Title	Fourier transforms on the motion groups
Author(s)	Kumahara, Keisaku
Citation	大阪大学, 1977, 博士論文
Version Type	VoR
URL	https://hdl.handle.net/11094/24600
rights	
Note	

【22】

氏名・(本籍)	熊(くま) 原(はら) 啓(けい) 作(さく)
学位の種類	理学博士
学位記番号	第 3833 号
学位授与の日付	昭和52年3月18日
学位授与の要件	学位規則第5条第2項該当
学位論文題目	**運動群上のフーリェ変換**
論文審査委員	(主査) 教授 尾関 英樹
	(副査) 教授 村上 信吾　教授 竹之内 脩

論文内容の要旨

有限次元ベルトル空間Vに連結コンパクトリー群Kが線型群として作用しているとき，VとKとの半直積群Gを運動群という。Vの指標ξからのGへの誘導表現をU^{ξ}とする。G上の可積分関数fのフーリェ変換を$T_f(\xi)=\int_G f(g)U_g^{\xi}dg$によって定義する。Bを$L_2(K)$上の有界線型作用素のなすバナッハ空間とすれば，$T_f$はVの双対空間$\widehat{V}$上のB値関数である。本論文においては，G上の無限回微分可能かつ台がコンパクトな関数の全体$C_c^{\infty}(G)$およびG上の急減少関数の空間$\mathcal{S}(G)$（定義は後述）のフーリエ変換による像が決定される。

$\triangle$をKのカシミール作用素，RをKの右正則表現とし，$\widehat{V}^c$を$\widehat{V}$の複素化とする。$a>o$に対し$\Omega(a)=$ $=\{(x,k)\in G; x\in V, |x|\leqq a, k\in K\}$とおく，Nを非負整数全体とする。

定理. $\widehat{V}$上のB値関数Tがsupp(f)$\subset\Omega(a)$なる$f\in C_c^{\infty}(G)$のフーリエ変換であるための必要十分条件はTが次の条件(I)〜(III)をみたすことである：(I)Tは$\widehat{V}^c$上のB値整関数に拡張される，(II)V^c上の任意ののK不変多項式関数pおよび任意の$\ell, m\in N$に対して，$\| p(\zeta)\triangle^{\ell}T(\zeta)\triangle^m\| \leqq C_P^{l,m}\exp a|\mathrm{Im}\zeta|$，($\zeta\in V^c$)，をみたす$C_P^{l,m}\geqq 0$が存在する，(III)任意の$k\in K$に対して$T(k\zeta)=R_kT(\zeta)R_h^{-1}$。

$\mathfrak{k}$をKのリー代数，$Y_1,\cdots,Y_\delta$($\delta=\dim K$)を$\mathfrak{k}$の基底，$m\in N^{\delta}$に対し，$y(m)=Y_1^{m_1}\cdots Y_{\delta}^{m_\delta}$とおく。$\lambda,\mu$をそれぞれGの左および右正則表現の微分表現とする。

$S=S(G)$を$f\in C^{\infty}(G)$かつ任意の$\alpha\in N^n, \beta\in N, m, m'\in N^{\delta}$に対して，$\gamma_{\alpha,\beta}^{m,m}(f)=\sup_{(x,k)\in G}|(1+|x|^2)^{\beta}(D_x^{\alpha}\lambda(y(m))\lambda(y(m'))f)(x,k)|<+\infty$ となるfの全体とする。次に$\widehat{S}$を$\widehat{V}$上のB値C^{∞}関数であって，任意の$\alpha\in N^n, \beta\in N, m,m'\in N^{\delta}$に対して $\gamma_{\alpha,\beta}^{m,m'}(T)=\sup_{\xi\in\widehat{V}}\|(1+|\xi|^2)^{\beta}y(m)D_{\xi}^{\alpha}T(\xi)y(m')\|<+\infty$となり，$T(k\xi)=R_kT(\xi)R_k^{-1}$，($k\in K$) をみたすTの全体とする。Sおよび$\widehat{S}$はそれぞれセミノルム

$\{\gamma_{\alpha,\beta}^{m,m}\}$ および $\{\gamma_{\alpha,\beta}^{m,m'}\}$ によってフレッシェ空間となる。

定理　フーリェ変換 $f \to T_f$ は S と $\widehat{S}$ との間の位相同型を与える。

Kが単位群のときは上記フーリェ変換はユークリッド空間の通常のフーリェ変換であり，第一の定理はペイリー・ウィーナーの定理の，第二の定理はシュヴァルツの定理の拡張となっている。G上の両側K不変関数に対するフーリェ変換はフーリェ・ベッセル変換を含む。

論文の審査結果の要旨

連結なコムパクトリー群Kの表現が有限次元ベクトル空間V上に与えられる，VとKの半直積群Gを得る。Gを運動群と呼ぶ。Vの指標ξからGのウニタリー表現U^ξが誘導される。G上の可積分関数fのフーリェ変換が

$$T_f(\xi) = \int_G f(g)\, U^\xi(g)\, dg$$

により定義される。T_fはVの双対空間$\widehat{V}$より，$L^2(K)$上の有界作用素の作る空間への写像である。

本論文では，運動群G上の無限回微分可能でコムパクトな台をもつ関数全体$C_c^\infty(G)$，およびG上の急減少関数の空間$S(G)$の上述の意味のフーリェ変換による像の特徴づけ，決定を与えている。

$C_c^\infty(G)$の場合:$\widehat{V}$上のBに値をもつ関数Tがある$f \in C_c^\infty(G)$のフーリェ変換となるための条件は(1) Tは$\widehat{V}^c$の整関数に拡張され，(2)各$\zeta \in \widehat{V}^c$に対し，$T(\zeta)C^\infty(K) \subset C^\infty(K)$で，K上のラプラス作用素$\triangle$と$\widehat{V}$上のK-不変多項式に対するある種の不等式条件をみたし，(3)RをKの右正則表現とするとき，$T(k\zeta) = R^k T(\zeta) R_k^{-1} (\zeta \in \widehat{V}^c)$，なる3条件であることが示されている。

$S(G)$の場合：$S(G)$の像$\widehat{S}$のみたすべき条件が示され，更に，Sのある標準的位相に関し，$S(G)$と$\widehat{S}$とが位相同型なることが示されている。

以上の結果は$K=\{e\}$として，Payley-Wienerの定理，Schwartzの定理を含んでいる。

以上の様に，本論文はある種のリー群上のフーリェ変換の特徴づけを与えたもので，理学博士の学位論文として十分価値あるものと認める。