

Title	薄肉プレートガーダーのウェブの面外変形に起因する疲労に関する研究
Author(s)	大倉, 一郎
Citation	大阪大学, 1985, 博士論文
Version Type	VoR
URL	<a href="https://hdl.handle.net/11094/2491">https://hdl.handle.net/11094/2491</a>
rights	
Note	

*Osaka University Knowledge Archive : OUKA*

<https://ir.library.osaka-u.ac.jp/>

Osaka University

# 薄肉プレートガーダーのウェブの 面外変形に起因する疲労に関する研究

1984年

大倉一郎

## 訂 正 表

頁 数	行数または箇所	誤	正
i	上から15	2. 3...有限変形解析プロ グラム	2. 3...有限変形解析法
vi	上から4	...に対する指針	...に対する提言
7	下から1	...横の長さ	...縦の長さ
8	上から2	...縦の長さ	...横の長さ
9	上から13	$= \beta \sqrt{\frac{\sigma_T}{235.3}}$	$= \beta \sqrt{\frac{\sigma_Y}{235.3}}$
11	上から2	Thurlimann	Thürlimann
11	下から9	IASBSE	IABSE
23	上から6	$P_u, P_v, P_w$ : それぞれ $\delta u, \delta v, \delta w \dots$	$P_{uv}, P_w$ : それぞれ $\delta uv, \delta w \dots$
28	上から1	式(2.19)に...	式(2.19)の...
32	下から4	14) ...Yen ...	15) ...Yen ...
35	下から1	... $\sigma_b/\sigma_e$ と...	... $\sigma_b/\sigma_{b\infty}$ と...
38	上から2	式で...	20) 式で...
42	上から14	... ss. ...	... SS. ...
42	下から3	... 報告書...	... 報告集...
65	式(4.11)	$y=0$ で $w=0$ , ... $y=b$ で $w=0$ , ...	$y=0$ で ... $y=b$ で ...
72	式(4.20)	$\dots \left( \frac{\partial^2 F_T}{\partial y^2} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \dots \right) \dots$	$\dots \left( \frac{\partial^2 F_T}{\partial y^2} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \dots \right) \dots$
78	式(5.3) 式(5.4)		式(5.3)と式(5.4) の内容を入れ換える。
87	上から14	$e_{01}/2$ の...	$e_{01}/\sqrt{2}$ の...
95	上から2	これまでの...	これまでは...
101	上から5	...発生も...	...発生を...

頁 数	行数または箇所	誤	正
101	式(6.1)	$\dots \frac{1}{2} \left( \frac{dw_0}{dx} \right)^2 \dots$	$\dots \frac{1}{2} \left( \frac{dw_0}{dx} \right)^2 \dots$
101	式(6.2)	$\dots \frac{1}{2} \left\{ \frac{d(w_0+w)}{dx} \right\}^2 \dots$	$\dots \frac{1}{2} \left\{ \frac{d(w_0+w)}{dx} \right\}^2 \dots$
105	下から6	$\dots$ 引長フランジ $\dots$	$\dots$ 引張フランジ $\dots$
109	上から2	$\dots \sigma_{oma}/\sigma_Y \dots$	$\dots \sigma_{omax}/\sigma_Y \dots$
109	図-6.10	$\gamma/\gamma^* = 1$ 場合 $\dots$	$\gamma/\gamma^* = 1$ の場合 $\dots$
115	上から6	$\dots$ 予想 $\dots$	$\dots$ 形成 $\dots$
115	下から5	7.2.2 $\dots$	7.2.1 $\dots$
116	式(7.3)	$\dots (y=0 \text{ b})$ $\dots (x=0 \text{ a})$	$\dots (y=0, \text{ bで})$ $\dots (x=0, \text{ aで})$
117	下から6	$\dots$ ではあま	$\dots$ ではあまり
120	下から4	$\dots w_{oman}/t_w = 0.1 \dots$	$\dots w_{omax}/t_w = 0.1 \dots$
123	上から17	$\dots$ せん断のみ $\dots$	$\dots$ せん断のみ, $\dots$
125	図-7.12	$(c) \sigma_0/\tau_0 = 1/3 \dots$	$(c) \sigma_0/\tau_0 = 3 \dots$
139	式(8.17)	$k_{cr} = \begin{bmatrix} \dots \\ \dots \end{bmatrix}$ $r = \begin{bmatrix} \dots \\ \dots \end{bmatrix}$ $e = \begin{bmatrix} \dots \\ \dots \end{bmatrix}$	$k_{cr} = \begin{bmatrix} \dots : \text{条件(II)} \\ \dots : \text{条件(III)} \end{bmatrix}$ $r = \begin{bmatrix} \dots : \text{条件(II)} \\ \dots : \text{条件(III)} \end{bmatrix}$ $e = \begin{bmatrix} \dots : \text{条件(II)} \\ \dots : \text{条件(III)} \end{bmatrix}$
149	上から1	$\dots$ 受けるか、	$\dots$ 受けるが、
160	上から1	$\dots$ は $R=0$ で $e_0/t_w = 1$ の場合に対する $\dots$	$\dots$ は $e_0/t_w = 1$ に 対する $\dots$
163	上から6	$\dots$ NO. $\dots$	$\dots$ NO. $\dots$
175	下から9	$\dots$ wed $\dots$	$\dots$ web $\dots$
175	下から2	$\dots$ Thurlimann $\dots$	$\dots$ Thür limann $\dots$
176	上から2	$\dots$ prof. $\dots$	$\dots$ Prof. $\dots$

# 目 次

## 第 1 章 序 論

1. 1	既往の研究	1
1. 2	1型疲労亀裂と4型疲労亀裂に関する諸問題	3
1. 3	本研究の目的と内容	5
1. 4	主要な記号の一覧	7
	参考文献	11

## 第 2 章 曲げを受ける薄肉プレートガーダー のウェブの初期たわみと疲労亀裂発 生の相関

2. 1	概説	13
2. 2	差分法による解析	13
2.2.1	基礎微分方程式	13
2.2.2	y軸方向の初期たわみ形状の影響	14
2. 3	Bergan・Cloughによる板の面外有限変形解析プログラム	16
2.3.1	板の面外有限変形解析に関する既往の研究	16
2.3.2	初期たわみを有する板のひずみと変位の関係式	17
2.3.3	応力とひずみの関係式	19
2.3.4	有限要素のひずみエネルギー	20
2.3.5	平衡方程式	22
2.3.6	形状関数	25
2.3.7	数値計算方法	25
2.3.8	精度照査	26
2. 4	面内曲げを受ける長方形板の面外有限変形	27
2.4.1	長方形板の面外有限変形を支配する無次元パラメータ	27

2.4.2	初期たわみの級数表示	27
2.4.3	x軸方向の初期たわみモードの影響	28
2.4.4	各初期たわみモードの影響	31
2.4.5	フランジの影響	34
2.5	解析結果と実験結果の比較	36
2.5.1	初期たわみモードと1型疲労亀裂の関係	36
2.5.2	1型疲労亀裂の発生位置	39
2.6	結論	41
	参考文献	42

### 第3章 圧縮と面内曲げを受ける長方形板の 面外有限変形の定式化とその特性

3.1	概説	45
3.2	圧縮と面内曲げを受ける長方形板の面外有限変形の定式化	46
3.2.1	Marguerreの板の基礎微分方程式	46
3.2.2	境界条件	47
3.2.3	初期たわみと付加面外たわみの仮定	48
3.2.4	条件(a)に対する応力関数	48
3.2.5	条件(b)に対する応力関数	51
3.2.6	Galerkin法による定式化	52
3.2.7	実験結果との比較	54
3.3	圧縮と面内曲げを受ける長方形板の面外有限変形の特性	55
3.3.1	座屈係数と座屈時の $e_2$ と $e_1$ の比 $(e_2/e_1)_{cr}$	55
3.3.2	比 $e_2/e_1$ の極限值 $(e_2/e_1)_{\infty}$	56
3.3.3	最大面外たわみの生じる位置	56
3.3.4	比 $\sigma_{mx}/\sigma_0$ の極限值 $(\sigma_{mx}/\sigma_0)_{\infty}$	57
3.4	結論	59
	参考文献	60

## 第4章 圧縮を受ける長方形板の荷重と2次曲げ応力の関係の定式化

4.1 概説 .....	61
4.2 圧縮を受ける長方形板の面外有限変形の定式化 .....	61
4.2.1 4辺単純支持された場合の荷重と面外たわみの関係 .....	61
4.2.2 載荷条件が面外有限変形に与える影響 .....	62
4.2.3 非載荷辺で回転拘束されている場合への拡張 .....	64
4.2.4 非載荷辺の回転拘束を考慮した圧縮板の座屈解析 .....	64
4.2.5 $\theta$ の決定 .....	66
4.3 圧縮を受ける長方形板の2次曲げ応力と面外たわみの関係 .....	68
4.4 残留応力が荷重と2次曲げ応力の関係に与える影響 .....	72
4.4.1 初期たわみと残留応力をともに有する 場合の荷重と面外たわみの関係 .....	72
4.4.2 初期たわみと残留応力をともに有する 場合の2次曲げ応力と面外たわみの関係 .....	73
4.5 結論 .....	75
参考文献 .....	76

## 第5章 曲げを受ける薄肉プレートガーダーのウェブの面外変形を考慮した疲労強度

5.1 概説 .....	77
5.2 面内曲げを受ける長方形板の荷重と2次曲げ応力の関係の定式化.....	77
5.2.1 4辺単純支持された場合の荷重と面外たわみの関係 .....	77
5.2.2 非載荷辺で回転拘束された場合の荷重と面外たわみの関係 .....	78
5.2.3 $k_{cr}$ の決定 .....	80
5.2.4 $r_1$ の決定 .....	80
5.2.5 $\theta$ と $r_2$ の決定 .....	81
5.2.6 2次曲げ応力と面外たわみの関係 .....	82

5.2.7	残留応力が荷重と2次曲げ応力の関係に与える影響	85
5.3	2次曲げ応力を受ける隅肉溶接の疲労強度	87
5.3.1	既往の研究	87
5.3.2	高張力鋼が隅肉溶接の疲労強度に与える影響	88
5.4	ウェブの面外変形を考慮した疲労強度	90
5.4.1	2モードと3モードの初期たわみの影響	90
5.4.2	座屈係数の影響	92
5.4.3	降伏応力度の影響	94
5.4.4	1モードの初期たわみの影響	95
5.5	結論	98
	参考文献	99

## 第6章 水平補剛材が1型疲労亀裂の発生を抑制する効果

6.1	概説	101
6.2	水平補剛材に対する要素剛性マトリックス	101
6.3	水平補剛材を有するウェブの面外有限変形	103
6.4	解析結果と実験結果の比較	105
6.5	水平補剛材を有するプレートガーダーの1型疲労亀裂の疲労強度	107
6.5.1	$\gamma/\gamma^*=1$ の場合の疲労強度	107
6.5.2	$\gamma/\gamma^*$ が1より大きい場合の疲労強度	109
6.6	結論	112
	参考文献	113

## 第7章 せん断を受ける薄肉プレートガーダーの疲労亀裂発生に関する力学的影響因子

7.1	概説	115
7.2	せん断を受ける長方形板の面外有限変形解析	115



7.2.1	解析モデルと境界条件	115
7.2.2	面外たわみ	117
7.2.3	膜応力	118
7.2.4	2次曲げ応力	120
7.3	せん断と面内曲げを受ける正方形板の面外有限変形解析	123
7.3.1	解析モデルと境界条件	123
7.3.2	解析結果	123
7.4	解析結果と実験結果の比較	126
7.4.1	2次曲げ応力の分布形状	126
7.4.2	4型疲労亀裂の発生位置	127
7.5	結論	129
	参考文献	130

## 第8章 せん断を受ける薄肉プレートガーダーのウェブの面外変形を考慮した疲労強度

8.1	概説	131
8.2	せん断を受ける長方形板の荷重と2次曲げ応力の関係の定式化	131
8.2.1	4辺単純支持された場合の荷重と面外たわみの関係	131
8.2.2	境界辺で回転拘束されている場合への拡張	134
8.2.3	$k_{cr}$ の決定	136
8.2.4	$\theta$ の決定	137
8.2.5	$r$ の決定	139
8.2.6	2次曲げ応力と面外たわみの関係	142
8.2.7	残留応力が荷重と2次曲げ応力の関係に与える影響	147
8.3	4型疲労亀裂の疲労強度	149
8.4	面内曲げが4型疲労亀裂の疲労強度に与える影響	153
8.4.1	縦横比が1のウェブパネルの4型疲労亀裂の細分類	153
8.4.2	4A型疲労亀裂の疲労強度	154
8.4.3	4C型疲労亀裂の疲労強度	158

8.5	結論 .....	162
	参考文献 .....	163
<b>第9章</b>	<b>薄肉プレートガーダーのウェブの設計と製作に対する指針 .....</b>	<b>165</b>
	参考文献 .....	168
<b>第10章</b>	<b>結論 .....</b>	<b>169</b>
	<b>謝辞 .....</b>	<b>173</b>
	<b>本論文に関する著者の 発表論文 .....</b>	<b>175</b>

# 第1章 序 論

## 1. 1 既往の研究

1)~3)

薄肉プレートガーダーの終局強度理論がBaslerによって発表されて以来、多くの研究者によって薄肉プレートガーダーの終局強度に関して理論的研究および実験的研究が行なわれて来た。他方、薄肉プレートガーダーの終局強度に関する研究成果がはたして繰り返し荷重を受ける薄肉プレートガーダーに適用できるかという疑問から、Yen, Stallmeyer, Toprac, 前田らによって薄肉プレートガーダーの疲労実験がそれぞれ行なわれた。その結果、薄肉プレートガーダーが繰り返し荷重を受けると、ウェブ周辺の隅肉溶接のウェブ側止端に疲労亀裂が生じることが明らかにされた。疲労亀裂は荷重の種類により図-1.1に示すように分類される。

### a) 曲げを受ける薄肉プレートガーダーの場合

#### 1型疲労亀裂：

図-1.2に示すように、初期たわみを有する薄肉ウェブが面内曲げを受けて、面外へ繰り返し変形することによって、圧縮フランジをウェブに連結する隅肉溶接のウェブ側止端に2次的な面外曲げ応力（以後、2次曲げ応力と呼ぶ）が生じる。この2次曲げ応力の繰り返しによって、隅肉溶接のウェブ側止端に発生する疲労亀裂で、繰り返し回数とともに圧縮フランジに沿って徐々に成長する。

#### 2型疲労亀裂：

ガーダーの中立軸から下の引張側で、垂直補剛材をウェブに取り付ける隅肉溶接のウェブ側止端に発生する疲労亀裂である。引張領域に発生するために進展速度が速く、引張フランジに向かって成長し、最後に引張フランジに進入してガーダーの破壊を招く。

#### 3型疲労亀裂：

引張フランジをウェブに連結する隅肉溶接の溶着金属に発生する疲労亀裂で、溶接部の不完全溶け込みやその他の溶接欠陥に起因する。

b) せん断を受ける薄肉プレートガーダーの場合

4型疲労亀裂:

斜め張力場が形成される方向の隅角部の近傍の隅肉溶接のウェブ側止端に発生する疲労亀裂で、止端に沿って進展したのち、斜め張力場方向に対してほぼ直角に方向を転じて進展を続ける。疲労亀裂の発生原因は、1型疲労亀裂と同様、ウェブの面外変形によって、隅肉溶接のウェブ側止端に生じる2次曲げ応力である。

c) 曲げとせん断を受ける薄肉プレートガーダーの場合には、1型と4型の疲労亀裂が生じる。

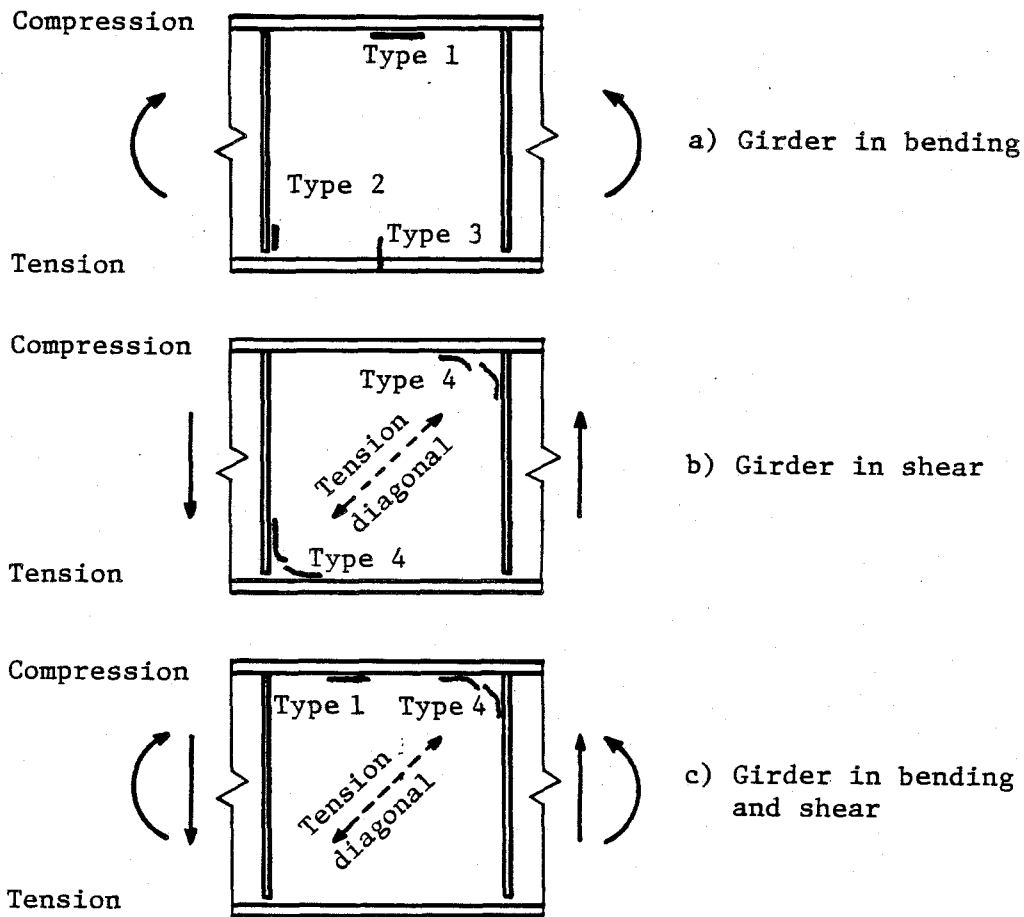


図-1.1 疲労亀裂の分類

これらの疲労亀裂のうち、2型疲労亀裂と3型疲労亀裂については、それぞれの発生位置における、面内曲げによる引張応力が重要な因子であり、特に、2型疲労亀裂は、リブ<sup>10)</sup>十字型前面隅肉溶接継手の疲労強度で推定できることが明らかにされている。

これに対して、1型疲労亀裂と4型疲労亀裂は、ウェブの面外変形によって隅肉溶接のウェブ側止端に生じる2次曲げ応力がその発生原因であるため、多くの力学的影響因子が関係しており、いまだに十分には解明されていない。これまでの研究は、おもに面外曲げを受けるウェブ周辺の隅肉溶接の疲労強度の推定に関して行われてきた。YenとOstapenkoらは、プレートガーダーのウェブの面外たわみの実測値を用いて、差分法で数値的に隅肉溶接のウェブ側止端に生

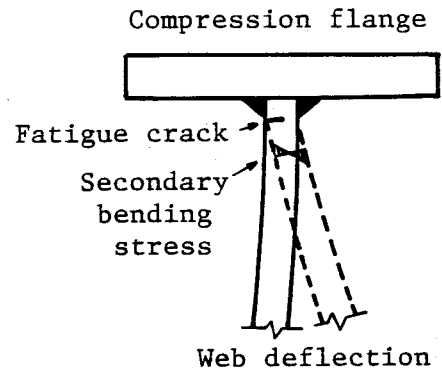


図-1.2 ウェブの面外変形に起因する疲労亀裂

じる2次曲げ応力を求め、この応力の全振幅と疲労亀裂の発生までの繰り返し回数との間により相関があることを見出した。前田は、圧縮フランジと水平補剛材で囲まれたウェブパネルをモデル化したT型あるいはI型断面の帯板試験片を用いて、面外曲げを受ける隅肉溶接の疲労強度を求めた。他方、隅肉溶接のウェブ側止端に生じる2次曲げ応力とウェブの面外変形の関係について、ウェブの面外たわみの増加がウェブの初期たわみの大きさに比例することや、隅肉溶接のウェブ側止端に生じる2次曲げ応力の全振幅とウェブの面外たわみの全振幅との間には線形関係があることが、Yenの実験的研究により明らかにされている。

1型疲労亀裂と4型疲労亀裂の発生を防止する条件式としては、米国のAASHTO示方書の荷重係数設計法におけるウェブ幅厚比制限式、Toprac提案のウェブ幅厚比制限式および1型疲労亀裂に対してウェブの最大初期たわみ制限式などが挙げられる。英国のBS5400では疲労はこの指針の第10編で扱われているが、Cardiff大学で開催された会議に前田と著者が提出した論文に対する回答を見る限り、これらの疲労亀裂は考慮されていない。

## 1.2 1型疲労亀裂と4型疲労亀裂に関する諸問題

2型疲労亀裂と3型疲労亀裂は、溶接I型ビームに一般に観察される疲労亀裂であり、構造細部設計や溶接欠陥の問題に帰着でき、その発生原因と疲労強度はほぼ明らかにされ

18)  
ている。

これに対して、1型疲労亀裂と4型疲労亀裂は、薄肉プレートガーダーにのみ発生する疲労亀裂であり、面外曲げを受ける隅肉溶接の疲労強度の問題と面内力を受けるウェブの面外変形の問題とを含んでいる。

1型疲労亀裂と4型疲労亀裂に関する諸問題を挙げると次のとおりである。

- a) Toprac のフランジに高張力鋼、ウェブに普通鋼を用いたハイブリッドガーダーの曲げ疲労実験と、前田の単一鋼種ガーダーとハイブリッドガーダーの曲げ疲労実験では1型疲労亀裂が発生したが、Yen の単一鋼種ガーダーの曲げ疲労実験では発生しなかった。また、Topracの実験では、引張フランジの応力がウェブの降伏応力度を超えたものに1型疲労亀裂が発生したが、前田の実験では、降伏応力度の半分以下であっても発生した。
- b) Toprac 提案の1型疲労亀裂の発生を防止するためのウェブの最大初期たわみ制限式は、Topracの実験結果に対しては適当と考えられるが、前田の実験結果に対しては、この制限式が与える値よりも小さい最大初期たわみを持つウェブパネルに1型疲労亀裂が発生しており、適当とは言えない。これは、ウェブの最大初期たわみを制限することのみでは、1型疲労亀裂の発生を防止することができないことを示している。
- c) 水平補剛材は、ウェブに大きな面外変形が生じるのを防ぐため、1型疲労亀裂と4型疲労亀裂の発生を防止する効果があることが実験的に明らかにされている。しかし、その効果は理論的に明らかにされていない。
- d) Yen と Stallmeyer のせん断疲労実験の結果を整理すると、4型疲労亀裂は、縦横比が1より小さいウェブにおいては垂直補剛材側に沿って発生しやすく、1より大きいウェブにおいてはフランジ側に沿って発生しやすい傾向がある。
- e) 縦横比が1のウェブパネルを有する薄肉プレートガーダーがせん断を受ける場合、フランジのねじり剛性が垂直補剛材のねじり剛性よりも大きいので、フランジ側に生じる2次曲げ応力が垂直補剛材側に生じる2次曲げ応力よりも大きくなり、4型疲労亀裂はフランジ側に沿って発生しやすいと考えられる。しかし、Yen のせん断疲労実験における縦横比が1のウェブパネルでは、4型疲労亀裂が垂直補剛材側に多く発生した。

f) AASHTO 示方書のウェブ幅厚比制限式やTopracのウェブ幅厚比制限式は、2次曲げ応力を受ける隅肉溶接の疲労強度に直接基づくものではなく、疲労実験の整理の結果、これらの制限式が与える値よりも小さい幅厚比を有するウェブパネルでは1型疲労亀裂と4型疲労亀裂が発生しなかったことから提案されたものである。したがって、制限値よりも大きい幅厚比を持つウェブパネルの中にも疲労亀裂が発生していないものがあるし、たとえ制限値以下のものであっても、隅肉溶接の疲労強度を超える2次曲げ応力が生ずれば、疲労亀裂が発生する可能性がある。

これらの諸問題は、面内力を受ける薄肉プレートガーダーのウェブの面外挙動に関する研究がいまだに十分にはなされていないために、面内力と隅肉溶接の止端に生じる2次曲げ応力の関係が確立されていないことに起因すると考えられる。ウェブの面外挙動に関係する因子として、荷重の種類、ウェブの幾何学的条件、ウェブ周辺の境界条件、ウェブの初期たわみと残留応力、水平補剛材の有無などが考えられる。既往の実験的研究により、これらの因子の影響が部分的に明らかにされたが、包括的な結論が得られるまでには至っていない。

### 1. 3 本研究の目的と内容

本研究は、薄肉プレートガーダーのウェブの面外変形に起因する1型あるいは4型疲労亀裂に関して、前節で述べた諸問題を解明し、これらの疲労亀裂に対して、ウェブの面外変形を考慮した疲労強度を与え、この疲労強度の特性を明らかにすることを目的とする。

本論文は10章で構成されている。第1章は序論である。大別して、第2章から第6章までは、曲げを受ける薄肉プレートガーダーの1型疲労亀裂が取り扱われ、第7章と第8章では、せん断を受ける薄肉プレートガーダーの4型疲労亀裂が取り扱われている。

第2章では、曲げを受ける薄肉プレートガーダーのウェブを、面内曲げを受けかつ初期たわみを有する長方形板にモデル化し、これに差分法あるいは有限要素法による理論解析を適用し、ウェブの面外挙動に及ぼす力学的諸因子の影響を明らかにする。次に、解析結果と既往の実験結果との比較により、前節の問題a), b)を解明する。

第3章では、4辺単純支持された、圧縮と面内曲げを受ける長方形板の面外有限変形を定式化する。この式を用いて、圧縮と面内曲げを受ける長方形板の面外有限変形を調べる。

第4章では、圧縮を受ける長方形板について、第3章で得られた結果を修正することに

より、その荷重と2次曲げ応力の関係を定式化する方法を示す。他方、本章では、ウェブに存在する残留応力がウェブの面外有限変形に与える影響を明らかにする。

第5章では、曲げを受ける薄肉プレートガーダーの1型疲労亀裂に対して、200万回疲労強度を面内曲げ応力で与える。最初に、第4章で示した方法により、面内曲げを受ける長方形板の荷重と2次曲げ応力の関係を定式化する。次に、この関係式の2次曲げ応力に隅肉溶接の200万回疲労強度を代入することにより、200万回疲労強度を面内曲げ応力で与える。この疲労強度はウェブの幅厚比の関数として与えられ、ウェブの初期たわみと残留応力、応力比、ウェブの降伏応力度、縦横比などが両者の関係に与える影響を調べる。

第6章では、面内曲げを受ける、水平補剛材を有する長方形板の面外挙動を有限要素法解析によって調べ、解析結果と既往の実験結果との比較により、水平補剛材が1型疲労亀裂の発生を抑制する効果を理論的に明らかにする。次に、水平補剛材を有する薄肉プレートガーダーの1型疲労亀裂に対して、200万回疲労強度を面内曲げ応力で与える。

第7章では、せん断を受ける薄肉プレートガーダーのウェブパネルを、せん断を受けかつ初期たわみを有する長方形板にモデル化し、これに有限要素法による理論解析を適用し、ウェブの面外挙動を明らかにする。また、せん断を受けるプレートガーダーは必ず曲げを伴うので、せん断と面内曲げを受ける長方形板の面外挙動も明らかにする。次に、解析結果と既往の実験結果との比較により、前節で述べた問題d)、e)を解明し、4型疲労亀裂の発生に影響する因子を明らかにする。

第8章では、4型疲労亀裂に対して、200万回疲労強度をせん断応力で与える。最初にせん断を受ける長方形板の荷重と2次曲げ応力の関係を定式化する。次に、この関係式の2次曲げ応力に隅肉溶接の200万回疲労強度を代入することにより、200万回疲労強度をせん断応力で与える。せん断を受けるプレートガーダーに必ず伴う曲げがこの疲労強度に与える影響についても調べる。

第9章では、第2章から第8章までの解析結果に基づいて、薄肉プレートガーダーのウェブの設計と製作に対して提言を行なう。さらに、今後の研究課題についても述べる。

第10章では、第1章から第9章までの研究成果を要約する。



## 1. 4 主要な記号の一覧

A, B	2次曲げ応力と面外たわみの関係を与える式の中の係数
$B_1, B_2$	係数
$C_1, C_2, C_3$	面内曲げを受ける長方形板の有限要素法解析の結果を曲線近似するときの近似式の中の係数
$C_4 \sim C_7$	係数
Dw	$= \frac{E t w^3}{12(1-\nu^2)}$ ウェブの板曲げ剛性
E	ヤング率
F	応力関数
$F_s$	応力関数の特殊解
$F_1, F_2, F_3$	応力関数の同次解
$F_r$	残留応力に対する応力関数
G	$= \frac{E}{2(1+\nu)}$ せん断弾性係数
$H_1 \sim H_4$	$F_2$ と $F_3$ の中の係数
$I_s$	水平補剛材の断面2次モーメント
$J, J_1, J_2$	縦横比 $a/b$ に依存する係数
Kf	$= \frac{t_f^3 b_f}{3}$ フランジのねじり定数
N	疲労試験における荷重の繰り返し回数
$Q_1 \sim Q_4$	$e_1/tw$ または $e_2/tw$ を変数とする関数
R	$= \sigma_{omin}/\sigma_{omax}$ または $\tau_{omin}/\tau_{omax}$ 応力比
S	座屈形状における特定の位置の単位付加面外たわみに対する2次曲げ応力の増加
$S_1, S_2$	変数
W	yの関数
a	隣接する垂直補剛材の間の長さ、または長方形板の横の長さ

$a_m, a_{mn}$	ウェブの初期たわみのモード成分
$b$	圧縮フランジと引張フランジの間の長さ、または長方形板の縦の長さ
$b_f$	フランジの板幅
$b_s$	水平補剛材の板幅
$c$	長方形分布の残留応力において、引張残留応力 $\sigma_{rt}$ の分布幅
$e$	特定の位置の付加面外たわみ
$e_1, e_2, e_3$	付加面外たわみモード成分
$e_0$	特定の位置の初期たわみ
$e_{01}, e_{02}, e_{03}$	初期たわみモード成分
$h_1, h_2, h_3$	縦横比 $a/b$ に依存する係数
$k_{cr}$	座屈係数
$k_1, k_2$	回転拘束部材の単位長さ当たりの剛性
$m, n$	正の整数
$q, q_1, q_2$	$e/t_w, e_1/t_w, e_2/t_w, e_3/t_w$ を変数とする関数
$q_3, q_{12}, q_{13}$	
$r$	せん断を受ける長方形板の荷重と面外たわみの関係を与える式あるいは2次曲げ応力と面外たわみの関係を与える式の中の係数
$r_1 \sim r_4$	面内曲げを受ける長方形板の荷重と面外たわみの関係を与える式あるいは2次曲げ応力と面外たわみの関係を与える式の中の係数
$r_5, r_6$	係数
$s_1, s_2$	変数
$s_3, s_4$	係数
$t_f$	フランジの板厚
$t_s$	水平補剛材の板厚
$t_w$	ウェブの厚さ
$u, v$	それぞれ $x, y$ 軸方向の面内変位
$w$	付加面外たわみ
$w_0$	初期たわみ

w <sub>o max</sub>	最大初期たわみ
x, y, z	右手系直交座標
$\beta$	= b / t <sub>w</sub> 幅厚比
$\beta_s$	= $\beta$ / 5 幅厚比
$\gamma$	= $\frac{E I_s}{D_w b}$ 水平補剛材の曲げ剛比
$\gamma^*$	DINで規定される水平補剛材の最小曲げ剛比
$\delta_1 \sim \delta_3$	面内曲げを受ける長方形板の有限要素法解析の結果を曲線近似するときの近似式の中の係数
$\eta_o, \eta_b$	荷重と面外たわみの関係を与える式あるいは2次曲げ応力と面外たわみの関係を与える式の中で、e / t <sub>w</sub> を変数とする関数
$\theta$	荷重と面外たわみの関係を与える式の中の係数
$\theta_1 \sim \theta_{13}$	縦横比 a / b に依存する係数
$\lambda$	= $\beta \sqrt{\frac{\sigma_r}{235.3}}$ 幅厚比
$\mu$	変数
$\nu$	ポアソン比
$\xi_o, \xi_b$	荷重と面外たわみの関係を与える式あるいは2次曲げ応力と面外たわみの関係を与える式の中で、e / t <sub>w</sub> を変数とする関数
$\sigma_o$	膜応力 $\sigma_{mx}$ が直線的に変化すると仮定したときの圧縮縁の応力。おもに面内曲げ応力または圧縮応力。
$\sigma_b$	2次曲げ応力
$\sigma_e$	= $\frac{\pi^2 E}{12(1-\nu^2)} \frac{1}{\beta^2}$ 基本応力
$\sigma_Y$	ウェブの降伏応力度
$\sigma_1, \sigma_2$	それぞれ最大主膜応力、最小主膜応力
$\sigma_{es}$	= $\frac{\pi^2 E}{12(1-\nu^2)} \frac{1}{\beta_s^2}$ 基本応力
$\sigma_{rc}, \sigma_{rt}$	長方形分布の残留応力における、それぞれ圧縮残留応力と引張残留

	応力	
$\sigma_{omin}, \sigma_{omax}$	それぞれ曲げ荷重の下限と上限に対応する最小面内曲げ応力と最大面内曲げ応力	
$\sigma_{bmin}, \sigma_{bmax}$	それぞれ $\sigma_{omin}$ と $\sigma_{omax}$ に対して生じる 2 次曲げ応力。または、それぞれ $\tau_{omin}$ と $\tau_{omax}$ に対して生じる 2 次曲げ応力。	
$\Delta \sigma_b$	疲労試験における隅肉溶接のウェブ側止端の 2 次曲げ応力の全振幅	
$\sigma_{mx}, \sigma_{my}, \tau_{mxy}$	膜応力成分	
$\tau_o$	境界辺上の膜せん断応力 $\tau_{mxy}$ を境界辺に沿って平均した平均せん断応力	
$\tau_Y$	$= \sigma_Y / \sqrt{3}$ ウェブのせん断降伏応力度	
$\tau_{omin}, \tau_{omax}$	それぞれせん断荷重の下限と上限に対応する最小せん断応力と最大せん断応力	
$\chi_f$	ウェブに対するフランジの拘束係数	
$\chi_1, \chi_2$	長方形板に対するそれぞれ $k_1$ と $k_2$ による拘束係数	
$\psi$	- 1 から 1 の間で定義される変数	
$\nabla^4$	$= \partial^4 / \partial x^4 + 2 \partial^4 / \partial x^2 \partial y^2 + \partial^4 / \partial y^4$	演算記号

## 参 考 文 献

- 1) Basler, K. and B. Thurlimann : Strength of plate girders in bending, Proc. of ASCE, Vol. 87, No. ST6, pp. 153 - 181, 1961.
- 2) Basler, K. : Strength of plate girders in shear, Proc. of ASCE, Vol.87, No. ST7, pp. 151 - 180, 1961.
- 3) Basler, K. : Strength of plate girders under combined bending and shear, Proc. of ASCE, Vol. 87, No. ST7, pp. 181 - 197, 1961.
- 4) Yen, B.T. and J.A. Mueller : Fatigue tests of large-size welded plate girders, WRC, Bull. No. 118, Nov., 1966.
- 5) Mueller J.A. and B.T. Yen : Girder web boundary stresses and fatigue, WRC, Bull. No. 127, Jan., 1968.
- 6) Patterson, P.J., J.A. Corrado, J.S. Huang and B.T. Yen : Fatigue and static tests of two welded plate girders, WRC, Bull. No. 155, Oct., 1970.
- 7) Goodpasture, D.W. and J.E. Stallmeyer : Fatigue behavior of welded thin web girders as influenced by web distortion and boundary rigidity, Univ. of Illinois, C.E. Studies SRS No. 328, Aug., 1967.
- 8) Toprac, A.A. and M. Natarajan : Fatigue strength of hybrid plate girders, Proc. of ASCE, Vol. 97, No. ST4, pp. 1203 - 1225, 1971.
- 9) Maeda, Y. : Ultimate static strength and fatigue behavior of longitudinally stiffened plate girders in bending, IASBSE, Proc. London Colloquium, pp. 269-282, March, 1971.
- 10) 前田幸雄・川井豊 : 薄肉溶接ハイブリッド・ガーダーの曲げ疲労強度に関する研究、溶接学会誌、第43巻、第3号、pp. 736 - 742, 1974。
- 11) Parsanejad, S. and A. Ostapenko : On the fatigue strength of unsymmetrical steel plate girders, WRC, Bull. No. 156, Nov., 1970.
- 12) 前田幸雄・石渡正夫・今村能久 : 曲げをうける薄肉プレートガーダーの構造疲労特性、第30回土木学会年次学術講演会講演概要集、I - 111, 1975。
- 13) Maeda, Y. : Fatigue cracks of deep thin-walled plate girders, Proc. of

- Bridge Engineering Conference of TRB, Vol. 1, pp. 120 - 128, Sept., 1978.
- 1 4) AASHTO : Standard Specification for Highway Bridges, The American Association of State Highway and Transportation Officials, 12th edition, pp. 215- 239, 1977.
  - 1 5) Vinh, J.A. and A.A. Toprac : Study on fatigue of hybrid plate girders under constant moment, Research Report 96-3, Center for Highway Research, Univ. of Texas, Austin, Jan., 1969.
  - 1 6) BS5400 Part 10 : Code of Practice for Fatigue, British Standards Institution, 1980.
  - 1 7) Maeda, Y. and I. Okura : Interaction between initial web deflection and fatigue crack initiation in thin-walled plate girders, The Design of Steel Bridges ---- Conference Discussion, edited by H.R. Evans, University College, Cardiff, pp. 12.9 - 12.16, 1981.
  - 1 8) Gurney, T.R. : Fatigue of Welded Structures, Cambridge University Press, pp. 96 - 116, 1968.
  - 1 9) Vincent, G.S. : Tentative criteria for load factor design of steel highway bridges, AISI, Bull. No. 15, March, 1969.

## 2 曲げを受ける薄肉プレートガーダーのウェブの初期たわみと疲労亀裂発生との関係

### 2.1 概 説

本章では、曲げを受ける薄肉プレートガーダーの1型疲労亀裂を扱う。最初に、曲げを受ける薄肉プレートガーダーのウェブを、面内曲げを受けかつ初期たわみを有する長方形板にモデル化し、これに差分法または有限要素法による理論解析を適用し、ウェブの面外挙動に対する力学的諸因子の影響を明らかにする。特に、ウェブの初期たわみ形状がその面外挙動に与える影響を詳細に調べる。次に、解析結果と既往の実験結果との比較により、1.2節で述べた問題a), b)を解明し、ウェブの初期たわみ形状が1型疲労亀裂の発生に大きな影響を与えることを明らかにする。

### 2.2 差分法による解析

圧縮フランジと引張フランジの間のウェブの高さ方向の初期たわみの形状が、ウェブの面外挙動と2次曲げ応力に与える影響を差分法による理論解析によって明らかにする。

#### 2.2.1 基礎微分方程式

曲げを受ける薄肉プレートガーダーのウェブを、図-2.1に示すように、面内曲げを受けかつ初期たわみを有する長方形板にモデル化する。ここで、 $a$ は隣接する垂直補剛材の間の長さであり、 $b$ は圧縮フランジと引張フランジの間の長さである。また、 $\sigma_0$ は最外縁の面内曲げ応力である。ウェブの初期たわみと荷重による付加面外たわみをそれぞれ $w_0$ 、 $w$ とすると、このような長方形板の面外変形に対する基礎微分方程式は次式で与えられる。

$$\frac{D_w}{t_w} \nabla^4 w = \sigma_0 \left(1 - 2\frac{y}{b}\right) \frac{\partial^2 (w_0 + w)}{\partial x^2} \quad (2.1)$$

ここに、

$$D_w = \frac{E t_w^3}{12(1-\nu^2)} \quad : \text{ウェブの板曲げ剛性}$$

$t_w$  : ウェブの厚さ、  $E$  : ヤング率、  $\nu$  : ポアソン比

$$\nabla^4 = \frac{\partial^4}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4}{\partial y^4}$$

この方程式は、付加面外たわみ  $w$  によって板の中央面に付加的な膜ひずみが生じない微小変形の方程式である。

$y = b$  上に生じる2次曲げ応力  $\sigma_b$  と付加面外たわみ  $w$  の関係は次式で与えられる。

$$\sigma_b = \frac{6Dw}{t_w^2} \left( \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \Big|_{y=b} \quad (2.2)$$

式(2.1)を差分法により数値的に解き、この数値解を式(2.2)を差分化した式に代入して2次曲げ応力を求める。分割は  $x$  軸、 $y$  軸方向とも50等分割とする。

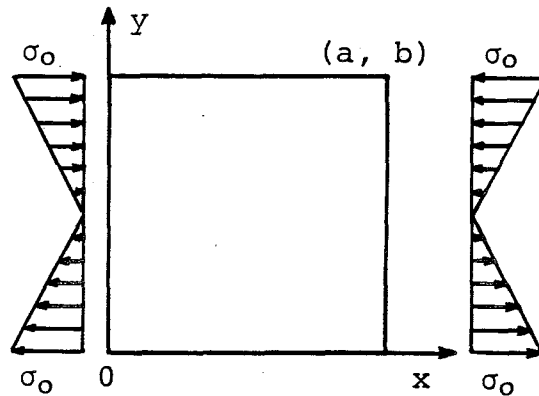


図-2.1 面内曲げを受ける長方形板

### 2.2.2 $y$ 軸方向の初期たわみ形状の影響

ウェブは、面外変形に対してフランジにより固定支持され、垂直補剛材により単純支持されていると仮定すると、長方形板の境界条件は次のように与えられる。

$$\left. \begin{array}{l} x=0 \text{ と } a \text{ で } \quad w=0 \text{ かつ } \quad \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0 \\ y=0 \text{ と } b \text{ で } \quad w=0 \text{ かつ } \quad \frac{\partial w}{\partial y} = 0 \end{array} \right\} \quad (2.3)$$

他方、ウェブの初期たわみを次式で与える。

$$w_0 = w_{0\max} \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \quad (2.4)$$

ここに、 $w_{0\max}$  : ウェブの最大初期たわみ、



n : 正の整数

n を変化させることにより、y 軸方向の初期たわみ形状がウェブの面外変形に与える影響を調べることができる。ウェブの面外変形は、n = 1 または 2 の初期たわみモードに対して増加が大きく、3 以上の初期たわみモードに対してはあまり増加しないことが既往の疲労実験により報告されている<sup>2)</sup>。したがって、n = 1, 2, 3, 4 の場合について計算を行なう。

a = b = 200 cm, t<sub>w</sub> = 10 mm, w<sub>max</sub> = 10 mm のウェブについて、断面 x = a / 2 上の面外たわみ形状および点 (a / 2, b) の 2 次曲げ応力の変化をそれぞれ図 - 2. 2, 2. 3 に示す。図 - 2. 2 で、破線は初期たわみ形状を表わし、実線は  $\sigma_o = 141.4$  MPa のときの面外たわみ形状を表わしている。ウェブの面外たわみは圧縮側で増加し、引張側で減少する。最大面外たわみは n = 1, 2, 4 の初期たわみ形状の場合  $y \cong 2b / 3$  の位置に生じ、n = 3 の初期たわみ形状の場合  $y \cong 4b / 5$  の位置に生じる。最大面外たわみの大きさを比較すると、n = 2 モードに対するものが最も大きく、n = 4 モードに対するものが最も小さい。これは前述の報告と一致する。他方、2 次曲げ応力は n = 2 の

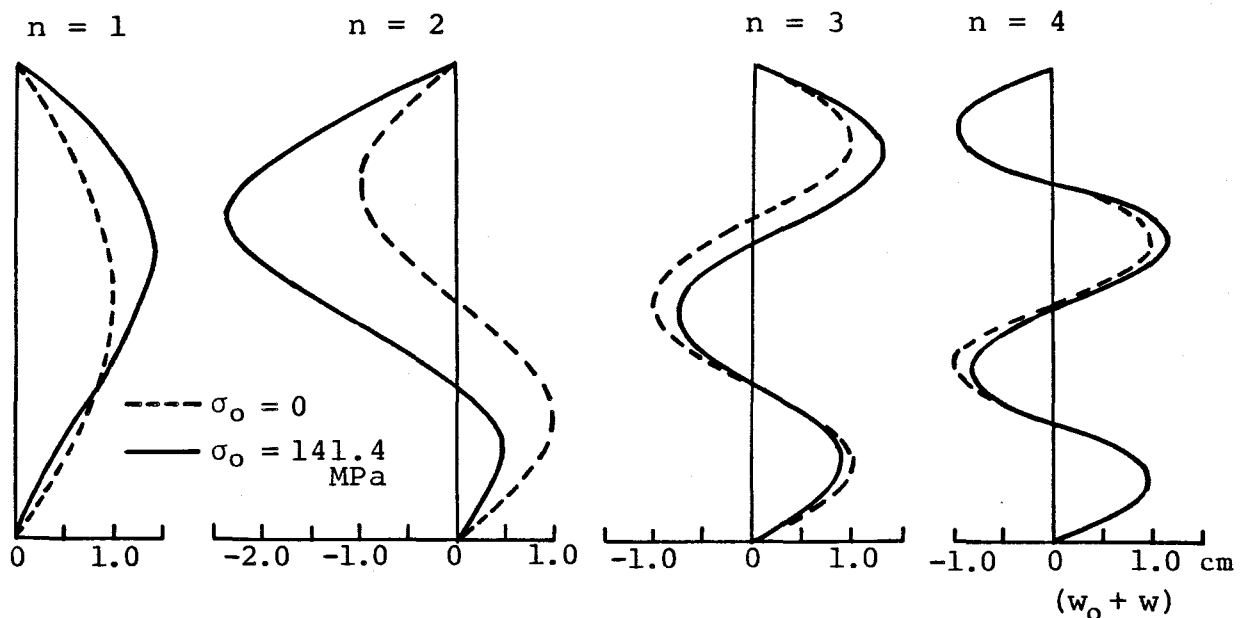


図 - 2. 2 断面 x = a / 2 の面外たわみ形状

初期たわみモードのとき最も大きく、n = 2 と 3 モードのとき両者はほぼ同程度で、n = 4 モードのとき極端に小さい。b を 200 cm に固定し、a を 200 cm から変化させること

により、縦横比  $a/b$  が 0.5, 0.75, 1.5 の各場合についても計算を行なうと、これらの縦横比においても前述と同じ傾向が見られる。

したがって、縦横比が 0.5 から 1.5 の範囲で、 $y$  軸方向の初期たわみモードの中で、ウェブの面外たわみと 2 次曲げ応力を最も大きく生じさせるモードは  $n = 2$  である。

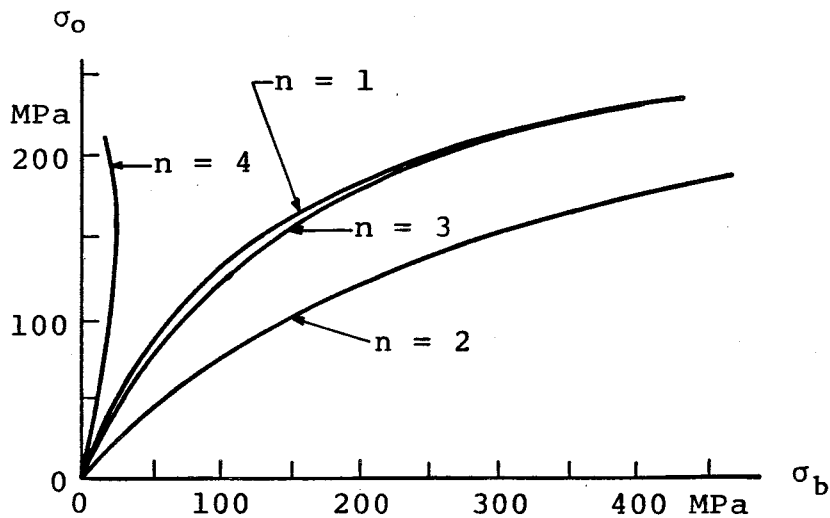


図-2.3 点  $(a/2, b)$  の 2 次曲げ応力の変化

## 2.3 Bergan・Cloughによる板の面外有限変形解析法

### 2.3.1 板の面外有限変形解析に関する既往の研究

平板の面外有限変形に対する基礎微分方程式が von Karman<sup>3)</sup>によって与えられ、初期たわみを有する場合への拡張が Marguerre<sup>4)</sup>によってなされた。これらの微分方程式に基づいて、圧縮を受ける長方形板の面外有限変形解析が幾人かの研究者によってなされた。

Timoshenko<sup>5)</sup>あるいは Klöppel<sup>6)</sup>は板の面外たわみに対して 1 項の三角級数、Coan<sup>7)</sup>は 3 項の三角級数、Yamaki<sup>8)</sup>は 4 項の三角級数を仮定して、近似解を得た。また、Massonet<sup>9)</sup>は、von Karman の式に塑性変形に関連する項を加えた微分方程式を差分法で解く手法を示した。級数解法あるいは差分法は単純な幾何学的条件、境界条件、荷重条件に限られるという欠点を有する。

今日では、大型計算機の発達によって板の面外有限変形解析が有限要素法によって行な

10)

われる。その中で注目されるのはMurrayの手法で、Murrayは要素座標系を平行移動あるいは回転させることにより幾何学的非線形性を考慮している。小松・北田・宮崎は、Murrayの手法に改良を加え、初期たわみと残留応力を有する板の弾塑性有限変形解析に対してもこの手法が適用できるように拡張している。

### 2. 3. 2 初期たわみを有する板のひずみと変位の関係式

12)

本研究では、Bergan・Cloughの方法に従って有限要素法による板の面外有限変形を定式化する。

図-2. 4に示すように、右手系直交座標系を使用する。面外変形の方法をz軸方向にとると、Marguerreのひずみと変位の関係は次式で与えられる。

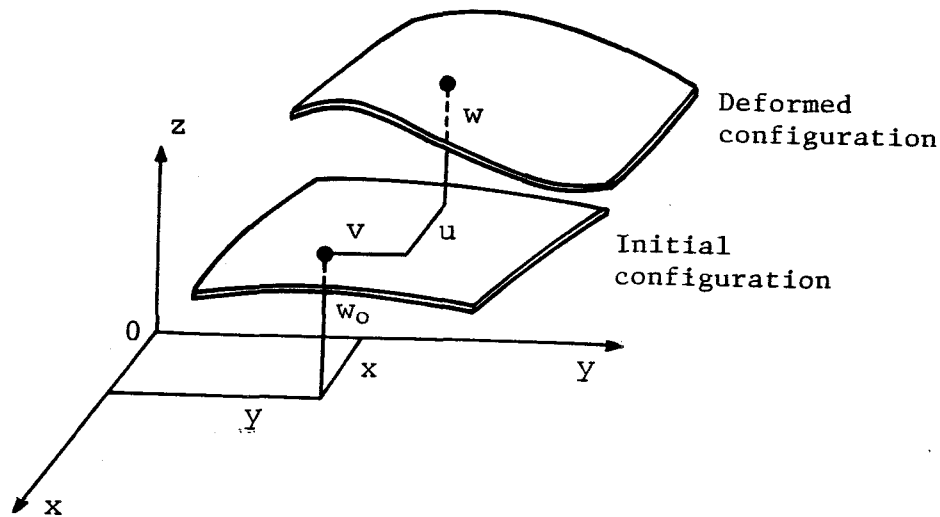


図-2. 4 初期たわみを有する板

$$\left. \begin{aligned} \epsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w_0}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 - z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\ \epsilon_y &= \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w_0}{\partial y} \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 - z \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \\ \gamma_{xy} &= \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial w_0}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial w_0}{\partial y} \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} - 2z \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \end{aligned} \right\} (2.5)$$

ここに、 $\epsilon_x$ ,  $\epsilon_y$ ,  $\gamma_{xy}$ : 板の中央面から  $z$  の位置のひずみ成分、

$u$ ,  $v$ ,  $w$ : 板の中央面におけるそれぞれ  $x$ ,  $y$ ,  $z$  軸方向の変位成分、

$w_0$ : 板の中央面における初期たわみ。

式(2.5)を次のようにベクトル表示する。

$$\varepsilon = \varepsilon_{m1} + \varepsilon_{m2} + \varepsilon_{m3} - z \varepsilon_b \quad (2.6)$$

ここに、

$$\varepsilon = \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix}$$

$$\varepsilon_{m1} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \end{bmatrix}$$

$$\varepsilon_{m2} = \begin{bmatrix} \frac{\partial w_0}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial x} \\ \frac{\partial w_0}{\partial y} \frac{\partial w}{\partial y} \\ \frac{\partial w_0}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial w_0}{\partial y} \frac{\partial w}{\partial x} \end{bmatrix}$$

$$\varepsilon_{m3} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \\ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \\ \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} \end{bmatrix}$$

$$\varepsilon_b = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\ \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \\ 2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \end{bmatrix}$$

有限要素内の変位と初期たわみを、節点変位と適当な形状関数を使用して次のように近似的に表わす。

$$\left. \begin{aligned} u &= N_u \delta_u \\ v &= N_v \delta_v \\ w &= N_w \delta_w \\ w_0 &= N_{w_0} \delta_{w_0} \end{aligned} \right] \quad (2.7)$$

ここに、 $N_u, N_v, N_w, N_{w_0}$ ：形状関数を要素とする行ベクトル

$\delta_u, \delta_v, \delta_w$ ：節点変位の列ベクトル、

$\delta_{w_0}$ ：節点の初期たわみから成る列ベクトル。

式(2.7)を式(2.6)へ代入すると各ひずみ成分ベクトルは次のように表わされる。

$$\varepsilon_{m1} = B_{m1} \begin{bmatrix} \delta_u \\ \delta_v \end{bmatrix}$$

$$\varepsilon_{m2} = B_{m2} \begin{bmatrix} \delta_{w0} & 0 \\ 0 & \delta_{w0} \end{bmatrix} B_{m3} \delta_w$$

$$\varepsilon_{m3} = \frac{1}{2} B_{m4} \begin{bmatrix} \delta_w & 0 \\ 0 & \delta_w \end{bmatrix} B_{m3} \delta_w$$

$$\varepsilon_b = B_{m5} \delta_w$$

(2.8)

ここに、

$$B_{m1} = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_u}{\partial x} & \hat{0} \\ \hat{0} & \frac{\partial N_v}{\partial y} \\ \frac{\partial N_u}{\partial y} & \frac{\partial N_v}{\partial x} \end{bmatrix}$$

$$B_{m4} = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_w}{\partial x} & \hat{0} \\ \hat{0} & \frac{\partial N_w}{\partial y} \\ \frac{\partial N_w}{\partial y} & \frac{\partial N_w}{\partial x} \end{bmatrix}$$

$$B_{m2} = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_{w0}}{\partial x} & \hat{0} \\ \hat{0} & \frac{\partial N_{w0}}{\partial y} \\ \frac{\partial N_{w0}}{\partial y} & \frac{\partial N_{w0}}{\partial x} \end{bmatrix}$$

$$B_{m5} = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 N_w}{\partial x^2} \\ \frac{\partial^2 N_w}{\partial y^2} \\ 2 \frac{\partial^2 N_w}{\partial x \partial y} \end{bmatrix}$$

$$B_{m3} = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_w}{\partial x} \\ \frac{\partial N_w}{\partial y} \end{bmatrix}$$

$\hat{0}$  : 0 の列ベクトル、 $\hat{0}$  : 0 の行ベクトル

### 2.3.3 応力とひずみの関係式

等方等質な弾性体に対する応力とひずみの関係は、残留応力も考慮した場合次式で与えられる。

(2.9)

$$\sigma = D\varepsilon + \sigma_r$$

ここに、

$$\sigma = \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix}, \quad \sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy} : \text{応力成分、}$$

$$\sigma_r = \begin{bmatrix} \sigma_{rx} \\ \sigma_{ry} \\ \tau_{rxy} \end{bmatrix}, \quad \sigma_{rx}, \sigma_{ry}, \tau_{rxy} : \text{残留応力成分、}$$

$$D = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix}$$

#### 2.3.4 有限要素のひずみエネルギー

有限要素のひずみエネルギー $U_e$ は、単位体積あたりに蓄えられるひずみエネルギーを、有限要素の全体積 $V_e$ にわたって積分することによって得られる。

$$U_e = \frac{1}{2} \int_{V_e} (\sigma + \sigma_r)^T \varepsilon dV_e \quad (2.10)$$

ここに、 $T$ ：転置記号。

式(2.9)を式(2.10)に代入すると、次式が得られる。

$$U_e = U_{ee} + U_{er} \quad (2.11)$$

ここに、

$$U_{ee} = \frac{1}{2} \int_{V_e} \varepsilon^T D \varepsilon dV_e \quad U_{er} = \int_{V_e} \sigma_r^T \varepsilon dV_e$$

式(2.6)を $U_{ee}$ に代入すると、 $U_{ee}$ は各ひずみ成分ベクトルによって次のように表わされる。

$$U_{ee} = U_{ee1} + U_{ee2} + U_{ee3} + U_{ee4} + U_{ee5} + U_{ee6} + U_{eeb} \quad (2.12)$$

ここに、

$$U_{ee1} = \frac{t_w}{2} \int_{A_e} \epsilon_{m1}^T D \epsilon_{m1} dA_e \quad U_{ee2} = \frac{t_w}{2} \int_{A_e} \epsilon_{m2}^T D \epsilon_{m2} dA_e$$

$$U_{ee3} = \frac{t_w}{2} \int_{A_e} \epsilon_{m3}^T D \epsilon_{m3} dA_e \quad U_{ee4} = t_w \int_{A_e} \epsilon_{m1}^T D \epsilon_{m2} dA_e$$

$$U_{ee5} = t_w \int_{A_e} \epsilon_{m2}^T D \epsilon_{m3} dA_e \quad U_{ee6} = t_w \int_{A_e} \epsilon_{m3}^T D \epsilon_{m1} dA_e$$

$$U_{eeb} = \frac{t_w^3}{24} \int_{A_e} \epsilon_b^T D \epsilon_b dA_e$$

$A_e$  : 有限要素の中央面の面積。

他方、残留応力は1つの有限要素内で一定で、かつ膜応力成分のみから成り立っていると仮定すると、 $U_{er}$ は式(2.6)を用いて次のように表わされる。

$$U_{er} = U_{er1} + U_{er2} + U_{er3} \quad (2.13)$$

ここに、

$$U_{er1} = t_w \sigma_r^T \int_{A_e} \epsilon_{m1} dA_e \quad U_{er2} = t_w \sigma_r^T \int_{A_e} \epsilon_{m2} dA_e$$

$$U_{er3} = t_w \sigma_r^T \int_{A_e} \epsilon_{m3} dA_e$$

### 2.3.5 平衡方程式

13)

有限変形に対する仮想仕事の原理は総和規約を用いて次式で与えられる。

$$\delta U_e(u_i) - \int_{S_e} T_i \delta u_i dS_e - \int_{V_e} P_i \delta u_i dV_e = 0 \quad (2.14)$$

ここに、 $\delta$  : 変分記号、 $u_i$  : 変位成分、 $T_i$  : 表面力

$S_e$  : 表面力 $T_i$ が規定されている表面、

$P_i$  : 体積力。

式(2.11)に変分を施し、これを式(2.14)へ代入する。表面力と体積力を板の中央面に作用する外力として取り扱うと、式(2.14)から次の平衡方程式が得られる。

$$\begin{bmatrix} K_{uv} & K_{uvw} \\ K_{wuv} & K_{ww} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta_{uv} \\ \delta_w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_{uv} \\ P_w \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} P_{ruv} \\ P_{rw} \end{bmatrix} \quad (2.15)$$

ここに、

$$\delta_{uv} = \begin{bmatrix} \delta_u \\ \delta_v \end{bmatrix} \quad P_{uv} = \begin{bmatrix} p_u \\ p_v \end{bmatrix}$$

$$K_{uv} = t_w \int_{A_e} B_{m1}^T D B_{m1} dA_e$$

$$K_{uvw} = t_w \int_{A_e} B_{m1}^T D B_{m2} \begin{bmatrix} \delta_{w0} & 0 \\ 0 & \delta_{w0} \end{bmatrix} B_{m3} dA_e + \frac{t_w}{2} \int_{A_e} B_{m1}^T D B_{m4} \begin{bmatrix} \delta_w & 0 \\ 0 & \delta_w \end{bmatrix} B_{m3} dA_e$$

$$K_{wuv} = t_w \int_{A_e} B_{m3}^T \begin{bmatrix} \delta_{w0} & 0 \\ 0 & \delta_{w0} \end{bmatrix}^T B_{m2}^T D B_{m1} dA_e + t_w \int_{A_e} B_{m3}^T \begin{bmatrix} \delta_w & 0 \\ 0 & \delta_w \end{bmatrix}^T B_{m4}^T D B_{m1} dA_e$$



$$\begin{aligned}
K_{ww} = & t_w \int_{A_e} B_{m3}^T \begin{bmatrix} \delta_{w0} & 0 \\ 0 & \delta_{w0} \end{bmatrix}^T B_{m2}^T D B_{m2} \begin{bmatrix} \delta_{w0} & 0 \\ 0 & \delta_{w0} \end{bmatrix} B_{m3} dA_e \\
& + \frac{t_w}{2} \int_{A_e} B_{m3}^T \begin{bmatrix} \delta_w & 0 \\ 0 & \delta_w \end{bmatrix}^T B_{m4}^T D B_{m4} \begin{bmatrix} \delta_w & 0 \\ 0 & \delta_w \end{bmatrix} B_{m3} dA_e \\
& + \frac{t_w}{2} \int_{A_e} B_{m3}^T \begin{bmatrix} \delta_{w0} & 0 \\ 0 & \delta_{w0} \end{bmatrix}^T B_{m2}^T D B_{m4} \begin{bmatrix} \delta_w & 0 \\ 0 & \delta_w \end{bmatrix} B_{m3} dA_e \\
& + t_w \int_{A_e} B_{m3}^T \begin{bmatrix} \delta_w & 0 \\ 0 & \delta_w \end{bmatrix}^T B_{m4}^T D B_{m2} \begin{bmatrix} \delta_{w0} & 0 \\ 0 & \delta_{w0} \end{bmatrix} B_{m3} dA_e + \frac{t_w^3}{12} \int_{A_e} B_{m5}^T D B_{m5} dA_e \\
& + t_w \int_{A_e} \left\{ \sigma_{rx} \frac{\partial N^T}{\partial x} \frac{\partial N}{\partial x} + \sigma_{ry} \frac{\partial N^T}{\partial y} \frac{\partial N}{\partial y} + \tau_{rxy} \left( \frac{\partial N^T}{\partial x} \frac{\partial N}{\partial y} + \frac{\partial N^T}{\partial y} \frac{\partial N}{\partial x} \right) \right\} dA_e
\end{aligned}$$

$P_u, P_v, P_w$  : それぞれ  $\delta u, \delta v, \delta w$  に対する等価節点力

$$P_{ruv} = t_w \int_{A_e} B_{m1}^T dA_e \cdot \sigma_r$$

$$P_{rw} = t_w \int_{A_e} B_{m3}^T \begin{bmatrix} \delta_{w0} & 0 \\ 0 & \delta_{w0} \end{bmatrix}^T B_{m2}^T dA_e \cdot \sigma_r$$

式(2.15)の剛性マトリックスは対称マトリックスではない。また、この剛性マトリックスの要素は節点変位の関数になっているため、板全体の平衡方程式も非線形になる。非線形方程式の数値計算に必要な接線剛性マトリックスは、 $U_e$  の第2変分から次のように与えられる。

$$\begin{bmatrix} K_{uvi} & K_{uvwi} \\ K_{wuvi} & K_{wwi} \end{bmatrix}$$

(2.16)

ここに、

$$K_{uvi} = t_w \int_{A_e} B_{m1}^T D B_{m1} dA_e$$

$$K_{uvwi} = K_{wuvi}^T = t_w \int_{A_e} B_{m1}^T D B_{m2} \begin{bmatrix} \delta_{w0} & 0 \\ 0 & \delta_{w0} \end{bmatrix} B_{m3} dA_e + t_w \int_{A_e} B_{m1}^T D B_{m4} \begin{bmatrix} \delta_w & 0 \\ 0 & \delta_w \end{bmatrix} B_{m3} dA_e$$

$$K_{wwi} = t_w \int_{A_e} B_{m3}^T \begin{bmatrix} \delta_{w0} & 0 \\ 0 & \delta_{w0} \end{bmatrix}^T B_{m2}^T D B_{m2} \begin{bmatrix} \delta_{w0} & 0 \\ 0 & \delta_{w0} \end{bmatrix} B_{m3} dA_e$$

$$+ \frac{3t_w}{2} \int_{A_e} B_{m3}^T \begin{bmatrix} \delta_w & 0 \\ 0 & \delta_w \end{bmatrix}^T B_{m4}^T D B_{m4} \begin{bmatrix} \delta_w & 0 \\ 0 & \delta_w \end{bmatrix} B_{m3} dA_e$$

$$+ \frac{3t_w}{2} \int_{A_e} B_{m3}^T \begin{bmatrix} \delta_{w0} & 0 \\ 0 & \delta_{w0} \end{bmatrix}^T B_{m2}^T D B_{m4} \begin{bmatrix} \delta_w & 0 \\ 0 & \delta_w \end{bmatrix} B_{m3} dA_e$$

$$+ \frac{3t_w}{2} \int_{A_e} B_{m3}^T \begin{bmatrix} \delta_w & 0 \\ 0 & \delta_w \end{bmatrix}^T B_{m4}^T D B_{m2} \begin{bmatrix} \delta_{w0} & 0 \\ 0 & \delta_{w0} \end{bmatrix} B_{m3} dA_e + \frac{t_w^3}{12} \int_{A_e} B_{m5}^T D B_{m5} dA_e$$

$$+ t_w \int_{A_e} \left\{ \sigma_{rx} \frac{\partial N^T}{\partial x} \frac{\partial N}{\partial x} + \sigma_{ry} \frac{\partial N^T}{\partial y} \frac{\partial N}{\partial y} + \tau_{rxy} \left( \frac{\partial N^T}{\partial x} \frac{\partial N}{\partial y} + \frac{\partial N^T}{\partial y} \frac{\partial N}{\partial x} \right) \right\} dA_e$$

接線剛性マトリックスは対称マトリックスになっている。

### 2.3.6 形状関数

有限要素として図-2.5に示すような長方形要素  $ijkl$  を採用する。節点  $i$  は、 $u$ 、 $v$  の面内変位と  $w$  の面外変位および  $\theta_x$ 、 $\theta_y$  の回転角を節点変位に持ち、これらの節点変位に対応して  $P_x$ 、 $P_y$  の面内力、 $P_z$  の面外力、 $P_{\theta_x}$ 、 $P_{\theta_y}$  の面外モーメントを持つ。さらに、節点  $i$  は  $w_0$  の初期たわみを持つ。

14)  
長方形板の形状関数として次式を使用する。

$$\begin{aligned}
 u &= \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y + \alpha_4 xy \\
 v &= \alpha_5 + \alpha_6 x + \alpha_7 y + \alpha_8 xy \\
 w &= \beta_1 + \beta_2 x + \beta_3 y + \beta_4 x^2 + \beta_5 xy + \beta_6 y^2 + \beta_7 x^3 \\
 &\quad + \beta_8 x^2 y + \beta_9 xy^2 + \beta_{10} y^3 + \beta_{11} x^3 y + \beta_{12} xy^3 \\
 w_0 &= \alpha_9 + \alpha_{10} x + \alpha_{11} y + \alpha_{12} xy
 \end{aligned}
 \tag{2.17}$$

ここに、 $\alpha_1 \sim \alpha_{12}$ 、 $\beta_1 \sim \beta_{12}$  : 係数。

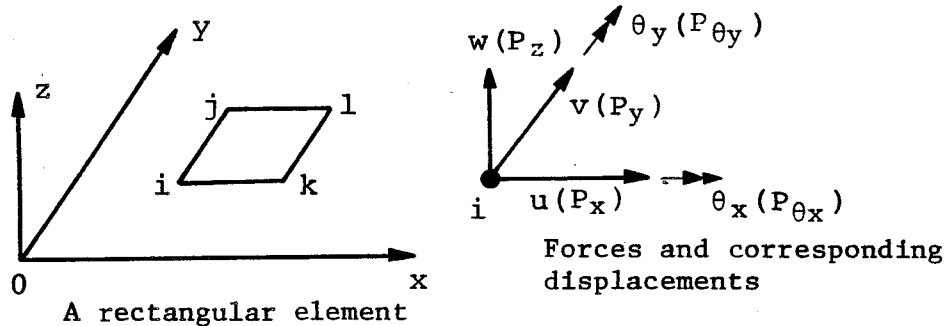


図-2.5 長方形要素

### 2.3.7 数値計算方法

与えられた荷重を適当な大きさの荷重に分割し、各荷重段階ごとにNewton-Raphson法を用いて、その荷重段階に対する正しい変位に収束させ、最終的に与えられた荷重に対する節点変位を求める。新たな荷重段階に入ったときには、前段階の荷重増分に対して計算が収束した後に残る節点力の不平衡力を含んだ値を荷重増分として用いる。

### 2.3.8 精度照査

面外有限変形解析プログラムの精度照査を実際の計算例によって示す。計算モデルは図-2.6のそう入図に示すように圧縮を受ける正方形板である。各辺の長さは50cmで板厚は4.5mmである。正方形板はx軸とy軸方向ともにsine半波形の初期たわみを有する。正方形板の中央の初期たわみの大きさは0.45mmである。ヤング率は $2.06 \times 10^5$  MPaであり、ポアソン比は0.316である。正方形板は面外方向に対して4辺で単純支持され、面内方向に対して非載荷辺で自由に變形できる。載荷条件として、載荷辺が一様応力になるように荷重で与える場合と一様変位になるように強制変位で与える場合の2つを考慮する。

正方形板の中央点の面外たわみの変化を図-2.6に示す。図の $\sigma_e$ は次節で示す式(2.18)によって与えられ、その値はこの正方形板に対して15.25MPaとなる。載荷条件が一様変位型の場合には載荷辺に生じる膜応力 $\sigma_{mx}$ が一様分布にならないので、これを載荷辺に沿って平均したものを $\sigma_o$ として使用する。比較として、載荷条件が一様変位型で、面外たわみを3項の三角級数で近似して解かれたCoanの解も示してある。一様変位型の有限要素法の解がCoanの解とよく一致していることがわかる。荷重が増加すると、一様応力型の面外たわみの方が一様変位型のものより大きくなる。

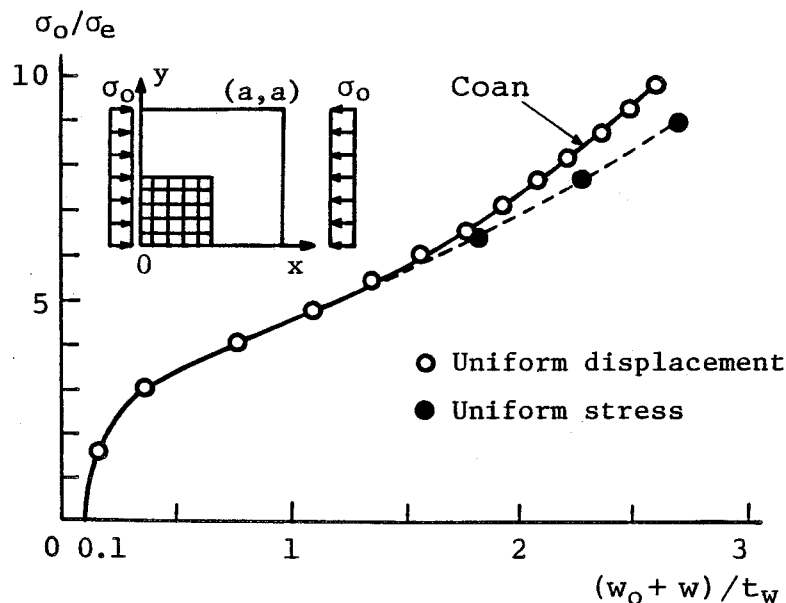


図-2.6 圧縮を受ける正方形板の中心点の面外たわみ

注) この計算例では有限要素法解とCoanの解とを比較するためにポアソン比を0.316としているが、次節以下の有限要素法による計算では、ポアソン比をすべて0.3としている。

## 2.4 面内曲げを受ける長方形板の面外有限変形

### 2.4.1 長方形板の面外有限変形を支配する無次元パラメータ

Marguerre は、式(2.5) のひずみと変位の関係式を用いて、初期たわみを有する板の面外有限変形に対して、後の3.2節で示す式(3.1)のひずみの適合条件式と式(3.2)の平衡方程式を誘導した。面外有限変形解析プログラムが与える解はこの2式から得られる解と同じである。式(3.1)と式(3.2)をそれぞれ無次元表示すると、長方形板の面外有限変形を支配する無次元パラメータが得られる。無次元面外たわみ  $w/t_w$ 、無次元膜応力  $\sigma_m/\sigma_e$ 、無次元2次曲げ応力  $\sigma_b/\sigma_e$  は、いずれもポアソン比  $\nu$ 、縦横比  $a/b$ 、無次元面内曲げ応力  $\sigma_o/\sigma_e$ 、無次元初期たわみ  $w_o/t_w$  を変数とする関数になる。ここで、 $\sigma_e$  は基本応力で次式で定義される。

$$\sigma_e = \frac{\pi^2 E}{12(1-\nu^2)} \frac{1}{\beta^2} \quad (2.18)$$

ここに  $\beta = b/t_w$  : 幅厚比

荷重の大きさ、材料定数、パネル寸法が与えられれば  $\nu$ 、 $a/b$ 、 $\sigma_o/\sigma_e$  は既知量になるが、 $w_o/t_w$  は、設計者が制御できない不確定量である。そこで、 $w_o/t_w$  が長方形板の面外有限変形に与える影響を調べる。

### 2.4.2 初期たわみの級数表示

薄肉プレートガーダーのウェブの初期たわみ  $w_o$  を次式のような二重三角級数で表す。

$$w_o = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} a_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \quad (2.19)$$

ここに  $a_{mn}$  : 係数、 $m, n$  : 正の整数

式(2.19)に各級数成分がウェブの面外有限変形に及ぼす影響を調べる。2.2節で示したように、2次曲げ応力は $n=2$ のとき最も大きく、 $n=4$ のとき極端に小さくなる。また、 $n=1$ と3のときの2次曲げ応力はほぼ等しくなる。したがって、 $y$ 軸方向のモードに関しては $n=1, 2$ を考慮する。 $x$ 軸方向のモードに関しては $m=1, 2, 3$ を考慮する。

### 2.4.3 $x$ 軸方向の初期たわみモードの影響

$m=1, 2, 3$ の各初期たわみモードがウェブの面外有限変形に与える影響を調べる。ただし、 $y$ 軸方向の初期たわみモードは $n=1$ とする。計算対象は図-2.7に示す  $a/b=1$ の正方形板である。各初期たわみモード成分の大きさは  $a m n / t w = 0.5$  である。境界条件は面外変形に対して  $x=0$ と  $a$ で垂直補剛材により単純支持され、 $y=0$ と  $a$ でフランジにより固定支持されているとし、面内変形に対して4辺自由とする。 $x=0$ と  $a$ で面内曲げ応力が直線的に変化するように荷重載荷する。

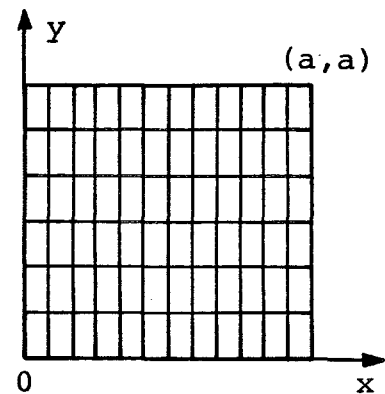


図-2.7 要素分割

面外たわみの変化を図-2.8に示す。 $m=2$ と3の初期たわみモードの場合、荷重が増加すると面外たわみも単調に増加する。 $m=1$ の初期たわみモードの場合、面外たわみはあまり増加せず、 $\sigma_o / \sigma_e$ が約80を超えると面外たわみの増加の方向が逆転する。面外たわみの増加が逆転した後の形状を図-2.9に示す。この現象はウェブの圧縮側でのみ生じている。

断面  $y = 2a/3$ の面外たわみの分布を図-2.10に示す。面外たわみの分布は  $x = a/2$ に関して $m=1$ と3の初期たわみモードのとき対称、 $m=2$ のとき逆対称になる。膜応力  $\sigma_{mx}$ の分布を図-2.11に示す。 $m=2, 3$ の初期たわみモードの場合、 $\sigma_o / \sigma_e$ が約40になると圧縮側で応力欠損が始まる。しかし、 $m=1$ の初期たわみモードの場合、 $\sigma_o / \sigma_e$ が約80になるまでは圧縮側で明瞭な応力欠損が現われず、 $\sigma_o / \sigma_e$ が約80を超えると、圧縮側で応力欠損が始まる。

16) 17), 18) 19)

次節の表-2.2に示すように、Toprac, Yen, 前田らが疲労実験で使用したプレー

トガーダーのウェブの  $m=1$  の初期たわみモード成分の大きさは板厚の約 1.5 倍に達している。したがって、 $m=1$  の初期たわみモードに対しては  $a_{11}/t_w=1.0, 1.5$  の場合についても計算する。面外たわみの変化を図-2.12に示す。 $a_{11}/t_w=1.0, 1.5$  の場合も面外たわみはあまり増加せず、 $\sigma_o/\sigma_e$  が約 80 を超えると面外たわみの増加の方向が逆転する。また、面外たわみ分布と膜応力分布についても調べると、 $a_{11}/t_w=0.5$  の場合と同じような傾向を示す。したがって、 $m=1$  の初期たわみモードがウェブの面外たわみをあまり増加させない効果は、その大きさが板厚の約 1.5 倍程度でも有効であると考えられる。

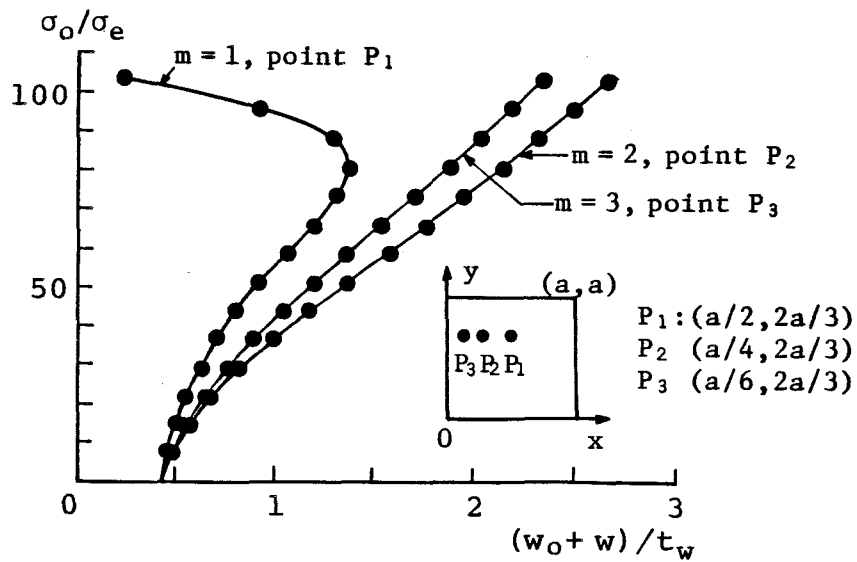


図-2.8 荷重と面外たわみの関係

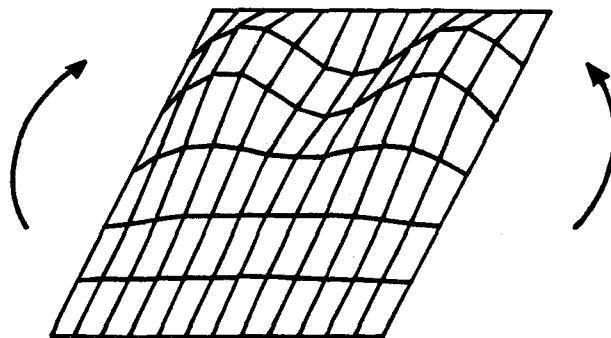


図-2.9 急変後の面外たわみ形状

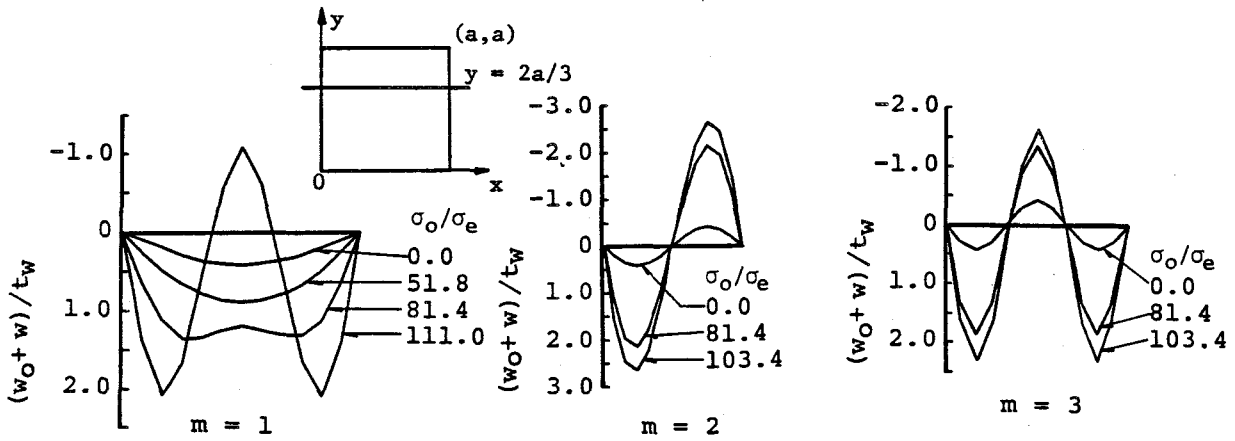


図-2.10 断面  $y = 2a/3$  の面外たわみ

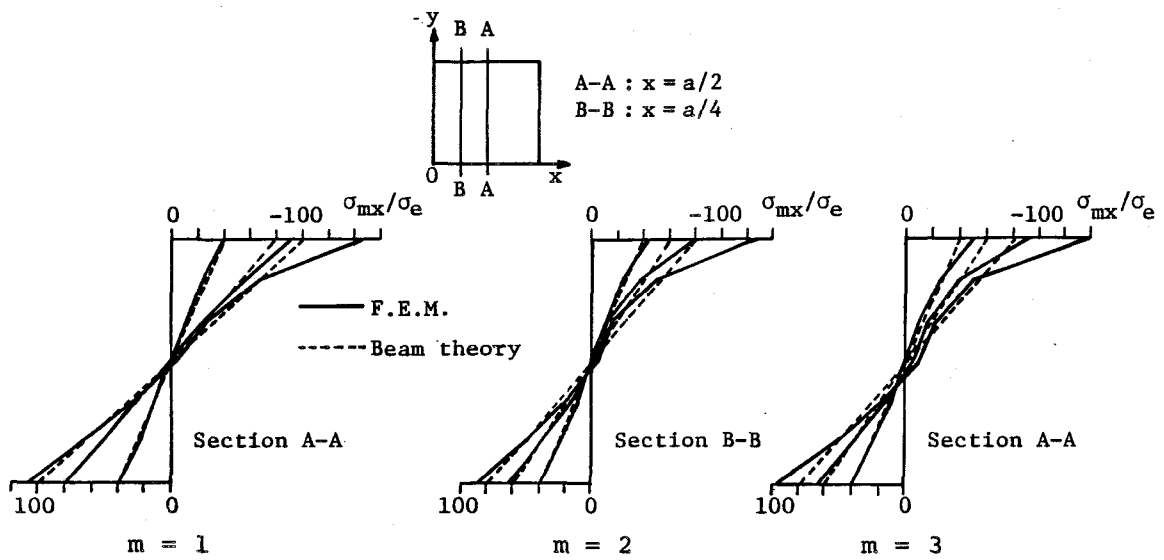


図-2.11 膜応力  $\sigma_{mx}$  の分布



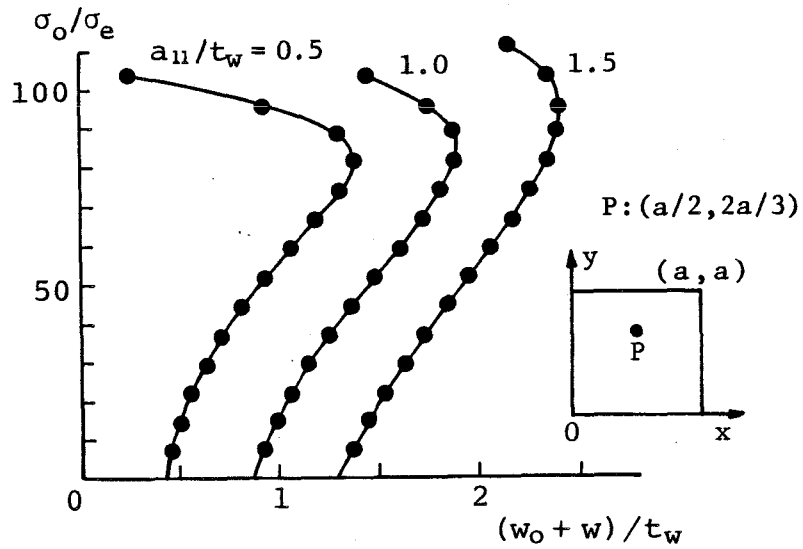


図-2.12 荷重と面外たわみの関係

#### 2.4.4 各初期たわみモードの影響

図-2.10に示したように、ウェブの面外たわみ分布はx軸方向の初期たわみモードに対応して $m=1$ のとき半波形、 $m=2$ のとき1波形、 $m=3$ のとき1波形半になる。したがって、半波形の部分を切り出し、この部分を図-2.13に示すように細分割して計算を行なう。切断された辺の境界条件は面外変形に対して単純支持、面内変形に対して自由とする。また、切断縁には面内曲げ応力が直線的に変化するように荷重載荷する。y軸方向の初期たわみモードに対して $n=1, 2$ を考慮し、各初期たわみモードの大きさは $a_{mx}/t_w=0.2, 0.5$ の場合を考える。

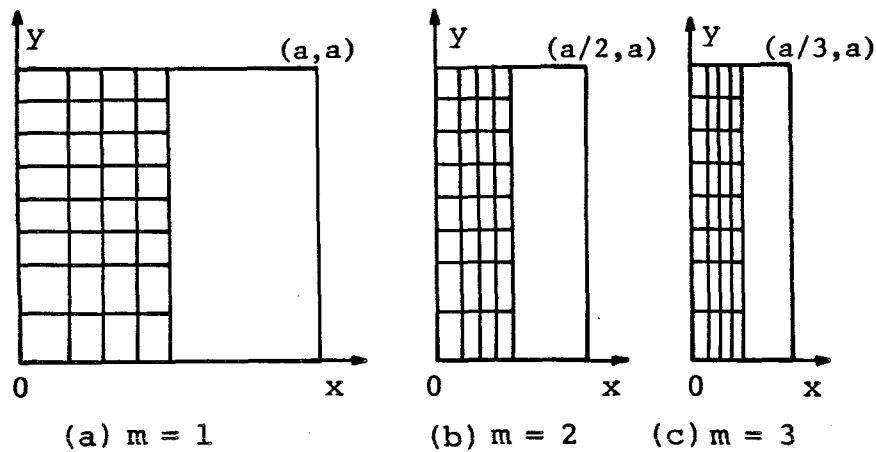


図-2.13 要素分割

面外たわみの変化と2次曲げ応力の変化をそれぞれ図-2.14, 2.15に示す。

$m=1$ の初期たわみモードの場合、ウェブの面外たわみはあまり増加せず、2次曲げ応力もあまり増加しない。しかし、 $m=2, 3$ の初期たわみモードの場合には、荷重が増加すると、面外たわみと2次曲げ応力はともに増加する。

$m=2, 3$ の初期たわみモードに対して、図-2.14, 2.15に描かれた曲線を数式で表わす。数式は、曲線の特徴が容易に比較できるように次式で近似する。

$$\frac{w}{t_w} = C_1 \left( \frac{\sigma_o}{\sigma_e} \right)^{\delta_1} \quad (2.20)$$

$$\frac{\sigma_b}{\sigma_e} = C_2 \left( \frac{\sigma_o}{\sigma_e} \right)^{\delta_2} \quad (2.21)$$

係数  $C_1, \delta_1, C_2, \delta_2$  を最小自乗法によって決定する。式(2.20)(2.21)から  $\sigma_o/\sigma_e$  を消去すると

$$\frac{\sigma_b}{\sigma_e} = C_3 \left( \frac{w}{t_w} \right)^{\delta_3} \quad (2.22)$$

が得られる。 $C_1, C_2, C_3, \delta_1, \delta_2, \delta_3$ の値を表-2.1に示す。

各初期たわみモードや初期たわみの大きさによって $C_1, C_2, \delta_1, \delta_2$ の値は異なる。したがって、 $w/t_w$ と $\sigma_o/\sigma_e$ の関係と $\sigma_b/\sigma_e$ と $\sigma_o/\sigma_e$ の関係は各初期たわみモードやその大きさによって異なる。他方、 $\delta_3$ の値は各初期たわみモードやその大きさに共通して1.10から1.16の間で変動しており $\sigma_b/\sigma_e$ と $w/t_w$ の間にはほぼ線形関係が成立している。このことは1.1節で述べたようにYenの実験においても確認されている。<sup>14)</sup>また、 $C_3$ の値は $m=2$ の初期たわみモードに対して70前後であり、 $m=3$ の初期たわみモードに対して100前後である。したがって、 $C_3$ はx軸方向の初期たわみモードの影響をおもに受ける。

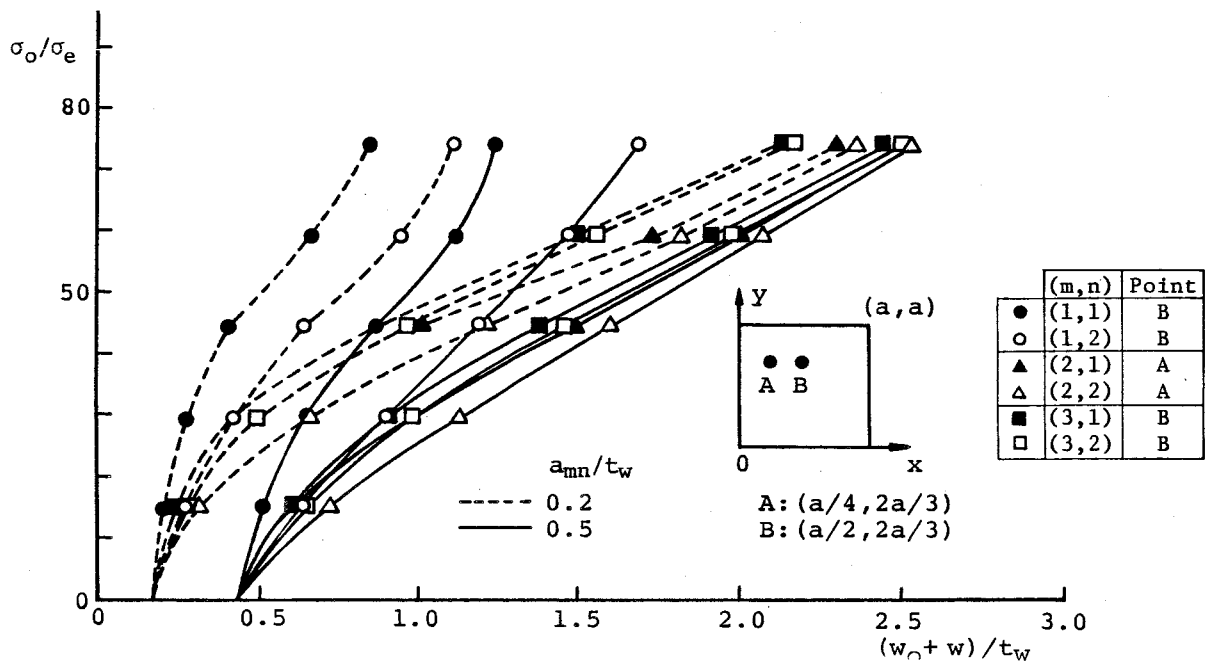


図-2.14 荷重と面外たわみの関係

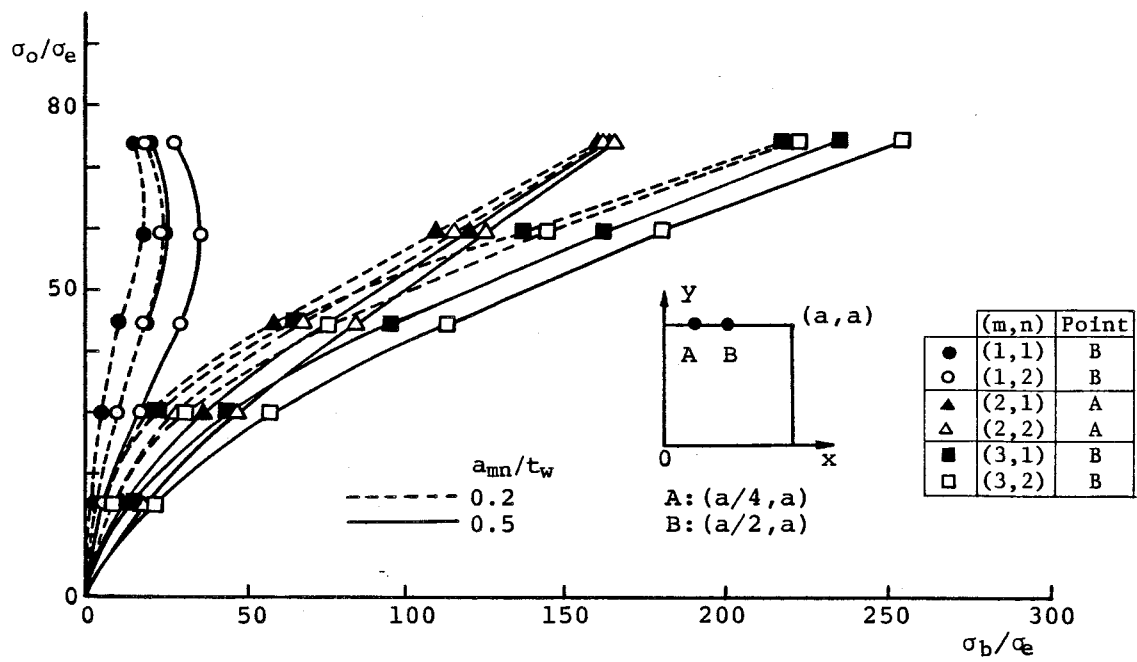


図-2.15 荷重と2次曲げ応力の関係

表-2.1 各係数の値

(m,n)	$a_{mn}/t_w$	$C_1$	$\delta_1$	$C_2$	$\delta_2$	$C_3$	$\delta_3$
(2,1)	0.2	0.00118	1.74	0.0322	1.98	67.25	1.13
	0.5	0.00494	1.40	0.1923	1.57	71.80	1.11
(2,2)	0.2	0.00307	1.53	0.0890	1.74	65.56	1.14
	0.5	0.01264	1.18	0.4759	1.36	70.71	1.14
(3,1)	0.2	0.00036	1.99	0.0108	2.30	99.86	1.15
	0.5	0.00291	1.52	0.1174	1.76	103.12	1.16
(3,2)	0.2	0.00040	1.99	0.0178	2.20	99.79	1.10
	0.5	0.00490	1.40	0.2632	1.59	110.81	1.13

#### 2.4.5 フランジの影響

プレートガーダーのウェブ縁がフランジにより回転拘束されている状態は単純支持と固定支持の間にある。ウェブの上下端に生じる面外の曲げモーメントがフランジの回転角に比例すると仮定すると、 $y=0$ 、 $b$ で次式が成立する。

$$GK_f \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} = -D_w \left( \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \quad (2.23)$$

ここに、

$$K_f = \frac{t_f^3 b_f}{3} : \text{フランジのねじり定数}$$

$t_f$  : フランジの板厚、  $b_f$  : フランジの板幅

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)} : \text{せん断弾性係数。}$$

式(2.23)を無次元表示することにより、ウェブに対するフランジの回転拘束を表わす無次元パラメータとして次式が得られる。

$$\chi_f = \frac{GK_f}{bD_w} = 2(1-\nu) \frac{b_f}{b} \left( \frac{t_f}{t_w} \right)^3 \quad (2.24)$$

$\chi_f=0$ のとき単純支持、 $\chi_f=\infty$ のとき固定支持となる。 $\chi_f$ を拘束係数と定義する。

有限要素法では、フランジの剛性マトリックスをウェブの剛性マトリックスに重ね合わ

せることにより、フランジのねじり剛性を考慮することができる。ねじりを受けるフランジの剛性マトリックスは図-2.16を参照して次式で与えられる。

$$\begin{bmatrix} P_{\theta_{xi}} \\ P_{\theta_{xj}} \end{bmatrix} = \frac{GK_f}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_{xi} \\ \theta_{xj} \end{bmatrix} \quad (2.25)$$

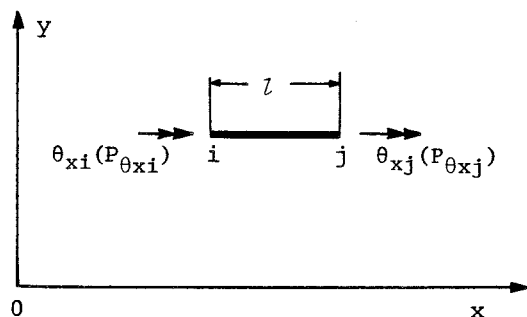


図-2.16 ねじりを受ける棒要素

$m=2$ の初期たわみモードに対して図-2.13(b)の要素分割を用いて、初期たわみの大きさを  $a_{21}/tw=0.5$  として、 $\chi_f=0, 2, 4, 8, 16, 5$ の各場合について計算を行う。

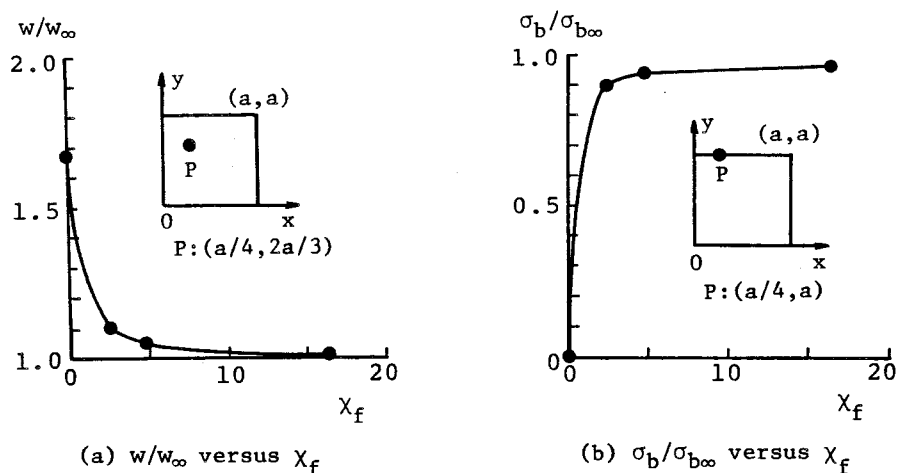


図-2.17 拘束係数の影響

$w/w_\infty$ と $\chi_f$ の関係、および $\sigma_b/\sigma_e$ と $\chi_f$ の関係を、 $\sigma_b/\sigma_e=44.4$ のときについ

てそれぞれ図-2.17(a), (b)に示す。ここで  $w_{\infty}$  と  $\sigma_{b\infty}$  はそれぞれ固定支持のときの付加面外たわみと2次曲げ応力である。 $\chi_f$ が0と5の間にあるとき、回転拘束の状態は単純支持状態から固定支持状態に急激に変化する。Toprac, Yen, 前田らが疲労実験で使用したプレートガーダーの  $\chi_f$  とウェブ幅厚比  $\beta$  との関係を図-2.18に示す。 $\beta$ が大きくなると  $\chi_f$  も大きくなる。これは実験で使用されたプレートガーダーのウェブが薄肉化するほどウェブに対するフランジの拘束が相対的に大きくなることを示している。特に、 $\beta$ が200より大きいプレートガーダーでは  $\chi_f$  が6より大きく、ウェブに対するフランジの拘束の状態が固定支持に近いと見なせる。

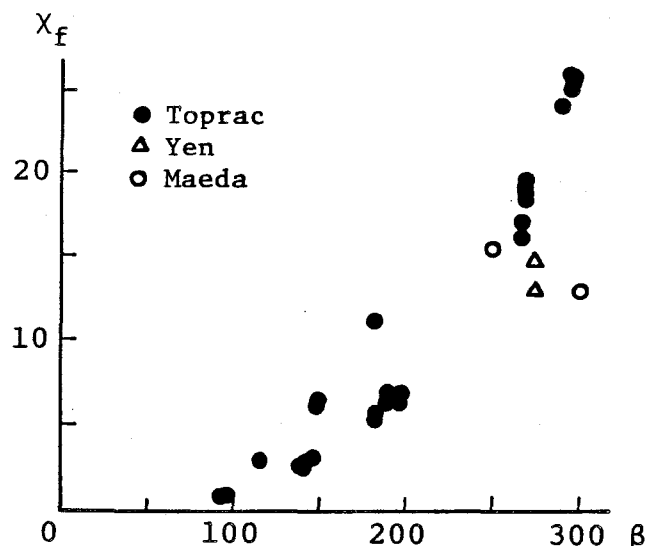


図-2.18 拘束係数とウェブの幅厚比の関係

## 2.5 解析結果と実験結果の比較

### 2.5.1 初期たわみモードと1型疲労亀裂の関係

初期たわみを有するウェブが面内曲げを受ける場合、ウェブの面外たわみは圧縮側で増加し、引張側で減少する。したがって、圧縮側の初期たわみがウェブの面外有限変形に重要であると考えられる。Toprac, Yen, 前田らが疲労実験で使用したプレートガーダーにおいて、ウェブの圧縮側で最大初期たわみ  $w_{\max}$  が存在する  $x$  軸方向の断面の面外たわ

み分布を次式で近似し、

$$w_0 = \sum_{m=1}^3 a_m \sin \frac{\pi x}{a} \quad (2.26)$$

最小自乗法によって係数  $a_m$  を決定する。この値を表-2.2に示す。ウェブの縦横比はいずれも1である。

最大初期たわみと各初期たわみモード成分の関係を図-2.19に示す。

$w_{0max}/t_w$  と  $a_1/t_w$  の間にはほぼ線形関係が成立するが、 $w_{0max}/t_w$  と  $a_2/t_w$  および  $a_3/t_w$  の間には一定した関係がなく、各研究者によって分布状態が異なる。したがって、最大初期たわみを制限することは  $m=1$  の初期たわみモード成分を制限することにはなるが、 $m=2, 3$  の初期たわみモード成分を制限することには必ずしもならない。

表-2.2  $w_{0max}/t_w$  と  $a_m/t_w$  の値、および設定荷重と1型疲労亀裂の発生個数

Investigator	Test panel	$w_{0max}/t_w$	$a_1/t_w$	$a_2/t_w$	$a_3/t_w$	$\beta$	$\sigma_{omin}/\sigma_Y$	$\sigma_{omax}/\sigma_Y$	No. of cracks
Toprac	21020B	1.643	1.621	-0.041	-0.070	269	0.27	0.55	0
	22550B	1.195	1.146	0.149	-0.058	269	0.69	1.38	1
Yen	F6 Panel 2	1.318	1.139	0.082	-0.163	275	0.03	0.56	0
	F7 Panel 4	1.483	1.457	-0.385	0.244	275	0.03	0.45*	0
Maeda	F6 Panel I	0.625	0.613	0.177	0.081	250	0.20	0.51	1
	F10 Panel I	1.250	0.360	0.837	-0.348	300	0.12	0.41	2
	F10 Panel II	1.875	1.573	0.300	0.672	300	0.12	0.41	1

$\sigma_Y$ : yielding stress of web plate

$\sigma_{omin}$ : minimum flange stress calculated by beam theory

$\sigma_{omax}$ : maximum flange stress calculated by beam theory

\*:  $\sigma_{omax}/\sigma_Y = 0.53$  after  $1.3 \times 10^6$  cycles

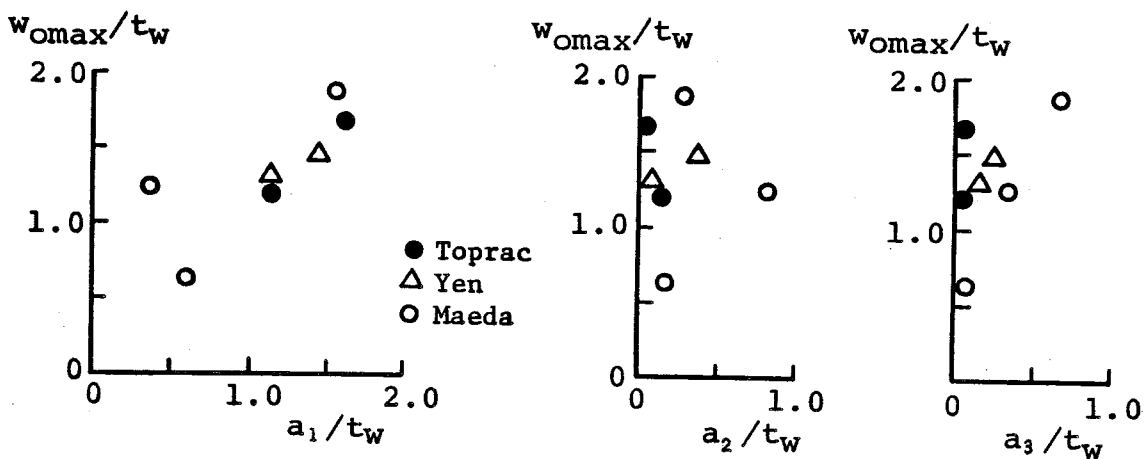


図-2.19  $w_{0max}/t_w$  と  $a_m/t_w$  の関係

Topracは、1型疲労亀裂の発生を防ぐために必要なウェブの最大初期たわみの制限を次式で与えた。

$$\frac{w_{\max}}{t_w} = 1000 \frac{\sigma_Y}{E} \quad (2.27)$$

ここで、 $\sigma_Y$  : ウェブの降伏応力度

この制限値と実験値の比較を図-2.20に示す。Topracの実験値には適当であるが、前田の実験値には安全とはいえない。

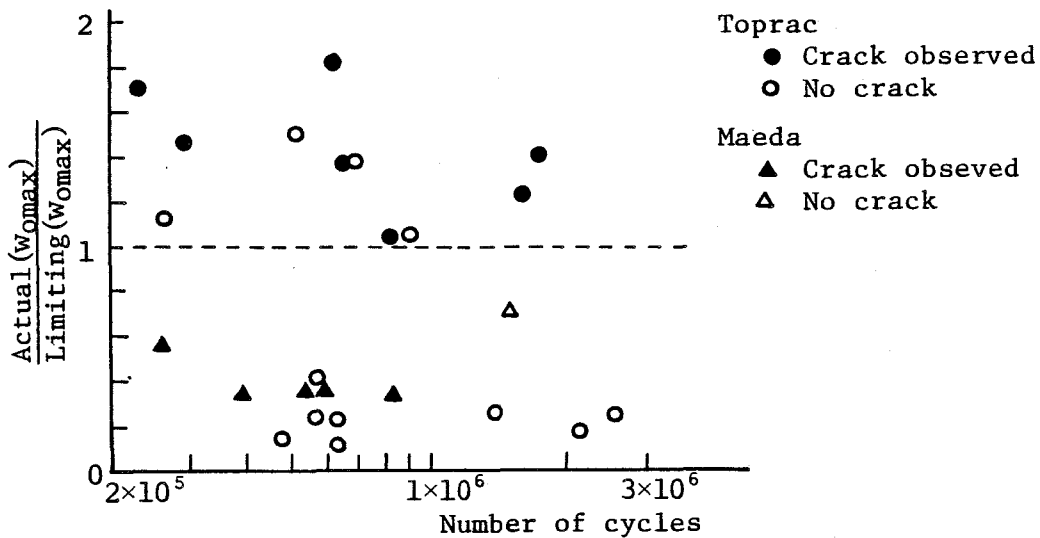


図-2.20 Toprac提案の  $w_{\max}/t_w$  の制限値と実験値の比較

他方、荷重が大きくなると面外たわみも大きくなり、2次曲げ応力も大きくなる。したがって、各研究者が設定した荷重の大きさも比較する必要がある。荷重の大きさと1型疲労亀裂の発生個数を表-2.2に示す。 $\sigma_{\min}$ と $\sigma_{\max}$ は梁理論から計算された、それぞれ下限、上限荷重に対応するフランジ縁応力である。これらの応力はウェブの降伏応力度で無次元化されている。Topracの実験パネル21020Bと22550Bを比較すると、21020Bはフランジ縁応力がウェブの降伏応力度に達しておらず、約200万回の荷重の繰り返して1型疲労亀裂が発生しなかった。しかし22550Bではフランジ縁応力がウェブの降伏応力度を超えていて約67万回の荷重の繰り返して1型疲労亀裂が発生した。Topracの実験では、一般にフランジ縁応力がウェブの降伏応力度を超えているものに



1型疲労亀裂が発生した。しかし、前田の実験では、フランジ縁応力度がウェブの降伏応力度の約半分以下であっても、約12万回から約40万回の荷重の繰り返して1型疲労亀裂が発生した。

Topracと前田の実験結果のこのような相違は、実験パネルの各初期たわみモード成分がウェブの面外変形に与える影響を考慮することにより次のように説明することができる。

表-2.2より、Topracの実験では $m=1$ の初期たわみモード成分が他の初期たわみモード成分よりも卓越しているが、前田の実験では $m=2, 3$ の初期たわみモード成分もかなり大きい。したがって、前田の実験では $m=2, 3$ の初期たわみモード成分の影響が大きく現われ、フランジ縁応力がウェブの降伏応力度の半分以下であっても、隅肉溶接のウェブ側止端に大きな2次曲げ応力が生じ、1型疲労亀裂が発生したと考えられる。Topracの実験では $m=1$ の初期たわみモード成分の効果が大きく現われ2次曲げ応力の増加が抑制されたので、フランジ縁応力がウェブの降伏応力度を超えるまで荷重を増加させたことにより1型疲労亀裂が発生したと考えられる。他方、Yenの実験では $m=2, 3$ の初期たわみモード成分の大きさがTopracの実験のものと前田の実験のものとの間にあり、荷重が3研究者の中で最も低いので、1型疲労亀裂が発生しなかったと考えられる。

したがって、最大初期たわみを制限することが必ずしも1型疲労亀裂の発生を防止することにはならない。1型疲労亀裂の発生を防止するためには、さらに $m=2, 3$ の初期たわみモード成分も制限する必要があると考えられる。

## 2.5.2 1型疲労亀裂の発生位置

ウェブの上端 $y=b$ 上の2次曲げ応力の分布は、 $m=2, 3$ の初期たわみモードに対して、式(2.21)を用いることにより近似的に次式で表わすことができる。

$$\frac{\sigma_b}{\sigma_e} = C_2 \left(\frac{\sigma_0}{\sigma_e}\right)^{\delta_2} \sin \frac{m\pi x}{a} \quad (2.28)$$

表-2.1の $n=1$ に対する $C_2, \delta_2$ の値を式(2.28)に代入して推定される $\sigma_b$ と実測された $\sigma_b$ の比較を図-2.21に示す。実測された $\sigma_b$ の分布形状は $m=2, 3$ の初期たわみモード成分のうち大きい方の成分から推定される $\sigma_b$ の分布形状に一致する。しかし、推定値は実測値よりかなり大きい。この原因として次のことが考えられる。

a) 実測値は隅肉溶接のウェブ側止端から数cm離れた位置の2次曲げ応力であり、止端に

生じる2次曲げ応力より一般に小さい。

b) 推定値は単一の初期たわみモード成分のみの影響を受けており、 $m = 1$ の初期たわみモード成分の効果を含んでいない。

次に、2次曲げ応力の分布と1型疲労亀裂の発生位置の関係について調べる。前田の実験のF10 Panel IIにおいては2次曲げ応力が最大となる中央に1型疲労亀裂が発生した。また、前田の実験パネルF10 Panel Iでは $m = 2$ の初期たわみモード成分が卓越しているため、このモード成分による影響が大きく現われ、2次曲げ応力が最大と最小(反対側のウェブ面では最大になる)になる位置の2箇所て1型疲労亀裂が発生した。したがって、1型疲労亀裂は $m = 2, 3$ の初期たわみモード成分のうち大きい方の成分のモードの影響を強く受け、このモード成分から推定される2次曲げ応力の分布で最大となる位置に発生すると考えられる。

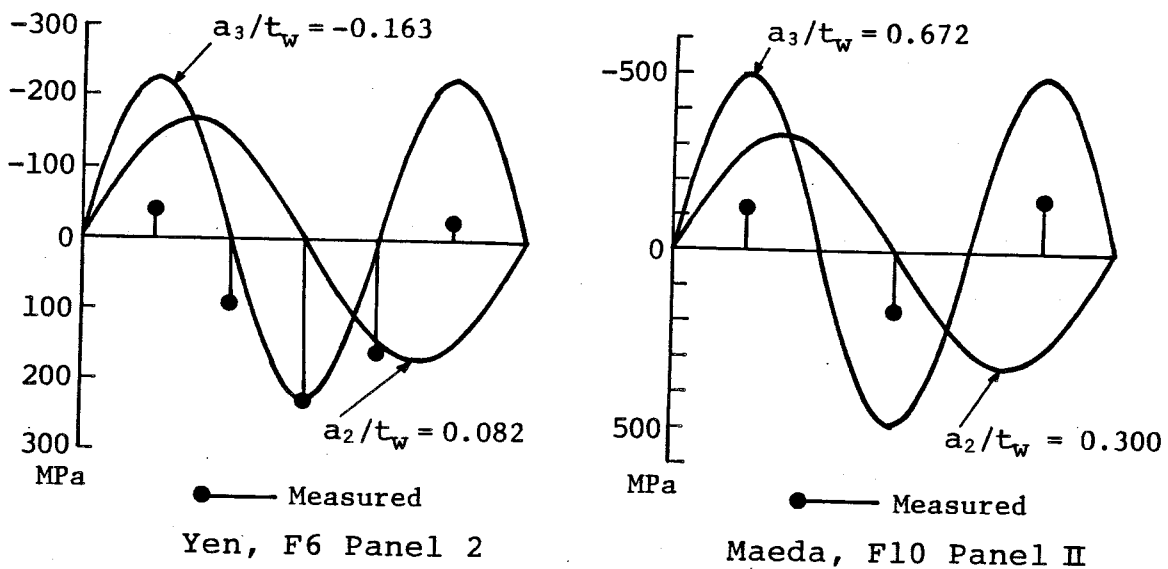


図-2. 21 2次曲げ応力の推定値と実験値との比較

## 2.6 結 論

曲げを受ける薄肉プレートガーダーのウェブを面内曲げを受ける長方形板にモデル化し、これに差分法あるいは有限要素法による理論解析を適用し、1型疲労亀裂の発生に与える諸因子の影響を調べた結果、以下のことが明らかになった。

- (1) 縦横比が0.5から1.5の範囲で、 $y$ 軸方向の初期たわみモードの中で、ウェブの面外たわみと2次曲げ応力を最も大きく生じさせるモードは $n=2$ である。
- (2) 各研究者が疲労実験で使用したプレートガーダーにおいて、ウェブが薄肉化するに従ってウェブに対するフランジの回転拘束が大きくなる。幅厚比が200以上のウェブではウェブはフランジにより固定支持されていると見なせる。
- (3) 縦横比が1のウェブについて、 $x$ 軸方向の各初期たわみモードの影響を調べると、 $m=1$ の初期たわみモードの場合、ウェブの面外たわみはあまり増加せず、2次曲げ応力もあまり増加しない。 $m=2, 3$ の初期たわみモードの場合、荷重が増加するとともに面外たわみが増加し、2次曲げ応力も増加する。
- (4) 1型疲労亀裂は $m=2, 3$ の初期たわみモード成分のうち大きいモード成分の影響を強く受け、このモード成分から推定される2次曲げ応力の分布で最大となる位置に発生する。
- (5) 実験で使用されたプレートガーダーのウェブの最大初期たわみと各初期たわみモード成分の関係を調べると、最大初期たわみと $m=1$ の初期たわみモード成分の間には線形関係がみられるが、 $m=2, 3$ の初期たわみモード成分との間には一定した関係がみられない。このことと(3)の結論とを考え合せると、最大初期たわみを制限することが必ずしも1型疲労亀裂の発生を防止することにはならない。さらに、 $m=2, 3$ の初期たわみモード成分を制限する必要がある。

## 参 考 文 献

- 1) Timoshenko, S.P. and J.M. Gere : Theory of Elastic Stability, 2nd edition, McGraw-Hill, pp. 344 - 346, 1961.
- 2) 堀見尉・宮村隆夫：プレートガーダーの疲労に関する研究、大阪大学工学部土木工学科卒業論文、1970。
- 3) von Karman, T. : Festigkeitsprobleme im Maschinenbau, Encyclopädie der Mathematischen Wissenschaften, Vol. 4, No. 4, pp. 348 - 352, 1910.
- 4) Marguerre, K. : Zur Theorie der gekrümmter Platte grosser Formänderung, Proc. 5th International Congress for Applied Mechanics, Cambridge, pp. 93 - 101, 1938.
- 5) 文献 1)のpp. 411 - 418.
- 6) Klöppel, K., R. Schmied und J. Schubert : Die Traglast mittig und auBer mittig gedrückter dünnwandiger Kastenträger unter Verwendung der nichtlinearen Beultheorie, Der Stahlbau, Vol. 35, H. 11, ss. 321 - 337, 1966.
- 7) Coan, J.M. : Large-deflection theory for plates with small initial curvature loaded in edge compression, J. of Applied Mechanics, Vol. 18, pp. 143 - 151, 1951.
- 8) Yamaki, N. : Postbuckling behavior of rectangular plates with small initial curvature loaded in edge compression, J. of Applied Mechanics, Vol. 26, pp. 407 - 414, 1959 and Vol. 27, pp. 335 - 342, 1960.
- 9) Massonet, Ch. : General theory of elasto-plastic membrane-plates, Engineering Plasticity, Cambridge University Press, pp. 443 - 472, 1968.
- 10) Murray, D.W. and E.L. Wilson : Finite-element large deflection analysis of plates, Proc. of ASCE, Vol. 95, No. EM 1 , pp. 143 - 165, 1969.
- 11) 小松定夫・北田俊行・宮崎清司：残留応力および初期たわみを有する圧縮板の弾塑性解析、土木学会論文報告書、第244号、pp. 1 - 14, 1975。
- 12) Bergan, P.G. and R.W. Clough : Large deflection analysis of plates and shallow shells using the finite element method, Int. J. Num. Meth. Eng.,

Vol.5, pp. 543 - 556, 1973.

- 1 3) Washizu, K. : Variational Method in Elasticity and Plasticity, Pergamon Press, pp. 52 - 75, 1968.
- 1 4) Zienkiewicz, O.C. and Y.K. Cheung : The Finite Element Method in Structural and Continuum Mechanics, McGraw-Hill, pp. 66 - 67 and pp. 90 - 98, 1967.
- 1 5) Patterson, P.J., J.A. Corrado, J.S. Huang and B.T. Yen : Fatigue and static tests of two welded plate girders, WRC, Bull. No. 155, Oct., 1970.
- 1 6) Lew, H.S. and A.A. Toprac : Fatigue tests of welded hybrid plate girders under constant moment, Research Report 77-2F, Center for Highway Research, Univ. of Texas, Austin, Jan., 1967.
- 1 7) Yen, B.T. and J.A. Mueller : Fatigue tests of large-size welded plate girders, WRC, Bull. No. 118, Nov., 1966.
- 1 8) Mueller, J.A. and B.T. Yen : Girder web boundary stresses and fatigue, WRC, Bull. No. 127, Jan., 1968.
- 1 9) Maeda, Y. : Ultimate static strength and fatigue behavior of longitudinally stiffened plate girders in bending, IABSE, Proc. London Colloquium, pp. 269 - 282, March, 1971.
- 2 0) Vinh, J.A. and A.A. Toprac : Study on fatigue of hybrid plate girders under constant moment, Research Report 96-3, Center for Highway Research, Univ. of Texas, Austin, Jan., 1969.

# 第3章 圧縮と面内曲げを受ける長方形板の 面外有限変形の定式化とその特性

## 3. 1 概 説

前章では、繰り返し曲げを受ける薄肉プレートガーダーのウェブの面外変形に起因する1型疲労亀裂に対して、初期たわみの大きさのみならず、初期たわみの形状が2次曲げ応力の増加、すなわち1型疲労亀裂の発生に影響することを明らかにした。1型疲労亀裂に対して、疲労強度を2次曲げ応力を受ける隅肉溶接の疲労強度に基づいて面内曲げ応力で与えるためには、初期たわみ、残留応力、ウェブに対するフランジや補剛材の回転拘束を考慮して、荷重と2次曲げ応力の関係を定式化する必要がある。

1) 1型疲労亀裂は非対称断面の薄肉プレートガーダーのウェブの面外変形や、第6章で述べるように水平補剛材を有する薄肉プレートガーダーの圧縮フランジと水平補剛材との間のウェブパネルの局所的な面外変形によっても発生する可能性がある。このような薄肉プレートガーダーの荷重と2次曲げ応力の関係は圧縮と面内曲げを受ける長方形板の面外変形を解析することによって調べることができる。

この解析に有限要素法を用いると膨大な数値計算を必要とする。一般に、疲労亀裂の発生には亀裂の発生位置の応力全振幅が重要である。したがって、上限荷重と下限荷重の間の2次曲げ応力の変化を正確に知る必要がある。しかし、有限要素法解析によって得られる解は離散解であり、各離散解の間は補間曲線で近似しなければならない。特に、座屈荷重の近傍で面外変形と2次曲げ応力は急激に変化するので補間曲線は大きな誤差を含む恐れがある。

2) 他方、板の面外有限変形に対する Marguerre の基礎微分方程式<sup>2)</sup> を Galerkin法あるいは Ritz法<sup>3)-6)</sup>によって近似的に解く従来の解法でも、各研究者<sup>3)-6)</sup>が与えた解は非常に複雑である。これらの解から、1型疲労亀裂に対して、2次曲げ応力を受ける隅肉溶接の疲労強度に基づいて、疲労強度を面内曲げ応力で与えることはほとんど不可能である。

後章で、純圧縮を受ける長方形板あるいは純面内曲げを受ける長方形板の荷重と2次曲げ応力の関係を定式化する。これは、4辺単純支持された、圧縮と面内曲げを受ける長方

形板の荷重と面外たわみの関係式を修正することによってなされる。

本章では、4辺単純支持された、圧縮と面内曲げを受ける長方形板の面外有限変形を定式化する。解析手法は、Marguerreの板の基礎微分方程式を Galerkin法によって近似的に解く従来の方法と同じであるが、得られる荷重と面外たわみの関係式は陽な形式で与えられる。さらに、この関係式を用いて、圧縮と面内曲げを受ける長方形板の面外有限変形を調べる。

### 3. 2 圧縮と面内曲げを受ける長方形板の面外有限変形の定式化

#### 3. 2. 1 Marguerre の板の基礎微分方程式

初期たわみを有する板の面外有限変形に対する微分方程式は Marguerreによって与えられた。面外変位の方向を右手系直交座標系の  $z$  軸方向にとると、ひずみの適合条件式と釣り合い条件式はそれぞれ、次式で与えられる。

$$\frac{1}{E} \nabla^4 F = \left\{ \frac{\partial^2 (w_0 + w)}{\partial x \partial y} \right\}^2 - \frac{\partial^2 (w_0 + w)}{\partial x^2} \frac{\partial^2 (w_0 + w)}{\partial y^2} - \left\{ \left( \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} \right)^2 - \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \right\} \quad (3. 1)$$

$$\left. \begin{aligned} D_w \nabla^4 w &= p \\ \frac{p}{t_w} &= \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} \frac{\partial^2 (w_0 + w)}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 (w_0 + w)}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \frac{\partial^2 (w_0 + w)}{\partial y^2} \end{aligned} \right\} \quad (3. 2)$$

ここに、  $F$  : 応力関数

応力関数  $F$  と各膜応力成分との間には次の関係がある。

$$\frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = \sigma_{mx}, \quad \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = \sigma_{my}, \quad - \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = \tau_{mxy} \quad (3. 3)$$

### 3.2.2 境界条件

図-3.1を参照して、境界条件を次のように与える。

(i) 面外方向に対して4辺単純支持；

$$\left. \begin{array}{l} x=0, a \text{ で} \\ w=0, \quad \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0 \\ y=0, b \text{ で} \\ w=0 \quad \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0 \end{array} \right\} \quad (3.4)$$

(ii) 面内方向に対して；

$$\left. \begin{array}{l} x=0, a \text{ で} \\ t_w \int_0^b \sigma_{mx} dy = -\frac{1+\psi}{2} \sigma_o t_w b \\ t_w \int_0^b \sigma_{mx} \left(y - \frac{b}{2}\right) dy = \frac{1-\psi}{2} \frac{\sigma_o t_w b^2}{6} \end{array} \right\} \quad (3.5)$$

ここに  $-1 \leq \psi \leq 1$  であり、 $\sigma_o$  は膜応力が直線的に変化していると仮定したときの  $y=0$  上の圧縮応力である。 $\psi=1$  のとき純圧縮、 $\psi=-1$  のとき純面内曲げになる。

辺  $y=0, b$  上の面内方向の境界条件に対して次の2つの条件を考慮する。

条件(a)

$$\left. \begin{array}{l} \int_0^a \sigma_{my} dx = 0 \\ v(x, b) - v(x, 0) = \text{constant} \end{array} \right\} \quad (3.6)$$

条件(b)

$$\left. \begin{array}{l} \sigma_{my} = 0 \\ \tau_{mxy} = 0 \end{array} \right\} \quad (3.7)$$

条件(a)の場合、両非載荷辺の相対変位は一定となるが、両非載荷辺で  $y$  軸方向に膜応力



$\sigma_{my}$ が生じる。ただし、この合力は0である。他方、条件(b)の場合、両非載荷辺はy軸方向に自由に変位する。

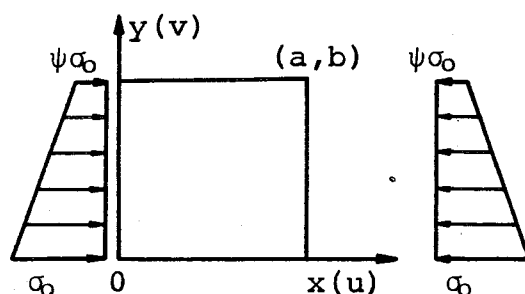


図-3.1 圧縮と面内曲げを受ける長方形板

### 3.2.3 初期たわみと付加面外たわみの仮定

y軸方向の初期たわみ形状が面外有限変形に与える影響を調べるために次の初期たわみと付加面外たわみを仮定する。

$$w_0 = \sin \frac{\pi x}{a} \left( e_{01} \sin \frac{\pi y}{b} + e_{02} \sin \frac{2\pi y}{b} \right) \quad (3.8)$$

$$w = \sin \frac{\pi x}{a} \left( e_1 \sin \frac{\pi y}{b} + e_2 \sin \frac{2\pi y}{b} \right) \quad (3.9)$$

ここに、 $e_{01}$ 、 $e_{02}$ ：初期たわみモード成分で既知定数、

$e_1$ 、 $e_2$ ：付加面外たわみモード成分で未知定数。

式(3.9)は式(3.4)の境界条件を満足する。

### 3.2.4 条件(a)に対する応力関数

式(3.8)、(3.9)を式(3.1)へ代入すると次式が得られる。

$$\begin{aligned} \nabla^4 F = & \frac{\pi^4 E}{a^2 b^2} \left\{ -\frac{1}{4} q_3 \cos \frac{\pi y}{b} + \frac{1}{2} q_1 \cos \frac{2\pi y}{b} + \frac{9}{4} q_3 \cos \frac{3\pi y}{b} + 2q_2 \cos \frac{4\pi y}{b} \right. \\ & \left. + \cos \frac{2\pi x}{a} \left( \frac{1}{2} q_1 + 2q_2 + \frac{9}{4} q_3 \cos \frac{\pi y}{b} - \frac{1}{4} q_3 \cos \frac{3\pi y}{b} \right) \right\} \end{aligned} \quad (3.10)$$

ここに、

$$\begin{aligned} q_1 &= (e_{01} + e_1)^2 - e_{01}^2, & q_2 &= (e_{02} + e_2)^2 - e_{02}^2, \\ q_3 &= (e_{01} + e_1)(e_{02} + e_2) - e_{01}e_{02} \end{aligned}$$

応力関数  $F$  の特解を  $F_s$  とすると、式(3.10)から  $F_s$  は次のように与えられる。

$$\begin{aligned} F_s &= \frac{1-\nu^2}{\pi^2} \frac{b^4}{a^2} \sigma_e \left\{ \frac{3}{8} \frac{q_1}{t_w^2} \cos \frac{2\pi y}{b} + \frac{3}{32} \frac{q_2}{t_w^2} \cos \frac{4\pi y}{b} - 3 \frac{q_3}{t_w^2} \left( \cos \frac{\pi y}{b} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \frac{1}{9} \cos \frac{3\pi y}{b} \right) \right\} + \frac{1-\nu^2}{\pi^2} b^2 \sigma_e \cos \frac{2\pi x}{a} \left\{ \frac{3}{8} \frac{a^2}{b^2} \frac{q_1 + 4q_2}{t_w^2} \right. \\ &\quad \left. + 3 \frac{q_3}{t_w^2} \left( \frac{9}{\theta_1} \cos \frac{\pi y}{b} - \frac{1}{\theta_2} \cos \frac{3\pi y}{b} \right) \right\} \end{aligned} \quad (3.11)$$

ここに、

$$\theta_1 = \left( 4 \frac{b}{a} + \frac{a}{b} \right)^2, \quad \theta_2 = \left( 4 \frac{b}{a} + 9 \frac{a}{b} \right)^2$$

応力関数  $F$  の同次解を  $F_1$  とすると、 $F$  が条件(a)を満足しなければならないことから  $F_1$  に対して次式を与える。

$$\begin{aligned} F_1 &= -\frac{1}{3} \left\{ -\frac{1-\psi}{2} \sigma_0 + (1-\nu^2) h_1 \frac{q_3}{t_w^2} \sigma_e \right\} \frac{y^3}{b} \\ &\quad + \frac{1}{2} \left\{ -\sigma_0 + (1-\nu^2) h_1 \frac{q_3}{t_w^2} \sigma_e \right\} y^2 \end{aligned} \quad (3.12)$$

ここで、 $h_1$  : 係数

したがって、条件(a)を満足する応力関数は

$$F = F_s + F_1 \quad (3.13)$$

で与えられ、係数  $h_1$  は式(3.13)が式(3.5)と(3.6)の境界条件を満足しなければならないことから決定され、次のようになる。

$$h_1 = \frac{72}{\pi^2} \left\{ -\frac{4}{9} \frac{b^2}{a^2} + \frac{1}{2} \left( \frac{9}{\theta_1} - \frac{1}{\theta_2} \right) \right\}$$

各膜応力成分はそれぞれ次式で与えられる。

$$\begin{aligned}
\frac{\sigma_{mx}}{\sigma_e} &= -2 \left\{ -\frac{1-\nu}{2} \frac{\sigma_0}{\sigma_e} + (1-\nu^2) h_1 \frac{q_3}{t_w^2} \right\} \frac{y}{b} - \frac{\sigma_0}{\sigma_e} + (1-\nu^2) h_1 \frac{q_3}{t_w^2} \\
&\quad - \frac{3}{2} (1-\nu^2) \frac{b^2}{a^2} \left\{ \frac{q_1}{t_w^2} \cos \frac{2\pi y}{b} + \frac{q_2}{t_w^2} \cos \frac{4\pi y}{b} - 2 \frac{q_3}{t_w^2} \left( \cos \frac{\pi y}{b} \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - \cos \frac{3\pi y}{b} \right) \right\} - 27(1-\nu^2) \frac{q_3}{t_w^2} \left( \frac{1}{\theta_1} \cos \frac{\pi y}{b} - \frac{1}{\theta_2} \cos \frac{3\pi y}{b} \right) \cos \frac{2\pi x}{a} \\
\frac{\sigma_{my}}{\sigma_e} &= -\frac{3}{2} (1-\nu^2) \left\{ \frac{q_1 + 4q_2}{t_w^2} + 8 \frac{b^2}{a^2} \frac{q_3}{t_w^2} \left( \frac{9}{\theta_1} \cos \frac{\pi y}{b} \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - \frac{1}{\theta_2} \cos \frac{3\pi y}{b} \right) \right\} \cos \frac{2\pi x}{a} \\
\frac{\tau_{mxy}}{\sigma_e} &= -18(1-\nu^2) \frac{b}{a} \frac{q_3}{t_w^2} \left( \frac{3}{\theta_1} \sin \frac{\pi y}{b} - \frac{1}{\theta_2} \sin \frac{3\pi y}{b} \right) \sin \frac{2\pi x}{a}
\end{aligned}
\tag{3.14}$$

載荷辺の x 軸方向の変位 u について考える。x 軸方向の膜ひずみと膜応力の関係、そして膜ひずみと変位の関係は式(2.9)と(2.5)からそれぞれ次のように与えられる。

$$\varepsilon_{mx} = \frac{1}{E} (\sigma_{mx} - \nu \sigma_{my})
\tag{3.15}$$

$$\varepsilon_{mx} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w_0}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2
\tag{3.16}$$

式(3.15)と(3.16)のそれぞれ右辺を等号で結び、これに式(3.8)、(3.9)、(3.14)を代入し、x について積分を行い、 $u(a/2, y) = 0$  の条件を用いると、辺  $x=0$  と  $a$  における変位が次のように求められる。

$$\frac{u(0, y)}{\frac{a}{2}} = -\frac{u(a, y)}{\frac{a}{2}} = u_c + u_b \left( 1 - 2 \frac{y}{b} \right)
\tag{3.17}$$

ここに

$$u_c = \frac{1+\psi}{2} \frac{\sigma_0}{E} + \frac{\pi^2}{8} \frac{b^2}{a^2} \frac{t_w^2}{b^2} \left( \frac{q_1}{t_w^2} + \frac{q_2}{t_w^2} \right)$$

$$u_b = \frac{1-\psi}{2} \frac{\sigma_0}{E} - \frac{\pi^2}{12} \frac{t_w^2}{b^2} h_1 \frac{q_3}{t_w^2}$$

式(3.17)は載荷辺が直線を保って変位することを示している。また、 $\phi = -1$ の純面内曲げの場合でも一様圧縮変位として

$$u_c = \frac{\pi^2}{8} \frac{b^2}{a^2} \frac{t_w^2}{b^2} \left( \frac{q_1}{t_w^2} + \frac{q_2}{t_w^2} \right)$$

が生じる。

### 3.2.5 条件(b)に対する応力関数

条件(b)の場合、応力関数Fの同次解としてF<sub>1</sub>の他にさらに次の同次解を使用する。

$$\begin{aligned} F_2 = & (1-\nu^2) h_2 \frac{q_3}{t_w^2} \sigma_e \left( \frac{1}{2} y^2 - \frac{1}{3} \frac{y^3}{b} \right) + (1-\nu^2) \frac{a^2}{4\pi^2} \sigma_e \times \\ & \left( H_1 \cosh \frac{2\pi y}{a} + H_2 \sinh \frac{2\pi y}{a} + H_3 \frac{2\pi y}{a} \cosh \frac{2\pi y}{a} \right. \\ & \left. + H_4 \frac{2\pi y}{a} \sinh \frac{2\pi y}{a} \right) \cos \frac{2\pi x}{a} \end{aligned} \quad (3.18)$$

したがって、条件(b)を満足する応力関数は

$$F = F_s + F_1 + F_2 \quad (3.19)$$

で与えられ、係数h<sub>2</sub>、H<sub>1</sub>、H<sub>2</sub>、H<sub>3</sub>、H<sub>4</sub>は、式(3.19)が式(3.5)と(3.7)の境界条件を満足しなければならないことから定められ、次のようになる。

$$h_2 = -\frac{36}{\pi^2} \left( \frac{9}{\theta_1} - \frac{1}{\theta_2} \right)$$

$$H_1 = -\frac{3}{2} \frac{q_1 + 4q_2}{t_w^2} - 12 \frac{b^2}{a^2} \frac{q_3}{t_w^2} \left( \frac{9}{\theta_1} - \frac{1}{\theta_2} \right)$$

$$\begin{aligned}
H_2 = -H_3 &= \frac{3}{2} \frac{q_1 + 4q_2}{t_w^2} \frac{\cosh \frac{2\pi b}{a} - 1}{\sinh \frac{2\pi b}{a} + \frac{2\pi b}{a}} \\
&+ 12 \frac{b^2}{a^2} \frac{q_3}{t_w^2} \left( \frac{9}{\theta_1} - \frac{1}{\theta_2} \right) \frac{\cosh \frac{2\pi b}{a} + 1}{\sinh \frac{2\pi b}{a} - \frac{2\pi b}{a}} \\
H_4 &= \frac{3}{2} \frac{q_1 + 4q_2}{t_w^2} \frac{\sinh \frac{2\pi b}{a}}{\sinh \frac{2\pi b}{a} + \frac{2\pi b}{a}} \\
&+ 12 \frac{b^2}{a^2} \frac{q_3}{t_w^2} \left( \frac{9}{\theta_1} - \frac{1}{\theta_2} \right) \frac{\sinh \frac{2\pi b}{a}}{\sinh \frac{2\pi b}{a} - \frac{2\pi b}{a}}
\end{aligned}$$

同次解  $F_2$  から次の各膜応力が生じる。

$$\frac{\sigma_{mxh}}{\sigma_e} = (1 - \nu^2) \left[ h_2 \frac{q_3}{t_w^2} \left( 1 - 2 \frac{y}{b} \right) + \left\{ (H_1 + 2H_4) \cosh \frac{2\pi y}{a} \right. \right. \\
\left. \left. + H_3 \left( \sinh \frac{2\pi y}{a} + \frac{2\pi y}{a} \cosh \frac{2\pi y}{a} \right) + H_4 \frac{2\pi y}{a} \sinh \frac{2\pi y}{a} \right\} \cos \frac{2\pi x}{a} \right]$$

$$\frac{\sigma_{myh}}{\sigma_e} = -(1 - \nu^2) \left\{ H_1 \cosh \frac{2\pi y}{a} - H_3 \left( \sinh \frac{2\pi y}{a} - \frac{2\pi y}{a} \cosh \frac{2\pi y}{a} \right) \right. \\
\left. + H_4 \frac{2\pi y}{a} \sinh \frac{2\pi y}{a} \right\} \cos \frac{2\pi x}{a}$$

$$\frac{\tau_{mxyh}}{\sigma_e} = (1 - \nu^2) \left\{ (H_1 + H_4) \sinh \frac{2\pi y}{a} + H_3 \frac{2\pi y}{a} \sinh \frac{2\pi y}{a} \right. \\
\left. + H_4 \frac{2\pi y}{a} \cosh \frac{2\pi y}{a} \right\} \sin \frac{2\pi x}{a}$$

(3. 20)

載荷辺の  $x$  軸方向の変位  $u$  が前項と同様にしてもとめられ、式(3. 17)と同じ形式のものが得られる。ただし、 $u_b$  は次のようになる。

$$u_b = \frac{1 - \psi}{2} \frac{\sigma_0}{E} - \frac{\pi^2}{12} \frac{t_w^2}{b^2} (h_1 + h_2) \frac{q_3}{t_w^2}$$

### 3. 2. 6 Galerkin法による定式化

Galerkin 法に基づいて、次式から  $\sigma_0$  と付加面外たわみモード成分  $e_1$  と  $e_2$  の関係を決定する。

$$\left. \begin{aligned} \int_0^a \int_0^b (D_w \nabla^4 w - p) \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b} dx dy &= 0 \\ \int_0^a \int_0^b (D_w \nabla^4 w - p) \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{2\pi y}{b} dx dy &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (3.21)$$

条件(a)の場合は式(3.8)、(3.9)、(3.13)、条件(b)の場合は式(3.8)、(3.9)、(3.19)を式(3.21)へ代入して、それぞれ積分を行なうと次の連立方程式が得られる。

$$\begin{aligned} & \left( \frac{1+\psi}{2} \frac{e_{01} + e_1}{t_w} + \frac{32}{9\pi^2} \frac{1-\psi}{2} \frac{e_{02} + e_2}{t_w} \right) \frac{\sigma_0}{\sigma_e} = \\ & \theta_3 \frac{e_1}{t_w} + (1-\nu^2) \left\{ \frac{3}{4} \theta_5 \frac{q_1(e_{01} + e_1)}{t_w^3} + 3\theta_7 \frac{q_2(e_{01} + e_1)}{t_w^3} \right. \\ & \left. + 3\theta_8 \frac{q_3(e_{02} + e_2)}{t_w^3} \right\} \end{aligned} \quad (3.22)$$

$$\begin{aligned} & \left( \frac{1+\psi}{2} \frac{e_{02} + e_2}{t_w} + \frac{32}{9\pi^2} \frac{1-\psi}{2} \frac{e_{01} + e_1}{t_w} \right) \frac{\sigma_0}{\sigma_e} = \\ & \theta_4 \frac{e_2}{t_w} + (1-\nu^2) \left\{ \frac{3}{4} \theta_6 \frac{q_2(e_{02} + e_2)}{t_w^3} + 3\theta_7 \frac{q_1(e_{02} + e_2)}{t_w^3} \right. \\ & \left. + 3\theta_8 \frac{q_3(e_{01} + e_1)}{t_w^3} \right\} \end{aligned} \quad (3.23)$$

ここで、係数 $\theta_3 \sim \theta_8$ は

$$\theta_3 = \left( \frac{a}{b} + \frac{b}{a} \right)^2, \quad \theta_4 = \left( 4\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \right)^2, \quad \theta_5 = \left( \frac{a}{b} \right)^2 + \left( \frac{b}{a} \right)^2 - J_1$$

$$\theta_6 = 16\left( \frac{a}{b} \right)^2 + \left( \frac{b}{a} \right)^2 - 16J_1, \quad \theta_7 = \left( \frac{a}{b} \right)^2 - J_1$$

$$\theta_8 = \left( \frac{b}{a} \right)^2 + \frac{81}{4\theta_1} + \frac{1}{4\theta_2} + \frac{32}{27\pi^2} h_1 - J_2$$

であり、

条件(a)の場合

$$J_1 = J_2 = 0$$

条件(b)の場合

$$J_1 = \frac{2}{\pi} \left(\frac{a}{b}\right)^3 \frac{\cosh \frac{2\pi b}{a} - 1}{\sinh \frac{2\pi b}{a} + \frac{2\pi b}{a}}$$

$$J_2 = -\frac{32}{27\pi^2} h_2 + \frac{16}{\pi} \frac{b}{a} \left(\frac{9}{\theta_1} - \frac{1}{\theta_2}\right)^2 \frac{\cosh \frac{2\pi b}{a} + 1}{\sinh \frac{2\pi b}{a} - \frac{2\pi b}{a}}$$

である。式(3.22)と(3.23)から $\sigma_o/\sigma_e$ を消去すると、 $e_1$ と $e_2$ の関係式が得られる。この式は4次式になるので、Ferrariの公式により $e_1$ あるいは $e_2$ のどちらかについて解くことができる。

### 3.2.7 実験結果との比較

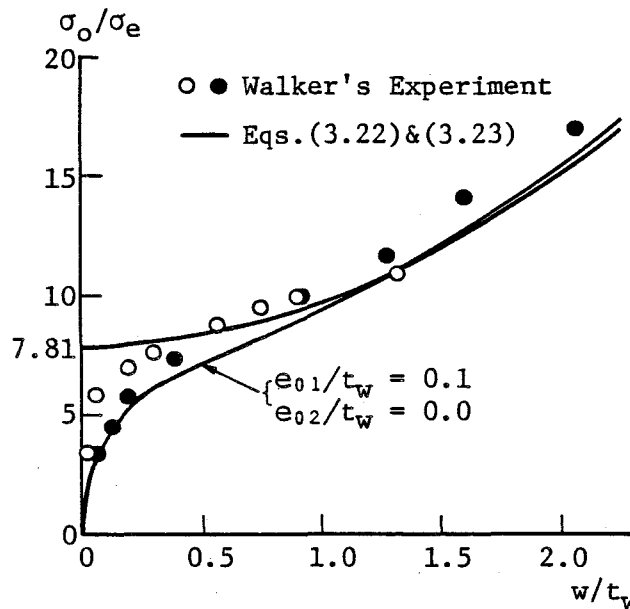


図-3.2 荷重と面外たわみの関係( $\phi = 0$ )

荷重と面外たわみの関係について、式(3.22)と(3.23)が与える結果と Walker の実験結果との比較を図-3.2に示す。載荷状態は $\phi = 0$ であり、非載荷辺の面内方向の境界条件は条件(b)である。Walkerが実験で用いた長方形板は $a/b = 2$ で、面外たわみの形状が載荷方向に1波形であったので、式(3.22)と(3.23)においては $a/b = 1$ として計算を行なう。後の3.3.3項で述べる最大面外たわみの生じる位置を考

慮して、計算結果については(0.5 a, 0.45 b)の位置の付加面外たわみが示してある。Walkerの実験では板厚の0.1倍以下の初期たわみが確認されており、測定値が付加面外たわみか全面外たわみか不明である。図から、計算結果は実験結果と同じような傾向を示し、座屈荷重の付近で面外たわみが急激に増加することがわかる。

### 3. 3 圧縮と面内曲げを受ける長方形板の面外有限変形の特 性

#### 3. 3. 1 座屈係数と座屈時の $e_2$ と $e_1$ の比 $(e_2/e_1)_{cr}$

式(3.22)と(3.23)において  $e_{01}$  と  $e_{02}$  を0とし、 $e_1$  と  $e_2$  の2次以上の項を無視して、 $e_1$  と  $e_2$  の係数が作る行列式を0とすることにより、次の座屈係数を得る。

$$k_{cr} = \frac{\frac{1+\psi}{32}(\theta_3 + \theta_4) - \sqrt{\frac{(1+\psi)^2}{1024}(\theta_3 - \theta_4)^2 + \frac{4}{81} \frac{(1-\psi)^2}{\pi^4} \theta_3 \theta_4}}{\frac{(1+\psi)^2}{32} - \frac{32}{81} \frac{(1-\psi)^2}{\pi^4}} \quad (3.24)$$

式(3.24)は文献[8]のP. 376の式(i)に一致する。

他方、座屈時における  $e_2$  と  $e_1$  の比  $(e_2/e_1)_{cr}$  が次式で与えられる。

$$\left(\frac{e_2}{e_1}\right)_{cr} = -\frac{9\pi^2}{64} \frac{1+\psi}{1-\psi} \left(1 - \frac{\theta_3}{\theta_4}\right) + \sqrt{\frac{81\pi^4}{4096} \left(\frac{1+\psi}{1-\psi}\right)^2 \left(1 - \frac{\theta_3}{\theta_4}\right)^2 + \frac{\theta_3}{\theta_4}} \quad (3.25)$$

$\psi$  に対する  $k_{cr}$  の値および  $(e_2/e_1)_{cr}$  の値をそれぞれ表-3.1、3.2に示す。

表-3.1  $k_{cr}$  の値

a/b \ \psi	0.5	0.75	1.0
1.0	6.25	4.34	4.0
0.5	8.26	5.76	5.32
0.0	11.64	8.37	7.81
-0.5	17.41	13.76	13.53
-1.0	27.76	25.06	27.76

表-3.2  $(e_2/e_1)_{cr}$  の値

a/b \ \psi	0.5	0.75	1.0
1.0	.0	.0	.0
0.5	.0758	.0359	.0228
0.0	.2059	.1033	.0667
-0.5	.4037	.2424	.1691
-1.0	.625	.4808	.4



### 3.3.2 比 $e_2/e_1$ の極限值 $(e_2/e_1)_\infty$

式(3.22)と(3.23)から  $\sigma_0/\sigma_e$  を消去し、 $e_1$  を無限に大きくすると、比  $e_2/e_1$  は次式を満足する極限值  $(e_2/e_1)_\infty$  に収束する。

$$\begin{aligned} & \frac{32}{9\pi^2} \theta_6 \frac{1-\psi}{2} \left(\frac{e_2}{e_1}\right)_\infty^4 + \{\theta_6 - 4(\theta_7 + \theta_8)\} \frac{1+\psi}{2} \left(\frac{e_2}{e_1}\right)_\infty^3 \\ & - \{\theta_5 - 4(\theta_7 + \theta_8)\} \frac{1+\psi}{2} \left(\frac{e_2}{e_1}\right)_\infty - \frac{32}{9\pi^2} \theta_5 \frac{1-\psi}{2} = 0 \end{aligned} \quad (3.26)$$

式(3.26)の根のうち実根で正の最小のものを表-3.3に示す。このような値が存在することは、荷重が増加すると初期たわみにかかわらず、面外たわみの形状が特定のたわみ形状に収束することを示している。

表-3.3  $(e_2/e_1)_\infty$  の値

a/b \ \psi	Condition (a)			Condition (b)		
	0.5	0.75	1.0	0.5	0.75	1.0
1.0	.0	.0	.0	.0	.0	.0
0.5	.0651	.0409	.0289	.0735	.0604	.0516
0.0	.1984	.1223	.0862	.2259	.1802	.1520
-0.5	.5664	.3377	.2413	.6435	.4600	.3762
-1.0	.8537	.6826	.5857	.8873	.7515	.6644

### 3.3.3 最大面外たわみの生じる位置

最大面外たわみは  $x = a/2$  上に生じ、 $x$  軸からの位置は  $\partial(w_0 + w)/\partial y = 0$  より次式で与えられる。

$$\frac{y_0}{b} = \frac{1}{\pi} \cos^{-1} \left[ - \frac{\frac{e_{01}}{e_1} + 1}{8 \left( \frac{e_{02}}{e_1} + \frac{e_2}{e_1} \right)} + \sqrt{\frac{1}{64} \left( \frac{e_{01}}{e_1} + 1 \right)^2 + \frac{1}{2}} \right] \quad (3.27)$$

式(3.25)あるいは式(3.26)を式(3.27)を代入すると、座屈時および荷重が増加したときの最大面外たわみの生じる位置  $y_0/b$  が求められる。これを表-3.4に示す。最大面外たわみは純圧縮を受ける場合に板中央に生じ、純面内曲げを受ける場合には圧縮縁から板幅の約0.3倍の位置に生じる。圧縮と面内曲げを受ける場合には最大面外

たわみは両者の位置の間に生じる。

表-3.4  $y_0/b$  の値

In the case of $(e_2/e_1)_{cr}$						
a/b \ ψ	0.5	0.75	1.0			
1.0	.5	.5	.5			
0.5	.4536	.4774	.4855			
0.0	.3947	.4387	.4588			
-0.5	.3470	.3830	.4084			
-1.0	.3204	.3358	.3476			

In the case of $(e_2/e_1)_\infty$						
a/b \ ψ	Condition (a)			Condition (b)		
	0.5	0.75	1.0	0.5	0.75	1.0
1.0	.5	.5	.5	.5	.5	.5
0.5	.4598	.4743	.4817	.4550	.4625	.4678
0.0	.3973	.4291	.4478	.3880	.4041	.4155
-0.5	.3259	.3592	.3833	.3188	.3385	.3518
-1.0	.3047	.3157	.3240	.3030	.3108	.3171

### 3.3.4 比 $\sigma_{mx}/\sigma_o$ の局限値 $(\sigma_{mx}/\sigma_o)_\infty$

条件(a)の場合には式(3.14)と式(3.22)から、そして条件(b)の場合にはさらに式(3.20)を考慮して比  $\sigma_{mx}/\sigma_o$  を作り、 $e_1/tw$  を無限に大きくすると、荷重が無限に増加したときの  $\sigma_{mx}$  と  $\sigma_o$  の比  $(\sigma_{mx}/\sigma_o)_\infty$  が得られる。 $\sigma_{mx}$  は条件(a)では点(0, 0)で、そして条件(b)では点(a/2, 0)で最大になる。したがって、条件(a)については点(0, 0)の  $(\sigma_{mx}/\sigma_o)_\infty$  を、そして条件(b)については点(a/2, 0)の  $(\sigma_{mx}/\sigma_o)_\infty$  をそれぞれ次に示す。

条件(a)；

$$\begin{aligned}
 - \left( \frac{\sigma_{mx}}{\sigma_o} \right)_\infty &= 1 + \left[ \frac{3}{2} \frac{b^2}{a^2} \left\{ 1 + \left( \frac{e_2}{e_1} \right)_\infty^2 \right\} + \left\{ -h_1 + 27 \left( \frac{1}{\theta_1} - \frac{1}{\theta_2} \right) \right\} \left( \frac{e_2}{e_1} \right)_\infty \right] \\
 &\times \frac{\frac{1+\psi}{2} + \frac{32}{9\pi^2} \frac{1-\psi}{2} \left( \frac{e_2}{e_1} \right)_\infty}{\frac{3}{4} \theta_5 + 3(\theta_7 + \theta_8) \left( \frac{e_2}{e_1} \right)_\infty^2}
 \end{aligned}$$

条件(b);

$$\begin{aligned}
 - \left( \frac{\sigma_{mx}}{\sigma_o} \right)_{\infty} = & 1 + \left[ \frac{3}{2} \left\{ \frac{b^2}{a^2} + \frac{\sinh \frac{2\pi b}{a} - \frac{2\pi b}{a}}{\sinh \frac{2\pi b}{a} + \frac{2\pi b}{a}} + \left( \frac{b^2}{a^2} + \right. \right. \right. \\
 & \left. \left. \left. 4 \frac{\sinh \frac{2\pi b}{a} - \frac{2\pi b}{a}}{\sinh \frac{2\pi b}{a} + \frac{2\pi b}{a}} \right) \left( \frac{e_2}{e_1} \right)_{\infty}^2 \right\} + \left\{ -h_1 - h_2 - 27 \left( \frac{1}{\theta_1} - \frac{1}{\theta_2} \right) \right. \right. \\
 & \left. \left. + 12 \frac{b^2}{a^2} \left( \frac{9}{\theta_1} - \frac{1}{\theta_2} \right) \frac{\sinh \frac{2\pi b}{a} + \frac{2\pi b}{a}}{\sinh \frac{2\pi b}{a} - \frac{2\pi b}{a}} \right\} \left( \frac{e_2}{e_1} \right)_{\infty} \right] \\
 & \times \frac{\frac{1+\psi}{2} + \frac{32}{9\pi^2} \frac{1-\psi}{2} \left( \frac{e_2}{e_1} \right)_{\infty}}{\frac{3}{4} \theta_5 + 3(\theta_7 + \theta_8) \left( \frac{e_2}{e_1} \right)_{\infty}^2} \quad (3.28)
 \end{aligned}$$

式(3.26)を式(3.28)へ代入すると、 $-(\sigma_{mx}/\sigma_o)_{\infty}$ の値が得られる。これを表-3.5に示す。

比 $\sigma_{mx}/\sigma_o$ は、断面平面保持の仮定による圧縮縁の応力に対する、面外変形のために応力再配分により増加した圧縮縁の応力の増大率を表わしている。したがって、極限值 $(\sigma_{mx}/\sigma_o)_{\infty}$ が存在することは、荷重が増加すると、 $\psi$ の値や境界条件に応じてこの増大率が特定の値に収束することを示している。

表-3.5  $-(\sigma_{mx}/\sigma_o)_{\infty}$ の値

a/b \ \psi	Condition (a)			Condition (b)		
	0.5	0.75	1.0	0.5	0.75	1.0
1.0	2.882	2.519	2.0	3.398	3.673	3.831
0.5	2.606	2.235	1.791	3.127	3.311	3.385
0.0	2.325	1.947	1.582	2.871	2.964	2.953
-0.5	2.001	1.646	1.369	2.575	2.581	2.503
-1.0	1.667	1.377	1.188	2.106	2.086	1.996

### 3. 4 結 論

初期たわみと付加面外たわみをそれぞれ式(3. 8)と(3. 9)で仮定して、Marguerreの板の基礎微分方程式にGalerkin法を適用することにより、圧縮と面内曲げを受ける長方形板の荷重と面外たわみの関係を式(3. 22)と(3. 23)で与えた。これらの式から以下のことが明らかになった。

- (1) 荷重が増加すると、初期たわみにかかわらず面外たわみ形状は特定のたわみ形状に収束する。
- (2) 最大面外たわみは純圧縮を受ける場合に板の中央に生じ、純面内曲げを受ける場合には圧縮縁から板幅の約0. 3倍の位置に生じる。圧縮と面内曲げを受ける場合には最大面外たわみは両者の位置の間に生じる。
- (3) 断面平面保持の仮定から得られる圧縮縁の応力に対する、面外変形に起因する応力再配分により増加した圧縮縁の応力の比率は、荷重が増加すると特定の値に収束する。

## 参 考 文 献

- 1) Parsanejad, S. and A. Ostapenko : On the fatigue strength of unsymmetrical steel plate girders, WRC, Bull. No. 156, Nov., 1970.
- 2) Marguerre, K. : Zur Theorie der gekrümmter Platte grosser Formänderung, Proc. 5th International Congress for Applied Mechanics, Cambridge, pp. 93 - 101, 1938.
- 3) Coan, J.M. : Large-deflection theory for plates with small initial curvature loaded in edge compression, J. of Applied Mechanics, Vol. 18, pp. 143 - 151, 1951.
- 4) Yamaki, N. : Postbuckling behavior of rectangular plates with small initial curvature loaded in edge compression, J. of Applied Mechanics, Vol. 26, pp. 407 - 414, 1959 and Vol. 27, pp. 335 - 342, 1960.
- 5) Walker, A.C. : Flat rectangular plates subjected to a linearly-varying edge compressive loading, Thin-Walled Structures, edited by A.H. Chilver, Chatto & Windus, London, pp. 208 - 247, 1967.
- 6) Rhodes, J. and J.M. Harvey : Examination of plate post-buckling behavior, Proc. of ASCE, Vol. 103, No. EM3, pp. 461 - 478, 1977.
- 7) 日本数学会 : 岩波数学辞典第2版, 岩波書店, p. 889, 1968
- 8) Timoshenko, S.P. and J.M. Gere : Theory of Elastic Stability, 2nd edition, McGraw-Hill, pp. 373 - 379, 1961.

# 第4章 圧縮を受ける長方形板の荷重と 2次曲げ応力の関係の定式化

## 4. 1 概 説

本章では、圧縮を受ける長方形板について、その荷重と2次曲げ応力の関係を定式化する方法を示す。さらに、ウェブに存在する残留応力が両者の関係に与える影響を明らかにする。

なお、本章で得られた圧縮を受ける長方形板の荷重と2次曲げ応力の関係は、水平補剛材を有するプレートガーダーの1型疲労亀裂に対して、200万回疲労強度を与えるために第6章で使用される。

## 4. 2 圧縮を受ける長方形板の面外有限変形の定式化

### 4. 2. 1 4辺単純支持された場合の荷重と面外たわみの関係

図-4. 1に示すように、面外方向に4辺単純支持された $a \times b$ の長方形板が $x$ 軸方向に圧縮を受けている。初期たわみ $w_0$ と付加面外たわみ $w$ をそれぞれ次のように仮定する。

$$w_0 = e_0 \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b} \quad (4. 1)$$

$$w = e \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b} \quad (4. 2)$$

ここに、 $e_0$ ：初期たわみを表わす既知定数、

$e$ ：付加面外たわみを表わす未知定数

このような初期たわみと付加面外たわみに対して、式(3. 22)から4辺単純支持され

た圧縮板の荷重と面外たわみの関係が次式で与えられる。

$$\frac{\sigma_o}{\sigma_e} = \left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right)^2 \frac{e}{e_o + e} + \frac{3}{4}(1 - \nu^2) \quad (4.3)$$

$$\times \left\{ \left(\frac{a}{b}\right)^2 + \left(\frac{b}{a}\right)^2 - J \right\} \left\{ \left(\frac{e}{t_w}\right)^2 + 2 \frac{e_o}{t_w} \frac{e}{t_w} \right\}$$

ここでJは次のとおりである。

$$J = \begin{cases} \frac{2}{\pi} \left(\frac{a}{b}\right)^3 \frac{\cosh \frac{2\pi b}{a} - 1}{\sinh \frac{2\pi b}{a} + \frac{2\pi b}{a}} & \text{両非載荷辺が面内方向に自由に} \\ & \text{変位する場合} \\ 0 & \text{両非載荷辺が面内方向に直線を} \\ & \text{保って変位する場合} \end{cases}$$

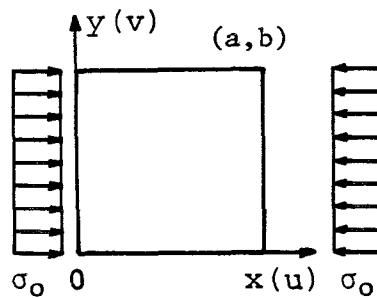


図-4.1 圧縮を受ける長方形板

#### 4.2.2 載荷条件が面外有限変形に与える影響

2.3.8項の有限要素法による圧縮板の面外有限変形の解析で、載荷条件によってその面外有限変形が異なることを示した。式(4.3)が与える荷重と面外たわみの関係は、3.2節で明らかにしたように、載荷辺が一様変位を保って変位する載荷条件に対応する。したがって、式(4.3)の $\sigma_o$ は載荷辺に生じる膜応力 $\sigma_{mx}$ を載荷辺に沿って平均したものである。

次に、載荷辺で膜応力 $\sigma_{mx}$ が一様分布する載荷条件に対して、荷重と面外たわみの関係を誘導する。

式(4.1)と(4.2)を Marguerreの板の微分方程式<sup>1)</sup>のうちのひずみの適合条件式

(3. 1)に代入する。この微分方程式において応力関数  $F$  の特解を  $F_s$  とすると、 $F_s$  は次のように与えられる。

$$F_s = \frac{3}{8} \frac{1-\nu^2}{\pi^2} \frac{b^4}{a^2} \sigma_e \frac{q}{t_w^2} \cos \frac{2\pi y}{b} + \frac{3}{8} \frac{1-\nu^2}{\pi^2} a^2 \sigma_e \frac{q}{t_w^2} \cos \frac{2\pi x}{a} \quad (4. 4)$$

ここに

$$q = (e_0 + e)^2 - e_0^2$$

応力関数  $F$  の同次解として次式を使用する。

$$F_3 = -\frac{1}{2} \sigma_0 y^2 + \left( H_1 \cosh \frac{2\pi x}{b} + H_2 \sinh \frac{2\pi x}{b} + H_3 \frac{2\pi x}{b} \cosh \frac{2\pi x}{b} + H_4 \frac{2\pi x}{b} \sinh \frac{2\pi x}{b} \right) \cos \frac{2\pi y}{b} \quad (4. 5)$$

ここに、 $H_1$ 、 $H_2$ 、 $H_3$ 、 $H_4$  : 係数

載荷辺で膜応力  $\sigma_{mx}$  が一様分布する載荷条件を満足する応力関数は

$$F = F_s + F_3 \quad (4. 6)$$

で与えられ、係数  $H_1$ 、 $H_2$ 、 $H_3$ 、 $H_4$  は、 $x=0$  と  $a$  で

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{mx} &= \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = -\sigma_0 = \text{constant} \\ \tau_{mxy} &= -\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = 0 \end{aligned} \right\} \quad (4. 7)$$

から決定され、それぞれ次のようになる。

$$H_1 = -\frac{3}{8\pi^2} (1-\nu^2) \frac{b^4}{a^2} \sigma_e \frac{q}{t_w^2}$$

$$H_2 = -H_3 = -H_1 \frac{\cosh(2\pi a/b) - 1}{\sinh(2\pi a/b) + 2\pi a/b}$$



$$H_4 = -H_1 \frac{\sinh(2\pi a/b)}{\sinh(2\pi a/b) + 2\pi a/b}$$

式(4.1), (4.2), (4.6)をMarguerreの板の微分方程式のうちの釣り合い条件式(3.2)に代入し、これにGalerkin法を適用すると、荷重と面外たわみの関係が求められ、式(4.3)と同じ形式のものが得られる。ただし、Jは次のようになる。

$$J = \frac{2}{\pi} \left(\frac{b}{a}\right)^3 \frac{\cosh(2\pi a/b) - 1}{\sinh(2\pi a/b) + 2\pi a/b}$$

#### 4.2.3 非載荷辺で回転拘束されている場合への拡張

式(4.3)の右辺の各項の性質を調べる。第1項の係数は4辺単純支持された長方形板がx軸方向に半波で座屈するときの座屈係数と同じである。第2項の係数は非載荷辺の面内方向の境界条件および載荷辺の載荷条件に依存する係数である。付加面外たわみeが小さいときには第1項が支配的であり、eが大きくなると第1項は座屈係数に収束し、第2項の増加が著しくなる。

式(4.3)のこれらの特性を考慮して非載荷辺で面外方向に回転拘束されている場合の荷重と面外たわみの関係として次式を仮定する。

$$\frac{\sigma_o}{\sigma_e} = k_{cr} \eta_o + \frac{3}{4} (1 - \nu^2) \theta \xi_o \quad (4.8)$$

ここで

$$\eta_o = \frac{e}{e_o + e}$$

$$\xi_o = \left(\frac{e}{t_w}\right)^2 + 2 \frac{e_o}{t_w} \frac{e}{t_w}$$

$k_{cr}$ は非載荷辺の回転拘束を考慮した座屈係数であり、 $\theta$ は非載荷辺の回転拘束と面内方向の境界条件および載荷辺の載荷条件の影響を受ける係数である。

#### 4.2.4 非載荷辺の回転拘束を考慮した圧縮板の座屈解析<sup>2)</sup>

圧縮板の座屈解析に対する基礎微分方程式は次式で与えられる。

$$D_w \nabla^4 w + \sigma_0 t_w \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0 \quad (4.9)$$

$x = 0, a$  で単純支持の境界条件を満足する面外たわみとして次式を仮定する。

$$w = W \sin \frac{\pi x}{a} \quad (4.10)$$

ここに、 $W: y$  の関数

回転拘束された非載荷辺の境界条件は次のように与えられる。

$$\left. \begin{array}{l} y = 0 \text{ で } w = 0, \\ w = 0, \quad D_w \left( \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) = k_1 \frac{\partial w}{\partial y} \\ y = b \text{ で } w = 0, \\ w = 0, \quad D_w \left( \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) = -k_2 \frac{\partial w}{\partial y} \end{array} \right\} \quad (4.11)$$

ここに、 $k_1, k_2$ : それぞれ回転拘束部材の単位長さ当りの剛性

式(4.10)を式(4.9)に代入し、 $\sin(\pi x/a)$ を消去すると $W(y)$ に関する4階の常微分方程式が得られる。この方程式を式(4.11)の境界条件のもとで解くと次の座屈条件式が得られる。

$$\begin{aligned} & \chi_1 \chi_2 \sqrt{\mu^2 - 1} \left( \frac{1}{\cosh s_1 \cos s_2} - 1 \right) + \\ & (\chi_1 + \chi_2) \frac{\pi \mu b}{a} (\sqrt{\mu + 1} \tan s_2 - \sqrt{\mu - 1} \tanh s_1) \quad (4.12) \\ & + \left\{ \chi_1 \chi_2 + 2 \left( \frac{\pi \mu b}{a} \right)^2 \right\} \tanh s_1 \tan s_2 = 0 \end{aligned}$$

ここに

$$\begin{aligned} \chi_1 &= \frac{k_1 b}{D_w}, & \chi_2 &= \frac{k_2 b}{D_w} \\ s_1 &= \frac{\pi b}{a} \sqrt{\mu + 1}, & s_2 &= \frac{\pi b}{a} \sqrt{\mu - 1}, & \mu &= \frac{a}{b} \sqrt{k_{cr}} \end{aligned}$$

$\chi_1$ と $\chi_2$ は拘束係数である。

#### 4.2.5 $\theta$ の決定

$\theta$  を決定するために有限要素法解析の結果を利用する。計算対称は式(4.1)の初期たわみを有する長方形板で、図-4.2に示すように、板の対称性を考慮して板の半分が72要素に分割されている。非載荷辺は面内方向に自由に変位し、面外方向に対して、次の3つの場合を考慮する。

- (I) 両辺単純支持
- (II) 1辺単純支持・他辺固定支持
- (III) 両辺固定支持

載荷辺は面外方向に対して両辺単純支持とし、面内方向に対して載荷辺が一様変位を保つように強制変位によって与える条件とする。

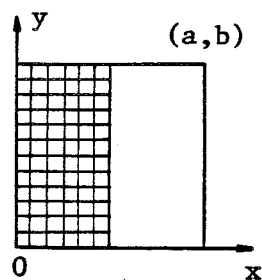


図-4.2 要素分割

有限要素法解析から得られる  $\sigma_o / \sigma_e$  と  $e / t w$  の関係を  $\sigma_o / \sigma_e = k_{cr} \eta_o$  と  $\zeta_o$  に代入すると両者の関係が得られる。図-4.3に示すように両者の間には線形関係が成立しており、この傾きを最小自乗法で決定し、得られた値を  $(3/4)(1-\nu^2)$  で除した値を  $\theta$  の値とする。  $k_{cr}$  と  $\theta$  の値を表-4.1に示す。この表で境界条件(II)の  $a/b = 0.8$  と(III)の  $a/b = 0.668$  はそれぞれの境界条件において最小の座屈係数を与える縦横比である。式(4.8)が与える荷重と面外たわみの関係と有限要素法解析の結果の比較を、両辺固定支持の場合に対して図-4.4に示す。式(4.8)は有限要素法解析の結果をよく近似していることがわかる。

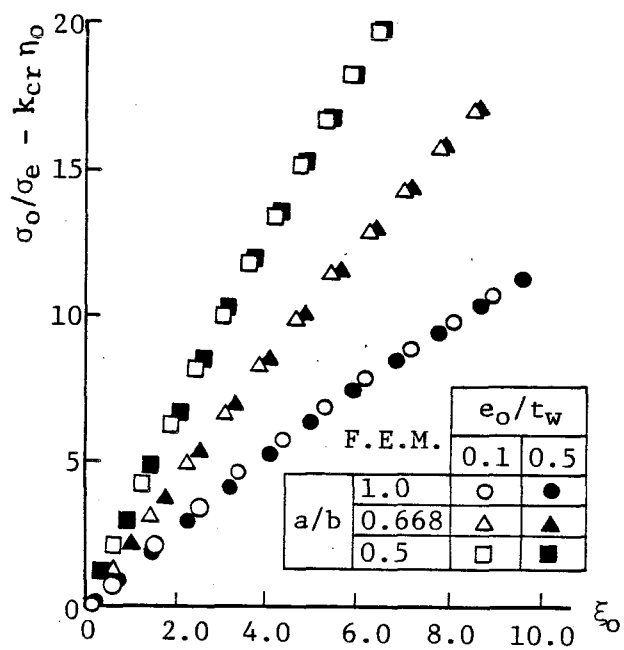


図-4.3  $\sigma_o/\sigma_e - k_{cr}\eta_o$ と $\xi_o$ の関係 [条件(Ⅲ)]

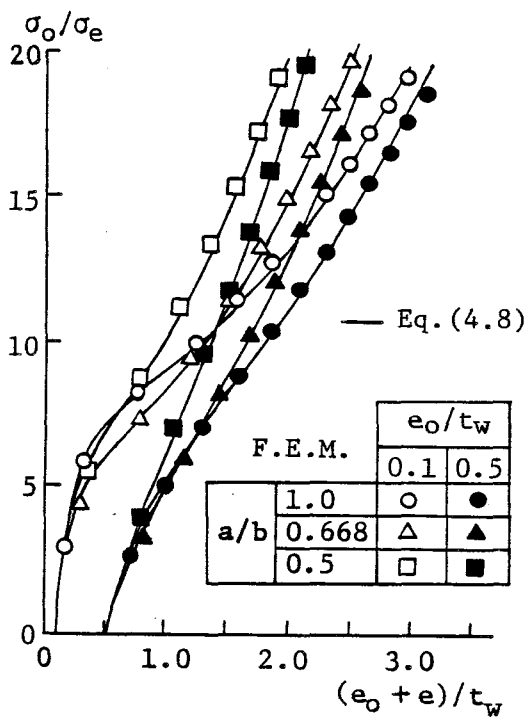


図-4.4 荷重と面外たわみの関係 [条件(Ⅲ)]

表4.1  $k_{cr}$ ,  $\theta$ , S, A, Bの値

	(I)		(II)			(III)		
a/b	0.5	1.0	0.5	0.8	1.0	0.5	0.668	1.0
$k_{cr}$	6.25	4.0	6.85	5.41	5.74	7.69	6.97	8.60
$\theta$	3.26	1.16	3.87	1.97	1.50	4.53	2.95	1.79
S			21.85	17.02	15.68	24.71	21.68	19.28
A			17.39	4.04	1.65	16.62	6.71	1.10
B			12.98	1.98	0.0	15.93	6.95	0.89

#### 4.3 圧縮を受ける長方形板の2次曲げ応力と面外たわみの関係

荷重が小さいときには、付加面外たわみの形状は座屈形状に類似していると考えられる。座屈形状は式(4.10)から次のように与えられる。

$$w = e \frac{W(y)}{W(b/2)} \sin \frac{\pi x}{a} \quad (4.13)$$

他方、2次曲げ応力と付加面外たわみの関係は次式で与えられる。

$$\sigma_b = \frac{6D_w}{t_w^2} \left( \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \Big|_{y=0} \quad (4.14)$$

式(4.13)を式(4.14)へ代入し、 $x = a/2$ とすると、点( $a/2, 0$ )の2次曲げ応力 $\sigma_b$ と板中央の付加面外たわみ $e$ の関係が次のように与えられる。

$$\frac{\sigma_b}{\sigma_e} = S \frac{e}{t_w} \quad (4.15)$$

ここに

$$S = 6\mu \left(\frac{b}{a}\right)^2 \frac{S_1}{S_2}$$

$$S_1 = \sqrt{\mu+1} \sin s_2 - \sqrt{\mu-1} \sinh s_1$$

$$S_2 = \left\{ \sqrt{\mu+1} \cosh \frac{s_1}{2} \sin \frac{s_2}{2} - \sqrt{\mu-1} \sinh \frac{s_1}{2} \cos \frac{s_2}{2} \right\} \\ \times \left\{ \cos \frac{s_2}{2} - \cosh \frac{s_1}{2} \right\} + \frac{1}{\chi_1} \pi \mu \frac{b}{a} \left\{ \sinh \frac{s_1}{2} \sin s_2 - \sinh s_1 \sin \frac{s_2}{2} \right\}$$

Sの値を表-4.1に示す。Sは座屈形状における板中央の単位付加面外たわみに対する2次曲げ応力の増加を与えている。

式(4.15)と有限要素法解析の結果の比較を、両辺固定支持の場合に対して図-4.5に示す。式(4.15)は有限要素法解析の結果に原点で接している。付加面外たわみが増加すると、有限要素法解析の結果と式(4.15)の差が大きくなる。

次に、式(4.15)に補正項を付加することにより、有限要素法解析の結果を近似することを試みる。

有限要素法解析から得られる $\sigma_b/\sigma_e$ と $e/t_w$ の関係を $\sigma_b/\sigma_e - S(e/t_w)$ と $\xi_0$ に代入すると両者の関係が得られる。図-4.6からわかるように、両者の関係は $e$ が小さいときは曲率をもつが、 $e$ が大きくなると直線になり、初期たわみの大きさに影響されなくなる。この性質を考慮して両者の関係を

$$\frac{\sigma_b}{\sigma_e} - S \frac{e}{t_w} = \sqrt{A^2 \xi_0^2 + B_1^2} - B_2 \quad (4.16)$$

で近似する。係数A、 $B_1$ 、 $B_2$ はこの式を変形して次式に最小自乗法を適用して決定する。

$$\xi_0^2 = \frac{1}{A^2} \left( \frac{\sigma_b}{\sigma_e} - S \frac{e}{t_w} \right)^2 + \frac{2B_2}{A^2} \left( \frac{\sigma_b}{\sigma_e} - S \frac{e}{t_w} \right) + \frac{B_2^2 - B_1^2}{A^2} \quad (4.17)$$

$B_1$ と $B_2$ は近い値となり、両者の平均値を $B_1$ と $B_2$ に使用すると、最終的に2次曲げ応力と面外たわみの関係は次式で与えられる。

$$\frac{\sigma_b}{\sigma_e} = S \frac{e}{t_w} + \sqrt{A^2 \xi_0^2 + B^2} - B \quad (4.18)$$

ここに

$$B = (B_1 + B_2)/2$$

係数A、Bの値を表-4.1に示す。式(4.18)が与える2次曲げ応力と面外たわみの関係と有限要素法解析の結果の比較を図-4.7に示す。式(4.18)は有限要素法解析の結果をよく近似していることがわかる。

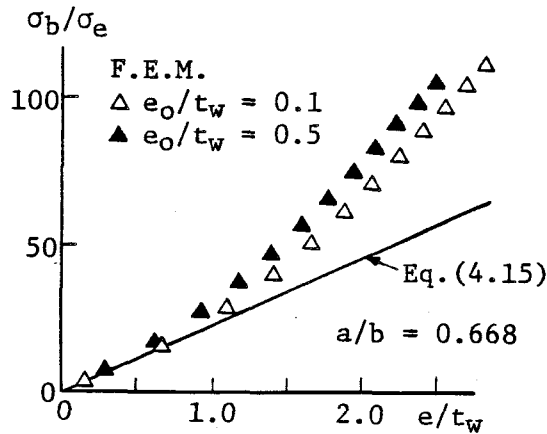


図-4.5 式(4.15)と有限要素法解析の結果の比較 [条件(Ⅲ)]

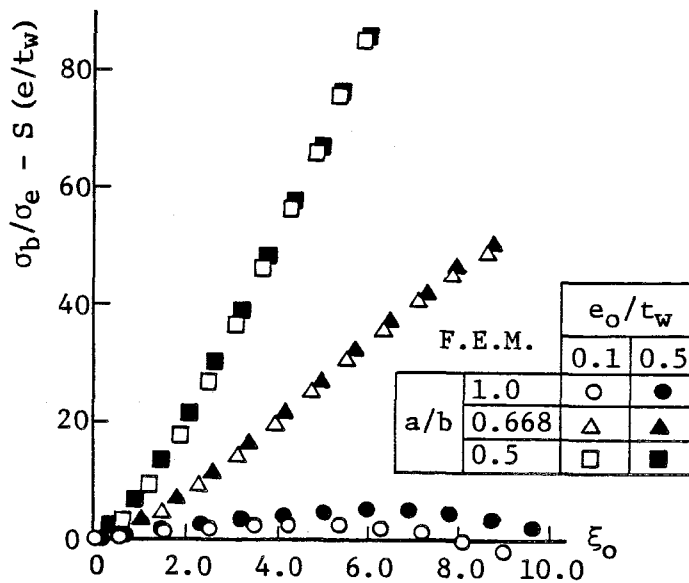


図-4.6  $\sigma_b/\sigma_e - S(e/t_w)$ と $\xi_0$ の関係 [条件(Ⅲ)]

式(4.8), (4.18)が与える $\sigma_0/\sigma_e$ と $\sigma_b/\sigma_e$ の関係と有限要素法解析の結果の比較を、両辺固定支持の場合に対して図-4.8に示す。大きな初期たわみに対する2次曲げ応力の方が小さな初期たわみに対する2次曲げ応力よりも大きい。しかし、荷重が増加すると両者は互いに漸近する。両辺固定支持の場合について、縦横比が2次曲げ応力の増加に与える影響を図-4.9に示す。荷重が小さいときには最小の座屈係数を与える縦横比0.668に対する2次曲げ応力が一番大きい。荷重が増加するとこれより小さい0.5に対する2次曲げ応力の方が大きくなる。

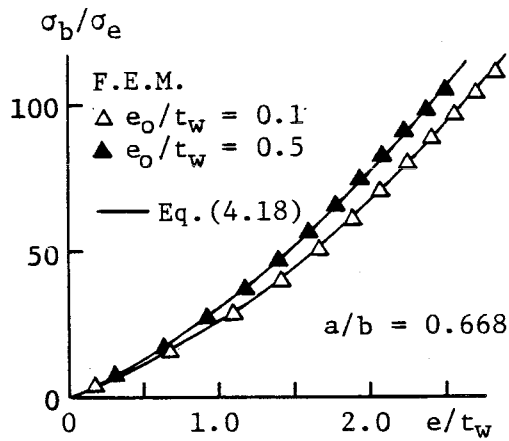


図-4.7 2次曲げ応力と面外たわみの関係 [条件(Ⅲ)]

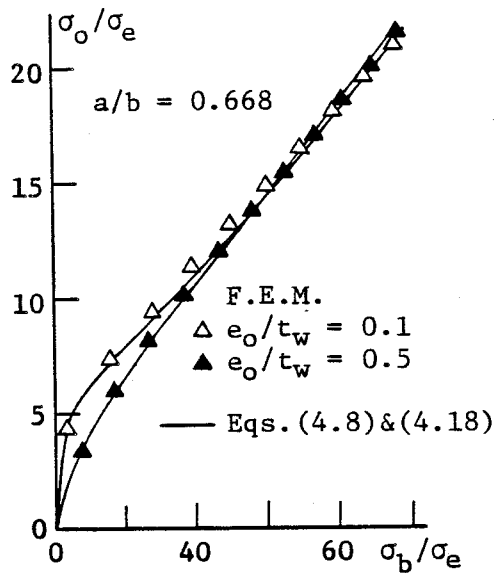


図-4.8 荷重と2次曲げ応力の関係 [条件(Ⅲ)]

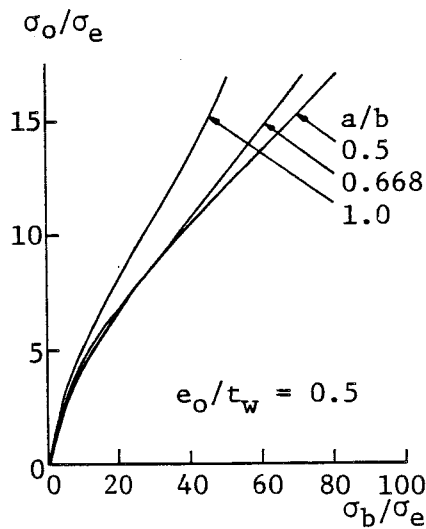


図-4.9 縦横比が2次曲げ応力に与える影響 [条件(Ⅲ)]



## 4. 4 残留応力が荷重と2次曲げ応力の関係に与える影響

### 4. 4. 1 初期たわみと残留応力をともに有する場合の荷重と面外たわみの関係

初期たわみと残留応力をともに有する薄板の面外有限変形に対する基礎微分方程式は次のように与えられる。

$$\begin{aligned} \frac{1}{E} \nabla^4 F = & \left\{ \frac{\partial^2 (w_0 + w)}{\partial x \partial y} \right\}^2 - \frac{\partial^2 (w_0 + w)}{\partial x^2} \frac{\partial^2 (w_0 + w)}{\partial y^2} \\ & - \left\{ \left( \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} \right)^2 - \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \right\} \end{aligned} \quad (4. 19)$$

$$\begin{aligned} \frac{D_w}{t_w} \nabla^4 w = & \left( \frac{\partial^2 F_r}{\partial y^2} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial^2 F_r}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 F_r}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \\ = & \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} \frac{\partial^2 (w_0 + w)}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 (w_0 + w)}{\partial x \partial y} \\ & + \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \frac{\partial^2 (w_0 + w)}{\partial y^2} \end{aligned} \quad (4. 20)$$

ここに、 $F_r$ ：残留応力に対する応力関数

式(4. 19), (4. 20)とMarguerreの基礎微分方程式(3. 1), (3. 2)とを比較すると、式(4. 19), (4. 20)は、Marguerreの基礎微分方程式に残留応力に関する波線部分の項が付加された形式になっている。したがって、式(4. 1)の初期たわみと式(4. 2)の付加面外たわみを仮定した場合、この波線部分の項によって式(4. 3)の右辺に新たに残留応力に関する項が生じる。 $F_r$ に対して、図-4. 10に示すような長方形分布の残留応力を仮定した場合には、式(4. 3)の右辺第1項の係数を

$$\left( \frac{a}{b} + \frac{b}{a} \right)^2 - \frac{\sin(2\pi c/b)}{2\pi c/b} \frac{\sigma_{rc}}{\sigma_e}$$

に置き換えればよい。この係数は式(4. 8)の $k_{cr}$ にのみ関係する。

一般に $F_r$ が $y$ のみの関数で与えられる場合には、式(4. 9)の代りに次式から $k_{cr}$ を決定すればよい。

$$\frac{D_w}{t_w} \nabla^4 w - \left( \frac{\partial^2 F_r}{\partial y^2} - \sigma_0 \right) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0 \quad (4.21)$$

式(4.10)を式(4.21)に代入し、 $\sin(\pi x/a)$ を消去するとWに関する4階の常微分方程式が得られる。この方程式を差分化し、固有値計算を行なうことにより座屈係数 $k_{cr}$ が決定される。図-4.10に示す残留応力に対して式(4.21)から得られる $k_{cr}$ の値を境界条件(Ⅲ)で $a/b = 0.668$ の場合について表-4.2に示す。残留応力が大きくなるに従って $k_{cr}$ は低下する。

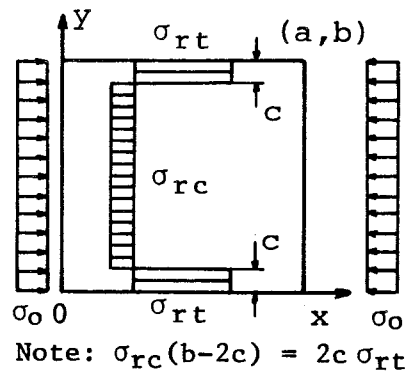


図-4.10 残留応力を有する長方形板

表-4.2  $k_{cr}$ とSに残留応力が与える影響 [条件(Ⅲ)]

c/b	$\sigma_{rc}/\sigma_e$	$k_{cr}$	S
0	0	6.97	21.68
1/12	0.8	6.16	21.47
1/6	2	5.07	20.68
1/6	4	3.20	19.83

a/b = 0.668

#### 4.4.2 初期たわみと残留応力をともに有する場合の2次曲げ応力と面外たわみの関係

残留応力を有する場合のSの値は式(4.21)から決定される。図-4.10に示す残留応力に対するSの値を表-4.2に示す。残留応力が大きくなるに従ってSが低下することがわかる。しかし、Sの低下の割合は $k_{cr}$ ほど大きくない。

残留応力が係数A、Bに与える影響を有限要素法解析の結果を用いて調べる。2.3節で示した有限要素法解析プログラムにおいては、初期たわみと残留応力に対して、最初に平衡状態を計算したのちに載荷が行なわれる。図-4.10に示す長方形分布の残留応力において  $c/b = 1/6$  で  $\sigma_{rc}/\sigma_e = 2$  の場合について、平衡状態が達せられたときの初期たわみ  $e_0/t_w$  が0.1367と0.6439の各場合に対して計算を行なう。各場合とも縦横比  $a/b$  は0.668である。2次曲げ応力  $\sigma_b/\sigma_e$  と  $e/t_w$  の関係を図-4.11に示す。この図には、式(4.18)が与える関係も示してある。式(4.18)のS、A、Bに対して、表-4.1の(Ⅲ)において  $a/b = 0.668$  に対する各係数の値が使用されている。図-4.11からわかるように、式(4.18)は有限要素法解析の結果をよく近似している。したがって、残留応力は係数A、Bに影響しないと考えられる。また前述したようにSは残留応力の影響を受けるが、 $S(e/t_w)$ の項としては残留応力の影響をあまり受けないようである。

以上の考察により、式(4.8)と式(4.18)を残留応力も存在する場合に適用するためには、 $k_{cr}$ に対して残留応力の影響を考慮したものを使用すればよい。

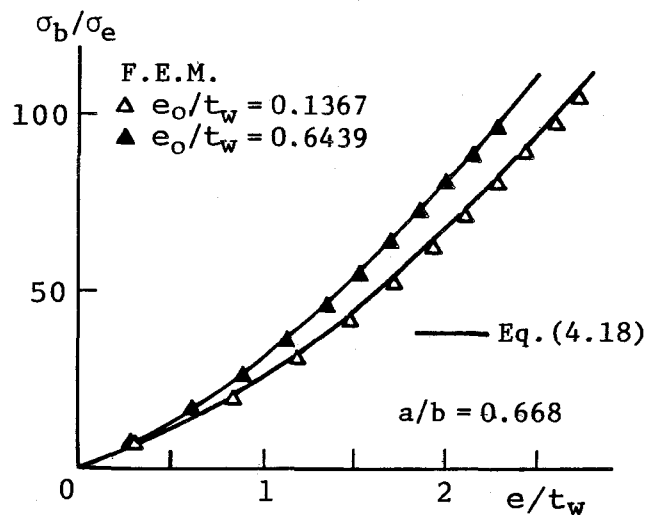


図-4.11  $\sigma_b/\sigma_e$ と  $e/t_w$ の関係 [条件(Ⅲ)]

## 4. 5 結 論

- (1) 圧縮を受ける長方形板について、その荷重と2次曲げ応力の関係を定式化する方法を示し、両者の関係を式(4.8), (4.18)で与えた。
- (2) 式(4.8), (4.18)を残留応力も存在する場合に適用するためには、座屈係数に対して残留応力の影響を考慮したものを使用すればよい。

## 参 考 文 献

- 1) Marguerre, K. : Zur Theorie der gekrümmter Platte grosser Formänderung, Proc. 5th International Congress for Applied Mechanics, Cambridge, pp. 93 - 101, 1938.
- 2) Lundquist, E.E. and E.Z. Stowell : Critical compressive stress for flat rectangular plates supported along all edges and elastically restrained against rotation along the unloaded edges, NACA, Report No. 733, pp. 99 - 109, 1942.

# 第5章 曲げを受ける薄肉プレートガーダーのウェブの面外変形を考慮した疲労強度

## 5.1 概説

曲げを受ける薄肉プレートガーダーの場合、第1章で示したように、3種類の疲労亀裂<sup>1), 2)</sup>が発生する可能性がある。2型と3型の疲労亀裂についてはそれぞれの疲労強度が明らかにされており、疲労亀裂の発生位置における、梁理論から計算される引張応力度とそれらの疲労強度とを比較することにより疲労亀裂の発生の可能性を予測することができる。しかし、ウェブの面外変形に起因する1型疲労亀裂の場合には、2次曲げ応力を受ける隅肉<sup>3)~6)</sup>溶接の疲労強度は求められているが、面内曲げ応力と2次曲げ応力の関係が明らかにされていないために、疲労亀裂の発生の可能性を隅肉溶接の疲労強度に基づいて予測することができない。

本章では、曲げを受ける薄肉プレートガーダーの1型疲労亀裂の200万回疲労強度を面内曲げ応力で与える。最初に第4章で示した方法により面内曲げを受ける長方形板の荷重と2次曲げ応力の関係を定式化する。次に、この関係式の2次曲げ応力に隅肉溶接の200万回疲労強度を代入することにより、面内曲げ応力で表わされた200万回疲労強度とウェブの幅厚比の関係を与える。この関係を用いて、ウェブの初期たわみと残留応力、応力比、ウェブの降伏応力度、縦横比などがこの疲労強度に与える影響を調べる。

## 5.2 面内曲げを受ける長方形板の荷重と2次曲げ応力の関係の定式化

### 5.2.1 4辺単純支持された場合の荷重と面外たわみの関係

図-5.1に示すように、面内曲げを受ける $a \times b$ の長方形板が面外方向に4辺単純支持されている場合を考える。初期たわみ $w_0$ と付加面外たわみ $w$ に対して、それぞれ

$$w_0 = \sin \frac{\pi x}{a} \left\{ e_{01} \sin \frac{\pi y}{b} + e_{02} \sin \frac{2\pi y}{b} \right\} \quad (5.1)$$

$$w = \sin \frac{\pi x}{a} \left\{ e_1 \sin \frac{\pi y}{b} + e_2 \sin \frac{2\pi y}{b} \right\} \quad (5.2)$$

ここに、 $e_{01}$ 、 $e_{02}$ ：初期たわみモード成分を表わす既知定数

$e_1$ 、 $e_2$ ：付加面外たわみモード成分を表わす未知定数

なる式を仮定すると、面内曲げを受ける長方形板の荷重と面外たわみの関係が式(3. 22)、(3. 23)から次のように与えられる。

$$\frac{\sigma_o}{\sigma_e} = \frac{9\pi^2}{32} \theta_4 \frac{e_2}{e_{01} + e_1} + \frac{9\pi^2}{32} (1 - \nu^2) \left\{ \frac{3}{4} \theta_6 \frac{q_2}{t_w^2} \frac{e_{02} + e_2}{e_{01} + e_1} + 3\theta_7 \frac{q_1}{t_w^2} \frac{e_{02} + e_2}{e_{01} + e_1} + 3\theta_8 \frac{q_3}{t_w^2} \right\} \quad (5. 3)$$

$$\frac{\sigma_o}{\sigma_e} = \frac{9\pi^2}{32} \theta_3 \frac{e_1}{e_{02} + e_2} + \frac{9\pi^2}{32} (1 - \nu^2) \left\{ \frac{3}{4} \theta_5 \frac{q_1}{t_w^2} \frac{e_{01} + e_1}{e_{02} + e_2} + 3\theta_7 \frac{q_2}{t_w^2} \frac{e_{01} + e_1}{e_{02} + e_2} + 3\theta_8 \frac{q_3}{t_w^2} \right\} \quad (5. 4)$$

ここに  $\theta_3 \sim \theta_8$ ：係数

$$q_1 = (e_{01} + e_1)^2 - e_{01}^2, \quad q_2 = (e_{02} + e_2)^2 - e_{02}^2,$$

$$q_3 = (e_{01} + e_1)(e_{02} + e_2) - e_{01}e_{02}$$

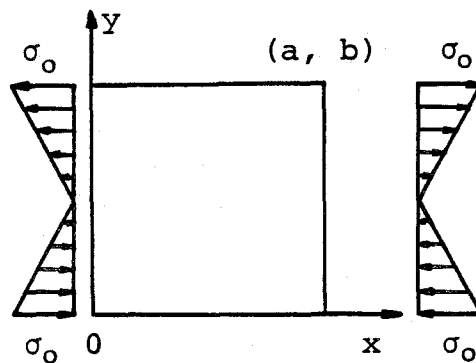


図-5. 1 面内曲げを受ける長方形板

### 5. 2. 2 非載荷辺で回転拘束された場合の荷重と面外たわみの関係

面内曲げを受ける長方形板の場合、引張側の面外たわみに比べて圧縮側の面外たわみが大きくなるので、圧縮縁から  $y = b/4$  の位置の付加面外たわみ、すなわち

$$e = \frac{e_1}{\sqrt{2}} + e_2 \quad (5. 5)$$

と荷重の関係を誘導する。

式(5.3), (5.4)の右辺の性質を調べると、付加面外たわみが小さいときには、各式の第1項が支配的であり、付加面外たわみが増加すると、これらはそれぞれ座屈係数に収束し、反対に各式の第2項の増加が著しくなる。この性質を考慮して、初期たわみとして $e_{01}$ と $e_{02}$ のどちらか一方が存在する場合には、式(5.3), (5.4)を次式で近似することができる。

$$\frac{\sigma_o}{\sigma_e} = k_{cr} \eta_o + \frac{3}{4} (1 - \nu^2) \theta \xi_o \quad (5.6)$$

ここに

$$\eta_o = \frac{\sqrt{\left(\frac{e}{t_w} + \frac{e_o}{t_w}\right) \frac{e}{t_w} + r_1^2 \left(\frac{e_o}{t_w}\right)^2} - r_1 \frac{e_o}{t_w}}{\frac{e}{t_w} + \frac{e_o}{t_w}}$$

$$\xi_o = \left(\frac{e}{t_w} + \frac{e_o}{t_w}\right)^2 \left\{ 1 - \left(\frac{e_o}{r_2 e + e_o}\right)^2 \right\}$$

$$e_o = \frac{e_{01}}{\sqrt{2}} \text{ または } e_{02}$$

$$k_{cr} = \frac{9 \pi^2}{32} \sqrt{\theta_3 \theta_4} : \text{座屈係数}$$

$$r_1 = \begin{cases} \sqrt{\frac{\theta_3}{2 \theta_4}} : e_o = \frac{e_{01}}{\sqrt{2}} \text{ に対して} \\ \sqrt{\frac{\theta_4}{8 \theta_3}} : e_o = e_{02} \text{ に対して} \end{cases}$$

$\theta, r_2$  : 係数

式(5.6)の右辺第1項は、式(5.3), (5.4)の右辺においてそれぞれ第1項のみを考慮したときに式(5.5)の関係を用いて求められる。他方、式(5.6)の右辺第2項は、圧縮板の荷重と面外たわみの関係式(4.8)を参考にして、このような形式を仮定する。 $r_2 = 1$ のときこれは圧縮板のものと同形になる。式(5.3), (5.4)が与える荷重と面外たわみの関係に対して、後の5.2.5項で述べるような方法により $\theta$ と $r_2$ を決定し、反対にこれらを式(5.6)に用いて、式(5.6)が与える荷重と面外たわみの関係と式(5.3), (5.4)が与える荷重と面外たわみの関係を比較すると、式(5.6)は式(5.3), (5.4)をよく近似する。



式(5.6)の $k_{cr}$ ,  $\theta$ ,  $r_1$ ,  $r_2$ を、非載荷辺の回転拘束を考慮したもので置き換えることにより、式(5.6)を非載荷辺で回転拘束された場合に対しても適用することができると考えられる。次に、非載荷辺の回転拘束を考慮した $k_{cr}$ ,  $\theta$ ,  $r_1$ ,  $r_2$ の決定法について述べる。

### 5.2.3 $k_{cr}$ の決定

面内曲げを受ける長方形板の座屈解析のための基礎微分方程式は次式で与えられる。

$$\frac{D_w}{t_w} \nabla^4 w + \sigma_0 \left(1 - 2 \frac{y}{b}\right) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0 \quad (5.7)$$

付加面外たわみとして次式を仮定する。

$$w = W \sin \frac{\pi x}{a} \quad (5.8)$$

ここに、 $W$ :  $y$ の関数

式(5.8)を式(5.7)に代入し、 $\sin(\pi x/a)$ を消去すると $W$ に関する4階の常微分方程式が得られる。この方程式を差分化し、固有値計算を行なうことにより座屈係数 $k_{cr}$ が決定される。

### 5.2.4 $r_1$ の決定

式(5.6)の右辺第1項は次式に式(5.1), (5.2)を代入して、Galerkin法を適用することによっても得られる。

$$\frac{D_w}{t_w} \nabla^4 w = -\sigma_0 \left(1 - 2 \frac{y}{b}\right) \frac{\partial^2 (w_0 + w)}{\partial x^2} \quad (5.9)$$

式(5.1), (5.8)を式(5.9)に代入し、 $\sin(\pi x/a)$ を消去すると $W$ に関する4階の常微分方程式が得られる。この方程式を差分化し、連立1次元方程式を解くことにより荷重と面外たわみの関係が得られる。

他方、 $\sigma_0/\sigma_e = k_{cr} \eta_0$ を $r_1$ について解くと次式が得られる。

$$r_1 = \frac{\frac{e}{e_0} - \left(\frac{1}{k_{cr}} \frac{\sigma_0}{\sigma_e}\right)^2 \left(\frac{e}{e_0} + 1\right)}{\frac{2}{k_{cr}} \frac{\sigma_0}{\sigma_e}} \quad (5.10)$$

式(5.10)に前述の荷重と面外たわみの関係を代入すると、 $r_1$ はほぼ一定になるので、 $e/e_0 = 1$ に対する値を $r_1$ の値として用いる。

### 5.2.5 $\theta$ と $r_2$ の決定

$\theta$ と $r_2$ を決定するために、図-5.2に示す要素分割に対する有限要素法解析の結果を使用する。この要素分割は、対称性を考慮して長方形板の半分が144要素に分割されている。非載荷辺は面内方向に自由に変位し、面外方向に対して、

(I): 両辺単純支持

(II): 両辺固定支持

の2つの場合を考慮する。載荷辺は面外方向に対して両辺単純支持とし、面内方向に対して面内曲げの応力分布が直線となるように荷重載荷する。有限要素法解析から得られる荷重と面外たわみの関係を $\sigma_o/\sigma_e - k_{cr}\eta_o$ と $\xi_o$ に代入すると、両者の関係が得られる。図-5.3に示すように、適切な $r_2$ の値により、初期たわみの大きさにかかわらず両者の関係はほぼ線形になるので、この傾きを最小自乗法で決定し、得られた値を $(3/4)(1-\nu^2)$ で除して $\theta$ の値とする。

$k_{cr}$ ,  $r_1$ ,  $r_2$ ,  $\theta$ の値を表-5.1に示す。式(5.6)が与える荷重と面外たわみの関係と有限要素法解析の結果の比較を図-5.4に示す。式(5.6)は有限要素法の結果をよく近似していることがわかる。

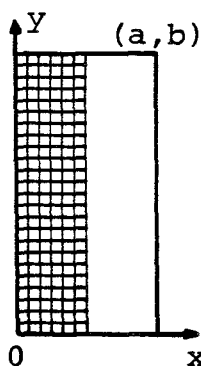


図-5.2 要素分割

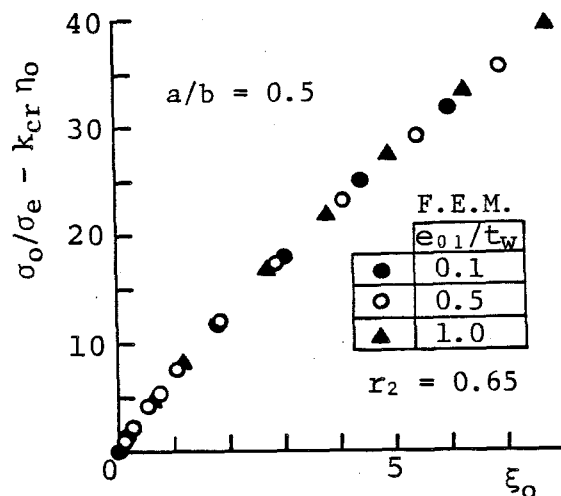


図-5.3  $\sigma_o/\sigma_e - k_{cr}\eta_o$ と $\xi_o$ の関係

[条件(II)]

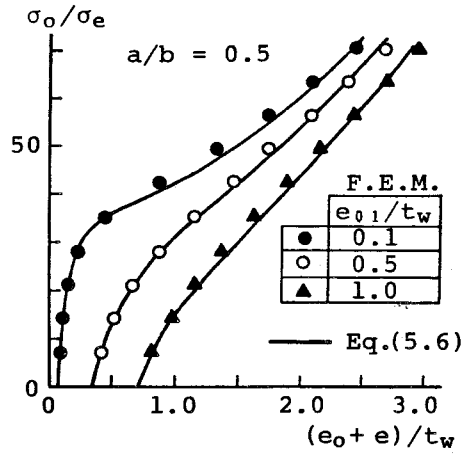


図-5.4 荷重と面外たわみの関係[条件(II)]

表-5.1 各係数の値

a/b	(I)						(II)			
	1/3		0.5		1.0		1/3		0.5	
e <sub>o</sub>	e <sub>o1</sub> /√2	e <sub>o2</sub>	e <sub>o1</sub> /√2	e <sub>o2</sub>	e <sub>o1</sub> /√2	e <sub>o2</sub>	e <sub>o1</sub> /√2	e <sub>o2</sub>	e <sub>o1</sub> /√2	e <sub>o2</sub>
k <sub>cr</sub>	33.78		25.63		27.13		43.72		39.46	
r <sub>1</sub>	0.44	0.50	0.41	0.61	0.28	0.90	0.52	0.57	0.46	0.64
r <sub>2</sub>	0.35	0.60	0.65	1.0	1.0	0.35	0.35	0.50	0.65	0.64
θ	5.07		5.25		6.52		6.51		8.01	
S							86.69		62.31	
r <sub>3</sub>							1.03	1.28	1.08	1.36
r <sub>4</sub>							0.7	0.6	1.3	0.7
A							11.70		6.14	
B							5.29		1.65	

(I) Both edges simply supported

(II) Both edges fixed

### 5.2.6 2次曲げ応力と面外たわみの関係

圧縮板の荷重と2次曲げ応力の関係式(4.18)の形式を参考にして、図-5.1の点(a/2, 0)に生じる2次曲げ応力と面外たわみの関係を次のように仮定する。

$$\frac{\sigma_b}{\sigma_e} = S\eta_b + \sqrt{A^2\xi_b^2 + B^2} - B \quad (5.11)$$

ここに

$$\eta_b = \frac{(1+2r_1)\eta_o + r_3(1-\eta_o)}{\eta_o + 2r_1} \frac{e}{t_w}$$

$$\xi_b = \left(\frac{e}{t_w} + \frac{e_o}{t_w}\right)^2 \left\{1 - \left(\frac{e_o}{r_4 e + e_o}\right)^2\right\}$$

$S, r_3, r_4, A, B =$  係数

式(5.11)の右辺第1項は次のように誘導される。2次曲げ応力と面外たわみの関係は次のように与えられる。

$$\frac{\sigma_b}{\sigma_e} = C_4 \frac{e_1}{t_w} + C_5 \frac{e_2}{t_w} \quad (5.12)$$

ここに、 $C_4, C_5$  : 係数

式(5.3), (5.4)の右辺においてそれぞれ第1項のみを考慮し、さらに式(5.5)を用いて式(5.12)の右辺を $e$ で表わすと、初期たわみとして $e_{01}$ のみが存在する場合には次式が得られる。

$$\frac{\sigma_b}{\sigma_e} = \frac{\sqrt{2} C_4 \eta_0 + 2 C_5 r_1}{\eta_0 + 2 r_1} \frac{e}{t_w} \quad (5.13)$$

ここで、 $e_{01} = 0$ のとき $\eta_0 = 1$ となるので、このときの $e/t_w$ の係数を $S$ と置き、さらに $C_5 = S r_3 / (2 r_1)$ と置いて $C_4, C_5$ を消去すると式(5.11)の右辺第1項が得られる。初期たわみとして $e_{02}$ のみが存在するときも同様にして誘導することができ、式(5.11)の右辺第1項と同じ形式のものが得られる。係数 $S$ は前述の定義から座屈形状における $y = b/4$ の位置の単位付加面外たわみに対する2次曲げ応力の増加を示しており、5.2.3項の座屈解析から決定される。

次に、 $r_3$ は次のように決定される。 $\sigma_b / \sigma_e = S \eta b$ を $r_3$ について解くと次式が得られる。

$$r_3 = \frac{1}{S} \frac{1}{\frac{e}{e_0} \frac{\sigma_b}{\sigma_e} \frac{1}{t_w}} \frac{\eta_0 + 2 r_1}{1 - \eta_0} - (1 + 2 r_1) \frac{\eta_0}{1 - \eta_0} \quad (5.14)$$

式(5.14)に5.2.4項から得られる2次曲げ応力と面外たわみの関係を代入すると、 $r_3$  はほぼ一定となるので、 $e/e_0=1$  に対する値を  $r_3$  の値として用いる。

他方、 $r_4$ ,  $A$ ,  $B$  は次のように決定される。有限要素法解析から得られる2次曲げ応力と面外たわみの関係を  $\sigma_b/\sigma_e - S\eta_b$  と  $\xi_b$  に代入すると、両者の関係が得られる。図-5.5に示すように、適切な  $r_4$  の値により、 $\sigma_b/\sigma_e - S\eta_b$  の大きな値を除いて両者の関係は初期たわみの大きさに影響されなくなる。この関係は  $\xi_b$  が小さいときには少し曲率を有するが、 $\xi_b$  が大きくなると線形になる。したがって、 $\sigma_b/\sigma_e - S\eta_b$  と  $\xi_b$  の関係に対して次式を仮定する。

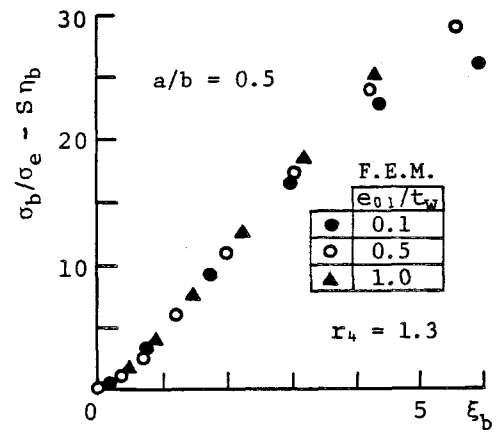


図-5.5  $\sigma_b/\sigma_e - S\eta_b$  と  $\xi_b$  の関係 [条件(II)]

$$\frac{\sigma_b}{\sigma_e} - S\eta_b = \sqrt{A^2 \xi_b^2 + B_1^2} - B_2 \quad (5.15)$$

係数  $A$ ,  $B_1$ ,  $B_2$  はこの式を変形して次式に最小自乗法を適用して決定する。

$$\xi_b^2 = \frac{1}{A^2} \left( \frac{\sigma_b}{\sigma_e} - S\eta_b \right)^2 + \frac{2B_2}{A^2} \left( \frac{\sigma_b}{\sigma_e} - S\eta_b \right) + \frac{B_2^2 - B_1^2}{A^2} \quad (5.16)$$

$B_1$  と  $B_2$  は近い値となり、両者の平均値を  $B$  の値とする。

$S$ ,  $r_3$ ,  $r_4$ ,  $A$ ,  $B$  の値を表-5.1に示す。式(5.11)が与える2次曲げ応力と面外たわみの関係と有限要素法解析の結果の比較を図-5.6に示す。また、式(5.6), (5.11)が与える荷重と2次曲げ応力の関係と有限要素法解析の結果の比較を図-5.7に示す。

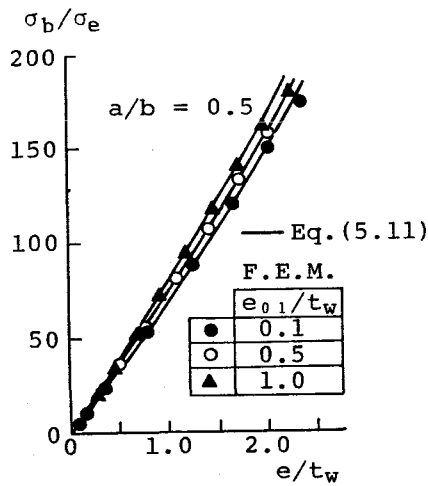


図-5.6 2次曲げ応力と面外たわみの関係 [条件(II)]

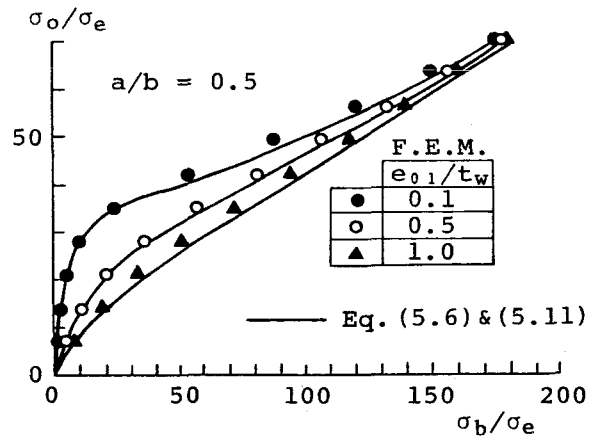


図-5.7 荷重と2次曲げ応力の関係 [条件(II)]

### 5.2.7 残留応力が荷重と2次曲げ応力の関係に与える影響

初期たわみと残留応力をともに有する薄板の面外有限変形に対する基礎微分方程式は式(4.19), (4.20)で与えられている。応力関数 \$F\_r\$ に対して図-5.8に示す長方形分布の残留応力を仮定した場合には、式(5.3)の \$\theta\_3\$ と式(5.4)の \$\theta\_4\$ をそれぞれ

$$\theta_3 = \frac{\sin(2\pi c/b)}{2\pi c/b} \frac{\sigma_{rc}}{\sigma_e} \quad \text{と} \quad \theta_4 = \frac{\sin(4\pi c/b)}{4\pi c/b} \frac{\sigma_{rc}}{\sigma_e}$$

に置き換えればよい。これらの係数は式(5.6)の \$k\_{cr}\$ と \$r\_1\$ にのみ関係する。

一般に \$F\_r\$ が \$y\$ のみの関数で与えられる場合には、\$k\_{cr}\$ と \$r\_1\$ を次のように決定すればよい。式(5.7)の代りに次式から \$k\_{cr}\$ を決定する。

$$\frac{D_w}{t_w} \nabla^4 w - \left\{ \frac{\partial^2 F_r}{\partial y^2} - \sigma_o \left(1 - 2\frac{y}{b}\right) \right\} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0 \quad (5.17)$$

また、式(5.9)の代りに次式から得られる荷重と面外たわみの関係を式(5.10)へ代入して \$r\_1\$ を決定する。

$$\frac{D_w}{t_w} \nabla^4 w - \frac{\partial^2 F_r}{\partial y^2} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = -\sigma_o \left(1 - 2\frac{y}{b}\right) \frac{\partial^2 (w_o + w)}{\partial x^2} \quad (5.18)$$

図-5.8に示す残留応力に対して式(5.17), (5.18)から得られる $k_{cr}$ と $r_1$ の値を表-5.2に示す。残留応力が大きくなるに従って $k_{cr}$ が低下することがわかる。また、 $r_1$ は残留応力の大きさによって変動する。

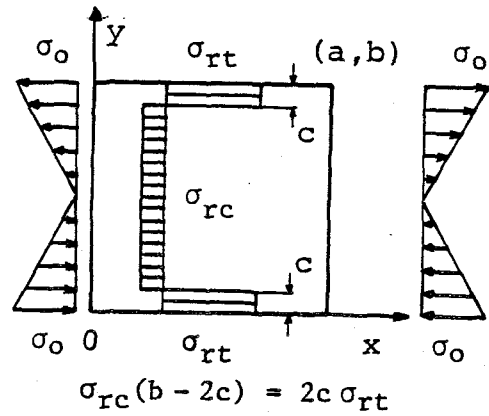


図-5.8 残留応力を有する長方形板

表-5.2  $k_{cr}$ ,  $S$ ,  $r_1$ ,  $r_3$ に残留応力が与える影響 [条件(II)]

In the case of  $a/b = 1/3$

$\sigma_{rc}/\sigma_e$ ( $c/b=1/12$ )	$k_{cr}$	$S$	$e_0$			
			$e_{01}/\sqrt{2}$		$e_{02}$	
			$r_1$	$r_3$	$r_1$	$r_3$
0	43.72	86.69	0.52	1.03	0.57	1.28
2	39.06	81.02	0.51	1.05	0.58	1.30
4	34.11	75.36	0.49	1.06	0.60	1.33
6	28.76	69.59	0.46	1.05	0.63	1.36

In the case of  $a/b = 0.5$

$\sigma_{rc}/\sigma_e$ ( $c/b=1/12$ )	$k_{cr}$	$S$	$e_0$			
			$e_{01}/\sqrt{2}$		$e_{02}$	
			$r_1$	$r_3$	$r_1$	$r_3$
0	39.46	62.31	0.46	1.08	0.64	1.36
2	33.17	58.70	0.42	1.02	0.68	1.40
4	26.07	54.66	0.36	0.92	0.78	1.53
6	17.26	49.60	0.26	0.72	1.04	1.94

残留応力を有する場合の $S$ の値は式(5.17)から決定される。また、 $r_3$ の値は式(5.18)から得られる2次曲げ応力と面外たわみの関係を式(5.14)へ代入して決定される。図-5.8に示す残留応力に対する $S$ と $r_3$ の値を表-5.2に示す。残留応力が大きくなるに従って $S$ が低下することがわかる。また、 $r_3$ は残留応力の大きさによ

て変動する。

残留応力が係数  $A, B, r_4$  に与える影響は有限要素法解析の結果によって調べられる。図-5.8に示す長方形分布の残留応力において  $c/b = 1/12$  で  $\sigma_{rc}/\sigma_e = 4$  の場合について、平衡状態が達せられたときの初期たわみ  $e_0/t_w$  が  $0.0721, 0.3672, 0.7359$  の各場合に対して計算を行なう。各場合とも縦横比  $a/b$  は  $0.5$  である。2次曲げ応力  $\sigma_b/\sigma_e$  と  $e/t_w$  の関係を図-5.9に示す。この図には、式(5.11)が与える関係も示してある。

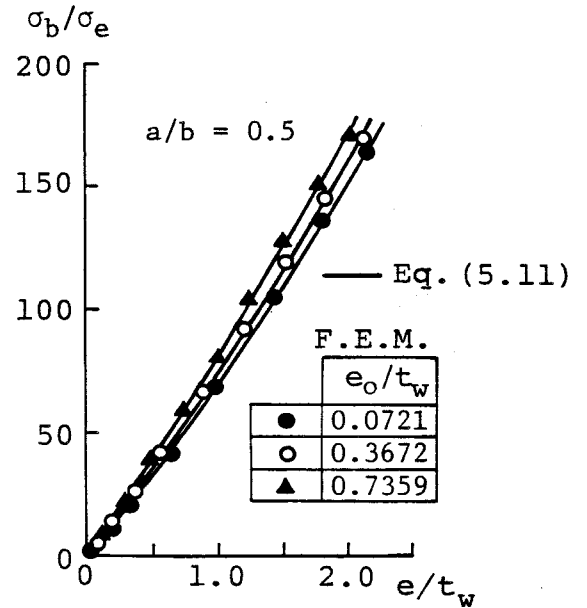


図-5.9  $\sigma_b/\sigma_e$  と  $e/t_w$  の関係 [条件(II)]

式(5.11)の  $S, A, B, r_1, r_3, r_4$  に対して、表-5.1において  $a/b$  が  $0.5$  で  $e_0$  が  $e_{01}/2$  の列の値が使用されている。図-5.9より、式(5.11)は有限要素法解析の結果をよく近似していることがわかる。したがって、残留

応力は係数  $A, B, r_4$  に影響しないと考えられる。また、 $S, r_3$  は残留応力の影響を受けるが、式(5.11)の  $S \eta b$  の項としては残留応力の影響をあまり受けまいようである。

以上の考察により、式(5.6)と式(5.11)を残留応力も存在する場合に適用するためには、 $k_{cr}, r_1$  に対して残留応力の影響を考慮したものを使用すればよい。

### 5.3 2次曲げ応力を受ける隅肉溶接の疲労強度

#### 5.3.1 既往の研究

3) 4)  
YenとOstapenkoは、プレートガーダーのウェブの面外たわみの実測値を用いて、差分法で数値的に隅肉溶接のウェブ側止端に生じる2次曲げ応力を求め、この応力の全振幅と、1型と4型の疲労亀裂の発生までの繰返し回数との関係を調べ、両者の間にはよい相関があることを示した。回帰分析の結果、1型と4型の疲労亀裂の200万回疲労強度とし



て、2次曲げ応力の全振幅で165.4MPaを与えた。なお、彼らが使用したプレートガーダーのウェブの鋼種はASTM-A373とA36である。これらは日本のSS41に相当する。

5),6)

前田は、圧縮フランジと水平補剛材で囲まれたウェブパネルをモデル化したT型あるいはI型断面の帯板試験片に繰り返し面外荷重を作用させて、隅肉溶接の疲労強度を求めた。試験片の鋼種はいずれもSS41である。回帰分析の結果、隅肉溶接の200万回疲労強度として、2次曲げ応力の全振幅で178.4MPaを与えた。

8)

### 5.3.2 高張力鋼が隅肉溶接の疲労強度に与える影響

既往の研究では、ウェブの鋼種としてASTM-A373, A-36あるいはJIS-SS41の普通鋼のみが取り扱われた。そこで、著者は高張力鋼が隅肉溶接の疲労強度に与える影響を明らかにするために、図-5.10に示すような棒状のT型隅肉溶接継手の試験片に繰り返し集中荷重を作用させて疲労試験を行なった。取り扱った鋼種はSS41, SM58, SHY70の3種類である。SS41に対してJIS-D4316, SM58とSHY70に対してJIS-D5816の溶接棒を使用した。疲労試験は油圧サーボ型疲労試験機を用いて、荷重制御で5Hzの完全片振りで行なった。疲労亀裂は隅肉溶接のウェブ側止端から発生し、ウェブ厚の方向に向かって伝播した。

隅肉溶接のウェブ側止端の位置の2次曲げ応力の全振幅 $\Delta\sigma_b$ (MPa)と亀裂長がウェブ厚の1/2になったときの繰り返し数Nとの関係を図-5.11に示す。両者の関係を回帰分析した結果は次のとおりである。

SS41に対して

$$\log \Delta\sigma_b = -0.160 \log \frac{N}{10^4} + \log 394.0$$

(相関係数 -0.98)

SM58に対して

$$\log \Delta\sigma_b = -0.2359 \log \frac{N}{10^4} + \log 577.0$$

(相関係数 -0.99)

(5.19)

SHY70に対して

$$\log \Delta \sigma_b = - 0.2848 \log \frac{N}{10^4} + \log 605.7$$

(相関係数 -0.99)

式(5.19)より、200万回疲労強度はSS41, SM58, SHY70についてそれぞれ168.8MPa, 165.3MPa, 133.9MPaとなる。SHY70の200万回疲労強度はSS41またはSM58のものより著しく低下するが、SM58の200万回疲労強度はSS41のものと大差ない。

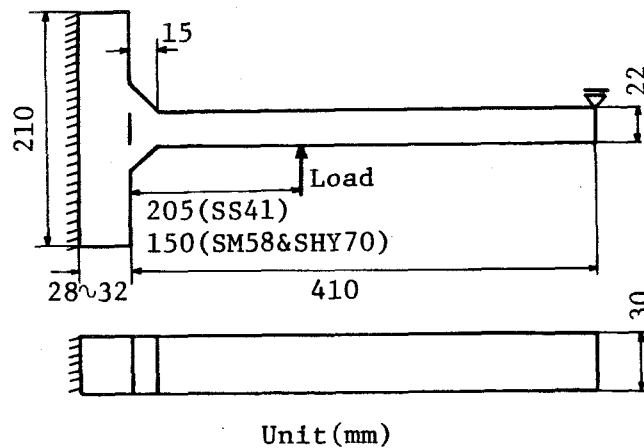


図-5.10 T型試験片

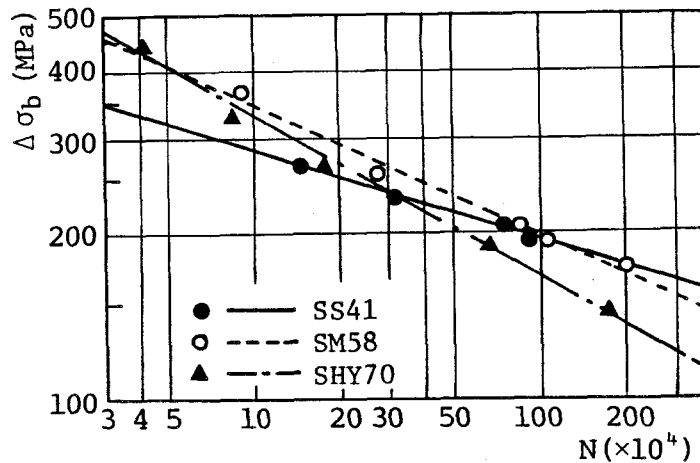


図-5.11 S-N曲線

## 5.4 ウェブの面外変形を考慮した 疲労強度

### 5.4.1 2モードと3モードの初期たわみの影響

第2章で、ウェブの初期たわみの大きさのみならず、その形状が1型の疲労亀裂の発生に影響することを明らかにした。縦横比が1のウェブの場合、x軸方向の初期たわみモードに対して、1モードは2次曲げ応力をあまり増加させないが、2および3モードは2次曲げ応力を非常に増加させる。また、y軸方向の初期たわみモードに対して2モードが最も大きな2次曲げ応力を生じさせる。x軸方向に2モードまたは3モードの初期たわみを有するウェブの面内曲げ応力 $\sigma_o$ と2次曲げ応力 $\sigma_b$ の関係は式(5.6)、(5.11)から計算することができる。2モードと3モードの初期たわみに対して、それぞれ表-5.1の(II)の $a/b=0.5$ と $a/b=1/3$ の各列の係数を式(5.6)、(5.11)に用いて計算すればよい。

5.3節より、2次曲げ応力を受ける隅肉溶接の200万回疲労強度は、SM58の引張強度以下の鋼種に対しておよそ166.7MPaと推定できる。最小面内曲げ応力 $\sigma_{omin}$ に対して生じる2次曲げ応力を $\sigma_{bmin}$ 、また最大面内曲げ応力 $\sigma_{omax}$ に対して生じる2次曲げ応力を $\sigma_{bmax}$ とするとき、次の条件を満足するように式(5.6)、(5.11)を解くと、200万回疲労強度に対する最大面内曲げ応力 $\sigma_{omax}$ とウェブの幅厚比 $\beta$ の関係を得る。

$$\sigma_{bmax} - \sigma_{bmin} = 166.7 \quad (\text{単位MPa}) \quad (5.20)$$

$a/b=0.5$ の場合の $\sigma_{omax}/\sigma_Y$ と $\beta$ の関係を図-5.12に示す。ここで、 $\sigma_Y$ はSS41の基準降伏応力度であり、235.3MPaである。また、Rは次式で定義される面内曲げ応力の比である。

$$R = \frac{\sigma_{omin}}{\sigma_{omax}} \quad (5.21)$$

図より次のことがわかる。

(1) y 軸方向の初期たわみモード成分  $e_{01}$  と  $e_{02}$  による  $\sigma_{\text{omax}}/\sigma_Y$  の違いは、幅厚比  $\beta$  が大きくなるに従って小さくなる。

(2) 応力比  $R$  が大きくなるに従って  $\sigma_{\text{omax}}/\sigma_Y$  の値が大きくなる。  $R=0.5$  の場合、 $\beta$  が約 250 を超えると、大きな初期たわみに対する  $\sigma_{\text{omax}}/\sigma_Y$  が小さな初期たわみに対する  $\sigma_{\text{omax}}/\sigma_Y$  よりも大きくなる。さらに  $R=0.5$  の場合の  $e_{01}/t_w=1$  の曲線と  $e_{02}/t_w=1$  の曲線は  $\beta$  が 300 を超えるあたりから上昇し始める。

(3) 図には次式から与えられる座屈曲線も示してある。

$$\sigma_{\text{omax}} = 39.46 \sigma_e \quad (5.22)$$

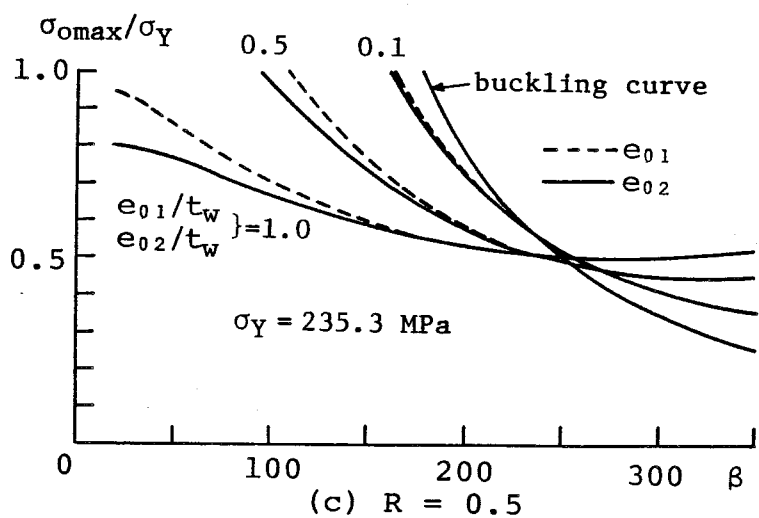
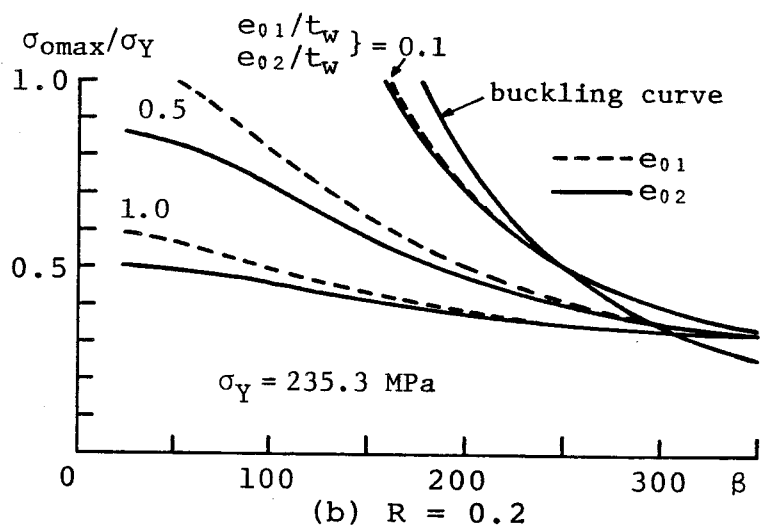
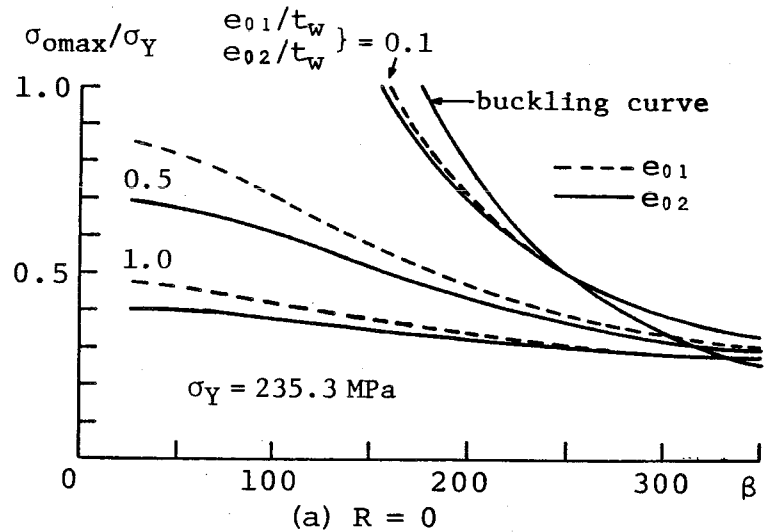


図-5.12  $\sigma_{\text{omax}}/\sigma_Y$  と  $\beta$  の関係 [ $a/b=0.5$ ]

200万回疲労強度に対する $\sigma_{\text{omax}}/\sigma_Y$ は、初期たわみの大きさと応力比によってはこの座屈強度をかなり下回る $\beta$ の領域が存在する。たとえば、 $\beta = 200$ に対して座屈強度は $\sigma_{\text{omax}}/\sigma_Y = 0.78$ であるが、 $R = 0$ の場合の200万回疲労強度は $e_{02}/t_w = 0.1, 0.5, 1.0$ に対してそれぞれ $\sigma_{\text{omax}}/\sigma_Y = 0.69, 0.43, 0.32$ となる。

$a/b = 1/3$ の場合も $a/b = 0.5$ の場合と同じ傾向を示す。ただし、図-5.13に示すように、 $e_{02}/t_w = 0.1$ の場合を除き、 $a/b = 1/3$ の $\sigma_{\text{omax}}/\sigma_Y$ が $a/b = 0.5$ の $\sigma_{\text{omax}}/\sigma_Y$ より常に小さい。 $e_{02}/t_w = 0.1$ のとき、 $\beta < 250$ の領域で $a/b = 1/3$ の $\sigma_{\text{omax}}/\sigma_Y$ がわずかではあるが $a/b = 0.5$ の $\sigma_{\text{omax}}/\sigma_Y$ より大きくなる。

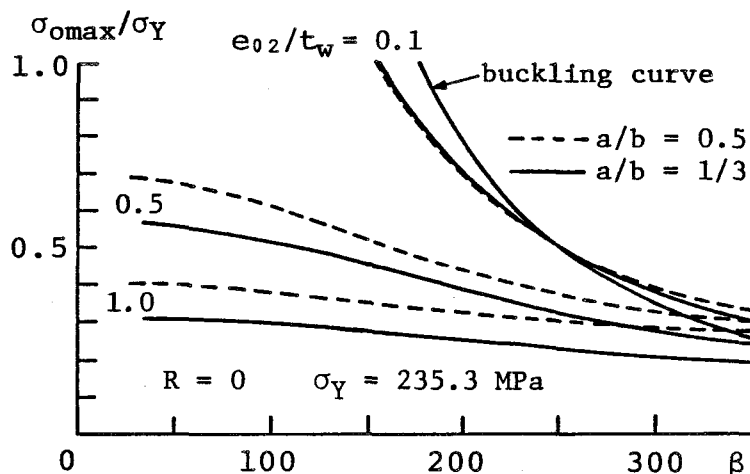


図-5.13  $a/b = 0.5$ と $1/3$ の $\sigma_{\text{omax}}/\sigma_Y$ と $\beta$ の関係の比較

#### 5.4.2 座屈係数の影響

2.4.5項で示したように、ウェブが薄肉化するとウェブに対するフランジの回転拘束が相対的に大きくなり、ウェブはフランジにより固定支持されていると見なすことができる。しかし、実際のプレートガーダーには溶接による残留応力が存在するために、5.2.7項で示したように、式(5.6)の座屈係数 $k_{\text{cr}}$ は、非載荷辺固定支持に対するものより低下すると考えられる。したがって、残留応力の影響を調べるために、 $k_{\text{cr}}$ の値を非載荷辺固定支持に対するものより低下させて200万回疲労強度 $\sigma_{\text{omax}}$ と幅厚比 $\beta$ の関係を調べる。なお、他の係数の値は表-5.1の非載荷辺固定支持のものを使用する。

$a/b = 0.5$  の場合の  $\sigma_{\text{omax}}/\sigma_Y$  と  $\beta$  の関係を図-5.14 に示す。図中の  $k_{\text{cr}} = 39.46$  と  $25.63$  は、それぞれ非荷荷辺固定支持と非荷荷辺単純支持の値に対応する。また、 $k_{\text{cr}} = 32.545$  は両者の平均値である。 $k_{\text{cr}}$  の値が低下するとそれに対応して  $\sigma_{\text{omax}}/\sigma_Y$  も低下することがわかる。残留応力による  $\sigma_{\text{omax}}/\sigma_Y$  の低下の程度は、 $R$  の上昇と  $\beta$  の増大に伴って小さくなる。特に、 $R = 0.5$  で  $e_{02}/t_w = 0.5$  と  $1.0$  の曲線は、 $\beta$  が大きくなるに従って互いに漸近し上昇し始める。

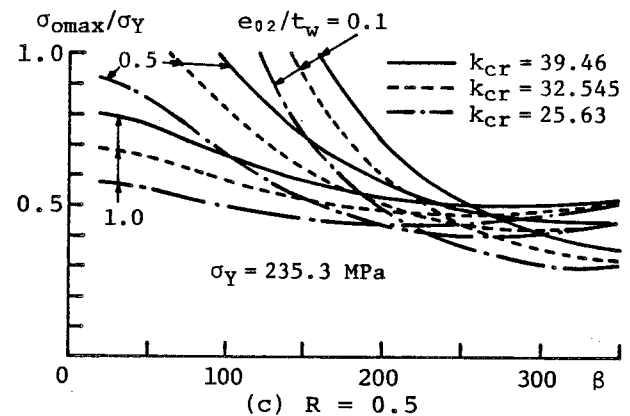
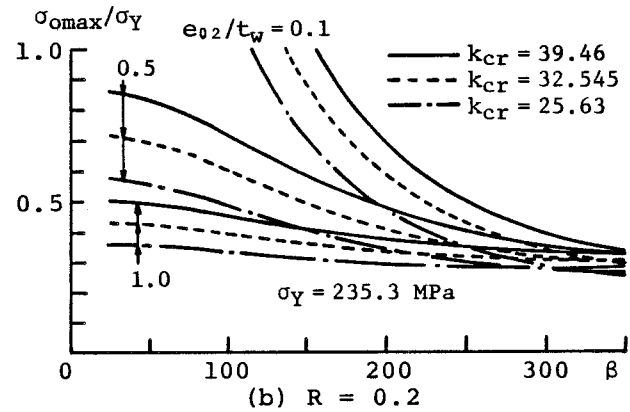
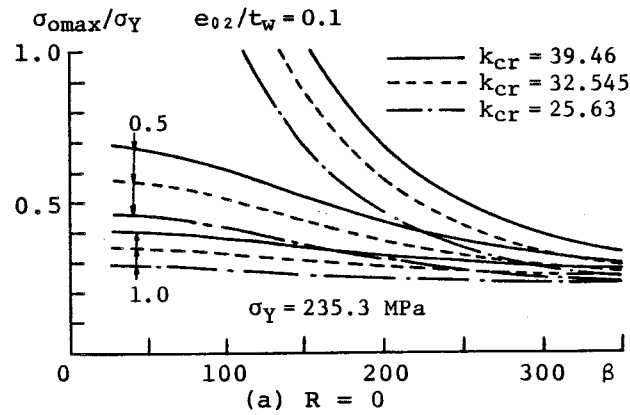


図-5.14 座屈係数の影響 [ $a/b = 0.5$ ]

### 5.4.3 降伏応力度の影響

5.3節で述べたように、2次曲げ応力を受ける隅肉溶接の200万回疲労強度は、SS41とSM58で大差がないので、SM58の基準降伏応力度である451.1MPa以下の降伏応力度を扱うこととし、2次曲げ応力の全振幅で表した200万回疲労強度に対して、式(5.20)の条件を使用する。

$a/b = 0.5$ で $R = 0$ の場合の $\sigma_{omax}/\sigma_Y$ と $\lambda$ の関係を図-5.15に示す。ここで、 $\lambda$ は次のように定義されている。

$$\lambda = \beta \sqrt{\frac{\sigma_Y}{235.3}} \quad (5.23)$$

図より降伏応力度が大きくなるに従って $\sigma_{omax}/\sigma_Y$ が低下することがわかる。これは次のように説明することができる。

式(5.6), (5.11)の左辺を $\sigma_Y$ で無次元化すると、それぞれ $\sigma_o/\sigma_e = (\sigma_o/\sigma_Y)(\sigma_Y/\sigma_e)$ ,  $\sigma_b/\sigma_e = (\sigma_b/\sigma_Y)(\sigma_Y/\sigma_e)$ となる。ここで、式(5.23)により $\sigma_Y/\sigma_e = 1.264 \times 10^{-3} \lambda^2$ となり、 $\sigma_Y/\sigma_e$ は $\lambda$ のみの関数になる。他方、式(5.20)を $\sigma_Y$ で無次元化すると右辺は $166.7/\sigma_Y$ となり、降伏応力度が大きくなると、降伏応力度で無次元化された2次曲げ応力の全振幅は小さくなる。したがって、降伏応力度が大きくなるに従って、降伏応力度で無次元化された200万回疲労強度 $\sigma_{omax}/\sigma_Y$ は低下する。

一般に、幅厚比に対して式(5.23)のように幅厚比に降伏応力度の平方根を乗じた形式のものを使用すると、座屈強度は降伏応力度に無関係に表わすことができる。しかし、そのようなパラメータを使用しても、200万回疲労強度と幅厚比の関係は降伏応力度に無関係に表わすことができない。

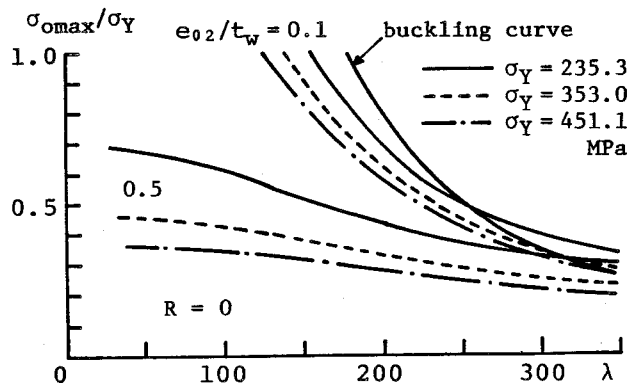


図-5.15 降伏応力度の影響  
[ $a/b = 0.5$ ]

#### 5.4.4 1モードの初期たわみの影響

これまでの縦横比が1のウェブについて、x軸方向に2モードあるいは3モードの初期たわみが200万回疲労強度に与える影響を調べてきた。次に、縦横比が0.5, 0.75, 1.0, 1.5の各ウェブについて1モードの初期たわみが200万回疲労強度に与える影響を調べる。

縦横比が0.5のウェブの1モードの初期たわみと縦横比が1.5の3モードの初期たわみに対して前述の $a/b=0.5$ の結果が使用できる。他方、縦横比が1.5のウェブの2モードの初期たわみは縦横比が0.75のウェブの1モードの初期たわみと同じである。したがって、 $a/b=0.75, 1.0, 1.5$ の各場合について200万回疲労強度と幅厚比の関係を調べればよい。

これらの縦横比に対して有限要素法解析から得られる荷重と2次曲げ応力の関係は図-5.16のようになる。y軸方向の初期たわみモードはいずれも2である。どの縦横比の場合についてもある荷重に到達すると2次曲げ応力は急激に負符号の方向に増加する。これは2.4.3項で示したように圧縮側で面外たわみの増加の方向が急激に逆転するからである。2次曲げ応力が急変するまでの関係を図に示すように直線で近似すると、各初期たわみの大きさに対して各直線はそれぞれ次のようになる。

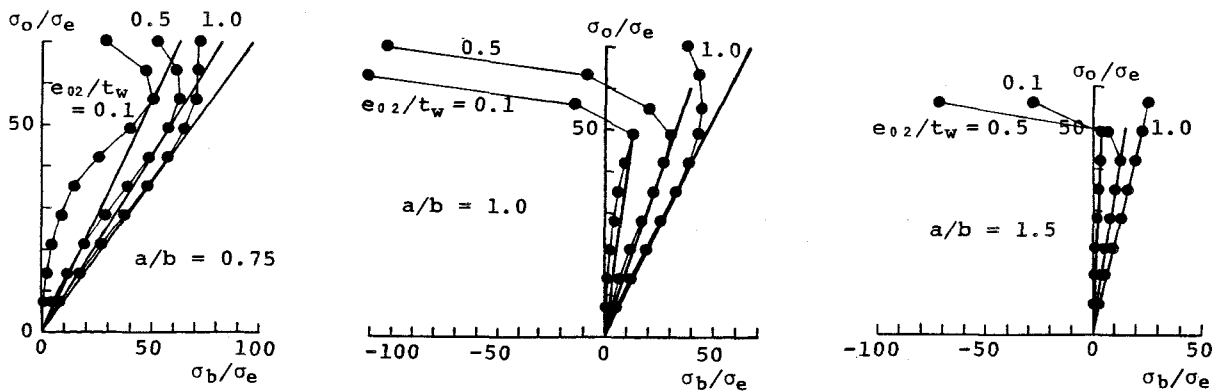


図-5.16  $a/b=0.75, 1.0, 1.5$ に対する荷重と2次曲げ応力の関係

縦横比が0.75の場合

$e_{02}/t_w=0.1$ のとき

$\sigma_o=1.1043\sigma_b$  ただし  $\sigma_o/\sigma_e \leq 70$



$e_{02}/tw=0.5$ のとき

$$\sigma_o = 0.8394 \sigma_b \quad \text{ただし} \quad \sigma_o / \sigma_e \leq 70 \quad (5.24)$$

$e_{02}/tw=1.0$ のとき

$$\sigma_o = 0.7245 \sigma_b \quad \text{ただし} \quad \sigma_o / \sigma_e \leq 70$$

縦横比が1.0の場合

$e_{02}/tw=0.1$ のとき

$$\sigma_o = 3.6135 \sigma_b \quad \text{ただし} \quad \sigma_o / \sigma_e \leq 50$$

$e_{02}/tw=0.5$ のとき

$$\sigma_o = 1.5091 \sigma_b \quad \text{ただし} \quad \sigma_o / \sigma_e \leq 60 \quad (5.25)$$

$e_{02}/tw=1.0$ のとき

$$\sigma_o = 1.0479 \sigma_b \quad \text{ただし} \quad \sigma_o / \sigma_e \leq 70$$

縦横比が1.5の場合

$e_{02}/tw=0.1$ のとき

$$\sigma_o = 12.7937 \sigma_b \quad \text{ただし} \quad \sigma_o / \sigma_e \leq 50$$

$e_{02}/tw=0.5$ のとき

$$\sigma_o = 3.3018 \sigma_b \quad \text{ただし} \quad \sigma_o / \sigma_e \leq 50 \quad (5.26)$$

$e_{02}/tw=1.0$ のとき

$$\sigma_o = 2.0808 \sigma_b \quad \text{ただし} \quad \sigma_o / \sigma_e \leq 50$$

これらの式を式(5.20)の条件のもとに解くと、200万回疲労強度に対する最大面内曲げ応力  $\sigma_{o\max}$  とウェブの幅厚比  $\beta$  の関係を得る。 $\sigma_{o\max}/\sigma_Y$  と  $\beta$  の関係を図-5.17に示す。この図は  $\sigma_Y = 235.3 \text{ MPa}$  で  $R=0$  に対するものである。 $a/b = 0.75$  のときの  $\sigma_{o\max}/\sigma_Y$  と  $\beta$  の関係は、初期たわみの大きさに依存して最初一定の値を取るが、 $\beta$  が大きくなるとこれらはいずれも  $a/b = 1.0$  の  $e_{02}/tw = 1.0$  の曲線に重なる。 $a/b = 1.5$  の曲線は、 $e_{02}/tw = 0.1, 0.5, 1.0$  のいずれの場合とも  $a/b = 1.0$  の  $e_{02}/tw = 0.1$  の曲線に全領域で一致する。

図-5.17には式(5.22)が与える座屈曲線も示してある。 $a/b = 1.5$  の場合、板厚以下の大きさの初期たわみ、そして  $a/b = 1.0$  の場合、板厚の半分以下の大きさ

の初期たわみに対して、200万回疲労強度に対する  $\sigma_{\text{omax}}/\sigma_Y$  が座屈強度より常に大きい。しかし、 $a/b=1.0$  の場合の板厚の大きさの初期たわみと  $a/b=0.75$  の場合のすべての初期たわみに対して、200万回疲労強度に対する  $\sigma_{\text{omax}}/\sigma_Y$  が座屈強度より小さくなる  $\beta$  の領域が存在する。

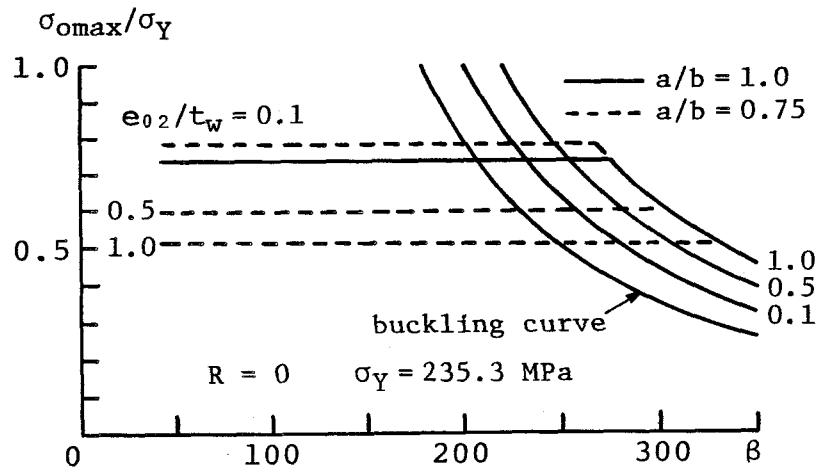


図-5.17  $a/b=0.75, 1.0, 1.5$  に対する  $\sigma_{\text{omax}}/\sigma_Y$  と  $\beta$  の関係

## 5.5 結 論

面内曲げを受ける長方形板の荷重と2次曲げ応力の関係を式(5.6), (5.11)で与えた。これらの式を用いて、曲げを受ける薄肉プレートガーダーのウェブの面外変形に起因する1型疲労亀裂に対して、200万回疲労強度を面内曲げ応力で与えた。この疲労強度はウェブの幅厚比の関数として与えられ、次の特性を有することが示された。

- (1) y軸方向の初期たわみモードが200万回疲労強度に与える影響は幅厚比が大きくなるに従って小さくなる。
- (2) 応力比が大きくなるに従って200万回疲労強度も大きくなる。応力比が小さいときには大きな初期たわみに対する200万回疲労強度の方が小さな初期たわみに対するものより小さい。しかし、応力比が大きくなると幅厚比の大きい領域でこの関係が逆転する。
- (3) 縦横比が1のウェブがx軸方向に2モードあるいは3モードの初期たわみを持つ場合、200万回疲労強度は初期たわみの大きさと応力比によっては座屈強度をかなり下回る幅厚比の領域が存在する。
- (4) 残留応力は200万回疲労強度を低下させる。低下の程度は応力比と幅厚比の増大に伴って小さくなる。
- (5) 幅厚比に対して、幅厚比に降伏応力度の平方根を乗じた形式のものを使用すると、座屈強度は降伏応力度に無関係に表わすことができる。しかし、降伏応力度で無次元化された200万回疲労強度は、そのようなパラメータを使用しても、降伏応力度が大きくなると低下し、降伏応力度に無関係に表わすことができない。これは、ウェブの降伏応力度が大きくなっても2次曲げ応力を受ける隅肉溶接の200万回疲労強度が大きくならず、ほとんど変わらないからである。
- (6) 1モードの初期たわみの場合、縦横比が1.5のウェブでは板厚以下の大きさの初期たわみに対して、そして縦横比が1.0のウェブでは板厚の半分以下の大きさの初期たわみに対して、200万回疲労強度が座屈強度より常に大きい。しかし、縦横比が0.75のウェブがこのモードの初期たわみを持つとき、200万回疲労強度が座屈強度より小さくなる幅厚比の領域が存在する。

## 参 考 文 献

- 1) Gurney, T.R. : Fatigue of Welded Structures, Cambridge University Press, pp.96-116, 1968.
- 2) 前田幸雄・川井豊 : 薄肉溶接ハイブリッド・ガーダーの曲げ疲労強度に関する研究、溶接学会誌、第43巻、第3号、pp.736-742, 1974.
- 3) Mueller, J.A. and B.T.Yen : Girder web boundary stresses and fatigue, WRC, Bull. No.127, Jan., 1968.
- 4) Parsanejad, S. and A.Ostapenko : On the fatigue strength of unsymmetrical steel plate girders, WRC, Bull. No.156, Nov., 1970.
- 5) 前田幸雄・石渡正夫・今村能久 : 曲げを受ける薄肉プレートガーダーの構造疲労特性、第30回土木学会年次学術講演会講演概要集、I-111、1975.
- 6) Maeda, Y. : Fatigue cracks of deep thin-walled plate girders, Proc. of Bridge Engineering Conference of TRB, Vol.1, pp.120-128, Sept., 1978.
- 7) Timoshenko, S.P. and J.M.Gere : Theory of Elastic Stability, 2nd edition, McGraw-Hill, pp.344-346, 1961.
- 8) 前田幸雄・大倉一郎・西山六朗 : T型すみ肉溶接継手の横曲げ疲労に関する研究、第33回土木学会年次学術講演会講演概要集、I-336, 1978.

# 第6章 水平補剛材が1型疲労亀裂の発生を抑制する効果

## 6.1 概説

水平補剛材は、ウェブに大きな面外変形が生じるのを防ぐため、2次曲げ応力の増加を抑制し、1型疲労亀裂の発生も抑制する効果があることが実験的に明らかにされている<sup>1),2)</sup>。しかし、その効果は理論的に明らかにされていない。本章では、面内曲げを受ける、水平補剛材を有する長方形板の面外挙動を有限要素法解析によって調べ、解析結果と既往の実験結果との比較により、水平補剛材が1型疲労亀裂の発生を抑制する効果を理論的に明らかにする。次に、水平補剛材を有する薄肉プレートガーダーの1型疲労亀裂に対して、200万回疲労強度を面内曲げ応力で与える。

## 6.2 水平補剛材に対する要素剛性マトリックス

水平補剛材を棒要素で近似し、その要素剛性マトリックスをウェブの要素剛性マトリックスに重ね合わせる方法を用いる。最初に、ひずみと変位の関係を誘導する。図-6.1(a)に示すように、水平補剛材の断面をy-z平面にとり、右手系座標となるようにx軸をとる。水平補剛材が図-6.1(b)に示すようにz軸方向に初期たわみ $w_0$ を持っているとき、その長さ $dx_1$ は次式によって与えられる。

$$dx_1 = \sqrt{1 + \left(\frac{dw_0}{dx}\right)^2} dx \doteq \left\{1 + \frac{1}{2} \left(\frac{dw_0}{dx}\right)^2\right\} dx \quad (6.1)$$

外力を受けると、図-6.1(c)に示すように、z軸方向に付加たわみ $w$ が生じ、 $dx_1$ は次式で与えられる $dx_2$ に変化する。

$$dx_2 = \sqrt{1 + \left\{\frac{d(w_0 + w)}{dx}\right\}^2} dx \doteq \left[1 + \frac{1}{2} \left\{\frac{d(w_0 + w)}{dx}\right\}^2\right] dx \quad (6.2)$$

したがって、変位  $w$  によるひずみは次式で与えられる。

$$\frac{dx_2 - dx_1}{dx} = \frac{dw_0}{dx} \frac{dw}{dx} + \frac{1}{2} \left( \frac{dw}{dx} \right)^2 \quad (6.3)$$

このひずみに  $x$  軸方向の変位  $u$  によるひずみ  $du/dx$  を付加することにより、水平補剛材の図心軸のひずみ  $\epsilon_m$  は次式で与えられる。

$$\epsilon_m = \frac{du}{dx} + \frac{dw_0}{dx} \frac{dw}{dx} + \frac{1}{2} \left( \frac{dw}{dx} \right)^2 \quad (6.4)$$

図心から  $z$  の位置のひずみ  $\epsilon$  は、式(6.4)に曲率によるひずみ  $-z(d^2w/dx^2)$  を加えることにより次式で与えられる。

$$\epsilon = \frac{du}{dx} + \frac{dw_0}{dx} \frac{dw}{dx} + \frac{1}{2} \left( \frac{dw}{dx} \right)^2 - z \frac{d^2w}{dx^2} \quad (6.5)$$

このひずみと変位の関係式はMarguerre<sup>3)</sup>のひずみと変位の関係式(2.5)の  $\epsilon_x$  と同形である。

他方、応力とひずみの関係は次式で与えられる。

$$\sigma = E\epsilon \quad (6.6)$$

式(6.5)、(6.6)からひずみエネルギーを誘導し、このひずみエネルギーの第1変分から剛性マトリックス、第2変分から接線剛性マトリックスを誘導する。

$u, w, w_0$  に対して次の形状関数を使用する。

$$\left. \begin{aligned} u &= \alpha_1 + \alpha_2 x \\ w &= \alpha_3 + \alpha_4 x + \alpha_5 x^2 + \alpha_6 x^3 \\ w_0 &= \alpha_7 + \alpha_8 x \end{aligned} \right\} \quad (6.7)$$

ここに、 $\alpha_1 \sim \alpha_8$  : 係数

他方、図-6.1(a)の  $x$  軸回りの回転に対してねじり剛性を考慮し、 $z$  軸回りの曲げ剛性はその剛性がウェブの面内剛性に比較してかなり小さいと仮定して無視する。

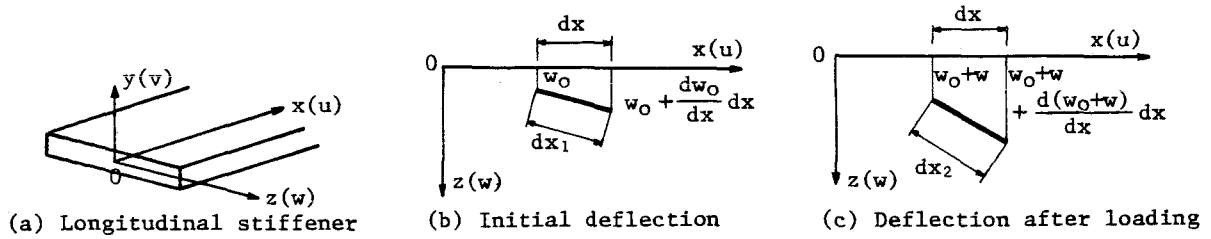


図-6.1 初期たわみを有する

水平補剛材

### 6.3 水平補剛材を有するウェブの面外有限変形

図-6.2に示すように、解析モデルは  $a \times a$  の正方形板で、 $y = 4a/5$  に水平補剛材が設けられている。正方形板は、面外変形に対して  $x = 0$ 、 $a$  で垂直補剛材により単純支持、 $y = 0$ 、 $a$  でフランジにより固定支持されていると仮定し、4辺は面内方向に自由に変位することができる。 $x = 0$ 、 $a$  で面内曲げ応力が直線変化するように節点に荷重載荷する。初期たわみを次のように仮定し、

$$w_0 = w_{0\max} \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{a} \quad (6.8)$$

ここに、 $w_{0\max}$ ：最大初期たわみ

$w_{0\max}/t_w = 0.5, 1.0$  について計算を行なう。水平補剛材について、次式で定義される水平補剛材の曲げ剛比  $\gamma$  を DIN で規定される最小曲げ剛比  $\gamma^*$  に対して相対的に選り、 $\gamma/\gamma^* = 1, 3, 5$  の各場合について計算を行なう。

$$\gamma = \frac{EI_s}{D_w b} = (1 - \nu^2) \frac{t_s}{b} \left( \frac{b_s}{t_w} \right)^3 \quad (6.9)$$

ここに、 $I_s$ ：水平補剛材の断面2次モーメント、 $t_s$ ：水平補剛材の板厚、

$b_s$ ：水平補剛材の板幅

要素分割は、対称性を考慮してウェブと水平補剛材の半分がそれぞれ90要素と6要素に分割されている。

水平補剛材の中央すなわち図-6.2の点Pの面外たわみと荷重の関係を図-6.3に示す。 $\gamma/\gamma^* = 1$ の場合、 $\sigma_o/\sigma_e$ が約100を超えると、ウェブと水平補剛材が一体となって面外方向に急激に変形する。そして、図-6.4に示すように、点 $(a/2, a)$ の2次曲げ応力 $\sigma_b$ も急激に増加する。また図-6.5に示す $y = a$ の2次曲げ応力の分布からわかるように、2次曲げ応力の分布形状が式(6.8)で与えられる初期たわみ形状のx軸方向のモードに一致している。

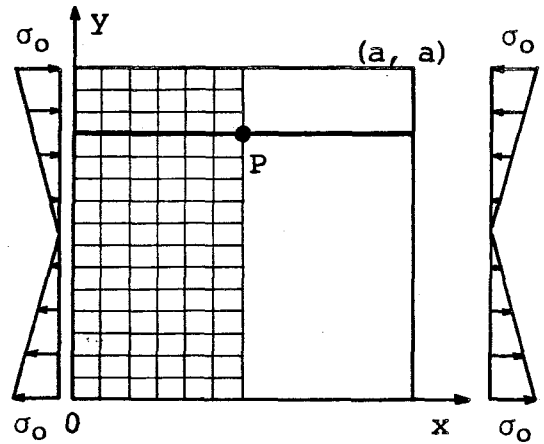


図-6.2 解析モデル

他方、 $\gamma/\gamma^* = 3$ と5の場合の面外変形は $\gamma/\gamma^* = 1$ の面外変形に比べて格段に小さい。また、 $\gamma/\gamma^* = 3$ と5の場合の荷重と2次曲げ応力の関係は、図-6.4に示すような滑らかな曲線にならず、2次曲げ応力の分布も図-6.5に示すような単純な形状にならない。これは、 $\gamma/\gamma^*$ が大きくなると水平補剛材の位置の面外たわみは抑制されるが、反対に圧縮フランジと水平補剛材との間のサブパネルの局所的な面外変形が2次曲げ応力の発生に影響し、図-6.2に示す要素分割ではこの局所的な面外変形を表わすことができないためと考えられる。

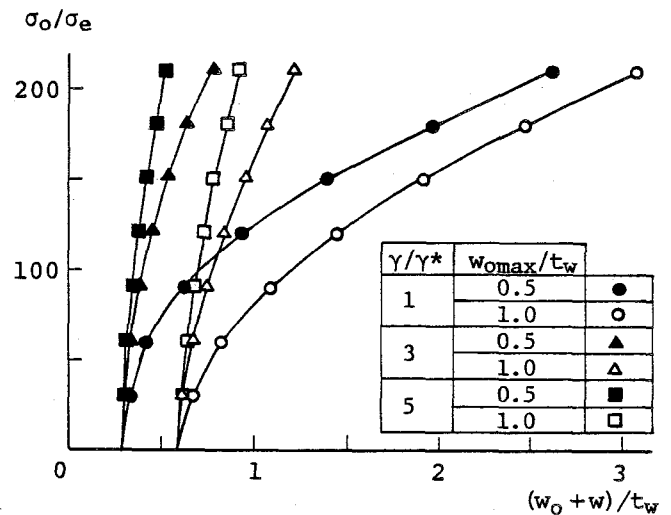


図-6.3 荷重と面外たわみの関係



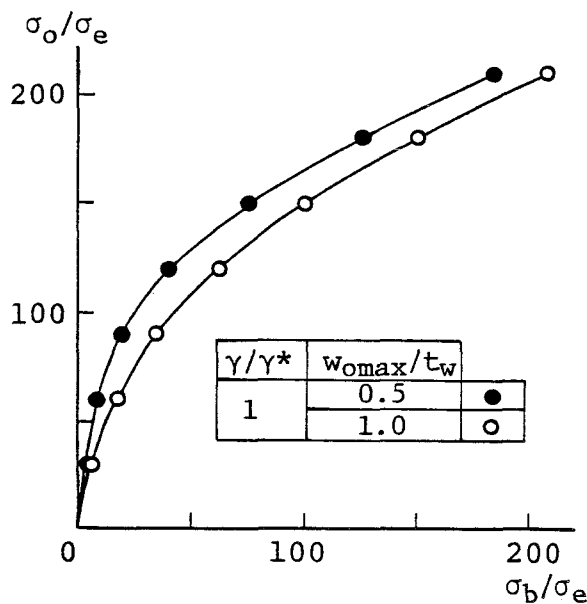


図-6.4  $\gamma/\gamma^*=1$  の場合の荷重と2次曲げ応力の関係

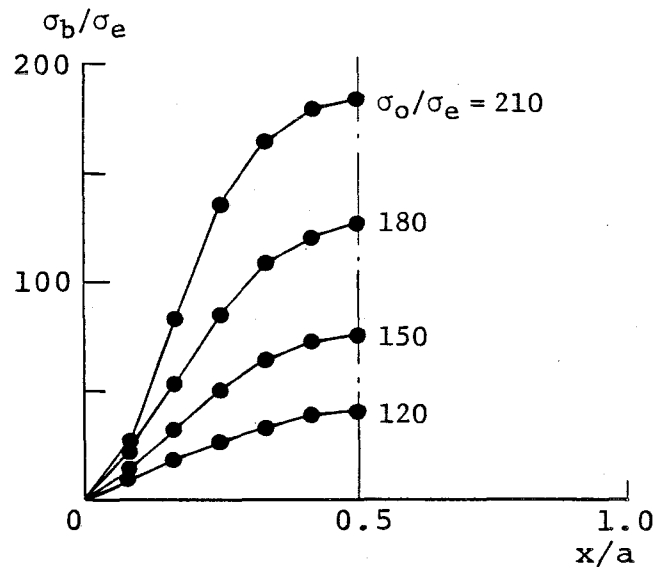


図-6.5  $\gamma/\gamma^*=1$  の場合の  $y=a$  の2次曲げ応力の分布

## 6.4 解析結果と実験結果の比較

2),5)

前田によって行なわれた、水平補剛材を有するプレートガーダーの曲げ疲労実験で各試験体に設定された荷重の大きさを表-6.1に示す。 $\sigma_{\text{omin}}$ と $\sigma_{\text{omax}}$ は梁理論から計算される圧縮フランジに生じる応力であり、それぞれ下限荷重と上限重に対応する。これらの応力は、ウェブの降伏応力度 $\sigma_Y$ で無次元化されている。各試験桁の中央の2つのウェブパネルが試験対象パネルであり、各ウェブパネルの縦横比はF7が0.75で他は全て1である。水平補剛材は圧縮フランジからウェブの高さの5分の1のところに設けられている。試験体FシリーズはSMA50Aの単一鋼種ガーダーであり、試験体Bシリーズは圧縮フランジにSM58、引長フランジにSHY70、ウェブにSS41を用いたハイブリッドガーダーである。試験体B4-L1において、約47万回の荷重の繰り返しで1型疲労亀裂が発生した。また試験体F9においては、約55万回の荷重の繰り返しで各々のウェブパネルにそれぞれ2つ1型疲労亀裂が発生した。試験体B4-L1の場合、 $\sigma_{\text{omax}}/\sigma_Y$ が0.85で1型疲労亀裂が発生しているが、試験体F9の場合、 $\sigma_{\text{omax}}/\sigma_Y$ が0.44であっても1型疲労亀裂が発生している。

表-6.1 設定荷重と1型疲労亀裂の発生個数

Test girder	$\beta$	$\gamma/\gamma^*$	$\sigma_{omin}/\sigma_Y$	$\sigma_{omax}/\sigma_Y$	No. of cracks
F5	250	4.3	0.21	0.55	0
F7	300	5.3	0.12	0.47	0
F9	300	3.8	0.12	0.44	4
B4-L1	413	1.0	0.18	0.85	1
B4-L7	413	7.1	0.20	0.91	0
B3-L1	310	1.0	0.43	0.83	0
B3-L6	310	6.4	0.42	1.06	0
B2-L5	206	5.0	0.44	0.88	0

$\sigma_Y$  : yielding stress of web plate

$\sigma_{omin}$  : minimum compression flange stress by beam theory

$\sigma_{omax}$  : maximum compression flange stress by beam theory

これらの疲労亀裂の発生原因を次に説明する。

最初に、試験体B4-L1の1型疲労亀裂の発生原因を調べる。前節の解析結果から、

$\gamma/\gamma^*=1$ のとき、水平補剛材はウェブと一体となって変形し、ウェブが1モードの初期たわみを持つとき、2次曲げ応力の分布も1モードになる。試験体Bシリーズについては初期たわみの測定はなされなかったが、2次曲げ応力の測定がなされた。試験体B4-L1の場合、

図-6.6に示すように2次曲げ応力はほぼ1モードの形状を示しており、ウェブ全体に

1モードの初期たわみが存在していたと考えられる。しかもこの試験体は $\sigma_{omax}/\sigma_Y$ が0.85でかなり大きな面内曲げを受けている。したがって、2次曲げ応力の分布で中央の2次曲げ応力が約400MPaに達している。この試験体において1型疲労亀裂が発見されたときの繰り返し数47万回に対する隅肉溶接の疲労強度を式(5.19)の第1式から推定すると213MPaになる。400MPaはこの値よりはるかに大きい値であり、試験体B4-L1に1型疲労亀裂が発生したのは当然と考えられる。

次に、試験体F9の1型疲労亀裂の発生原因を調べる。前節の解析結果から、 $\gamma/\gamma^*$ が1より大きくなるに従って水平補剛材の位置の面外たわみは抑制されるが、圧縮フラン

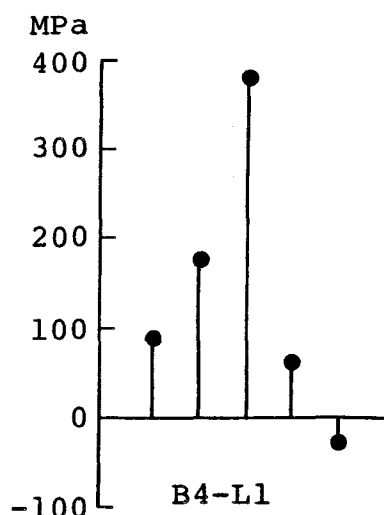
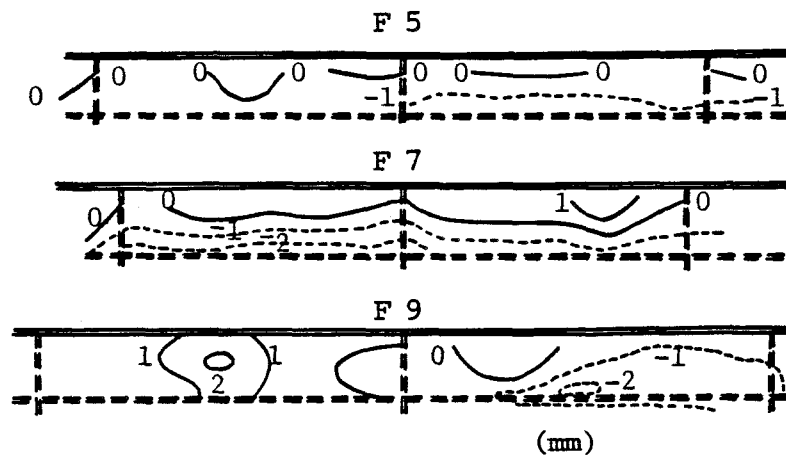


図-6.6 試験体B4-L1の実測された2次曲げ応力

ジと水平補剛材との間の局所的な面外変形が問題となる。圧縮フランジと水平補剛材との間のサブパネルの初期たわみ形状を試験体Fシリーズについて図-6.7に示す。F5とF7についてはフランジ方向に沿って初期たわみ形状の変化が少ないが、F9については両方のサブパネルの中央付近で局所的に初期たわみが増加している。サブパネルは台形分布の圧縮応力を受けているが、近似的に等分布の圧縮応力を受ける長方形板と見なすと、試験体F9のサブパネルの中央付近の局所的な初期たわみ形状は圧縮板の座屈形状に類似する。したがって、そのような初期たわみ形状の存在によって、フランジ応力がウェブの降伏応力度の半分以下であっても大きな2次曲げ応力が生じ、1型疲労亀裂が発生したと考えられる。



Note: thickness of web plate = 3.2 mm

図-6.7 試験体Fシリーズの初期たわみ

## 6.5 水平補剛材を有するプレート ガーダーの1型疲労亀裂の疲労強度

### 6.5.1 $\gamma/\gamma^*=1$ の場合の疲労強度

2.4.5項で示したように、ウェブが薄肉化するとウェブに対するフランジの回転拘束が相対的に大きくなり、ウェブはフランジにより固定支持されていると見なすことができる。したがって、 $\gamma/\gamma^*=1$ の水平補剛材を有するウェブの場合、図-6.4に示した $\sigma_o/\sigma_e$ と $\sigma_b/\sigma_e$ の関係を使用する。この関係を両対数グラフで表わすと図-6.8になる。各初期たわみの大きさにおいて、 $\sigma_o/\sigma_e$ が小さいときの2点を除いて両者の関係はほぼ線形になる。したがって $\sigma_o/\sigma_e$ と $\sigma_b/\sigma_e$ の関係を次式で近似する。

$$\frac{\sigma_b}{\sigma_e} = C_2 \left( \frac{\sigma_o}{\sigma_e} \right)^{\delta_2} \quad (6.10)$$

ここに、 $C_2, \delta_2$  : 係数

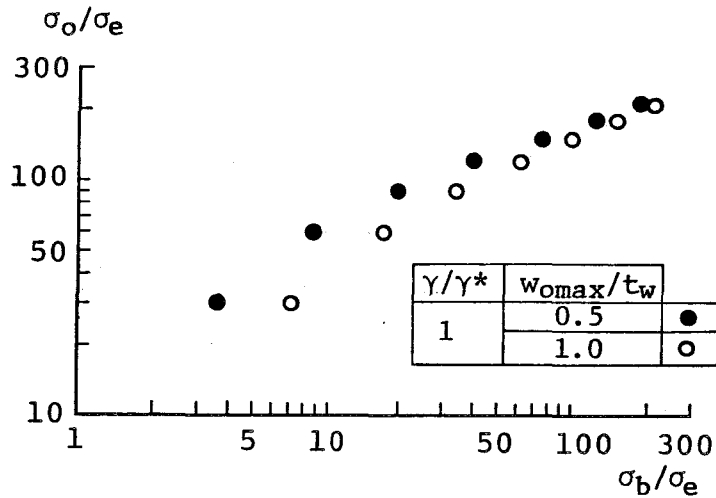


図-6.8 両対数上の  $\sigma_o/\sigma_e$  と  $\sigma_b/\sigma_e$  の関係

$\sigma_o/\sigma_e$  が小さいときの2点を除いた点に対して最小自乗法を適用して決定された  $C_2, \delta_2$  の値を表-6.2に示す。式(6.10)と図-6.4の有限要素法解析の結果との比較を図-6.9に示す。 $\sigma_o/\sigma_e$  が低い場合を除いて式(6.10)は有限要素法解析の結果をよく近似していることがわかる。

表-6.2  $C_2$  と  $\delta_2$  の値

$w_{omax}/t_w$	$C_2$	$\delta_2$
0.5	$1.1384 \times 10^{-4}$	2.67
1.0	$2.3527 \times 10^{-3}$	2.12

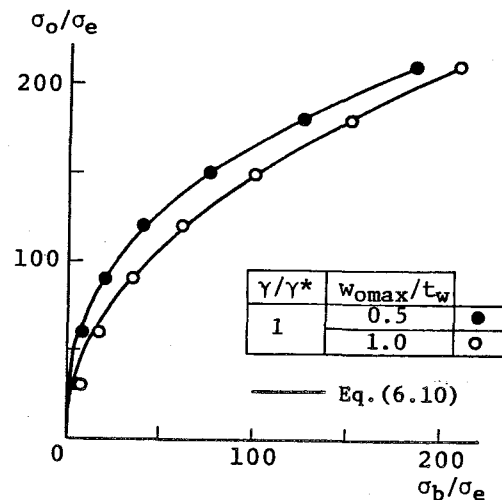


図-6.9 式(6.10)と有限要素法解析の結果との比較

2次曲げ応力  $\sigma_b$  の全振幅で表わした200万回疲労強度を166.7 MPaとすると、200万回疲労強度に対する最大面内曲げ応力  $\sigma_{\text{oma}}/\sigma_Y$  と幅厚比  $\beta$  の関係は式(6.10)を用いて次式で与えられる。

$$\frac{\sigma_{\text{omax}}}{\sigma_Y} = \left( \frac{166.7}{C_2 \sigma_Y} \right)^{\frac{1}{\delta_2}} \frac{1}{(1 - R^{\delta_2})^{\frac{1}{\delta_2}}} \left( \frac{\sigma_e}{\sigma_Y} \right)^{1 - \frac{1}{\delta_2}} \quad (6.11)$$

ここに、R：最小面内曲げ応力に対する最大面内曲げ応力の比

R=0で  $\sigma_Y = 235.3$  MPaのとき、式(6.11)が与える  $\sigma_{\text{omax}}/\sigma_Y$  と  $\beta$  の関係を図-6.10に示す。同図には次式から与えられる座屈曲線も示してある。

$$\sigma_{\text{omax}} = 142.6 \sigma_e \quad (6.12)$$

ここで、座屈係数の値142.6は、非載荷辺固定支持された長方形板が水平補剛材<sup>6)</sup>の位置で節となって座屈するときのものである。図-6.10より、200万回疲労強度が座屈強度より大きいことがわかる。

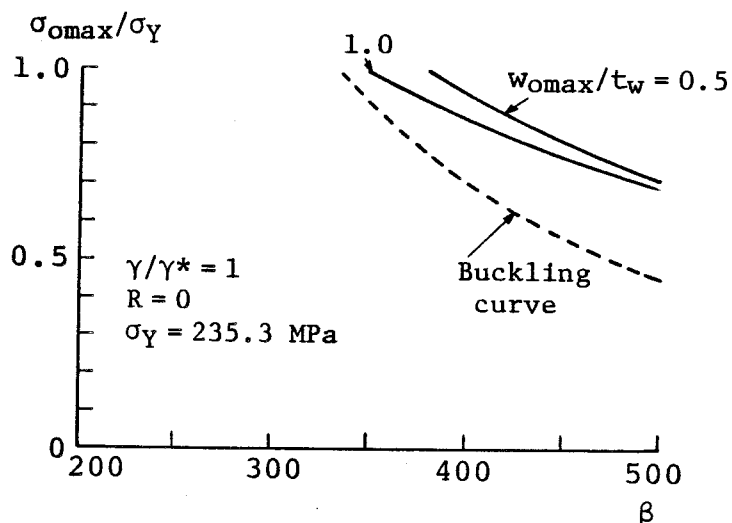


図-6.10  $\gamma/\gamma^* = 1$  場合の  $\sigma_{\text{omax}}/\sigma_Y$  と  $\beta$  の関係

### 6.5.2 $\gamma/\gamma^*$ が1より大きい場合の疲労強度

$\gamma/\gamma^*$  が1より大きくなるに従って圧縮フランジと水平補剛材との間のサブパネルの局所的な面外変形に起因する2次曲げ応力が問題となる。サブパネルは台形分布の圧縮応力

を受けているが、近似的に等分布の圧縮応力を受けていると仮定して第4章の結果を使用する。サブパネルが圧縮フランジにより固定支持され、水平補剛材により単純支持されていると仮定すると、圧縮応力と2次曲げ応力の関係は次式で与えられる。

$$\begin{cases} \frac{\sigma_o}{\sigma_{es}} = k_{cr} \eta_o + \frac{3}{4}(1-\nu^2)\theta \xi_o \\ \frac{\sigma_b}{\sigma_{es}} = S \frac{e}{t_w} + \sqrt{A^2 \xi_o^2 + B^2} - B \end{cases} \quad (6.13)$$

ここに、

$$\sigma_{es} = \frac{\pi^2 E}{12(1-\nu^2)} \frac{1}{\beta_s^2}, \quad \beta_s = \frac{\beta}{5}$$

表-4.1において条件(II)の $a/b=0.8$ に対する各係数の値を $k_{cr}$ ,  $\theta$ ,  $S$ ,  $A$ ,  $B$ に用いる。2次曲げ応力 $\sigma_b$ の全振幅を隅肉溶接の200万回疲労強度166.7MPaで制限することにより、200万回疲労強度に対する最大圧縮応力 $\sigma_{omax}/\sigma_Y$ と幅厚比 $\beta_s$ の関係が、 $R(=\sigma_{omin}/\sigma_{omax})$ の値ごとに得られる。 $R=0$ で $\sigma_Y=235.3$ MPaに対する $\sigma_{omax}/\sigma_Y$ と $\beta_s$ の関係を図-6.11に示す。この図には、次式で与えられる座屈曲線も示してある。

$$\sigma_{omax} = 5.41 \cdot \sigma_{es} \quad (6.14)$$

図より、200万回疲労強度が座屈強度よりかなり小さいことがわかる。

$\beta_s$ を $\beta$ に換算して200万回疲労強度を表わし、前項の $\gamma/\gamma^*=1$ の場合の200万回疲労強度と比較すると図-6.12が得られる。図より、 $\gamma/\gamma^*>1$ の場合の200万回疲労強度が $\gamma/\gamma^*=1$ の場合の200万回疲労強度よりかなり低いことがわかる。これは、 $\gamma/\gamma^*$ が1より大きくなって、ウェブ全体の面外変形が抑制されても、圧縮フランジと水平補剛材との間のサブパネルに座屈形状に類似する初期たわみが存在するとき、 $\gamma/\gamma^*>1$ の場合の200万回疲労強度が $\gamma/\gamma^*=1$ の場合のものよりも低くなることを示している。

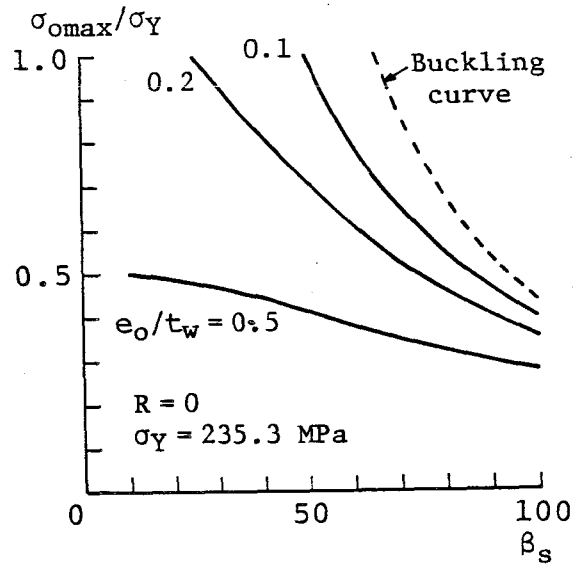


図-6.11  $\gamma/\gamma^* > 1$  の場合の  $\sigma_{\text{omax}}/\sigma_Y$  と  $\beta_s$  の関係

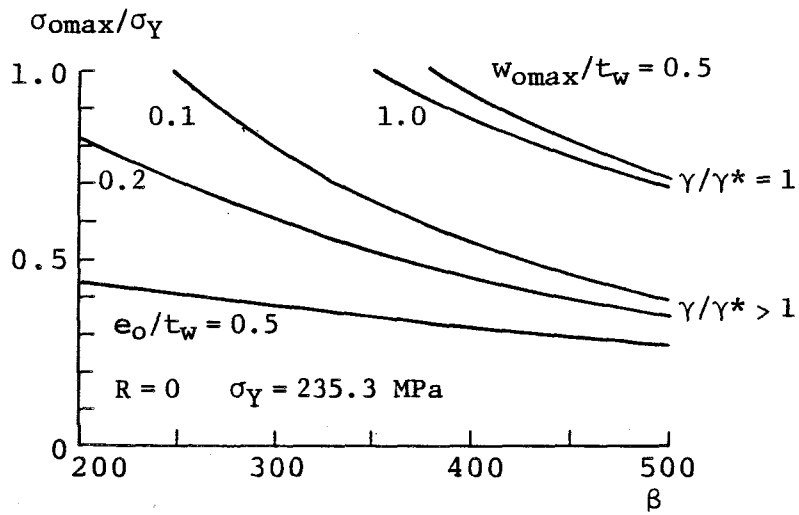


図-6.12  $\gamma/\gamma^* = 1$  と  $\gamma/\gamma^* > 1$  の場合の 200万回疲労強度の比較

## 6. 6 結 論

水平補剛材を有するプレートガーダーの1型疲労亀裂の発生原因は、 $\gamma/\gamma^*$ の大きさによって異なる。 $\gamma$ はウェブに対する水平補剛材の曲げ剛性比であり、 $\gamma^*$ は、DINに規定される、水平補剛材によって区分された各々のサブパネルが水平補剛材を節として座屈するために必要な最小の曲げ剛性比である。

- (1)  $\gamma/\gamma^*=1$ の場合、水平補剛材はウェブと一体となって変形する。ウェブの全体の初期たわみ形状が2次曲げ応力の増加、すなわち疲労亀裂の発生に重要である。
- (2)  $\gamma/\gamma^*$ が1より大きくなるに従って、水平補剛材の位置の面外変形は抑制されるが、区分された各々のサブパネルが独自の変形をするようになる。この場合圧縮フランジと水平補剛材との間のサブパネルにおいて座屈形状に類似する初期たわみの存在が2次曲げ応力の増加と疲労亀裂の発生に重要である。
- (3)  $\gamma/\gamma^*$ が1より大きくなって、ウェブ全体の面外変形が抑制されても、圧縮フランジと水平補剛材との間のサブパネルが座屈形状に類似する初期たわみを有するとき、 $\gamma/\gamma^*>1$ の場合の200万回疲労強度が $\gamma/\gamma^*=1$ の場合のものよりかなり低くなる。



## 参 考 文 献

- 1) Patterson, P.J., J.A. Corrado, J.S. Huang and B.T. Yen: Fatigue and static tests of two welded plate girders, WRC, Bull. No. 155, Oct., 1970.
- 2) Maeda, Y.: Ultimate static strength and fatigue behavior of longitudinally stiffened plate girders in bending, IABSE, Proc. London Colloquium, pp. 269 - 282, March, 1971.
- 3) Marguerre, K.: Zur Theorie der gekrümmter Platte grosser Formänderung, Proc. 5th International Congress for Applied Mechanics, Cambridge, pp. 93 - 101, 1938.
- 4) DIN4114, 1952.
- 5) 前田幸雄・川井豊: 薄肉ハイブリッド・ガーダーの曲げ疲労強度に関する研究, 溶接学会誌, 第43巻, 第3号, pp.736-742, 1974.
- 6) Rockey, K.C. and D.M.A. Leggett: Buckling of a plate girder web under pure bending when reinforced by a single longitudinal stiffener, Proc. of Institution of Civil Engineers, Vol. 21, pp.161 - 188, 1962.

# 第7章 せん断を受ける薄肉プレートガーダーの疲労亀裂発生に関する力学的影響因子

## 7. 1 概 説

1. 1節で述べたように、薄肉プレートガーダーが繰り返しせん断を受けると、斜め張<sup>1)~4)</sup>力場が予想される方向の隅角部の近傍の隅肉溶接のウェブ側止端に疲労亀裂が発生する可能性がある。この疲労亀裂を4型疲労亀裂と名付けた。

本章では、最初に、せん断を受ける薄肉プレートガーダーのウェブパネルを、せん断を受けかつ初期たわみを有する長方形板にモデル化し、これに有限要素法による理論解析を適用し、ウェブの面外挙動を明らかにする。特に、初期たわみとその面外挙動に与える影響を詳細に調べる。次に、解析結果と既往の実験結果との比較により、1. 2節で述べた問題d) 4型疲労亀裂は、縦横比が1より小さいウェブパネルにおいては垂直補剛材側に沿って発生しやすく、1より大きいウェブパネルにおいてはフランジ側に沿って発生しやすい傾向があること、e) Venのせん断疲労実験<sup>1)</sup>における縦横比が1のウェブパネルで4型疲労亀裂が垂直補剛材側に多く発生したことを解明し、4型疲労亀裂の発生に関する力学的影響因子を明らかにする。

## 7. 2 せん断を受ける長方形板の面外有限変形解析

### 7. 2. 2 解析モデルと境界条件

せん断を受ける薄肉プレートガーダーの4型疲労亀裂もウェブの面外変形に起因するので、初期たわみ形状が面外変形および2次曲げ応力に与える影響を調べる。

図-7. 1に示すように、解析モデルはせん断を受ける $a \times b$ の長方形板で、次式の初期たわみを持っている。

$$w_0 = w_{0\max} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \quad (7.1)$$

ここに、 $w_{0\max}$ ：最大初期たわみ

$m, n$ ：それぞれ  $x$  軸,  $y$  軸方向の初期たわみモード

$m$  と  $n$  の組み合わせによって与えられる初期たわみ形状を初期たわみモード ( $m, n$ ) と呼ぶ。

長方形板の面外方向の境界条件に対して次の3つの場合を考える。

(I) 4辺で単純支持されている場合、

(II)  $x=0, a$  で単純支持され、 $y=0, b$  で固定支持されている場合、

(III) 4辺で固定支持されている場合。

次のように各辺を強制的に変位させることによりせん断荷重を導入する。

$$\begin{cases} x=0 \text{ に沿って } v=-d, & x=a \text{ に沿って } v=d \\ y=0 \text{ に沿って } u=-d, & y=b \text{ に沿って } u=d \end{cases} \quad (7.2)$$

ここに、 $u, v$ ：それぞれ  $x, y$  軸方向の変位、

$d$ ：強制変位。

各辺の平均せん断応力  $\tau_0$  は次式で与えられる。

$$\begin{aligned} \tau_0 &= \frac{1}{a} \int_0^a \tau_{mxy} dx && (y=0 \quad b) \\ &= \frac{1}{b} \int_0^b \tau_{mxy} dy && (x=0 \quad a) \end{aligned} \quad (7.3)$$

ここに、 $\tau_{mxy}$ ：膜せん断応力

要素分割は、図-7.1に示すように144要素169節点である。

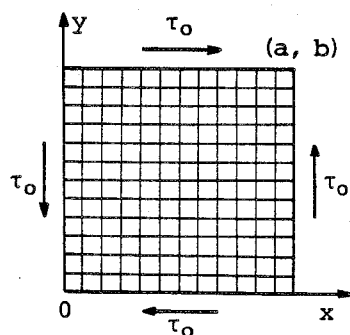


図-7.1 せん断を受ける長方形板

7. 2. 2 面外たわみ

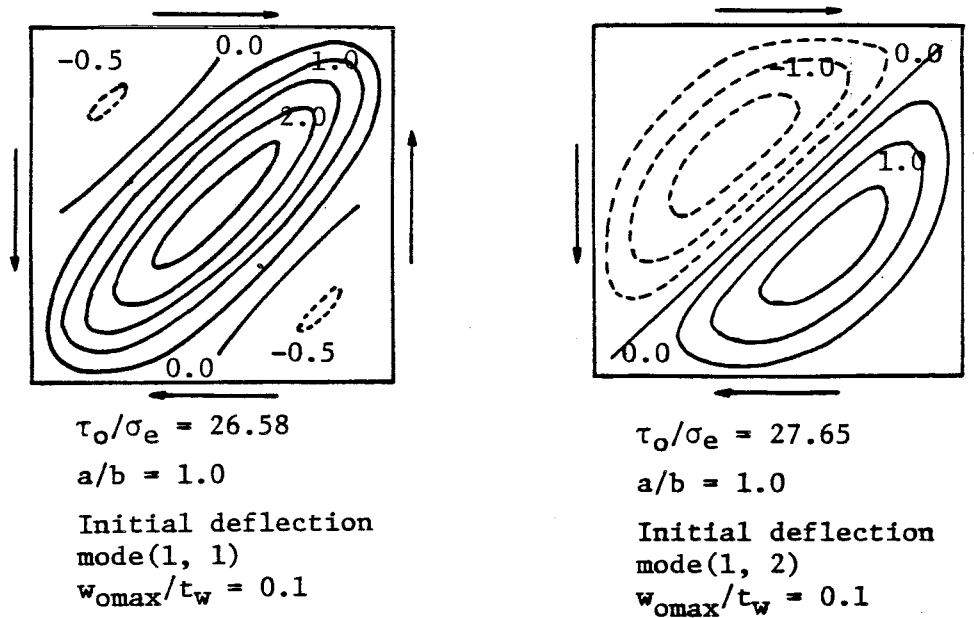
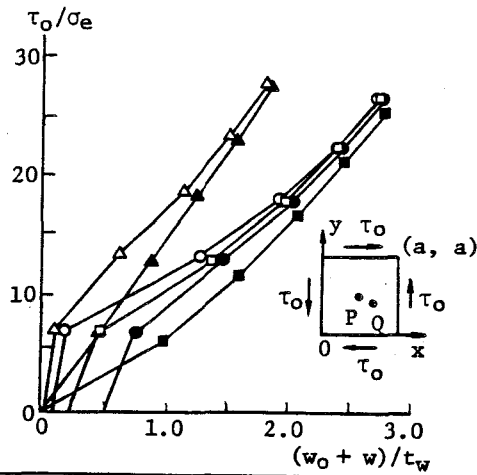


図-7. 2 面外たわみ形状 [条件(I)]

4辺で単純支持された正方形板の面外たわみ形状を、2つの異なる初期たわみモードに対して図-7. 2に示す。実線の等高線は紙面から近づく面外たわみを表わし、点線の等高線は紙面から遠ざかる面外たわみを表わす。図中の数値は板厚で無次元化された面外たわみの大きさを示す。初期たわみモード(1, 1)の場合には対角線上に峰を有する波が1つ生じるが、初期たわみモード(1, 2)の場合には対角線をはさんで2つの波が生じる。荷重と面外たわみの関係を、3つの異なる初期たわみモードに対して図-7. 3に示す。初期たわみモード(1, 1)と(1, 2)の場合には、面外たわみは荷重が低い段階ではあま増加しないが、座屈荷重を越えると急激に増加する。他方、荷重が増加すると、初期たわみモード(1, 1)と(2, 2)の曲線は最大初期たわみの大きさにかかわらず互いに漸近する。このとき、面外たわみ形状も互いに類似した形状になる。初期たわみモードが面外変形に与える影響は、境界条件が(II)と(III)の場合についてもこれと同じような傾向が見られる。



Initial Deflection Mode	$w_{o\max}/t_w$		Point
	0.1	0.5	
(1, 1)	○	●	P(a/2, a/2)
(2, 2)	□	■	
(1, 2)	△	▲	Q(2a/3, 5a/12)

図-7.3 荷重と面外たわみの関係 [条件(I)]

### 7.2.3 膜 応 力

対角線上の主膜応力の分布を、初期たわみモード(1, 1)と(1, 2)に対して図-7.4に示す。図の $\sigma_1$ は面外たわみ形状の峰線方向の対角線上の最大主膜応力を示し、 $\sigma_2$ は峰線に垂直な方向の対角線上の最小主膜応力を示す。荷重が増加すると、 $\sigma_1$ の分布が全体的に上昇し、峰線方向に斜め張力場が形成される。初期たわみモード(1, 1)の場合の $\sigma_1$ の分布形状は大きい荷重段階においてもほぼ一樣な形状になるが、初期たわみモード(1, 2)の場合には対角線の中央で最大値を持つ形状になる。他方、 $\sigma_2$ の分布形状は荷重が増加してもほとんど移動せず、初期たわみモードにかかわらずほぼ一樣な形状になる。

荷重と板中央の主膜応力の関係を図-7.5に示す。最大主膜応力 $\sigma_1$ の増加は初期たわみモードによって異なるが、最大初期たわみの大きさにはあまり影響されない。したがって、初期たわみ形状が斜め張力場の形成に重要であると考えられる。他方、最小主膜応力 $\sigma_2$ は座屈荷重より低い領域では荷重とともに増加するが、座屈荷重を越えるとあまり増加しない。

境界辺 $y = b$ 上の膜せん断応力の分布を図-7.6に示す。膜せん断応力は斜め張力場方向の隅角部の近くでは平均せん断応力 $\tau_o$ より大きくなり、もう一方の隅角部の近くではこれより小さくなる。Yenの疲労実験においても、膜せん断応力は、斜め張力場方向の隅角部の近くでは梁理論から計算されるせん断応力より大きくなり、もう一方の隅角部の

近くではこれより小さくなることを確認されている。

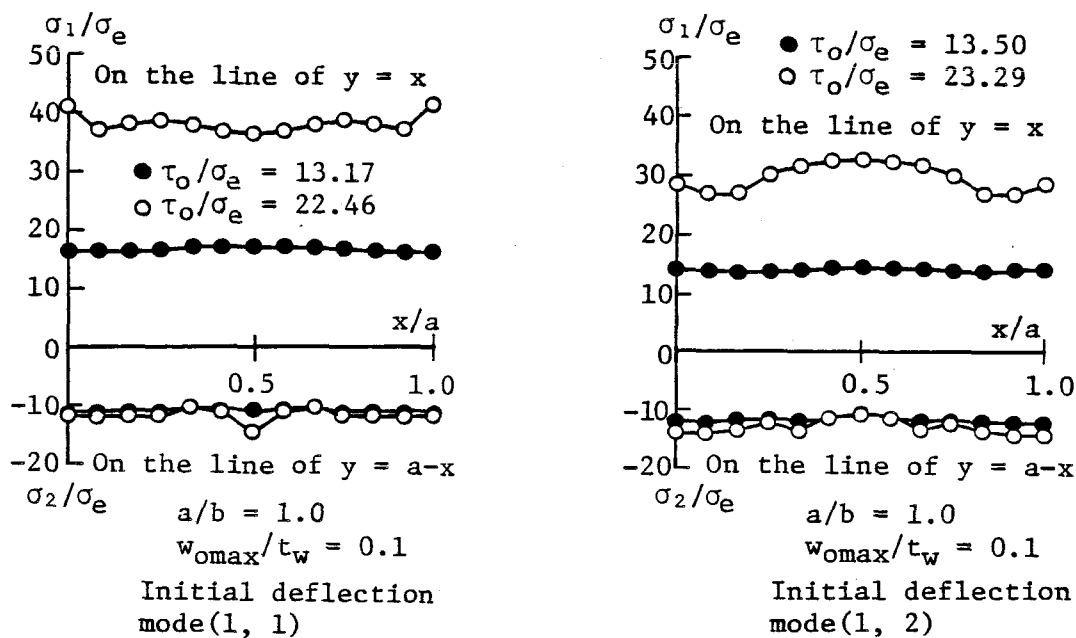


図-7.4 対角線上の主膜応力の分布 [条件(I)]

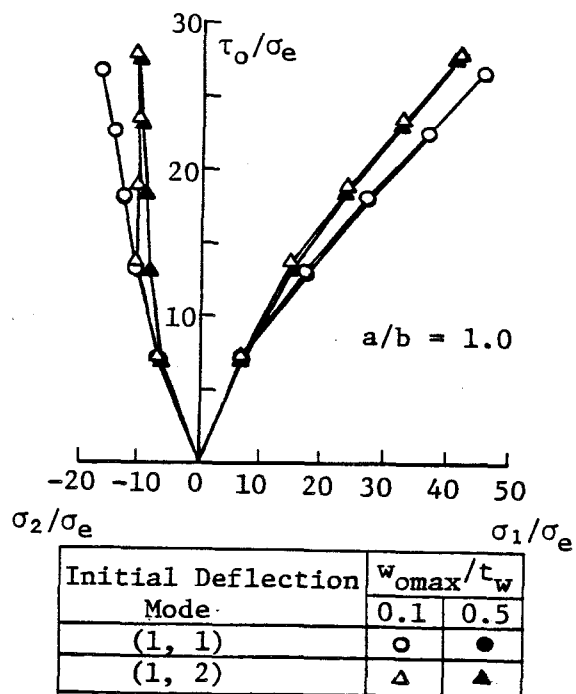


図-7.5 荷重と主膜応力の関係 [条件(I)]

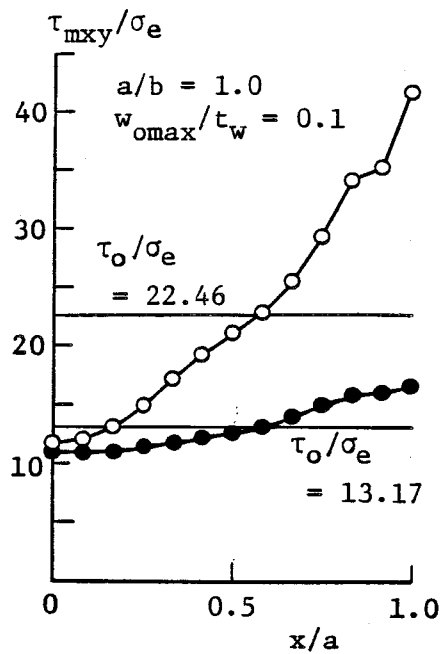


図-7.6 境界辺  $y = b$  上の膜せん断応力の分布 [条件(I)]

#### 7.2.4 2次曲げ応力

境界辺上に生じる2次曲げ応力の分布を、初期たわみモード(1, 1)と(1, 2)に対して図-7.7に示す。初期たわみモード(1, 1)の場合には各辺上の2次曲げ応力の分布形状は互いに同じになる。初期たわみモード(1, 2)の場合には  $x = 0$  と  $x = a$  の2次曲げ応力の分布形状が同じになり、 $y = 0$  と  $y = b$  の2次曲げ応力の分布形状が同じになる。2次曲げ応力が最大になる位置は、初期たわみモード(1, 1)の場合の方が初期たわみモード(1, 2)の場合よりも隅角部に接近している。初期たわみモード(1, 2)の場合、 $x = 0$  上の最大2次曲げ応力の方が  $y = b$  上の最大2次曲げ応力より大きい。

荷重と最大2次曲げ応力の関係を図-7.8に示す。初期たわみモード(1, 2)の場合に対しては  $x = 0$  上の最大2次曲げ応力の変化が示してある。荷重が低いときには、2次曲げ応力の増加は最大初期たわみあるいは初期たわみモードによって異なるが、荷重が増加すると、初期たわみモード(1, 2)で  $w_{o\max}/t_w = 0.1$  の場合を除いて各曲線は互いに漸近する。

初期たわみモード(1, 1)で縦横比  $a/b$  が1.5の長方形板の2次曲げ応力の分布を図-7.9に示す。長辺上の最大2次曲げ応力の方が短辺上のものより大きいことがわか

る。

各種縦横比に対する荷重と2次曲げ応力の関係を図-7.10に示す。a/b = 0.5 に対する2次曲げ応力の増加が他の縦横比に対するものよりかなり小さいことがわかる。これは、後の8.2.5項の表-8.1に示すように、せん断を受ける長方形板の座屈係数が縦横比が小さくなるに従って増加し、特にa/b = 0.5に対する座屈係数が他の縦横比に対するものよりかなり大きくなるからである。

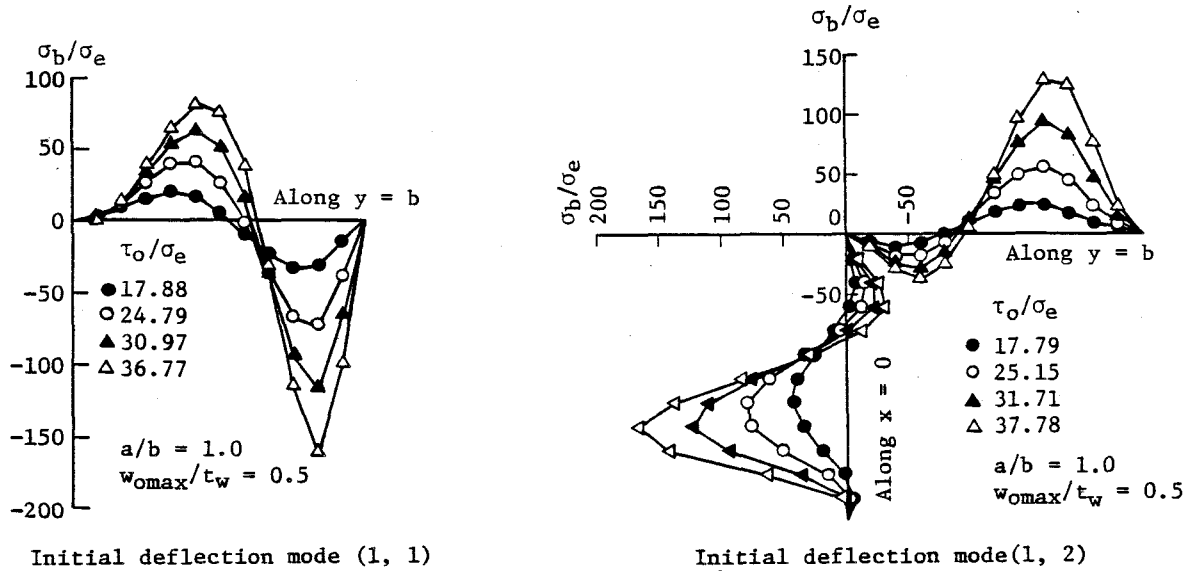


図-7.7 2次曲げ応力の分布 [条件(III)]

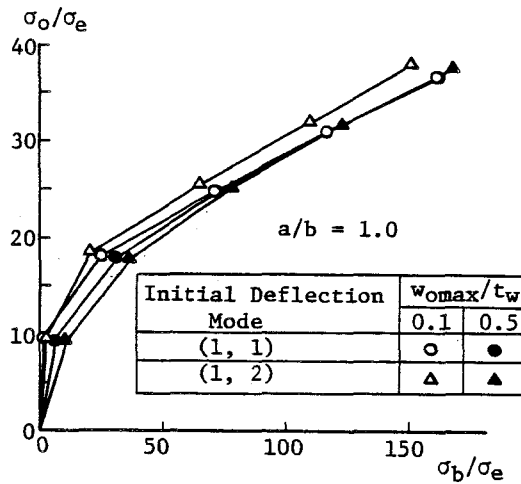


図-7.8 荷重と最大2次曲げ応力の関係 [条件(III)]



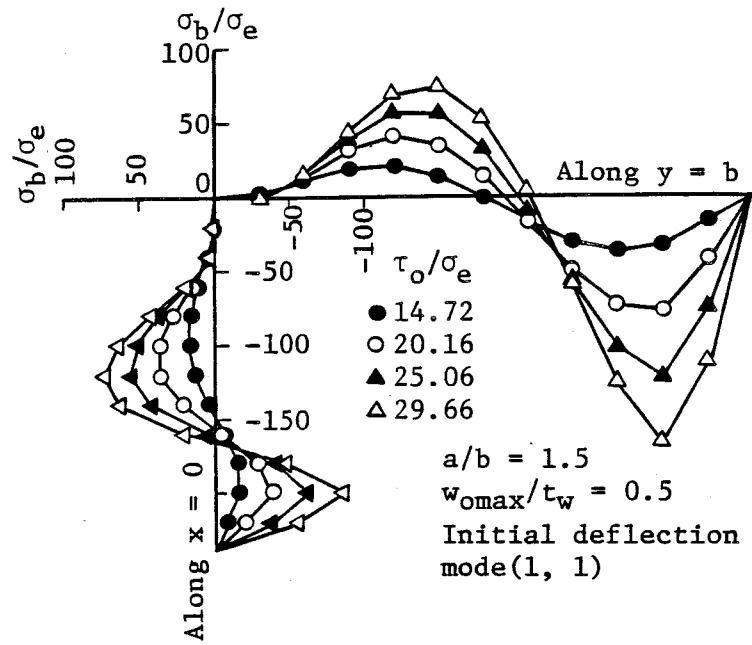


図-7.9 長方形板の2次曲げ応力の分布 [条件(Ⅲ)]

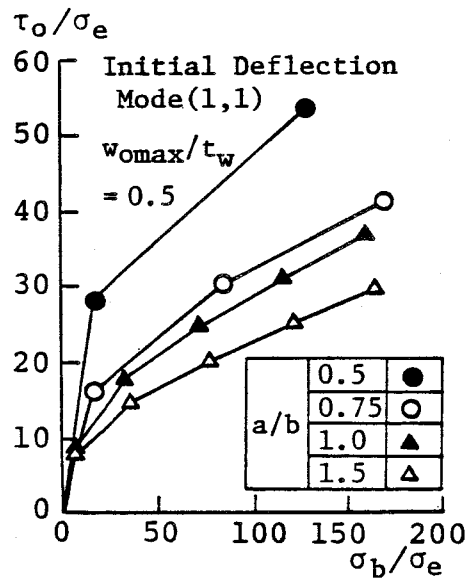


図-7.10 縦横比が最大2次曲げ応力の増加に与える影響 [条件(Ⅲ)]

## 7.3 せん断と面内曲げを受ける正方形板の面外有限変形解析

### 7.3.1 解析モデルと境界条件

実際のプレートガーダーはせん断の他<sup>1),2)</sup>に必ず曲げを伴う。Yenの疲労実験においては、ウェブの平均せん断応力を $\tau_0$ 、フランジ縁応力を $\sigma_0$ とすると、 $\sigma_0/\tau_0$ が約1以下のウェブパネルを、疲労亀裂の分類でせん断を受けるウェブパネルと定義している。次に、せん断と面内曲げを受ける正方形板の面外有限変形を調べる。

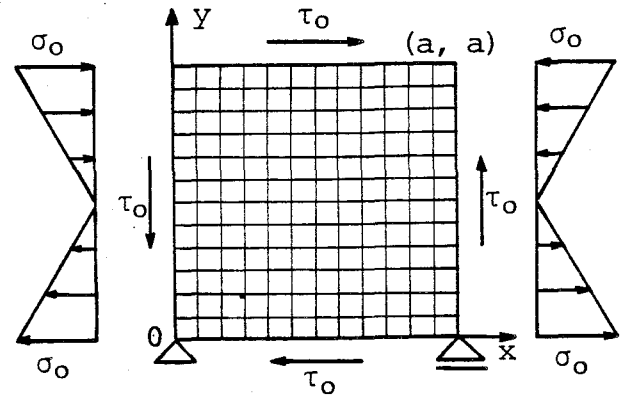


図-7.1.1 せん断と面内曲げを受ける正方形板

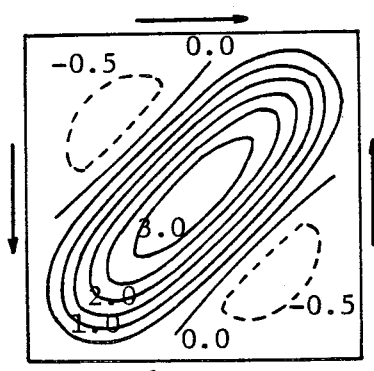
図-7.1.1に示すように、解析モデルは $a \times a$ の正方形板である。境界条件は、面外方向に対して4辺固定支持、面内方向に対して4辺自由とし、点 $(0, 0)$ の変位 $u$ と $v$ 、さらに点 $(a, 0)$ の変位 $v$ を固定する。また、荷重条件は、4辺に一様分布のせん断応力が生じ、かつ $x = 0$ と $a$ に直線分布の面内曲げ応力が生じるように節点に荷重載荷する。載荷中はせん断と面内曲げの荷重増分の比率を一定とし、せん断のみ $\sigma_0/\tau_0 = 1$ 、 $\sigma_0/\tau_0 = 3$ 、 $\sigma_0/\tau_0 = 8$ の各場合について計算を行なう。

### 7.3.2 解析結果

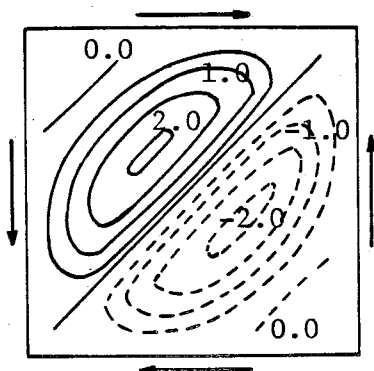
面外たわみ形状を図-7.1.2に示す。せん断に面内曲げが加わると、面外たわみ形状は初期たわみモードにかかわらず互いに類似した形状になる。面内曲げの作用が大きくなるに従って、最大面外たわみの生じる位置は面内曲げの圧縮側に移動する。

各辺上に生じる2次曲げ応力の分布形状は面外たわみ形状に依存するため、せん断のみを載荷する場合には、初期たわみモード $(1, 1)$ と $(2, 2)$ に対するものと初期たわみモード $(1, 2)$ と $(2, 1)$ に対するものとは異なるが、せん断に面内曲げが加わると、2次曲げ応力の分布形状は初期たわみモードにかかわらず互いに類似した形状になる。1例として、 $\sigma_0/\tau_0 = 1$ で初期たわみモード $(1, 1)$ の場合の2次曲げ応力の分布を図-7.

13に示す。斜め張力場方向の隅角部の近くで大きな2次曲げ応力が生じている。各辺において、最終の荷重増分段階で2次曲げ応力が最も大きくなる節点の2次曲げの応力の変化を図-7.14に示す。各辺上に生じる2次曲げ応力の大きさの順番が、荷重が増加すると明瞭になる。初期たわみモードにかかわらず、面内曲げによる圧縮縁 $y = a$ の2次曲げ応力が最も大きくなり、引張縁 $y = 0$ の2次曲げ応力が最も小さくなる。

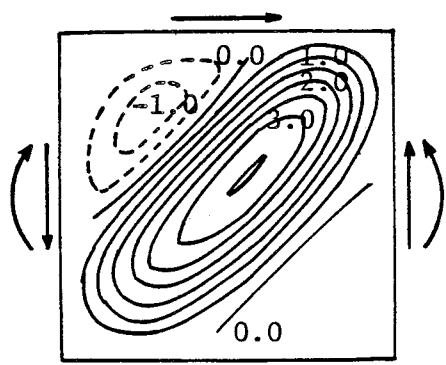


$\tau_o/\sigma_e = 32.0$   
 $\sigma_o/\sigma_e = 0.0$   
 Initial deflection  
 mode(1, 1)  
 $w_{o\max}/t_w = 0.1$

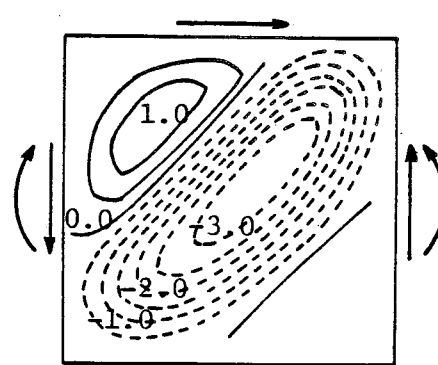


$\tau_o/\sigma_e = 32.0$   
 $\sigma_o/\sigma_e = 0.0$   
 Initial deflection  
 mode(2, 1)  
 $w_{o\max}/t_w = 0.1$

(a) せん断のみ載荷

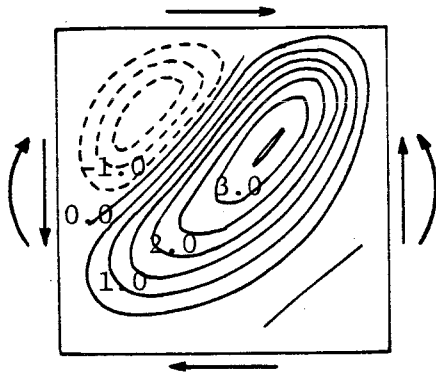


$\tau_o/\sigma_e = 32.0$   
 $\sigma_o/\sigma_e = 32.0$   
 Initial deflection  
 mode(1, 1)  
 $w_{o\max}/t_w = 0.1$

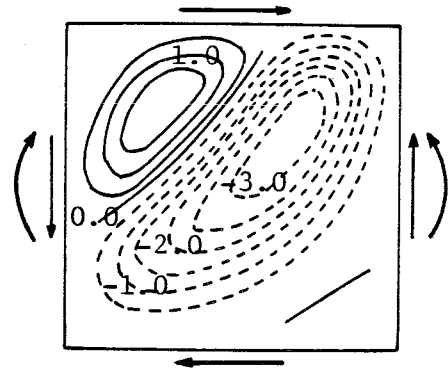


$\tau_o/\sigma_e = 32.0$   
 $\sigma_o/\sigma_e = 32.0$   
 Initial deflection  
 mode(2, 1)  
 $w_{o\max}/t_w = 0.1$

(b)  $\sigma_o/\tau_o = 1$ に従って載荷

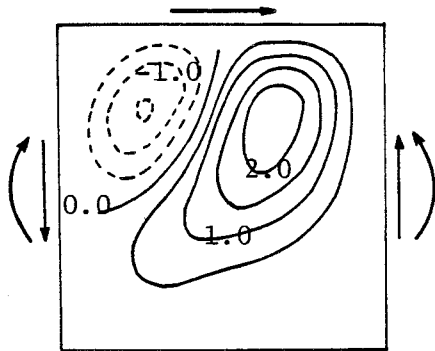


$\tau_0/\sigma_e = 26.8$   
 $\sigma_0/\sigma_e = 80.4$   
 Initial deflection  
 mode(1, 1)  
 $w_{\text{omax}}/t_w = 0.1$

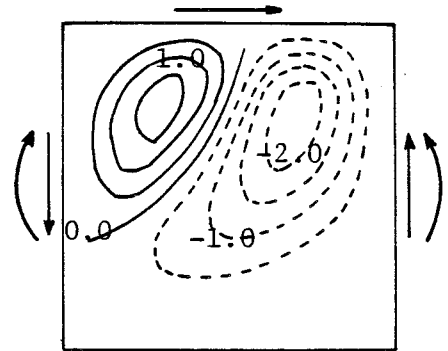


$\tau_0/\sigma_e = 26.8$   
 $\sigma_0/\sigma_e = 80.4$   
 Initial deflection  
 mode(2, 1)  
 $w_{\text{omax}}/t_w = 0.1$

(c)  $\sigma_0/\tau_0 = 1/3$ に従って載荷



$\tau_0/\sigma_e = 11.4$   
 $\sigma_0/\sigma_e = 91.2$   
 Initial deflection  
 mode(1, 1)  
 $w_{\text{omax}}/t_w = 0.1$



$\tau_0/\sigma_e = 11.4$   
 $\sigma_0/\sigma_e = 91.2$   
 Initial deflection  
 mode(2, 1)  
 $w_{\text{omax}}/t_w = 0.1$

(d)  $\sigma_0/\tau_0 = 8$ に従って載荷

図-7.12 面外たわみ形状 [条件(Ⅲ)]

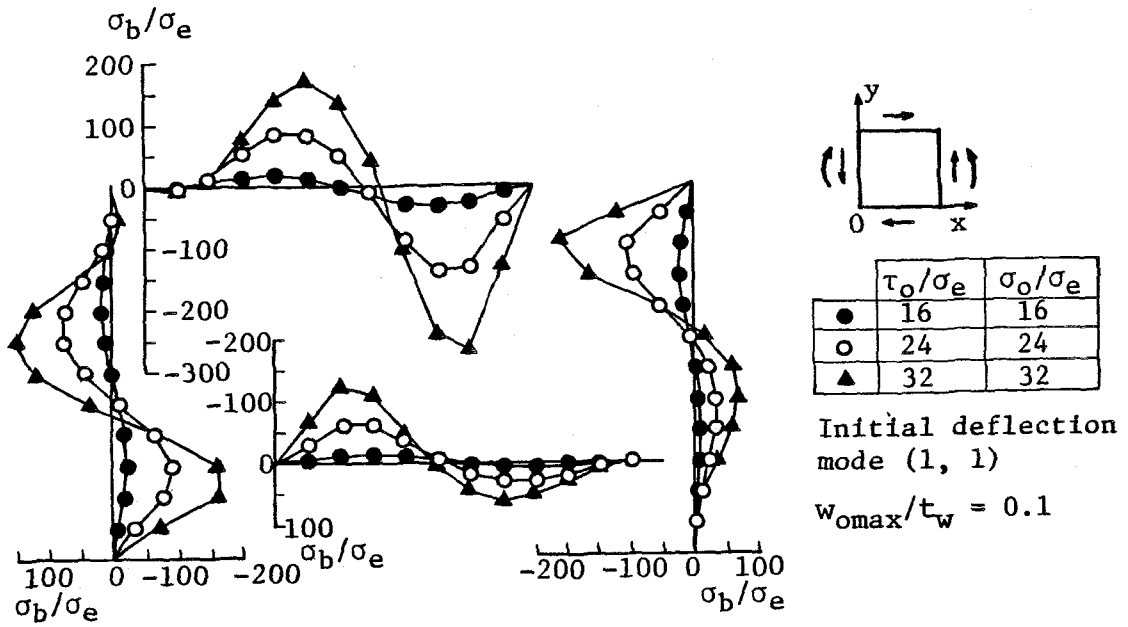


図-7.13 2次曲げ応力の分布 [条件(Ⅲ)]

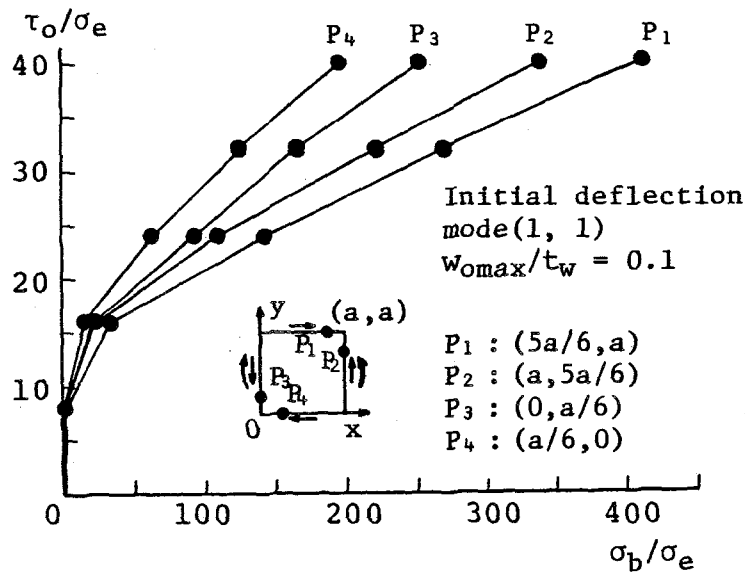


図-7.14 荷重と2次曲げ応力の関係 [条件(Ⅲ)]

## 7.4 解析結果と実験結果の比較

### 7.4.1 2次曲げ応力の分布形状

せん断を受ける薄肉プレートガーダーの疲労実験は主にYenとStallmeyerによって行なわれている。Yenは、ひずみゲージによって測定された2次曲げ応力と、面外たわみの実

測値から推定された2次曲げ応力の比較を行なっている。その一例を図-7.15に示す。Yenは、斜め張力場方向の隅角部の近傍で2次曲げ応力が最大になり、この位置に4型疲労亀裂が発生することを明らかにした。図-7.7, 7.9に示した、有限要素法解析による2次曲げ応力の分布形状は図-7.15の分布形状に似ている。

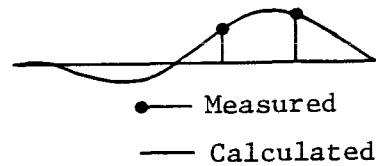


図-7.15 測定された2次曲げ応力  
[文献(2)の図-29]

#### 7.4.2 4型疲労亀裂の発生位置

4型疲労亀裂の発生位置の分類を表-7.1に示す。表の数値は疲労亀裂が発生したウェブパネルの数を表わしている。4型疲労亀裂は、ウェブの縦横比が1より小さいときには垂直補剛材側に沿って発生しやすく1より大きくなるとフランジ側に沿って発生しやすくなることわかる。この傾向は、長方形板の長辺上の最大2次曲げ応力の方が短辺上のものより大きくなるという7.2.4項の解析結果によって説明される。

ところで、実際のプレートガーダーのフランジのねじり剛性は垂直補剛材のねじり剛性よりも大きいので、縦横比が1のウェブについて考えるならば、垂直補剛材側に発生する2次曲げ応力よりもフランジ側に発生する2次曲げ応力の方が大きくなり、4型疲労亀裂はフランジ側に沿って発生しやすいと考えられる。しかし、Yenの実験の縦横比が1のウェブでは、4型疲労亀裂が垂直補剛材側に多く発生している。

次にこの矛盾を解明する。

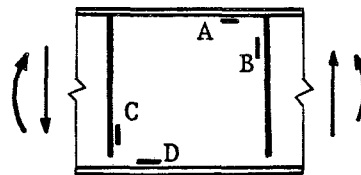
Yenの疲労実験の縦横比が1のウェブについて、4型疲労亀裂の発生位置を整理すると表-7.2になる。4型疲労亀裂の発生個数は位置D, B, A, Cの順に多くなる。4型疲労亀裂は位置Cに格段に多く発生し位置Dには発生していない。2次曲げ応力のみが4型疲労亀裂の発生原因であるとするならば、7.3.2項の解析結果から、4型疲労亀裂の発生個数は、位置Aが最も多く、位置Dが最も少なくなるはずである。位置Dについては実験結果と一致するが、位置Aについては実験結果と矛盾する。

表-7.1 4型疲労亀裂の発生位置の分類

Test	$\beta$	a/b	Fatigue crack locations		
			Only along stiffeners	Only along flanges	Both along stiffeners and flanges
Stallmeyer	267	0.75	8	1	0
	246	0.5	0	0	0
Yen	to	1.0	10	2	3
	287	1.5	0	1	1

表-7.2 Yenの実験の縦横比が1のウェブパネルの4型疲労亀裂の発生位置の細分類

Crack location	Number of cracks
A	4
B	3
C	11
D	0



この矛盾を解明する因子として、垂直補剛材をウェブに連結する隅肉溶接のウェブ側止端に生じる、面内曲げによる引張応力の影響が考えられる。位置Cには2次曲げ応力の他に面内曲げによって引張応力が生じる。この引張応力は、2次曲げ応力を受ける隅肉溶接のウェブ側止端の疲労強度を低下させるはずである。したがって、Yenの実験においては、位置Aの2次曲げ応力の方が位置Cのものよりも大きかったが、面内曲げによる引張応力のために位置Cの疲労強度の方が位置Aのものよりも低かったので、位置Cに4型疲労亀裂が多く発生したと考えられる。現在、2次曲げ応力と引張応力を同時に受ける隅肉溶接の疲労強度は求められておらず、そのような組み合わせ応力を受ける隅肉溶接の疲労強度が今後明らかにされねばならない。

## 7. 5 結 論

せん断を受ける薄肉プレートガーダーのウェブをせん断を受ける長方形板にモデル化し、これについて面外有限変形解析を行なった。解析結果と既往の実験結果とを比較することにより、ウェブの面外変形に起因する4型疲労亀裂の発生に関する力学的影響因子を明らかにした。

主な結果は次のとおりである。

- (1) せん断を受ける長方形板の面外たわみ形状は初期たわみ形状の影響を強く受ける。正方形板の場合、初期たわみモード(1, 1)と(2, 2)に対しては、対角線上に峰を有する波が生じるが、初期たわみモード(1, 2)と(2, 1)に対しては、対角線をはさんで2つの波が生じる。
- (2) せん断に面内曲げが加わると、面外たわみ形状は、初期たわみモードにかかわらず互いに類似した形状になるため、2次曲げ応力の分布形状も初期たわみモードにかかわらず互いに類似した形状になる。各辺に生じる2次曲げ応力の大きさを比較すると、面内曲げによる圧縮縁の2次曲げ応力が最も大きく、引張縁の2次曲げ応力が最も小さい。
- (3) 過去の実験で、縦横比が1より小さいウェブにおいては、垂直補剛材側に沿って4型疲労亀裂が発生しやすく、1より大きいウェブにおいては、フランジ側に沿って4型疲労亀裂が発生しやすかった。これは、せん断を受ける長方形板の長辺上の最大2次曲げ応力の方が短辺上の最大2次曲げ応力より大きいという解析結果によって説明される。他方、縦横比が小さくなると座屈係数が大きくなるので、面外変形が小さくなり、2次曲げ応力の増加も小さくなる。
- (4) Yenの実験の縦横比が1のウェブでは、4型疲労亀裂がフランジ側より垂直補剛材側に多く発生した。これは、各辺上に生じる2次曲げ応力の大小の比較によっては説明することができず、面内曲げによる引張応力の影響を考慮する必要がある。現在、2次曲げ応力と引張応力を同時に受ける隅肉溶接の疲労強度は求められておらず、今後明らかにされなければならない。



## 参 考 文 献

- 1) Yen, B.T. and J.A. Mueller: Fatigue tests of large-size welded plate girders, WRC, Bull.No.118, Nov.,1966.
- 2) Mueller, J.A. and B.T. Yen: Girder web boundary stresses and fatigue, WRC, Bull.No.127,Jan.,1968
- 3) L.R. Hall and J.E. Stallmeyer: Thin web girder fatigue behavior as influenced by boundary rigidity, Univ. of Illinois, C.E. Studies SRS No.278, Jan.,1964.
- 4) Goodpasture, D.W. and J.E. Stallmeyer: Fatigue behavior of welded thin web girders as influenced by web distortion and boundary rigidity,Univ. of Illinois, C.E. Studies SRS No.328, Aug.,1967.
- 5) Timoshenko, S.P. and J.M.Gere: Theory of Elastic Stability, 2nd edition, McGraw-Hill, pp.379-385,1961.

# 第8章 せん断を受ける薄肉プレートガーダーのウェブの面外変形を考慮した疲労強度

## 8.1 概 説

前章では、せん断を受ける薄肉プレートガーダーの4型疲労亀裂の発生に関する力学的影響因子を明らかにした。本章では、4型疲労亀裂に対して、200万回疲労強度をせん断応力で与える。最初にせん断を受ける長方形板の荷重と2次曲げ応力の関係を定式化する。次に、この関係式の2次曲げ応力に隅肉溶接の200万回疲労強度を代入することにより、せん断応力で表わされた200万回疲労強度とウェブの幅厚比の関係を与える。この関係を用いて、ウェブの初期たわみと残留応力、応力比、縦横比などがこの疲労強度に与える影響を調べる。せん断を受ける実際のプレートガーダーは必ず曲げを伴うので、この曲げが200万回疲労強度に与える影響についても調べる。

## 8.2 せん断を受ける長方形板の荷重と2次曲げ応力の関係の定式化

### 8.2.1 4辺単純支持された場合の荷重と面外たわみの関係

図-8.1に示すように、せん断を受ける $a \times b$ の長方形板が面外方向に4辺単純支持されている場合を考える。初期たわみ $w_0$ と付加面外たわみ $w$ をそれぞれ次のように仮定する。

$$w_0 = e_{01} \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b} + e_{02} \sin \frac{2\pi x}{a} \sin \frac{2\pi y}{b} \quad (8.1)$$

$$w = e_1 \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b} + e_2 \sin \frac{2\pi x}{a} \sin \frac{2\pi y}{b} \quad (8.2)$$

ここに、 $e_{01}$ ,  $e_{02}$  : 初期たわみモード成分を表わす既知定数

$e_1$ ,  $e_2$  : 付加面外たわみモード成分を表わす未知定数

式(8.2)は長方形板が面外方向に4辺単純支持されている境界条件を満足する。

1)  
Marguerre の板の面外有限変形に対する微分方程式のうちのひずみの適合条件式(3.1)に式(8.1), (8.2)を代入する。面内方向の境界条件として、一様なせん断応力 $\tau_0$ が境界辺に作用する場合に対して、応力関数 $F$ は次のように解かれる。

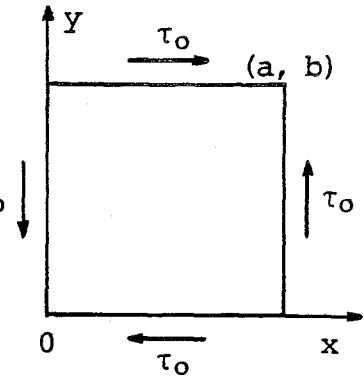


図-8.1 せん断を受ける長方形板

$$\begin{aligned}
 F = & -\tau_0 xy + \frac{3(1-\nu^2)}{8\pi^2} b^2 \sigma_e \frac{q_1}{t_w^2} \left\{ \left(\frac{a}{b}\right)^2 \cos \frac{2\pi x}{a} + \left(\frac{b}{a}\right)^2 \cos \frac{2\pi y}{b} \right\} \\
 & + \frac{3(1-\nu^2)}{8\pi^2} b^2 \sigma_e \frac{q_2}{t_w^2} \left\{ \left(\frac{a}{b}\right)^2 \cos \frac{4\pi x}{a} + \left(\frac{b}{a}\right)^2 \cos \frac{4\pi y}{b} \right\} \\
 & + \frac{48(1-\nu^2)}{\pi^2} b^2 \sigma_e \frac{q_3}{t_w} \left\{ \frac{1}{\theta_1} \cos \frac{3\pi x}{a} \cos \frac{\pi y}{b} + \frac{1}{\theta_2} \cos \frac{\pi x}{a} \cos \frac{3\pi y}{b} \right\}
 \end{aligned}
 \tag{8.3}$$

ここに、

$$q_1 = (e_{01} + e_1)^2 - e_{01}^2$$

$$q_2 = (e_{02} + e_2)^2 - e_{02}^2$$

$$q_3 = (e_{01} + e_1)(e_{02} + e_2) - e_{01}e_{02}$$

$$\theta_1 = \left(9\frac{b}{a} + \frac{a}{b}\right)^2, \quad \theta_2 = \left(\frac{b}{a} + 9\frac{a}{b}\right)^2$$

式(8.3)より、各膜応力成分は次のように与えられる。

$$\begin{aligned}
\frac{\sigma_{mx}}{\sigma_e} &= \frac{1}{\sigma_e} \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = -\frac{3}{2} (1 - \nu^2) \left\{ \left(\frac{b}{a}\right)^2 \frac{q_1}{t_w^2} \cos \frac{2\pi y}{b} + \right. \\
&\quad \left. 4 \left(\frac{b}{a}\right)^2 \frac{q_2}{t_w^2} \cos \frac{4\pi y}{b} + 32 \frac{q_3}{t_w^2} \left(\frac{1}{\theta_1} \cos \frac{3\pi x}{a} \cos \frac{\pi y}{b} \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \frac{9}{\theta_2} \cos \frac{\pi x}{a} \cos \frac{3\pi y}{b} \right) \right\} \\
\frac{\sigma_{my}}{\sigma_e} &= \frac{1}{\sigma_e} \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = -\frac{3}{2} (1 - \nu^2) \left\{ \frac{q_1}{t_w^2} \cos \frac{2\pi x}{a} + 4 \frac{q_2}{t_w^2} \cos \frac{4\pi x}{a} + \right. \\
&\quad \left. 32 \left(\frac{b}{a}\right)^2 \frac{q_3}{t_w^2} \left(\frac{9}{\theta_1} \cos \frac{3\pi x}{a} \cos \frac{\pi y}{b} + \frac{1}{\theta_2} \cos \frac{\pi x}{a} \cos \frac{3\pi y}{b}\right) \right\} \\
\frac{\tau_{mxy}}{\sigma_e} &= -\frac{1}{\sigma_e} \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = \frac{\tau_0}{\sigma_e} - 144 (1 - \nu^2) \frac{b}{a} \frac{q_3}{t_w^2} \left(\frac{1}{\theta_1} \sin \frac{3\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b} \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{\theta_2} \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{3\pi y}{b} \right)
\end{aligned}$$

(8.4)

境界辺の変位を調べる。膜ひずみと膜応力の関係、および膜ひずみと変位の関係は式(2.9)と式(2.5)からそれぞれ次のように与えられる。

$$\left. \begin{aligned}
\varepsilon_{mx} &= \frac{1}{E} (\sigma_{mx} - \nu \sigma_{my}) \\
\varepsilon_{my} &= \frac{1}{E} (\sigma_{my} - \nu \sigma_{mx})
\end{aligned} \right\} \quad (8.5)$$

$$\left. \begin{aligned}
\varepsilon_{mx} &= \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w_0}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 \\
\varepsilon_{my} &= \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w_0}{\partial y} \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2
\end{aligned} \right\} \quad (8.6)$$

ここに、 $u, v$  : それぞれ  $x$  軸方向、 $y$  軸方向の変位成分  
式(8.5)、(8.6)から膜応力と変位の関係が得られ、これに式(8.1)、(8.2)、(8.4)を代入して、 $u$ あるいは $v$ について解くと、境界辺の相対変位が次のように得られる。

$$\left. \begin{aligned} u(0, y) - u(a, y) &= \frac{\pi^2}{8a} (q_1 + 4q_2) = \text{constant} \\ v(x, 0) - v(x, b) &= \frac{\pi^2}{8b} (q_1 + 4q_2) = \text{constant} \end{aligned} \right\} \quad (8.7)$$

これは辺  $x=0$  と辺  $x=a$  , および辺  $y=0$  と辺  $y=b$  がそれぞれ平行を保って変位することを示している。

Marguerreの微分方程式のうちのつり合い条件式(3.2)に式(8.1), (8.2), (8.3)を代入し、これにGalerkin法を適用すると次式が得られる。

$$\frac{\tau_o}{\sigma_e} = \frac{9\pi^2}{128} \theta_3 \frac{e_1}{e_{02} + e_2} + \frac{9\pi^2}{128} (1 - \nu^2) \left\{ \frac{3}{4} \theta_4 \frac{q_1}{t_w^2} \frac{e_{01} + e_1}{e_{02} + e_2} + 192 \theta_5 \frac{q_3}{t_w^2} \right\} \quad (8.8)$$

$$\frac{\tau_o}{\sigma_e} = \frac{9\pi^2}{8} \theta_3 \frac{e_2}{e_{01} + e_1} + \frac{9\pi^2}{128} (1 - \nu^2) \left\{ 12\theta_4 \frac{q_2}{t_w^2} \frac{e_{02} + e_2}{e_{01} + e_1} + 192 \theta_5 \frac{q_3}{t_w^2} \right\} \quad (8.9)$$

ここに、

$$\begin{aligned} \theta_3 &= \frac{b}{a} \left( \frac{b}{a} + \frac{a}{b} \right)^2, & \theta_4 &= \frac{b}{a} \left\{ \left( \frac{b}{a} \right)^2 + \left( \frac{a}{b} \right)^2 \right\} \\ \theta_5 &= \frac{b}{a} \left( \frac{1}{\theta_1} + \frac{1}{\theta_2} \right) \end{aligned}$$

### 8.2.2 境界辺で回転拘束されている場合への拡張

式(8.8), (8.9)の右辺の性質を調べると、付加面外たわみが小さいときには、各式の第1項が支配的であり、付加面外たわみが増加すると、これらはそれぞれ座屈係数に収束し、反対に各式の第2項の増加が著しくなる。この性質を考慮して、初期たわみとして  $e_{01}$  のみが存在する場合には、式(8.8), (8.9)を次式で近似することができる。

$$\frac{\tau_0}{\sigma_e} = k_{cr} \sqrt{\frac{e_1}{e_1 + e_{01}}} + \frac{3}{4} (1 - \nu^2) \theta \left[ r_5 \left\{ \left( \frac{e_1}{t_w} \right)^2 + 2 \frac{e_{01}}{t_w} \frac{e_1}{t_w} \right\}^{0.5} + r_6 \frac{e_1 + e_{01}}{t_w} \right] \left\{ \left( \frac{e_1}{t_w} \right)^2 + 2 \frac{e_{01}}{t_w} \frac{e_1}{t_w} \right\}^{0.25} \sqrt{\frac{e_1 + e_{01}}{t_w}} \quad (8.10)$$

ここに

$$k_{cr} = \frac{9\pi^2}{32} \theta_3 \quad : \text{座屈係数}$$

$$\theta = \frac{9\pi^2}{64} (\theta_4 + 64\theta_5) \quad r_5 = \frac{\theta_4}{\theta_4 + 64\theta_5}, \quad r_6 = \frac{64\theta_5}{\theta_4 + 64\theta_5}$$

式(8.10)の右辺第1項は、式(8.8), (8.9)の右辺においてそれぞれ第1項のみを考慮して $e_2$ を消去することにより得られる。式(8.10)の右辺第2項は、式(8.8), (8.9)の右辺においてそれぞれ第2項のみを考慮して $e_2$ を消去することにより得られる。式(8.10)が与える荷重と面外たわみの関係と式(8.8), (8.9)が与える荷重と面外たわみの関係を比較すると、式(8.10)は式(8.8), (8.9)をよく近似する。他方、式(8.10)の係数 $r_5$ と $r_6$ の値は縦横比 $a/b$ が0.5から1.5の間で変動が小さいので、 $a/b=1$ のときの値0.61と0.39をそれぞれ $r_5$ と $r_6$ に使用しても、式(8.10)は式(8.8), (8.9)をよく近似する。

式(8.10)の $k_{cr}$ と $\theta$ に対して境界辺の回転拘束を考慮したものを使用するならば、式(8.10)は境界辺で回転拘束された場合に対しても適用できると考えられる。したがって、境界辺で回転拘束された場合の荷重と面外たわみの関係に対して次式を仮定する。

$$\frac{\tau_0}{\sigma_e} = k_{cr} \eta_0 + \frac{3}{4} (1 - \nu^2) \theta \xi_0 \quad (8.11)$$

ここに

$$\eta_0 = \sqrt{\frac{e}{e + re_0}}$$

$$\xi_0 = \left[ 0.61 \left\{ \left( \frac{e}{t_w} \right)^2 + 2 \frac{e_0}{t_w} \frac{e}{t_w} \right\}^{0.5} + 0.39 \frac{e_0 + e}{t_w} \right] \\ \times \left\{ \left( \frac{e}{t_w} \right)^2 + 2 \frac{e_0}{t_w} \frac{e}{t_w} \right\}^{0.25} \sqrt{\frac{e + e_0}{t_w}}$$

$e_0 = e_{01}$  : 板中央の初期たわみ

$e = e_1$  : 板中央の付加面外たわみ

$k_{cr}$  : 境界辺の回転拘束を考慮した座屈係数

$\theta, r$  : 境界辺の回転拘束によって定まる係数

$r$  は 4 辺単純支持の場合には式(8.10)から 1 であるが、境界辺で回転拘束された場合には後の 8.2.5 項で決定される。

### 8.2.3 $k_{cr}$ の決定

有限要素法による座屈解析によって、境界辺の回転拘束を考慮した座屈係数を決定する。

2.3.5 項で誘導した板の面外有限変形に対する剛性マトリックス  $K_{ww}$  の中から、通常の微小変位に対する板曲げ剛性マトリックス

$$K_b = \frac{t_w^3}{12} \int_{A_e} B_{m5}^T D B_{m5} dA_e$$

と、残留応力に対する剛性マトリックス

$$K_G = t_w \int_{A_e} \left\{ \sigma_{rx} \frac{\partial N^T}{\partial x} \frac{\partial N}{\partial x} + \sigma_{ry} \frac{\partial N^T}{\partial y} \frac{\partial N}{\partial y} \right. \\ \left. + \tau_{rxy} \left( \frac{\partial N^T}{\partial x} \frac{\partial N}{\partial y} + \frac{\partial N^T}{\partial y} \frac{\partial N}{\partial x} \right) \right\} dA_e$$

を取り出す。残留応力を初期応力と見なして、次の一般固有値問題を解くことにより座屈解析が行なえる。

$$K_b \delta_w = -\omega K_G \delta_w \quad (8.12)$$

ここに  $\omega$  : 固有値

$\delta w$  : 固有ベクトルで、座屈形状を表わす節点変位ベクトル

式(8.12)の固有値問題の解法には、大次元の固有値計算に適しているサブスペース法<sup>2)</sup>を用いる。

4辺単純支持されたせん断を受ける  $a/b = 1.0$  の正方形板について、要素分割と座屈係数の関係を図-8.2に示す。ここで、 $k_{crn}$ は、正方形板の縦横を  $(n \times n)$ 要素に分割したときの座屈係数である。 $n$ の増加に伴って解析結果が一定値に収束していく様子がわかる。この関係が

$$k_{crn} = -C_6 n^{-C_7} + k_{cr} \quad (8.13)$$

で表わされると仮定し、 $n = 12, 14, 16$ に対する  $k_{crn}$ の値から係数  $C_6, C_7, k_{cr}$ を決定し、 $k_{cr}$ を座屈係数の近似値とすると、正方形板に対して  $k_{cr}$ は  $9.33$ となり、文献〔3〕の  $9.34$ に非常に近い値が得られる。したがって、他の境界条件、あるいは縦横比に対してもこの推定方法により座屈係数を決定する。

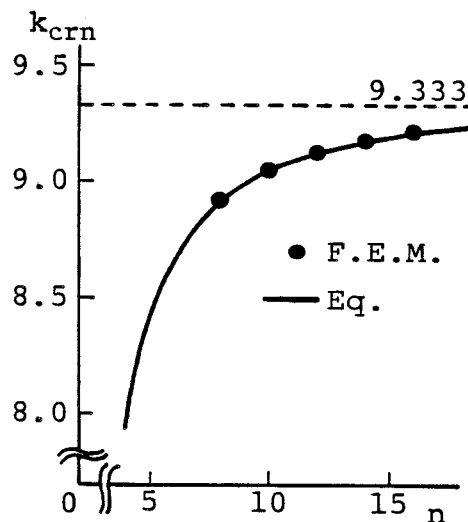


図-8.2 要素分割と座屈係数の関係

#### 8.2.4 $\theta$ の決定

$\theta$ を決定するために、有限要素法解析の結果を使用する。要素分割は図-7.1と同じである。

長方形板の面外方向の境界条件に対して次の3つの場合を考える。



(I) 4辺で単純支持されている場合

(II)  $x = 0$ と $a$ で単純支持され、 $y = 0$ と $b$ で固定支持されている場合

(III) 4辺で固定支持されている場合

また、せん断荷重の導入方法に対して次の2つの場合を考える。

(a) 各辺を強制的に変位させることにより導入する方法。

(b) 4辺に一様分布のせん断応力が生じるように荷重載荷する方法。この場合、4辺は面内方向に自由に変位することができる。

有限要素法解析から得られる荷重と面外たわみの関係を  $\tau_0 / \sigma e - k_{cr} \eta_0$  と  $\xi_0$  に代入すると両者の関係が得られる。境界条件(I)の場合の  $\tau_0 / \sigma e - k_{cr} \eta_0$  と  $\xi_0$  の関係を図-8.3に示す。どちらの荷重条件の場合とも両者の間には線形関係が成立している。両者の関係を最小自乗法で決定し、得られた傾きを  $\frac{3}{4} (1 - \nu^2)$  で除した値を  $\theta$  の値とする。ところで、最小自乗法から決定された  $y$  軸切片の値は荷重条件(a)の場合には無視し得る程に小さいが、荷重条件(b)の場合には約0.80生じる。これは、荷重条件(b)の場合には、有限要素法による数値計算上、点(0, 0)の変位  $u$  と  $v$ 、点( $a$ , 0)の変位  $\hat{v}$  が固定されているために、これら2点も自由に変位できる場合より幾分小さな面外たわみを有限要素法解析の結果は与えているからと考えられる。

他方、 $\eta_0$ の中の係数  $r$  を1として、境界条件(II)と(III)の場合に対しても  $\tau_0 / \sigma e - k_{cr} \eta_0$  と  $\xi_0$  の関係を調べると、 $\tau_0 / \sigma e - k_{cr} \eta_0$  が小さい範囲においては、両者の関係は線形関係にならない。したがって、境界辺で回転拘束がある場合には、付加面外たわみが小さいときに支配的な  $\eta_0$  にさらに回転拘束の影響を取り入れる必要がある。

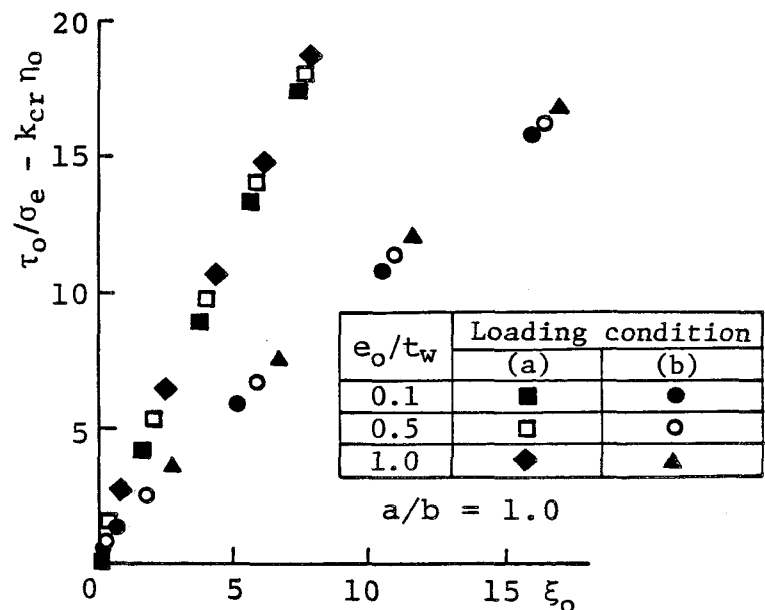


図-8.3  $\tau_0 / \sigma e - k_{cr} \eta_0$  と  $\xi_0$  の関係

### 8. 2. 5 rの決定

境界条件(Ⅱ)と(Ⅲ)に対してそれぞれ次の付加面外たわみを仮定する。

$$w = e_1 \sin \frac{\pi x}{a} \left(1 - \cos \frac{2\pi y}{b}\right) + e_2 \sin \frac{2\pi x}{a} \left(\cos \frac{\pi y}{b} - \cos \frac{3\pi y}{b}\right) \quad (8. 14)$$

$$w = e_1 \left(1 - \cos \frac{2\pi x}{a}\right) \left(1 - \cos \frac{2\pi y}{b}\right) + e_2 \left(\cos \frac{\pi x}{a} - \cos \frac{3\pi x}{a}\right) \left(\cos \frac{\pi y}{b} - \cos \frac{3\pi y}{b}\right) \quad (8. 15)$$

式(8. 14), (8. 15)はそれぞれ境界条件(Ⅱ), (Ⅲ)を満足している。

ところで、式(8. 10)の右辺第1項は次式<sup>4)</sup>に式(8. 1), (8. 2)を代入して Galerkin法を適用することによっても得ることができる。

$$\frac{D_w}{t_w} \nabla^4 w = 2\tau_0 \frac{\partial^2 (w_0 + w)}{\partial x \partial y} \quad (8. 16)$$

式(8. 1), (8. 14), あるいは式(8. 1), (8. 15)を式(8. 16)に代入して、式(8. 16)にGalerkin法を適用すると、各境界条件に対して荷重と面外たわみの関係が得られる。初期たわみとして $e_{01}$ のみが存在する場合には、 $\tau_0$ と板中央の付加面外たわみ $e$ の関係が次式で与えられる。

$$\frac{\tau_0}{\sigma_e} = k_{cr} \sqrt{\frac{e}{e + re_0}} \quad (8. 17)$$

ここに

$$k_{cr} = \begin{cases} \frac{45\pi^2}{2048} \frac{b}{a} \sqrt{\theta_6 \theta_7} \\ \frac{225\pi^2}{4096} \frac{b}{a} \sqrt{\theta_8 \theta_9} \end{cases}$$

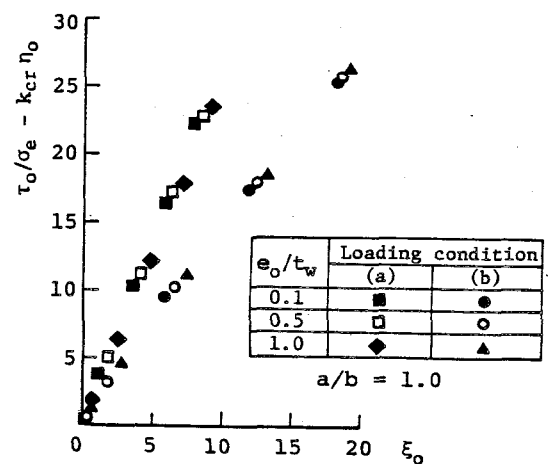
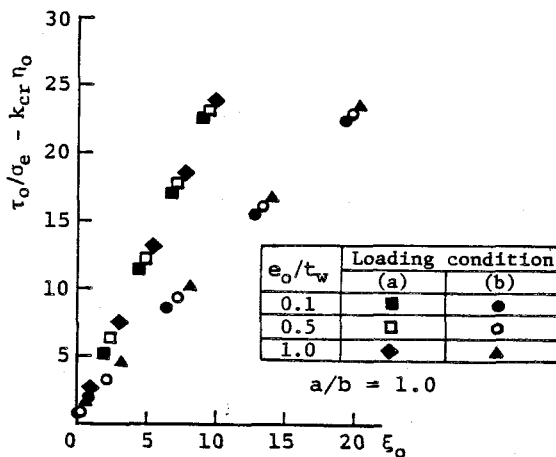
$$\theta_6 = 3 \frac{b^2}{a^2} + 16 \frac{a^2}{b^2} + 8, \quad \theta_7 = 32 \frac{b^2}{a^2} + 82 \frac{a^2}{b^2} + 80$$

$$\theta_8 = 3 \frac{b^2}{a^2} + 3 \frac{a^2}{b^2} + 2, \quad \theta_9 = 41 \frac{b^2}{a^2} + 41 \frac{a^2}{b^2} + 50$$

$$r = \begin{cases} \frac{15\pi}{64} \doteq 0.74 \\ \frac{225\pi^2}{4096} \doteq 0.54 \end{cases}$$

$$e = \begin{cases} 2e_1 \\ 4e_1 \end{cases}$$

$$e_0 = e_{01}$$



(i) 境界条件(II)の場合

(ii) 境界条件(III)の場合

図8-4  $\tau_o/\sigma_e - k_{cr}\eta_o$ と $\xi_o$ の関係

式(8.17)の右辺の形式は式(8.11)の右辺第1項の形式と同じになっている。したがって $r$ の値を境界条件(II),(III)に対してそれぞれ0.74, 0.54とする。

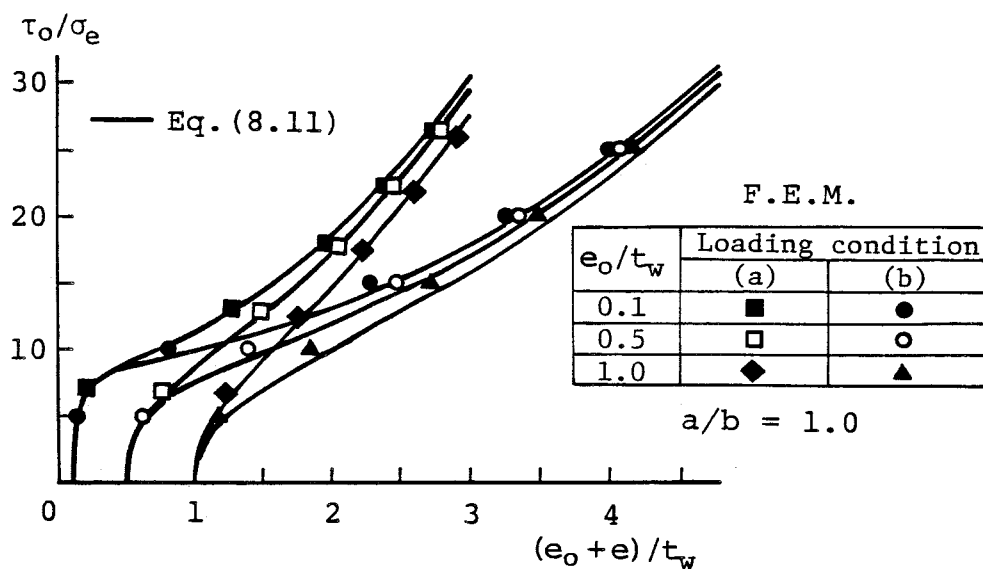
境界条件(II),(III)に対して $r$ の値をこのようにとると $\tau_o/\sigma_e - k_{cr}\eta_o$ と $\xi_o$ の関係が図-8.4のように得られる。 $\tau_o/\sigma_e - k_{cr}\eta_o$ が小さい範囲においても、両者の間には線形関係が成立している。前述と同様、これに最小自乗法を適用して $\theta$ の値を決定す

る。

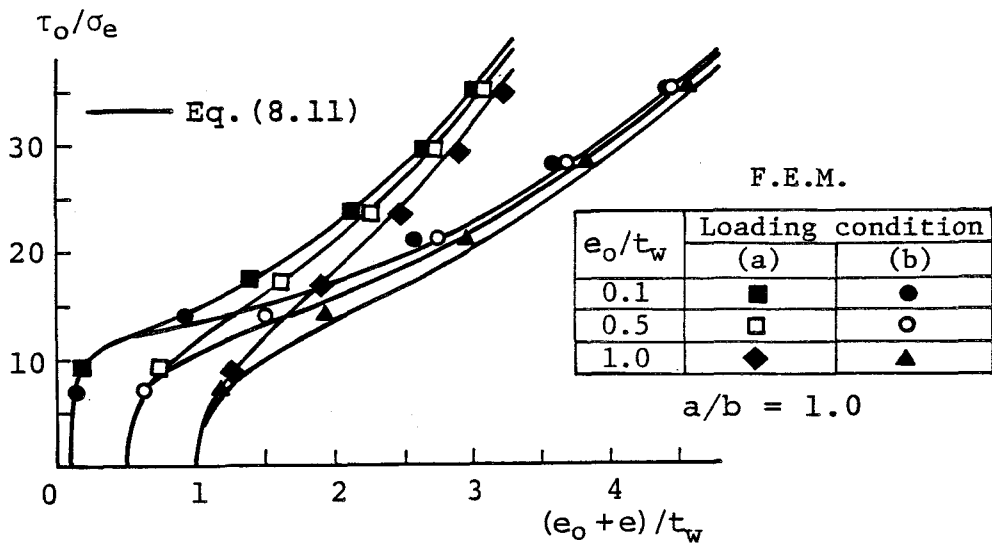
$k_{cr}$ と $\theta$ の値を表-8.1に示す。式(8.11)が与える荷重と面外たわみの関係と有限要素法解析の結果の比較を図-8.5に示す。荷重条件(a)の場合には、式(8.11)は有限要素法解析の結果をよく近似しているが、荷重条件(b)の場合には式(8.11)の方が有限要素法解析の結果より少し大きい面外たわみを与えている。

表-8.1 各係数の値

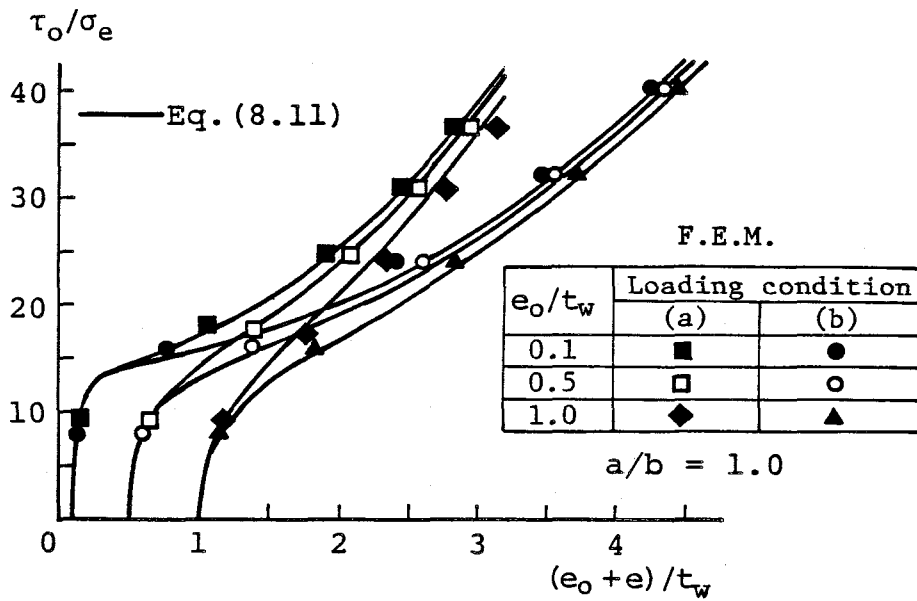
	a/b	(I)				(II)				(III)			
		0.5	0.75	1.0	1.5	0.5	0.75	1.0	1.5	0.5	0.75	1.0	1.5
	r	1.0	1.0	1.0	1.0	0.74	0.74	0.74	0.74	0.54	0.54	0.54	0.54
	$k_{cr}$	26.03	13.29	9.33	7.07	26.88	15.47	12.58	11.13	42.46	21.31	14.67	11.49
	S					17.51	25.60	25.27	23.79	98.46	42.90	24.32	23.82
(a)	$\theta$	5.12	4.35	3.46	2.03	5.59	4.61	3.66	2.40	8.07	5.08	3.97	2.47
	A					15.18	15.93	14.51	10.96	19.99	25.82	17.93	12.81
	B					40.46	36.01	33.61	36.44	0.0	111.81	71.07	62.20
(b)	$\theta$	2.23	1.74	1.39	0.80	2.39	2.01	1.64	1.07	3.75	2.50	1.98	1.18
	A					11.28	12.83	11.70	7.09	18.56	18.23	15.19	8.19
	B					76.58	60.17	53.13	27.00	0.0	111.01	115.60	47.34



(i) 境界条件(I)の場合



(ii) 境界条件(II)の場合



(iii) 境界条件(III)の場合

図-8.5 荷重と面外たわみの関係

### 8.2.6 2次曲げ応力と面外たわみの関係

2次曲げ応力と面外たわみの関係を次のように仮定して、この式の妥当性について述べる。

$$\frac{\sigma_b}{\sigma_e} = S \eta_b + \sqrt{A^2 \xi_o^2 + B^2} - B \quad (8.18)$$

ここに、

$$\eta_b = \frac{1}{2} \left\{ \frac{e}{t_w} + \sqrt{\frac{e}{t_w} \left( \frac{e}{t_w} + r \frac{e_0}{t_w} \right)} \right\}$$

S, A, B = 係数

式(8.18)の右辺第1項は次のように誘導される。2次曲げ応力 $\sigma_b$ と付加面外たわみ $w$ の関係は次式で与えられる。

$$\left. \begin{aligned} y=0, b \text{ で} \quad \sigma_b &= \frac{6D_w}{t_w^2} \left( \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \\ x=0, a \text{ で} \quad \sigma_b &= \frac{6D_w}{t_w^2} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \end{aligned} \right\} \quad (8.19)$$

式(8.14)と式(8.15)を式(8.19)にそれぞれ代入し、境界辺に生じる2次曲げ応力の最大値を求めると、板中央の付加面外たわみを用いて次式が得られる。

$$\frac{\sigma_b}{\sigma_e} = S \left\{ s_3 \frac{e}{t_w} + s_4 \sqrt{\frac{e}{t_w} \left( \frac{e}{t_w} + r \frac{e_0}{t_w} \right)} \right\} \quad (8.20)$$

ここでS,  $s_3$ ,  $s_4$ は次のとおりである。

境界条件(II)の場合

$$S = 12 \sqrt{1 - \theta_{11}^2} (1 - 4\theta_{10} \theta_{11})$$

$$s_3 = \frac{1}{1 - 4\theta_{10} \theta_{11}}, \quad s_4 = \frac{-4\theta_{10} \theta_{11}}{1 - 4\theta_{10} \theta_{11}}$$

$$\theta_{10} = \sqrt{\frac{\theta_6}{\theta_7}}, \quad \theta_{11} = \frac{1}{16} \theta_{10} - \sqrt{\frac{1}{256} \theta_{10}^2 + \frac{1}{2}}$$

$$e = 2e_1, \quad e_0 = e_{01}$$

境界条件(Ⅲ)の場合

$$S = \begin{cases} 12 \frac{b^2}{a^2} (1 - \theta_{13}^2) (1 + 8\theta_{12} \theta_{13}) & \text{for } a/b < 1 \\ 12 (1 - \theta_{13}^2) (1 + 8\theta_{12} \theta_{13}) & \text{for } a/b \geq 1 \end{cases}$$

$$s_3 = \frac{1}{1 + 8\theta_{12} \theta_{13}}, \quad s_4 = \frac{8\theta_{12} \theta_{13}}{1 + 8\theta_{12} \theta_{13}}$$

$$\theta_{12} = \sqrt{\frac{\theta_8}{\theta_9}}, \quad \theta_{13} = \frac{-1 + \sqrt{1 + 192 \theta_{12}^2}}{24 \theta_{12}}$$

$$e = 4e_1, \quad e_0 = e_{01}$$

係数  $s_3$  と  $s_4$  のそれぞれについて縦横比  $a/b$  との関係調べると、境界条件(Ⅱ)と(Ⅲ)の場合とも  $s_3$  と  $s_4$  はそれぞれ 0.5 を中心として変動するがその変動は小さい。したがって、両境界条件とも  $s_3 = s_4 = 0.5$  とすると、式(8.18)の右辺第1項が得られる。式(8.20)は  $e_0/t_w = 0$  のとき次式となる。

$$\frac{\sigma_b}{\sigma_e} = S \frac{e}{t_w} \quad (8.21)$$

したがって、係数  $S$  は、座屈形状の単位面外たわみに対する2次曲げ応力の増加を示しており、8.2.3項の座屈解析の際の座屈モードから求めることができる。

他方、係数  $A$ ,  $B$  は次のように決定される。有限要素法解析から得られる2次曲げ応力と面外たわみの関係を  $\sigma_b/\sigma_e = S \eta_b$  と  $\xi_0$  に代入すると両者の関係は図-8.6に示すようになる。この関係は  $\xi_0$  が小さいときには少し曲率を有するが、 $\xi_0$  が大きくなると線形性を示す。したがって、 $\sigma_b/\sigma_e = S \eta_b$  と  $\xi_0$  の関係に対して次式を仮定する。

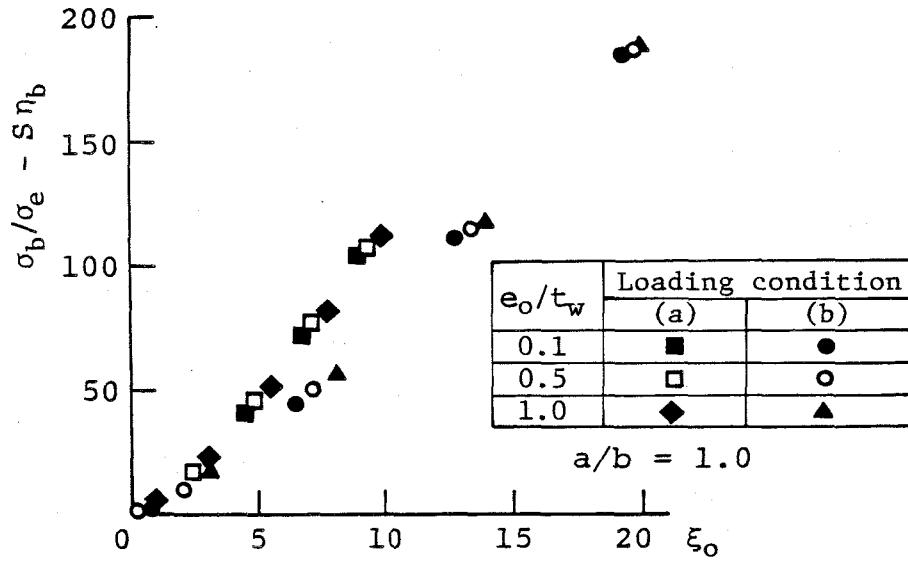
$$\frac{\sigma_b}{\sigma_e} - S \eta_b = \sqrt{A^2 \xi_0^2 + B_1^2} - B_2 \quad (8.22)$$

この式を変形して次式に最小自乗法を適用して係数  $A$ ,  $B_1$ ,  $B_2$  の値を決定する。

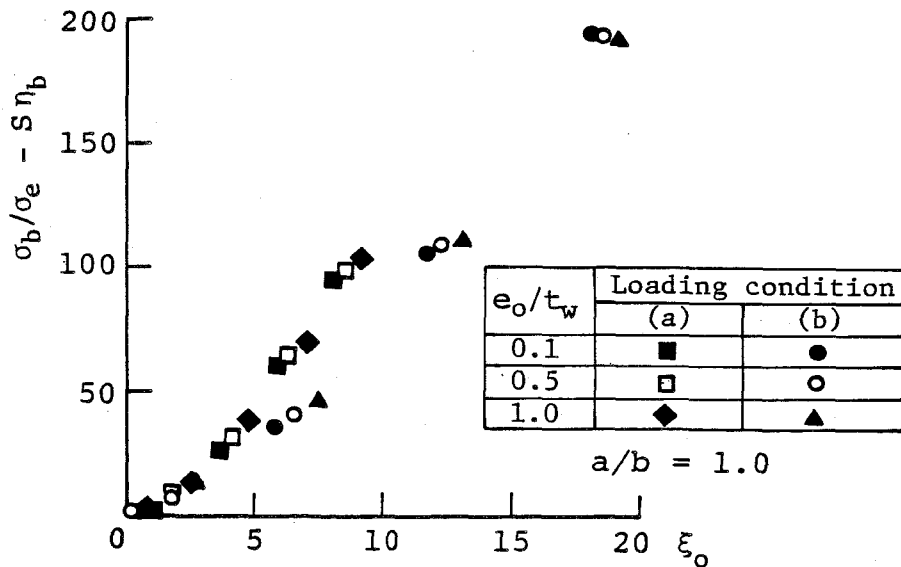
$$\xi_0^2 = \frac{1}{A^2} \left( \frac{\sigma_b}{\sigma_e} - S \eta_b \right)^2 + \frac{2B_2}{A^2} \left( \frac{\sigma_b}{\sigma_e} - S \eta_b \right) + \frac{B_2^2 - B_1^2}{A^2} \quad (8.23)$$

$B_1$ と $B_2$ は互いに近い値を示すので、式(8.18)の $B$ に対して $B_1$ と $B_2$ の平均を使用する。

$S$ ,  $A$ ,  $B$ の値を表-8.1に示す。式(8.18)が与える2次曲げ応力と面外たわみの関係と有限要素法解析の結果の比較を図-8.7に示す。また、式(8.11), (8.18)が与える荷重と2次曲げ応力の関係と有限要素法解析の結果の比較を図-8.8に示す。



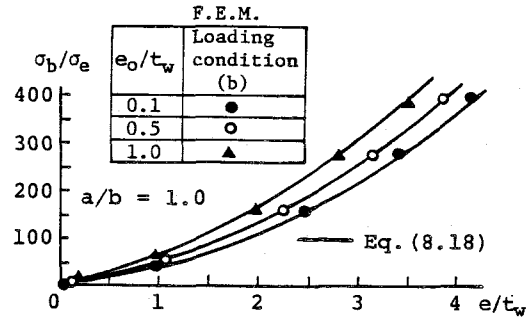
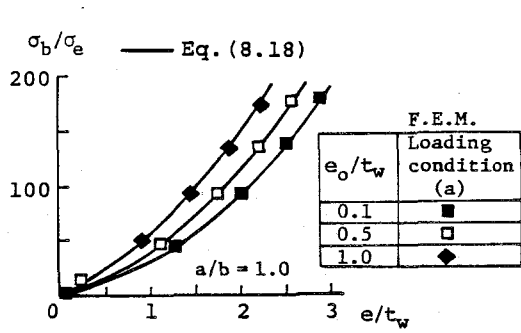
(i)境界条件(II)



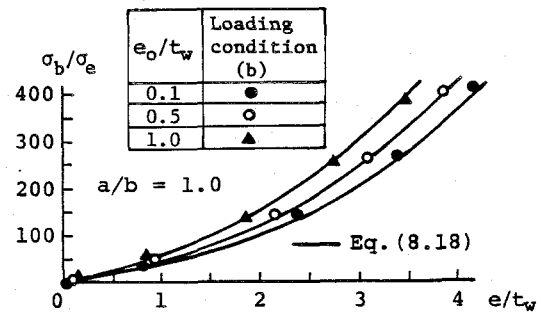
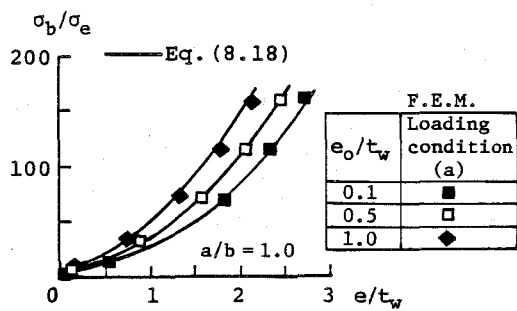
(ii)境界条件(III)

図-8.6  $\sigma_b/\sigma_e - S\eta_b$ と $\xi_0$ の関係



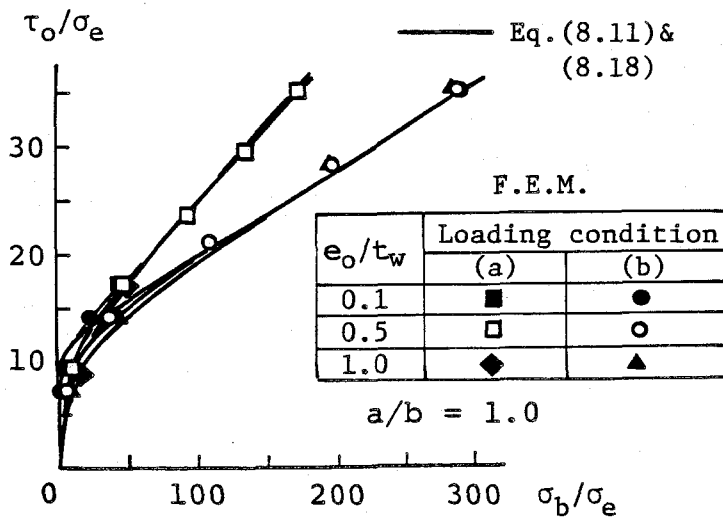


(i)境界条件(II)

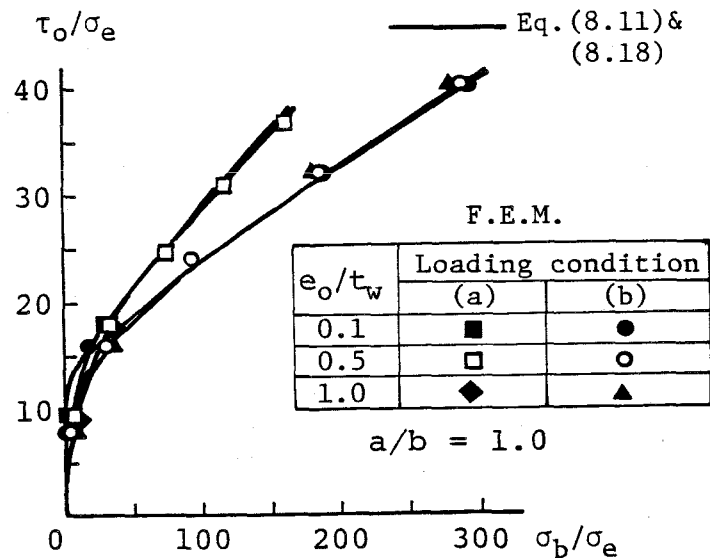


(ii)境界条件(III)

図-8.7 2次曲げ応力と面外たわみの関係



(i)境界条件(II)



(ii)境界条件(III)

図-8.8 荷重と2次曲げ応力の関係

### 8.2.7 残留応力が荷重と2次曲げ応力の関係に与える影響

残留応力に対する応力関数Frがyのみの関数で与えられる場合には、次式からkcrとSを決定すればよい。

$$\frac{D_w}{t_w} \nabla^4 w - \frac{\partial^2 F_r}{\partial y^2} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 2\tau_o \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \quad (8.24)$$

ここで、境界条件(III)の場合を考える。Frに対して図-8.9に示す長方形分布の残留応力を仮定する。式(8.15)を式(8.24)に代入し、式(8.24)にGalerkin法を適用すると、kcrとSが求められる。kcrとSは、式(8.17)と式(8.20)で使用された $\theta_8$ と $\theta_9$ をそれぞれ次のように置き換えることにより、これらの式で与えられたものと同形になる。

$$\theta_8 = \frac{b}{2\pi c} \left( \sin \frac{2\pi c}{b} - \frac{1}{8} \sin \frac{4\pi c}{b} \right) \frac{\sigma_{rc}}{\sigma_e}$$

$$\theta_9 = \frac{5b}{4\pi c} \left( \sin \frac{2\pi c}{b} + \sin \frac{4\pi c}{b} - \frac{1}{3} \sin \frac{6\pi c}{b} \right) \frac{\sigma_{rc}}{\sigma_e}$$

これらの係数が与える数値例を表-8.2に示す。残留応力が増加すると、両者とも低下することがわかる。

表-8.2  $k_{cr}$ とSに残留応力が与える

影響〔条件(Ⅲ)〕

$\sigma_{rc}/\sigma_e$ ( $c/b=1/12$ )	$k_{cr}$	S
0	17.61	18.06
2	15.28	17.54
4	12.85	16.89
6	10.28	16.05

$a/b = 1.0$

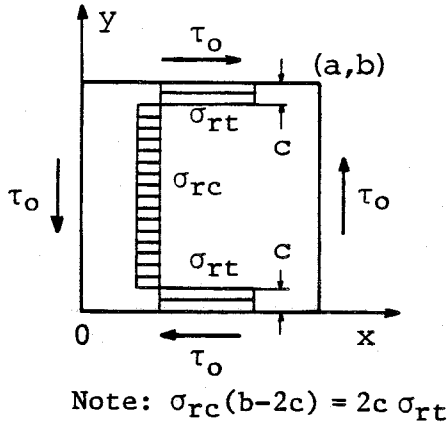


図-8.9 残留応力を有する長方形板

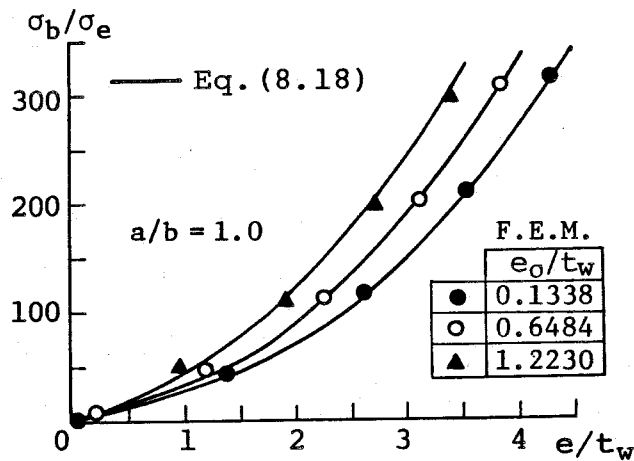


図-8.10  $\sigma_b/\sigma_e$ と $e/t_w$ の関係〔条件(Ⅲ)〕

残留応力が係数A, Bに与える影響を有限要素法解析の結果によって調べる。図-8.9に示す長方形分布の残留応力において $c/b=1/12$ で $\sigma_{rc}/\sigma_e=4$ の場合について、平衡状態が達せられたときの初期たわみ $e_0/t_w$ が0.1338, 0.6484, 1.2230の各場合に対して計算を行なう。

境界条件は(Ⅲ)で縦横比 $a/b$ は1である。せん断は荷重条件(b)によって導入される。2次曲げ応力 $\sigma_b/\sigma_e$ と $e/t_w$ の関係を図-8.10に示す。この図には、式(8.18)が与える関係も示してある。式(8.18)のS, A, Bに対して、表-8.1において境界条件(Ⅲ)の $a/b=1$ の列で荷重条件(b)に対する各係数の値が使用されている。式(8.18)は有限要素法解析の結果をよく近似していることがわかる。したがって、残

留応力は係数A, Bに影響しないと考えられる。また、Sは残留応力の影響を受けるか、式(8.18)の $S \eta b$ の項としては残留応力の影響をあまり受けないようである。

以上の考察により、式(8.11)と式(8.18)を残留応力も存在する場合に適用するためには、 $k_{cr}$ に対して残留応力の影響を考慮したものを使用すればよい。

### 8.3.4 型疲労亀裂の疲労強度

式(8.11), (8.18)を用いることにより、せん断を受けるプレートガーダーのウェブの面外変形に起因する4型疲労亀裂の疲労強度をせん断応力によって表わすことができる。すなわち、式(8.11), (8.18)において、2次曲げ応力 $\sigma_b$ を隅肉溶接の疲労強度で制限することにより、せん断応力で表わされた疲労強度がウェブの幅厚比の関数として与えられる。5.3節より、2次曲げ応力を受ける隅肉溶接の200万回疲労強度は、SM58の引張強度以下の鋼種に対して約166.7MPaと推定できる。最小せん断応力 $\tau_{omin}$ に対して生じる2次曲げ応力を $\sigma_{bmin}$ とする。また最大せん断応力 $\tau_{omax}$ に対して生じる2次曲げ応力を $\sigma_{bmax}$ とする。条件として

$$\sigma_{bmax} - \sigma_{bmin} = 166.7 \quad (8.25)$$

を満足するように式(8.11), (8.18)を解くと、200万回疲労強度に対する最大せん断応力 $\tau_{omax}$ とウェブの幅厚比 $\beta$ の関係が、次式で定義される応力比Rごとに得られる。

$$R = \tau_{omin} / \tau_{omax} \quad (8.26)$$

初期たわみ、縦横比、応力比、残留応力がこの関係に与える影響を調べる。

$\tau_{omax} / \tau_Y$ と $\beta$ の関係を各縦横比に対して図-8.11に示す。この図は、表-8.1において、境界条件(Ⅲ)で载荷条件(b)に対する各係数の値を式(8.11), (8.18)に代入して、 $R=0$ の場合に対して求められたものである。ここで、 $\tau_Y$ はせん断降伏応力度である。引張降伏応力度を $\sigma_Y$ とすると、von Misesの降伏条件に従って $\tau_Y$ は次式で与えられる。

$$\tau_Y = \sigma_Y / \sqrt{3} \quad (8.27)$$

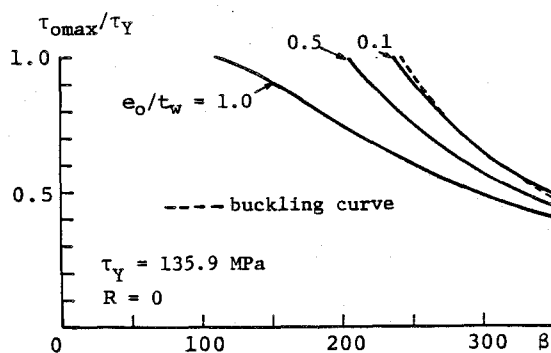
SS41鋼板の場合、 $\sigma_Y = 235.3 \text{ MPa}$ であるので、 $\tau_Y = 135.9 \text{ MPa}$ となる。他方、図には次式から与えられる座屈曲線も示してある。

$$\tau_{\text{omax}} = k_{\text{cr}} \sigma_e \quad (8.28)$$

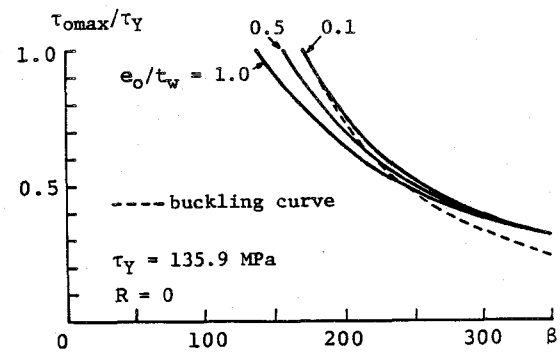
ここで座屈係数  $k_{\text{cr}}$  は表-8.1より縦横比  $a/b$  が 0.5, 0.75, 1.0, 1.5 に対してそれぞれ 42.46, 21.31, 14.67, 11.49 である。

図-8.11より、 $a/b = 0.5$  の場合を除き、初期たわみの大きさが 200 万回疲労強度に与える影響は小さいことがわかる。また、 $a/b = 0.5$  の場合を除き、 $\beta$  が 150 から 200 の範囲では 200 万回疲労強度と座屈強度は互いに漸近しているが、 $\beta$  が増大すると 200 万回疲労強度の方が座屈強度よりも大きくなる。

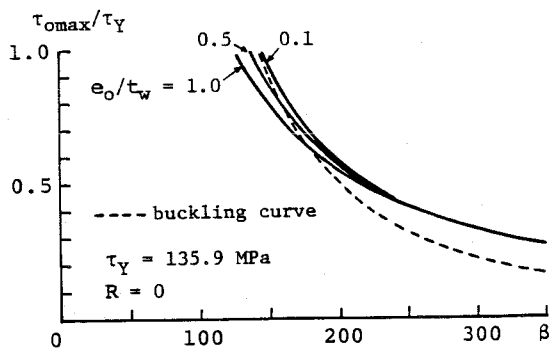
ところで、 $x$  軸方向と  $y$  軸方向にそれぞれ 1 モードの初期たわみ形状を有するウェブのせん断応力と 2 次曲げ応力の関係を式(8.11), (8.18)は与えている。7.2.4 項で示したように、せん断を受ける長方形板の場合、荷重が低いときには、2 次曲げ応力の増加は最大初期たわみの大きさあるいは初期たわみモードによって異なるが、荷重が座屈荷重を超えて増加すると、2 次曲げ応力は互いに漸近する。したがって、初期たわみの大きさのみならず初期たわみ形状が 200 万回疲労強度に与える影響も小さいと考えられる。



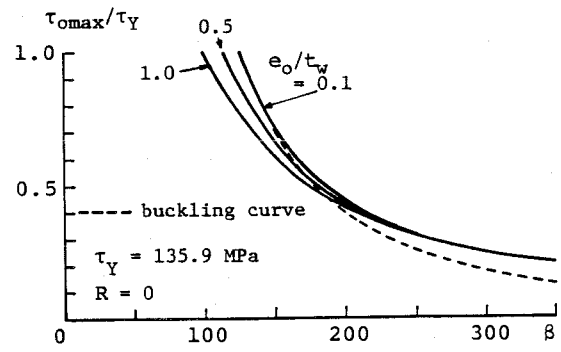
(i)  $a/b = 0.5$



(ii)  $a/b = 0.75$



(iii)  $a/b = 1.0$



(iv)  $a/b = 1.5$

図-8.11  $\tau_{omax}/\tau_Y$ と $\beta$ の関係

図-8.11において、各縦横比の $\tau_{omax}/\tau_Y$ と $\beta$ の関係を $e_o/t_w = 1.0$ について同一の図に描くと図-8.12になる。 $\beta$ が110から150の範囲で $a/b = 0.5$ の200万回疲労強度が $a/b$ が0.75あるいは1.0のものより少し小さくなることはあるが、一般に縦横比が小さくなるに従って200万回疲労強度は大きくなる。

応力比 $R$ を変化させたときの $\tau_{omax}/\tau_Y$ と $\beta$ の関係を、 $a/b = 1$ の場合に対して、図-8.13に示す。ここで初期たわみの大きさは各応力比に対していずれも $e_o/t_w = 1$ である。図より、 $R = 0$ と0.2に対する200万回疲労強度は互いに漸近し、 $R = 0.5$ に対する200万回疲労強度がこれらの疲労強度より少し大きいことがわかる。したがって、応力比が200万回疲労強度に与える影響は小さい。

実際のプレートガーダーのウェブには溶接によって残留応力が存在する。残留応力の影響は式(8.11)の座屈係数 $k_{cr}$ を低下させることによって考慮することができる。したがって、表-8.1の境界条件(Ⅲ)で载荷条件(b)の各係数の値のうち座屈係数 $k_{cr}$ の値のみを低下させて $\tau_{omax}/\tau_Y$ と $\beta$ の関係を調べる。

$a/b = 1$ で $R = 0$ の場合の $\tau_{omax}/\tau_Y$ と $\beta$ の関係を図-8.14に示す。図中の $k_{cr} = 14.67, 12.58, 9.33$ はそれぞれ境界条件(Ⅲ), (Ⅱ), (Ⅰ)の $a/b = 1$ に対する座屈係数の値である。図より、 $k_{cr}$ の値が低下するとそれに対応して200万回疲労強度も低下することがわかる。200万回疲労強度の低下の程度は $\beta$ の増大に伴って小さくなる。

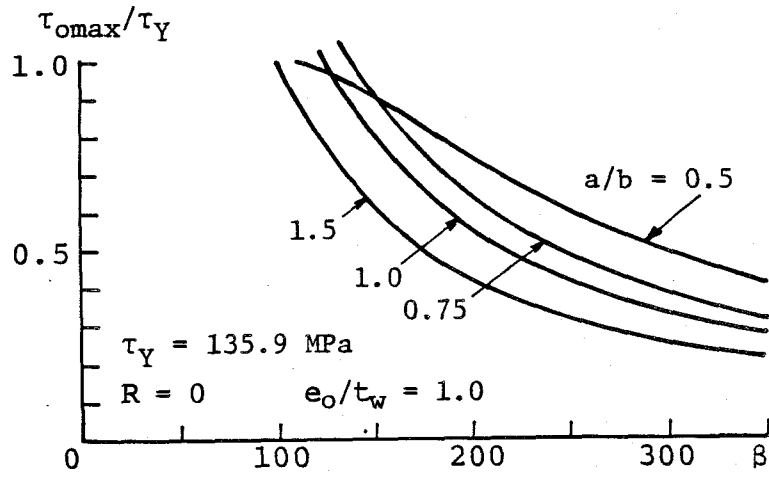


図-8.12 縦横比の影響

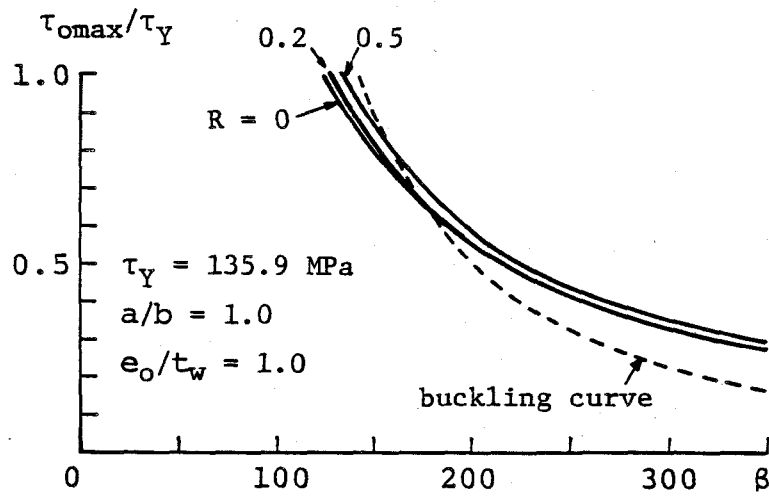


図-8.13 応力比の影響

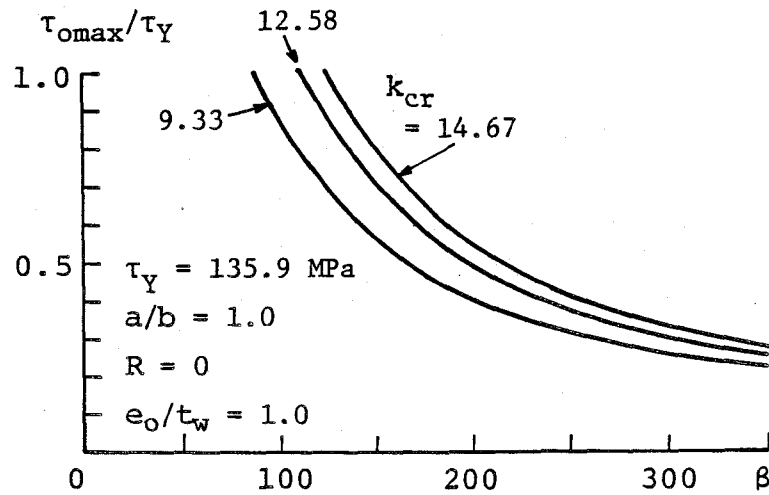


図-8.14 座屈係数の影響

## 8. 4 面内曲げが4型疲労亀裂の疲労強度に与える影響

### 8. 4. 1 縦横比が1のウェブパネルの4型疲労亀裂の細分類

Yenの疲労実験で縦横比が1のウェブパネルの4型疲労亀裂の発生位置の分類から、せん断を受けるプレートガーダーに必ず伴う曲げが4型疲労亀裂の発生に影響することを7. 4. 2項で明らかにした。

7. 3. 2項の解析結果に基づいて、縦横比が1のウェブパネルの4型疲労亀裂を、面内曲げの影響を考慮して、図-8. 15を参照して次のように分類する。

#### 4 A型疲労亀裂：

4 A型疲労亀裂の発生位置は面内曲げの圧縮側にあるため、せん断のみが作用する場合よりもこの付近の面外変形が大きくなる。したがって、4型疲労亀裂の発生位置の中で、この位置の2次曲げ応力が最も大きくなる。

#### 4 B型疲労亀裂：

4 B型疲労亀裂の発生位置の2次曲げ応力は4 A型疲労亀裂の発生位置の2次曲げ応力よりも小さい。また、この位置には面内曲げ応力による圧縮応力が生じているため、4 B型疲労亀裂の疲労強度は2次曲げ応力のみを受ける隅肉溶接の疲労強度よりも高いと考えられる。

#### 4 C型疲労亀裂：

4 C型疲労亀裂の発生位置の2次曲げ応力も4 A型疲労亀裂の発生位置の2次曲げ応力より常に小さい。また、この位置には面内曲げによる引張応力が生じているため、4 C型疲労亀裂の疲労強度は2次曲げ応力のみを受ける隅肉溶接の疲労強度よりも低いと考えられる。

#### 4 D型疲労亀裂：

4型疲労亀裂の発生位置の中で、4 D型疲労亀裂の発生位置の2次曲げ応力が最も小さい。Yenの実験では、4 D型疲労亀裂は発生しなかった。

以上の分類により、縦横比が1のウェブパネルの4型疲労亀裂の疲労強度は4 A型と4 C型によって決定されると考えられる。



#### 8. 4. 2 4 A型疲労亀裂の疲労強度

4 A型疲労亀裂の疲労強度をせん断応力で表わすためには、せん断と面内曲げを同時に受ける正方形板の荷重と2次曲げ応力の関係を定式化しなければならない。7. 3. 1項で述べたように、Yenの疲労実験においては、 $\sigma_0/\tau_0$ が約1以下のウェブパネルを、疲労亀裂の分類でせん断を受けるウェブパネルと定義している。したがって、 $\sigma_0/\tau_0=1$ のせん断と面内曲げを同時に受ける正方形板の荷重と2次曲げ応力の関係を定式化する。

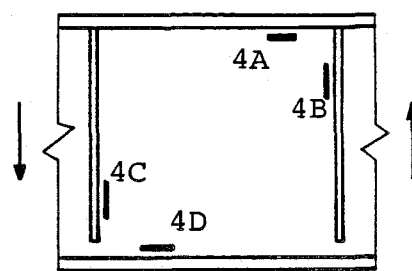
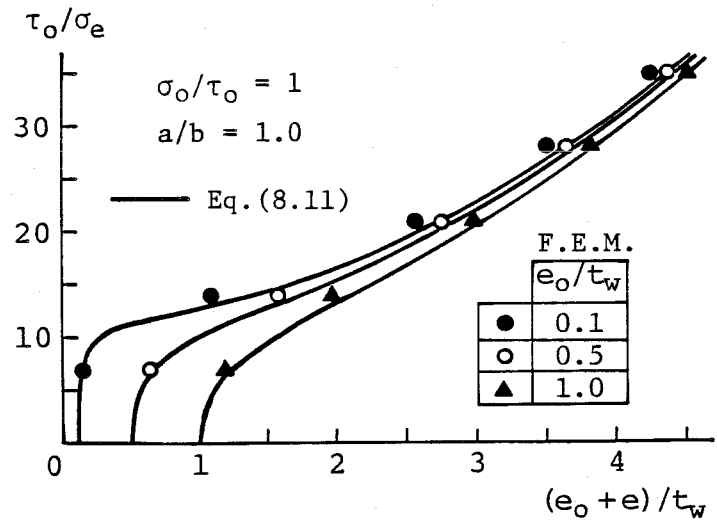


図-8. 15 縦横比が1のウェブパネルの4型疲労亀裂の細分類

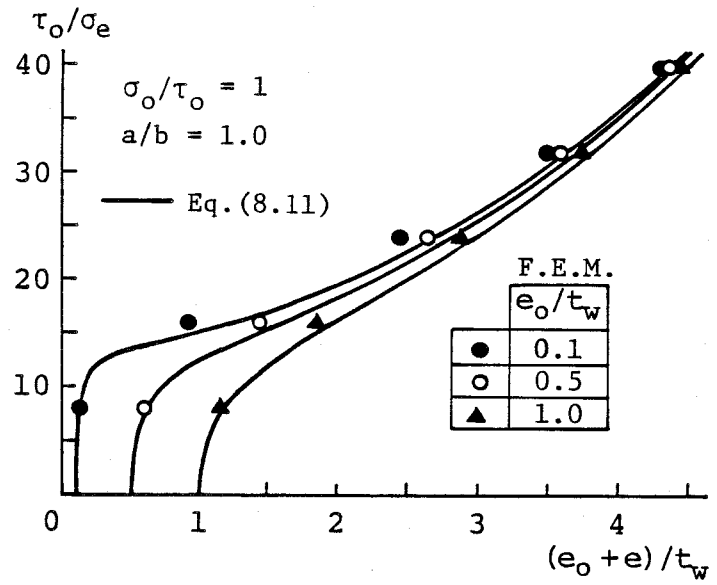
2次曲げ応力の増加に対して、面内曲げよりもせん断の方が影響が大きいと予想して、荷重と面外たわみの関係あるいは2次曲げ応力と面外たわみの関係をそれぞれ式(8. 11), (8. 18)で近似する。これらの式の中の各係数の値を8. 2節と同様にして決定する。すなわち、 $\sigma_0/\tau_0=1$ のせん断と面内曲げを受ける正方形板に対して、8. 2. 3項の有限要素法による座屈解析を適用して $k_{cr}$ ,  $S$ を決定する。せん断が荷重条件(b)で与えられ、かつ $x=0$ と $a$ に直線分布の面内曲げ応力が生じるように面内曲げが荷重載荷された場合の有限要素法解析の結果を用いて $\theta$ ,  $A$ ,  $B$ を決定する。 $r$ の値については8. 2. 5項で誘導したものと同一ものを使用する。 $r$ ,  $k_{cr}$ ,  $\theta$ ,  $S$ ,  $A$ ,  $B$ の値を表-8. 3に示す。式(8. 11), (8. 18)と有限要素法解析の結果との比較を、荷重と面外たわみの関係、2次曲げ応力と面外たわみの関係、荷重と2次曲げ応力の関係についてそれぞれ図-8. 16, 8. 17, 8. 18に示す。式(8. 11), (8. 18)は有限要素法解析の結果をよく近似していることがわかる。

表-8. 3 各係数の値

	(II)	(III)
a/b	1.0	1.0
r	0.74	0.54
$k_{cr}$	11.90	13.97
$\theta$	1.76	1.99
S	35.73	35.18
A	15.87	19.41
B	55.44	131.75

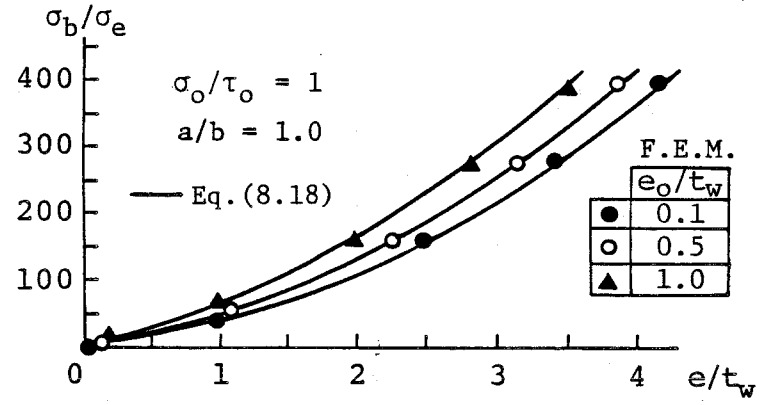


(i) 境界条件(II)

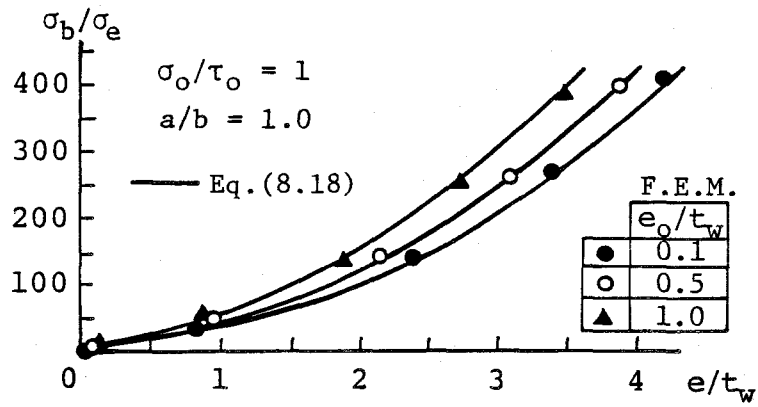


(ii) 境界条件(III)

図-8.16 荷重と面外たわみの関係

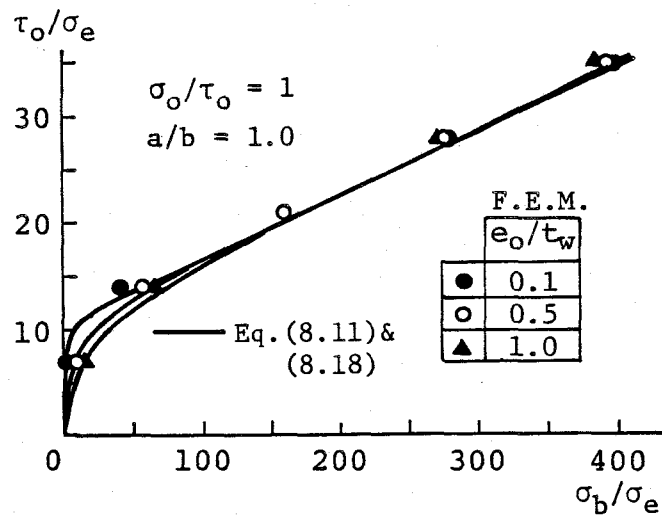


(i) 境界条件(II)

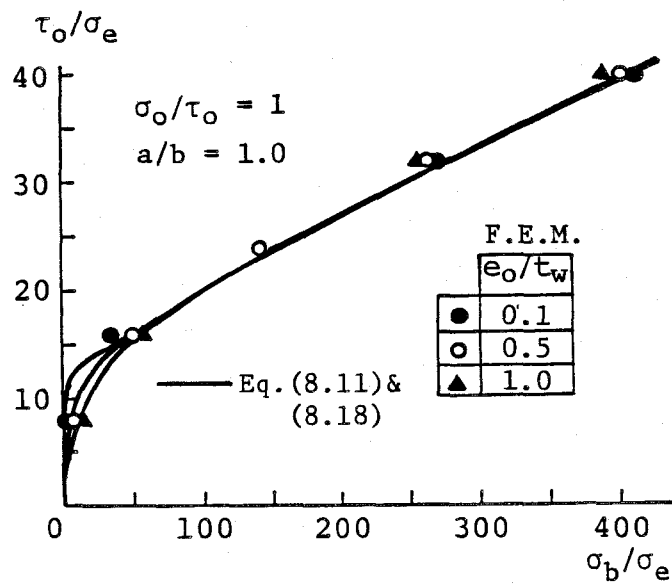


(ii) 境界条件(III)

図-8.17 2次曲げ応力と面外たわみの関係



(i) 境界条件(II)



(ii) 境界条件(III)

図-8.18 荷重と2次曲げ応力の関係

表-8.3の境界条件(Ⅲ)の各係数の値を式(8.11), (8.18)に代入して、式(8.25)を満足するように両式を解くと、200万回疲労強度に対する最大せん断応力  $\tau_{omax}$  とウェブの幅厚比  $\beta$  の関係が得られる。

$R=0$  のときの  $\tau_{omax}/\tau_Y$  と  $\beta$  の関係を図-8.19に示す。この図には  $k_{cr}=13.97$  に対する座屈曲線も描いてある。 $\tau_{omax}/\tau_Y$  と  $\beta$  の関係は、せん断のみを受ける場合のものと同じような傾向を示し、初期たわみの大きさが200万回疲労強度に与える影響は小さい。

応力比  $R$  の値を変化させたときの  $\tau_{omax}/\tau_Y$  と  $\beta$  の関係を図-8.20に示す。初期たわみの大きさはいずれの応力比に対しても  $e_o/t_w=1$  である。図より、せん断に面内曲げが加わった場合にも応力比が200万回疲労強度に与える影響は小さいことがわかる。

せん断に面内曲げが加わった場合とせん断のみを受ける場合の200万回疲労強度の比較を図-8.21に示す。初期たわみの大きさはいずれの場合に対しても  $e_o/t_w=1$  である。図より、面内曲げの作用によって200万回疲労強度が各幅厚比に対して一定の割合で低下することがわかる。

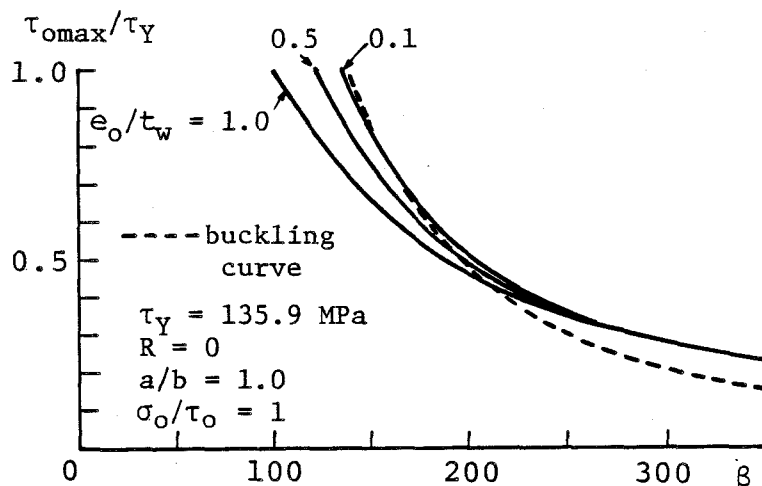


図-8.19  $\tau_{omax}/\tau_Y$  と  $\beta$  の関係 [4A型疲労亀裂]

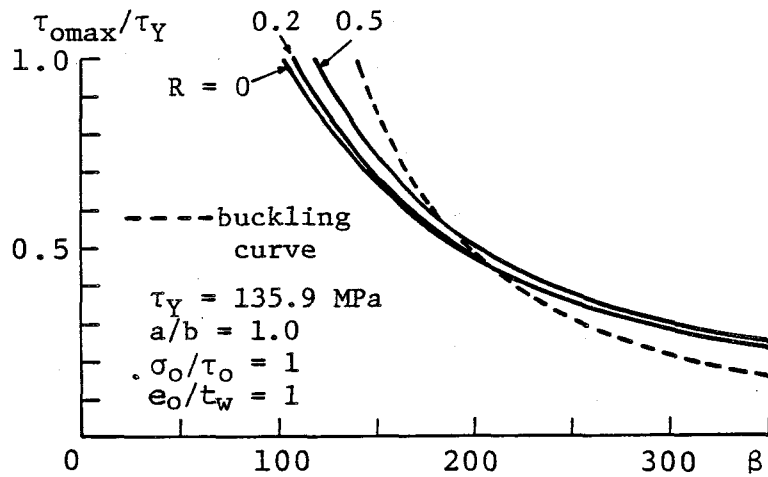


図-8. 20 応力比の影響[4 A型疲労亀裂]

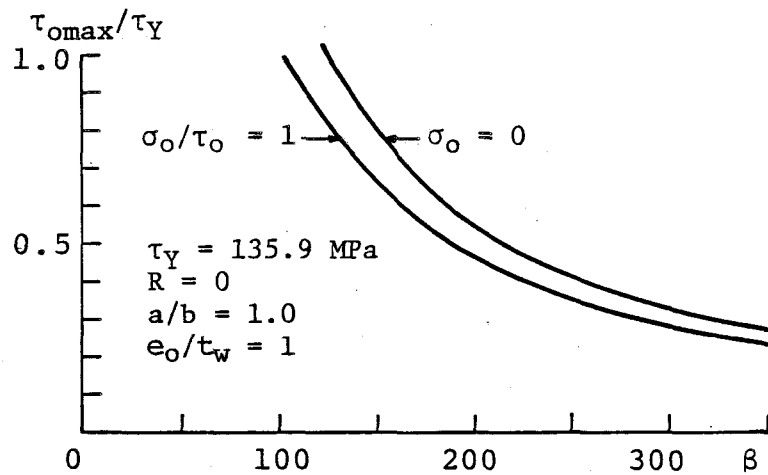


図-8. 21 面内曲げが4 A型疲労亀裂の200万回疲労強度に与える影響

#### 8. 4. 3 4 C型疲労亀裂の疲労強度

2次曲げ応力と引張応力を同時に受ける隅肉溶接の疲労強度は現在明らかにされていない。5. 3節で述べたように、2次曲げ応力のみを受ける隅肉溶接の200万回疲労強度は2次曲げ応力の全振幅で約166.7MPaである。他方、引張応力のみを受ける隅肉溶接の200万回疲労強度は引張応力の全振幅で124.5MPaである。したがって、両者を同時に受ける隅肉溶接の200万回疲労強度として両者の間を直線補間して次式を仮定する。

$$\frac{\sigma_{bmax} - \sigma_{bmin}}{166.7} + \frac{\sigma_{omax} - \sigma_{omin}}{124.5} = 1 \quad (8. 29)$$

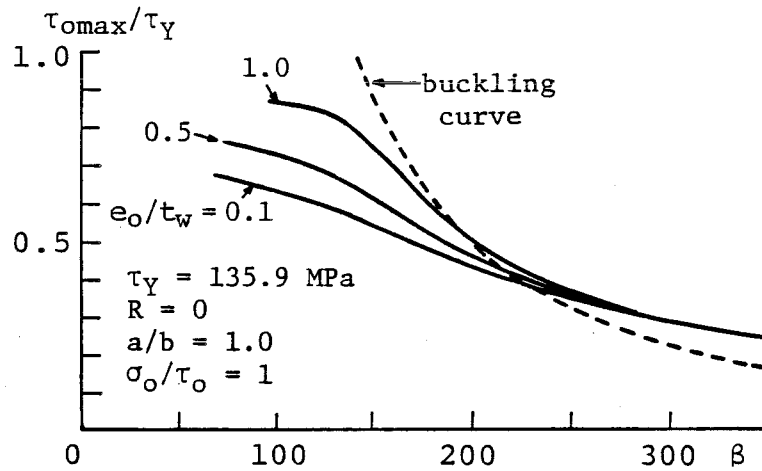


図-8.22  $\tau_{omax}/\tau_Y$ と $\beta$ の関係〔4C型疲労亀裂〕

$\sigma_0/\tau_0=1$ であるので、式(8.29)の $\sigma_{omax}$ と $\sigma_{omin}$ をそれぞれ $\tau_{omax}$ と $\tau_{omin}$ で置き換える。表-8.1において境界条件(Ⅲ)の $a/b=1$ の列の各係数のうち荷重条件(b)に対するものを式(8.11), (8.18)に代入して、式(8.29)を満足するように両式を解くと、200万回疲労強度に対する最大せん断応力 $\tau_{omax}$ とウェブの幅厚比 $\beta$ の関係が得られる。

$R=0$ のときの $\tau_{omax}/\tau_Y$ と $\beta$ の関係を図-8.22に示す。この図には $k_{cr}=14.67$ に対する座屈曲線も描いてある。図より $\beta$ が約200以下のとき、初期たわみの大きさによって200万回疲労強度がかなり異なっていることがわかる。応力比 $R$ の値を変化させたときの $\tau_{omax}/\tau_Y$ と $\beta$ の関係を図-8.23に示す。初期たわみの大きさはいずれの応力比に対しても $e_0/t_w=1$ である。図より $\beta$ が約200以下のとき、応力比によって200万回疲労強度がかなり異なっていることがわかる。したがって、せん断に面内曲げが加わった場合、 $\beta$ が約200以下の領域で、初期たわみあるいは応力比が4C型疲労亀裂の200万回疲労強度に影響を与える。せん断に面内曲げが加わった場合とせん断のみを受ける場合の200万回疲労強度の比較を図-8.24に示す。初期たわみの大きさはいずれの場合に対しても $e_0/t_w=1$ である。図より、面内曲げの作用によって4C型疲労亀裂の200万回疲労強度がかなり低下することがわかる。特に、 $\beta$ が約200以下のとき、200万回疲労強度の低下が大きい。

4A型疲労亀裂と4C型疲労亀裂の200万回疲労強度の比較を図-8.25に示す。

これらの200万回疲労強度は $R = 0$ で $e_o/t_w = 1$ の場合に対するものである。 $\beta$ が約200より小さいとき、4C型疲労亀裂の200万回疲労強度が4A型疲労亀裂の200万回疲労強度より小さくなる。しかし、 $\beta$ が200以上になると、両者の200万回疲労強度はほぼ等しくなる。

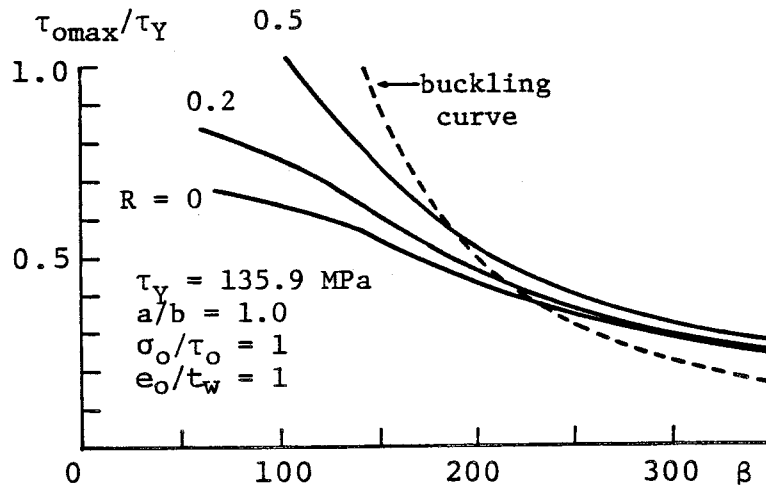


図-8.23 応力比の影響[4C型疲労亀裂]

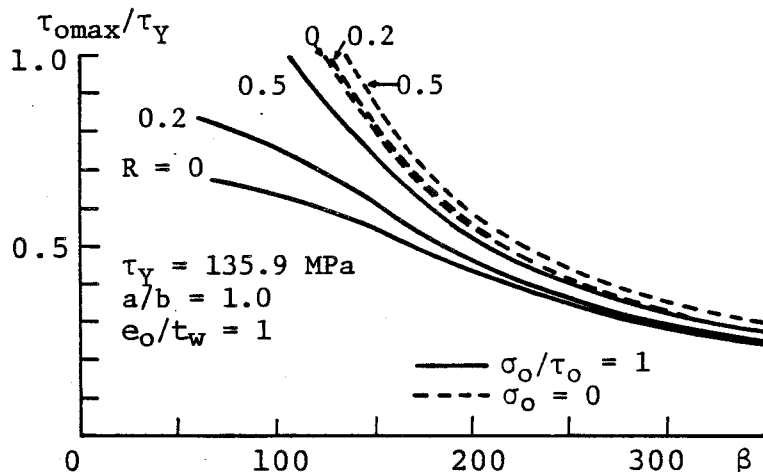


図-8.24 面内曲げが4C型疲労亀裂の200万回疲労強度に与える影響

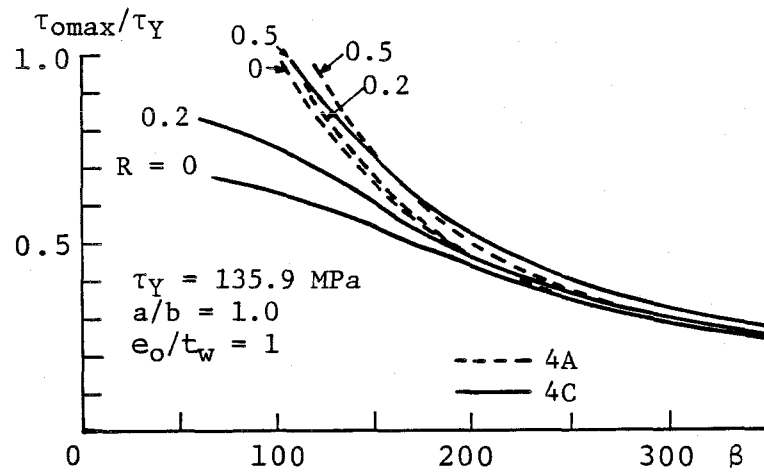


図-8. 2.5 4A型疲労亀裂と4C型疲労亀裂の200万回疲労強度の比較



## 8.5 結 論

せん断を受ける長方形板の荷重と2次曲げ応力の関係を式(8.11), (8.18)で与えた。これらの式を用いて、せん断を受ける薄肉プレートガーダーのウェブの面外変形に起因する4型疲労亀裂の200万回疲労強度をせん断応力で与えた。この疲労強度はウェブの幅厚比の関数として与えられ、次の特性を有することが示された。

- (1) 初期たわみの大きさおよびその形状が200万回疲労強度に与える影響は小さい。
- (2) 応力比が200万回疲労強度に与える影響は小さい。
- (3) 縦横比が0.75, 1.0, 1.5の各場合において、幅厚比が150から200の範囲では200万回疲労強度と座屈強度は互いに漸近しているが、幅厚比が増大すると200万回疲労強度が座屈強度よりも大きくなる。
- (4) 幅厚比が110から150の範囲で、縦横比が0.5の場合の200万回疲労強度が縦横比が0.75あるいは1.0の場合のものより少し小さくなることがあるが、一般に縦横比が小さくなるに従って200万回疲労強度は大きくなる。
- (5) 残留応力は200万回疲労強度を低下させる。この低下の程度は幅厚比の増大に伴って小さくなる。

せん断を受けるプレートガーダーは必ず曲げを伴う。縦横比が1のウェブパネルの4型疲労亀裂を、曲げの影響を考慮してさらに4つに細分類した。この中で、圧縮フランジ側に生じる4A型疲労亀裂と引張領域の垂直補剛材側に生じる4C型疲労亀裂に対してそれぞれせん断応力で200万回疲労強度を与えた結果、次のことがわかった。

- (6) 4A型疲労亀裂の200万回疲労強度と幅厚比の関係は、せん断のみを受ける場合のものと同じような傾向を示し、初期たわみの大きさあるいは応力比が疲労強度に与える影響は小さい。
- (7) 4C型疲労亀裂の200万回疲労強度は、幅厚比が約200より小さいとき、初期たわみあるいは応力比の影響を受ける。しかも、この幅厚比の領域では、4C型疲労亀裂の200万回疲労強度が4A型疲労亀裂のものより小さくなる。しかし、幅厚比が200以上になると両者はほぼ等しくなる。

## 参 考 文 献

- 1) Marguerre, K. : Zur Theorie der gekrümmter Platte grosser Formänderung, Proc. 5th International Congress for Applied Mechanics, Cambridge, pp.93 - 101, 1938.
- 2) Bathe, K.J. and E.L. Wilson : Large eigenvalue problems in dynamic analysis, Proc. of ASCE, Vol. 98, NO. EM6, pp.1471 - 1485, 1972.
- 3) Timoshenko, S.P. and J.M. Gere : Theory of Elastic Stability, 2nd edition, McGraw-Hill, pp.379 - 385, 1961.
- 4) 文献 3)の pp.344 - 346.
- 5) 前田幸雄・川井豊 : 薄肉溶接ハイブリッド・ガーダーの曲げ疲労強度に関する研究、溶接学会誌、第43巻、第3号、pp.736 - 742, 1974.

# 第9章 薄肉プレートガーダーのウェブ の設計と製作に対する提言

1)  
現在、わが国の道路橋示方書の鋼橋編は許容応力度設計法を採用し、未だに疲労設計の<sup>2)</sup>規定を設けていない。しかし、荷重係数設計法を採用した米国のAASHTO示方書、限界状態設計法を採用した英国のBS5400に見られるように、世界の動向は許容応力度設計法からこれらの設計法に変わりつつある。これに伴って、プレートガーダーの設計においては、以前の設計法のときよりも薄肉のウェブの使用が認められるようになった。たとえば、AASHTOでは垂直補剛材のみを有するウェブの幅厚比制限が、降伏応力度が248.2MPaの鋼板に対して、許容応力度設計法では163であったが、荷重係数設計法では192になった。また、BS5400では幅厚比が300に達するような薄肉ウェブの使用が設計上許されている。

1. 1節で述べたようにAASHTO示方書の荷重係数設計法におけるウェブ幅厚比制限はウェブの面外変形に起因する疲労亀裂の発生を防止する規定として与えられている<sup>4)</sup>。しかし、これはプレートガーダーの疲労実験の整理の結果から提案されたものであり、2次曲げ応力を受ける隅肉溶接の疲労強度に直接基づくものではない。面内曲げを受ける、縦横比が1のウェブパネルが2モードの初期たわみをもつとき、図-5.12に示したように、初期たわみの大きさによって200万回疲労強度はかなり異なる。したがって、ウェブの幅厚比の制限のみによってウェブの面外変形に起因する疲労亀裂の発生を防止することはできず、初期たわみ形状に対しても制限する必要があると考える。

次に、前章までの解析結果に基づいて、薄肉プレートガーダーのウェブの設計と製作に対して2・3の提言を行なう。

## (1) 垂直補剛材のみを有する、曲げを受けるプレートガーダーの場合

縦横比が1のウェブパネルの場合、x軸方向に1モードの初期たわみは、面外たわみと2次曲げ応力をあまり増加させない効果がある。したがって、ウェブパネルに、x軸方向に1モードの初期たわみが生じるようなプレートガーダーの製作が望まれる。この初期たわみモードに対して、式(5.19)と(5.25)から所定の繰り返し数に

対して疲労強度が与えられ、これをプレートガーダーの疲労設計に使用することができる。プレートガーダーの製作において、ウェブパネルに、 $x$ 軸方向に2モードまたは、3モードの初期たわみの発生が不可避であるならば、式(5.19)と式(5.6)、(5.11)から所定の繰り返し数に対して疲労強度が与えられ、これをプレートガーダーの疲労設計に使用することができる。

縦横比が0.5のウェブパネルの場合、 $x$ 軸方向に1モードの初期たわみが面外たわみと2次曲げ応力を増加させる。また、縦横比が1.5の場合、1モードの初期たわみが面外たわみと2次曲げ応力をあまり増加させない効果はあるが、 $x$ 軸方向にウェブパネルが長くなるので、プレートガーダーの製作において2モードまたは3モードの初期たわみの発生する確率が高くなる恐れがある。したがって、縦横比が0.5または1.5に近くなるような垂直補剛材の配置は行なわない方がよいと考える。

## (2) 垂直補剛材と水平補剛材を有する、曲げを受けるプレートガーダーの場合

水平補剛材はウェブの面外変形と2次曲げ応力の増加を抑制する効果がある。その効果は水平補剛材の曲げ剛比 $\gamma/\gamma^*$ の大きさによって異なる。 $\gamma/\gamma^*=1$ の水平補剛材の場合、図-6.10に示したように、200万回疲労強度が座屈強度より大きいので、プレートガーダーの疲労設計において、疲労亀裂の発生を防止する基準として座屈強度を使用すればよいと考える。

$\gamma/\gamma^*$ が1より大きくなるに従って圧縮フランジと水平補剛材との間のサブパネルの局所的な面外変形に起因する2次曲げ応力が問題になる。この場合、サブパネルにおいて座屈形状に類似する初期たわみの存在が疲労亀裂の発生に対して重要になる。そのような初期たわみに対して、式(5.19)と式(6.13)から所定の繰り返し数に対して疲労強度が与えられ、これを疲労設計に使用することができる。

$\gamma/\gamma^*$ が1より大きくなってウェブ全体の面外変形が抑制されても、圧縮フランジと水平補剛材との間のサブパネルに座屈波形に類似する初期たわみが存在する場合、図-6.12に示したように、 $\gamma/\gamma^*>1$ の場合の200万回疲労強度が $\gamma/\gamma^*=1$ の場合のものよりかなり低くなる。 $\gamma/\gamma^*$ の大きさは、プレートガーダーの終局強度<sup>5)</sup>に関する分野でも議論されているが、ウェブの面外変形に起因する疲労亀裂の発生を抑制するには、 $\gamma/\gamma^*=1$ の水平補剛材を使用する方がよいと考える。

## (3) 垂直補剛材のみを有する、せん断を受けるプレートガーダーの場合

せん断を受けるプレートガーダーの場合、初期たわみの大きさおよびその形状が200万回疲労強度に与える影響は小さい。幅厚比が150から200の範囲では200万回疲労強度と座屈強度とは互いに漸近し、幅厚比が増加すると200万回疲労強度が座屈強度よりも大きくなる。したがって、せん断を受けるプレートガーダーの場合、初期たわみ形状に対してあまり注意を払う必要がなく、疲労亀裂の発生を防止する基準として座屈強度を使用すればよいと考える。

以上述べたように、曲げを受けるプレートガーダーにおいて、初期たわみ形状とその大きさが疲労亀裂の発生に対して重要になる。したがって、各初期たわみ成分の大きさを照査することができる初期たわみの測定方法が今後確立されねばならないと考える。BS 5400<sup>6)</sup>では、座屈モード成分が終局強度に与える影響を考慮して、座屈モード成分を照査<sup>7)</sup>する測定方法が与えられている。他方、薄肉ウェブの初期たわみの発生機構を明らかにし、薄肉プレートガーダーの製作におけるウェブの初期たわみ形状の制御に対してなんらかの指針を与えることも今後必要であると考ええる。

なお、最近わが国の橋梁に疲労亀裂が発生している事例がいくつか報告されるようになった。その中で、道路橋のプレートガーダーの支点切欠き部に、ウェブの面外変形と切欠き形状による応力集中に起因して疲労亀裂が発生していることが報告されている<sup>8)</sup>。また、鉄道橋の箱桁においては、ウェブの面外方向の振動に起因して、垂直補剛材下端のスカルップから疲労亀裂が発生していることが報告されている<sup>9)</sup>。これらの疲労亀裂はいずれもウェブの面外変形に他の要因が重畳されて発生したものである。そのような疲労の問題に対しても本研究は発展・拡張されるものと考ええる。

## 参 考 文 献

- 1) 日本道路協会：道路橋示方書・同解説、1980年2月。
- 2) AASHTO : Standard Specification for Highway Bridges, The American Association of State Highway and Transportation Officials, 12th edition, 1977.
- 3) BS5400 Part3 : Code of Practice for Design of Steel Bridges, British Standards Institution, 1982.
- 4) Vincent,G.S. : Tentative criteria for load factor design of steel highway bridges, AISI, Bull.No.15, March,1969.
- 5) Massonnet, Ch. : Stability considerations in the design of steel plate girders, Proc. of ASCE, Vol.86, No.ST 1, pp.71-97, 1960.
- 6) BS5400 Part 6 : Specification for materials and workmanship, steel, British Standards Institution, 1980.
- 7) Massonnet,Ch. and J.Janss : State of art report on tolerances in steel plated structures, The Design of Steel Bridges, edited by K.C. Rockey and H.R. Evans, pp.83-118, 1981.
- 8) 手塚茂樹・池田良典 : 鋼 I 桁支点切欠き部の補修, 橋梁と基礎, Vol.17, No.8, pp.56~59, 1983.
- 9) 土木学会 : 溶接構造と疲労, 土木学会昭和55年度全国大会研究討論会講演概要No.1, pp.1~4, 1980.

# 第10章 結 論

本研究では、薄肉プレートガーダーのウェブの面外変形に起因する1型あるいは4型疲労亀裂に関して、既往の実験的研究では明らかにされなかった諸問題を、有限要素法による薄板の面外有限変形解析により理論的に明らかにした。さらに、これらの疲労亀裂に対して、ウェブの面外変形を考慮した疲労強度をそれぞれ面内曲げ応力あるいはせん断応力で与えた。これらの疲労強度はウェブの幅厚比の関数として与えられ、ウェブの初期たわみと残留応力、応力比、ウェブの降伏応力度、縦横比などが両者の関係に与える影響を明らかにした。

本研究で得られた主要な結果について各章ごとに以下に要約する。

第1章では、薄肉プレートガーダーのウェブの面外変形に起因する1型あるいは4型疲労亀裂に関して、既往の実験的研究では解決されなかった問題点を列挙した。そして、本研究の目的を述べ、さらに本論文の内容を概説した。

第2章では、曲げを受ける薄肉プレートガーダーの1型疲労亀裂を取り扱った。縦横比が1のウェブパネルの場合、 $x$ 軸方向の各初期たわみモード成分のうち、1モードの初期たわみ成分は面外たわみをあまり増加させず、したがって2次曲げ応力もあまり増加させない。しかし、2または3モードの初期たわみ成分は面外たわみを増加させ、2次曲げ応力も増加させる。各初期たわみモード成分のこのような性質を考慮して、既往の実験結果を再調査すると、ウェブの初期たわみの大きさのみならず、初期たわみの形状が1型疲労亀裂の発生に影響していることが明らかになった。そして、最大初期たわみを制限することが必ずしも1型疲労亀裂の発生を防止することにならず、さらに各モード成分の大きさも制限する必要があることを指摘した。

第3章では、4辺単純支持された、圧縮と面内曲げを受ける長方形板の面外有限変形を定式化した。この式を用いて、圧縮と面内曲げを受ける長方形板の面外有限変形の特性を明らかにした。

第4章では、圧縮を受ける長方形板に対して、第3章の結果を用いて、初期たわみと非載荷辺の回転拘束を考慮して荷重と2次曲げ応力の関係を定式化する方法を示した。また、

本章では、残留応力がウェブの面外挙動に与える影響を明らかにした。そして、荷重と2次曲げ応力の関係を残留応力も存在する場合に適用するためには、座屈係数に対して残留応力の影響を考慮したものを使用すればよいことを示した。

第5章では、第4章で示された方法により、面内曲げを受ける長方形板の荷重と2次曲げ応力の関係を定式化した。この関係式の2次曲げ応力に隅肉溶接の200万回疲労強度を代入することにより、曲げを受ける薄肉プレートガーダーの1型疲労亀裂に対して、200万回疲労強度を面内曲げ応力で与えた。この疲労強度はウェブの幅厚比の関数として与えられ、次の特性を有することが示された。(i) y軸方向の初期たわみモードが200万回疲労強度に与える影響は幅厚比が大きくなるに従って小さくなる。(ii) 縦横比が1のウェブパネルがx軸方向に2モードあるいは3モードの初期たわみを持つ場合、200万回疲労強度は初期たわみの大きさと応力比によっては座屈強度をかなり下回る幅厚比の領域が存在する。(iii) ウェブの降伏応力度が大きくなっても2次曲げ応力を受ける隅肉溶接の200万回疲労強度が大きくなるため、幅厚比の代わりに幅厚比に降伏応力度の平方根を乗じた形式のものを使用しても、降伏応力度で無次元化された200万回疲労強度は降伏応力度が大きくなると低下し、降伏応力度に無関係に表わすことができない。(iv) 残留応力は200万回疲労強度を低下させる。

第6章では、水平補剛材が1型疲労亀裂の発生を抑制する効果を理論的に明らかにした。1型疲労亀裂の発生原因は水平補剛材の曲げ剛比 $\gamma/\gamma^*$ の大きさによって異なる。(i)  $\gamma/\gamma^*=1$ の場合、水平補剛材はウェブと一体となって変形するので、ウェブの全体の初期たわみ形状が2次曲げ応力の増加、すなわち1型疲労亀裂の発生に重要である。(ii)  $\gamma/\gamma^*$ が1より大きくなるに従って、水平補剛材の位置の面外変形は抑制されるが、反対に圧縮フランジと水平補剛材との間のサブパネルが独自の変形をするようになる。そして、このサブパネルにおいて、座屈形状に類似する初期たわみが2次曲げ応力の増加と1型疲労亀裂の発生に重要になる。

第7章では、せん断を受ける薄肉プレートガーダーの4型疲労亀裂を取り扱った。せん断を受ける長方形板の長辺上の最大2次曲げ応力の方が短辺上の最大2次曲げ応力より大きくなるという解析結果によって、既往の実験で、縦横比が1より小さいウェブにおいては、垂直補剛材側に沿って4型疲労亀裂が発生しやすく、1より大きいウェブにおいては、フランジ側に沿って4型疲労亀裂が発生しやすかったことが説明された。Yenの実験の縦



横比が1のウェブでは、4型疲労亀裂がフランジ側より垂直補剛材側に多く発生した。これは、各辺上に生じる2次曲げ応力の大小の比較によっては説明することができず、面内曲げによる引張応力の影響を考慮する必要があることを指摘した。

第8章では、せん断を受ける長方形板の荷重と2次曲げ応力の関係を定式化した。この関係式を用いて、せん断を受ける薄肉プレートガーダーの4型疲労亀裂に対して、200万回疲労強度をせん断応力で与えた。この疲労強度はウェブの幅厚比の関数として与えられ、次の特性を有することが示された。(i)初期たわみと応力比が200万回疲労強度に与える影響は小さい。(ii)幅厚比が150から200の範囲では200万回疲労強度と座屈強度は互いに漸近しているが、幅厚比が増大すると200万回疲労強度が座屈強度よりも大きくなる。(iii)縦横比が小さくなるに従って200万回疲労強度は大きくなる。(iv)残留応力は200万回疲労強度を低下させる。(v)せん断を受けるプレートガーダーは必ず曲げを伴うが、この曲げが200万回疲労強度に与える影響は幅厚比が約200より小さいときに現われる。

第9章では、第1章から第8章までの解析結果に基づいて、薄肉プレートガーダーのウェブの設計と製作に対して2・3の提言を行なった。(i)垂直補剛材のみを有する、曲げを受けるプレートガーダーの場合、初期たわみ形状が重要になり、各初期モードに対して、本論文で与えられた式により疲労強度を算出しなければならない。(ii)垂直補剛材と水平補剛材を有する、曲げを受けるプレートガーダーの場合、水平補剛材の曲げ剛比 $\gamma/\gamma^*$ の大きさによって疲労強度が異なる。 $\gamma/\gamma^*=1$ の水平補剛材を使用するのがよく、この場合、疲労亀裂の発生を防止する基準として座屈強度を使用することができる。(iii)垂直補剛材のみを有する、せん断を受けるプレートガーダーの場合、初期たわみ形状に対してあまり注意を払う必要がなく、疲労亀裂の発生を防止する基準として座屈強度を使用すればよい。さらに、第9章では、薄肉プレートガーダーの使用に際しては、各初期たわみ成分の大きさを照査することができる初期たわみの測定方法の確立と、初期たわみの発生機構を明らかにすることが今後必要であることを指摘した。また最近わが国の橋梁にウェブの面外変形が一因と考えられる疲労亀裂が発生していることを指摘した。

著者は、薄肉プレートガーダーのウェブの面外変形に起因する疲労亀裂の発生機構を理論的に明らかにし、ウェブの面外変形を考慮した疲労強度を与え、その特性を明らかにした。本研究の結果は、薄肉プレートガーダーの製作におけるウェブの初期たわみの大きさ

と形状の制限、およびプレートガーダー橋の設計に荷重係数設計法、または限界状態設計法を適用する場合の使用限界の設定などに一つの指針を与えるものとする。

# 謝 辞

本研究は、著者が1976年4月に大阪大学工学部土木工学教室前田研究室配属以来行なって来たものであり、その間終始懇篤なる御指導を賜った大阪大学工学部前田幸雄教授に対し、ここにつつしんで感謝の意を表する。

また本論文をまとめるにあたって、指導と校閲の労をとられた大阪大学工学部小松定夫教授、五十嵐定義教授に心から拝謝する次第である。

本研究を遂行する上では、大阪大学溶接工学研究所堀川浩甫助教授、大阪大学工学部松井繁之講師、梶川靖治講師、長岡技術科学大学林正助教授に、有益なる助言の数々をいただいた。また西山六朗技官には実験において御協力いただいた。

以上の諸氏に厚く御礼申し上げます。

# 本論文に関する著者の発表論文

- 1) 前田幸雄. 大倉一郎: プレートガーダーウェブの初期たわみと疲労亀裂発生の相関に関する研究, 土木学会論文報告集, 第319号, pp.1-11, 1982.
- 2) 前田幸雄. 大倉一郎: 圧縮と面内曲げを受ける長方形板の面外有限変形に関する研究, 土木学会論文報告集, 第320号, pp.15-23, 1982.
- 3) 前田幸雄. 大倉一郎: 薄板の面外変形に起因する疲労亀裂に与える初期たわみの影響, 土木学会論文報告集, 第329号, pp.1-11, 1983.
- 4) Maeda, Y. and I. Okura : Fatigue strength of plate girder in bending considering out-of-plane deformation of web, 土木学会論文集, 第350号, pp.35-45, 1984.
- 5) 前田幸雄. 大倉一郎: せん断を受ける長方形板の面外有限変形解析, 日本鋼構造協会第17回大会研究集会, マトリックス解析法研究発表論文集, pp.121-126, 1983.
- 6) Maeda, Y., I. Okura and K. Kobashi : Formulation of finite out-of-plane deformation of rectangular plates in compression, Technol. Repts. Osaka Univ., Vol. 31, No. 1624, pp. 333-342, 1981.
- 7) Maeda, Y., I. Okura and M. Yoshii : Finite out-of-plane behavior of rectangular plates in shear, Technol. Repts. Osaka Univ., Vol. 32, No. 1647, pp. 143-150, 1982.
- 8) Maeda, Y. and I. Okura : Interaction between initial web deflection and fatigue crack initiation in thin-walled plate girders, The Design of Steel Bridges---Conference Discussion, edited by H. R. Evans, University College, Cardiff, pp. 12.9-12.16, 1981.
- 9) Maeda, Y. and I. Okura : Influence of initial deflection of plate girder webs on fatigue crack initiation, Engineering Structures, Vol. 5, pp. 58-66, Jan., 1983.  
この論文は次の論文集に再録された。  
Festschrift Prof. Dr. Bruno Thurlimann zum 60. Geburtstag, pp. 223-231, June, 1983.
- 10) Maeda, Y. and I. Okura : Analysis of deformation-induced fatigue of stiffened

plate girder in bending, Anniversary Volume to Celebrate the Retirement of  
prof. Ch. Massonnet, Univ. of Liege, pp. 255-264, March, 1984.

- 11) Maeda, Y. and I. Okura and H. Hirano: Formulation of finite out-of-plane  
deformation of rectangular plate in shear, Technol. Repts. Osaka Univ., Vol. 35,  
1985.