【1】

氏名・(本籍)	菊(きく) 地(ち) 光(こう) 嗣(じ)
学位の種類	理学博士
学位記番号	第 8284 号
学位授与の日付	昭和63年6月15日
学位授与の要件	理学研究科数学専攻 学位規則第5条第1項該当
学位論文題目	**長距離型摂動をもつ一階方程式系の散乱理論－修正波動作用素の存在－**
論文審査委員	(主査) 教 授 井川 満 (副査) 教 授 田辺 広城 教 授 池田 信行 講 師 磯崎 洋

論文内容の要旨

次のようなm個の未知函数 $u={}^t(u_1, \cdots, u_m)$ に対する微分方程式系

(1) $D_t u=\Lambda^0 u$

を考えよう。ここで，$D_t=-i\partial/\partial t$ でありさらに

$$\Lambda^0=\sum_{j=1}^{n} A_j D_j$$

(A_j : m×m エルミート行列，$D_j=-i\partial/\partial x_j$) である。(1)は定数係数なので簡単に解ける。そこで m×m 正値エルミート行列値函数E(x)による摂動のついた方程式

$D_t u=\Lambda u$, $\Lambda=E(x)^{-1/2}\Lambda^0 E(x)^{-1/2}$

を考えてみよう。これらは一階対称双曲系と呼ばれており，Λ と Λ^0 は定義域を適当に定めると $\mathscr{H}=L^2(\mathbf{R}^n, \mathbf{C}^m)$ 上の自己共役作用素となるので問題を Λ と Λ^0 の間の散乱理論としてとらえることができる。E(x)は無限回微分可能であるとし，さらに次の条件(E)が成り立っているとする：

(E) $|(\partial/\partial x)^\alpha(E(x)-I)|\leqq C_\alpha(1+|x|)^{-\delta-|\alpha|}$

ここで $\delta>1$ の場合を短距離型，$0<\delta\leqq 1$ の場合を長距離型と呼ぶ。この論文では散乱理論の問題の1つとして長距離型の場合の Λ と Λ^0 の間の修正波動作用素の存在について述べる。

波動作用素とは極限

$$W_\pm=\operatorname*{s-lim}_{t\to\pm\infty} e^{it\Lambda}e^{-it\Lambda^0}$$

で定義される作用素であり，この存在が示されると $e^{-it\Lambda}$ と $e^{-it\Lambda^0}$ が $t\to\pm\infty$ のときに漸近している

ことがわかる。さらに容易に intertwining property と呼ばれる重要な性質

$$e^{is\Lambda} W_{\pm} = W_{\pm} = e^{is\Lambda^0} \quad (s \in \mathbf{R})$$

が示される。しかし二体 Schrödinger 方程式の場合からも推察されるように長距離型ではこの極限の存在は期待できない。これは $e^{-it\Lambda}$ が $e^{-it\Lambda^0}$ に漸近しないことを意味する。そこで $e^{-it\Lambda}$ が漸近する別の作用素 $X(t)$ を定義して修正波動作用素

$$(2) \quad W_{\pm}^{D} = s\text{-}\lim_{t\to\pm\infty} \ e^{it\Lambda} X(t)$$

について議論しなくてはいけない。Schrödinger 方程式のような単独の場合には多くの人の努力により満足すべき結果が得られているが，結晶中の Maxwell 方程式のような方程式系になると特性根が微分可能でないという困難さのために十分な結果が得られていない。そこでこの論文では Λ^0 に対し次のような条件(F)を仮定して上の $W_{\pm}^{D}$ について論じる。

(F)
1）定数 d があって $\xi \neq 0$ のとき

$$\mathrm{rank}\ \Lambda^0(\xi) = m - d$$

但し $\Lambda^0(\xi) = \sum_{j=1}^{n} A_j \xi_j$ (Λ^0 の表象)。

2）$\rho_0 = \max_{\xi \in \mathbf{R}} \ \#\{\Lambda^0(\xi)$ の異なる正固有値の個数$\}$

としたとき $\rho_0 = (m-d)/2$。

この条件は結晶中の Maxwell 方程式を一例として含むものである。そしてこのような場合でも $e^{-it\Lambda^0}$ に変わる作用素 $X(t)$ が定義できて次の定理が証明される。

定理。(E), (F)の下で極限(2)が存在しさらにすべての実数 S に対して

$$e^{-is\Lambda} W_{\pm}^{D} = W_{\pm}^{D} e^{-is\Lambda^0}$$

が成立する。

論文の審査結果の要旨

本論文は一階対称方程式系の長距離型摂動に対して，特性根の単純性を仮定せずに修正波動作用素の存在をしめしたものである。非摂動方程式系

$$D_t u = \sum_{j=1}^{n} A_j D_j u \ (= \Lambda^0 u)$$

(A_j は m×m エルミート行列)，とその摂動方程式系

$$D_t u = \Lambda u, \qquad \Lambda = E^{-1/2}(x)\Lambda^0 E^{-1/2}(x)$$

を考える。ここで，E(x)は m×m 正値エルミート行列値関数で

$$|(\partial/\partial x)^{\alpha}(E(x)-1)| \leq C_{\alpha}(1+|x|)^{-\delta-|\alpha|}, \ {}^{\forall}\alpha \in \{0, 1, \cdots\}^n$$

をみたすものとする。$\delta > 1$ のとき，この摂動を短距離型，$0 < \delta \leq 1$ のとき長距離型と呼ぶ。

散乱理論において，波動作用素の存在を示すことが重要な役割をはたすが，長距離型摂動にたいして

は，一般的には短距離型と同じ様な波動作用素は存在しない。したがって，修正波動作用素 $W_{\pm}^{D}$ を考えなければならない。すなわち，次が成り立つような $X(t)$ を構成することが必要である：

$$W_{\pm}^{D} = s\text{-}\lim_{t \to \pm\infty} \exp(it\Lambda)\, X(t) P_{ac}(\Lambda^{0})$$

が存在し，かつ $W_{\pm}^{D}$ が intertwining property

$$\exp(is\Lambda)\, W_{\pm}^{D} = W_{\pm}^{D} \exp(is\Lambda^{0}) \quad (s \in \mathbf{R})$$

をもつ。

修正波動作用素の存在は，これまで $\Lambda^{0}(\xi) = \sum_{j=1}^{n} A_j \xi_j$ の特性根が $\xi \neq 0$ で，全て単純である場合のみがしめされていた。しかし，多くの大切な方程式，例えば Maxwell 方程式はこの条件をみたさない。

菊地君は次の条件(F)をみたす作用素のクラス，これには結晶中の Maxwell 方程式が含まれる，に対して修正波動作用素の存在をしめした：

$$\text{(F)} \begin{cases} \text{ある } d \text{ が存在して rank } \Lambda^{0}(\xi) = m - d,\ {}^{\forall}\xi \neq 0,\ \text{かつ，ある} \\ \xi_0 \neq 0 \text{ が存在して } \Lambda^{0}(\xi_0) \text{ の相異なる固有値の個数は } (m-d)/2\text{。} \end{cases}$$

このような重要なクラスの方程式に対して，初めて修正波動作用素の存在をしめしたことは特筆すべきことである。$\Lambda^{0}(\xi)$ の特性根の単純性がない場合には，一般的には特性根は特異点をもち，この特異性から生じる複雑さがこれまで結果の一般化を阻んできた最大の困難点であった。菊地君はこれを克服するために特異点の周辺の詳細な考察をおこない，$X(t)$ の定義のための新しい手法を生みだした。

以上より，本論文は注目すべき新しい結果と独創性を含むものであり，理学博士の学位論文として十分価値あるものと認める。