v_{\vec{k}}v_{\vec{l}-\vec{k}}G_{31}(\vec{k},\vec{l}-\vec{k})\}+$$

$$+\sum_{\vec{k}}\frac{\vec{l}(\vec{l}+2\vec{k})}{2m}u_{\vec{k}}v_{\vec{l}+\vec{k}}\{u_{\vec{l}}G_{12}(\vec{k},-\vec{l}-\vec{k})-v_{\vec{l}}G_{22}(\vec{k},-\vec{l}-\vec{k})+u_{\vec{k}}u_{\vec{l}+\vec{k}}G_{32}(\vec{k},-\vec{l}-\vec{k})\}+$$

$$+\sum_{\vec{k}}\frac{\vec{l}(\vec{l}-2\vec{k})}{2m}(u_{\vec{k}-\vec{l}}u_{\vec{k}}-v_{\vec{k}-\vec{l}}v_{\vec{k}})\{-v_{\vec{l}}G_{13}(\vec{k}-\vec{l},\vec{k})+u_{\vec{l}}G_{23}(\vec{k}-\vec{l},\vec{k})+u_{\vec{k}-\vec{l}}v_{\vec{k}}G_{33}(\vec{k}-\vec{l},\vec{k})\}\Big]\chi_B(\vec{l})e^{i\vec{l}\cdot\vec{r}-i\omega(\vec{l})t}$$

$$-\frac{1}{V}\Big[\sum_{\vec{k}}\frac{\vec{l}(\vec{l}-2\vec{k})}{2m}v_{\vec{k}}u_{\vec{l}-\vec{k}}\{2(u_{\vec{l}}-v_{\vec{l}})G_{11}(\vec{k},\vec{l}-\vec{k})+2(u_{\vec{l}}-v_{\vec{l}})G_{21}(\vec{k},\vec{l}-\vec{k})-2(u_{\vec{k}}v_{\vec{l}-\vec{k}}+v_{\vec{k}}u_{\vec{l}-\vec{k}})G_{31}(\vec{k},\vec{l}-\vec{k})\}+$$

$$+\sum_{\vec{k}}\frac{\vec{l}(\vec{l}+2\vec{k})}{2m}u_{\vec{k}}v_{\vec{l}+\vec{k}}\{2(u_{\vec{l}}-v_{\vec{l}})G_{12}(\vec{k},-\vec{l}-\vec{k})+2(u_{\vec{l}}-v_{\vec{l}})G_{22}(\vec{k},-\vec{l}-\vec{k})-2(u_{\vec{k}}v_{\vec{l}+\vec{k}}+v_{\vec{k}}u_{\vec{l}+\vec{k}})G_{32}(\vec{k},-\vec{l}-\vec{k})\}+$$

$$+\sum_{\vec{k}}\frac{\vec{l}(\vec{l}-2\vec{k})}{2m}(u_{\vec{k}-\vec{l}}u_{\vec{k}}-v_{\vec{k}-\vec{l}}v_{\vec{k}})\{2(u_{\vec{l}}-v_{\vec{l}})G_{13}(\vec{k}-\vec{l},\vec{k})+2(u_{\vec{l}}-v_{\vec{l}})G_{23}(\vec{k}-\vec{l},\vec{k})-$$

$$-2(u_{\vec{k}-\vec{l}}u_{\vec{k}}+v_{\vec{k}-\vec{l}}v_{\vec{k}})G_{33}(\vec{k}-\vec{l},\vec{k})\}\Big]\chi_C(\vec{l})e^{i\vec{l}\cdot\vec{r}-i\omega(\vec{l})t} \tag{3-61}$$

ここで $G_{ij}(\vec{p},\vec{q})$ ($i,j=1,2,3$) は既に(3-24)で与えられている。$\chi_A(\vec{l})$, $\chi_B(\vec{l})$, $\chi_C(\vec{l})$ を(3-29)のように展開し、長波長極限を考えると、

$$\langle 0(\beta)|\,\vec{l}\cdot\vec{j}(\vec{r},t)\,B_{\vec{l}}^{\dagger}(\beta)\,|0(\beta)\rangle$$

$$= \frac{(-1)}{2(2g\chi^2-2\Delta)}\Big[\Big\{\frac{g\chi^2}{m}l^2+\frac{g\Delta^2}{2V}\sum_{\vec{k}}\frac{\left(\frac{\vec{k}\cdot\vec{l}}{m}\right)^2}{E_{\vec{k}}^3}\coth\left(\frac{\beta E_{\vec{k}}}{2}\right)\Big\}(\chi_A(0)-\chi_B(0))-$$

$$-\omega^{(1)}(\vec{l})\,g\,y(\vec{l},\omega(\vec{l}))\Big\{\omega^{(1)}(\vec{l})(\chi_A(0)+\chi_B(0))+(2g\chi^2-2\Delta)(\chi_A^{(1)}+\chi_B^{(1)}+2\chi_C^{(1)})\Big\}\Big]\,e^{i\vec{l}\cdot\vec{r}-i\omega(\vec{l})t} \tag{3-62}$$

となる。ここで $\omega^{(1)}(\vec{l})$ に関する表式 (3-48) を使うと、

行列要素間には

$$\omega^{(1)}(\vec{l})\langle 0(\beta)|\,\rho(\vec{r},t)\,B_{\vec{l}}^{\dagger}(\beta)|0(\beta)\rangle-\langle 0(\beta)|\,\vec{l}\cdot\vec{j}(\vec{r},t)\,B_{\vec{l}}^{\dagger}(\beta)|0(\beta)\rangle=0 \tag{3-63}$$

の関係があることがわかる。このように $\omega^{(1)}(\vec{l})$ を求めた一般化されたペア近似は、長波長極限において、粒子数保存則を満足していることが確かめられた。

第四章　回転容器中のボーズ粒子系の応答

この章では、二体の粒子間相互作用をおこなっている凝縮体を有するボーズ粒子系の流束密度の応答関数を計算することによって、応答関数に対する位相場の寄与および超流体密度，正常流体密度の微視的表現をもとめることにする。

最初に、流束密度の応答関数の定義およびその物理的意味を述べる。超流動現象の特徴は、全流体中に粘性をもたない超流体成分が存在することにあるので、角速度 ω で中心軸のまわりに回転している円筒容器中のボーズ粒子系を考えると、容器といっしょに回転するのは、流体中の正常流体部分だけである。そこで容器といっしょに回転している座標系で、系の応答的性質を考えてみる。新しい座標系でのハミルトニアンは、次のようになる。

$$H' = H - m\int \vec{j}(\vec{r})\cdot\vec{A}(\vec{r})\,d\vec{r} \tag{4-1}$$

ここで $\vec{A}(\vec{r})$ はドリフト速度（$\vec{\omega}\times\vec{r}$）であり、流束密度 $\vec{j}(\vec{r})$ は

$$\vec{j}(\vec{r}) = \frac{(-i)}{m}\left[\psi^{+}(\vec{r})\vec{\nabla}\psi(\vec{r}) - (\vec{\nabla}\psi^{+}(\vec{r}))\psi(\vec{r})\right] \tag{4-2}$$

である。回転している座標系での全流束密度 $\vec{j}^{tot}$ は

$$\vec{j}^{tot}(\vec{r}) = \vec{j}(\vec{r}) - N\vec{A}(\vec{r}) \tag{4-3}$$

となる。ここで $\vec{j}(\vec{r})$ は静止座標系での流束密度に対応し、$(-N\vec{A}(\vec{r}))$ は、ボーズ粒子系が静止座標系で回転運動をおこしていない時に対応するドリフト流である。Nは全粒子数である。回転が充分ゆっくりしている時は、ハミルトニアン(4-1)の追加項は摂動項とみなされる。ここでは、摂動項として次のフーリエ成分を考えることにする。

$$H_I = -m\,\vec{j}_{-\vec{k}}\vec{A}_{\vec{k}}\,e^{-i\omega t} + c.c. \qquad (4\text{-}4)$$

$\vec{j}_{\vec{k}}$ は(4-2)で与えられる $\vec{j}(\vec{r})$ のフーリエ成分

$$\vec{j}(\vec{r}) = \frac{1}{\sqrt{V}}\sum_{\vec{k}}\vec{j}_{\vec{k}}\,e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} \qquad (4\text{-}5)$$

であり、演算子 $C^+_{\vec{q}}$, $C_{\vec{q}}$ によって次のように表現される。

$$\vec{j}_{\vec{k}} = \frac{1}{\sqrt{V}}\sum_{\vec{q}}\frac{\vec{q}}{m}\,C^+_{\vec{q}-\frac{\vec{k}}{2}}\,C_{\vec{q}+\frac{\vec{k}}{2}} \qquad (4\text{-}6)$$

ベクトル $\vec{j}_{\vec{k}}$ の i 成分 $(i=x,y,z)$ を $j_{\vec{k}i}$ とすると、摂動(4-4)によって生じた流束密度のゆらぎ $\langle j_{\vec{k}}\rangle$ は、回転が充分ゆっくりしている場合、

$$\langle j_{\vec{k}i}\rangle_\omega = -m\sum_j F_{ij}(\vec{k},\omega)\,A_{\vec{k}j} \qquad (4\text{-}7)$$

となる。$F_{ij}(\vec{k},\omega)$ は次に定義された $F_{ij}(\vec{k},t-t')$ のフーリエ成分である。

$$iF_{ij}(\vec{k},t-t') = \theta(t-t')\langle 0(\beta)|[\,j_{\vec{k}i}(t),\ j_{-\vec{k}j}(t')\,]|0(\beta)\rangle \qquad (4\text{-}8)$$

以上の結果から、(4-3)に与えられた全流束は次のようになる。

$$\langle j^{tot}_{ki} \rangle_\omega = -m \Sigma_j K_{ij}(\vec{k},\omega) A_{kj} \tag{4-9}$$

ただし、$K_{ij}(\vec{k},\omega) = F_{ij}(\vec{k},\omega) + \frac{n}{m}\delta_{ij}$ である。有限温度における系の超流動性は、$\omega = 0$ の極限に対応する静的回転の場合の応答

$$\lim_{\vec{k}\to 0} K_{ij}(\vec{k},0) = \frac{n_s}{m}\left(\delta_{ij} - \frac{k_i k_j}{k^2}\right) \tag{4-10}$$

つまり、

$$\lim_{\vec{k}\to 0} F_{ij}(\vec{k},0) = -\frac{n_n}{m}\delta_{ij} - \frac{n_s}{m}\frac{k_i k_j}{k^2} \tag{4-11}$$

によって、特徴づけられることはよく知られている。ここで n_s は超流体密度、n_n は正常流体密度であり、次の関係を満足している。

$$n_s + n_n = n \tag{4-12}$$

次に $(\vec{k},\omega)$ は小さいが、零でないような極限 $(\vec{k},\omega)\to 0$ の場合の応答関数 $F_{ij}(\vec{k},\omega)$ を考える。Gavoret と Nozieres[18] は絶対零度の場合、微視的な厳密な計算を行なうことにより、

$$\lim_{(\vec{k},\omega)\to 0} F_{ij}(\vec{k},\omega) = \frac{nc^2 \cdot \frac{k_i k_j}{m}}{\omega^2 - c^2k^2 + i\delta} \tag{4-13}$$

なる結果を導いた。ここで n は粒子数密度、m は原子の質量、c は巨視的な音速である。Hohenberg と Martin[10] は有限温度の場

合、$F_{ij}(\vec{k},\omega)$は次のように表現されることを現象論的かつ微視的に示した。

$$F_{ij}(\vec{k},\omega) = -\frac{1}{m^2}\left[\rho_n^{ij}(\vec{k},\omega) + \rho_s^{il}(\vec{k},\omega)F_{v_{sl}v_{sm}}(\vec{k},\omega)\rho_s^{mj}(\vec{k},\omega)\right] \qquad (4\text{-}14)$$

ここで関数$\rho_n(\vec{k},\omega)$と$\rho_s(\vec{k},\omega)$は次の性質を持つ。

$$\lim_{\vec{k}\to 0}\lim_{\omega\to 0}\rho_n^{ij}(\vec{k},\omega) = \rho_n\delta_{ij}\ , \quad \lim_{\vec{k}\to 0}\lim_{\omega\to 0}\rho_s^{ij}(\vec{k},\omega) = \rho_s\delta_{ij} \qquad (4\text{-}15)$$

ただし，$\rho_n = mn_n$，$\rho_s = mn_s$である。$F_{\vec{v}_s,\vec{v}_s}(\vec{k},\omega)$は次の性質をもつ，$\vec{v}_s$に対する応答関数である。

$$\lim_{\vec{k}\to 0}F_{v_{sl}v_{sm}}(\vec{k},0) = \frac{k_l k_m}{k^2}\frac{1}{\rho_s} \qquad (4\text{-}16)$$

(4-14)は流れの応答が、右辺の第二項に示される単一の素励起の寄与と第一項の多くの素励起の寄与に定性的に区別されることを意味している。ここでは、流れの応答に対する位相場の寄与を明らかにするため、流束密度に関するGreen関数を、前章と同じ一般化されたペア近似で計算する。

$$\langle 0(P)|T[j_{\vec{k}i}(t)\,j_{-\vec{k}j}(t')]|0(P)\rangle = \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{d\omega}{2\pi}e^{-i\omega(t-t')}\,iF_{ij}(\vec{k},\omega) \qquad (4\text{-}17)$$

ここで$j_{\vec{k}i}$は(4-6)で定義されている流束密度のゆらぎの演算子のi成分である。ただし$i = x, y, z$である。正準変換(2-8)を使い、$j_{\vec{k}}$を個別励起演算子$\alpha_{\vec{k}}$, $\alpha_{\vec{k}}^{\dagger}$で表現すると、$F_{ij}(\vec{k},\omega)$は次のようになる。

$$F_{ij}(\vec{l}, \omega) = \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_{\vec{k}} \frac{k_i}{m} \left(u_{\vec{k}-\frac{\vec{l}}{2}} u_{\vec{k}+\frac{\vec{l}}{2}} - v_{\vec{k}-\frac{\vec{l}}{2}} v_{\vec{k}+\frac{\vec{l}}{2}} \right) F_5(\vec{k}-\tfrac{\vec{l}}{2}, \vec{k}+\tfrac{\vec{l}}{2}; \omega) -$$

$$- \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_{\vec{k}} \frac{k_i}{m} u_{\vec{k}-\frac{\vec{l}}{2}} v_{\vec{k}+\frac{\vec{l}}{2}} F_4(\vec{k}-\tfrac{\vec{l}}{2}, -\vec{k}-\tfrac{\vec{l}}{2}; \omega) -$$

$$- \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_{\vec{k}} \frac{k_i}{m} u_{\vec{k}+\frac{\vec{l}}{2}} v_{\vec{k}-\frac{\vec{l}}{2}} F_3(-\vec{k}+\tfrac{\vec{l}}{2}, \vec{k}+\tfrac{\vec{l}}{2}; \omega) +$$

$$+ \chi \frac{l_i}{2m} (u_{\vec{l}} + v_{\vec{l}}) \left\{ F_1(\vec{l}; \omega) - F_2(-\vec{l}; \omega) \right\} \qquad (4\text{-}18)$$

ここで k_i は $\vec{k}$ の i 成分 $(i = x, y, z)$ であり、$F_1(\vec{l}; \omega), ---, F_5(\vec{p}, \vec{q}; \omega)$ は次のように定義されている。

$$\langle 0(\beta) | T[a_{\vec{l}}(t) j_{-\vec{l}j}(t')] | 0(\beta) \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\omega}{2\pi} e^{-i\omega(t-t')} i F_1(\vec{l}; \omega)$$

$$\langle 0(\beta) | T[a^{+}_{-\vec{l}}(t) j_{-\vec{l}j}(t')] | 0(\beta) \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\omega}{2\pi} e^{-i\omega(t-t')} i F_2(-\vec{l}; \omega)$$

$$\langle 0(\beta) | T[a_{-\vec{k}+\frac{\vec{l}}{2}}(t) a_{\vec{k}+\frac{\vec{l}}{2}}(t) j_{-\vec{l}j}(t')] | 0(\beta) \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\omega}{2\pi} e^{-i\omega(t-t')} i F_3(-\vec{k}+\tfrac{\vec{l}}{2}, \vec{k}+\tfrac{\vec{l}}{2}; \omega)$$

$$\langle 0(\beta) | T[a^{+}_{\vec{k}-\frac{\vec{l}}{2}}(t) a^{+}_{-\vec{k}-\frac{\vec{l}}{2}}(t) j_{-\vec{l}j}(t')] | 0(\beta) \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\omega}{2\pi} e^{-i\omega(t-t')} i F_4(\vec{k}-\tfrac{\vec{l}}{2}, -\vec{k}-\tfrac{\vec{l}}{2}; \omega)$$

$$\langle 0(\beta) | T[a^{+}_{\vec{k}-\frac{\vec{l}}{2}}(t) a_{\vec{k}+\frac{\vec{l}}{2}}(t) j_{-\vec{l}j}(t')] | 0(\beta) \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\omega}{2\pi} e^{-i\omega(t-t')} i F_5(\vec{k}-\tfrac{\vec{l}}{2}, \vec{k}+\tfrac{\vec{l}}{2}; \omega)$$

(4-19)

前章で $\chi_1(\vec{l}; t)$, $\chi_3(\vec{p}, \vec{q}; t_1, t_2)$ に対する Bethe-Salpeter 方程式を得たと同様な方法によって、(4-19)の Green 関数に対する方程式が得られる。ここでは $F_1(\vec{l}; t)$ および $F_3(\vec{p}, \vec{q}; t_1, t_2, t')$ に対してのみ、その方程式を示す。

$$\left(i\frac{\partial}{\partial t}-E_{\vec{l}}\right)\langle 0(\beta)|T[a_{\vec{l}}(t)\,j_{-\vec{l}j}(t')]|0(\beta)\rangle$$

$$=i\delta(t-t')\ \chi\ \frac{l_j}{2m}(u_{\vec{l}}+v_{\vec{l}})+\langle 0(\beta)|T[(J_{\vec{l}}(t)-\bar{J}_{\vec{l}}(t))\,j_{-\vec{l}j}(t')]|0(\beta)\rangle \tag{4-20}$$

$$\left(i\frac{\partial}{\partial t_2}-E_{\vec{q}}\right)\left(i\frac{\partial}{\partial t_1}-E_{\vec{p}}\right)\langle 0(\beta)|T[a_{\vec{p}}(t_1)\,a_{\vec{q}}(t_2)\,j_{-\vec{l}j}(t')]|0(\beta)\rangle$$

$$=i\delta(t_1-t_2)\,i\delta(t_2-t')\left\{-\frac{1}{m}\left(p_j-\frac{1}{2}l_j\right)\right\}(u_{\vec{p}}v_{\vec{p}-\vec{l}}-u_{\vec{p}-\vec{l}}v_{\vec{p}})\frac{1}{\sqrt{V}}\delta_{\vec{p}+\vec{q},\vec{l}}-$$

$$-i\delta(t_1-t_2)\langle 0(\beta)|T[[(J_{\vec{p}}(t_1)-\bar{J}_{\vec{p}}(t_1)),a_{\vec{q}}(t_2)]\,J_{-\vec{l}j}(t')]|0(\beta)\rangle \tag{4-21}$$

$F_2(\vec{l};t)$, $F_4(\vec{p},\vec{q};t_1,t_2,t')$ および $F_5(\vec{p},\vec{q};t_1,t_2,t')$に対しても、同様な方程式を導くことができる。これらの方程式から、一般化されたペア近似で、$F_1(\vec{l};\omega)$, $F_2(\vec{l};\omega)$を求めると

$$F_1(\vec{l};\omega)=G^{(0)}(\vec{l},\omega)\Big[\ \chi\frac{l_j}{2m}(u_{\vec{l}}+v_{\vec{l}})+\frac{g\chi}{V^{1/2}}\{u_{\vec{l}}F_A(\vec{l};\omega)-v_{\vec{l}}F_B(\vec{l};\omega)+$$

$$+2(u_{\vec{l}}-v_{\vec{l}})F_C(\vec{l};\omega)\}\Big] \tag{4-22}$$

$$F_2(\vec{l};\omega)=G^{(0)}(\vec{l};\omega)\Big[\ \chi\frac{l_j}{2m}(u_{\vec{l}}+v_{\vec{l}})+\frac{g\chi}{V^{1/2}}\{-v_{\vec{l}}F_A(\vec{l};\omega)+u_{\vec{l}}F_B(\vec{l},\omega)+$$

$$+2(u_{\vec{l}}-v_{\vec{l}})F_C(\vec{l};\omega)\}\Big] \tag{4-23}$$

となる。$F_3(-\vec{k}+\frac{\vec{l}}{2},\vec{k}+\frac{\vec{l}}{2};\omega)$, $F_4(\vec{k}-\frac{\vec{l}}{2},-\vec{k}-\frac{\vec{l}}{2};\omega)$ および $F_5(\vec{k}-\frac{\vec{l}}{2},\vec{k}+\frac{\vec{l}}{2};\omega)$に対する一般化されたペア近似で求めた同様な方程式は、$F_1(\vec{l};\omega)$, $F_2(\vec{l},\omega)$を含むので(4-22)(4-23)を代入すれば、最終的に次のよう

になる。

$$F_3\left(-\vec{k}+\frac{\vec{l}}{2},\ \vec{k}+\frac{\vec{l}}{2};\ \omega\right)$$

$$= Q_1\left(-\vec{k}+\frac{\vec{l}}{2},\vec{k}+\frac{\vec{l}}{2};\omega\right)\Big[\frac{k_i}{m}(U_-V_+-U_+V_-)+g\chi^2\frac{l_i}{m}\Big\{(U_-V_++U_+V_-)(-G^{(0)}(l,\omega)+G^{(0)}(l,-\omega))+$$

$$+U_+U_-(-iG^{(0)}(+)+i\hat{G}^{(0)})-V_+V_-(i\hat{G}^{(0)}-iG^{(0)}(-))\Big\}\Big]\frac{1}{\sqrt{V}}\left(\frac{1}{i}\right)+$$

$$+\Big[U_l^2 G_{11}\left(-\vec{k}+\frac{\vec{l}}{2},\vec{k}+\frac{\vec{l}}{2}\right)-V_l^2 G_{21}\left(-\vec{k}+\frac{\vec{l}}{2},\vec{k}+\frac{\vec{l}}{2}\right)+U_-U_+G_{31}\left(-\vec{k}+\frac{\vec{l}}{2},\vec{k}+\frac{\vec{l}}{2}\right)\Big]F_A(\vec{l};\omega)+$$

$$+\Big[-V_l^2 G_{11}\left(-\vec{k}+\frac{\vec{l}}{2},\vec{k}+\frac{\vec{l}}{2}\right)+U_l^2 G_{21}\left(-\vec{k}+\frac{\vec{l}}{2},\vec{k}+\frac{\vec{l}}{2}\right)+V_-V_+G_{31}\left(-\vec{k}+\frac{\vec{l}}{2},\vec{k}+\frac{\vec{l}}{2}\right)\Big]F_B(\vec{l};\omega)+$$

$$+\Big[2(U_l-V_l)G_{11}\left(-\vec{k}+\frac{\vec{l}}{2},\vec{k}+\frac{\vec{l}}{2}\right)+2(U_l-V_l)G_{21}\left(-\vec{k}+\frac{\vec{l}}{2},\vec{k}+\frac{\vec{l}}{2}\right)-$$

$$-2(U_-V_++V_-U_+)G_{31}\left(-\vec{k}+\frac{\vec{l}}{2},\vec{k}+\frac{\vec{l}}{2}\right)\Big]F_C(\vec{l};\omega) \qquad (4\text{-}24)$$

$$F_4\left(\vec{k}-\frac{\vec{l}}{2},\ -\vec{k}-\frac{\vec{l}}{2};\ \omega\right)$$

$$= Q_2\left(\vec{k}-\frac{\vec{l}}{2},-\vec{k}-\frac{\vec{l}}{2};\omega\right)\Big[\frac{k_i}{m}(U_+V_--U_-V_+)+g\chi^2\frac{l_i}{m}\Big\{(U_-V_++U_+V_-)(G^{(0)}(\vec{l},-\omega)-G^{(0)}(\vec{l};\omega))-$$

$$-U_+U_-(-iG^{(0)}(-)+i\hat{G}^{(0)})+V_+V_-(-iG^{(0)}(+)+i\hat{G}^{(0)})\Big\}\Big]\frac{1}{\sqrt{V}}\left(\frac{1}{i}\right)+$$

$$+\Big[-V_l^2 G_{12}\left(\vec{k}-\frac{\vec{l}}{2},-\vec{k}-\frac{\vec{l}}{2}\right)+U_l^2 G_{22}\left(\vec{k}-\frac{\vec{l}}{2},-\vec{k}-\frac{\vec{l}}{2}\right)+V_-V_+G_{32}\left(\vec{k}-\frac{\vec{l}}{2},-\vec{k}-\frac{\vec{l}}{2}\right)\Big]F_A(\vec{l};\omega)+$$

$$+\Big[U_l^2 G_{12}\left(\vec{k}-\frac{\vec{l}}{2},-\vec{k}-\frac{\vec{l}}{2}\right)-V_l^2 G_{22}\left(\vec{k}-\frac{\vec{l}}{2},-\vec{k}-\frac{\vec{l}}{2}\right)+U_-U_+G_{32}\left(\vec{k}-\frac{\vec{l}}{2},-\vec{k}-\frac{\vec{l}}{2}\right)\Big]F_B(\vec{l};\omega)+$$

$$+\Big[2(U_l-V_l)G_{12}\left(\vec{k}-\frac{\vec{l}}{2},-\vec{k}-\frac{\vec{l}}{2}\right)+2(U_l-V_l)G_{22}\left(\vec{k}-\frac{\vec{l}}{2},-\vec{k}-\frac{\vec{l}}{2}\right)-$$

$$-2(U_-V_++V_-U_+)G_{32}\left(\vec{k}-\frac{\vec{l}}{2},\vec{k}+\frac{\vec{l}}{2}\right)\Big]F_C(\vec{l};\omega) \qquad (4\text{-}25)$$

$$F_5(\vec{k}-\tfrac{\vec{l}}{2},\vec{k}+\tfrac{\vec{l}}{2};\omega)$$

$$= Q_3(\vec{k}-\tfrac{\vec{l}}{2},\vec{k}+\tfrac{\vec{l}}{2};\omega)\Big[\frac{k_i}{m}(u_-u_+-v_-v_+)+g\chi^2\frac{l_i}{m}\Big\{(u_-u_++v_-v_+)(G^{(0)}(\vec{l},\omega)-G^{(0)}(\vec{l},-\omega))+$$

$$+u_-v_+(-iG^{(0)}(-)+i\hat{G}^{(0)})-u_+v_-(-iG^{(0)}(+)+i\hat{G}^{(0)})\Big\}\Big]\frac{1}{\sqrt{V}}\left(\frac{1}{i}\right)+$$

$$+\Big[u_{\vec{l}}G_{13}(\vec{k}-\tfrac{\vec{l}}{2},\vec{k}+\tfrac{\vec{l}}{2})-v_{\vec{l}}G_{23}(\vec{k}-\tfrac{\vec{l}}{2},\vec{k}+\tfrac{\vec{l}}{2})+v_-u_+G_{33}(\vec{k}-\tfrac{\vec{l}}{2},\vec{k}+\tfrac{\vec{l}}{2})\Big]F_A(\vec{l};\omega)+$$

$$+\Big[-v_{\vec{l}}G_{13}(\vec{k}-\tfrac{\vec{l}}{2},\vec{k}+\tfrac{\vec{l}}{2})+u_{\vec{l}}G_{23}(\vec{k}-\tfrac{\vec{l}}{2},\vec{k}+\tfrac{\vec{l}}{2})+u_-v_+G_{33}(\vec{k}-\tfrac{\vec{l}}{2},\vec{k}+\tfrac{\vec{l}}{2})\Big]F_B(\vec{l};\omega)+$$

$$+\Big[2(u_{\vec{l}}-v_{\vec{l}})G_{13}(\vec{k}-\tfrac{\vec{l}}{2},\vec{k}+\tfrac{\vec{l}}{2})+2(u_{\vec{l}}-v_{\vec{l}})G_{23}(\vec{k}-\tfrac{\vec{l}}{2},\vec{k}+\tfrac{\vec{l}}{2})-$$

$$-2(u_{\vec{k}-\frac{\vec{l}}{2}}u_{\vec{k}+\frac{\vec{l}}{2}}+v_{\vec{k}-\frac{\vec{l}}{2}}v_{\vec{k}+\frac{\vec{l}}{2}})G_{33}(\vec{k}-\tfrac{\vec{l}}{2},\vec{k}+\tfrac{\vec{l}}{2})\Big]F_C(\vec{l};\omega) \qquad (4\text{-}26)$$

ここで、$u_+=u_{\vec{k}+\frac{\vec{l}}{2}}$, $u_-=u_{\vec{k}-\frac{\vec{l}}{2}}$, $v_+=v_{\vec{k}+\frac{\vec{l}}{2}}$, $v_-=v_{\vec{k}-\frac{\vec{l}}{2}}$である。さらに、$F_A(\vec{l};\omega)$, $F_B(\vec{l};\omega)$, $F_C(\vec{l};\omega)$は次のように定義された関数である。

$$F_A(\vec{l};\omega)=\sum_{\vec{k}}\{u_{\vec{k}}u_{\vec{k}-\vec{l}}F_3(\vec{k},\vec{l}-\vec{k};\omega)+v_{\vec{k}}v_{\vec{k}+\vec{l}}F_4(\vec{k},-\vec{l}-\vec{k};\omega)-2v_{\vec{k}-\vec{l}}u_{\vec{k}}F_5(\vec{k}-\vec{l},\vec{k};\omega)\}$$

$$F_B(\vec{l};\omega)=\sum_{\vec{k}}\{v_{\vec{k}}v_{\vec{l}-\vec{k}}F_3(\vec{k},\vec{l}-\vec{k};\omega)+u_{\vec{k}}u_{\vec{l}+\vec{k}}F_4(\vec{k},-\vec{l}-\vec{k};\omega)-2u_{\vec{k}-\vec{l}}v_{\vec{k}}F_5(\vec{k}-\vec{l},\vec{k};\omega)\}$$

$$F_C(\vec{l};\omega)=\sum_{\vec{k}}\{-u_{\vec{k}}v_{\vec{l}-\vec{k}}F_3(\vec{k},\vec{l}-\vec{k};\omega)-u_{\vec{k}}v_{\vec{l}+\vec{k}}F_4(\vec{k},-\vec{l}-\vec{k};\omega)+$$

$$+(u_{\vec{k}-\vec{l}}u_{\vec{k}}+v_{\vec{k}-\vec{l}}v_{\vec{k}})F_5(\vec{k}-\vec{l},\vec{k};\omega)\} \qquad (4\text{-}27)$$

以上の関係を直観的に理解するために、(4-18)(4-22)(4-23)(4-24)(4-25)(4-26)のダイヤグラムを示すと次のようになる。

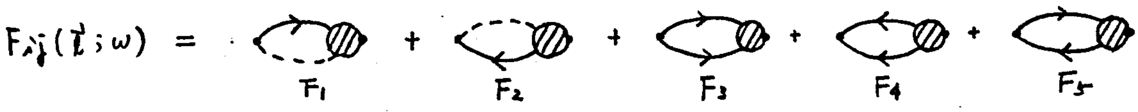


Fig. 2 (a)　$F_{ij}(\vec{q};\omega)$ のダイヤグラム表現

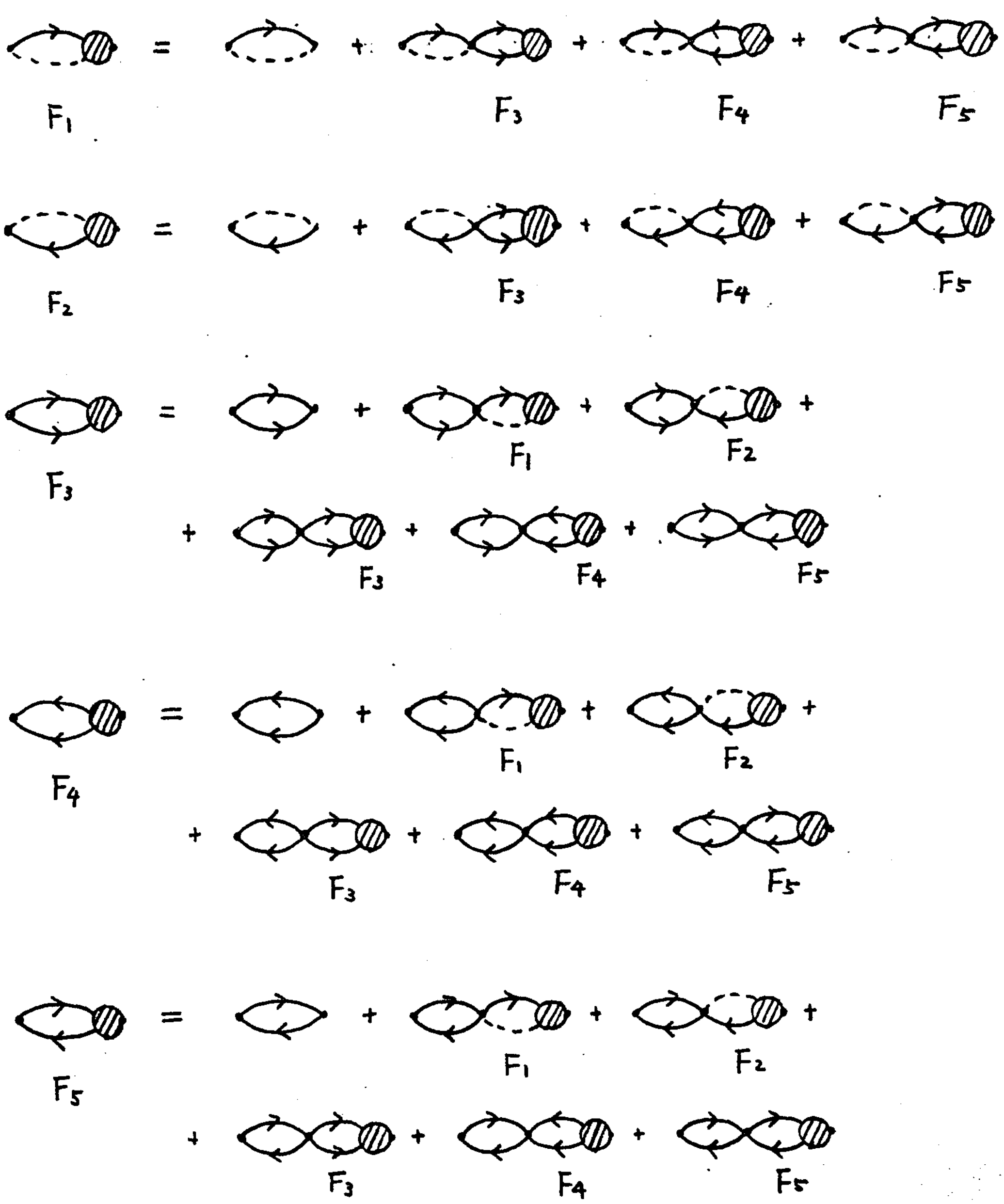


Fig. 2 (b)　$F_1(\vec{q};\omega)$, $F_2(\vec{q};\omega)$, $F_3(-\vec{k}+\frac{\vec{q}}{2}, \vec{k}+\frac{\vec{q}}{2};\omega)$, $F_4(\vec{k}-\frac{\vec{q}}{2}, -\vec{k}-\frac{\vec{q}}{2})$,
$F_5(\vec{k}-\frac{\vec{q}}{2}, \vec{k}+\frac{\vec{q}}{2};\omega)$ のダイヤグラム表現

(4-22), ・・・, (4-26)を(4-18)へ代入することによって、$F_{ij}(\vec{l},\omega)$は$F_A(\vec{l};\omega)$, $F_B(\vec{l};\omega)$, $F_C(\vec{l};\omega)$を使って次のように表現される。

$$F_{ij}(\vec{l};\omega)$$

$$= \chi^2 \frac{l_i l_j}{2m} (u_{\vec{l}} + v_{\vec{l}})^2 (G^{(0)}(\vec{l};\omega) + G^{(0)}(\vec{l},-\omega))$$

$$+ \frac{1}{iV} \sum_{\vec{k}} \frac{k_i}{m} (u_- u_+ - v_- v_+) Q_3(\vec{k}-\tfrac{\vec{l}}{2}, \vec{k}+\tfrac{\vec{l}}{2};\omega) \Big[\frac{k_j}{m} (u_- u_+ - v_- v_+) +$$

$$+ g\chi^2 \frac{l_j}{m} \{ (u_- u_+ + v_- v_+)(G^{(0)}(\vec{l};\omega) - G^{(0)}(\vec{l},-\omega)) + u_- v_+ (-iG^{(0)}(-) + i\hat{G}^{(0)}) - u_+ v_- (-iG^{(0)}(+) + i\hat{G}^{(0)}) \} \Big] -$$

$$- \frac{1}{iV} \sum_{\vec{k}} \frac{k_i}{m} u_- v_+ Q_2(\vec{k}-\tfrac{\vec{l}}{2}, -\vec{k}-\tfrac{\vec{l}}{2};\omega) \Big[\frac{k_j}{m} (u_+ v_- - u_- v_+) +$$

$$+ g\chi^2 \frac{l_j}{m} \{ (u_- v_+ + u_+ v_-)(G^{(0)}(\vec{l},-\omega) - G^{(0)}(\vec{l},\omega)) - u_+ u_- (-iG^{(0)}(-) + i\hat{G}^{(0)}) + v_+ v_- (-iG^{(0)}(+) + i\hat{G}^{(0)}) \} \Big] -$$

$$- \frac{1}{iV} \sum_{\vec{k}} \frac{k_i}{m} u_+ v_- Q_1(-\vec{k}+\tfrac{\vec{l}}{2}, \vec{k}+\tfrac{\vec{l}}{2};\omega) \Big[\frac{k_j}{m} (u_- v_+ - u_+ v_-) +$$

$$+ g\chi^2 \frac{l_j}{m} \{ (u_- v_+ + u_+ v_-)(-G^{(0)}(\vec{l},\omega) + G^{(0)}(\vec{l},-\omega)) + u_+ u_- (-iG^{(0)}(+) + i\hat{G}^{(0)}) - v_+ v_- (i\hat{G}^{(0)} - iG^{(0)}(-)) \} \Big] +$$

$$+ \frac{1}{\sqrt{V}} g\chi^2 \frac{l_i}{2m} \Big[(-iG^{(0)}(+) + i\hat{G}^{(0)}) F_A(\vec{l};\omega) + (-iG^{(0)}(-) + i\hat{G}^{(0)}) F_B(\vec{l};\omega) + 2(G^{(0)}(\vec{l},\omega) - G^{(0)}(\vec{l},-\omega)) F_C(\vec{l};\omega) \Big] \cdot$$

$$- \frac{1}{\sqrt{V}} \Big[\sum_{\vec{k}} (l_i - 2k_i) v_{\vec{k}} u_{\vec{l}-\vec{k}} \{ u_{\vec{l}} G_{11}(\vec{k},\vec{l}-\vec{k}) - v_{\vec{l}} G_{21}(\vec{k},\vec{l}-\vec{k}) + u_{\vec{k}} u_{\vec{l}-\vec{k}} G_{31}(\vec{k},\vec{l}-\vec{k}) \} +$$

$$+ \sum_{\vec{k}} (l_i + 2k_i) u_{\vec{k}} v_{\vec{l}+\vec{k}} \{ -v_{\vec{l}} G_{12}(\vec{k},-\vec{l}-\vec{k}) + u_{\vec{l}} G_{22}(\vec{k},-\vec{l}-\vec{k}) + v_{\vec{k}} v_{\vec{l}-\vec{k}} G_{32}(\vec{k},-\vec{l}-\vec{k}) \} +$$

$$+ \sum_{\vec{k}} (l_i - 2k_i)(u_{\vec{k}-\vec{l}} u_{\vec{k}} - v_{\vec{k}-\vec{l}} v_{\vec{k}}) \{ u_{\vec{l}} G_{13}(\vec{k}-\vec{l},\vec{k}) - v_{\vec{l}} G_{23}(\vec{k}-\vec{l},\vec{k}) + v_{\vec{k}-\vec{l}} u_{\vec{k}} G_{33}(\vec{k}-\vec{l},\vec{k}) \} \Big] F_A(\vec{l};\omega) -$$

$$-\frac{1}{\sqrt{V}}\Big[\sum_{\vec{k}}(l_i-2k_i)v_{\vec{k}}u_{\vec{l}-\vec{k}}\{-v_{\vec{l}}G_{11}(\vec{k},\vec{l}-\vec{k})+u_{\vec{l}}G_{21}(\vec{k},\vec{l}-\vec{k})+v_{\vec{k}}v_{\vec{l}-\vec{k}}G_{31}(\vec{k},\vec{l}-\vec{k})\}+$$

$$+\sum_{\vec{k}}(l_i+2k_i)u_{\vec{k}}v_{\vec{l}+\vec{k}}\{u_{\vec{l}}G_{12}(\vec{k},-\vec{l}-\vec{k})-v_{\vec{l}}G_{22}(\vec{k},-\vec{l}-\vec{k})+u_{\vec{k}}u_{\vec{l}+\vec{k}}G_{32}(\vec{k},-\vec{l}-\vec{k})\}+$$

$$+\sum_{\vec{k}}(l_i-2k_i)(u_{\vec{k}-\vec{l}}u_{\vec{k}}-v_{\vec{k}-\vec{l}}v_{\vec{k}})\{-v_{\vec{l}}G_{13}(\vec{k}-\vec{l},\vec{k})+u_{\vec{l}}G_{23}(\vec{k}-\vec{l},\vec{k})+u_{\vec{k}-\vec{l}}v_{\vec{k}}G_{33}(\vec{k}-\vec{l},\vec{k})\}\Big]F_B(\vec{l};\omega)-$$

$$-\frac{1}{\sqrt{V}}\Big[\sum_{\vec{k}}(l_i-2k_i)v_{\vec{k}}u_{\vec{l}-\vec{k}}\{2(u_{\vec{l}}-v_{\vec{l}})G_{11}(\vec{k},\vec{l}-\vec{k})+2(u_{\vec{l}}-v_{\vec{l}})G_{21}(\vec{k},\vec{l}-\vec{k})-2(u_{\vec{k}}v_{\vec{l}-\vec{k}}+v_{\vec{k}}u_{\vec{l}-\vec{k}})G_{31}(\vec{k},\vec{l}-\vec{k})\}+$$

$$+\sum_{\vec{k}}(l_i+2k_i)u_{\vec{k}}v_{\vec{l}+\vec{k}}\{2(u_{\vec{l}}-v_{\vec{l}})G_{12}(\vec{k},-\vec{l}-\vec{k})+2(u_{\vec{l}}-v_{\vec{l}})G_{22}(\vec{k},-\vec{l}-\vec{k})-2(u_{\vec{k}}v_{\vec{l}+\vec{k}}+v_{\vec{k}}u_{\vec{l}+\vec{k}})G_{32}(\vec{k},-\vec{l}-\vec{k})\}+$$

$$+\sum_{\vec{k}}(l_i-2k_i)(u_{\vec{k}-\vec{l}}v_{\vec{k}}-v_{\vec{k}-\vec{l}}v_{\vec{k}})\{2(u_{\vec{l}}-v_{\vec{l}})G_{13}(\vec{k}-\vec{l},\vec{k})+2(u_{\vec{l}}-v_{\vec{l}})G_{23}(\vec{k}-\vec{l},\vec{k})-$$

$$-2(v_{\vec{k}-\vec{l}}u_{\vec{k}}+v_{\vec{k}-\vec{l}}v_{\vec{k}})G_{33}(\vec{k}-\vec{l},\vec{k})\}\Big]F_C(\vec{l};\omega) \qquad (4\text{-}28)$$

$F_{ij}(\vec{l},\omega)$の$(\vec{l},\omega)\to 0$の極限の値は，面倒な計算の結果，

$$\lim_{(\vec{l},\omega)\to 0} F_{ij}(\vec{l},\omega)$$

$$=\frac{(-1)}{2(2g\chi^2-2\Delta)}\frac{l_i}{l^2}\Big[\Big\{\frac{g\chi^2}{m}l^2+\frac{g\Delta^2}{2V}\sum_{\vec{k}}\frac{\left(\frac{\vec{k}\cdot\vec{l}}{m}\right)^3}{E_{\vec{k}}^3}\coth\left(\frac{\beta E_{\vec{k}}}{2}\right)\Big\}(F_A^{(0)}-F_B^{(0)})-$$

$$-\omega g y(\vec{l},\omega)\{\omega(F_A^{(0)}-F_B^{(0)})+(2g\chi^2-2\Delta)(F_A^{(0)}+F_B^{(0)}+2F_C^{(0)})\}\Big]\frac{1}{\sqrt{V}}-$$

$$-\delta_{ij}\frac{1}{3V}\sum_{\vec{k}}\frac{k^2}{m^2}\frac{\vec{l}\cdot\vec{v}_{\vec{k}}}{\omega-\vec{l}\cdot\vec{v}_{\vec{k}}}\frac{df_{\vec{k}}}{dE_{\vec{k}}} \qquad (4\text{-}29)$$

となる。ここで$F_i^{(0)}$（$i=A,B,C$）は$F_i(\vec{l},\omega)$の$(\vec{l},\omega)\to 0$の極限であり、

また、$\vec{v}_{\vec{k}}$は$dE_{\vec{k}}/d\vec{k}$である。

次に、$F_{ij}(\vec{l};\omega)$ の微視的表現を完成するため、$F_A(\vec{l};\omega)$, $F_B(\vec{l};\omega)$, $F_C(\vec{l};\omega)$ に対する連立方程式を、$\chi_A(\vec{l})$、$\chi_B(\vec{l})$、$\chi_C(\vec{l})$ に対する斉次連立方程式(3-26)を求めたと同様な手続きで導き、$F_A(\vec{l};\omega)$, $F_B(\vec{l};\omega)$, $F_C(\vec{l};\omega)$ の値を求める。今の場合、$\chi_A(\vec{l})$、$\chi_B(\vec{l})$, $\chi_C(\vec{l})$ の場合のように Bethe-Salpeter 波動関数に対する方程式ではなく、Green 関数に対する方程式であるので、その方程式は非斉次連立方程式となる。(4-24)(4-25)(4-26) を (4-27) に代入すると、$F_A(\vec{l};\omega)$, $F_B(\vec{l};\omega)$, $F_C(\vec{l};\omega)$ の間には、次の関係が成立することがわかる。

$$A(\vec{l};\omega)F_A(\vec{l};\omega)+B(\vec{l};\omega)F_B(\vec{l};\omega)+C(\vec{l};\omega)F_C(\vec{l};\omega)$$

$$=\frac{1}{\sqrt{V}}\sum_{\vec{k}}\Big[u_+u_-\theta_1(-\vec{k}+\tfrac{\vec{l}}{2},\vec{k}+\tfrac{\vec{l}}{2};\omega)\frac{k_j}{m}(u_-v_+-u_+v_-)+v_-v_+\theta_2(\vec{k}-\tfrac{\vec{l}}{2},-\vec{k}-\tfrac{\vec{l}}{2};\omega)\frac{k_j}{m}(u_+v_--u_-v_+)-$$

$$-2v_-u_+\theta_3(\vec{k}-\tfrac{\vec{l}}{2},\vec{k}+\tfrac{\vec{l}}{2};\omega)\frac{k_j}{m}(u_-u_+-v_-v_+)\Big]\frac{1}{i}+\frac{g\chi^2}{\sqrt{V}}\frac{l_j}{m}\Big[(G^{(10)}(\vec{l},\omega)-G^{(10)}(\vec{l},-\omega))(V\theta_{13}+V\theta_{31}+2V\theta'_{31}+2V\theta'_{23})+$$

$$+(-iG^{(10)}(+)+i\hat{G}^{(10)})(V\theta_{11}+2V\theta'_{21})-(-iG^{(10)}(-)+i\hat{G}^{(10)})(V\theta_{33}+2V\theta'_{33})\Big]\frac{1}{i} \qquad (4\text{-}30)$$

$$D(\vec{l};\omega)F_A(\vec{l};\omega)+E(\vec{l};\omega)F_B(\vec{l};\omega)+F(\vec{l};\omega)F_C(\vec{l};\omega)$$

$$=\frac{1}{\sqrt{V}}\sum_{\vec{k}}\Big[v_-v_+\theta_1(-\vec{k}+\tfrac{\vec{l}}{2},\vec{k}+\tfrac{\vec{l}}{2};\omega)\frac{k_j}{m}(u_-v_+-u_+v_-)+u_-u_+\theta_2(\vec{k}-\tfrac{\vec{l}}{2},-\vec{k}-\tfrac{\vec{l}}{2};\omega)\frac{k_j}{m}(u_+v_--u_-v_+)-$$

$$-2u_-v_+\theta_3(\vec{k}-\tfrac{\vec{l}}{2},\vec{k}+\tfrac{\vec{l}}{2};\omega)\frac{k_j}{m}(u_-u_+-v_-v_+)\Big]\frac{1}{i}+\frac{g\chi^2}{\sqrt{V}}\frac{l_j}{m}\Big[(G^{(10)}(\vec{l},\omega)-G^{(10)}(\vec{l},-\omega))(V\theta_{32}+V\theta_{23}+2V\theta'_{13}+2V\theta'_{32})+$$

$$+(-iG^{(10)}(+)+i\hat{G}^{(10)})(V\theta_{33}+2V\theta'_{33})-(-iG^{(10)}(-)+i\hat{G}^{(10)})(V\theta_{22}+2V\theta'_{12})\Big]\frac{1}{i} \qquad (4\text{-}31)$$

$$H(\vec{l};\omega)F_A(\vec{l};\omega)+I(\vec{l};\omega)F_B(\vec{l};\omega)+L(\vec{l};\omega)F_c(\vec{l};\omega)$$

$$=\frac{1}{\sqrt{V}}\sum_{\vec{k}}\Big[-u_-v_+\,Q_1\!\left(-\vec{k}+\tfrac{\vec{l}}{2},\vec{k}+\tfrac{\vec{l}}{2};\omega\right)\frac{k_j}{m}(u_-v_+-u_+v_-)-u_-v_+\,Q_2\!\left(\vec{k}-\tfrac{\vec{l}}{2},-\vec{k}-\tfrac{\vec{l}}{2};\omega\right)\frac{k_j}{m}(u_+v_--u_-v_+)+$$

$$+(u_-u_++v_-v_+)\,\theta_3\!\left(\vec{k}-\tfrac{\vec{l}}{2},\vec{k}+\tfrac{\vec{l}}{2};\omega\right)\frac{k_j}{m}(u_-u_+-v_-v_+)\Big]\frac{1}{i}+$$

$$+\frac{g\chi^2}{\sqrt{V}}\frac{l_j}{m}\Big[\left(G^{(1)}(\vec{l},\omega)-G^{(0)}(\vec{l};-\omega)\right)\left(V\theta_{12}+V\theta_{23}+V\theta'_{11}+V\theta'_{22}+2V\theta'_{33}\right)+$$

$$+\left(-iG^{(0)}(+)+i\hat{G}^{(0)}\right)\left(V\theta_{13}+V\theta'_{31}+V\theta'_{23}\right)-\left(-iG^{(0)}(-)+i\hat{G}^{(0)}\right)\left(V\theta_{32}+V\theta'_{13}+V\theta'_{32}\right)\Big]\frac{1}{i}$$

(4-32)

上の関係の$(\vec{l},\omega)\to 0$の極限をとることによって、$F_A^{(0)}$, $F_B^{(0)}$, $F_c^{(0)}$間の次の関係式を導く。((4-30) + (4-31))より、

$$(1+4g\Delta iQ)(F_A^{(0)}+F_B^{(0)})-\frac{\omega}{2g\chi^2-2\Delta}\left(\frac{g\chi^2-\Delta}{\Delta}-2g\Delta iQ-4g\Delta iR\right)(F_A^{(0)}-F_B^{(0)})-$$

$$-4\left(\frac{g\chi^2-\Delta}{\Delta}-2g\Delta iQ-4g\Delta iR\right)F_c^{(0)}=0 \qquad (4\text{-}33)$$

となる。((4-30) − (4-31))より、

$$\left(-\tfrac{1}{2}\right)\Big[\frac{\omega}{\Delta}(1+8g\Delta iR)(F_A^{(0)}+F_B^{(0)})+\frac{1}{\Delta(2g\chi^2-2\Delta)}\Big\{\omega^2(1+2g\Delta iQ+4g\Delta iR)-$$

$$-\Big(\frac{g\chi^2}{m}l^2+\frac{g\Delta^2}{2V}\sum_{\vec{k}}\frac{\left(\frac{\vec{k}\cdot\vec{l}}{m}\right)^2}{E_{\vec{k}}^3}\coth\!\left(\frac{\beta E_{\vec{k}}}{2}\right)\Big)\Big\}(F_A^{(0)}-F_B^{(0)})+\frac{4\omega}{\Delta}(1+2g\Delta iQ+4g\Delta iR)F_c^{(0)}\Big]$$

$$=\frac{\sqrt{V}}{g\Delta}l_j\Big[\frac{g\chi^2}{m}+\frac{g\Delta^2}{m}\frac{1}{3V}\sum_{\vec{k}}\frac{k^2}{E_{\vec{k}}^3}\coth\!\left(\frac{\beta E_{\vec{k}}}{2}\right)-\frac{g\Delta^2}{m}\frac{2}{3V}\sum_{\vec{k}}\frac{k^2}{E_{\vec{k}}^2}\frac{df_{\vec{k}}}{dE_{\vec{k}}}\Big] \qquad (4\text{-}34)$$

となる。

さらに、(4-32)より

$$\left(4g\Delta i R - \frac{g}{2}y(l,\omega)\right)\left(F_A^{(0)} + F_B^{(0)}\right) + \frac{\omega}{2g\chi^2 - 2\Delta}\left(g\Delta i Q + 2g\Delta i R - \frac{g}{2}y(l,\omega)\right)\left(F_A^{(0)} - F_B^{(0)}\right) +$$

$$+\left(1 + 4g\Delta i Q + 8g\Delta i R - g\,y(l,\omega)\right)F_C^{(0)} = 0 \qquad (4\text{-}35)$$

となる。次に、$\{(4\text{-}34) + \frac{\omega}{\Delta}(4\text{-}35)\}$の計算から次の関係を求める。

$$\frac{1}{2(2g\chi^2 - 2\Delta)}\Big[\Big\{\frac{g\chi^2}{m}l^2 + \frac{g\Delta^2}{2V}\sum_{\vec{k}}\frac{\left(\frac{\vec{l}\cdot\vec{k}}{m}\right)^2}{E_{\vec{k}}^3}\coth\left(\frac{\beta E_{\vec{k}}}{2}\right)\Big\}\left(F_A^{(0)} - F_B^{(0)}\right) -$$

$$-\omega\left(1 + g\,y(\vec{l},\omega)\right)\Big\{\omega\left(F_A^{(0)} - F_B^{(0)}\right) + (2g\chi^2 - 2\Delta)\left(F_A^{(0)} + F_B^{(0)} + 2F_C^{(0)}\right)\Big\}\Big]$$

$$= V^{\frac{1}{2}}\frac{l_i}{m}\Big[\chi^2 + \frac{\Delta^2}{3V}\sum_{\vec{k}}\frac{\left(\frac{k^2}{2m}\right)}{E_{\vec{k}}^3}\coth\left(\frac{\beta E_{\vec{k}}}{2}\right) - \frac{2\Delta^2}{3V}\sum_{\vec{k}}\frac{\left(\frac{k^2}{2m}\right)}{E_{\vec{k}}^2}\frac{df_{\vec{k}}}{dE_{\vec{k}}}\Big] \qquad (4\text{-}36)$$

この結果を使うと、(4-29)は最終的に次のようになる。

$$\lim_{(\vec{l},\omega)\to 0} F_{ij}(\vec{l},\omega)$$

$$= \frac{l_i l_j}{l^2}\frac{\omega^{(1)}(l)^2}{\omega^2 - \omega^{(1)}(l)^2}\Big[\frac{\chi^2}{m} + \frac{\Delta^2}{3m}\frac{1}{V}\sum_{\vec{k}}\frac{\left(\frac{k^2}{2m}\right)}{E_{\vec{k}}^3}\coth\left(\frac{\beta E_{\vec{k}}}{2}\right) - \frac{2\Delta^2}{3m}\frac{1}{V}\sum_{\vec{k}}\frac{\left(\frac{k^2}{2m}\right)}{E_{\vec{k}}^2}\frac{df_{\vec{k}}}{dE_{\vec{k}}}\Big] -$$

$$-\delta_{ij}\frac{1}{3V}\sum_{\vec{k}}\frac{k^2}{m^2}\frac{\vec{l}\cdot\vec{v}_{\vec{k}}}{\omega - \vec{l}\cdot\vec{v}_{\vec{k}}}\frac{df_{\vec{k}}}{dE_{\vec{k}}} \qquad (4\text{-}37)$$

ここで$\omega^{(1)}(\vec{l})$は(3-48)で与えられた位相場のエネルギースペクトルである。

最初に、この結果の静的極限をとり、(4-11)と比較することに

よって、超流体密度 n_s、正常流体密度 n_n の微視的表現を求める。その結果は

$$n_s = n_0 + \frac{\Delta^2}{3V}\sum_{\vec{k}}\frac{\left(\frac{k^2}{2m}\right)}{E_{\vec{k}}^3}\coth\left(\frac{\beta E_{\vec{k}}}{2}\right) - \frac{2\Delta^2}{3V}\sum_{\vec{k}}\frac{\left(\frac{k^2}{2m}\right)}{E_{\vec{k}}^2}\frac{df_{\vec{k}}}{dE_{\vec{k}}} \qquad (4\text{-}38)$$

$$n_n = -\frac{1}{3V}\sum_{\vec{k}}\frac{k^2}{m}\frac{df_{\vec{k}}}{dE_{\vec{k}}} \qquad (4\text{-}39)$$

である。簡単な計算によって、$n_s + n_n = n$ なることが確かめられる。ここで全粒子数密度 n は (2-21) で与えられている。

$$n = \chi^2 + \frac{1}{2V}\sum_{\vec{k}}\left(\frac{U_{\vec{k}}}{E_{\vec{k}}} - 1\right) + \frac{1}{V}\sum_{\vec{k}}\frac{U_{\vec{k}}}{E_{\vec{k}}}f_{\vec{k}} \qquad (4\text{-}40)$$

n_s の微視的な表現 (4-38) は、$E_{\vec{k}}$ を (2-24) で与えられる Bogoliubov のスペクトル $E_{\vec{k}}^B$ に置き換えれば、Usui[30], Pasquale-Tabet[31] によって求められた表現と一致している。

次に、(4-37) と Hohenberg-Martin の結果[10] を比較することにより、流束密度の応答関数に対する位相場の寄与を考える。位相場 $B(\vec{r},t)$ は (2-33) で与えられているので、位相場に対する Green 関数は

$$\langle 0(\beta)|T[B(\vec{r},t)B(\vec{r}',t')]|0(\beta)\rangle = \frac{i}{V}\sum_{\vec{k}}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{d\omega}{2\pi}e^{i\vec{k}(\vec{r}-\vec{r}')-i\omega(t-t')}\frac{1}{\omega^2-\omega^2(\vec{k})} \qquad (4\text{-}41)$$

となる。そこで (4-37) の第一項は位相場の寄与を示していることがわかる。一般論によると、流束密度に対する位相場の寄与は

$$\vec{j}^{(B)}(\vec{r},t) = v_0^2 \eta \vec{\nabla} B(\vec{r},t) \qquad (2\text{-}41)$$

で与えられている。そこで、この $\vec{j}^{(B)}(\vec{r},t)$ に対する Green 関数

$$\langle 0(\beta)| T[\, j_i^{(B)}(\vec{r},t)\, j_j^{(B)\dagger}(\vec{r}',t')\,]|0(\beta)\rangle = \frac{1}{V}\sum_{\vec{l}}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{d\omega}{2\pi}\, i F_{ij}^{(B)}(\vec{l},\omega)\, e^{i\vec{l}(\vec{r}-\vec{r}')-i\omega(t-t')} \qquad (4\text{-}42)$$

を求めると、(2-41)と(4-41)を使い、

$$F_{ij}^{(B)}(\vec{l},\omega) = \eta^2 v_0^4 \frac{l_i l_j}{\omega^2-\omega^2(\vec{l})} \qquad (4\text{-}43)$$

となる。さらに $\omega(\vec{l}) = v_0|\vec{l}|$ であることを考えると、

$$F_{ij}^{(B)}(\vec{l},\omega) = \frac{l_i l_j}{l^2}\,\frac{\omega^2(\vec{l})}{\omega^2-\omega^2(\vec{l})}\cdot \eta^2 v_0^2 \qquad (4\text{-}44)$$

となる。(4-37)と上式を比較することにより、$\eta(T)$の微視的表現は

$$\eta(T) = \frac{1}{v_0}\left[\frac{\chi^2}{m} + \frac{\Delta^2}{3m}\frac{1}{V}\sum_{\vec{k}}\frac{\left(\frac{k^2}{2m}\right)}{E_{\vec{k}}^3}\coth\left(\frac{\beta E_{\vec{k}}}{2}\right) - \frac{2\Delta^2}{3m}\frac{1}{V}\sum_{\vec{k}}\frac{\left(\frac{k^2}{2m}\right)}{E_{\vec{k}}^2}\frac{df_{\vec{k}}}{dE_{\vec{k}}}\right]^{1/2}$$

$$= \frac{1}{v_0}\left[\frac{n_s}{m}\right]^{1/2} \qquad (4\text{-}45)$$

であることがわかる。以上の結果から、流れの応答が(4-37)の右辺の第1項で示される位相場の寄与と第2項の個別励起の寄与に分離されることが示される。

次に、Fig 2 に示されたダイヤグラム表現を使って、$F_{ij}(\vec{l},\omega)$ (4-28) に対するダイヤグラム表現を考える。Fig 2 の F_1, F_2, F_3, F_4, F_5 を全部加え合わせることによって、Fig 3のような $F_{ij}(\vec{l},\omega)$ のダイヤグラム表現

$F_{ij}(\vec{x};\omega)$

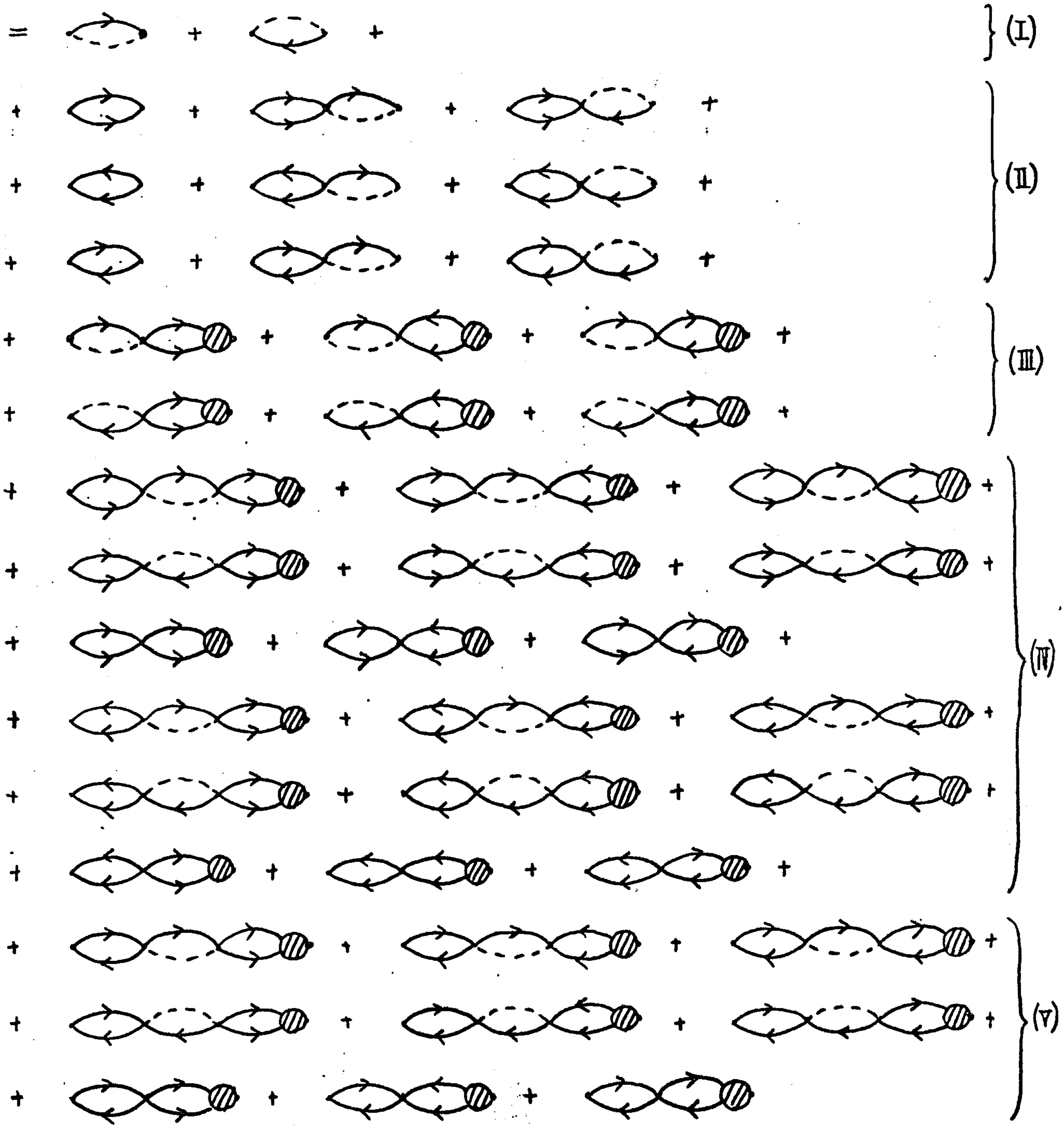


Fig. 3　式(4-28)で示される$F_{ij}(\vec{x};\omega)$のダイヤグラム表現

が求められる。　この(4-28)に対応するダイヤグラムは(I)(II)(III)(IV)(V)に区別されており、$(\vec{l},\omega)\to 0$ の極限の場合の(4-29)に対するそれぞれの寄与は次のようになる。

(I)・・・　0

(II)・・・　$-\delta_{ij}\frac{1}{3V}\sum_{\vec{k}}\frac{k^2}{m^2}\frac{\vec{l}\cdot\vec{v}_{\vec{k}}}{\omega-\vec{l}\cdot\vec{v}_{\vec{k}}}\frac{df_{\vec{k}}}{dE_{\vec{k}}}$

(III)・・・　$\frac{(-1)}{2(2g\chi^2-2\Delta)}\frac{l_i}{l^2}\cdot\frac{g\chi^2}{m}l^2\left(F_A^{(0)}-F_B^{(0)}\right)\frac{1}{\sqrt{V}}$

(IV)・・・　$\frac{(-1)}{2(2g\chi^2-2\Delta)}\frac{l_i}{l^2}\frac{g\Delta^2}{2V}\sum_{\vec{k}}\frac{\left(\frac{\vec{l}\cdot\vec{k}}{m}\right)^2}{E_{\vec{k}}^3}\coth\left(\frac{\beta E_{\vec{k}}}{2}\right)\left(F_A^{(0)}-F_B^{(0)}\right)\frac{1}{\sqrt{V}}$

(V)・・・　$\frac{1}{2(2g\chi^2-2\Delta)}\frac{l_i}{l^2}\omega g y(\vec{l},\omega)\left\{\omega\left(F_A^{(0)}-F_B^{(0)}\right)+(2g\chi^2-2\Delta)\left(F_A^{(0)}+F_B^{(0)}+2F_C^{(0)}\right)\right\}\frac{1}{\sqrt{V}}$

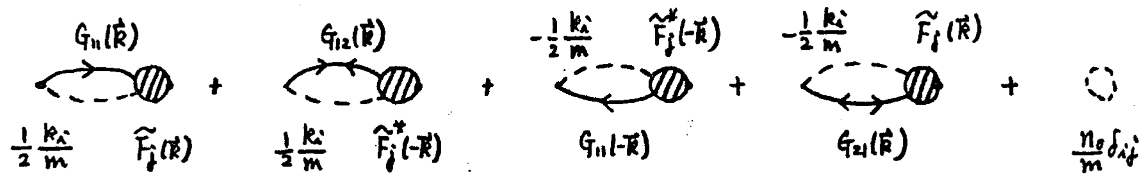
(4-46)

このダイヤグラムの中で、(I)(II)が個別励起からの寄与、(III)(IV)(V)が位相場からの寄与を示している。

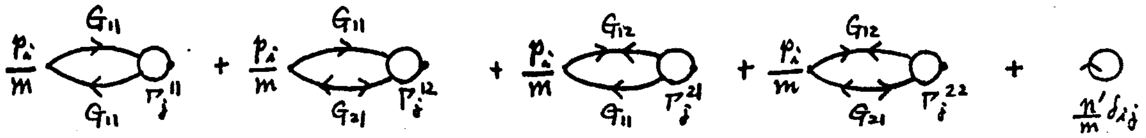
次に本論文と同様に、凝縮体を有するボーズ粒子系の応答を研究したPasquale-Tahet[31]の理論との比較を行なう。彼らは、超流体密度の微視的表現を求めるため、一般化されたWard Identity[32]の関係を使った。彼らの方法によると、ボーズ凝縮体が存在している場合、(4-9)の $K_{ij}(\vec{k},\omega)$ は二つの部分に分離することができる。

$$K_{ij}(\vec{k},\omega) = K_{ij}^{0}(\vec{k},\omega) + K_{ij}'(\vec{k},\omega) \tag{4-47}$$

ここで K^0_{ij} は凝縮体密度 n_0 に依存する部分を示し、次のグラフで表わされる。

$K^0_{ij} =$ 

ここで、点線は n_0 因子を示し、実線は (1-20) で定義された1体の Green 関数 $G_{ij}(k)$ $(i,j=1,2)$ である。$\tilde{F}_j$ および $\tilde{F}^*_j$ は凝縮体へまたはからの粒子の散乱を表わすバーテックス関数である。一方、K'_{ij} のグラフは

$K'_{ij} =$ 

である。n' は励起状態にある粒子数密度であり、Γ_j は励起状態にある粒子の散乱を表わすバーテックス関数である。分離された K^0_{ij} と K'_{ij} はそれぞれ次のように表現される。

$$K^0_{ij} = \frac{\sqrt{n_0}}{2}\frac{k_i}{m}\left[G(k)\tilde{F}_j(k)\right]_{11} - \frac{\sqrt{n_0}}{2}\left(-\frac{k_i}{m}\right)\left[\tilde{F}^*_j(-k)G(-k)\right]_{11} + \frac{n_0}{m}\delta_{ij}$$

$$K'_{ij} = \frac{i}{(2\pi)^4}\int d^4p\,\frac{p_i}{m}\left[G\left(p+\frac{k}{2}\right)\Gamma_j\left(p+\frac{k}{2},\,p-\frac{k}{2}\right)G\left(p-\frac{k}{2}\right)\right]_{11} + \frac{n'}{m}\delta_{ij} \tag{4-48}$$

また、Ward Identity に従って、K^0_{ij}, K'_{ij} は次の保存則を満足する。

$$\sum_j K^0_{ij}k_j = 0 \quad , \quad \sum_j K'_{ij}k_j = 0 \tag{4-49}$$

流れの応答の静的極限 $K_{ij}(k,0) = \lim_{\omega\to 0} K_{ij}(k,\omega)$ は、この関係を使って次のようになる。

$$K_{ij}(\vec{k},0) = \frac{1}{2}\left[\Gamma^0(\vec{k})+\Gamma(\vec{k})\right]\left[\delta_{ij}-\frac{k_ik_j}{k^2}\right]$$

$$\equiv K(k^2)\left[\delta_{ij}-\frac{k_ik_j}{k^2}\right] \qquad (4\text{-}50)$$

ここで、$\Gamma^0(\vec{k})=\sum_{i=1}^{3}K^0_{ii}(\vec{k},0)$，$\Gamma(\vec{k})=\sum_{i=1}^{3}K'_{ii}(\vec{k},0)$である。Ward Identityによって$\Gamma^0(\vec{k})=\frac{2n_0}{m}$がえられ、(4-10)から超流体密度$n_s$は次のように与えられる。

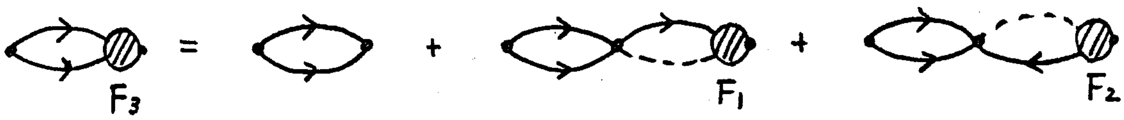
$$\frac{n_s}{m}=\frac{n_0}{m}+\frac{1}{2}\left[\Gamma(\vec{k})\right]_{\vec{k}=0}=\frac{n_0}{m}+\frac{1}{2}\left[\sum_{i=1}^{3}K'_{ii}(\vec{k})\right]_{\vec{k}=0} \qquad (4\text{-}51)$$

Bogoliubov近似から計算されたこのn_sの微視的表現は、(4-38)の$E_{\vec{k}}$をBogoliubovのスペクトル$E_{\vec{k}}$に置き換えたものと一致している。Pasquale と Tombesi[33]は、バーテックス部分Γ_jは、一般的に凝縮体へ又はからの粒子の散乱に関係する部分とそれ以外の部分に分離できること、つまりグラフで書くと、

となることを示し、n_sに寄与するのは、K'_{ii}中の点線を含むグラフであることを指摘した。

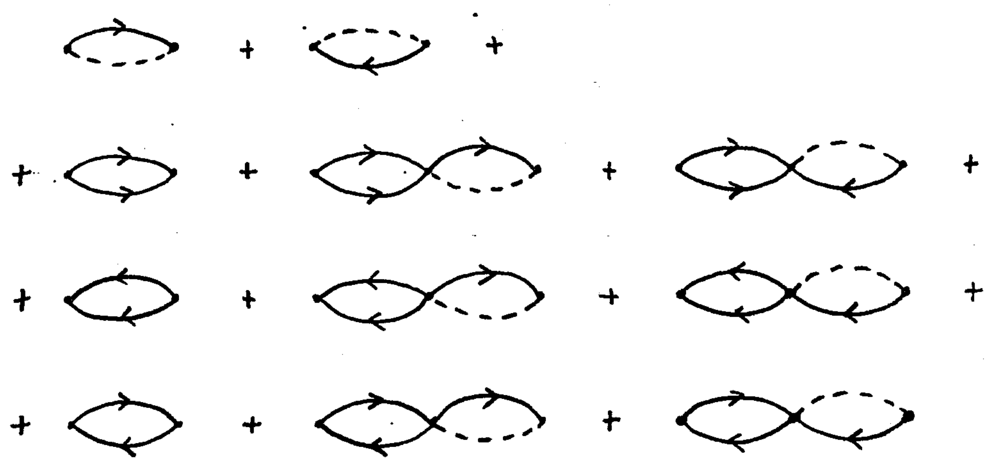
次にPasqualeらの議論とわれわれの議論との関連を述べる。Pasqualeらの議論は本論文のFig.2およびFig.3のように、個別励起の対相関効果を考慮してF_1，F_2をF_3，F_4，F_5で表現するのではなく、F_3、

F_4、F_5を下図のようにF_1、F_2で近似し、さらに個別励起のエネルギースペクトルE_qをBogoliubovスペクトルE_q^Bとおくことに相当することを示す。



この近似で$F_{ij}(q;\omega)$のダイヤグラム表現は次のようになる。

$F_{ij}(q;\omega) =$



ここで$F_1(q;\omega)$, $F_2(q;\omega)$は(4-22)(4-23)の第1項のみとした。これはFig.3の(I)+(II)の部分に等しい。ただし、実線が表現している一体のGreen関数$G^{(0)}(q,\omega)$は、ギャップをもつエネルギースペクトルE_q(2-23)の個別励起ではなく、ギャップレスのBogoliubovスペクトルE_q^B(2-24)をもつBogolonの自由なGreen関数を示していると考えよう。

この場合、静的かつ長波長極限での$F_{ij}(q,\omega)$の値は次のようになる。

$$\lim_{l\to 0} F_{ij}(\vec{l}, w=0)$$

$$= -\frac{l_i l_j}{l^2}\left[\frac{\chi^2}{m} + \frac{(g\chi^2)^2}{3m}\frac{1}{V}\sum_{\vec{k}}\frac{\left(\frac{k^2}{2m}\right)}{(E_{\vec{k}}^B)^3}\coth\left(\frac{\beta E_{\vec{k}}^B}{2}\right) - \frac{2(g\chi^2)^2}{3m}\frac{1}{V}\sum_{\vec{k}}\frac{\left(\frac{k^2}{2m}\right)}{(E_{\vec{k}}^B)^2}\frac{df_{\vec{k}}^B}{dE_{\vec{k}}^B}\right] +$$

$$+ \delta_{ij}\frac{1}{3V}\sum_{\vec{k}}\frac{k^2}{m^2}\frac{df_{\vec{k}}^B}{dE_{\vec{k}}^B} \qquad (4\text{-}52)$$

ここで、

$$f_{\vec{k}}^B = [\exp(\beta E_{\vec{k}}^B) - 1]^{-1} \qquad (4\text{-}53)$$

である。(4-52)の第1項はPasqualeとTombesiが指摘したように点線が示すn_0因子を含むグラフからの寄与であり、これが超流体密度の微視的表現を与えている。この表現はPasqualeとTalbetがBogoliubov近似で計算した結果と一致しており、またわれわれの結果(4-38)においてΔを$g\chi^2$で近似した場合に相当している。このようにn_sの微視的表現に関しては、両者の結果はほぼ一致しているが、HohenbergとMartinが指摘した流束密度応答関数に寄与する単一素励起つまり位相場の構造に関しては、両者は本質的に異なっている。Pasqualeらの場合、位相場を凝縮体へまたはからの単一粒子の消滅および生成過程から構成しているのに対し、われわれの場合、単一粒子の消滅・生成過程に加えて、粒子対の生成・消滅および散乱過程から構成している。この相違点は、流束密度応答関数に寄与する単一素励起のエネルギースペクトルの形に反映しており、

Pasquale らの場合、そのエネルギースペクトルは一粒子Green関数の極から求められるのに対し、われわれの場合、それは(4-27)で定義された$F_A(\mathbf{x};\omega)$、$F_B(\mathbf{x};\omega)$および$F_C(\mathbf{x};\omega)$に対する連立方程式(4-30)、(4-31)(4-32)を解き、その結果求められた$F_i(\mathbf{x};\omega)$ $(i=A,B,C)$の極から決められる。そのエネルギースペクトルは第三章で求めた位相場のスペクトルと一致している。

第五章　動的構造因子と位相場の存在

この章では、粒子数密度のゆらぎを表わす動的構造因子に対する位相場の寄与および、超流動と位相場の関連について述べる。

第一節　中性子非弾性散乱実験

液体He^4の素励起の性質を知る上で、中性子非弾性散乱実験は有用な手段である。低エネルギー中性子散乱実験に対して、Van Hove[34]はその微分散乱断面積が散乱系の密度のゆらぎのフーリエ変換であることを示した。

$$\frac{d^2\sigma}{d\omega d\Omega} = [a^2(k_0-Q)/2\pi k_0]\, S(\vec{Q},\omega)$$

$$S(\vec{Q},\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} \exp[-i\omega(t-t')] \langle \rho_{\vec{Q}}(t)\rho_{-\vec{Q}}(t')\rangle dt \qquad (5\text{-}1)$$

ここでaは散乱長、k_0は中性子の衝突前の運動量、$\vec{Q},\omega$は散乱の間に中性子が失った運動量とエネルギー、$d\Omega$は立体角の要素である。また、

$$\rho_{\vec{Q}} = \frac{1}{\sqrt{V}}\sum_{\vec{p}} C_{\vec{p}-\frac{\vec{Q}}{2}} C_{\vec{p}+\frac{\vec{Q}}{2}} \qquad (5\text{-}2)$$

は、粒子数密度演算子のフーリエ成分である。

液体Heの素励起のエネルギースペクトルに対するLandauの予想[7)]の証明が、中性子非弾性散乱実験での初期の成功の一つである。最初に、実験で観測された1.1°Kでの散乱スペクトルの結果[35)]をFig.4 に示す。小さい運動量（Q＜0.4）に対して、単一フォノン励起からの散乱に対応する単一ピークが観測され、より大きい運動量（0.4＜Q＜2.3）に対しては、するどい単一フォノンピークに加えて、約25°Kのエネルギーをもつ多重フォノン成分の寄与がある。さらに大きい運動量（Q＞3.5）では、散乱は巾広いピークからなり、その中心エネルギーは自由He[4]原子からの散乱に近似的に対応するエネルギーとなっている。エネルギースペクトルは、各運動量に対して、ピークの励起エネルギーをプロットして求められ、その結果[35)]がFig.5 に示されている。

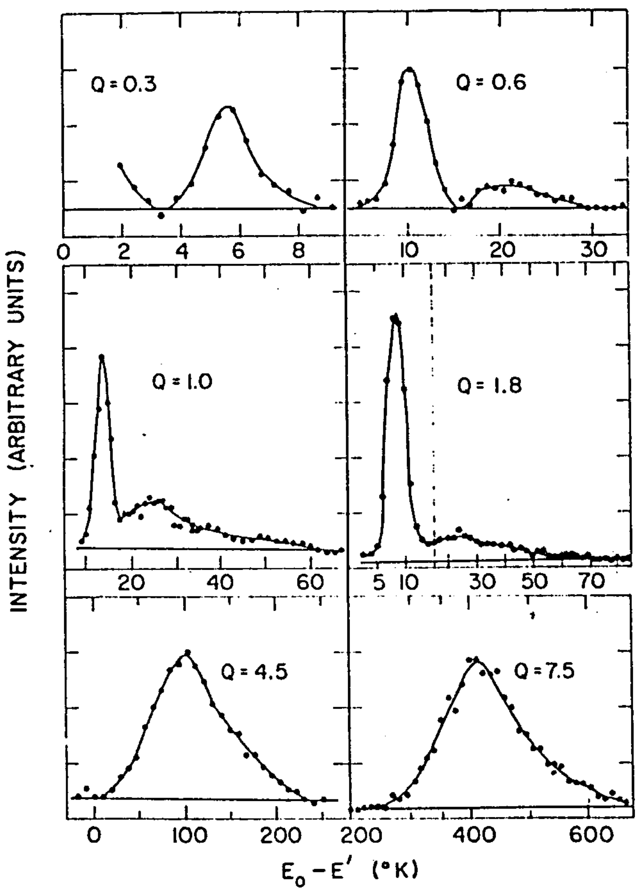


Fig.4 1.1°Kでの液体Heの散乱スペクトル[35)]
E_0, E'は入射および散乱中性子のエネルギー
$\omega = E_0 - E'$

単一フォノンだけのエネルギースペクトルはFig.6 に示される。小さいQでは、エネルギーがQに比例する

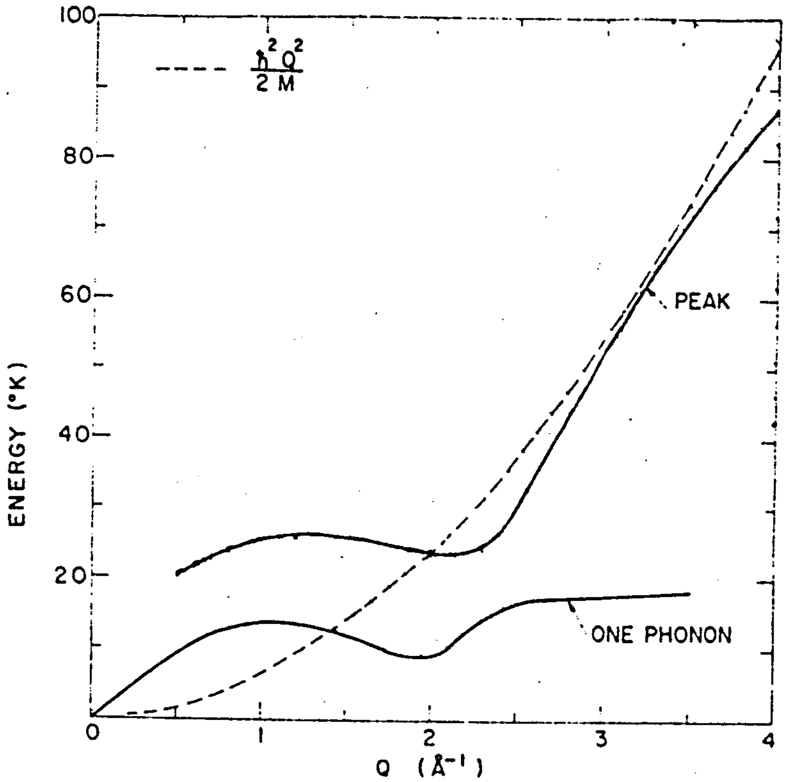


Fig. 5　1.1°Kでの液体He^4の素励起のエネルギースペクトル[35)]

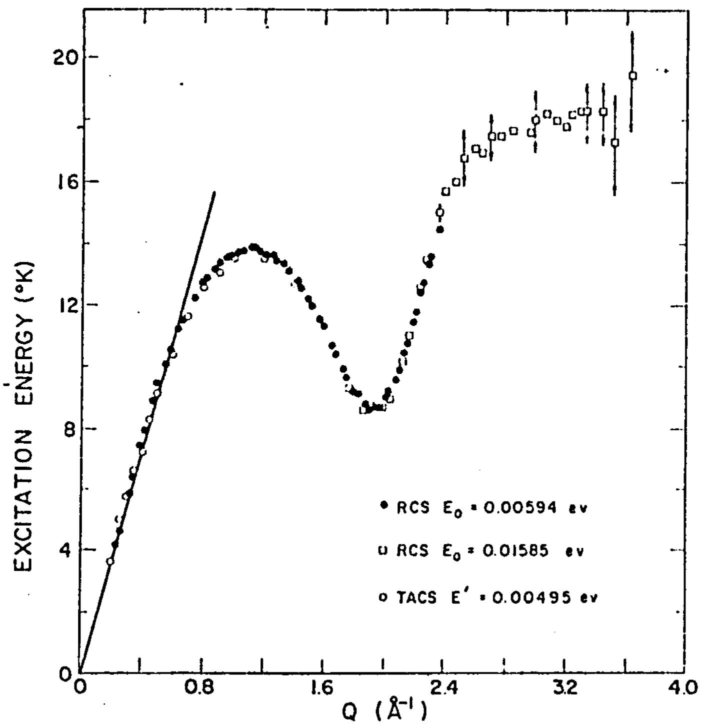


Fig. 6　1.1°Kでの液体He^4の単一フォノンのエネルギースペクトル[35)]

フォノン領域があり、$Q=2.0\text{Å}^{-1}$付近ではロトンと呼ばれる放物型の領域がある。$Q=2.3\text{Å}^{-1}$以上では、この単一フォノンピークの強度は急速に減少し、エネルギーがロトンエネルギーの約2倍の値になる$Q=3.6\text{Å}^{-1}$より以上のQではもはや単一フォノンピークは観測されない。

ここではフォノン領域でのスペクトルの温度依存性に関して興味がある。Fig. 7には、$S(Q,\omega)$のフォノンピークの中心から決定される速度$\omega(Q)/Q$の温度依存性[35]が示されており、また Fig. 8 には、ピークの半値巾の温度依存性[35]が示される。$Q=0.2$では、速度はT_λまで温度に対してほとんど一定であり、T_λでわずかに落ち

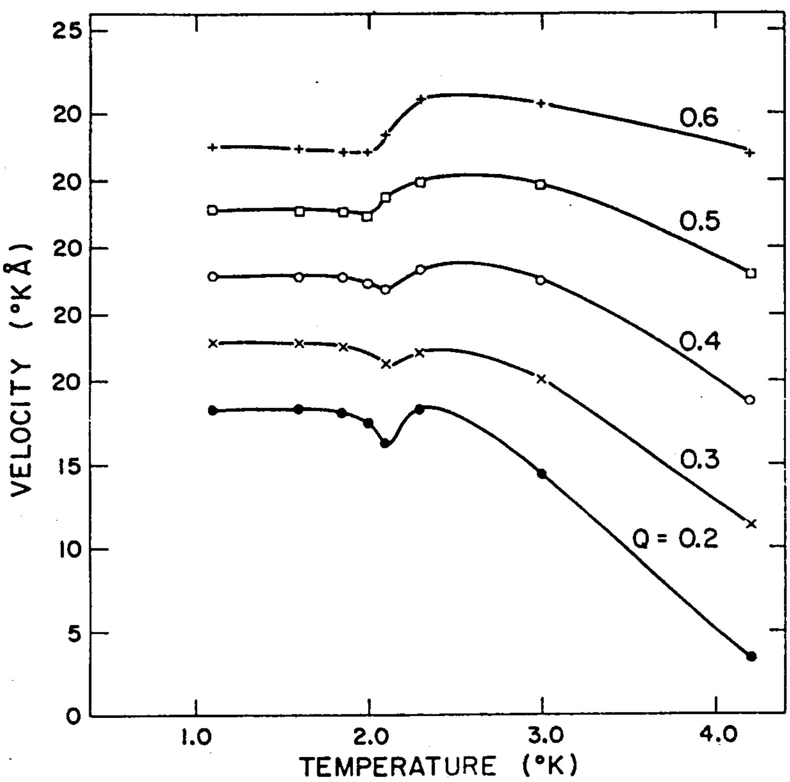


Fig. 7 小さな運動量でのフォノン速度$\omega(Q)/Q$の温度依存性[35]

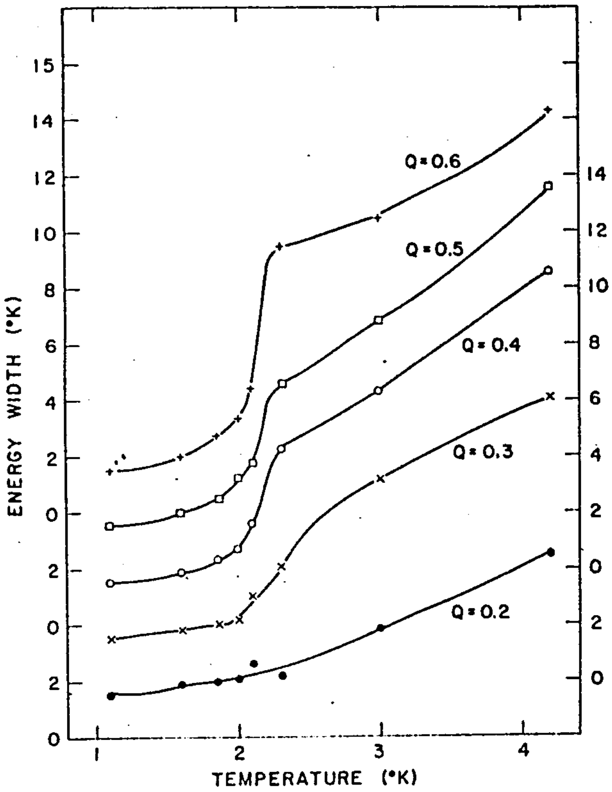


Fig. 8 小さな運動量Qでのフォノンピークのエネルギー巾の温度依存性[35]

こみが観測され、それから零近くまで減少していく。一方、巾は温度とともに除々に増加する。より大きいQ(=0.6)では、速度はQ=0.2の場合と同様に、T_λまではほとんど一定であるが、T_λでは急速に増加し、それから1.1°Kでの速度と同じ値をとる4.2°Kまでゆっくりと減少していく。一方、巾はT_λまではゆるやかに増加しているが、T_λで著しく増大し、それ以降もゆるやかに増加し続ける。この巾の温度依存性は以前(D.G. Henshaw and A.D.B. Woods; Phys. Rev. 121 (1961) 1266)ロトンの所で観測されたエネルギー巾のふるまいと似ている。

Woods と Svensson[36] はエネルギースペクトルの第1最大付近での運動量に対する中性子非弾性散乱実験により、微視的な量を示す$S(\vec{Q},\omega)$と巨視的な量である超流体密度ρ_sの間に直接の関係があることを見つけた。$Q=1.13\,\text{Å}^{-1}$での散乱スペクトルをFig. 9に示す。このスペクトルの著しい特徴は、T_λ以下の全温度

領域で、するどい単一のピークがあり、その強度が温度の増加とともに減少し、Tλ以上では消失している点である。そこで、かれらはTλ以下の $S(\vec{Q},\omega)$ は二成分からなると考え、次の関係を見い出した。

$$S(\vec{Q},\omega)=\frac{\rho_s(T)}{\rho}S_s(\vec{Q},\omega)+\frac{\rho_n(T)}{\rho}S_n(\vec{Q},\omega) \qquad (5\text{-}3)$$

ここで $S_s(\vec{Q},\omega)$ は、超流体の存在を特徴づけ、一方 $S_n(\vec{Q},\omega)$ はTλ以上での $S(\vec{Q},\omega)$ に対応する。(5-3)の第二項の寄与を消去し、第一項の部分だけを示したのが、Fig. 10 である。絶対零度の場合.

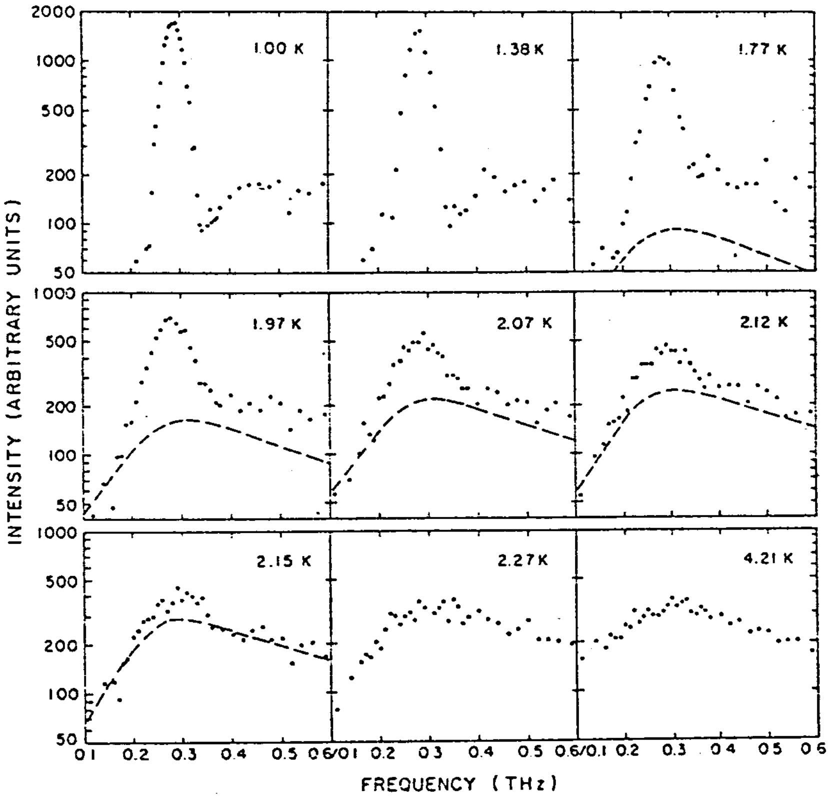


Fig. 9　$Q=1.13\,\text{Å}^{-1}$, $0.1\leq\frac{\omega}{2\pi}\leq 0.6$ THz に対する液体He4の散乱スペクトル[36)]
破線は(5-3)第二項の正常流体成分を示している。ただし $S_n(\vec{Q},\omega)$ は 2.27Kのときの $S(\vec{Q},\omega)$ を使う。

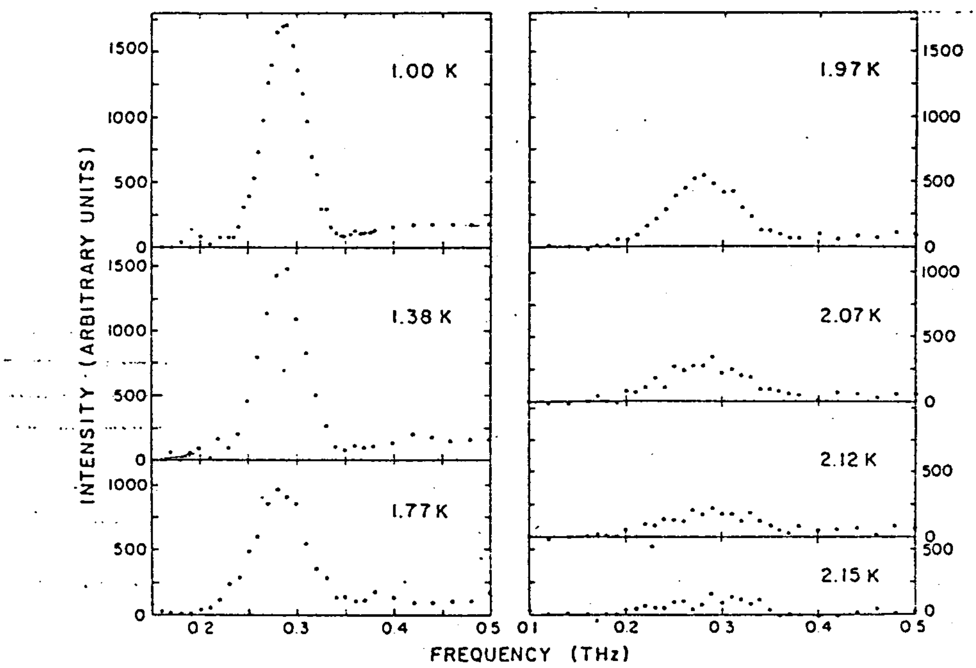


Fig. 10 散乱スペクトルから正常流体部分を差し引くことによって得られた $Q = 1.13\ \text{Å}^{-1}$ に対する超流体部分

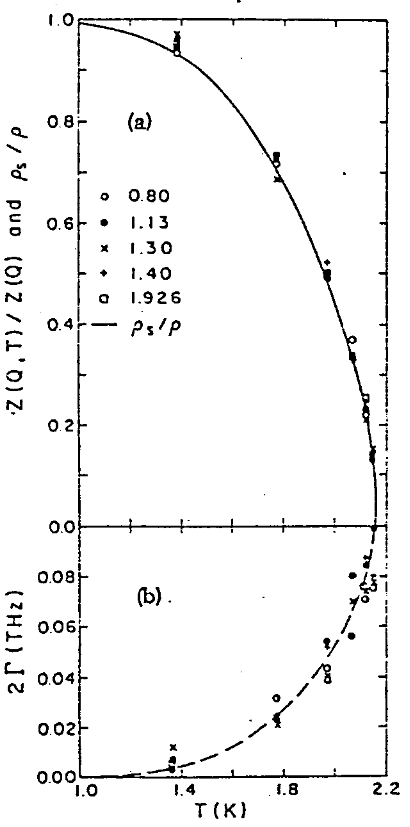


Fig. 11 (a) 超流体成分の $\frac{Z(Q,T)}{Z(Q)}$ と $\frac{\rho_s}{\rho}$
(b) 超流体成分のフォノンピークのエネルギー巾 $\Gamma(T)$

$S_s(\vec{Q},\omega)$ は強度 $Z(\vec{Q})$ をもつ δ 関数形のフォノン部分と巾の広い多重フォノン成分 $S_{II}(\vec{Q},\omega)$ からなる。有限温度の場合は、次のような形が仮定される。

$$S_s(\vec{Q},\omega) = \frac{Z(\vec{Q},T)}{\pi} \frac{\Gamma(T)}{[\omega-\omega(\vec{Q})]^2 + \Gamma^2(T)} + S_{II}(\vec{Q},\omega) \qquad (5\text{-}4)$$

ここで、フォノンピークは $\Gamma(T)$ の巾と強度 $Z(\vec{Q},T) = \frac{\rho_s}{\rho} Z(\vec{Q})$ をもつ。(5-4)の形を仮定したときの $Z(\vec{Q},T)/Z(\vec{Q})$ と ρ_s/ρ の関係および $\Gamma(T)$ の温度依存性は Fig. 11 に示されている。

第二節　密度応答関数

動的構造因子$S(\vec{q},\omega)$の二成分構造に対する理論的検討が現在すすめられている。Griffin[37]はcollisionless領域での$S(\vec{q},\omega)$の二成分構造は凝縮ボーズ系の場の理論的解析の自然な結論であること、つまり密度応答関数のダイヤグラム解析において全寄与を二つのカテゴリ、一粒子Green関数を含むか含まないか、によって分離することができることの結果である、として説明した。密度応答関数$\chi_{nn}(\vec{q},\omega)$は、上の考えにもとづいて、次のように分離される。

$$\chi_{nn}(\vec{q},\omega)=\chi^{C}_{nn}(\vec{q},\omega)+\chi^{B}_{nn}(\vec{q},\omega) \qquad (5\text{-}5)$$

ここで、一粒子Green関数を$G_{\mu\nu}(\vec{q},\omega)$ $(\mu,\nu=1,2)$としたとき、

$$\chi^{C}_{nn}(\vec{q},\omega)=\Sigma_{\mu\nu}\Lambda_{\mu}(\vec{q},\omega)G_{\mu\nu}(\vec{q},\omega)\Lambda_{\nu}(\vec{q},\omega) \qquad (5\text{-}6)$$

であり、$\chi^{B}_{nn}(\vec{q},\omega)$は一粒子Green関数を含まない項である。さらに$\Lambda_{\mu}(\vec{q},\omega)$はバーテックス部分である。動的構造因子$S(\vec{q},\omega)$と密度応答関数$\chi_{nn}(\vec{q},\omega)$の間には次の関係がある。

$$S(\vec{q},\omega)=-\frac{1}{n\pi}\frac{Im\,\chi_{nn}(\vec{q},\omega+i0^{+})}{1-e^{-\beta\omega}} \qquad (5\text{-}7)$$

そこで$\chi^{C}_{nn}(\vec{q},\omega)$に対応する$S^{C}(\vec{q},\omega)$が、$S(\vec{q},\omega)$の超流体部分に相当すると考えた。つまり、$T_{\lambda}$以下で見つけられるピークは、一粒子Green関数の極に関するモードであると考えた。ただし、

実験で観測されるρ_s依存性を示すために、次のsingular-f和則を仮定している。

$$\int_{-\infty}^{+\infty} d\omega\, \omega\, S^c(\vec{Q},\omega) = \frac{\rho_s}{\rho}\frac{Q^2}{2m} \quad (\vec{Q}\to 0) \tag{5-8}$$

一方、Wong[38]はこのsingular-f和則は微視的な量であるn_0に関する和則であり、二成分構造の実験の説明には有効でないと指摘した。彼はsingular-f和則の導出を標準的な場の理論の方法によって行ない、全運動量領域において次の形を導いた。

$$\int_{-\infty}^{+\infty} d\omega\, \omega\, S^c(\vec{Q},\omega) = \frac{n_0}{n}\left[\frac{Q^2}{2m} + \Sigma_{11}^{HF}(\vec{Q}) - \Sigma_{02}^{HF}(\vec{Q}) - \mu\right] \tag{5-9}$$

ここで、n_0は凝縮体密度、$n = \rho/m$、μは化学ポテンシャル、Σ_{ij}^{HF}はHartree-Fock自己エネルギーである。この和則(5-9)とsingular-f和則(5-8)を比較したとき、その違いはρ_sがn_0に置き変わっている点にある。この置き変えはsingular-f和則が巨視的な量ρ_sではなくて、微視的な量n_0の測定に役立つ微視的な和則であることを指摘している。(5-8)が実験で示されるcollisionless領域で成立するかどうかは今の所明らかではない。

ここでは、密度応答関数に対する位相場の寄与を明らかにするため、次に定義された粒子数密度のGreen関数を、流束密度の場合と同じ一般化されたペア近似で計算する。

$$\langle 0(\beta)|T[\rho_{\vec{k}}(t)\rho_{-\vec{k}}(t')]|0(\beta)\rangle = \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{d\omega}{2\pi}e^{-i\omega(t-t')}\,i\,F_{44}(\vec{k},\omega) \qquad (5\text{-}10)$$

ここで $\rho_{\vec{k}}$ は粒子数密度のゆらぎ演算子であり、(5-2)に定義されている。流束密度の Green 関数に対する(4-17)以下の計算と同様に、正準変換(2-8)を使い、$\rho_{\vec{k}}$を個別演算子 $a_{\vec{k}}, a_{\vec{k}}^{\dagger}$ で表現して計算を行うと、長波長、低周波数極限での $F_{44}(\vec{k},\omega)$ の値は最終的に次のようになる。

$$\lim_{(\vec{k},\omega)\to 0} F_{44}(\vec{k},\omega) = \frac{1}{g}\,\frac{\omega^{(1)}(\vec{k})^2}{\omega^2-\omega^{(1)}(\vec{k})^2} \qquad (5\text{-}11)$$

ここで $\omega^{(1)}(\vec{k})$ は(3-48)で与えられた位相場のエネルギースペクトルである。また、位相場の速度 v_0を使って、

$$\lim_{(\vec{k},\omega)\to 0} F_{44}(\vec{k},\omega) = \frac{1}{g}\,\frac{v_0^2k^2}{\omega^2-v_0^2k^2} \qquad (5\text{-}12)$$

となり、v_0は(3-49)で与えられる。

次に、粒子数密度の Green 関数に対する位相場の寄与を考える。位相場に対する Green 関数は

$$\langle 0(\beta)|T[B(\vec{r},t)B(\vec{r}',t')]|0(\beta)\rangle = \frac{i}{V}\sum_{\vec{k}}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{d\omega}{2\pi}e^{i\vec{k}(\vec{r}-\vec{r}')-i\omega(t-t')}\frac{1}{\omega^2-\omega^2(\vec{k})} \qquad (4\text{-}41)$$

であり、一般論によると粒子数密度に対する位相場の寄与は、

$$\rho^B(\vec{r},t) = -\eta\,\dot{B}(\vec{r},t) \qquad (2\text{-}41)$$

で与えられている。そこで、この $\rho^B(\vec{r},t)$ に対するGreen関数

$$\langle 0(\beta)|T[\rho^B(\vec{r},t)\rho^{B\dagger}(\vec{r}',t')]|0(\beta)\rangle = \frac{1}{V}\sum_{\vec{l}}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{d\omega}{2\pi}\, i\, F_{44}^B(\vec{l},\omega)e^{i\vec{l}(\vec{r}-\vec{r}')-i\omega(t-t')} \tag{5-13}$$

を求めると、(2-41)と(4-41)を使い、

$$F_{44}^B(\vec{l},\omega) = \eta^2 W^2(\vec{l})\frac{1}{\omega^2-\omega^2(\vec{l})} \tag{5-14}$$

となる。さらに $W(\vec{l}) = v_0|\vec{l}|$ および (4-45) を考えると、

$$F_{44}^B(\vec{l},\omega) = \frac{n_s}{n}\frac{1}{g}\frac{v_0^2 l^2}{\omega^2 - v_0^2 l^2} \tag{5-15}$$

であることがわかる。この結果、二成分構造の超流体成分部分は、密度のゆらぎの中の位相場による部分からの寄与であると考えれば、singular十和則のような仮定をせずに、ρ_s依存性を説明できることがわかる。次に $W(\vec{l})/l$ の温度依存性を考える。

(4-38)(4-39)を使って、v_0^2は次のように変形される。

$$v_0^2 = \frac{gn}{m} - \frac{(2g\chi^2-2\Delta)(\chi_A^{(1)}+\chi_B^{(1)}+2\chi_C^{(1)})}{\omega^{(1)}(\vec{l})(\chi_A(0)-\chi_B(0))+(2g\chi^2-2\Delta)(\chi_A^{(1)}+\chi_B^{(1)}+2\chi_C^{(1)})}\times$$

$$\times\frac{g}{m}\left[\chi^2+\frac{1}{3V}\sum_{\vec{k}}\frac{\Delta^2}{E_{\vec{k}}^3}\frac{k^2}{2m}\coth\left(\frac{\beta E_{\vec{k}}}{2}\right)\right] \tag{5-16}$$

$\chi_A(\vec{l})$, $\chi_B(\vec{l})$, $\chi_C(\vec{l})$ は(3-28)で示されるように、それぞれ凝縮状態から励起している粒子の対消滅過程、対生成過程、散乱過程の位相場への寄与を示している。さらに、(2-46)において、位相場は

$\psi(\vec{r})\psi(\vec{r})-\psi^{\dagger}(\vec{r})\psi^{\dagger}(\vec{r})$ に寄与していることが示されている。このことから、$\chi_A(\vec{q})-\chi_B(\vec{q})$ は一般的に $\chi_A(\vec{q})+\chi_B(\vec{q})$ および $\chi_C(\vec{q})$ に対して大きな値をとると考えられる。そこで(5-16)の右辺の第二項は、第一項に比べて無視できる量であるため、

$$v_0^2 \simeq \frac{gn}{m} \tag{5-17}$$

となり、位相場の速度は温度にほとんど依存しない値をもつことがわかる。この結果は、実験で測定された $\omega(\vec{q})/q$ が、T_λ までは温度に対してほとんど一定である事実と定性的に一致している。以上の結果、実験によって観測された $S(\vec{q},\omega)$ の二成分構造のうち、超流体成分は位相場による寄与の部分であることが確認できる。即ち、密度相関関数は、個別励起対によってつくられた位相場部分と熱的に励起された個別励起の集団振動部分に分かれている。温度が上昇すると、多くの個別励起が熱的に励起され、位相場部分は減少するが、個別励起の集団振動部分が増加し、総和(5-12)は温度に依存しない。

第三節　超流動と位相場

今までは、位相場の素励起としての側面を述べてきたが、この節では、Umezawa[20]によって提案されたボゾン変換の考え方に従い、位相場のボーズ・アインシュタイン凝縮である凝縮位相場の役割に注目する。時間的空間的に依存する秩序状態は、凝縮位相

場によって生成されることを示す。$B(\vec{r},t)$を位相場の演算子とすると、$B(\vec{r},t)$は次の方程式を満足している。

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - v_0^2 \vec{\nabla}^2\right) B(\vec{r},t) = 0 \qquad (2\text{-}34)$$

粒子場の汎関数表現(2-40)によって、ゲージ変換

$$\psi(\vec{r},t) \to e^{if(\vec{r},t)}\psi(\vec{r},t) \qquad (5\text{-}18)$$

は、位相場の次の変換

$$B(\vec{r},t) \to B(\vec{r},t) + \gamma f(\vec{r},t) \qquad (5\text{-}19)$$

によって、担われることがわかる。そこで、$f(\vec{r},t)$が次の方程式

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - v_0^2 \vec{\nabla}^2\right) f(\vec{r},t) = 0 \qquad (5\text{-}20)$$

を満足すれば、(5-19)の変換は粒子場の運動方程式を不変にする変換となる。(5-19)の変換をボゾン変換という。ボゾン変換は物理的には、時間的空間的に依存する基底状態を位相場の局所的ボーズ凝縮である凝縮位相場がつくりだしているとみなすことができる。その場合、この凝縮位相場は(5-20)の方程式によって支配されている。そこで、時間的空間的に依存する秩序状態は、適当な境界条件のもとで、(5-20)を解くことによって求められる。

Umezawaは、液体Heの超流動状態でのa.c. Josephson効果の説明[39]に、この考え方を適用した。

次に、超流動の流れと凝縮位相場の関係を考える。流束密度$j_\mu(\vec{r},t)$の中で位相場$B(\vec{r},t)$によって表現される部分は次のようになっている。

$$j_\mu^B(\vec{r},t) = v_0^2\eta\nabla_\mu B(\vec{r},t) \tag{5-21}$$

ここで、ボゾン変換(5-19)を行なうと、流束密度は次のようになり、

$$j_\mu^B(\vec{r},t) = v_0^2\eta\nabla_\mu B(\vec{r},t) + v_0^2\eta^2\nabla_\mu f(\vec{r},t)$$

この流束密度の平均値は、

$$\langle 0(\beta)|j_\mu^B(\vec{r},t)|0(\beta)\rangle = v_0^2\eta^2\nabla_\mu f(\vec{r},t) \tag{5-22}$$

となる。よく知られているように、超流体速度$\vec{v}_s$は

$$\vec{v}_s(\vec{r},t) = \frac{1}{m}\vec{\nabla} f(\vec{r},t) \tag{5-23}$$

であるので、(4-45)から、

$$\eta^2 v_0^2 = \frac{n_s}{m} \tag{5-24}$$

となる。つまり、この流束密度の平均値は、超流動の流束密度に相当することがわかる。このように、ボゾン変換、つまり凝縮位相場の存在、によって、超流動の存在が説明できることが

示される。

最後に、T_λにおける超流動の消失と凝縮位相場との関連の説明を試みる。第二章で示されたように、位相場が存在できる運動量領域は限界運動量k_c以下である。このk_cは(2-49)で与えられており、エネルギーギャップE_0に比例している。E_0は(2-25)で示されるように、凝縮体密度n_0が零になると、零になる量である。このことは、n_0が零になるT_λではk_cが零になり、位相場が存在できないことを示している。このように、T_λにおける超流動の消失は、その担い手である凝縮位相場を生成する位相場の崩壊によって説明されることになる。以上の結果、位相場はゲージ対称性の破れによって作られたGoldstoneモードであるが、それは上に述べた機構によって、ゲージ対称性の回復とともに消滅することがわかる。

第六章　結　論

この論文では、凝縮体を有するボーズ粒子系の有限温度における位相場の存在を示し、その物理的性質を明らかにした。本研究は対称性の破れの観点から、有限温度における集団励起、即ち　ゲージ対称性の破れに対するGoldstoneモードである位相場、を解析した初めての試みである。この試みを実行するため、Takahashi - Umezawaによって提案されたthermo-field-dynamicsを用いて有限温度の場合に拡張された素励起場展開の方法を利用した。

本研究の主要な結論は、次のとおりである。

(1) 転移温度以下の凝縮体の存在するボーズ粒子系において、ゲージ対称性の破れに対応するGoldstoneモードである位相場が存在する。このエネルギースペクトル $\omega(\ell)$ は、長波長域では運動量 ℓ に比例し、その速度 $v_0 (= \omega(\ell)/\ell)$ はほとんど温度に依存しない。この速度の結果は、Fig. 7で示された液体He^4の中性子非弾性散乱実験における素励起の音速の温度依存性の結果と定性的に一致している。

(2) ここで求められたエネルギースペクトルから決定される速度 v_0 の微視的表現は、絶対零度の場合、既にTakanoによって計算

された集団励起のエネルギースペクトルからおめられる結果と厳密に一致している。この意味で、この研究は、絶対零度における集団励起の微視的理論の有限温度への拡張として有効なものであると考えられる。温度依存性は、集団励起を構成する個別励起の運動を通して考慮されており、通常の場合のように、集団励起間の相互作用によるものではない。

(3) 位相場の存在領域は、限く k_c の運動量領域に制限されている。限界運動量 k_c 以上の運動量をもつ位相場の量子は、二つの個別励起に崩壊する。ここで k_c は $2E_0/v_0$ で定義される量である。さらに、不確定性原理 $\Delta r \cdot \Delta k \geq 1$ を考慮すると、実空間では位相場は $\Delta r \sim \frac{1}{k_c}$ よりか小な領域に存在することができないことを示している。もし、そのような領域内にとどめようとすると、不確定性原理により、位相場の量子は個別励起に崩壊するに充分なエネルギーをえることになる。同様のことは、超電導状態にボゾン法を適用し位相場の役割を議論したときに指摘されている[40]。

(4) 位相場のエネルギースペクトルを計算するときに、本論文で使った一般化されたペア近似の方法は、次の粒子数保存則を満足することが示された。

$$\frac{\partial}{\partial t}\langle 0(\beta)|\rho(\vec{r},t)B_q^{+}(\beta)|0(\beta)\rangle + \vec{\nabla}\cdot\langle 0(\beta)|\vec{j}(\vec{r},t)B_q^{+}(\beta)|0(\beta)\rangle = 0 \qquad (3\text{-}54)$$

この関係式は密度の位相場部分に対して保存則が成立していることを示している。

(5) 流束密度相関関数の低周波数、長波長極限での値を、エネルギースペクトルを計算したときと同じ一般化したペア近似で求めた。この計算結果の静的極限をとることにより、超流体密度 $n_s(T)$ および常流体密度 $n_n(T)$ の微視的表現を之た。この表現は、個別励起のエネルギースペクトル $E_{\vec{k}}$ を Bogolyubov のスペクトル $E_{\vec{k}}^B$ に置き換えたとき、Usui および Pasquale-Talbet が求めた超流動密度の微視的表現と一致している。

(6) Hohenberg - Martin は有限温度の場合、流束密度応答関数 $F_{ij}(\vec{k},\omega)$ は一般に次のように表現されることを示した。

$$F_{ij}(\vec{k},\omega) = \left[\rho_n^{ij}(\vec{k},\omega) + \rho_s^{il}(\vec{k},\omega)F_{v_{sl}v_{sm}}(\vec{k},\omega)\rho_s^{mj}(\vec{k},\omega)\right]\left(-\frac{1}{m^2}\right) \qquad (4\text{-}14)$$

現在の低周波数、長波長極限の計算は、流れの応答が位相場の寄与と個別励起の寄与に区別されることを示している。右辺第一項の常流体部分は熱的に励起された個別励起によって担われ、第二項の超流体部分は位相場によって担われることがわかった。流束密度の位相場部分は

$$\vec{j}^B(\vec{r},t) = v_0^2\eta\vec{\nabla}B(\vec{r},t) \qquad (2\text{-}41)$$

であるので、$F_{ij}(\vec{k},\omega)$ の計算結果と比較することにより、C数

η の微視的表現も立た。

$$\eta(T) = \frac{1}{v_0}\left[\frac{n_0}{m} + \frac{\Delta^2}{3m}\frac{1}{V}\Sigma_{\vec{k}}\frac{\left(\frac{k^2}{2m}\right)}{E_{\vec{k}}^3}\coth\left(\frac{\beta E_{\vec{k}}}{2}\right) - \frac{2\Delta^2}{3m}\frac{1}{V}\Sigma_{\vec{k}}\frac{\left(\frac{k^2}{2m}\right)}{E_{\vec{k}}^2}\frac{\partial f_{\vec{k}}}{\partial E_{\vec{k}}}\right]^{1/2} \quad (4\text{-}45)$$

この結果はηが超流体密度n_sと次のように関係していることを示している。

$$\eta(T) = \frac{1}{v_0}\left[\frac{n_s}{m}\right]^{1/2} \quad (4\text{-}45)$$

ここでv_0は(5−17)で示されるように$\left[\frac{gn}{m}\right]^{1/2}$である。

(7) Woods と Svensson は中性子非弾性散乱実験により、T_λ以下の動的構造因子$S(\vec{q},\omega)$は、次のように二成分からなることを見い出した。

$$S(\vec{q},\omega) = \frac{\rho_s(T)}{\rho}S_s(\vec{q},\omega) + \frac{\rho_n(T)}{\rho}S_n(\vec{q},\omega) \quad (5\text{-}3)$$

ここで$S_s(\vec{q},\omega)$は超流体の存在を特徴づける部分であり、単一フォノンおよび多重フォノンピークを示している。一方、$S_n(\vec{q},\omega)$は常流体のみが存在しているT_λ以上の$S(\vec{q},\omega)$である。

流束密度相関関数を求めたと同じ一般化されたペア近似で計算された長波長、低周波数極限での密度相関関数$F_{44}(\vec{k},\omega)$は

$$\lim_{(\vec{k},\omega)\to 0} F_{44}(\vec{k},\omega) = \frac{1}{g}\frac{v_0^2k^2}{\omega^2 - v_0^2k^2} \quad (5\text{-}12)$$

となる。一方密度相関関数に対する位相場の寄与は

$$F^{p}_{44}(k,\omega) = \frac{n_s}{n}\frac{1}{g}\frac{v_0^2k^2}{\omega^2 - v_0^2k^2} \tag{5-15}$$

となるので、動的構造因子の超流体成分は位相場による部分であることがわかる。通常、Goldstoneモードである位相場と中性子非弾性散乱実験で観測されるフォノンは同一視されている。しかしフォノンスペクトルはT_λ以上でも存在し、Goldstoneモードとは認めがたい。本研究は密度相関関数が位相場による部分と熱的に励起された個別励起による集団振動部分からなることを示している。両部分の分散関係は一致しており、かつ小さいQ($<0.2\text{Å}^{-1}$)ではlife timeも同程度であるので分離されることはない。しかしQが大きくなると、両部分のlife timeの相違のためスペクトルの形が異なり、両部分は分離されると考えられる。この事実は、動的構造因子の二成分構造という形をとる。位相場による部分はρ_sに比例しているため、T_λ以上では消滅する。Woodsらの動的構造因子の二成分構造を、このような立場から解明したのは、本研究が最初である。

(8) 超流動は位相場のBose凝縮である凝縮位相場によって担われる。位相場の存在する運動量領域を示す切断運動量k_cは、T_λで個別励起のエネルギーギャップE_0が零になることより、T_λで零になる。T_λでの超流動の消滅は、位相場自身が崩壊することによって説明される。このように、ゲージ対称性の破れによって作られたGoldstoneモードである

位相場は、ゲージ対称性の回復とともに消滅する集団励起である。

以上の結果、超流動状態においてゲージ対称性の破れに対するGoldstoneモードである位相場が存在すること、そしてその位相場はWoodsらの実験で示された動的構造因子の二成分構造の超流体成分を担っていることが明らかとなった。

最後に、今後の研究課題について述べてみる。

(1) 本論文は有限温度における凝縮体をもつ均質なボーズ粒子系を取り扱った。回転している円筒容器中の液体Heには、回転速度が早くなると、渦糸が発生することはよく知られている。そこで、渦糸が存在している不均質系の理論をつくる必要がある。Umezawaはボゾン変換の方法を応用し、第二種超伝導体の渦の問題[41]を議論して、単一の渦の構造および渦間の相互作用を明らかにした。液体Heの場合も同様の方法を応用して、渦糸が存在する場合の問題を議論することができる。

(2) 超流動の消滅は転移温度以下でも、超流動の流速が臨界速度を越える場合におこることはよく知られている。Onsager[42]とFeynman[43]とが量子渦糸，渦輪の存在を指摘して以来、この構造物を超流動の破壊機構の基礎とみなすようになっている。そのため、この臨界速度の問題は前項(1)の課題とも密接に

関連した問題であり、渦糸などの構造物の生成および発達機構を問題にする必要がある。この場合、凝縮位相場の時間に依存したふるまいの検討が必要になる。

(3) 本論文で検討したのは、三次元のボーズ粒子系のふるまいである。二次元およびフィルム系の場合、Bose-Einstein 凝縮がおこらないことは厳密に理論的に証明されているが[14),44)]、一方実験においては、フィルム系での超流動が観測されている。[45)] このような系における超流動の担い手となる凝縮位相場の存在および役割を明らかにすることは重要な課題である。この問題は、ボーズ凝縮と超流動性の関連を探るという点からも重要である。

(4) Woods と Svensson によって観測された動的構造因子の二成分構造のうち超流体成分は、位相場によって担われる部分であることを既に指摘した。実験で観測される超流体部分には温度に依存するエネルギー巾をもつ単一フォノンピークが存在するとともに、多重フォノン成分も存在する。現在の一般化されたペア近似ではピーク巾、多重フォノン成分の存在を示すことはできない。位相場という実体をよりリアルに把握するためには、現在の立場を基礎にしつつ、理論の改善が必要である。特に、ピーク巾の温度依存性の計算は興味ある課題である。

謝　　　辞

本研究は大阪大学工学部応用物理学教室において、庄司一郎教授の御指導の下に行われたものである。研究を遂行するにあたり、終始暖かく見守って下さいました庄司先生に心からお礼申し上げます。

問題提起に始まり、本研究の終了までの間、数々の有益な議論と励げましを下さいました一柳正和博士に対して心から感謝いたします。また本研究に対して有益な助言を下さいました西山敏之教授に心からお礼申し上げます。さらに、庄司研究室の輿地斐男助教授、宮島佐介博士、その他庄司研究室の皆様にお世話になりました。ここに感謝します。

また、著者に対して、1981年4月から1年間、庄司研究室での研修の機会を与えて下さいました長崎総合科学大学電気工学教室の皆様に厚くお礼申し上げます。

参 考 文 献

1) 恒藤敏彦 ： 量子物理学の展望(下) (岩波書店, 1978) 第19章.

中嶋貞雄 ： 物性 II (岩波講座 現代物理学の基礎 8) (岩波書店, 1978) 第4章.

高橋 康 ： 物性研究者のための場の量子論 II (培風館, 1976).

D. Forster : Hydrodynamic Fluctuations, Broken Symmetry and Correlation Functions (W.A.Benjamin, 1975).

J. de Boer : Physica 69 (1973) 193 (液体Heの相転移との関連).

2) J. Goldstone, A. Salam and S. Weinberg : Phys. Rev. 127 (1962) 965.

R.V. Lange : Phys. Rev. 146 (1966) 301.

H. Wagner : Z. Physik 195 (1966) 273.

3) P.W. Anderson : Phys. Rev. 112 (1958) 1200.

N.N. Bogoliubov, V.V. Tolmachev and D.V. Shirkov : A New Method in the Theory of Superconductivity (Consultant Bureau, 1959).

4) N.M. Hugenholtz and D. Pines : Phys. Rev. 116 (1959) 489.

5) F. London : Phys. Rev. 54 (1938) 947.

6) L. Tisza : Nature 141 (1938) 913.

7) L. Landau : J. Phys. U.S.S.R. 5 (1941) 71, 11 (1947) 91.

8) N.N. Bogoliubov : J. Phys. U.S.S.R. 11 (1947) 23.

9) P.W. Anderson : Many Body Problem vol.2 (Ravello, 1963).

10) P.C. Hohenberg and P.C. Martin : Ann. Phys. 34 (1965) 291.

11) J. Bardeen, L.N. Cooper and J.R. Schrieffer : Phys. Rev. 108 (1957) 1175.

12) R.J. Glauber : Phys. Rev. 131 (1963) 2766.

13) L. Landau : Phys. Z. Sowjet Union, 8 (1935) 113, 11 (1937) 26, 545.

14) P.C. Hohenberg : Phys. Rev. 158 (1967) 383.

15) M. Girardeau and M. Arnowitt : Phys. Rev. 113 (1959) 755.

16) S.T. Beliaev : Sov. Phys. JETP 7 (1958) 289, 299.

17) W.E. Parry and R.E. Turner : Phys. Rev. 128 (1962) 929.

18) J. Gavoret and P. Nozieres : Ann. Phys. 28 (1964) 349.

19) L. Leplae, R.N. Sen and H. Umezawa : Nuovo Cimento 49 (1967) 1, Suppl. Prog. Theor. Phys. (Kyoto) (Commerative issue for 30 th Anniversary of the Meson Theory by Dr. H. Yukawa) (1965) 637.

20) H. Umezawa : Renormalization and Invariance in Quantum Field Thery (Plenum Press, 1973).

H. Umezawa and H. Matsumoto : Symmetries in Science (Plenum Press, 1980).

21) L. Leplae, H. Umezawa and F. Mancini : Physics Reports 10C (1974) 151.

H. Matsumoto and H.Umezawa : Fortsch. Phys. 24 (1976) 357.

22) H. Matsumoto, H. Umezawa, S. Seki and M. Tachiki : Phys. Rev. B17 (1978) 2276.

23) M. Wadati : Physics Reports 50 (1979) 87.

24) M. Tachiki, H. Matsumoto and H. Umezawa : Phys. Rev. B20 (1979) 1915.

25) A. Coniglio and M. Marinaro : Nuovo Cimento 48 (1967) 262.

26) Y. Takahashi and H. Umezawa : Collective Phenomena 2 (1975) 55.

27) F. Takano : Phys. Rev. 123 (1961) 699.

28) G.W. Goble and D.H. Kobe : phys. Rev. A10 (1974) 851.

29) D. Forster : 前掲(1) P254.

30) T. Usui : Prog. Theor. Phys. 32 (1964) 190.

31) F. de Pasquale and E. Tabet : Ann. Phys. 51 (1969) 223.

32) F. de Pasquale, G. Jona-Lasinio and E. Tabet : Ann. Phys. 33 (1965) 381.

33) F. de Pasquale and P. Tombesi : Physica 56 (1971) 151.

34) L. Van Hove : Phys. Rev. 95 (1954) 249.

35) R.A. Cowley and A.D.B. Woods : Can. J. Phys. 49 (1971) 177.

36) A.D.B. Woods and E.C. Svensson : Phys. Rev. Lett. 41 (1978) 974.
E.C. Svensson, V.F. Sears and A. Griffin : Phys. Rev. B23 (1981) 4493.

37) A. Griffin : Phys. Rev. B19 (1979) 5946.
A. Griffin and E. Talbot : Phys. Rev. B24 (1981) 5075.

38) V.K. Wong : Phys. Lett. 73A (1979) 398.

39) L. Laplae, F. Mancini and H. Umezawa : Phys. Lett. 34A (1971) 301.

40) L. Laplae and H. Umezawa : Jour. Math. Phys. 10 (1969) 2038.

41) L. Laplae, F. Mancini and H. Umezawa : Phys. Rev. B2 (1970) 3594.

42) L. Onsager : Nuovo Cimento Suppl. 6 (1949) 2249.

43) R.P. Feynman : Prog. Low. Temp. Phys. Vol.1 (north Holland, 1955).

44) G.V. Chester, M.E. Fisher and N.D. Mermin : Phys. Rev. 185 (1969) 760.

45) I. Rudnick and J.C. Fraser : Jour. Low. Temp. Phys. 3 (1970) 225.
I. Rudnick : Phys. Rev. Lett. 40 (1978) 1454.
D.J. Bishop and J.D. Reppy : Phys. Rev. Lett. 40 (1978) 1727.
実験で示される二次元He フィルムの超流動転移の理論として
J.M. Kosterlitz and D.V. Thouless : Jour. Phys. C5 (1972) L124, C6 (1973) 1181.

46) P.W. Anderson : Rev. Mod. Phys. 38 (1966) 298.

47) J.S. Langer : Phys. Rev. 167 (1968) 183, 219.

48) F.W. Cummings and J.R. Johnston :Phys. Rev. 151 (1966) 105.

49) H. Umezawa : Acta. Phys. Hung. 19 (1965) 9.

50) M. Ichiyanagi and M. Ohya : Jour. Phys. Soc. Japan 41 (1976) 1870.

51) A.E. Glassgold and H. Sauermann : Phys. Rev. 182 (1969) 262.

附録 I

ここでは、今まで提案されている超流動基底状態の形を具体的に示してみよう。

1) Andersonの理論[46)]

Andersonは全粒子数の異なる状態の重ね合わせの状態として、次のような平均粒子数$\bar{N}$のまわりにガウス分布している状態を考えた。

$$|\bar{N},\chi\rangle = \Sigma_N a_N e^{iN\chi}|\Phi_N^0\rangle \quad , \qquad a_N = \frac{1}{2\pi(\Delta N)^{1/2}} e^{-(N-\bar{N})^2/2(\Delta N)^2} \quad . \qquad (\text{I}-1)$$

均質な系において、この状態での粒子場$\Psi = V^{-1}\int d\vec{r}\psi(\vec{r})$の期待値は、

$$\langle\bar{N},\chi|\Psi|\bar{N},\chi\rangle = e^{i\chi}\Sigma_N a_{N-1} a_N \langle\Phi_{N-1}^0|\Psi|\Phi_N^0\rangle \approx n_0^{1/2} e^{i\chi} \qquad (\text{I}-2)$$

となる。Andersonはこのガウス型の状態を液体Heに適用して、波動関数の位相に関する興味ある現象について議論した。

2) Langerの理論[12) 47)]

Langerは粒子場$\psi(\vec{r}) = \frac{1}{\sqrt{V}}\Sigma_{\vec{k}} C_{\vec{k}} e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}}$に対するコヒーレント状態を考えた。

$$\psi(\vec{r})|\Phi(\vec{r})\rangle = \Phi(\vec{r})|\Phi(\vec{r})\rangle \quad , \qquad C_{\vec{k}}|G_{\vec{k}}\rangle = G_{\vec{k}}|G_{\vec{k}}\rangle \qquad (\text{I}-3)$$

ここで固有値$\Psi(\vec{r})$は複素固有値$G_{\vec{k}}$の組から次のように決定される。

$$\Psi(\vec{r}) = \frac{1}{\sqrt{V}} \Sigma_{\vec{k}} G_{\vec{k}} e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} = n_0(\vec{r}) e^{i\chi(\vec{r})} \qquad (\text{I}-4)$$

コヒーレント状態$|\Psi(\vec{r})\rangle$は状態$\vec{k}$にいる粒子数$N_{\vec{k}}$の異なる状態$|N_{\vec{k}}\rangle$の重ね合わせとして、次のように表現される。

$$|\Psi(\vec{r})\rangle = \prod_{\vec{k}} |G_{\vec{k}}\rangle = \prod_{\vec{k}} \left\{ e^{-\frac{1}{2}|G_{\vec{k}}|^2} \sum_{N_{\vec{k}}} \frac{G_{\vec{k}}^{N_{\vec{k}}}}{(N_{\vec{k}}!)^{\frac{1}{2}}} |N_{\vec{k}}\rangle \right\} \qquad (\text{I}-5)$$

Langerはこのコヒーレント状態を基礎にして、超流動状態の平衡および非平衡状態の性質を議論した。液体Heの基底状態がこのコヒーレント状態であるとすれば、どの密度行列も完全に因数分解されてしまう。液体Heの場合明らかに因数分解されない部分を残しているので、基底状態は粒子場$\psi(\vec{r})$に対するコヒーレント状態ではない。

3) Cummings-Johnston の理論[48)]

Cummings と Johnston は、Landau の素励起概念を使って、超流動基底状態は粒子場ではなく、素励起場の生成・消滅演算子に対するするコヒーレント状態である、と考えた。この状態がどのようにして導かれるかを簡単に示してみよう。全ハミルトニアンを次のように、ペアハミルトニアンと追加項の形に変形する。

$$H = \sum_{\vec{k}} E_{\vec{k}} C_{\vec{k}}^{+} C_{\vec{k}} + \frac{1}{2} \sum_{\vec{k}} P_{\vec{k}}^{*} C_{\vec{k}} C_{-\vec{k}} + \frac{1}{2} \sum_{\vec{k}} P_{\vec{k}} C_{-\vec{k}}^{+} C_{\vec{k}}^{+} -$$

$$- \sum_{\vec{k}} \left(A_{\vec{k}}^{*} C_{\vec{k}} + A_{\vec{k}} C_{\vec{k}}^{+} \right) \quad . \qquad (\text{I-6})$$

ここで$E_{\vec{k}}$, $P_{\vec{k}}$, $A_{\vec{k}}$は次のように定義されている。

$$E_{\vec{k}} = N V(0) - \mu + \frac{k^2}{2m} + \sum_{\vec{p} \neq \vec{k}} V(|\vec{k}-\vec{p}|) \langle C_{\vec{p}}^{+} C_{\vec{p}} \rangle \quad ,$$

$$P_{\vec{k}} = \sum_{\vec{p} \neq \vec{k}} V(|\vec{k}-\vec{p}|) \langle C_{\vec{p}} C_{-\vec{p}} \rangle \quad ,$$

$$A_{\vec{k}} = - \sum_{\substack{\vec{p}, \vec{r} \\ \left(\substack{\vec{p} \neq 0 \quad \vec{r} \neq -\vec{k} \\ \vec{p} \neq \vec{r}-\vec{k}} \right)}} V(|\vec{p}|) \langle C_{\vec{r}}^{+} C_{\vec{r}-\vec{p}} C_{\vec{k}+\vec{p}} \rangle \quad . \qquad (\text{I-7})$$

$V(|\vec{k}|)$は二体ポテンシャルのフーリエ成分，μは化学ポテンシャル、Nは全粒子数である。ペアハミルトニアン部分を対角化するために、次の正準変換を実行する。

$$a_{\vec{k}} = T_{\vec{k}} C_{\vec{k}} T_{\vec{k}}^{+} = \frac{C_{\vec{k}} - g_{\vec{k}} C_{-\vec{k}}^{+}}{(1 - |g_{\vec{k}}|^2)^{1/2}} \quad . \qquad (\text{I-8})$$

ここで$T_{\vec{k}}$、$g_{\vec{k}}$は次のように与えられる。

$$T_{\vec{k}} = e^{\gamma_{\vec{k}} C_{\vec{k}}^{+} C_{-\vec{k}}^{+} - \gamma_{\vec{k}}^{*} C_{\vec{k}} C_{-\vec{k}}} = (T_{\vec{k}}^{+})^{-1} \quad ,$$

$$g_{\vec{k}} = - \frac{E_{\vec{k}} - \Omega_{\vec{k}}}{P_{\vec{k}}^{*}} = \frac{\gamma_{\vec{k}}}{|\gamma_{\vec{k}}|} \tanh |\gamma_{\vec{k}}| \quad . \qquad (\text{I-9})$$

変換されたハミルトニアンは

$$H = E_0 + \sum_{\vec{k}} \Omega_{\vec{k}} (a_{\vec{k}}^{+} - \alpha_{\vec{k}}^{*})(a_{\vec{k}} - \alpha_{\vec{k}}) \qquad (\text{I-10})$$

となり、E_0は基底状態のエネルギーであり、$\Omega_{\vec{k}}$, $\alpha_{\vec{k}}$は次のように与えられる。

$$\Omega_{\vec{k}} = (E_{\vec{k}}^2 - |P_{\vec{k}}|^2)^{1/2} ,$$

$$\alpha_{\vec{k}} = \frac{A_{\vec{k}} + g_{\vec{k}} A_{-\vec{k}}^*}{\Omega_{\vec{k}} (1 - |g_{\vec{k}}|^2)^{1/2}} . \qquad (\text{I-11})$$

このハミルトニアンを完全に対角化するために、最終的に次の変換を実行する。

$$b_{\vec{k}} = \mathcal{D}(\alpha_{\vec{k}})\, a_{\vec{k}}\, \mathcal{D}^{\dagger}(\alpha_{\vec{k}}) = a_{\vec{k}} - \alpha_{\vec{k}} . \qquad (\text{I-12})$$

ここで

$$\mathcal{D}(\alpha_{\vec{k}}) = e^{\alpha_{\vec{k}} a_{\vec{k}}^{\dagger} - \alpha_{\vec{k}}^* a_{\vec{k}}} \qquad (\text{I-13})$$

である。以上の結果から、$a_{\vec{k}}$で表現された基底状態は

$$|\Phi_0\rangle = \prod_{\vec{k}} \mathcal{D}(\alpha_{\vec{k}})|vac\rangle_a = \prod_{\vec{k}} e^{-\frac{1}{2}|\alpha_{\vec{k}}|^2} e^{\alpha_{\vec{k}} a_{\vec{k}}^{\dagger}} |vac\rangle_a \qquad (\text{I-14})$$

となり、$c_{\vec{k}}$で表現された基底状態は

$$|\Phi_0\rangle = \prod_{\vec{x}} \mathcal{D}(\alpha_{\vec{x}}) \prod_{\vec{k}} J_{\vec{k}} |0\rangle_c$$

$$= \exp\left[\sum_{\vec{x}} (\alpha_{\vec{x}} c_{\vec{x}}^{\dagger} - \alpha_{\vec{x}}^* c_{\vec{x}})\right] \exp\left[\sum_{\vec{k}} (\gamma_{\vec{k}} c_{\vec{k}}^{\dagger} c_{-\vec{k}}^{\dagger} - \gamma_{\vec{k}}^* c_{\vec{k}} c_{-\vec{k}})\right] |0\rangle_c \qquad (\text{I-15})$$

である。$|0\rangle_c$は粒子場$c_{\vec{k}}$, $c_{\vec{k}}^{\dagger}$の真空状態である。(I-14)を(I-5)と比較すれば明らかなように、この場合のコヒーレント状態は粒子

場$c_{\vec{k}}$, $c^{+}_{\vec{k}}$ではなく、素励起場$\alpha_{\vec{k}}$, $\alpha^{+}_{\vec{k}}$で定義されている。この議論では、超流動基底状態は正常流体中のノーマルモードがコヒーレントに励起することによって全系のエネルギーを低下させたものとみなされている。しかし、超流体状態においては、ボーズ・アインシュタイン凝縮の存在を前提とするのが通常の立場であるので、凝縮相のノーマルモードを正確に求めることが必要になる。

4) Umezawa の理論[49) 50)]

Umezawaはボーズ凝縮が存在しているボーズ粒子系において、ハミルトニアンを対角化するノーマルモードを求める一般的方法を示した。この系のハミルトニアンHを

$$H = H_0(c, c^{+}) + H_I(c, c^{+}),$$

$$H_0(c, c^{+}) = \Sigma_{\vec{k}}\, \omega_{\vec{k}}\, c^{+}_{\vec{k}} c_{\vec{k}} \quad , \quad \omega_{\vec{k}} = \frac{k^2}{2m} - \mu \quad ,$$

$$H_I(c, c^{+}) = \frac{1}{2V} \Sigma_{\vec{p},\vec{q},\vec{k}}\, V(\vec{q})\, c^{+}_{\vec{p}-\vec{q}}\, c^{+}_{\vec{k}+\vec{q}}\, c_{\vec{k}}\, c_{\vec{p}} \qquad (\mathrm{I}\text{-}16)$$

とする。ここで$V(\vec{q})$は二体粒子間ポテンシャルのフーリエ成分である。ノーマルモードの生成・消滅演算子を$b^{+}_{\vec{k}}$, $b_{\vec{k}}$とすると、ハミルトニアンHは

$$H = \overline{H}_0(b, b^{+}) + Q_V \quad , \quad \overline{H}_0(b, b^{+}) = \Sigma_{\vec{k}}\, E_{\vec{k}}\, b^{+}_{\vec{k}} b_{\vec{k}} + W_0 \qquad (\mathrm{I}\text{-}17)$$

となる。ここで、Q_Vは$V\to\infty$のとき消える量であり、$E_{\vec{k}}$とW_0はあるC数である。問題は次のような変換

$$C_{\vec{k}} = T_V^{-1}\, b_{\vec{k}}\, T_V \tag{I-18}$$

を見つけることである。もしこの変換が存在すると、ノーマルモードの基底状態$|\Psi\rangle$は次の式で定義され、

$$b_{\vec{k}}|\Psi\rangle = 0 \tag{I-19}$$

粒子場の真空状態$|0\rangle$を使って、

$$|\Psi\rangle = T_V|0\rangle \tag{I-20}$$

で表現されることになる。Umezawaはこの変換を二段階で行なった。最初に、演算子$C_{\vec{k}}$を演算子$a_{\vec{k}}$に正準変換する。

$$
\begin{aligned}
C_{\vec{k}} &= \cosh\theta_{\vec{k}}\, a_{\vec{k}} - e^{i\varphi_{\vec{k}}}\sinh\theta_{\vec{k}}\, a^{\dagger}_{-\vec{k}} + V^{1/2}\chi\,\delta_{\vec{k},0} \\
C^{\dagger}_{\vec{k}} &= \cosh\theta_{\vec{k}}\, a^{\dagger}_{\vec{k}} - e^{-i\varphi_{\vec{k}}}\sinh\theta_{\vec{k}}\, a_{-\vec{k}} + V^{1/2}\chi^{*}\,\delta_{\vec{k},0}
\end{aligned}
\tag{I-21}
$$

ここで$|\chi|^2$は凝縮体粒子数密度n_0である。この変換は次のようにも表現できる。

$$C_{\vec{k}} = G^{-1}\, a_{\vec{k}}\, G \tag{I-22}$$

$$G = \exp\left\{\tfrac{1}{2}\Sigma_{\vec{k}}\,\theta_{\vec{k}}\left(e^{i\varphi_{\vec{k}}}a_{\vec{k}}a_{-\vec{k}} - e^{-i\varphi_{\vec{k}}}a^{\dagger}_{\vec{k}}a^{\dagger}_{-\vec{k}}\right)\right\}\exp\left\{V^{1/2}\left(\chi a_0^{\dagger} - \chi^{*}a_0\right)\right\} \tag{I-23}$$

第二段階は、演算子 $a_{\vec{k}}$ を演算子 $b_{\vec{k}}$ で表現する次のような変換 S_V を求めることである。

$$a_{\vec{k}} = S_V^{-1} b_{\vec{k}} S_V = Z^{1/2} b_{\vec{k}} + (\, b_{\vec{k}},\ b_{\vec{k}}^{+} \text{ の2次以上のノーマル積} \,) \tag{I-24}$$

ここで Z は C 数である。超流動基底状態 $|\Phi\rangle$ の物理的性質を議論するためには、S_V の構造を明らかにしなければならない。

そのために、ハミルトニアン H を演算子 a で表現する。

$$H = \overline{H}_0(a, a^+) + \overline{H}_I(a, a^+) + \delta H(a, a^+) \tag{I-25}$$

ここで

$$\overline{H}_0(a, a^+) = \Sigma_{\vec{k}} E_{\vec{k}} a_{\vec{k}}^+ a_{\vec{k}} + W_0$$

$$\overline{H}_I(a, a^+) = H_I(c, c^+) \tag{I-26}$$

$$\delta H(a, a^+) = \Sigma_{\vec{k}} [\, u_{\vec{k}} a_{\vec{k}}^+ a_{\vec{k}} + v_{\vec{k}} a_{\vec{k}}^+ a_{-\vec{k}}^+ + v_{\vec{k}}^* a_{\vec{k}} a_{-\vec{k}} \,] + (\omega a_0^+ + \omega^* a_0) + \delta W_0$$

である。ただし、$u_{\vec{k}}$, $v_{\vec{k}}$, ω, δW_0 は

$$u_{\vec{k}} = -E_{\vec{k}} + \omega_{\vec{k}} \cosh 2\theta_{\vec{k}}$$

$$v_{\vec{k}} = -\frac{\omega_{\vec{k}}}{2} e^{i\psi_{\vec{k}}} \sinh 2\theta_{\vec{k}} \tag{I-27}$$

$$\omega = \omega_0 (\, \chi \cosh\theta_0 - \chi^* e^{i\psi_0} \sinh\theta_0 \,)$$

$$\delta W_0 = \omega_0 |\chi|^2 + \Sigma_{\vec{k}} \omega_{\vec{k}} \sinh^2\theta_{\vec{k}} - W_0$$

である。S_V は次の条件を満足しなければならない。

$$S_v^{-1}[\bar{H}_0(b,b^+)+\bar{H}_I(b,b^+)+\delta H(b,b^+)]S_v = \bar{H}_0(b,b^+)+Q_v \quad (I\text{-}28)$$

そこで、S_vは次のように与えられる。

$$S_v = 1-i\int_{-\infty}^{0} dt : H_I(t)+\delta H(t) : S_v(t)$$

$$H_I(t)+\delta H(t) = e^{-\varepsilon|t|}\{\bar{H}_I(be^{-iEt}, b^+e^{iEt})+\delta H(be^{-iEt}, b^+e^{iEt})\} \quad (I\text{-}29)$$

ただし εは V^p $(-\frac{1}{3}<p<0)$の量である。パラメータ v_k, v_k, ω, δN_0 は $H_I(b,b^+)+\delta H(b,b^+)$が b^+b, b^+b^+, bb, b^+, b を含まないという条件から決定される。記号 $:A(b,b^+):$は演算子 b^+, b のノーマル積を示している。上式からS_vは近似的に次のようになる。

$$S_v = \exp[-i\int_{-\infty}^{0} dt : \bar{H}_I(t) :] \quad (I\text{-}30)$$

ただし $:\bar{H}_I(t):$ は演算子 b^+, b の3個以上のノーマル積からなる。このようにして，S_vの構造が決定される。

超流体基底状態$|\Psi\rangle$を演算子 C_k^+, C_kで表現する。変換(I-24)を使い、

$$|\Psi\rangle = S_v(a)|\bar{0}\rangle, \quad a_k|\bar{0}\rangle = 0 \quad (I\text{-}31)$$

となる。$|\bar{0}\rangle$は演算子a_kの真空である。さらに変換(I-22)から

$$|\bar{0}\rangle = G(c)|0\rangle, \quad c_k|0\rangle = 0 \quad (I\text{-}32)$$

となる。(I-31)(I-32)より $|\Phi\rangle$ は

$$|\Phi\rangle = S_V(c)\, G(c)\, |0\rangle \tag{I-33}$$

である。$S_V(c)$ は(I-30)中の $b_{\vec{k}}$ を $c_{\vec{k}}$ に置き換えることによって得られる。

最後に、Umezawaの理論とCummings－Johnstonの理論の関係を述べる。CummingsとJohnstonは凝縮体密度 $|x|^2$ が零であるとし、さらに次のような近似を導入した。

$$c^\dagger c^\dagger c c = \langle c^\dagger c^\dagger c \rangle c + \langle c^\dagger c c \rangle c^\dagger \tag{I-34}$$

Umezawaの理論で $x = 0$ とおき、さらに、

$$b^\dagger b^\dagger b b = \langle b^\dagger b^\dagger b \rangle b + \langle b^\dagger b b \rangle b^\dagger \tag{I-35}$$

の近似を行なうと、得られた超流動基底状態はCummingsとJohnstonの理論の結果と一致することがわかる。Umezawaの理論は凝縮体の存在とそのゆらぎを含んでいる点で、CummingsとJohnstoneの理論と本質的に異なっている。この他、凝縮体のゆらぎのみをとりあげ、このモードの基底状態の構造を明らかにした研究として、GlassgoldとSauerman[51]の研究をあげることができる。

附　録　II

ここでは、集団励起モードに関する本論文の研究とTakano[27]による研究との関係について述べる。Takanoは本論文と同様に、エネルギーギャップを持つ準粒子の高次の相互作用を考慮して、ギャップレスの集団励起スペクトルを導いた。Takanoは絶対零度の場合を考えているので、系を支配するハミルトニアンとして、(2-22)で $f_{kl}(0)=0$ としたものを使った。そして集団励起の固有モードを次のように構成した。

$$\beta_l^{+} = \varphi_l a_l^{+} + \chi_l a_{-l} + \sum_k{}' \left\{ \xi(k;l) a_{k+l}^{+} a_{-k}^{+} + \eta(k;l) a_{-k-l} a_{-k} \right\} \tag{II-1}$$

係数 φ_l, χ_l, $\xi(k;l)$, $\eta(k;l)$ は β_l^{+} が次の方程式を満足するという条件によって決定される。

$$[\,H\,,\ \beta_l^{+}\,] = \Omega_l\, \beta_l^{+} \tag{II-2}$$

便利のために、次の量を導入する。

$$x_l = \varphi_l + \chi_l \ , \qquad y_l = \varphi_l - \chi_l$$

$$X(k;l) = \xi(k;l) + \eta(k;l) \ , \quad Y(k;l) = \xi(k;l) - \eta(k;l) \tag{II-3}$$

(II-2)から、x_l, y_l, $X(k;l)$, $Y(k;l)$ に対する次の永年方程式が導かれる。

$$\Omega_{\vec{l}}\, x_{\vec{l}} = E_{\vec{l}}\, y_{\vec{l}} + \Sigma'_{\vec{k}} (C+D)(\vec{k};\vec{l})\, Y(\vec{k};\vec{l})$$

$$\Omega_{\vec{l}}\, y_{\vec{l}} = E_{\vec{l}}\, x_{\vec{l}} + \Sigma'_{\vec{k}} (C-D)(\vec{k};\vec{l})\, X(\vec{k};\vec{l})$$

$$\Omega_{l}\, X(\vec{k};\vec{l}) = (E_{\vec{k}+\vec{l}} + E_{\vec{k}})\, Y(\vec{k};\vec{l}) + (C+D)(\vec{k};\vec{l})\, y_{\vec{l}} +$$

$$+ \Sigma'_{\vec{k}'} (A+B)(\vec{k},\vec{k}';\vec{l})\, Y(\vec{k}';\vec{l})$$

$$\Omega_{l}\, Y(\vec{k};\vec{l}) = (E_{\vec{k}+\vec{l}} + E_{\vec{k}})\, X(\vec{k};\vec{l}) + (C-D)(\vec{k};\vec{l})\, x_{\vec{l}} +$$

$$+ \Sigma'_{\vec{k}'} (A-B)(\vec{k},\vec{k}';\vec{l})\, X(\vec{k}';\vec{l}) \qquad (\text{II}-4)$$

ここで $A(\vec{k},\vec{k}';\vec{l})$, $B(\vec{k},\vec{k}';\vec{l})$, $C(\vec{k};\vec{l})$, $D(\vec{k};\vec{l})$ は Takano の論文の (22) に定義されている。この結果は本論文の (3-12), - - -, (3-15) に対応する関係式であり、両者の間には次の関係がある。

$$x_{\vec{l}} \longleftrightarrow \chi_1(\vec{l}) - \chi_2(-\vec{l})$$

$$y_{\vec{l}} \longleftrightarrow \chi_1(\vec{l}) + \chi_2(-\vec{l})$$

$$X(\vec{k};\vec{l}) \longleftrightarrow \chi_3(-\vec{k},\vec{l}+\vec{k}) - \chi_4(\vec{k},-\vec{l}-\vec{k})$$

$$Y(\vec{k};\vec{l}) \longleftrightarrow \chi_3(-\vec{k},\vec{l}+\vec{k}) + \chi_4(\vec{k},-\vec{l}-\vec{k}) \qquad (\text{II}-5)$$

ただし、Takano の理論が絶対零度の場合である点を考慮し、$\chi_5(\vec{p},\vec{q})$ は無視した。さらに Takano の理論の相互作用ポテンシャルを $V(|r-r'|) = g\,\delta(r-r')$ と置いて比較を行なった。

(3−18)によると、$\chi_A(\vec{q})$, $\chi_B(\vec{q})$, $\chi_C(\vec{q})$と$X(\vec{k};\vec{q})$, $Y(\vec{k};\vec{q})$の間に次の関係があることがわかる。

$$\chi_A(\vec{q}) \longleftrightarrow \frac{1}{2}\Sigma_{\vec{k}}(u_{\vec{k}}u_{\vec{q}+\vec{k}} - v_{\vec{k}}v_{\vec{q}+\vec{k}})X(\vec{k};\vec{q}) + \frac{1}{2}\Sigma_{\vec{k}}(u_{\vec{k}}u_{\vec{q}+\vec{k}} + v_{\vec{k}}v_{\vec{q}+\vec{k}})Y(\vec{k};\vec{q})$$

$$\chi_B(\vec{q}) \longleftrightarrow -\frac{1}{2}\Sigma_{\vec{k}}(u_{\vec{k}}u_{\vec{q}+\vec{k}} - v_{\vec{k}}v_{\vec{q}+\vec{k}})X(\vec{k};\vec{q}) + \frac{1}{2}\Sigma_{\vec{k}}(u_{\vec{k}}u_{\vec{q}+\vec{k}} + v_{\vec{k}}v_{\vec{q}+\vec{k}})Y(\vec{k};\vec{q})$$

$$\chi_C(\vec{q}) \longleftrightarrow -\Sigma_{\vec{k}}u_{\vec{k}}v_{\vec{q}+\vec{k}}Y(\vec{k};\vec{q}) \qquad (\text{II}-6)$$

本論文の第三章第二節で求めた$\chi_A(\vec{q})$, $\chi_B(\vec{q})$, $\chi_C(\vec{q})$の$\vec{q}$の各次数での関係式は、Takanoが$X(\vec{k};\vec{q})$, $Y(\vec{k};\vec{q})$を$\vec{q}$の巾で次のように展開し、

$$X(\vec{k};\vec{q}) = X(\vec{k};0) + X^{(1)}(\vec{k};\vec{q}) + X^{(2)}(\vec{k};\vec{q}) + \cdots$$
$$Y(\vec{k};\vec{q}) = Y(\vec{k};0) + Y^{(1)}(\vec{k};\vec{q}) + Y^{(2)}(\vec{k};\vec{q}) + \cdots \qquad (\text{II}-7)$$

$\vec{q}$の各次数において求めた関係式と(II−6)の関係を考慮すれば正確に一致することを、Takanoの論文にもとづいて具体的に確かめた。$\vec{q}$の各次数について、

$$\chi_A(0) \longleftrightarrow \frac{1}{2}\Sigma_{\vec{k}}X(\vec{k};0) \qquad \chi_B(0) \longleftrightarrow -\frac{1}{2}\Sigma_{\vec{k}}X(\vec{k};0)$$

$$\chi_A^{(1)}(\vec{q}) \longleftrightarrow \frac{1}{2}\Sigma_{\vec{k}}X^{(1)}(\vec{k};\vec{q}) + \frac{1}{2}\Sigma_{\vec{k}}(u_{\vec{k}}^2 + v_{\vec{k}}^2)Y^{(1)}(\vec{k};\vec{q})$$

$$\chi_B^{(1)}(\vec{q}) \longleftrightarrow -\frac{1}{2}\Sigma_{\vec{k}}X^{(1)}(\vec{k};\vec{q}) + \frac{1}{2}\Sigma_{\vec{k}}(u_{\vec{k}}^2 + v_{\vec{k}}^2)Y^{(1)}(\vec{k};\vec{q})$$

$$\chi_c^{(1)}(x) \longleftrightarrow -\sum_{\vec{k}} u_{\vec{k}} v_{\vec{k}} \Upsilon^{(1)}(\vec{k};x) \qquad (\mathrm{II}\text{-}8)$$

の対応関係があり、$\chi_A(0)+\chi_B(0)=0$ および $\chi_c(0)=0$ は $\Upsilon(\vec{k};0)=0$ に対応している。最終的に、エネルギースペクトル(3-48)の絶対零度の場合の値が、Takanoの論文の(37′)と一致していることがわかる。このことから、本論文の研究は、絶対零度における微視的理論の有限温度への拡張として有効なものであると考えられる。

附　録　III

ここでは、$\chi_A(\vec{l})$, $\chi_B(\vec{l})$, $\chi_C(\vec{l})$の斉次連立方程式(3-26)の係数$A(\vec{l};\omega(\vec{l}))$, ・・・, $L(\vec{l};\omega(\vec{l}))$ の定義とその低周波数、長波長極限の値を与える。最初に、係数の定義を示す。

$$A(\vec{l};\omega) = 2g^2\chi^2\Big\{\Big(G^{(0)}(+)+\frac{i}{2g\chi^2}\Big)(Q_{11}+2Q'_{21})+\hat{G}^{(0)}(Q_{33}+2Q'_{33})+$$

$$+2(G^{(0)}(+)+\hat{G}^{(0)})(Q_{13}+Q'_{31}+Q'_{23})+\frac{1}{2g^2\chi^2}\Big\}$$

$$B(\vec{l};\omega) = 2g^2\chi^2\Big\{\hat{G}^{(0)}(Q_{11}+2Q'_{21})+\Big(G^{(0)}(-)+\frac{i}{2g\chi^2}\Big)(Q_{33}+2Q'_{33})+$$

$$+2(G^{(0)}(-)+\hat{G}^{(0)})(Q_{13}+Q'_{31}+Q'_{23})\Big\}$$

$$C(\vec{l};\omega) = 2g^2\chi^2\Big\{2(G^{(0)}(+)+\hat{G}^{(0)})(Q_{11}+2Q'_{21})+2(G^{(0)}(-)+\hat{G}^{(0)})(Q_{33}+2Q'_{33})+$$

$$+4\Big(G^{(0)}(+)+G^{(0)}(-)+2\hat{G}^{(0)}+\frac{i}{2g\chi^2}\Big)(Q_{13}+Q'_{31}+Q'_{23})\Big\}$$

$$D(\vec{l};\omega) = 2g^2\chi^2\Big\{\Big(G^{(0)}(+)+\frac{i}{2g\chi^2}\Big)(Q_{33}+2Q'_{33})+\hat{G}^{(0)}(Q_{22}+2Q'_{12})+$$

$$+2(G^{(0)}(+)+\hat{G}^{(0)})(Q_{23}+Q'_{13}+Q'_{32})\Big\}$$

$$E(\vec{l};\omega) = 2g^2\chi^2\Big\{\hat{G}^{(0)}(Q_{33}+2Q'_{33})+\Big(G^{(0)}(-)+\frac{i}{2g\chi^2}\Big)(Q_{22}+Q'_{12})+$$

$$+2(G^{(0)}(-)+\hat{G}^{(0)})(Q_{33}+Q'_{13}+Q'_{32})+\frac{i}{2g^2\chi^2}\Big\}$$

$$F(\vec{l};\omega) = 2g^2\chi^2 \{ 2(G^{(0)}(+) + \hat{G}^{(0)})(Q_{33} + 2Q'_{33}) + 2(G^{(0)}(-) + \hat{G}^{(0)})(Q_{22} + 2Q'_{12}) +$$

$$+ 4(G^{(0)}(+) + G^{(0)}(-) + 2\hat{G}^{(0)} + \frac{i}{2g\chi^2})(Q_{23} + Q'_{13} + Q'_{32}) \}$$

$$H(\vec{l};\omega) = 2g^2\chi^2 \{ (G^{(0)}(+) + \frac{i}{2g\chi^2})(Q_{31} + Q'_{31} + Q'_{23}) + \hat{G}^{(0)}(Q_{23} + Q'_{13} + Q'_{32}) +$$

$$+ (G^{(0)}(+) + \hat{G}^{(0)})(Q_{21} + Q_{33} + Q'_{11} + Q'_{22} + 2Q'_{33}) \}$$

$$I(\vec{l};\omega) = 2g^2\chi^2 \{ \hat{G}^{(0)}(Q_{31} + Q'_{23} + Q'_{31}) + (G^{(0)}(-) + \frac{i}{2g\chi^2})(Q_{23} + Q'_{13} + Q'_{32}) +$$

$$+ (G^{(0)}(-) + \hat{G}^{(0)})(Q_{21} + Q_{33} + Q'_{11} + Q'_{22} + 2Q'_{33}) \}$$

$$L(\vec{l};\omega) = 2g^2\chi^2 \{ 2(G^{(0)}(+) + \hat{G}^{(0)})(Q_{31} + Q'_{23} + Q'_{31}) +$$

$$+ 2(G^{(0)}(-) + \hat{G}^{(0)})(Q_{23} + Q'_{13} + Q'_{32}) +$$

$$+ 2(G^{(0)}(+) + G^{(0)}(-) + 2\hat{G}^{(0)} + \frac{i}{2g\chi^2})(Q_{21} + Q_{33} + Q'_{11} + Q'_{22} + 2Q'_{33}) + \frac{1}{2g^2\chi^2} \}$$

(Ⅲ-1)

ここで

$$G^{(0)}(+) = i u_{\vec{l}}^2 G^{(0)}(\vec{l},\omega) + i v_{\vec{l}}^2 G^{(0)}(\vec{l},-\omega)$$

$$G^{(0)}(-) = i u_{\vec{l}}^2 G^{(0)}(\vec{l},-\omega) + i v_{\vec{l}}^2 G^{(0)}(\vec{l},\omega)$$

$$\hat{G}^{(0)} = -i u_{\vec{l}} v_{\vec{l}} (G^{(0)}(\vec{l},\omega) + G^{(0)}(\vec{l},-\omega))$$

$$Q_{nm} = \frac{1}{V}\sum_{\vec{k}} \{ a_{\vec{k}}^n a_{\vec{l}-\vec{k}}^m Q_1(\vec{k}, \vec{l}-\vec{k};\omega) + b_{\vec{k}}^n b_{\vec{l}-\vec{k}}^m Q_2(\vec{k}, \vec{l}-\vec{k};\omega) \}$$

$$Q'_{nm} = \frac{1}{V}\sum_{\vec{k}} a_{\vec{k}-\vec{l}}^n a_{\vec{k}}^m Q_3(\vec{k}-\vec{l}, \vec{k};\omega) \quad (Ⅲ\text{-}2)$$

である。但し、$Q_1(\vec{k},\vec{l}-\vec{k};\omega)$, $Q_2(\vec{k},\vec{l}-\vec{k};\omega)$, $Q_3(\vec{k}-\vec{l},\vec{k};\omega)$は(3-25)で与えられており、$a^i_{\vec{k}}$および$b^i_{\vec{k}}$は

$$a^i_{\vec{k}} = \begin{cases} u^2_{\vec{k}} & i=1 \\ -u_{\vec{k}}v_{\vec{k}} & i=3 \\ v^2_{\vec{k}} & i=2 \end{cases} \qquad b^i_{\vec{k}} = \begin{cases} v^2_{\vec{k}} & i=1 \\ -u_{\vec{k}}v_{\vec{k}} & i=3 \\ u^2_{\vec{k}} & i=2 \end{cases} \qquad (\text{III}-3)$$

である。上で述べた$A(\vec{l};\omega)$, ・・・, $L(\vec{l};\omega)$の定義は、絶対温度の場合にはConiglio & Marinaroによって導かれた文献(25)の(A-5)と正確に一致している。有限温度の効果は、$G^{(0)}(l,\omega)$が(3-17)のように有限温度の量である点および準粒子の散乱過程を示すQ_{nm}が導入されている点を通して、取り込まれている。

最後に、低周波数、長波長極限の場合の係数の値を示す。

$$A(\vec{l};\omega) \simeq (1+4g\Delta iQ)/2 - \omega\{(g\chi^2-\Delta)/\Delta - g\Delta iQ - 6g\Delta iR + 4g^2\chi^2 iR\}/(2g\chi^2-2\Delta)$$

$$B(\vec{l};\omega) \simeq (1+4g\Delta iQ)/2 - \omega\{g\Delta iQ - 2g\Delta iR + 4g^2\chi^2 iR\}/(2g\chi^2-2\Delta)$$

$$C(\vec{l};\omega) \simeq -2\{(g\chi^2-\Delta)/\Delta - 2g\Delta iQ - 4g\Delta iR\} - \omega\{1+2g\Delta iQ + 4g\Delta iR\}/\Delta$$

$$D(\vec{l};\omega) \simeq (1+4g\Delta iQ)/2 + \omega\{g\Delta iQ - 2g\Delta iR + 4g^2\chi^2 iR\}/(2g\chi^2-2\Delta)$$

$$E(\vec{l};\omega) \simeq (1+4g\Delta iQ)/2 + \omega\{(g\chi^2-\Delta)/\Delta - g\Delta iQ - 6g\Delta iR + 4g^2\chi^2 iR\}/(2g\chi^2-2\Delta)$$

$$F(\vec{l};\omega) \simeq -2\{(g\chi^2-\Delta)/\Delta - 2g\Delta iQ - 4g\Delta iR\} + \omega\{1+2g\Delta iQ + 4g\Delta iR\}/\Delta$$

$$H(\vec{l};\omega) \simeq 4g\Delta\, iR - \frac{1}{2} g y + \omega(g\Delta\, iQ + 2g\Delta\, iR)/(2g\chi^2 - 2\Delta) - \frac{\omega}{2(2g\chi^2 - 2\Delta)} g y$$

$$I(\vec{l};\omega) \simeq 4g\Delta\, iR - \frac{1}{2} g y - \omega(g\Delta\, iQ + 2g\Delta\, iR)/(2g\chi^2 - 2\Delta) + \frac{\omega}{2(2g\chi^2 - 2\Delta)} g y$$

$$L(\vec{l};\omega) \simeq 1 + 4g\Delta\, iQ + 8g\Delta\, iR - g y \tag{III-4}$$

ここで、iR, iQ, y は

$$iR \equiv iR(\vec{l};\omega) = -\frac{1}{8V} \Sigma_{\vec{k}} \frac{\Delta}{E_{\vec{k}}^3} \left(1 + 2f_{\vec{k}} + 2E_{\vec{k}} \frac{df_{\vec{k}}}{dE_{\vec{k}}} \frac{\vec{l}\cdot\vec{v}_{\vec{k}}}{\omega - \vec{l}\cdot\vec{v}_{\vec{k}}}\right)$$

$$iQ \equiv iQ(\vec{l};\omega) = \frac{1}{4V} \Sigma_{\vec{k}} \frac{v_{\vec{k}}}{E_{\vec{k}}^3} \left(1 + 2f_{\vec{k}} + 2E_{\vec{k}} \frac{df_{\vec{k}}}{dE_{\vec{k}}} \frac{\vec{l}\cdot\vec{v}_{\vec{k}}}{\omega - \vec{l}\cdot\vec{v}_{\vec{k}}}\right)$$

$$y \equiv y(\vec{l};\omega) = \frac{1}{V} \Sigma_{\vec{k}} \frac{df_{\vec{k}}}{dE_{\vec{k}}} \frac{\vec{l}\cdot\vec{v}_{\vec{k}}}{\omega - \vec{l}\cdot\vec{v}_{\vec{k}}} \tag{III-5}$$

である。

正　　誤　　表

		誤	正
P2	14行	荷なわれ	担われ
P3	20行	作り出す演算子 C_0	作り出す演算子 C_0^+
P8	12行	不等式 4)	不等式 14)
P16	13行	以後を $\hbar$	以後は $\hbar$
P20	15行	$(1+2f_p)$	$(1+2f_p(T))$
P29	4行	$\psi^+(\vec{r},t)\psi(\vec{r},t)+\psi^+(\vec{r},t)\psi(\vec{r},t)$	$\psi^+(\vec{r},t)\psi(\vec{r},t)+\psi(\vec{r},t)\psi^+(\vec{r},t)$
P46	2行	(2.77) から	(2-83) から
P50	5行	変換 (2-3)	変換 (2-8)
	10行	$\langle 0(\beta)\vert \hat{C}_{\vec{p}}^+ \hat{C}_{-\vec{q}-\vec{p}} B_{\vec{q}}^+(\beta)\vert 0(\beta)\rangle$	$\langle 0(\beta)\vert \hat{C}_{\vec{p}}^+ \hat{C}_{-\vec{q}-\vec{p}}^+ B_{\vec{q}}^+(\beta)\vert 0(\beta)\rangle$
P53	13行	(2-39) から	(2-45) から
P58	8行	$(\chi_A^{(1)}(\vec{q})+\chi_B^{(1)}(\vec{q})-2\chi_C^{(1)}(\vec{q})\,]$	$(\chi_A^{(1)}(\vec{q})+\chi_B^{(1)}(\vec{q})-2\chi_C^{(1)}(\vec{q}))\,]$
P59	9行	(2-3)(2-22) を使い	(2-3)(2-8) を使い
P77	6行	n は (2-21) で	n は (2-26) で
P81	4行	実線は (1-20) で	実線は (1-24) で
P104	5行	$\frac{1}{v}\left[\frac{n_s}{m}\right]^{1/2}$	$\frac{1}{v_0}\left[\frac{n_s}{m}\right]^{1/2}$
P111	15行	north	North