OUKA
The University of Osaka
Institutional Knowledge Archive

Title	Fourier transforms on the motion groups
Author(s)	Kumahara, Keisaku
Citation	大阪大学, 1977, 博士論文
Version Type	VoR
URL	https://hdl.handle.net/11094/24600
rights	
Note	

The University of Osaka Institutional Knowledge Archive : OUKA

https://ir.library.osaka-u.ac.jp/

The University of Osaka

【22】

氏名・(本籍)	熊原啓作
学位の種類	理学博士
学位記番号	第3833号
学位授与の日付	昭和52年3月18日
学位授与の要件	学位規則第5条第2項該当
学位論文題目	**運動群上のフーリェ変換**
論文審査委員	(主査) 教授 尾関 英樹
	(副査) 教授 村上 信吾　教授 竹之内 脩

論文内容の要旨

有限次元ベルトル空間Vに連結コンパクトリー群Kが線型群として作用しているとき，VとKとの半直積群Gを運動群という。Vの指標ξからのGへの誘導表現をU^{ξ}とする。G上の可積分関数fのフーリェ変換を$T_f(\xi)=\int_G f(g)U^{\xi}_g dg$によって定義する。BをL₂(K)上の有界線型作用素のなすバナッハ空間とすれば，T_fはVの双対空間$\widehat{V}$上のB値関数である。本論文においては，G上の無限回微分可能かつ台がコンパクトな関数の全体$C^{\infty}_c(G)$および G上の急減少関数の空間&(G)（定義は後述）のフーリエ変換による像が決定される。

△をKのカシミール作用素，RをKの右正則表現とし，$\widehat{V^c}$を$\widehat{V}$の複素化とする。a>oに対し$\Omega(a)=\{(x,k)\in G; x\in V, |x|\leqq a, k\in K\}$とおく，Nを非負整数全体とする。

定理. $\widehat{V}$上のB値関数Tがsupp(f)$\subset\Omega(a)$なるf$\in C^{\infty}_c(G)$のフーリエ変換であるための必要十分条件はTが次の条件(I)～(III)をみたすことである：(I)Tは$\widehat{V^c}$上のB値整関数に拡張される，(II)V^c上の任意のKの不変多項式関数pおよび任意のℓ, m∈Nに対して，$\|p(\zeta)\triangle^{\ell}T(\zeta)\triangle^{m}\|\leqq C^{l,m}_p \exp a|\mathrm{Im}\zeta|$, ($\zeta\in V^c$), をみたす$C^{l,m}_p\geqq 0$が存在する，(III)任意のk∈Kに対して$T(k\zeta)=R_k T(\zeta)R_k^{-1}$。

k_iをKのリー代数，$Y_1,\cdots,Y_\delta(\delta=\dim K)$をkの基底，$m\in N^{\sigma}$に対し，$y(m)=Y_1^{m_1}\cdots Y_\sigma^{m_6}$とおく。$\lambda,\mu$をそれぞれGの左および右正則表現の微分表現とする。

$S=S(G)$をf$\in C^{\infty}(G)$かつ任意の$\alpha\in N^n, \beta\in N, m, m'\in N^{\sigma}$に対して，$\gamma^{m,m}_{\alpha,\beta}(f)=\sup_{(x,k)\in G}|(1+|x|^2)^{\beta}(D^{\alpha}_x\lambda(y(m))\lambda(y(m'))f)(x,k)|<+\infty$ となるfの全体とする。次に$\widehat{S}$を$\widehat{V}$上のB値C^{∞}関数であって，任意の$\alpha\in N^n, \beta\in N, m,m'\in N^{\sigma}$に対して $\gamma^{m,m'}_{\alpha,\beta}(T)=\sup_{\xi\in\widehat{V}}\|(1+|\xi|^2)^{\beta}y(m)D^{\alpha}_{\xi}T(\xi)y(m')\|<+\infty$となり，$T(k\xi)=R_kT(\xi)R_k^{-1}$, (k∈K) をみたすTの全体とする。SおよびSはそれぞれセミノルム

$\{\gamma_{\alpha\beta}^{m,m}\}$ および $\{\gamma_{\alpha\beta}^{m,m}\}$ によってフレッシェ空間となる。

定理　フーリェ変換 $f \to T_f$ は S と $\widehat{S}$ との間の位相同型を与える。

K が単位群のときは上記フーリェ変換はユークリッド空間の通常のフーリェ変換であり，第一の定理はペイリー・ウィーナーの定理の，第二の定理はシュヴァルツの定理の拡張となっている。G 上の両側 K 不変関数に対するフーリェ変換はフーリェ・ベッセル変換を含む。

論文の審査結果の要旨

連結なコムパクトソー群 K の表現が有限次元ベクトル空間 V 上に与えられる，V と K の半直積群 G を得る。G を運動群と呼ぶ。V の指標 ξ から G のウニタリー表現 U^ξ が誘導される。G 上の可積分関数 f のフーリェ変換が

$$T_f(\xi) = \int_G f(g)\, U^\xi(g)\, dg$$

により定義される。T_f は V の双対空間 $\widehat{V}$ より，$L^2(K)$ 上の有界作用素の作る空間への写像である。

本論文では，運動群 G 上の無限回微分可能でコムパクトな台をもつ関数全体 $C_c^\infty(G)$，および G 上の急減少関数の空間 $S(G)$ の上述の意味のフーリェ変換による像の特徴づけ，決定を与えている。

$C_c^\infty(G)$ の場合：$\widehat{V}$ 上の B に値をもつ関数 T があり $f \in C_c^\infty(G)$ のフーリェ変換となるための条件は

(1) T は $\widehat{V}^c$ の整関数に拡張され，(2) 各 $\zeta \in \widehat{V}^c$ に対し，$T(\zeta)C^\infty(K) \subset C^\infty(K)$ で，K 上のラプラス作用素 $\triangle$ と $\widehat{V}$ 上の K-不変多項式に対するある種の不等式条件をみたし，(3) R を K の右正則表現とするとき，$T(k\zeta) = R^k T(\zeta) R_k^{-1}$ $(\zeta \in \widehat{V}^c)$，なる 3 条件であることが示されている。

$S(G)$ の場合：$S(G)$ の像 $\widehat{S}$ のみたすべき条件が示され，更に，S のある標準的位相に関し，$S(G)$ と $\widehat{S}$ とが位相同型なることが示されている。

以上の結果は $K = \{e\}$ として，Payley-Wiener の定理，Schwartz の定理を含んでいる。

以上の様に，本論文はある種のリー群上のフーリェ変換の特徴づけを与えたもので，理学博士の学位論文として十分価値あるものと認める。