指数アトラクタ

八　木　厚　志

1　序論

自己組織化とかパターン形成など，時間と共に変化するシステムの動態は，システムを構成する個体についての拡散や個体間の相互作用などを含んだ動力学として考えることができる．時間発展の過程がマクロな視点から抽象化して表現できた場合，それらは多くの場合において非線形拡散方程式系としてモデル化することができる．このようにして立てられた非線形拡散方程式系が各初期関数について大域解を有するとき，モデル方程式から決まる力学系が定義される．このような力学系の構造を調べることにより，方程式系の解の漸近挙動を明らかにすることができる．

1994 年，Eden–Foias–Nicolaenko–Temam は無限次元力学系における極限集合の新しい概念として指数アトラクタを導入した．この極限集合は，Babin–Vishik による正則アトラクタの概念とも関係があるが，1) グローバル・アトラクタを含むコンパクト集合で有限なフラクタル次元を有する，2) 正方向の不変集合である，3) すべての軌道を指数的に引き寄せる，という 3 条件で特徴付けられる．グローバル・アトラクタはコンパクトな正・負両方向の不変集合ですべての軌道を引き寄せる極限集合として定義される．しかし，有限次元とは限らないし軌道の引き寄せも指数的とは限らない．極限集合で最も望ましいものは慣性多様体である．慣性多様体は有限次元 Lipschitz 多様体で正不変かつすべての軌道を指数的に引き寄せる集合として定義される．慣性多様体が存在する場合は，軌道の挙動は漸近的に有限次元慣性多様体内の力学系に帰着されることになる．しかし，慣性多様体を構成するための簡便な方法は知られていない．方程式系の線形部分の作用素のスペクトルに関するギャップ条件が成り立つときに慣性多様体が構成できる．指数アトラクタは，慣性多様体ほど好ましい性質は有しないがそれに比較してはるかに簡単に構成することが可能である．フラクタル次元が有限な集合は，適当な有限次元空間の集合に線形写像により埋め込まれかつその逆写像が Hölder 連続となることが一般的に知られている．

グローバル・アトラクタは，正・負両方向の不変集合であるため，周期パターンなどを除き，時間と共に発展するようなパターンに対応する軌道を含むことはできない．指数アトラクタは (慣性多様体はなおのこと) 有限次元空間内に埋め込まれるという意味においてシステムの自由度の絞り込みを意味する．このことは，Haken が Synergetics の中で述べた，大多数の変数は限られた変数に従属し限定された自由度のみが活性化するという隷属化原理と対応させて見ることができる．指数アトラクタのもう一つの好ましい性質は，パラメータに対する連続性である．適切に構成することにより，システムを制御するパラメータの変動に対して集合の距離の意味で連続的に変化するような指数アトラクタを構成することができる．Nicolis–Prigogine による散逸構造によれば，システムの制御パラメータが増大するにつれて出現する構造は益々複雑なものへと変化する．これを指数アトラクタに対応させて見ると，アトラクタ次元は増大するものの構造自身は連続的に変化し構造的な安定性は維持されるということを意味する．このような特性は，与えられたパラメータに対して一意的に定まるグロー

バル・アトラクタはもち得ないものである．

自己組織化するシステムは，システム内で起こるゆらぎや確率的に起こる事象，システムに加わる摂動などの影響を受けることなく安定性をもって一定の構造を発現すると考えられている．このような性質はロバスト性と呼ばれる．自己組織化するシステムに対しては拡散モデルが立てられ，それらから定まる多くの力学系において指数アトラクタの存在を示すことができる．一方で，指数アトラクタの有する特性，有限次元性，全軌道の指数的誘引，パラメータ連続依存性などを考えると自己組織化システムのロバスト性と対応する力学系の指数アトラクタの存在とが関連性をもって見えてくる．

Eden–Foias–Nicolaenko–Temam は指数アトラクタの概念の導入と同時に同アトラクタを構成するための方法を示した．それは，基礎空間が Hilbert 空間の場合に，非線形半群のスクイーズイング性から指数アトラクタを構成するというものである．さらにスクイーズイング性は，モデル方程式の係数作用素が自己共役作用素の場合，係数作用素のスペクトル・ギャップ性から検証できる．しかし，特別に好条件な場合しか適用できない方法である．その後 2000 年に Efendiev–Miranville–Zelik は，一般の Banach 空間で，非線形半群が縮小写像のコンパクト摂動であるという条件から指数アトラクタを構成する方法を見出した．この条件は非常に一般的で，散逸性と解の平滑化作用をもつすべてのモデル方程式について検証できる条件である．論理的観点からは，Hilbert 空間ではスクイーズイング性と縮小条件のコンパクト摂動は同等であることが分かっている．しかし，スクイーズイング性から構成された指数アトラクタについては，他方に比べより明示的にフラクタル次元の評価を与えることができる．しかし，このように得られた次元情報をどのように活用するかは今後の課題である．

本稿の目的は，抽象放物型発展方程式を使って，その方程式から定まる力学系の構成方法，非線形半群について縮小条件のコンパクト摂動およびスクイーズイング性を検証するためのストラテジーを述べることである．吉田により創始された解析的半群の理論，Sobolevskii，加藤・田辺により築かれた線形発展方程式論に基づき非線形抽象放物型発展方程式の理論が形作られている．これらの理論における解の表示方法を利用することにより，非線形半群の示すべき性質を直接的に検証することができるのである．このような一般的論法は，実現象のモデル方程式に対して容易に応用することができる．

2 無限次元力学系

複素 Banach 空間 X を考え，そのノルムを $\|\cdot\|$ と表す．$\mathscr{X}$ を X の部分集合とする．$\mathscr{X}$ はノルム $\|\cdot\|$ から誘導される距離 $(d(U,V)=\|U-V\|,\ U,V\in\mathscr{X})$ により距離空間となる．$0\le t<\infty$ を時間変数とする．各 t について，$\mathscr{X}$ を定義域かつ値域とする非線形作用素 $S(t)$ が定まっており以下の 3 条件：

(1) $S(0)=1$ (1 は $\mathscr{X}$ の恒等写像),

(2) $S(t)S(s)=S(t+s),\ 0\le s,t<\infty$ (半群性),

(3) $G(t,U)=S(t)U$ により定義される写像 $G\colon[0,\infty)\times\mathscr{X}\to\mathscr{X}$ は連続

が満たされているものとする．このとき作用素族 $\{S(t)\}_{0\le t<\infty}$ を $\mathscr{X}$ 上の連続半群と呼ぶ．連続関数 $S(\cdot)U\in\mathscr{C}([0,\infty);\mathscr{X})$ の軌跡を始点 $U\in\mathscr{X}$ から発する軌道という．さらに，このような軌道の全体を $(S(t),\mathscr{X},X)$ と表記し，相空間を $\mathscr{X}$，半群を $S(t)$ とする力学系と呼ぶ．また，X を全体空間という．

力学系 $(S(t),\mathscr{X},X)$ を考える．相空間内の点 $\overline{U}\in\mathscr{X}$ について，$S(t)\overline{U}=\overline{U}$ が成り立つとき $\overline{U}$ を

$S(t)$ の不動点といい，すべての $0 \le t < \infty$ について $S(t)\overline{U} = \overline{U}$ であるとき $\overline{U}$ を力学系の平衡点と呼ぶ．もっと一般に，$\mathscr{A} \subset \mathscr{X}$ について，$S(t)\mathscr{A} \subset \mathscr{A}$ が成り立つとき $\mathscr{A}$ を $S(t)$ の正不変集合といい，すべての $0 \le t < \infty$ について $S(t)\mathscr{A} \subset \mathscr{A}$ であるとき $\mathscr{A}$ を力学系の正不変集合と呼ぶ．

次に, 吸収と誘引という 2 つの概念を導入する．2 つの部分集合 $\mathscr{A} \subset \mathscr{X}$, $B \subset \mathscr{X}$ について, ある時刻 t_0 が存在し $S(t)B \subset \mathscr{A}$ がすべての時間 $t \in [t_0, \infty)$ について成立するとき, $\mathscr{A}$ は B を吸収するという．他方, $\mathscr{A}$ の任意の ε-近傍 $\mathscr{W}_\varepsilon(\mathscr{A})$ が B を吸収するとき, $\mathscr{A}$ は B を誘引するという．Hausdorff の擬距離 $(h(A,B) = \sup_{U\in A} \inf_{V\in B} d(U,V))$ を用いると，このことは $\lim_{t\to\infty} h(S(t)B, \mathscr{A}) = 0$ と表現できる．

力学系 $(S(t), \mathscr{X}, X)$ の平衡点 $\overline{U}$ を考える．$\overline{U}$ の適当な近傍 $\mathscr{W}$ が $\overline{U}$ に誘引されるとき，すなわち $\lim_{t\to\infty} h(S(t)\mathscr{W}, \overline{U}) = 0$ が成り立つとき $\overline{U}$ は漸近安定であるという．他方，任意の $\varepsilon > 0$ について適当な $\overline{U}$ の近傍 $\mathscr{W}$ が存在して $\limsup_{t\to\infty} h(S(t)\mathscr{W}, \overline{U}) \le \varepsilon$ となるとき，$\overline{U}$ は安定であるという．漸近安定であれば安定である．安定でないとき，$\overline{U}$ は不安定であるという．したがって，$\overline{U}$ が不安定であるとは，ある $\varepsilon_0 > 0$ が存在しどのような近傍 $\mathscr{W}$ についても $\limsup_{t\to\infty} h(S(t)\mathscr{W}, \overline{U}) \ge \varepsilon_0$ が成立することとなる．

最後に 2 つのアトラクタ，グローバル・アトラクタと指数アトラクタの定義を述べる．

定義 1　力学系 $(S(t), \mathscr{X}, X)$ を考える．集合 $\mathscr{A} \subset \mathscr{X}$ が以下の 3 条件：

(1) $\mathscr{A}$ は X のコンパクト集合,

(2) すべての $0 \le t < \infty$ について，$S(t)\mathscr{A} = \mathscr{A}$ ($\mathscr{A}$ は正・負不変集合),

(3) $\mathscr{A}$ は $\mathscr{X}$ のすべての有界集合 B を誘引する，すなわち $\lim_{t\to\infty} h(S(t)B, \mathscr{A}) = 0$

を満たすとき，$\mathscr{A}$ は力学系のグローバル・アトラクタと呼ばれる．

グローバル・アトラクタは存在すれば一意的である (実際 2 つのグローバル・アトラクタ $\mathscr{A}_i$ $(i = 1, 2)$ が存在するとすると $h(\mathscr{A}_1, \mathscr{A}_2) = \lim_{t\to\infty} h(S(t)\mathscr{A}_1, \mathscr{A}_2) = 0$，同様に $h(\mathscr{A}_2, \mathscr{A}_1) = 0$，これより $\mathscr{A}_1 = \mathscr{A}_2$)．グローバル・アトラクタの存在定理については Temam [42] を参照.

定義 2　力学系 $(S(t), \mathscr{X}, X)$ を考える．$(S(t), \mathscr{X}, X)$ はグローバル・アトラクタ $\mathscr{A}$ を有するとする．集合 $\mathscr{M} \subset \mathscr{X}$ が以下の 3 条件：

(1) $\mathscr{M}$ は X のコンパクト集合で $\mathscr{A} \subset \mathscr{M} \subset \mathscr{X}$，$\mathscr{M}$ は有限フラクタル次元をもつ,

(2) すべての $0 \le t < \infty$ について，$S(t)\mathscr{M} \subset \mathscr{M}$ ($\mathscr{M}$ は正不変集合),

(3) $\mathscr{M}$ は $\mathscr{X}$ のすべての有界集合 B を指数的に誘引する，すなわち $h(S(t)B, \mathscr{M}) \le C_B e^{-kt}$, $0 \le t < \infty$ ここで $k > 0$ は B に依存しない指数，$C_B > 0$ は B に依存する定数

を満たすとき，$\mathscr{M}$ は力学系の指数アトラクタと呼ばれる．

指数アトラクタは存在しても一意的とは限らない．実際, $\mathscr{M}$ が指数アトラクタであり各作用素 $S(t)$ が Lipschitz 連続とすると，任意の $T > 0$ について $\mathscr{M}_T = S(T)\mathscr{M} \subset \mathscr{M}$ も指数アトラクタとなる．

3　指数アトラクタ

本節では指数アトラクタに関わる基本的な性質について述べる．その前に一つの簡単な例について考察しよう．常微分方程式の初期値問題

$$\begin{cases} \dfrac{du}{dt} = u^2(1-u), & 0 < t < \infty, \\ u(0) = u_0 \end{cases}$$

を考える．各初期値 $u_0 \in \boldsymbol{R}$ に対して大域解 $u(t;u_0)$ が存在する．相空間を $\mathscr{X} = \boldsymbol{R}$, 半群を $S(t)u_0 = u(t;u_0)$ と置くと $(S(t), \boldsymbol{R}, \boldsymbol{C})$ は力学系を定義する．この力学系は不安定平衡点 $\{0\}$ と安定平衡点 $\{1\}$ をもち，さらにグローバル・アトラクタ $[0,1]$ をもつ．グローバル・アトラクタ $[0,1]$ の誘引オーダは $O(t^{-1})$ なのでこれは指数アトラクタではない．任意の正数 $\delta > 0$ について $[-\delta, 1]$ を考える．これは正不変集合であり，初期値 $u_0 < 0$ から発した軌道 $S(\cdot)u_0$ は $[-\delta,1]$ に吸収され，一方 $u_0 > 1$ から発した軌道は指数オーダで $[-\delta,1]$ に誘引されることから $[-\delta,1]$ は指数アトラクタである．次に，パラメータ $0 < \xi \le 1$ を導入して初期値問題

$$\begin{cases} \dfrac{du}{dt} = u^2(1-u) + \xi, & 0 < t < \infty, \\ u(0) = u_0 \end{cases}$$

を考える．この初期値問題も同様に力学系 $(S_\xi(t), \boldsymbol{R}, \boldsymbol{C})$ を定める．しかし $(S_\xi(t), \boldsymbol{R}, \boldsymbol{C})$ は安定な平衡点 $\{\overline{u}_\xi\}$ (ただし $\overline{u}_\xi$ は方程式 $u^2(u-1) = \xi$ の実数解) のみをもち，同時に $\{\overline{u}_\xi\}$ はグローバル・アトラクタとなる．このようにグローバル・アトラクタはパラメータの変化 (今の場合 $\xi \to 0$) に対して一般に上半連続 ($\lim_{\xi\to 0}\{\overline{u}_\xi\} = \{1\} \subset [0,1]$) にしかならない．今の場合，指数アトラクタを考えると，$[-\delta, \overline{u}_\xi]$ が $(S_\xi(t), \boldsymbol{R}, \boldsymbol{C})$ の指数アトラクタであることに注意すると $\lim_{\xi\to 0}[-\delta, \overline{u}_\xi] = [-\delta, 1]$ のように，連続的に変化する指数アトラクタをとることができる．このようなパラメータに対する連続的な依存性は，一般的な枠組みの中で示される指数アトラクタの性質である (後述の定理 6 参照).

X のコンパクト集合 $\mathscr{M}$ についてそのフラクタル次元 $d(\mathscr{M})$ は次のように定義される．任意の正数 $\varepsilon > 0$ に対して $\mathscr{M}$ は有限個の半径 ε の球により被覆される．被覆に必要な半径 ε の球の最小個数を N_ε とする．このとき

$$d(\mathscr{M}) = \limsup_{\varepsilon\to 0} \frac{\log N_\varepsilon}{-\log \varepsilon} \tag{1}$$

と定義される．フラクタル次元が有限な集合については，次の意味で有限次元空間に埋め込むことができることが知られている (Hölder–Mañé の定理).

定理 1 X は実 Banach 空間，$\mathscr{M}$ は X のコンパクト集合で $d(\mathscr{M}) = d < \infty$ とする．整数 $N > 2d$ をとる．すべての指数 $0 < \alpha < (N-2d)/[N(1+d)]$ と (無限次元測度の意味で) ほとんどすべての有界線形作用素 $\pi\colon X \to \boldsymbol{R}^N$ について，π は $\mathscr{M}$ 上 1 対 1 となりかつ

$$C\|\pi U - \pi V\|^\alpha \ge \|U - V\|, \qquad U, V \in \mathscr{M}$$

が成り立つような定数 $C > 0$ が存在する．特に，ほとんどすべての有界作用素は $\mathscr{M}$ 上 1 対 1 となりかつ $\pi^{-1}{}_{|\pi(\mathscr{M})}$ は指数 α で Hölder 連続となる．

本定理は Hunt–Kaloshin [20] により示された．また，Hölder–Mañé の定理のこのような定式化も同論文による．

3 つの Banach 空間 $Z \subset Y \subset X$ を考える．これらの間にノルムの補間式

$$\|u\|_Y \le D\|u\|_Z^{\theta}\|u\|_X^{1-\theta}, \qquad u \in Z, \quad 0 < \theta < 1 \tag{2}$$

が成立するものとする．このとき，次の定理が成立する．

定理 2 3 つの Banach 空間 $Z \subset Y \subset X$ は (2) を満たすものとする．$(S(t), \mathscr{X}, X)$ は指数アトラクタ $\mathscr{M}$ を有し，$\mathscr{X}$ は Z の有界集合とする．このとき，$\mathscr{M}$ は $(S(t), \mathscr{X}, Y)$ の指数アトラクタともなる．さらに，$d_Y(\mathscr{M}) \le (1-\theta)^{-1} d_X(\mathscr{M})$ が成り立つ．ただし $d_X(\mathscr{M})$ $(d_Y(\mathscr{M}))$ は $\mathscr{M}$ の X (Y) におけるフラクタル次元を表す．

本定理は定義より直接証明することができる．

力学系 $(S(t), \mathscr{X}, X)$ および平衡点 $\overline{U}$ を考える．$\overline{U}$ における安定多様体および不安定多様体はそれぞれ

$$\begin{aligned}
\mathscr{M}_-(\overline{U}) &= \{U_0 \in \mathscr{X};\ \lim_{t\to\infty} S(t)U_0 = \overline{U}\},\\
\mathscr{M}_+(\overline{U}) &= \{U_0 \in \mathscr{X};\ \exists U : (-\infty, 0] \to \mathscr{X},\\
&\qquad S(t)U(-\tau) = U(t-\tau)\ (0 \le t \le \tau),\, U(0) = U_0,\, \lim_{t\to\infty} U(-t) = \overline{U}\}
\end{aligned}$$

により定義される．定義よりすべての $0 \le t < \infty$ について

$$S(t)[\mathscr{M}_-(\overline{U})] \subset \mathscr{M}_-(\overline{U}), \quad S(t)[\mathscr{M}_+(\overline{U})] = \mathscr{M}_+(\overline{U})$$

が成立することが直ちに確かめられる．すなわち，安定多様体は正の不変集合であり不安定多様体は正・負の不変集合である．さらに，$(S(t), \mathscr{X}, X)$ が指数アトラクタ $\mathscr{M}$ を（したがってグローバル・アトラクタ $\mathscr{A}$ も）もてば

$$\mathscr{M}_+(\overline{U}) \subset \mathscr{A} \subset \mathscr{M}$$

が成り立つ．この事実より，不安定多様体 $\mathscr{M}_+(\overline{U})$ が滑らかな多様体となる場合には

$$d(\mathscr{M}) \ge d(\mathscr{A}) \ge \dim \mathscr{M}_+(\overline{U}) \tag{3}$$

のように指数アトラクタの次元を下方より評価することができる．

以下，$\mathscr{M}_+(\overline{U})$ が滑らかな多様体となるための十分条件について考察する．このために先ず相空間は全体空間に一致する ($\mathscr{X} = X$) とする．さらに，適当な時刻 $t^* > 0$ があって作用素 $S^* = S(t^*)$ は平衡点 $\overline{U}$ の近傍において $\mathscr{C}^{1+\theta}$ $(0 < \theta < 1)$ 級であるとする．$\overline{U}$ での Fréchet 微分を $[S^*]'\overline{U}$ で表す．次の 2 条件を仮定する：

(1) $[S^*]'\overline{U}$ のスペクトルは単位円により分離される，すなわち

$$\sigma([S^*]'\overline{U}) \cap \{\lambda \in \boldsymbol{C};\ |\lambda| = 1\} = \emptyset.$$

(2) 上記のスペクトル分離により誘導される空間分割を $X = X_i + X_e$，作用素分割を $[S^*]'\overline{U} = S_i + S_e$ とする．すなわち，$\sigma(S_i) = \sigma([S^*]'\overline{U}) \cap \{\lambda;\ |\lambda| < 1\}$ かつ $\sigma(S_e) = \sigma([S^*]'\overline{U}) \cap \{\lambda;\ |\lambda| > 1\}$ とする ([21, Theorem 6.17] 参照)．この分解において X_e は有限次元空間となる．

これら 2 条件が成り立つとき，$\overline{U}$ は双曲型平衡点といわれる．双曲型平衡点 $\overline{U}$ の不安定多様体は $\overline{U}$

の近傍において滑らかな多様体として表現できる．

定理 3 $\overline{U}$ を力学系 $(S(t), X, X)$ の平衡点とする．$S(t^*)$ は $\overline{U}$ の近傍において $\mathscr{C}^{1+\theta}$ $(0 < \theta < 1)$ 級，さらに $\overline{U}$ は双曲型とする．このとき不安定多様体 $\mathscr{M}_+(\overline{U})$ は $\overline{U}$ の近傍において $\mathscr{C}^{1+\theta}$ 級の多様体として表現できる．この近傍において $\dim \mathscr{M}_+(\overline{U}) = \dim X_e$ となる．

この表現定理は Wells [45] による．さらに，Temam [42, Theorem 3.1] にも詳しい解説がある．

4 縮小条件のコンパクト摂動

$(S(t), \mathscr{X}, X)$ を Banach 空間 X における力学系とする．この力学系が指数アトラクタを有するための半群 $S(t)$ に関する十分条件について考察する．

始めに $(S(t), \mathscr{X}, X)$ にはすべての有界集合を吸収するコンパクト集合 $\mathscr{B}$ が存在するとする．$\mathscr{B}$ も有界集合なので自身に吸収される，すなわち適当な $t_{\mathscr{B}} > 0$ があって $S(t)\mathscr{B} \subset \mathscr{B}$, $t_{\mathscr{B}} \le t < \infty$ が成り立つ．よって

$$\mathscr{X}_1 = \bigcup_{0 \le t < \infty} S(t)\mathscr{B} = \bigcup_{0 \le t \le t_{\mathscr{B}}} S(t)\mathscr{B}$$

となる．ここで，$\mathscr{X}_1$ は連続写像 $G\colon [0, t_{\mathscr{B}}] \times \mathscr{B} \to X$ の像であり $[0, t_{\mathscr{B}}] \times \mathscr{B}$ はコンパクトであることより $\mathscr{X}_1$ も X のコンパクト集合となる．$\mathscr{X}$ の任意の有界集合から発した軌道は $\mathscr{B}$ に吸収され，さらに $\mathscr{X}_1$ に吸収される．一方で，$\mathscr{X}_1$ は $S(t)$ の正不変集合となることより $(S(t), \mathscr{X}_1, X)$ は一つの力学系をなす．この意味で力学系 $(S(t), \mathscr{X}, X)$ の漸近的挙動は $(S(t), \mathscr{X}_1, X)$ に帰着される．このような事情より，最初から

$$\text{相空間 } \mathscr{X} \text{ は } X \text{ のコンパクト集合} \tag{4}$$

を仮定することとする．

次の十分条件は Efendiev–Miranville–Zelik [10] により導入された．適当な時刻 $t^* > 0$ において作用素 $S(t^*)$ は縮小の部分とコンパクトの部分に分解できるとする．すなわち，各々の点の対 $(U, V) \in \mathscr{X}^2$ について

$$\|S(t^*)U - S(t^*)V\|_X \le \delta \|U - V\|_X + \|KU - KV\|_X \tag{5}$$

が成り立つとする．ここで δ は $0 \le \delta < 1/2$ であるような定数であり，K は $\mathscr{X}$ から，X にコンパクトに埋め込まれる第 2 の Banach 空間 Z への写像であり，適当な定数 $L > 0$ により Lipschitz 条件

$$\|KU - KV\|_Z \le L\|U - V\|_X, \qquad U, V \in \mathscr{X} \tag{6}$$

を満たすとする．さらに，$G(t, U) = S(t)U$ も適当な定数 $C > 0$ により Lipschitz 条件

$$\|G(t, U) - G(s, V)\|_X \le C(|t - s| + \|U - V\|_X), \qquad t, s \in [0, t^*],\ U, V \in \mathscr{X} \tag{7}$$

を満たすとする．

定理 4 (4) の下，条件 (5), (6), (7) が満たされるとする．このとき，任意の指数 $0 < \theta < (1 - 2\delta)/(2L)$ について，指数アトラクタ $\mathscr{M}_\theta$ でフラクタル次元

$$d(\mathscr{M}_\theta) \le \frac{\log K_\theta}{-\log a_\theta} + 1 \tag{8}$$

を有し，相空間全体をオーダ

$$h(S(t)\mathscr{X}, \mathscr{M}_\theta) \le R a_\theta^{-1} e^{-((1/t^*)\log a_\theta^{-1})t}, \qquad 0 \le t < \infty$$

で誘引するものが構成される．ここで，R は $\mathscr{X}$ の X での直径，$0 < a_\theta < 1$ は $a_\theta = 2(\delta + L\theta)$ で与えられる指数，K_θ は Z の単位球 $\overline{B}^Z(0;1)$ を有限個の半径 θ の X-球で被覆するときに要する球の最小個数である．

[10] では，(4), (5), (6) の下に離散力学系 $(\{S(t^*)^n\}_{n=0,1,2,\ldots}, \mathscr{X}, X)$ に対して指数アトラクタが構成された．これを元に，(7) を使うと容易に連続力学系 $(S(t), \mathscr{X}, X)$ に対して指数アトラクタが構成できる ([9, Theorem 3.1] を参照).

特に $K = 0$ である場合は $S(t^*)$ が縮小写像となる．Banach の不動点定理より $S(t^*)$ には唯一つの不動点 $\overline{U} \in \mathscr{X}$ が存在し，離散力学系 $(\{S(t^*)^n\}_{n=0,1,2,\ldots}, \mathscr{X}, X)$ のすべての軌道は指数的に $\overline{U}$ に収束する．ところで, 任意の $t > 0$ について $S(t)\overline{U}$ も $S(t^*)$ の不動点となることから $S(t)\overline{U} = \overline{U}$ (不動点の一意性), すなわち $\overline{U}$ は $(S(t), \mathscr{X}, X)$ の平衡点となる．さらに (7) から，すべての $(S(t), \mathscr{X}, X)$ の軌道は指数的に $\overline{U}$ に収束することが示される．この意味で，(5), (6) は縮小条件のコンパクト摂動とみなせる．

全体空間 X が Hilbert 空間の場合には，Eden–Foias–Nicolaenko–Temam [9] によって導入された $S(t)$ のスクイーズイング性がある．適当な時刻 $t^* > 0$ において作用素 $S(t^*)$ は Lipschitz 条件

$$\|S(t^*)U - S(t^*)V\| \le L\|U - V\|, \qquad U, V \in \mathscr{X} \tag{9}$$

を満たすとする．さらに，指数 $0 \le \delta < 1/4$ および X の有限次元部分空間 Z, $\dim Z = N < \infty$ が存在し各々の点の対 $(U, V) \in \mathscr{X}^2$ に対して次の 2 条件：

$$\|S(t^*)U - S(t^*)V\| \le \delta\|U - V\|, \tag{10}$$

$$\|(1 - P)[S(t^*)U - S(t^*)V]\| \le \|P[S(t^*)U - S(t^*)V]\| \tag{11}$$

のいずれかが成り立つとする．ここで $P\colon X \to Z$ は正規直交射影を表す．特に，条件 (10), (11) は $S(t^*)$ のスクイーズイング性と呼ばれる．

定理 5　全体空間 X は Hilbert 空間，相空間 $\mathscr{X}$ は (4) を満たすとする．条件 (9)，‘(10) または (11)’ が満たされ，さらに (7) が満たされるとする．このとき，任意の指数 $0 < \theta < 1 - 2\delta$ について，指数アトラクタ $\mathscr{M}_\theta$ でフラクタル次元

$$d(\mathscr{M}_\theta) \le N \max\left\{\frac{\log(3L\delta^{-1} + 1)}{-\log a_\theta}, 1\right\} + 1 \tag{12}$$

を有し，相空間全体をオーダ

$$h(S(t)\mathscr{X}, \mathscr{M}_\theta) \le R a_\theta^{-1} e^{-((1/t^*)\log a_\theta^{-1})t}, \qquad 0 \le t < \infty$$

で誘引するものが構成される．ここで，R は $\mathscr{X}$ の X での直径，$0 < a_\theta < 1$ は $a_\theta = 2\delta + \theta$ で与えられる指数である．

この定理は [9] で証明されている．

全体空間 X が Hilbert 空間の場合，論理的には縮小条件のコンパクト摂動とスクイーズイング性とは同等となる．実際，(9) および‘(10) または (11)’が成立すると仮定すると，各々の点の対 $(U,V)\in\mathscr{X}^2$ について次の 2 条件：

$$\|S(t^*)U-S(t^*)V\|\le\delta\|U-V\|,$$
$$\|S(t^*)U-S(t^*)V\|\le\sqrt{2}\,\|P[S(t^*)U-S(t^*)V]\|$$

のいずれかが成り立つことになり，結果として (5) が $K=\sqrt{2}\,PS(t^*)$ として成立する．Z は有限次元空間より X にコンパクトに埋め込まれる．(6) が成立することは (9) より明らかである．

逆に，$S(t^*)$ が条件 (5), (6) を次のように少し強い意味で満たすとする．$S(t^*)$ は $S(t^*)=S_0+K$ と分解され，S_0 は縮小条件 $\|S_0U-S_0\|\le\delta\|U-V\|$ を満たし，K はコンパクト性の条件 (6) を満たすとする．相空間はコンパクトより，X は可分と仮定してよい．X の正規直交基底 $\{E_1,E_2,E_3,\ldots\}$ を導入し，有限次元空間 $Z_N=\{E_1,E_2,\ldots,E_N\}$ を考える．P_N を X から Z_N への直交射影とする．このとき，

$$\|S(t^*)U-S(t^*)V\|\le\|(1-P_N)[S(t^*)U-S(t^*)V]\|+\|P_N[S(t^*)U-S(t^*)V]\|$$

であり，さらに右辺の第 1 項は

$$\begin{aligned}\|(1-P_N)[S(t^*)U-S(t^*)V]\|&\le\|(1-P_N)[S_0U-S_0V]\|+\|(1-P_N)[KU-KV]\|\\&\le\delta\|U-V\|+\varepsilon_N\|KU-KV\|_Z\\&\le(\delta+L\varepsilon_N)\|U-V\|\end{aligned}$$

と評価される．ただし $\varepsilon_N=\sup_{\widetilde{U}\in\overline{B}^Z(0;1)}\|(1-P_N)\widetilde{U}\|$ で $\overline{B}^Z(0;1)$ が X のコンパクト集合であることより $\lim_{N\to\infty}\varepsilon_N=0$ となる．$S(t^*)$ のスクイーズイング性を確かめるために

$$\|(1-P_N)[S(t^*)U-S(t^*)V]\|>\|P_N[S(t^*)U-S(t^*)V]\|$$

である (すなわち (11) が成立しない) と仮定しよう．上の評価より

$$\|S(t^*)U-S(t^*)V\|\le 2(\delta+L\varepsilon_N)\|U-V\|$$

となり，これは N が十分大きければ (10) が成立することを示す．これで $S(t^*)$ のスクイーズング性が導かれた．

一般的に言って，縮小条件のコンパクト摂動を示すことは容易であるがスクイーズイング性を直接的に示すことは限られた場合を除いて容易ではない．反面，縮小条件のコンパクト摂動から構成される指数アトラクタの次元評価 (8) には被覆個数 K_θ が現れこの個数の具体的な評価が要求されるが，スクイーズイング性から構成される指数アトラクタの評価 (12) は有限次元空間の次元 N により明示的に与えられる．

本節の最後の話題として，縮小条件のコンパクト摂動を用いる場合，パラメータに対して連続的に依存するように指数アトラクタを構成することができることを示す．

Banach 空間 X を全体空間とする力学系の族 $(S_\xi(t),\mathscr{X}_\xi,X)$ を考える，ここで $0\le\xi\le1$ はパラ

メータである．各 ξ について相空間 $\mathscr{X}_\xi$ は X のコンパクト集合とする．さらに，一様な吸収集合 $\mathscr{B}$ が存在するとする，すなわち $\mathscr{B} \subset \bigcap_{0\le\xi\le1} \mathscr{X}_\xi$ で，適当な $t^* > 0$ について

$$\bigcup_{0\le\xi\le1} \bigcup_{t^*\le t<\infty} S_\xi(t)\mathscr{X}_\xi \subset \mathscr{B} \tag{13}$$

が成り立つものとする．加えて，$\xi \to 0$ のとき，$[0,t^*] \times \mathscr{B}$ において半群 $S_\xi(t)$ は半群 $S_0(t)$ に収束する，すなわち

$$\sup_{0\le t\le t^*} \sup_{U\in\mathscr{B}} \|S_\xi(t)U - S_0(t)U\| \le O_\xi \tag{14}$$

が成り立つものとする．ここで O_ξ は $\lim_{\xi\to0} O_\xi = 0$ であるような収束オーダを表す変数である．

定理 6　$0 \le \xi \le 1$ をパラメータとする力学系の族 $(S_\xi(t), \mathscr{X}_\xi, X)$ を考える．各相空間 $\mathscr{X}_\xi$ は X のコンパクト集合で，(13) を満たすような一様吸収集合 $\mathscr{B}$ が存在すると共に $[0,t^*] \times \mathscr{B}$ において半群 $S_\xi(t)$ は $S_0(t)$ に (14) の意味で収束するとする．さらに，各力学系は縮小条件のコンパクト摂動 (5), (6) ならびに Lipschitz 条件 (7) をパラメータ ξ $(0 \le \xi \le 1)$ につき一様に満たしていると仮定する．このとき，

$$d(\mathscr{M}_\xi, \mathscr{M}_0) = \max\{h(\mathscr{M}_\xi, \mathscr{M}_0), h(\mathscr{M}_0, \mathscr{M}_\xi)\} \le O_\xi^\kappa, \qquad 0 \le \xi \le 1 \tag{15}$$

が指数 $0 < \kappa < 1$ で成り立つように各 $(S_\xi(t), \mathscr{X}_\xi, X)$ に対する指数アトラクタ $\mathscr{M}_\xi$ を構成することができる．

本定理は Efendiev–Yagi [11] により示された．本定理は，各 ξ について縮小条件のコンパクト摂動が成り立っておりかつ半群 $S_\xi(t)$ が半群 $S_0(t)$ に有限区間 $[0,t^*]$ において収束すれば，(15) が示す通り集合の距離の意味で収束する指数アトラクタが存在することを主張している．

5　抽象放物型発展方程式

本節では，前節の結果を適用して実際の非線形拡散モデルに対して指数アトラクタを構成するための方法を抽象放物型発展方程式の理論に基づき述べることにする．

5.1　半線形方程式

Banach 空間 X における半線形発展方程式についての初期値問題

$$\begin{cases} \dfrac{dU}{dt} + AU = F(U), \qquad 0 < t < \infty, \\ U(0) = U_0 \end{cases} \tag{16}$$

を考える．ここで A は X の閉線形作用素でその定義域 $\mathscr{D}(A)$ は稠密とする．A のスペクトル集合 $\sigma(A)$ は開角領域

$$\sigma(A) \subset \Sigma_\omega = \{\lambda \in C;\ |\arg\lambda| < \omega\}, \qquad 0 < \omega < \pi/2 \tag{17}$$

に含まれ，Σ_ω の外部ではレゾルベントについての評価式

$$\|(\lambda - A)^{-1}\| \le \frac{M}{|\lambda|}, \qquad \lambda \notin \Sigma_\omega \tag{18}$$

が成立しているとする．一方で，非線形作用素 F は A の分数べき A^η, $0<\eta<1$ の定義域 $\mathscr{D}(A^\eta)$ から X への写像とする．F は次のような Lipschitz 条件：

$$\begin{aligned}\|F(U)-F(V)\| &\le \varphi(\|A^\beta U\|+\|A^\beta V\|)\\ &\quad\times[\|A^\eta(U-V)\|+(\|A^\eta U\|+\|A^\eta V\|)\|A^\beta(U-V)\|],\quad U,V\in\mathscr{D}(A^\eta)\end{aligned}\tag{19}$$

を満たしているとする．ここで $\varphi(r)$ は $0\le r<\infty$ について定義された単調増加関数，β は第 2 の指数で $0\le\beta\le\eta<1$ とする．初期値 U_0 は定義域 $\mathscr{D}(A^\beta)$ からとる．

一般に条件 (17), (18) を満たすような閉線形作用素を角域作用素 (sectorial operator の訳語) と呼ぶことにする．角域作用素には，$A^0=1$ と $A^1=A$ を複素補間する作用素の分数べき A^θ, $0<\theta<1$ が定義される．分数べきの詳しい定義および指数法則 $(A^\theta A^{\theta'}=A^{\theta+\theta'})$ を含む基本性質については Yosida [54]，田辺 [41]，村松 [30]，Carracedo–Alix [8] 等を参照のこと．また楕円型作用素の分数べきの定義域については Fujiwara [12]，Seeley [35]，Yagi [50] 等により特徴付けが行われている．

A が $0<\omega\le\pi/2$ で条件 (17), (18) を満たすとき，A についての指数関数 e^{-tA}, $0\le t<\infty$，が定義される．この指数関数は複素平面上の半直線 $(0,\infty)$ を含むある角領域において $\mathscr{L}(X)$ に値をとる正則関数 e^{-zA} に拡張され，この正則関数は A により生成された解析的半群と呼ばれる．解析的半群についての詳しい定義および基本性質についても Yosida [54] や田辺 [41] 等を参照のこと．

i) 局所解　A についての条件 (17), (18)，F についての条件 (19) が指数 $0\le\beta\le\eta<1$ で満たされているとする．このとき，任意の初期値 $U_0\in\mathscr{D}(A^\beta)$ に対する (16) の局所解 U で次の意味の連続性：

$$\begin{cases}U\in\mathscr{C}((0,T_{U_0}];\mathscr{D}(A))\cap\mathscr{C}([0,T_{U_0}];\mathscr{D}(A^\beta))\cap\mathscr{C}^1((0,T_{U_0}];X),\\ t^{1-\beta}U\in\mathscr{B}((0,T_{U_0}];\mathscr{D}(A))\end{cases}\tag{20}$$

を満たすものを一意的に構成することができる．さらに局所解は評価式

$$t^{1-\beta}\|AU(t)\|+t^{\eta-\beta}\|A^\eta U(t)\|+\|A^\beta U(t)\|\le C_{U_0},\qquad 0<t\le T_{U_0}$$

を満たす．ここで，局所解が構成される区間 $[0,T_{U_0}]$ の終時刻 $T_{U_0}>0$ は初期値のノルム $\|A^\beta U_0\|$ にのみ依存して決まる．また，定数 $C_{U_0}>0$ もノルム $\|A^\beta U_0\|$ にのみ依存して決まる．

本存在定理は Osaki–Yagi [34] に示されている．この他にも半線形発展方程式 (16) の存在定理は Hoshino–Yamada [19] や von Whal [44] 等により研究されている ([55] も参照).

局所解の構成と共に局所解の初期値に関する Lipschitz 連続性も同時に示される．今

$$K_R=\{U_0\in\mathscr{D}(A^\beta);\ \|A^\beta U_0\|\le R\},\qquad 0<R<\infty$$

とする．上記の結果より，各初期値 $U_0\in K_R$ に対して (16) の局所解が適当な区間 $[0,T_R]$ 上で構成される，ただし $T_R>0$ は R にのみ依存して $U_0\in K_R$ には依存しない．初期値 $U_0\,(V_0)\in K_R$ に対する局所解を $U(t)$ $(V(t))$ で表す．このとき，

$$\begin{aligned}&t^\eta\|A^\eta[U(t)-V(t)]\|+t^\beta\|A^\beta[U(t)-V(t)]\|\\ &\qquad+\|U(t)-V(t)\|\le C_R\|U_0-V_0\|,\qquad 0<t\le T_R\end{aligned}\tag{21}$$

が成り立つ．ただし $C_R > 0$ は R にのみ依存して決まる定数である．

評価式 (21) も [34] で示されている．

ii) 大域解 (16) の大域解を求めるにはアプリオリ評価式が必要である．局所解 U で次の意味の連続性：

$$U \in \mathscr{C}((0,T_U];\mathscr{D}(A)) \cap \mathscr{C}([0,T_U];\mathscr{D}(A^\beta)) \cap \mathscr{C}^1((0,T_U];X) \tag{22}$$

をもつものを考える．ここで $[0,T_U]$ は局所解が定義されている区間を表す．適当な単調増加関数 $p(\cdot)$ が存在し，$U_0 \in \mathscr{D}(A^\beta)$ を初期値とする (22) を満たす任意の局所解 U について評価式

$$\|A^\beta U(t)\| \le p(\|A^\beta U_0\|), \qquad 0 \le t \le T_U \tag{23}$$

が成立することが示されたとする．

このとき直ちに (16) の大域解の存在が分かる．実際，適当な区間 $[0,T_{U_0}]$ が存在しこの区間上で局所解が一意的に存在する．今，この局所解が $[0,T_U]$ まで延長できたとする．アプリオリ評価式より $\|A^\beta U(t)\| \le p(\|A^\beta U_0\|), 0 \le t \le T_U$ となる．U_1 を $\|A^\beta U_1\| \le p(\|A^\beta U_0\|)$ であるような初期値とすると局所解存在定理よりこの初期値に対してある定数 $\tau > 0$ が存在して局所解が $[0,\tau]$ で存在する．この事実を $U_1 = U(T_U - \tau/2)$ として適用すると，初期値 U_0 に対する $[0,T_U]$ 上の局所解が $[0,T_U+\tau/2]$ まで延長できることになる．ここで，τ は $p(\|A^\beta U_0\|)$ により決まり T_U には無関係であることに注意する．これより，U_0 を初期値とする局所解は常に時間幅 $\tau/2$ だけ延長可能で，したがって $[0,\infty)$ 上の大域解が構成される．この大域解を $U(t;U_0)$ で表す．(23) から大域解に対しても評価式

$$\|A^\beta U(t;U_0)\| \le p(\|A^\beta U_0\|), \qquad 0 \le t < \infty$$

が成立する．さらに，$U(t-\tau;U_0)$ を初期値とみなして (20) を適用することにより

$$\|AU(t;U_0)\| \le (1+t^{\beta-1})p(\|A^\beta U_0\|), \qquad 0 < t < \infty \tag{24}$$

が得られる．

iii) 力学系 各初期値 $U_0 \in \mathscr{D}(A^\beta)$ に対する大域解を $U(t;U_0)$ とする．非線形作用素 $S(t), 0 \le t < \infty$ を $S(t)U_0 = U(t;U_0)$ で定義する．$S(t)$ は $\mathscr{D}(A^\beta)$ から $\mathscr{D}(A^\beta)$ への写像であり，大域解の一意性より半群性をもつ．

$0 < R < \infty$ として初期値の空間

$$K_R = \{U \in \mathscr{D}(A^\beta);\ \|A^\beta U\| \le R\}$$

を設定する．(21) より適当な時刻 $T_R > 0$ が定まり区間 $[0,T_R]$ において解は初期値に関して連続であるから $G(t,U) = S(t)U$ は $[0,T_R] \times K_R$ から X へ X-ノルムに関して連続である．一方で，(23) より K_R から発した解はすべて $\|A^\beta U(t;U_0)\| \le p(R)$ を満たしている．R を $p(R)$ に置き換えて T_R を初期時刻とする区間で再び (21) を用いると適当な時間 $\tau_{p(R)} > 0$ が存在して G は $[0,T_R+\tau_{p(R)}] \times K_R$ から X へ X-ノルムに関して連続であることが示される．この議論を繰り返すことにより最後に G は $[0,\infty) \times K_R$ から X へ X-ノルムに関して連続であることが結論付けられる．

各 K_R について

$$\mathscr{X}_R = \bigcup_{0 \le t < \infty} S(t) K_R$$

と置く．定義より $\mathscr{X}_R$ は $S(t)$ の正不変集合，明らかに $K_R \subset \mathscr{X}_R$，また $\mathscr{X}_R \subset K_{p(R)}$ である．最後の事実より G は $[0, \infty) \times \mathscr{X}_R$ から $\mathscr{X}_R$ へ X-ノルムに関して連続である．以上より，各 $0 < R < \infty$ について $(S(t), \mathscr{X}_R, X)$ は力学系となる．特に，発展方程式 (16) から定まる力学系である．

iv) 指数アトラクタ　指数アトラクタの構成へ進む．このために，空間に関する 2 つの仮定：

$$\begin{cases} X \text{ は回帰的 Banach 空間}, \\ \mathscr{D}(A) \text{ は } X \text{ へコンパクトに埋め込まれる} \end{cases} \tag{25}$$

を加える．さらに，散逸条件：ある定数 $\widetilde{C} > 0$ が存在し，任意の $\mathscr{D}(A^\beta)$ の有界集合 B について適当な時刻 $t_B > 0$ が存在して

$$\sup_{U_0 \in B} \sup_{t_B \le t < \infty} \|A^\beta U(t; U_0)\| \le \widetilde{C} \tag{26}$$

が成立すると仮定する．この散逸条件と (24) より，適当な定数 $\widetilde{C}_1$ が存在し，任意の $\mathscr{D}(A^\beta)$ の有界集合 B について適当な時刻 $t_B > 0$ が存在して

$$\sup_{U_0 \in B} \sup_{t_B \le t < \infty} \|AU(t; U_0)\| \le \widetilde{C}_1 \tag{27}$$

となることが示される．

(25), (26) の下に指数アトラクタの構成をしよう．先ず，$\mathscr{B} = \{U \in \mathscr{D}(A); \|AU\| \le \widetilde{C}_1\}$ と置く．(25) より $\mathscr{B}$ は X の閉集合かつ相対コンパクト集合となるので結局 X のコンパクト集合となる．また，(27) は任意の有界集合 B について適当な時刻 $t_B > 0$ が存在して $S(t)B \subset \mathscr{B}$ となることを示すので，$\mathscr{B}$ は吸収集合である．$\mathscr{B}$ 自身が $\mathscr{B}$ に吸収されることに注意して

$$\mathscr{X} = \overline{\bigcup_{t_{\mathscr{B}} \le t < \infty} S(t)\mathscr{B}} \subset \mathscr{B} \qquad (X \text{ における閉包})$$

と置く．容易に，$\mathscr{X}$ は X のコンパクト集合，$\mathscr{D}(A)$ の有界集合，$S(t)$ の吸収集合，$S(t)$ の正不変集合となることが証明される．したがって，X でコンパクトかつ $\mathscr{D}(A)$ で有界な相空間を有する力学系 $(S(t), \mathscr{X}, X)$ が定義された．

直ちに $(S(t), \mathscr{X}, X)$ に定理 4 が適用でき，指数アトラクタの族 $\mathscr{M}_\theta$ が構成できる．実際，任意に $t^* > 0$ を固定し，$Z = \mathscr{D}(A^\beta)$ とする．(25) より Z は X へコンパクトに埋め込まれる．$\delta = 0$ かつ $K = S(t^*)$ とする，したがって (5) の成立は自明．評価式 (21) より (6) が成り立つ．最後に，(7) は $\mathscr{X}$ が $\mathscr{D}(A)$ の有界集合であることおよび評価式 (21) から確かめられる．

全体空間を初期値の空間 $\mathscr{D}(A^\beta)$ に取り替えることも可能である．定理 2 を $Y = \mathscr{D}(A^\beta)$ および $Z = \mathscr{D}(A)$ として $(S(t), \mathscr{X}, X)$ に適用することができる．その結果，$(S(t), \mathscr{X}, \mathscr{D}(A^\beta))$ も力学系となり，上で構成された指数アトラクタ $\mathscr{M}_\theta$ はこの力学系の指数アトラクタでもあることが示される．

X が Hilbert 空間の場合，(16) から決まる力学系 $(S(t), \mathscr{X}, X)$ について半群 $S(t)$ のスクイーズイング性を確かめることができる．Hilbert 空間 X における方程式 (16) において，A は正定値自己

共役作用素，定義域 $\mathscr{D}(A)$ は X にコンパクトに埋め込まれているとする．相空間 $\mathscr{X}$ は X のコンパクト集合とする．非線形作用素 F は $\mathscr{X}$ 上において Lipschitz 条件

$$\|F(U) - F(V)\| \leq L\|A^{1/2}(U - V)\|, \qquad U, V \in \mathscr{X} \tag{28}$$

を満たしているとする．このとき $S(t)$ はスクイーズイング性 '(10) または (11)' を有することが結論付けられる．本結果も Eden–Foias–Nicolaenko–Temam [9] に示されている．

5.2 準線形方程式

Banach 空間 X における準線形発展方程式の初期値問題

$$\begin{cases} \dfrac{dU}{dt} + A(U)U = F(U), \qquad 0 < t < \infty, \\ U(0) = U_0 \end{cases} \tag{29}$$

を考える．本項の結果は Aida–Efendiev–Yagi [2] で得られたものである．準線形抽象放物型発展方程式に関する研究には他に Amann [5]，Lunardi [25]，Sobolevskii [37]，Yagi [49] 等がある．

Z は X へ埋め込まれている第 2 の Banach 空間とする．各 $U \in Z$ について $A(U)$ は稠密な定義域 $\mathscr{D}(A(U))$ をもつ X の閉線形作用素とする．$A(U)$ の定義域は U に依らず一定, すなわち $\mathscr{D}(A(U)) \equiv \mathscr{D}$ とする．

$0 < R < \infty$ について

$$Z_R = \{U \in Z;\ \|U\|_Z < R\}$$

と置く．各 $0 < R < \infty$ について閉作用素族 $A(U), U \in Z_R$，は (17), (18) を満たすとする．すなわち，$0 < \omega_R < \pi/2$ が存在して

$$\sigma(A(U)) \subset \Sigma_{\omega_R} = \{\lambda \in C;\ |\arg\lambda| < \omega_R\}, \qquad U \in Z_R \tag{30}$$

かつ Σ_{ω_R} の外部では

$$\|(\lambda - A(U))^{-1}\| \leq \frac{M_R}{|\lambda|}, \qquad \lambda \notin \Sigma_{\omega_R}, U \in Z_R \tag{31}$$

が成立すると仮定する．さらに $A(\cdot)$ は次の形の Lipschitz 条件：

$$\|A(U)[A(U)^{-1} - A(V)^{-1}]\| \leq N_R\|U - V\|_Y, \qquad U, V \in Z_R \tag{32}$$

を満たしていると仮定する．ここで Y は第 3 の Banach 空間で連続な埋め込みにより $Z \subset Y \subset X$ となるとする．$\mathscr{D}$ にはグラフノルム $\|\cdot\|_{\mathscr{D}} = \|A(0)\cdot\|$ を導入し Banach 空間とみなす．

非線形作用素 F は Z から X への写像で，通常の Lipschitz 条件：

$$\|F(U) - F(V)\| \leq L_R\|U - V\|_Y, \qquad U, V \in Z_R \tag{33}$$

を満たすとする．

Banach 空間 Y, Z については，指数 $0 \leq \alpha < \beta < 1$ が存在し包含関係 $\mathscr{D}(A_R(U)^\alpha) \subset Y$ および $\mathscr{D}(A(U)^\beta) \subset Z$ がノルム関係式

$$\begin{cases} \|\widetilde{U}\|_Y \leq D_{1,R}\|A(U)^\alpha \widetilde{U}\|_X, & \widetilde{U} \in \mathscr{D}(A(U)^\alpha),\ U \in Z_R, \\ \|\widetilde{U}\|_Z \leq D_{2,R}\|A(U)^\beta \widetilde{U}\|_X, & \widetilde{U} \in \mathscr{D}(A(U)^\beta),\ U \in Z_R \end{cases} \tag{34}$$

と共に成立していると仮定する．ただし $D_{i,R}\,(i=1,2)$ は定数であるとする．

i) 局所解 第 3 の指数 γ を $\beta<\gamma<1$ が成り立つように導入する．初期値は条件：

$$U_0 \in \mathscr{D}(A(U_0)^\gamma) \tag{35}$$

を満たすようにとる．

条件 (30)∼(34) の下，(35) を満たす任意の初期値 U_0 に対する (29) の局所解 U で次の意味の連続性：

$$\begin{cases} U \in \mathscr{C}^1((0,T_{U_0}];X) \cap \mathscr{C}^{\gamma-\alpha}([0,T_{U_0}];Y) \cap \mathscr{C}^{\gamma-\beta}([0,T_{U_0}];Z) \cap \mathscr{C}((0,T_{U_0}];\mathscr{D}), \\ A(U)^\gamma U \in \mathscr{C}([0,T_{U_0}];X) \end{cases} \tag{36}$$

を満たすものを一意的に構成することができる ([2] 参照)．さらに局所解は評価式

$$t^{1-\gamma}\|A(U(t))U(t)\| + \|A(U(t))^\gamma U(t)\| \leq C_{U_0}, \qquad 0<t\leq T_{U_0} \tag{37}$$

を満たす．ここで, 局所解が構成される区間 $[0,T_{U_0}]$ の終時刻 $T_{U_0}>0$ は初期値のノルム $\|A(U_0)^\gamma U_0\|$ にのみ依存して決まる．また，定数 $C_{U_0}>0$ もノルム $\|A(U_0)^\gamma U_0\|$ にのみ依存して決まる．

次に，構成された局所解の初期値に関する連続性を示す．$0<R<\infty$, $0<D<\infty$ に対して，初期値の集合

$$K_{R,D} = \{U_0 \in Z;\ \|U_0\|_Z \leq R \text{ かつ } \|A(U_0)^\gamma U_0\|_X \leq D\}$$

を導入する．各 $U_0 \in K_{R,D}$ に対して局所解が適当な区間 $[0,T_{R,D}]$ で構成できる．ただし $T_{R,D}>0$ は R, D のみに依存して $U_0 \in K_{R,D}$ には依存しない．初期値 U_0 (V_0) に対する局所解を $U(t)$ ($V(t)$) とするとき,

$$\begin{aligned} t^\gamma\|A(U(t))^\gamma[U(t)-V(t)]\|_X + t^\beta\|A(U(t))^\beta[U(t)-V(t)]\|_X + \|U(t)-V(t)\|_X \\ \leq C_{R,D}\|U_0-V_0\|_X, \quad 0<t\leq T_{R,D} \end{aligned} \tag{38}$$

が成立する．ここで $C_{R,D}>0$ は R, D にのみ依存する定数である．

評価式 (38) も [2] に示されている．

ii) 大域解 以下，分数べき $A(U)^\gamma$ の定義域 $\mathscr{D}(A(U)^\gamma) \equiv \mathscr{D}_\gamma$ は一定でかつノルムの同値性：

$$D_{3,R}^{-1}\|A(U)^\gamma \cdot\|_X \leq \|A(0)^\gamma \cdot\|_X \leq D_{3,R}\|A(U)^\gamma \cdot\|_X, \qquad U \in Z_R \tag{39}$$

が成り立つという仮定を加える．$\mathscr{D}_\gamma$ にはグラフノルム $\|\cdot\|_{\mathscr{D}_\gamma} = \|A(0)^\gamma \cdot\|$ を導入し Banach 空間とする．

各 $U_0 \in \mathscr{D}_\gamma$ について (29) の局所解が，少なくとも $[0,T_{U_0}]$ で存在する．一般の局所解 U について次の意味の連続性：

$$\begin{cases} U \in \mathscr{C}^1((0,T_U];X) \cap \mathscr{C}^{\gamma-\alpha}([0,T_U];Y) \cap \mathscr{C}^{\gamma-\beta}([0,T_U];Z) \cap \mathscr{C}((0,T_U];\mathscr{D}), \\ A(U)^\gamma U \in \mathscr{C}([0,T_U];X) \end{cases} \tag{40}$$

をもつものを考える．ここで $[0,T_U]$ は局所解が定義されている区間を表す．適当な単調増加関数 $p(\cdot)$ が存在し，$U_0 \in \mathscr{D}_\gamma$ を初期値とする (40) を満たす任意の局所解 U について評価式

$$\begin{cases} \|U(t)\|_Z \le p(\|U_0\|_Z), \qquad 0 \le t \le T_U, \\ \|U(t)\|_{\mathscr{D}_\gamma} \le p(\|U_0\|_{\mathscr{D}_\gamma}), \qquad 0 \le t \le T_U \end{cases} \tag{41}$$

が成立することが示されたとする．このとき，U_0 から発する局所解 U に，上述の局所解存在定理を初期値を変えて繰り返し使うことにより，U を区間全体 $[0,\infty)$ にまで延長することができる．局所解の構成可能な区間幅は，初期値の $\mathscr{D}_\gamma$ ノルムのみに依存し，一方で (41) より $U(t)$ の $\mathscr{D}_\gamma$ ノルムは存在区間 $[0,T_U]$ に依らず一様有界であることに注意する．以上のように，仮定 (39), (41) の下に一意的な大域解の存在が確かめられた．

各 $U_0 \in \mathscr{D}_\gamma$ に対してこのようにして構成された大域解を $U(t;U_0)$ で表す．(41) より大域解に対しても

$$\begin{cases} \|U(t;U_0)\|_Z \le p(\|U_0\|_Z), \qquad 0 \le t < \infty, \\ \|U(t;U_0)\|_{\mathscr{D}_\gamma} \le p(\|U_0\|_{\mathscr{D}_\gamma}), \qquad 0 \le t < \infty \end{cases}$$

が成り立つ．この評価式と (37) で示された評価式を合わせると

$$\|A(U(t))U(t)\|_X \le (1+t^{\gamma-1})p(\|U_0\|_{\mathscr{D}_\gamma}), \qquad 0 \le t < \infty \tag{42}$$

も得られる．

iii) 力学系　各初期値 $U_0 \in \mathscr{D}_\gamma$ に対する大域解を $U(t;U_0)$ とする．非線形作用素 $S(t), 0 \le t < \infty$．を $S(t)U_0 = U(t;U_0)$ で定義する．$S(t)$ は $\mathscr{D}_\gamma$ から $\mathscr{D}_\gamma$ への写像であり，大域解の一意性より非線形半群を定義する．

$0 < R < \infty$ として初期値の空間

$$K_R = \{U \in \mathscr{D}_\gamma;\ \|U\|_{\mathscr{D}_\gamma} \le R\}$$

を設定する．$\beta < \gamma$ より $\mathscr{D}_\gamma = \mathscr{D}(A(0)^\gamma) \subset \mathscr{D}(A(0)^\beta) \subset Z$ ((34) に注意) より R から定まる適当な数 $\widetilde{R}$ が存在し $K_R \subset Z_{\widetilde{R}}$ である．(38) より適当な時刻 $T_R > 0$ が定まり区間 $[0,T_R]$ において解は初期値に関して連続であるから $G(t,U) = S(t)U$ は $[0,T_R] \times K_R$ から X へ X-ノルムに関して連続である．一方で，(41) より K_R から発した解はすべて $\|U(t;U_0)\|_{\mathscr{D}_\gamma} \le p(R)$ を満たしている．R を $p(R)$ に置き換えて T_R を初期時刻とする区間で再び (38) を用いると，適当な時間 $\tau_{p(R)} > 0$ が存在して G は $[0,T_R+\tau_{p(R)}] \times K_R$ から X へ X-ノルムに関して連続であることが示される．この議論を繰り返すことにより最終的に G は $[0,\infty) \times K_R$ から X へ X-ノルムに関して連続であることが分かる．

各 K_R について

$$\mathscr{X}_R = \bigcup_{0 \le t < \infty} S(t)K_R$$

と置く．定義より $\mathscr{X}_R$ は $S(t)$ の正不変集合，明らかに $K_R \subset \mathscr{X}_R$，また $\mathscr{X}_R \subset K_{p(R)}$ である．最後の事実より G は $[0,\infty)\times\mathscr{X}_R$ から $\mathscr{X}_R$ へ X-ノルムに関して連続である．以上より，各 $0<R<\infty$ について $(S(t),\mathscr{X}_R,X)$ は力学系となる．このようにして，準線形発展方程式 (29) から力学系を定めることができる．

iii) 指数アトラクタ 半線形方程式の場合と同様に，空間に関する 2 つの仮定：

$$\begin{cases} X \text{ は回帰的 Banach 空間,} \\ \mathscr{D} \text{ は } X \text{ へコンパクトに埋め込まれる} \end{cases} \tag{43}$$

を加える．さらに，散逸条件：ある定数 $\widetilde{C}>0$ が存在し，任意の $\mathscr{D}_\gamma$ の有界集合 B について適当な時刻 $t_B>0$ が存在して

$$\sup_{U_0\in B}\ \sup_{t_B\le t<\infty}\|U(t;U_0)\|_{\mathscr{D}_\gamma}\le\widetilde{C} \tag{44}$$

が成立すると仮定する．この散逸条件と (42) より，適当な定数 $\widetilde{C}_1$ が存在し，任意の $\mathscr{D}_\gamma$ の有界集合 B について適当な時刻 $t_B>0$ が存在して

$$\sup_{U_0\in B}\ \sup_{t_B\le t<\infty}\|U(t;U_0)\|_{\mathscr{D}}\le\widetilde{C}_1 \tag{45}$$

となることが示される．

(43), (44) の下に指数アトラクタを構成する．先ず，$\mathscr{B}=\{U\in\mathscr{D};\|U\|_{\mathscr{D}}\le\widetilde{C}_1\}$ と置く．(43) より $\mathscr{B}$ は X の閉集合かつ相対コンパクト集合となるので結局 X のコンパクト集合となる．また，(45) は任意の有界集合 B について適当な時刻 $t_B>0$ が存在して $S(t)B\subset\mathscr{B}$ となることを示すので，$\mathscr{B}$ は吸収集合である．$\mathscr{B}$ 自身が $\mathscr{B}$ に吸収される時刻を $t_{\mathscr{B}}$ として

$$\mathscr{X}=\overline{\bigcup_{t_{\mathscr{B}}\le t<\infty}S(t)\mathscr{B}}\subset\mathscr{B}\qquad (X \text{ における閉包})$$

と置く．容易に, $\mathscr{X}$ は X のコンパクト集合, $\mathscr{D}$ の有界集合, $S(t)$ の吸収集合, $S(t)$ の正不変集合となることが証明される．したがって，X でコンパクトかつ $\mathscr{D}$ で有界な相空間を有する力学系 $(S(t),\mathscr{X},X)$ が定義された．

以上の考察により，$(S(t),\mathscr{X},X)$ に定理 4 が直ちに適用できる状況にあることが分かる．実際，任意に $t^*>0$ を固定し，$Z=\mathscr{D}_\gamma$ とする．この Z が X へコンパクトに埋め込まれることは (43) と $Z=\mathscr{D}(A(0)^\gamma)$ より容易に確かめられる．$\delta=0$ かつ $K=S(t^*)$ とする．評価式 (38), (39) より (6) が成り立つ．また，(7) は $\mathscr{X}$ が $\mathscr{D}$ の有界集合であることおよび評価式 (38) から確かめられる．以上から，$(S(t),\mathscr{X},X)$ の指数アトラクタの族 $\mathscr{M}_\theta$ が構成された．

全体空間を初期値の空間 $\mathscr{D}_\gamma$ に取り替えることができる．定理 2 を $Y=\mathscr{D}_\gamma$ および $Z=\mathscr{D}$ として $(S(t),\mathscr{X},X)$ に適用することができる．その結果，$(S(t),\mathscr{X},\mathscr{D}_\gamma)$ も力学系となり上で構成された指数アトラクタ $\mathscr{M}_\theta$ はこの力学系の指数アトラクタでもあることが結論される．

全体空間 X が Hilbert 空間の場合，(29) から定まる力学系 $(S(t),\mathscr{X},X)$ についてスクイーズィング性を調べることは大変困難である．準線形方程式については，半線形方程式の場合に $S(t)$ のスクイーズィング性を導く (28) のような便利な条件は知られていない．

6 実現象モデルへの応用

1) Turing モデル 初めに Turing モデルを考える．Turing モデルについての詳しい解説は Murray [31] を参照のこと．3 次元領域 Ω 内に，活性物質と抑制物質が分布しておりその分布密度はそれぞれ $u = u(x,t)$ と $v = v(x,t)$ で表されているとする．ここでは Gierer–Meinhardt [14] により提出された一つの雛型モデル

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = a\Delta u + \gamma\left[d - cu + \dfrac{u^2}{v(1+ku^2)}\right], & (x,t) \in \Omega \times (0,\infty), \\ \dfrac{\partial v}{\partial t} = b\Delta v + \gamma(u^2 - v), & (x,t) \in \Omega \times (0,\infty), \\ \dfrac{\partial u}{\partial n} = \dfrac{\partial v}{\partial n} = 0, & (x,t) \in \partial\Omega \times (0,\infty), \\ u(x,0) = u_0(x), \quad v(x,0) = v_0(x), & x \in \Omega \end{cases} \tag{46}$$

を考える，$\gamma > 0$ は反応の強度を表すパラメータである．$\Omega \subset \boldsymbol{R}^3$ は凸または $\mathscr{C}^2$ 有界領域とする．

(46) を基礎空間

$$X = \{U = (u,v);\ u \in L^2(\Omega)\ \text{かつ}\ v \in L^2(\Omega)\} \tag{47}$$

において扱う．初期値の空間を $K = \{(u_0, v_0);\ 0 \le u_0 \in L^2(\Omega)$ かつ $v_0 \in L^2(\Omega),\ \mathrm{ess.inf}\, v_0 > 0\}$ と設定する．5.1 項で示された論法に $\beta = 0,\ 3/4 < \eta < 1$ としてしたがうことにより力学系 $(S(t), K, X)$ を構成することができ，さらに指数アトラクタ $\mathscr{M}$ も構成することができる．

(46) は明らかに K 内に唯一つの空間一様定常解 $\overline{U}$ をもつ．この $\overline{U}$ に定理 3 を適用することが可能で，パラメータ a, b, c, d, k および γ についての適当な条件の下に $\overline{U}$ は不安定となることが検証される．さらに，この不安定多様体の次元評価から $\dim \mathscr{M} \ge O(\gamma^3)$ のような指数アトラクタの次元評価が得られる．

2) B-Z 反応モデル 次に B-Z 反応モデルを考える．B-Z 反応についての詳しい解説は三池・森・山口 [27] を参照のこと．ここでは Keener–Tyson [23] によるモデル方程式

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = a\Delta u + \dfrac{1}{\varepsilon^2}\left[u(1-u) - cv\Big(\dfrac{u-q}{u+q}\Big)\right], & (x,t) \in \Omega \times (0,\infty), \\ \dfrac{\partial v}{\partial t} = b\Delta v + \dfrac{1}{\varepsilon}(u - v), & (x,t) \in \Omega \times (0,\infty), \\ \dfrac{\partial u}{\partial n} = \dfrac{\partial v}{\partial n} = 0, & (x,t) \in \partial\Omega \times (0,\infty), \\ u(x,0) = u_0(x), \quad v(x,0) = v_0(x), & x \in \Omega \end{cases} \tag{48}$$

を 3 次元領域 Ω で考える．ここで $u = u(x,t)$ は活性物質 (亜臭素酸) の濃度分布を，$v = v(x,t)$ は触媒 (セリウム・イオン) の濃度分布を表す．q は $0 < q < 1$ であるような定数，$\varepsilon > 0$ は反応の強度を表すパラメータで小さい値の範囲を動く．$\Omega \subset \boldsymbol{R}^3$ は凸または $\mathscr{C}^2$ 有界領域とする．

(48) も (46) と同様に (47) で与えられる基礎空間で扱う．初期関数の空間は $K = \{(u_0, v_0);\ 0 \le u_0 \in L^2(\Omega)$ かつ $0 \le v_0 \in L^2(\Omega)\}$ と設定する．5.1 項で示された論法を $\beta = 0,\ 3/4 < \eta < 1$ として直接用いることにより力学系 $(S(t), K, X)$ を構成することができ，さらに指数アトラクタ $\mathscr{M}$ も構成することができる．

(48) は明らかに K 内に二つの空間一様 (定数) 定常解をもつ．一つは常に不安定な自明解 $O = (0,0)$ でいま一つは非自明解 $\overline{U} \neq O$ である．非自明解 $\overline{U}$ には定理 3 を適用することが可能で，q および ε が十分小さいとき不安定となることが検証される．さらに，不安定多様体の次元評価から $\dim \mathscr{M} \geq O(\varepsilon^{-3})$ のような指数アトラクタの次元評価が得られる．

3) 走化性モデル 大腸菌などの走化性生物は，自身で産出する誘因化学物質と化学物質に対する走性との相互作用により整然とした集合パターンを形成することが知られている ([7] や [46] 等を参照)．ここでは三村・辻川 [29] によるモデル方程式

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = a\Delta u - \nabla \cdot [u \nabla \chi(\rho)] + f(u), & (x,t) \in \Omega \times (0,\infty), \\ \dfrac{\partial \rho}{\partial t} = b\Delta\rho - c\rho + du, & (x,t) \in \Omega \times (0,\infty), \\ \dfrac{\partial u}{\partial n} = \dfrac{\partial \rho}{\partial n} = 0, & (x,t) \in \partial\Omega \times (0,\infty), \\ u(x,0) = u_0(x), \ \rho(x,0) = \rho_0(x), & x \in \Omega \end{cases} \tag{49}$$

を考える．Ω は 2 次元有界領域とし，$u = u(x,t)$ は走化性生物個体の分布密度を $\rho = \rho(x,t)$ は誘因化学物質の濃度分布を表す．$\chi(\rho)$ は生物の化学物質に対する感応性を，$f(u)$ は生物集団の成長を表す関数である．

(49) を基礎空間

$$X = \left\{ U = (u,\rho);\ u \in L^2(\Omega) \text{ かつ } \rho \in H^2_N(\Omega) \right\} \tag{50}$$

と設定する，ここで $H^2_N(\Omega)$ は H^2-関数で斉次 Neumann 境界条件 $\partial\rho/\partial n = 0$ を満たすものが作る $H^2(\Omega)$ の部分空間である．初期関数の空間は $K = \{U_0 = (u_0, \rho_0);\ 0 \leq u_0 \in L^2(\Omega) \text{ かつ } 0 \leq \rho_0 \in H^2_N(\Omega)\}$ と設定する．

Osaki–Tsujikawa–Yagi–Mimura [33] は，Ω が $\mathscr{C}^3$ 有界領域，感応性関数 $\chi(\rho)$ および成長関数 $f(u)$ についての適当な条件の下に (49) から決まる力学系 $(S(t), K, X)$ の構成を行った．さらに，半群 $S(t)$ のスクイーズイング性を示すことにより指数アトラクタ $\mathscr{M}$ を構成した．その後この結果は，Aida–Efendiev–Yagi [2] により，Ω が凸または $\mathscr{C}^2$ 有界領域の場合に拡張された．この場合には，5.2 項の論法により $S(t)$ の縮小条件のコンパクト摂動が用いられた．Aida–Tsujikawa–Efendiev–Yagi–Mimura [3] では，成長関数が $f(0) = f(1) = 0,\ f = -f'(1) > 0$ の場合に $\mathscr{M}$ の次元の下方評価：

$$\dim \mathscr{M} \geq N \equiv \#\{\mu_n;\ ab\mu_n^2 + (ac + bf - d\nu)\mu_n + cf < 0\}$$

が与えられた．ここで $0 = \mu_0 \leq \mu_1 \leq \mu_2 \leq \cdots$ は斉次 Neumann 境界条件を備えた $-\Delta$ ($L^2(\Omega)$ の正値自己共役作用素) の固有値を表す．$\sqrt{d\nu} > \sqrt{ac} + \sqrt{bf}$ のとき $N > 0$ となり，特に $d\nu \to \infty$ のとき $N \to \infty$ となることから $\dim \mathscr{M}$ も無限大へと発散する．

(49) に対する数値解は相田 [1] や Aida–Yagi [4] などで計算結果が示されている．

4) 表面吸着モデル 次の白金表面上の吸着分子パターン ([16] や [28] を参照) は，現象としては走化性とは無関係であるが数学的には極めて類似の構造が見出せる．ここでは Hildebrand–Kuperman–Wio–Mikhailov–Ertl [17] による拡散モデル

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = a\Delta u + c\nabla\cdot[u(1-u)\nabla\chi(\rho)] - fe^{\alpha\chi(\rho)}u \\ \qquad\qquad\qquad - gu + h(1-u), & (x,t)\in\Omega\times(0,\infty), \\ \dfrac{\partial\rho}{\partial t} = b\Delta\rho + d\rho(\rho+u-1)(1-\rho), & (x,t)\in\Omega\times(0,\infty), \\ \dfrac{\partial u}{\partial n} = \dfrac{\partial\rho}{\partial n} = 0, & (x,t)\in\partial\Omega\times(0,\infty), \\ u(x,0)=u_0(x),\ \ \rho(x,0)=\rho_0(x), & x\in\Omega \end{cases} \tag{51}$$

を考える．Ω は 2 次元有界白金表面を，$u=u(x,t)$ は吸着一酸化炭素分子の被覆率を，$\rho=\rho(x,t)$ は白金表面の秩序パラメータを表す．$\chi(\rho)$ は表面の化学ポテンシャルを，$d\rho(\rho+u-1)(1-\rho)$ は白金表面の相転移を表す関数である．

基礎空間を，走化性モデルと同様に (50) で与えられた空間とする．初期関数の空間は $K=\{U_0=(u_0,\rho_0);\ u_0\in H^1(\Omega),\, 0\le u_0\le 1$ かつ $\rho_0\in H^3_N(\Omega),\, 0\le\rho_0\le 1\}$ と設定する．

Tsujikawa–Yagi [43] は，Ω が $\mathscr{C}^3$ 有界領域，ポテンシャル関数 $\chi(\rho)$ が $\chi(\rho)=-\rho^2(3-2\rho)$ のとき (51) から決まる力学系 $(S(t),K,X)$ を構成すると共に，$S(t)$ についてのスクイーズイング性を示して指数アトラクタを構成した．この結果は，Takei–Efendiev–Tsujikawa–Yagi [39] により Ω が凸または $\mathscr{C}^2$ 領域の場合に拡張された．この場合は 5.2 項の論法にしたがい $S(t)$ の縮小条件のコンパクト摂動が用いられた．

(51) に対する数値解は武井 [38] や Takei–Tsujikawa–Yagi [40] などで計算結果が示されている．

5) マングローブ生態系モデル　マングローブ生態系は，樹木と堆積土壌とが相互作用するシステムとして捉えることができる ([18], [22], [26] 等を参照)．Yagi–Ho–Duc [52] や Yagi–Miyagi–Hong [53] により拡散モデルの定式化が試みられている．ここではその 1 つ

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = a\Delta u + \mu\nabla\cdot\left[\dfrac{(L-\ell)u}{1+pu}\nabla\ell\right] + \delta(\ell)u - \gamma(u)u, & (x,t)\in\Omega\times(0,\infty), \\ \dfrac{\partial\ell}{\partial t} = b\Delta\ell + \nu\nabla\cdot\left[\dfrac{(L-\ell)\ell}{1+pu}\nabla\ell\right] + \varphi(\ell)u, & (x,t)\in\Omega\times(0,\infty), \\ \dfrac{\partial u}{\partial n} = \dfrac{\partial\ell}{\partial n} = 0, & (x,t)\in\mathit{\Gamma}_N\times(0,\infty), \\ u=\ell=0, & (x,t)\in\mathit{\Gamma}_D\times(0,\infty), \\ u(x,0)=u_0(x),\ \ \ell(x,0)=\ell_0(x), & x\in\Omega \end{cases} \tag{52}$$

を考える．Ω は 2 次元有界領域を，$\mathit{\Gamma}_D$ は外海に面する境界，$\mathit{\Gamma}_N$ は内陸に面する境界を，$u=u(x,t)$ は樹木の分布密度を，$\ell=\ell(x,t)$ は堆積土壌のレベルを表す．$\ell=0$ は干潮時の水位を $\ell=L$ は満潮時の水位を表す．$\boldsymbol{\chi}=[(L-\ell)/(1+pu)]\nabla\ell$ は潮汐による水流を，$\delta(\ell)$ は樹木の定着・成長率を，$\gamma(u)$ は樹木の枯死率を，$\varphi(\ell)$ は土壌の堆積率を表す．

(52) は (47) で与えられる基礎空間において (29) の形の準線形方程式として定式化できる．初期関数の空間は $K=\{U_0=(u_0,\ell_0);\ 0\le u_0\in H^{1+\varepsilon}(\Omega)$ かつ $\ell_0\in H^{1+\varepsilon}(\Omega),\, 0\le\ell_0\le L\}$ と設定する．ただし ε は $0<\varepsilon<1/2$ のように固定された指数である．5.2 項で示された論法にしたがって，(52) から決まる力学系 $(S(t),K,X)$ の構成，さらには指数アトラクタの構成ができる．

6) 競合種棲み分けモデル　Shigesada–Kawasaki–Teramoto [36] は，競合種の棲み分け現象を次

のような拡散方程式系

$$
\begin{cases}
\dfrac{\partial u}{\partial t} = \varDelta(au + \alpha_{11}u^2 + \alpha_{12}uv) + cu - \gamma_{11}u^2 - \gamma_{12}uv, & (x,t) \in \Omega \times (0,\infty), \\
\dfrac{\partial v}{\partial t} = \varDelta(bv + \alpha_{21}uv + \alpha_{22}v^2) + dv - \gamma_{21}uv - \gamma_{22}v^2, & (x,t) \in \Omega \times (0,\infty), \\
\dfrac{\partial u}{\partial n} = \dfrac{\partial v}{\partial n} = 0, & (x,t) \in \partial\Omega \times (0,\infty), \\
u(x,0) = u_0(x), \ \ v(x,0) = v_0(x), & x \in \Omega
\end{cases}
\tag{53}
$$

によりモデル化した．Ω は 2 次元有界領域を，$u = u(x,t)$ および $v = v(x,t)$ は 2 種の生物個体のそれぞれの分布密度を表す．$\varDelta(\alpha_{11}u^2)$ および $\varDelta(\alpha_{22}v^2)$ は各種内の自己拡散を表し，$\varDelta(\alpha_{12}uv)$ および $\varDelta(\alpha_{21}uv)$ は種間の交差拡散を表す．

基礎空間は (47) で与えられる L^2-積空間とする．初期関数の空間は $K = \{U_0 = (u_0, v_0);\ 0 \le u_0 \in H^{1+\varepsilon}(\Omega)$ かつ $0 \le v_0 \in H^{1+\varepsilon}(\Omega)\}$ と設定する，ただし ε は $0 < \varepsilon < 1/2$ のように固定された指数である．Ω が $\mathscr{C}^3$ の有界領域の場合，条件 $0 \le \alpha_{12}\alpha_{21} \le 64\alpha_{11}\alpha_{22}$ の下で，各 $U_0 \in K$ に対する大域解の構成が Lou–Ni–Wu [24]，Yagi [47], [48] により示された．同様の条件下で，最近，Yagi [51] により力学系 $(S(t), K, X)$ の構成および指数アトラクタの構成が行われた．証明には 5.2 項の論法が使われている．

文　献

[1] 相田征史, 走化性・増殖方程式の大域的な解の挙動とパターン形成, 大阪大学大学院工学研究科博士学位論文, 2003.

[2] M. Aida, M. Efendiev and A. Yagi, Quasilinear abstract parabolic evolution equations and exponential attractors, Osaka J. Math., **42** (2005), 101–132.

[3] M. Aida, T. Tsujikawa, M. Efendiev, A. Yagi and M. Mimura, Lower estimate of the attractor dimension for a chemotaxis growth system, J. London Math. Soc. (2), **74** (2006), 453–474.

[4] M. Aida and A. Yagi, Target pattern solutions for chemotaxis-growth system, Sci. Math. Jpn., **59** (2004), 577–590.

[5] H. Amman, Quasilinear parabolic systems under nonlinear boundary conditions, Arch. Rational Mech. Anal., **92** (1986), 153–192.

[6] A. V. Babin and M. I. Vishik, Attractors of Evolution Equations, North-Holland, 1992.

[7] E. O. Budrene and H. C. Berg, Complex patterns formed by motile cells of Escherichia coli, Nature, **349** (1991), 630–633.

[8] C. M. Carracedo and M. S. Alix, The Theory of Fractional Powers of Operators, North-Holland, 2001.

[9] A. Eden, C. Foias, B. Nicolaenko and R. Temam, Exponential attractors for dissipative evolution equations, RAM Res. Appl. Math., **37**, John Wiley & Sons, 1994.

[10] M. Efendiev, A. Miranville and S. Zelik, Exponential attractors for a nonlinear reaction-diffusion system in $\boldsymbol{R}^3$, C. R. Acad. Sci. Paris, **330** (2000), 713–718.

[11] M. Efendiev and A. Yagi, Continuous dependence of exponential attractors for a parameter, J. Math. Soc. Japan, **57** (2005), 167–181.

[12] D. Fujiwara, L^p-theory for characterizing the domain of the fractional powers of $-\varDelta$ in the half space, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sect. I, **15** (1968), 169–177.

[13] C. Foias, G. Sell and R. Temam, Inertial manifolds for nonlinear evolution equation, J. Differential Equations, **73** (1988), 309–353.

[14] A. Gierer and H. Meinhardt, A theory of biological pattern formation, Kybernetik (Prague), **12** (1972), 30–39.

[15] H. Haken, Synergetics, An Introduction (3rd ed.), Springer, 1983 (邦訳：牧島邦夫・小森尚志, 共同現象の数理, 東海大学出版会, 1980).

[16] M. Hildebrand, M. Ipsen, A. S. Mikhailov and G. Ertl, Localized nonequilibrium nanostructures in surface chemical reactions, New J. Physics, **5** (2003), 61.1–61.28.

[17] M. Hildebrand, M. Kuperman, H. Wio, A. S. Mikhailov and G. Ertl, Self-organized chemical nanoscale microreactors, Phys. Rev. Lett., **83** (1999), 1475–1478.

[18] P. N. Hong (ed.), The Role of Mangrove and Coral Reef Ecosystems, Agricultural Publishing House, Hanoi, 2006.

[19] H. Hoshino and Y. Yamada, Solvability and smoothing effect for semilinear parabolic equa-

tions, Funkcial. Ekvac., **34** (1991), 475–494.

[20] B. R. Hunt and V. Yu Kaloshin, Regularity of embeddings of infinite-dimensional fractal sets into finite-dimensional spaces, Nonlinearity, **12** (1999), 1263–1275.

[21] T. Kato, Perturbation Theory for Linear Operators (2nd ed.), Springer, 1980.

[22] 茅根創・宮城豊彦, サンゴとマングローブ, 岩波書店, 2002.

[23] J. P. Keener and J. J. Tyson, Spiral waves in the Belousov–Zhabotinskii reaction, Phys. D, **21** (1986), 307–324.

[24] Y. Lou, W. M. Ni and Y. Wu, On the global existence of a cross-diffusion system, Discrete Contin. Dynam. Systems, **4** (1998), 193–203.

[25] A. Lunardi, Abstract quasilinear parabolic equations, Math. Ann., **267** (1984), 395–415.

[26] Y. Mazda, E. Wolanski and P. V. Ridd, The role of Physical Processes in Mangrove Environments, Terrapub, Tokyo, 2007.

[27] 三池秀敏・森義仁・山口智彦, 非平衡の科学 III, 反応・拡散系のダイナミクス, 講談社, 1997.

[28] A. S. Mikhailov, M. Hildebrand and G. Ertl, Nonequilibrium nanostructures in condensed reactive systems, In: Coherent Structure in Complex Systems, (eds. J. M. Rubi *et al.*), Lecture Notes Physics, **567**, Springer, 2001, pp. 252–269.

[29] M. Mimura and T. Tsujikawa, Aggregating pattern dynamics in a chemotaxis model including growth, Physica A., **230** (1996), 499–543.

[30] 村松壽延, 補間空間論と線型作用素, 紀伊國屋書店, 1985.

[31] J. D. Murray, Mathematical Biology, II (3rd ed.), Springer, 2003.

[32] G. Nicolis and I. Prigogine, Self-Organization in Nonequilibrium System──From Dissipative Structure to Order through Fluctuations, John-Wiley & Sons, 1977 (邦訳：小畠陽之助・相沢洋二, 散逸構造──自己秩序形成の物理学的基礎──, 岩波書店, 1980).

[33] K. Osaki, T. Tsujikawa, A. Yagi and M. Mimura, Exponential attractor for a chemotaxis-growth system of equations, Nonlinear Anal., **51** (2002), 119–144.

[34] K. Osaki and A. Yagi, Global existence for a chemotaxis-growth system in $\boldsymbol{R}^2$, Adv. Math. Sci. Appl., **12** (2002), 587–606.

[35] R. Seeley, Norms and domains of the complex powers A_B^z, Amer. J. Math., **93** (1971), 299–309.

[36] N. Shigesada, K. Kawasaki and E. Teramoto, Spatial segregation of interacting species, J. Theoret. Biol., **79** (1979), 83–99.

[37] P. E. Sobolevskii, Parabolic equations in Banach space with an unbounded variable operator, a fractional power of which has a constant domain of definition, Soviet Math. Dokl., **2** (1961), 545–548.

[38] 武井康浩, 吸着分子に対する非線形移流動態モデルとパターン形成, 大阪大学大学院工学研究科博士学位論文, 2004.

[39] Y. Takei, M. Efendiev, T. Tsujikawa and A. Yagi, Exponential attractor for an adsorbate-induced phase transition model in non smooth domain, Osaka J. Math., **43** (2006), 1–23.

[40] Y. Takei, T. Tsujikawa and A. Yagi, Numerical computations and pattern formation for adsorbate-induced phase transition model, Sci. Math. Jpn., **61** (2005), 525–534.

[41] 田辺広城, 発展方程式, 岩波書店, 1975.

[42] R. Temam, Infinite-Dimensional Dynamical Systems in Mechanics and Physics (2nd ed.), Springer, 1997.

[43] T. Tsujikawa and A. Yagi, Exponential attractor for an adsorbate-induced phase transition model, Kyushu J. Math., **56** (2002), 313–336.

[44] W. von Wahl, The Equations of Navier–Stokes and Abstract Parabolic Equations, Aspects Math., E8, Vieweg, 1985.

[45] J. C. Wells, Invariant manifolds of non-linear operators, Pacific J. Math., **62** (1976), 285–293.

[46] D. E. Woodward, R. Tyson, M. R. Myerscough, J. D. Murray, E. O. Budrene and H. C. Berg, Spatio-temporal patterns generated by Salmonella typhimurium, Biophys. J., **68** (1995), 2181–2189.

[47] A. Yagi, Global solution to some quasilinear parabolic system in population dynamics, Nonlinear Anal., **21** (1993), 603–630.

[48] A. Yagi, A priori estimates for some quasilinear parabolic system in population dynamics, Kobe J. Math., **14** (1997), 91–108.

[49] A. Yagi, Quasilinear abstract parabolic evolution equations with applications, In: Evolution Equations, Semigroups and Functional Analysis, (eds. A. Lorenzi and B. Ruf), Birkhäuser, 2002, pp. 381–397.

[50] A. Yagi, H_∞ functional calculus and characterization of domains of fractional powers, In: Operator Theory: Advances and Applications, (eds. C. Curto, I. B. Jung, W. Y. Lee and T. Ando), Birkhäuser, 2008, pp. 217–235.

[51] A. Yagi, Exponential attractors for competing species model with cross-diffusions, Discrete Contin. Dynam. Systems, **22** (2008), 1091–1120.

[52] A. Yagi, T. H. Ho and C. Duc, A mathematical model for mangrove forest dynamics, In: Annual Report of FY 2003, Core University Program between JSPS and NCST, (eds. M. Fujita and P. H. Viet), Fujita Laboratory, Graduate School of Engineering, Osaka Univ., 2005, pp. 299–303.

[53] A. Yagi, T. Miyagi and P. N. Hong, A mathematical model for mangrove geo-ecosystem focusing on interactions between trees and soils, In: Annual Report of FY 2005, Core University Program between JSPS and NCST, (eds. M. Ike and

P. H. Viet), Ike Laboratory, Graduate School of Engineering, Osaka Univ., 2006, pp. 285–288.

[54] K. Yosida, Functional Analysis (6th ed.), Springer, 1980.

[55] E. Zeidler, Nonlinear Functional Analysis and its Applications II/A, Springer, 1990.

(2008 年 2 月 5 日提出)

(やぎ あつし・大阪大学大学院工学研究科)