【26】

氏名・（本籍）	井（いの） 上（うえ） 和（かず） 行（ゆき）
学位の種類	理 学 博 士
学位記番号	第 7151 号
学位授与の日付	昭和61年3月18日
学位授与の要件	学位規則第5条第2項該当
学位論文題目	**正規確率場の共役集合**
論文審査委員	（主査） 教 授 池田 信行 （副査） 教 授 渡辺 毅 教 授 福島 正俊

論 文 内 容 の 要 旨

関数族Sは積分表現

$$r(t)=ct^2+\int_0^\infty (1-e^{-t^2u})u^{-1}d\gamma(u) \quad (t\geqq 0)$$

および条件 $r(1)=1$ によって定められる〔0，∞）上の関数 $r(t)$ の全体として定義される。ただし，cは非負定数で，γ は（0，∞）上の測度を表わす。**S** に属する $r(t)$ および径数空間 $\mathbf{R}^d(d\geqq 3)$ を指定するとき，平均0の正規確率場 $\mathbf{X}=\{X(x)\,;\,x\in\mathbf{R}^d\}$ で，条件 $\mathbf{E}[(X(x)-X(y))^2]=r(|x-y|)$ に従うものを考えることができるが，これらをすべて同一視して $(\mathbf{X},\,r(t))$ と記す。この論文では，P. Lévyが多次元径数ブラウン運動の条件付独立性の研究において導入した共役集合の概念を用いることにより，正規確率場（$\mathbf{X}$，$r(t)$）の構造が或る種の非退化条件を満たす共役集合の族によって記述できることを示した。$\mathbf{R}^d$ の空でない部分集合Eに対して，$\{X(z)\,;z\in E\}$ が与えられたときの条件付共分散関数を $R_r(x,y\,|\,E)$ とするとき，共役集合は，

$$F_{\mathbf{X}}(x\,|\,E)=\{y\in R^d\,;\,R_r(x,y\,|\,E)=0\}$$

で定義される。ここでは次の条件をみたす組 $\{a,E\}$ を固定しておく。Eはn個の点（$n\geqq 2$）からなる集合で，その R^d における直交補空間 $\mathbf{R}^d\ominus E$ の次元は2以上とし，点aは $\mathbf{R}^d\ominus E$ に属すものとする。

主要な結果は次の通りである。Eの点の配置が独立で，組 $\{a,E,r(t)\}$ が条件

（R）　$a\neq 0$ かつ $R_r(a,-a\,|\,E)<0$

を満たすとき，共役集合$F\mathbf{x}(a \mid E)$は自由度nをもつ。更に，条件付平均$\mathbf{E}[X(a) \mid X(z); z \in E]$の表現に関する或る仮定のもとで次のことが成立つ：(i) $\mathbf{R}^d$ 上のもう1つの正規確率場 $(\mathbf{X}_1, r_1(t))$ が与えられたとき，$r_1(t) = r(t)$である為には，$F\mathbf{x}(a \mid E) \subset F\mathbf{x}_1(a \mid E)$の成立つことが必要十分である。(ii) $r(t)$が$\mathbf{S}$の部分族$\mathbf{L} = \{ r_\alpha(t) = t^\alpha ; 0 < \alpha \leqq 2 \}$に属す為には，$F\mathbf{x}(a \mid E)$が相似変換に関して不変であること，即ち，等式$F\mathbf{x}(S_t a \mid S_t E) = S_t F\mathbf{x}(a \mid E)$($t$は正数を動く）の成立つことが必要十分である。ただし，$S_t x = tx$ $(x \in \mathbf{R}^d)$とおく。

我々は条件（R）をみたす組$\{ a, E, r(t) \}$の典型的な場合を考察した。例えば次のような結果が得られる。$\mathbf{R}^d$の次元dは予め十分に大きくとっておき，

$$E_n = \{ a_{nk} = e_{k+1} - \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} e_{j+1} ; 1 \leqq k \leqq n \}$$

とおく。ただし，nは$2 \leqq n \leqq d-1$をみたし，$\{ e_i \}_{1<i<d}$は$\mathbf{R}^d$の正規直交基底を表わす。このとき，$\mathbf{S}$に属する任意の$r(t)$に対して，nを十分に大きくとれば組$\{ e_1, E_n, r(t) \}$は条件(R)を満たす。更に，0に収束する数列$\{ \alpha_n \}$$(0 < \alpha_n < 2)$があって，各$n \geqq 2$と各$\alpha$ $(\alpha_n < \alpha \leqq 2)$に対して，組$\{ e_1, E_n, r_\alpha(t) \}$は条件（R）を満たす。

論文の審査結果の要旨

正規確率場の研究は，確率過程論の最も重要な課題のひとつである。とくに典型的な場合は正規確率場$\{ X(x), x \in \mathbf{R}^d \}$が条件

$$E\{ X(x) \} = 0,\ x \in \mathbf{R}^d,\ E\{ (X(x) - X(y))^2 \} = r(|x-y|),\quad x, y \in \mathbf{R}^d$$

$$r(t) = ct^2 + \int_0^\infty (1 - e^{-t^2 u}) u^{-1} \gamma(du),\quad t \geqq 0$$

をみたすときであって，数多くの研究が行われている。ただし，cは非負定数，γは条件$\int_0^\infty (1+u)^{-1} \gamma(du) < \infty$ をみたす$(0, \infty)$上の測度で，さらに$r(1) = 1$がみたされるとする。

本論文において，井上君は，これらの条件がみたされる場合に，正規確率場の構造の解明を，P. Lévyが多次元径数Brown運動の条件付独立性の研究のために導入した共役集合の概念を用いて行っている。空でない$\mathbf{R}^d$ の有限部分集合Aに対して$\{ X(z), z \in A \}$が与えられたときの条件付共分散関数を$R(x, y \mid A)$，$x, y \in \mathbf{R}^d$，とするとき，共役集合$F(x \mid A)$は，

$$F(x \mid A) = \{ y \in \mathbf{R}^d ; R(x, y \mid A) = 0 \}$$

で定義される。井上君は$R(x, y \mid A)$が$\{ X(z), z \in A \}$の状態で条件をつけた時の$X(x)$と$X(y)$の相互の従属性の度合を表わす量であることに着目し，正規確率場の構造がある種の非退化条件をみたす共役集合の族によって記述できることを示している。この事実は巧みな方法である種の関数方程式の性質に帰着して証明されている。これらはP. Lévy の創造的な考えによる成果を大きく発展させるものであり，正規確率場の研究に新たな視点を与えている。

以上本論文における井上君の研究は正規確率場の研究を発展させ，確率過程論に寄与する所が極めて大きく，理学博士の学位論文として十分価値あるものと認められる。