OUKA
The University of Osaka
Institutional Knowledge Archive

Title	Asymptotic Quantum Statistical Estimation
Author(s)	Yamagata, Koichi
Citation	大阪大学, 2013, 博士論文
Version Type	VoR
URL	https://hdl.handle.net/11094/24950
rights	
Note	

The University of Osaka Institutional Knowledge Archive : OUKA

https://ir.library.osaka-u.ac.jp/

The University of Osaka

【27】

氏名	山形浩一（やまがたこういち）
博士の専攻分野の名称	博士（理学）
学位記番号	第　25808　号
学位授与年月日	平成25年3月25日
学位授与の要件	学位規則第4条第1項該当 理学研究科数学専攻
学位論文名	Asymptotic Quantum Statistical Estimation （量子推定における漸近理論）
論文審査委員	（主査） 教授　藤原　彰夫 （副査） 教授　杉田　洋　准教授　深澤　正彰 電気通信大学教授　長岡　浩司

論文内容の要旨

本博士論文は量子推定の漸近理論に関する研究である。主に以下の３つの論文の内容が収められている。

(1) Quantum Local Asymptotic Normality (QLAN) の研究。これは i.i.d.拡張された系同士の間の量子相関を積極的に用いた場合の量子推定の漸近理論である。その場合、本質的な役割を演じるのが QLAN である。QLAN とは古典統計学で知られていた Local Asymptotic Normality (LAN)の量子統計への拡張である。十分なめらかにパラメトライズされた統計モデルを i.i.d.拡張すると、モデルの統計的性質が局所的かつ漸近的にガウスシフトモデルに酷似してくることが知られている。その性質が LAN である。量子統計においても同様に、十分なめらかな量子統計的モデルを i.i.d.拡張すると、局所的かつ漸近的に量子ガウスシフトモデルに酷似してくることが期待できる。これが QLAN である。この QLAN についてはすでに先行研究があった。しかし先行の QLAN にはいくつかの欠点があった。例えば先行の QLAN は純粋状態からなるモデルや状態の固有値が縮退している場合などの基本的なモデルでさえ扱うことができない。こういった問題を克服するため、我々は全く新しい対数尤度比の量子化を導入し、その上に QLAN の理論を展開した。その結果、従来の方法では扱えない、より広いクラスの量子統計モデルの推定に適応できる QLAN 理論の構築に成功した。その応用として、十分なめらかな量子統計モデルを i.i.d.拡張した場合、量子相関を積極的に用いることで局所漸近的に Holevo bound といわれる推定限界に到達する推定量の列の存在の証明に成功した。

(2) ２準位量子系の推定理論とトモグラフィーの比較。今度は量子相関を使わないという状況での量子推定の話である。２準位量子系における推定限界はこれまで無限次元凸解析などの難解な手法で導かれていた。本研究ではこれに大変見通しの良い統一的な別証明を与え、さらに最適な推定量を具体的に導出した。一方、量子相関を使わない状況で未知の量子状態を推定する際、量子状態トモグラフィーと呼ばれる推定方法が広く用いられている。この量子状態トモグラフィーは我々が導出した最適な推定量から見てどのような位置にあるのか研究を行った。その結果トモグラフィーはある特殊で不自然なリスク関数（重み）を採用しないと最適ではないということを示した。

(3) 量子適応的最尤法の実験的検証。これは北海道大学の竹内繁樹教授たちの実験グループとの共同研究である。量子相関を使わない設定のもとで、量子推定論的に最適な推定量を現実の単一光子を用いて実現させるという実験結果をまとめたものである。量子状態の推定において、一般に最適な推定量は真の状態に依存する。真の状態が未知であるにもかかわらず、真の状態に依存する推定量は使い物にならないように思えるが、適応的最尤法を用いればその問題が克服され、真の状態によらずに一致性や漸近有効性が現れることが理論的に示されている。本研究では量子適応的最尤法を現実の単一光子の上で実現させることに成功した。そして理論通りに一致性や漸近有効性が現れることを実験的に確かめた。

論文審査の結果の要旨

本論文は，非可換統計学，特に量子推定理論における漸近理論の新たな展開とその応用を研究したものである．

本論文ではまず，異なる量子系にまたがる量子相関を利用した枠組みでの漸近理論を研究した．Le Cam に始まる（古典）統計的モデルの局所漸近正規性（LAN）の研究は，近年，Guta や Kahn らによって量子統計的枠組みへの拡張が試みられてきたが，完全正写像を介した量子状態族の相互埋め込みに基づく“強い意味”での量子 LAN を群の表現論的手法により導出する方針に固執したため,極めて限定的で不自然な数学的条件を課す必要があった．これに対し本研究では，量子対数尤度比の概念を新たに導入すると共に，その漸近特性を量子分布収束（弱収束）の観点から研究することにより，上述の不自然な条件を排し，古典論と同様の緩い条件下で量子 LAN を定式化すると共に，古典 LAN 理論の要諦をなす Le Cam 第３補題の量子版に相当する定理を導出することができた．そしてその応用として，量子推定理論における大きな未解決問題の一つであった「Holevo の下界（量子推定限界の一つの下界）は局所的には常に達成可能であろう」という数学的予想を，上述の緩い条件の下で証明することにも成功した．

引き続き本論文では，量子相関を用いない枠組みでの漸近理論とその物理的実現について研究した．未知の量子状態を推定する方法の一つに量子トモグラフィーがあり，物理的実装の容易さから，推定方式としての最適性を度外視したまま広く用いられている．これに対し本論文では，２準位量子状態に対する量子トモグラフィーの最適性を厳密な非可換統計学の観点から研究し，量子トモグラフィーが量子状態空間の情報幾何学的構造を無視した不自然で非効率的な推定方法であることを定量的に明らかにした．一方，量子 Cramer-Rao 型不等式の意味で最適な量子推定方式を実現する方法に適応的量子最尤推定法があるが，その漸近特性が明らかになったのは比較的最近のことであり，未だ認知度が低いため，これまで実験的に検証されてはいなかった．そこで本論文では，量子光学を専門とする実験物理学者と共同研究を行い，光子の偏光方向の推定問題において上述の適応的量子最尤推定法を世界で初めて物理的に実装し，数学的事実としてのみ確立されていた適応的量子最尤推定法の強一致性と漸近有効性を実験的に検証した．

以上のように本論文は，非可換統計学の理論的発展とその応用に大きく貢献するものである．よって，本論文は博士（理学）の学位論文として十分価値あるものと認める．