

Title	Fourier transforms on the motion groups
Author(s)	Kumahara, Keisaku
Citation	大阪大学, 1977, 博士論文
Version Type	VoR
URL	https://hdl.handle.net/11094/24600
rights	
Note	

Osaka University Knowledge Archive : OUKA

<https://ir.library.osaka-u.ac.jp/>

Osaka University

氏名・(本籍) 熊原啓作
 学位の種類 理学博士
 学位記番号 第 3833 号
 学位授与の日付 昭和 52 年 3 月 18 日
 学位授与の要件 学位規則第 5 条第 2 項該当
 学位論文題目 運動群上のフーリエ変換

論文審査委員 (主査) 教授 尾関 英樹
 (副査) 教授 村上 信吾 教授 竹之内 脩

論文内容の要旨

有限次元ベクトル空間 V に連結コンパクトリー群 K が線型群として作用しているとき、 V と K との半直積群 G を運動群という。 V の指標 ξ からの G への誘導表現を U_ξ^g とする。 G 上の可積分関数 f のフーリエ変換を $T_f(\xi) = \int_G f(g) U_\xi^g dg$ によって定義する。 B を $L_2(K)$ 上の有界線型作用素のなすバナッハ空間とすれば、 T_f は V の双対空間 \widehat{V} 上の B 値関数である。本論文においては、 G 上の無限回微分可能かつ台がコンパクトな関数の全体 $C_c^\infty(G)$ および G 上の急減少関数の空間 $\mathcal{E}(G)$ (定義は後述) のフーリエ変換による像が決定される。

Δ を K のカシミール作用素、 R を K の右正則表現とし、 \widehat{V}^c を \widehat{V} の複素化とする。 $a > 0$ に対し $\Omega(a) = \{(x, k) \in G; x \in V, |x| \leq a, k \in K\}$ とおく、 N を非負整数全体とする。

定理. \widehat{V} 上の B 値関数 T が $\text{supp}(f) \subset \Omega(a)$ なる $f \in C_c^\infty(G)$ のフーリエ変換であるための必要十分条件は T が次の条件 (I) ~ (III) をみたすことである: (I) T は \widehat{V}^c 上の B 値関数に拡張される, (II) V^c 上の任意の K 不変多項式関数 p および任意の $\ell, m \in \mathbb{N}$ に対して、 $\|p(\xi) \Delta^\ell T(\xi) \Delta^m\| \leq C p^m \exp a |\text{Im} \xi|$, ($\xi \in V^c$), をみたす $C p^m \geq 0$ が存在する, (III) 任意の $k \in K$ に対して $T(k\xi) = R_k T(\xi) R_k^{-1}$.

k_i を K のリー代数、 Y_1, \dots, Y_δ ($\delta = \dim K$) を k の基底、 $m \in \mathbb{N}^\delta$ に対し、 $y(m) = Y_1^{m_1} \dots Y_\delta^{m_\delta}$ とおく。 λ, μ をそれぞれ G の左および右正則表現の微分表現とする。

$S = S(G)$ を $f \in C^\infty(G)$ かつ任意の $\alpha \in \mathbb{N}^n, \beta \in \mathbb{N}, m, m' \in \mathbb{N}^\delta$ に対して、 $\gamma_{\alpha, \beta}^{m, m'}(f) = \sup_{(x, k) \in G} |(1 + |x|^2)^\beta (D_x^\alpha \lambda(y(m)) \lambda(y(m')) f)(x, k)| < +\infty$ となる f の全体とする。次に \widehat{S} を \widehat{V} 上の B 値 C^∞ 関数であって、任意の $\alpha \in \mathbb{N}^n, \beta \in \mathbb{N}, m, m' \in \mathbb{N}^\delta$ に対して $\gamma_{\alpha, \beta}^{m, m'}(T) = \sup_{\xi \in \widehat{V}} \|(1 + |\xi|^2)^\beta y(m) D_\xi^\alpha T(\xi) y(m')\| < +\infty$ となり、 $T(k\xi) = R_k T(\xi) R_k^{-1}$, ($k \in K$) をみたす T の全体とする。 S および \widehat{S} はそれぞれセミノルム

$\{\gamma_{\alpha\beta}^{m,m}\}$ および $\{\gamma_{\alpha\beta}^{m,m}\}$ によってフレッシュ空間となる。

定理 フーリエ変換 $f \rightarrow T_\mu$ は S と \widehat{S} との間の位相同型を与える。

K が単位群のときは上記フーリエ変換はユークリッド空間の通常のフーリエ変換であり、第一の定理はベイリー・ウィーナーの定理の、第二の定理はシュヴァルツの定理の拡張となっている。 G 上の両側 K 不変関数に対するフーリエ変換はフーリエ・ベッセル変換を含む。

論文の審査結果の要旨

連結なコンパクト群 K の表現が有限次元ベクトル空間 V 上に与えられる、 V と K の半直積群 G を得る。 G を運動群と呼ぶ。 V の指標 ξ から G のユニタリー表現 U^ξ が誘導される。 G 上の可積分関数 f のフーリエ変換が

$$T_\mu(\xi) = \int_G f(g) U^\xi(g) dg$$

により定義される。 T_μ は V の双対空間 \widehat{V} より、 $L^2(K)$ 上の有界作用素の作る空間への写像である。

本論文では、運動群 G 上の無限回微分可能でコンパクトな台をもつ関数全体 $C_c^\infty(G)$ 、および G 上の急減少関数の空間 $S(G)$ の上述の意味のフーリエ変換による像の特徴づけ、決定を与えている。

$C_c^\infty(G)$ の場合： \widehat{V} 上の B に値をもつ関数 T がある $f \in C_c^\infty(G)$ のフーリエ変換となるための条件は

(1) T は \widehat{V}^c の整関数に拡張され、(2) 各 $\xi \in \widehat{V}^c$ に対し、 $T(\xi) C^\infty(K) \subset C^\infty(K)$ で、 K 上のラプラス作用素 Δ と \widehat{V} 上の K -不変多項式に対するある種の不等式条件をみたし、(3) R を K の右正則表現とするとき、 $T(k\xi) = R^k T(\xi) R_k^{-1}$ ($\xi \in \widehat{V}^c$)、なる 3 条件であることが示されている。

$S(G)$ の場合： $S(G)$ の像 \widehat{S} のみたすべき条件が示され、更に、 S のある標準的位相に関し、 $S(G)$ と \widehat{S} とが位相同型なることが示されている。

以上の結果は $K = \{e\}$ として、Payley-Wiener の定理、Schwartz の定理を含んでいる。

以上の様に、本論文はある種のリー群上のフーリエ変換の特徴づけを与えたもので、理学博士の学位論文として十分価値あるものと認める。