

Title	超相対論レーザー電子相互作用における放射の反作用の理論研究
Author(s)	瀬戸, 慧大
Citation	大阪大学, 2013, 博士論文
Version Type	VoR
URL	<a href="https://hdl.handle.net/11094/24961">https://hdl.handle.net/11094/24961</a>
rights	
Note	

*Osaka University Knowledge Archive : OUKA*

<https://ir.library.osaka-u.ac.jp/>

Osaka University

博士学位論文

超相対論レーザー電子相互作用における  
放射の反作用の理論研究

瀬戸 慧大

2013年 1月

大阪大学大学院工学研究科  
電気電子情報工学専攻  
先進電磁エネルギー工学コース



## 内容梗概

本論文は、著者が大阪大学大学院電気電子情報工学専攻博士後期課程において行ったレーザー電子相互作用における代表的な物理過程の一つである放射の反作用と呼ばれるものについて理論・シミュレーションの成果をまとめたものである。レーザーを外部印加用の電磁場として利用し、それに対して荷電粒子群がどのように振る舞うかを探求するのがレーザープラズマ物理と言えよう。この分野の一つの広がり方として、レーザー強度を高めればどのような現象が現れるのだろうかという興味がある。このレーザーの高強度化を推し進めて次世代の強度に至る過程で、恐らく我々の前に最初に現れるであろう物理過程が“放射の反作用(radiation reaction または radiation damping)”と呼ばれるものである。これは高エネルギーの電子が外部電磁場(たとえばレーザーなど)と相互作用することで加速された結果、制動放射を伴う。制動放射はフォトンの集合であるので、電子は制動放射分のエネルギー・運動量を失うはずである。この損失が電子に与える影響を放射の反作用と呼ぶ。

この放射の反作用理論は Lorentz の 1906 年の電子論に端を発すると言われている。Lorentz は量子論を使わずに電子を取り扱うにはどのような模型が最適であるかを考えた。そこで登場するのが球殻電子模型である。球の表面にのみ電荷が存在し中空の電子は微小な電荷要素同士が Liénard-Wiechert の電磁場(電子が静止していれば Coulomb 場)で結合される。この電磁場は電子が運動を始めると Coulomb 場から電磁場のプロファイルが離れてゆく。そのため Lorentz の電子模型では電子が運動することによって Liénard-Wiechert 場のために平衡が崩れ、離れた所から眺めると、あたかも電子に何かの力が働いているように見える。この力こそ放射の反作用力と今日呼ばれるものである。電子の制動放射と物理過程が違って見えるかもしれないが、それは電子の外側で Liénard-Wiechert 場を観測しているか、電子の内側で観測しているかの差だと思えば受け入れることができるだろう。

しかしながら、Lorentz 自身も指摘しているが放射の反作用理論は決定的な弱点を含んでいた。Lorentz の立てた電子の運動方程式は

$$m_0 \frac{d\mathbf{v}}{dt} = -e\mathbf{E} + m_0\tau_0 \frac{d^2\mathbf{v}}{dt^2}$$

であり、Lorentz-Abraham 方程式という。この方程式は問題がないように思えるが、計算をしてみるとエネルギーが無限大に発散してしまう run-away という問題を含んでいた。つまり、意味のある解を導けないのである。そのような理由から、理論物理学者はこれを古

典物理学の限界を超えたとみなし量子力学を迎え入れることとなる。

時は流れ 1938 年、電子の相対論的波動方程式を生み出した Dirac は自らが生み出したその Dirac 方程式からの一連の発展に頭を悩ませることとなる。量子電磁力学(QED)がこのころには日常的に利用できるレベルになり、あらゆる物理過程への適応が挑戦され続けてきたが、高次補正にもかかわらず、それらが発散を生むことが確認されてきた。自己相互作用などと呼ばれる類の問題で最終的には繰り込み理論で処理されることになるが、当時はまだ繰り込みが成立しておらず Dirac はその処方として Lorentz-Abraham の理論に注目した。電子内の要素同士の相互作用が自己相互作用の古典描像であると見抜いたのである。QED への応用のためには相対論的なものでなければならず、それゆえ Dirac は Lorentz-Abraham 方程式を相対論拡張した運動方程式

$$m_0 \frac{dw^\mu}{d\tau} = -eF_{\text{Laser}}{}^{\mu\nu} w_\nu + \left( m_0 \tau_0 \frac{d^2 w^\mu}{d\tau^2} + \frac{m_0 \tau_0}{c^2} \frac{dw^\nu}{d\tau} \frac{dw_\nu}{d\tau} w^\mu \right)$$

を提案する。これは Lorentz-Abraham-Dirac(LAD)方程式と呼ばれ、もつともたくさんの要素を取り込んだ古典方程式である。しかしながら run-away は取り除かれることはなく知る人ぞ知る方程式となってしまった。

さらに時代は進み 2012 年現在、レーザー技術が進み電子のエネルギーの大半を制動放射に変換できるような状況が生み出せるようになりつつある。レーザープラズマの分野において放射の反作用の影響が無視できなくなったと言い換えられる。そのような理由から放射の反作用を組み込んだ物理記述が切望されている。レーザープラズマの世界では粒子は古典的に取り扱われることが好まれる。そこで既に提案された LAD 方程式に注目が集まったが、run-away を内包する問題が未だに解決されていない。この運動が解けない問題を解決することを目標に、本論文は LAD 方程式に変わる古典運動の方程式の提案を主軸に関連する事項を述べている。具体的に論文の構成を示す。

第 1 章では、放射の反作用に関連し、本論文の議論には欠くことができない考え方や問題を取り上げ理論の概要を述べる。数値計算のために計算できない方程式をこれまでどのように扱ったかなども収録している。第 2 章では本論文で登場する理論をすべて列挙する。run-away を含むとはいえ理論自体は色あせない Lorentz-Abraham-Dirac 理論をレーザープラズマ向きの方法で解説し、方程式の導出を行う。Dirac のオリジナルの導出方法はかなりアクロバティックで難解であるので、この論文ではこの方法は利用しない。その後シミュレーションで良く利用される Landau-Lifshitz によって行われた近似を解説している。相対論的な束縛条件から Schott 項と呼ばれる  $m_0 \tau_0 d^2 w^\mu / d\tau^2$  の項が運動方程式に含まれているが、この項そのものの物理的な解釈は実は今現在において完全なものではない。また、

run-away という問題を引き起こすのは数学的に見て Schott 項が原因であることも現在では共通認識となっている。今回の主張は、LAD 方程式に代わる新たな方程式の提案であり、Schott 項というものは電子の外にいる我々が観測できないという仮定をとった場合の運動方程式である。この仮定により古典物理の範囲で全ての領域で安定な解を持ちえる。これら著者が提案した新方程式の導出・理論的妥当性の検討などもこの第 2 章に収録されている。次ぐ第 3 章・第 4 章が著者の生み出した理論を使った数値計算の結果である。第 3 章は超高強度レーザー・高エネルギー電子の相互作用に焦点を絞った。これがこれからのレーザープラズマの世界で必要になるであろう計算である。放射を考慮することで大きくダイナミクスが変更されることが示される。一方の第 4 章は必ずしもレーザープラズマと関連するとは言えないが、しかしながら重要な低強度レーザーと低エネルギー電子の相互作用の計算結果である。理論物理としては最も重要な LAD 方程式による自己加速効果(あるいは run-away)を考察できるのはこの低エネルギー領域である。もっとも、run-away を回避したモデルのみを採用して考察している。低強度レーザー・低エネルギー電子の相互作用では理論間のずれを見出すことができる。著者の提案する方程式のアドバンテージはこの章でも示されることとなる。第 5 章に結論を述べ、重要ではあるが本論に入れると煩雑になるだろうと判断した話題はすべて続く附録に収録した。



## 目次

第 1 章 序論.....	1
1.1 レーザープラズマ物理の中の放射の反作用.....	1
1.2 理論物理の中の放射の反作用.....	3
相対論性理論を利用する際の書式の注意.....	5
本論文で使用する記号.....	7
参考文献.....	9
第 2 章 放射の反作用の新方程式.....	10
2.1 LAD 方程式の導出.....	10
2.2 run-away 解.....	12
2.3 Landau-Lifshitz 方程式.....	13
2.4 新たな仮定としてのエネルギーバランス式.....	14
2.5 運動方程式.....	14
2.5-1 非相対論的運動方程式.....	15
2.5-2 相対論的運動方程式.....	16
2.6 新方程式の安定性.....	17
2.7 結論.....	18
参考文献.....	19
第 3 章 超相対論的レーザー・高エネルギー電子相互作用.....	20
3.1 カウンター配位の初期値.....	20
3.2 カウンター配位のシミュレーション結果.....	20
3.3 静止電子へのレーザー照射.....	25
3.3 結論.....	27
参考文献.....	28
第 4 章 非相対論的レーザー・電子相互作用.....	29
4.1 初期値.....	29
4.2 シミュレーション結果.....	29
4.3 結論.....	36
参考文献.....	37



第 5 章 結論.....	38
参考文献.....	40
附録.....	41
A1. 放射エネルギーの定式化.....	43
A1.1 Liénard-Wiechert ポテンシャル.....	43
A1.2 Liénard-Wiechert 場.....	47
A1.3 制動放射によるエネルギー放射.....	51
参考文献.....	56
A2. 相対論における運動方程式.....	57
A2.1 時空の数学的構成と時空内の粒子運動.....	57
A2.2 相対論における電磁波の扱い.....	60
A2.3 電磁場の共変理論.....	63
参考文献.....	65
A3. 相対論的量子論の中での放射の反作用.....	66
A3.1 Dirac 方程式.....	66
A3.2 Dirac 粒子の電磁相互作用.....	67
A3.3 Dirac による放射の反作用~先進場の利用~.....	68
A3.4 放射の反作用の導入.....	71
A3.5 摂動計算法.....	72
参考文献.....	77
謝辞.....	78
研究業績.....	79

## 第1章 序論

20世紀以降、理論物理において光は量子理論・時空理論において重要な役割を果たしてきた。量子論を用いて生み出される、単色でコヒーレントな光であるレーザーを外部印加用の電磁場として利用し、それに対して荷電粒子群がどのように振る舞うかを探求することがレーザープラズマ物理と言えよう。この分野の一つの広がり方として、レーザー強度を高めていけばどのような現象が現れるのかという興味がある。このレーザーの高強度化を推し進めて次世代の強度に至る過程で、恐らく我々の前に最初に現れるであろう物理過程が“放射の反作用(radiation reaction または radiation damping)”と呼ばれるものである。これについて以下の小節で2つの視点から要点を述べる。

### 1.1 レーザープラズマ物理の中の放射の反作用

直前にも述べたように、レーザープラズマ物理とはレーザーを印加したときにプラズマとして荷電粒子がどのように振る舞うかということテーマにした分野である。通常のプラズマ物理と違う点は、レーザーの強度に対して Fig.1-1 のように物理過程を分類できる点<sup>1)</sup>があげられる。物理過程の分類にはレーザーと電子の相互作用を用いる。一般に一つ目の過程の壁は  $10^{18}\text{W/cm}^2$  の強度を持つレーザーと電子の相互作用で、電子は加速された結果として光の速度に近づく。それゆえ相対論の利用が必須となるので、このあたりの強度を持つレーザーを相対論的レーザーなどと呼ぶ。近年、超高強度レーザー・電子相互作用の分野で過熱しているのが、そこから6~7桁ほど強度を上げた  $10^{24-25}\text{W/cm}^2$  の領域である。このあたりの領域では相対論的な運動をする電子が稀にたいへん高いエネルギーをもつ光子を吐き出すことがある。QED(量子電磁力学、Quantum ElectroDynamics)によると、光子は電子・陽電子という物質に転化する<sup>2)</sup>とされている。レーザーによっても量子場の基礎領域に到達できるとして、大阪大学レーザーエネルギー学研究中心(ILE)の激光エクサ計画<sup>3)</sup>やヨーロッパの Extreme Light Infrastructure (ELI)計画<sup>4)</sup>で活発に研究が進められている。本論文で述べられる話題はこの2つのレーザー領域のちょうど中間にあたる  $10^{22}\text{W/cm}^2$  以上のレーザーと電子の相互作用<sup>5)</sup>についてである。この領域において高エネルギーの電子とレーザーがカウンター入射された場合、電子から強い制動放射が発生する。電磁波はエネルギーと運動量を持っているため、制動放射の発生は電子のエネルギー・運動量の変化に対応するであろう。のちに述べる計算結果によると、1GeVのエネルギーをもつ電子は制

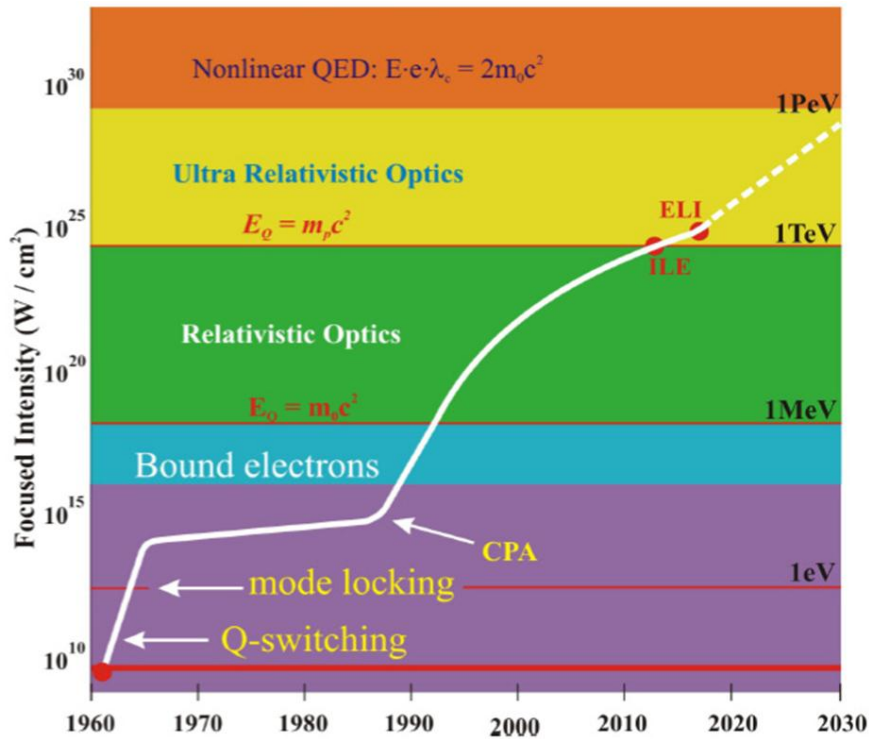


Fig.1-1 レーザー技術の発達と物理過程<sup>[1]</sup>

動放射により 9 割のエネルギーをレーザー周期の 10 倍程度の時間で失ってしまう<sup>[2]</sup>。このときの制動放射による、電子運動の反動効果が“放射の反作用”と呼ばれるものである (Fig.1-2)。このようなレーザーは  $\gamma^{-1} \ll 1$  という状態を作るので、本論文では超相対論レーザーというように呼称することにする。9 割ものエネルギーを失う過程であるので、このレーザー強度以上の領域で放射の反作用を軽視することはできない。また、 $10^{24\sim 25} \text{W/cm}^2$  以上の QED 領域であったとしても、強力な制動放射を電子・陽電子の対生成の種に利用する方法がとられる<sup>[3]</sup>ので、そのような意味でも大変重要な話題と言える。

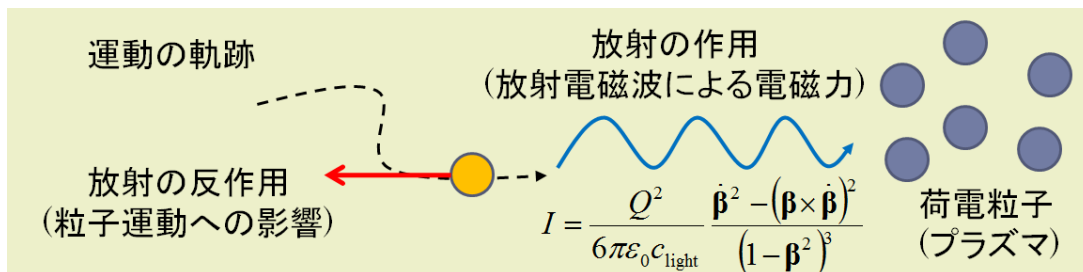


Fig.1-2 荷電粒子からの放射と電子運動へのフィードバックとしての反作用

## 1.2 理論物理の中の放射の反作用

1.1 節ではレーザープラズマに特化した放射の反作用の話題を展開したが、この理論のオリジナルは Lorentz の電子模型で、特に有名なものは Lorentz 自身が 1906 年に書いた“電子理論<sup>[6]</sup>”という教科書である。ここで、彼は電子を量子論的なものではなく、球表面にのみ電荷量が分布している球殻の電子模型を提案した。分布電荷は各要素が Coulomb 場を一般化した Liénard-Wiechert 場と呼ばれる電磁場で結合されており、運動によって電磁場プロファイルが変化することで、電子内部で電磁場の均衡が破れ、それが外部で新たな力として観測できるというような主張をした。理論計算の結果として、これが先に述べた放射の反作用と一致する。後に 1938 年に Dirac によって相対論化される運びとなる<sup>[7]</sup>が、Dirac の思惑はレーザープラズマに身を置く我々とは違っていた。この論文が発表された当時は、Dirac が発表した電子の量子論的な方程式である Dirac 方程式と Maxwell 方程式をもう一段階量子化した QED の理論構成が盛んであったが、どうしても計算がうまくいかない物理過程がいくつか存在した。それは現在では自己相互作用<sup>[8]</sup>として知られ、朝永たちによる“繰りこみ理論”で解決されることになる<sup>[9]</sup>がこの話がまだ明るみには出てない時代であり、Dirac 自身は基礎方程式に欠陥があると考えていた。そこで、Dirac は古典論に立ち返って、そこで電子と光の相互作用をすべて含んだような理論を用意しようと考えた。問題となっている自己相互作用を古典論で述べたものこそ 1906 年に Lorentz が描いた電子論の電子模型そのものである。QED で一般的に述べるためには相対論を経由する必要があった。そうして導かれたのが今日 Lorentz-Abraham-Dirac (LAD) 方程式<sup>[7]</sup>と呼ばれる電子の運動方程式である。

$$m_0 \frac{dw^\mu}{d\tau} = -eF_{\text{ex}}^{\mu\nu} w_\nu + \left( m_0 \tau_0 \frac{d^2 w^\mu}{d\tau^2} + \frac{m_0 \tau_0}{c^2} \frac{dw^\nu}{d\tau} \frac{dw_\nu}{d\tau} w^\mu \right) \quad (1.2.1)$$

$F_{\text{ex}}^{\mu\nu}$  は外部から印加された電磁場であり、 $-eF_{\text{ex}}^{\mu\nu} w_\nu$  で電子に働く Lorentz 力を意味する。右辺の括弧で囲まれた式が“放射の反作用力”と呼ばれる、放射の反作用を外力に書き換えた項である。しかし、この方程式も QED と同様の欠陥をもっているということが分かっていた。それは run-away と呼ばれる解の暴走発散現象である。

そういう意味では Dirac は繰りこみ理論を超える自己相互作用の無限大回避の理論構築に失敗したわけであるが、放射の反作用領域以上のレーザー強度に興味を持っている者たちは、この LAD 方程式を理論の基礎としている。解けない方程式であるのに切り捨てない理由は、①制動放射のエネルギーロスを外力に書き換え、②そこに相対論補正を加えることで(1.2.1)式が手に入ることに由来している。しかしながら理論はともかく、もの見積も

りを出すうえで計算ができないというのは由々しき問題であり、Dirac が QED の問題解決を見出そうとしたように、この方程式も今現在さまざまな計算方法が提案されている。もっとも有名な回避方法の一つが Landau-Lifshitz の有名な教科書にも収録されている Landau-Lifshitz 方程式<sup>[9]</sup>とよばれるものである。LAD 方程式がうまく解けないのは右辺の反作用力に速度の 2 階微分を含んでいるため、反作用力に含まれる加速度はすべてレーザーによる Lorentz 力のみにしてはどうだろうかという近似式である。ここでは外部電磁場を  $F_{\text{ex}}^{\mu\nu}$  で書くことにする。Lorentz 不変性を押し出すには(1.2.1)式を

$$m_0 \frac{dw^\mu}{d\tau} = -eF_{\text{ex}}^{\mu\nu} w_\nu + \frac{m_0 \tau_0}{c^2} \left( \frac{d^2 w^\mu}{d\tau^2} w^\nu - \frac{d^2 w^\nu}{d\tau^2} w^\mu \right) w_\nu \quad (1.2.2)$$

としてから置き換えるとよい。結果として

$$m_0 \frac{dw^\mu}{d\tau} = -eF_{\text{ex}}^{\mu\nu} w_\nu + \frac{m_0 \tau_0}{c^2} \left( \begin{array}{l} -\frac{e}{m_0} w^\lambda w_\nu \partial_\lambda F_{\text{ex}}^{\mu\nu} \\ +\frac{e^2}{m_0^2} F_{\text{ex}}^{\mu\nu} F_{\text{ex}\nu\lambda} w^\lambda \\ +\frac{e^2}{m_0^2 c_{\text{light}}^2} F_{\text{ex}}^{\mu\nu} F_{\text{ex}\mu\lambda} w_\nu w^\lambda w^\mu \end{array} \right) \quad (1.2.3)$$

というような、より一層複雑に見える方程式を得るが、外場さえ知っていれば計算ができる方程式となった。数値計算を行う場合はこの Landau-Lifshitz の方法が利用される。

一方で、近似を嫌うものも少なからず存在する。Landau-Lifshitz の方法は確かに計算ができるが、加速度を外力のみで置き換えることに妥当性がなく、ゆえに摂動計算の域を出れない。そこで、近似法と同じようにさまざまなモデリング方法が登場した。有名なのは Rorlich<sup>[10]</sup>、Caldirola<sup>[11]</sup>や Sokolov<sup>[12]</sup>による理論であるが、一長一短があり少しずつ差が存在する。結局のところ、どの理論が正当であるかは自然に聞くという意味で実験で暴き出すほか無いが、実験設備が追い付いていない現状であるので思いっただけ理論を並べておく方法が取られている。

本論文では run-away を導く 2 階微分(これを Schott 項と呼ぶ)のエネルギー成分が存在してはならないという過程を立てて計算可能な方程式を導く。同じ過程を置いたものとして Hammond の理論<sup>[13]</sup>があるが、彼は解析的に導けない部分をシミュレーションで回避しているのに対し、本論文で提案する方法はそのようなことは必要ない<sup>[5,14]</sup>。

## 相対論性理論を利用する際の書式の注意

相対性理論は、たとえば教科書や論文を読むときにその著者が書くパラメータをどのように定義しているかに十分に注意する必要がある。これは単位系の問題ではなく、著者たちの経験によるところが大きい。本論に入る前に特に著者によって定義が変わるであろうパラメータをピックアップしてここに本論文での定義を列挙する。

1. Lorentz 計量は  $(+, -, -, -)$  の west coast metric を採用している。すなわち、Lorentz 計量  $g: \mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}$  の成分を以下のように定める。

$$g^{\mu\nu} = g_{\mu\nu} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Lorentz 計量のシグネチャー  $(+, -, -, -)$  に合わせて、第 0 成分を時間成分、第 1~3 成分を空間成分と呼ぶこともある。

2. 電磁気学関連のパラメータもあまり統一されていない。ここでは 4 次元電流を

$$j^\mu = (c\rho, \mathbf{j})$$

と定義する。 $\rho, \mathbf{j}$  は電荷密度と電流密度で、Maxwell 方程式を

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = \mu_0 j^\nu$$

の形にするために、電磁場をテンソルとして

$$F^{\mu\nu} = \begin{bmatrix} 0 & -E_x/c & -E_y/c & -E_z/c \\ E_x/c & 0 & -B_z & B_y \\ E_y/c & B_z & 0 & -B_x \\ E_z/c & -B_y & B_x & 0 \end{bmatrix}$$

と表現することにする。電磁場は電磁場のポテンシャル

$$A^\mu = \left( \frac{\phi}{c}, \mathbf{A} \right)$$

と強く結び付いており、

$$F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu$$

で定義したテンソルを再現する。

(特殊)相対性理論の基礎については、附録 A2 章として概略を記したので必要があれば、そちらを参照していただきたい。

本論文で使用する記号

$m_0$	電子の静止質量
$c$	光の速さ
$-e$	電子の電荷量
$c\tau_0$	電子の古典半径
	$\tau_0 = e^2 / 6\pi\epsilon_0 m_0 c^3$
$\delta^\mu_\nu$	Kronecker の $\delta$
ボールド文字	線形実空間上のベクトル $\mathbb{R}^3$ (非相対論記述のベクトル)
$\mathbf{v}$	$\mathbb{R}^3$ 上での電子の速度
$\boldsymbol{\beta}$	光の速さで規格化された電子の速度 $= \mathbf{v}/c$
$\dot{f}$	$f$ を時間 $t$ で微分 $= df/dt$
$dW/dt$	単位時間に電子が放射で失う エネルギー(正の値で定義)
$\gamma$	相対論因子 $= 1/\sqrt{1-\boldsymbol{\beta}^2}$
$x^\mu$	相対論における 4 次元 Minkowski 時空 の座標 $(ct, \mathbf{x})$
$w^\mu$	4 次元速度 $= dx^\mu/d\tau = (\gamma c, \gamma \mathbf{v})$
$A_\mu = g_{\mu\nu} A^\nu$	添え字の下付き変換計算 $= (A^0, -A^1, -A^2, -A^3)$
$A^\mu = g^{\mu\nu} A_\nu$	添え字の上付き変換計算 $= (A_0, -A_1, -A_2, -A_3)$



$$a^\mu b_\mu$$

縮約計算(計量を使った和の省略記号)

$$= a^0 b^0 - a^1 b^1 - a^2 b^2 - a^3 b^3$$

$$\tau$$

電子の固有時間

$$\partial_\mu$$

4次元の勾配

$$= \partial / \partial x^\mu = (\partial_{ct}, \nabla)$$

$$F_{ex}^\mu$$

4次元の外力

$$= (\gamma \mathbf{F}_{ex} \cdot \boldsymbol{\beta}, \gamma \mathbf{F}_{ex})$$

$$F_{Laser}^{\mu\nu}$$

レーザーの電磁場テンソル

reaction の添え字

放射の反作用に関わる物理量

## 参考文献

- [1] G.A.Mourou, C.P.J.Barry and M.D.Perry, *Phys. Today* **51**,22 (1998)
- [2] 西島和彦、紀伊国屋数学叢書 27 場の理論(紀伊国屋書店、2008年オンデマンド版)
- [3] 大阪大学レーザーエネルギー学研究センター、「大型レーザーを用いた新しい科学研究」に関する意見交換会実施報告書、第1~3分冊
- [4] Extreme Light Infrastructure, Report on the ELI - Grand Challenges Meeting, 27-28 April 2009, Paris
- [5] K. SETO, H. NAGATOMO and K. MIMA, *Plasma Fusion Res.* **6**, 2404099 (2011)
- [6] H. A. Lorentz, *The Theory of Electrons and Its Applications to the Phenomena of Light and Radiant Heat, A Course of Lectures Deliverd in Columbia Univ., New York, in March and April 1906*, 2nd edition (Leipzig, New York, 1916).
- [7] P. A. M. Dirac, *Proc. Roy Soc. A* **167**, 148 (1938).
- [8] S. Tomonaga, *Proc. Theo. Phys.* **1**, 27 (1946)
- [9] L. D. Landau and E. M. Lifshitz, *The Classical theory of fields* (Pergamon, New York, 1994).
- [10] F. Rohrlich, *Am. J. Phys.* **65** (11), (1997).
- [11] P. Caldirola, *Nuovo Cimento* **3**, Suppl. 2, 297-343 (1956).
- [12] I. V. Sokolov, *J. Exp. Theo. Phys.* **109**, No.2 (2009).
- [13] R. T. Hammond, *Phys. Rev. A* **81**, 062104 (2010).
- [14] K. SETO, H. NAGATOMO, J. KOGA and K. MIMA, *Phys. Plasmas* **18**, 123101 (2011).

## 第 2 章 放射の反作用の新方程式

本章ではまず LAD(Lorentz-Abraham-Dirac)方程式<sup>[1]</sup>を簡単に紹介する。この方程式は放射の反作用を組み込んだ相対論的運動方程式である。しかしながら LAD 方程式は run-away と呼ばれる数学的困難が含まれており、実際の物理問題にこの方程式を適応することができない。このことを実際に理論解析で示す。放射の反作用を計算できないままでは困るので差し迫っての数値を得る方法がいくつか提案されており、代表的なテクニックとして Landau-Lifshitz の手法を示す。次いで本論文の主張として、著者の提案する新運動方程式を紹介し、この方程式が run-away を完全に回避することを理論的に証明する。

### 2.1 LAD 方程式の導出

電子が光を放つとき、それはフォトン集団のエネルギーと運動量を電子外部に放出することになるので、それらの損失となる。Coulomb 場も電磁場であり光と同等であるが、これは電磁質量として、電子が電子たるために必要なエネルギー・運動量を供給するものと考えられる。ゆえに、ここで注目されるのは制動放射としての電磁場である。制動放射によるエネルギー損失<sup>[2,3,4]</sup>は以下の式でよく知られている。

$$\frac{dW}{dt} = m_0 c^2 \tau_0 \frac{\dot{\boldsymbol{\beta}}^2 - (\boldsymbol{\beta} \times \dot{\boldsymbol{\beta}})^2}{(1 - \boldsymbol{\beta}^2)^3} \quad (\geq 0) \quad (2.1.1)$$

このエネルギー損失を電子の運動方程式に取り込むことが本小節の目標である。ここで、 $m_0$  は電子の静止質量、 $c$  は光の速さで  $\boldsymbol{\beta} = \mathbf{v}/c$  としており、 $\tau_0$  は電子の電荷量を  $-e$  としたときに  $e^2/6\pi\epsilon_0 m_0 c^3$  で定義された時間の次元を持つ定数である。物理法則はすべからく相対論的共変性(Lorentz invariant ともいう)を持つというのが現代物理学の基本的な解釈である。これは、同じ現象であれば座標変換に対して法則と呼ばれる方程式の形が変わらないという要件で、(2.1.1)式をこの流儀に押し込めるならば

$$\frac{dW}{dt} = -m_0 \tau_0 g_{\rho\sigma} \frac{dw^\rho}{d\tau} \frac{dw^\sigma}{d\tau} \quad (2.1.2)$$

である。相対論的因子  $\gamma = 1/\sqrt{1 - \boldsymbol{\beta}^2}$  を用いて 4 次元の速度は  $w^\mu = \gamma(c, \mathbf{v})$  であり、 $\tau$  というのは電子の固有時間で  $d\tau = \gamma^{-1} dt$  という関係がある。これらを利用すれば固有時間で 4

次元速度を微分した 4 次元加速度は

$$\begin{aligned}\frac{dw^{\mu=1,2,3}}{d\tau} &= \frac{d}{d\tau} \frac{\mathbf{v}}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{dt}{d\tau} \frac{d}{dt} \frac{\mathbf{v}}{\sqrt{1-\beta^2}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \left[ \frac{\boldsymbol{\beta} \cdot \dot{\boldsymbol{\beta}}}{(1-\beta^2)^{\frac{3}{2}}} \mathbf{v} + \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \dot{\mathbf{v}} \right] \\ &= \frac{\mathbf{v} \cdot \dot{\mathbf{v}}}{c^2(1-\beta^2)^2} \mathbf{v} + \frac{1}{1-\beta^2} \dot{\mathbf{v}}\end{aligned}$$

かつ

$$\begin{aligned}\frac{dw^0}{d\tau} &= \frac{d}{d\tau} \frac{c}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{dt}{d\tau} \frac{d}{dt} \frac{c}{\sqrt{1-\beta^2}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \frac{\boldsymbol{\beta} \cdot \dot{\boldsymbol{\beta}}}{(1-\beta^2)^{\frac{3}{2}}} c \\ &= \frac{\mathbf{v} \cdot \dot{\mathbf{v}}}{c^2(1-\beta^2)^2} c\end{aligned}$$

であるので、まとめて書くと

$$\frac{dw^\mu}{d\tau} = \left( \frac{\mathbf{v} \cdot \dot{\mathbf{v}}}{c^2(1-\beta^2)^2} c, \frac{\mathbf{v} \cdot \dot{\mathbf{v}}}{c^2(1-\beta^2)^2} \mathbf{v} + \frac{1}{1-\beta^2} \dot{\mathbf{v}} \right)$$

である。この Lorentz 内積による自乗を計算することで

$$\begin{aligned}\frac{dw^\mu}{d\tau} \frac{dw_\mu}{d\tau} &= g_{\mu\nu} \frac{dw^\mu}{d\tau} \frac{dw^\nu}{d\tau} \\ &= -\frac{(\mathbf{v} \cdot \dot{\mathbf{v}})^2}{c^2(1-\beta^2)^3} - \frac{1}{(1-\beta^2)^2} \dot{\mathbf{v}}^2 \\ &= c^2 \frac{\dot{\boldsymbol{\beta}}^2 - (\boldsymbol{\beta} \times \dot{\boldsymbol{\beta}})^2}{(1-\beta^2)^3}\end{aligned}$$

という公式を得ることから(2.1.2)式と(2.1.3)式が等価であることが理解できる。共変的な記述をしたいときは時間微分は固有時間で書かれたほうが法則が美しくなる。このため、

$$\frac{1}{c} \frac{dW}{d\tau} = -\frac{m_0 \tau_0}{c^2} g_{\rho\sigma} \frac{dw^\rho}{d\tau} \frac{dw^\sigma}{d\tau} w^0 \quad (2.1.3)$$

が、電子から奪われるエネルギーと見立てられ、ゆえに運動方程式は

$$m_0 \frac{d}{d\tau} w^\mu = -e F_{\text{ex}}^{\mu\nu} w_\nu + \frac{m_0 \tau_0}{c^2} g_{\rho\sigma} \frac{dw^\rho}{d\tau} \frac{dw^\sigma}{d\tau} w^\mu + C^\mu \quad (2.1.4)$$

$F_{\text{ex}}^{\mu\nu}$  は外部から印加された電磁場である。最後に  $w_\mu dw^\mu / d\tau = 0$  を使い、 $C^\mu$  を定めることで LAD 方程式

$$m_0 \frac{d}{d\tau} w^\mu = -e F_{\text{ex}}^{\mu\nu} w_\nu + m_0 \tau_0 \frac{d^2 w^\mu}{d\tau^2} + \frac{m_0 \tau_0}{c^2} g_{\rho\sigma} \frac{dw^\rho}{d\tau} \frac{dw^\sigma}{d\tau} w^\mu \quad (2.1.5)$$

を得る。右辺の第 2 項、第 3 項を合わせたものを放射の反作用力(radiation reaction force)と呼ぶ。導出から理解できるように、制動放射から直接、光の放出機構を含んだ運動方程式を導くことができた<sup>[1~4]</sup>。このために超高強度レーザー・電子相互作用のフィールドではこの方程式を基礎としている。一方で、この方程式が解けないことも序論で述べた。次にこれについての考察を行う。

## 2.2 run-away 解

LAD 方程式をわかりやすい形で見立てるためにまず次のように書きかえる。

$$\frac{d}{d\tau} w^\mu - \tau_0 \frac{d^2 w^\mu}{d\tau^2} = -\frac{e}{m_0} F_{\text{ex}}^{\mu\nu} w_\nu + \frac{\tau_0}{c^2} g_{\rho\sigma} \frac{dw^\rho}{d\tau} \frac{dw^\sigma}{d\tau} w^\mu \quad (2.2.1)$$

このように書き換えれば左辺は、加速度  $dw^\mu / d\tau$  についての 1 階の線形微分方程式である。右辺に加速度の非線形項を含んでいるが、右辺全体で一固まりの関数であると思うことにする。すると、解は以下のように書けるだろう。

$$\frac{d}{d\tau} w^\mu(\tau) = \frac{d}{d\tau} w^\mu(0) \times e^{\frac{\tau}{\tau_0}} - \int_0^\tau d\tau' \left( \frac{Q}{m_0 \tau_0} F_{\text{ex}}^{\mu\nu} w_\nu + \frac{1}{c^2} g_{\rho\sigma} \frac{dw^\rho}{d\tau} \frac{dw^\sigma}{d\tau} w^\mu \right) e^{\frac{\tau-\tau'}{\tau_0}} \quad (2.2.2)$$

ここで、 $\tau_0 = O(10^{-24})$  という大変小さな値である。そうすると右辺第 1 項が瞬時に指数によって発散してしまうことが分かる。この発散現象が run-away であり、理論物理的な解釈を与えるなら自己相互作用ダイアグラムの発散の問題に対応するとされている。QED では電子のダイナミクスを逐一追うことはないので、自己相互作用ダイアグラムをカットオフパラメータとして調整することが可能である<sup>[2]</sup>が、古典論のように電子の軌道を追いかける場合にそのような乱暴な方法はとれない。そのため特殊な解法、またはある程度妥当性のある運動方程式を手に入れねばならないという要求が生まれる。一つの回避法として Landau-Lifshitz により提案された近似方法を次に解説する。

### 2.3 Landau-Lifshitz 方程式

LAD 方程式はオリジナルのままでは計算できないことを直前に解説した。とくに問題になるのは(2.1.5)式の右辺第 2 項の 2 階微分、これを Schott 項と呼ぶが、この項の存在が指数解を生む。ここで考えだされたのが  $\tau_0$  を展開係数として摂動を取る方法である。すなわち放射の反作用力は式の上では  $\tau_0$  の 1 次式である。放射の反作用力の加速度の部分に繰り返し LAD 方程式自身の代入し  $\tau_0$  の摂動式を用意するわけである。このうち有効となるのは  $\tau_0$  は大変小さな値なので、最低の次数を持つ項であろう。そのように  $\tau_0$  の 1 次の項だけを採用した結果が Landau-Lifshitz 方程式<sup>[4]</sup>である。

$$m_0 \frac{dw^\mu}{d\tau} = -eF_{\text{ex}}^{\mu\nu} w_\nu + \frac{m_0 \tau_0}{c^2} \left( \begin{array}{l} -\frac{e}{m_0} w^\lambda w_\nu \partial_\lambda F_{\text{ex}}^{\mu\nu} \\ + \frac{e^2}{m_0^2} F_{\text{ex}}^{\mu\nu} F_{\text{ex}\ \nu\lambda} w^\lambda \\ + \frac{e^2}{m_0^2 c_{\text{light}}^2} F_{\text{ex}}^{\mu\nu} F_{\text{ex}\ \mu\lambda} w_\nu w^\lambda w^\mu \end{array} \right) \quad (2.3.1)$$

この式は、一見 LAD 方程式をさらに複雑にしたかに見える方程式ではあるが、Schott 項を消すように仕向けたため、解の安定さは格段に増している。そのため、差し迫って放射の反作用を見積もる必要がある場合、電子軌道を追跡するのによく利用される方程式である。本論文においても従来の理論としてのリファレンスとしてこの方程式を利用することにす。ただし、数値計算のしやすさのため、この方程式を導くひとつ前の段階の

$$m_0 \frac{d}{d\tau} w^\mu = F_{\text{ex}}^\mu + \tau_0 \frac{dF_{\text{ex}}^\mu}{d\tau} + \frac{\tau_0}{m_0 c^2} g_{\rho\sigma} F_{\text{ex}}^\rho F_{\text{ex}}^\sigma w^\mu \quad (2.3.2-1)$$

$$F_{\text{ex}}^\mu = -eF_{\text{laser}}^{\mu\nu} w_\nu \quad (2.3.2-2)$$

を採用した。しかしながらこの近似は加速度を外力で書き換えたにすぎず切り捨てた効果が含まれている可能性がある。そこで、続く小節でエネルギーバランスを考え直し新たな運動方程式を導く。

## 2.4 新たな仮定としてのエネルギーバランス式

LAD 方程式で問題を起こす項は Schott 項である。LAD 方程式の時間成分はエネルギーバランス式を意味する。具体的に書き下す。

$$\frac{dE}{dt} = -e\mathbf{E}_{\text{ex}} \cdot \mathbf{v} - \frac{dW}{dt} + \frac{m_0\tau_0}{\gamma} \frac{d^2}{d\tau^2} E \quad (2.4.1)$$

この式は次のように解釈されねばならない。電子の運動エネルギー変化  $dE/dt$  は、レーザーによって注入される仕事率から制動放射によるエネルギーロス  $-dW/dt$  を勘定に入れ、最後に謎のエネルギーとして Schott 項  $(m_0\tau_0/\gamma)d^2E/d\tau^2$  が付与される。Schott 項がないと計測が合わないという報告はいまだ聞いたことがないので、恐らくこの項は電子内部の“何か”外部での観測にかからない情報を秘めていると考えるのがよい。そこで次の仮定を置く [6,7]。

### 【仮定】

制動放射を伴う電子の運動は、

$$\frac{dE}{dt} = -e\mathbf{E}_{\text{ex}} \cdot \mathbf{v} - \frac{dW}{dt} \quad (2.4.2)$$

あるいは相対論的な表記で

$$m_0 \frac{dw^0}{d\tau} = -eF_{\text{ex}}{}^{0\nu} w_\nu + m_0\tau_0 g_{\rho\sigma} \frac{dw^\rho}{d\tau} \frac{dw^\sigma}{d\tau} w^0 \quad (2.4.3)$$

を満たすべきである。

Schott 項を抜き去れば電子のエネルギー変化はレーザーによる仕事率と制動放射のエネルギー損失の重ね合わせという大変理解しやすいもので書ける。以後の理論はこれを主導原理とする。

## 2.5 運動方程式

(2.4.2)式、あるいは(2.4.3)式から運動方程式を導く。(2.4.3)式より、放射の反作用力の時間成分は

$$f_{\text{reaction}}{}^0 = -\frac{\gamma}{c} \frac{dW}{dt} = \frac{m_0\tau_0}{c^2} g_{\rho\sigma} \frac{dw^\rho}{d\tau} \frac{dw^\sigma}{d\tau} w^0 \quad (2.5.1)$$

と置いたことになる。これを保持しつつ、

$$w_\mu f_{\text{reaction}}^\mu = 0 \quad (2.5.2)$$

を満たすような空間成分を導く。相対論的な記述を行う前に非相対論的な運動方程式 ( $|\boldsymbol{\beta}| \ll 1$ ) で同等の問題を取り扱うことにする。

### 2.5-1 非相対論的運動方程式

満たすべき関係は今の場合(2.4.2)式で、ありエネルギーは  $E = m\mathbf{v}^2/2$  であることに注意することで、

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} m\mathbf{v}^2 \right) = -e\mathbf{E}_{\text{ex}} \cdot \mathbf{v} - m_0\tau_0 \dot{\mathbf{v}}^2 \quad (2.5-1.1)$$

であり、以下のように変形する。放射の項を

$$m_0\tau_0 \dot{\mathbf{v}}^2 = m_0\tau_0 \frac{d^2}{dt^2} \left( \frac{1}{2} \mathbf{v}^2 \right) - m_0\tau_0 \ddot{\mathbf{v}} \cdot \mathbf{v} = \left[ \frac{m_0\tau_0}{\mathbf{v}^2} \frac{d^2}{dt^2} \left( \frac{1}{2} \mathbf{v}^2 \right) \mathbf{v} - m_0\tau_0 \ddot{\mathbf{v}} \right] \cdot \mathbf{v} \quad (2.5-1.2)$$

と変形することにする。ここでは簡単のため  $\mathbf{v}^2 \neq 0$  の場合を考えているとする。(2.5-1.1)式は

$$\mathbf{v} \cdot \left[ m \frac{d\mathbf{v}}{dt} + e\mathbf{E}_{\text{ex}} + \frac{m_0\tau_0}{\mathbf{v}^2} \frac{d^2}{dt^2} \left( \frac{1}{2} \mathbf{v}^2 \right) \mathbf{v} - m_0\tau_0 \ddot{\mathbf{v}} \right] = 0 \quad (2.5-1.3)$$

と、速度との内積の形で書き下される。速度を任意の関数だと思えば以下の方程式が常に満たされねばならない。

$$m_0 \frac{d\mathbf{v}}{dt} = -e\mathbf{E}_{\text{ex}} + m_0\tau_0 \ddot{\mathbf{v}} - \frac{m_0\tau_0}{\mathbf{v}^2} \frac{d^2}{dt^2} \left( \frac{1}{2} \mathbf{v}^2 \right) \mathbf{v} \quad (2.5-1.4)$$

LAD 方程式を非相対論極限を取った方程式(Lorentz-Abraham 方程式)

$$m_0 \frac{d\mathbf{v}}{dt} = -e\mathbf{E}_{\text{ex}} + m_0\tau_0 \ddot{\mathbf{v}} \quad (2.5-1.5)$$

とは、右辺最後の項の有無の差があることが分かるが、運動エネルギーの増加を抑える効果を担っており、のちに示すように run-away の問題を攻略することができる。 $\mathbf{v}^2 = 0$  の場合は方程式に特異点が発生してしまうので、

$$m_0 \frac{d\mathbf{v}}{dt} = -e\mathbf{E}_{\text{ex}} + m_0\tau_0 \ddot{\mathbf{v}} - \frac{m_0\tau_0}{\mathbf{v}^2 + |\varepsilon_{\rightarrow 0}|} \frac{d^2}{dt^2} \left( \frac{1}{2} \mathbf{v}^2 \right) \mathbf{v} \quad (2.5-1.6)$$

なるパラメータ  $|\varepsilon_{\rightarrow 0}|$  を埋め込む。これは正の微小な値を持ち、あらゆる計算ののちに 0 に極限を取ることによって解とするようなものである。 $|\boldsymbol{\beta}| \ll 1$  で、この方程式に収束できるような



相対論表記を続く小節で導く。

## 2.5-2 相対論的運動方程式

相対論的に扱う場合は、相対論的な書式から展開するほうが分かりやすい。そのような理由から(2.5.1)式から出発する。ところで、4次元の力というものは

$$F^\mu = (\gamma \mathbf{F} \cdot \boldsymbol{\beta}, \gamma \mathbf{F}) \quad (2.5-2.1)$$

で定義される。この書き方を考慮して(2.5.1)式を書き換えると

$$\begin{aligned} \gamma \mathbf{f}_{\text{reaction}} \cdot \boldsymbol{\beta} &= \frac{m_0 \tau_0}{c^2} g_{\rho\sigma} \frac{dw^\rho}{d\tau} \frac{dw^\sigma}{d\tau} w^0 \\ \Leftrightarrow \sum_{j=1,2,3} f_{\text{reaction}}^j \cdot w^j &= \frac{m_0 \tau_0}{c^2} g_{\rho\sigma} \frac{dw^\rho}{d\tau} \frac{dw^\sigma}{d\tau} (w^0)^2 \end{aligned} \quad (2.5-2.2)$$

とできる。右辺を  $w^j$  で括ることができれば反作用力の空間3成分を手に入れることができる。4次元の速度は

$$w^\mu = (\gamma c, \gamma \mathbf{v}) \quad (2.5-2.3)$$

と定義されており、計量の定義と合わせることで

$$w_\mu w^\mu = (w^0)^2 - \sum_{j=1,2,3} (w^j)^2 = c^2 \quad (2.5-2.4)$$

という重要なルールを得る。これを、(2.5-2.3)式に適応することで

$$\begin{aligned} \sum_{j=1,2,3} f_{\text{reaction}}^j \cdot w^j &= \frac{m_0 \tau_0}{c^2} g_{\rho\sigma} \frac{dw^\rho}{d\tau} \frac{dw^\sigma}{d\tau} \left[ \sum_{j=1,2,3} (w^j)^2 + c^2 \right] \\ \Leftrightarrow \sum_{j=1,2,3} \left( f_{\text{reaction}}^j - \frac{m_0 \tau_0}{c^2} \frac{dw^\rho}{d\tau} \frac{dw_\rho}{d\tau} w^j \right) \cdot w^j & \\ &= m_0 \tau_0 \frac{dw^\rho}{d\tau} \frac{dw_\rho}{d\tau} = -m_0 \tau_0 \frac{d^2 w^\rho}{d\tau^2} w_\rho \\ &= -m_0 \tau_0 \frac{d^2 w^0}{d\tau^2} w^0 + m_0 \tau_0 \sum_j \frac{d^2 w^j}{d\tau^2} w^j \\ &= -\frac{m_0 \tau_0}{\sum_j (w^j)^2} \frac{d^2 w^0}{d\tau^2} w^0 \sum_j (w^j)^2 + m_0 \tau_0 \sum_j \frac{d^2 w^j}{d\tau^2} w^j \\ &= \sum_j \left[ m_0 \tau_0 \frac{d^2 w^j}{d\tau^2} - \frac{m_0 \tau_0 w^0 w^j}{(w^0)^2 - c^2} \frac{d^2 w^0}{d\tau^2} \right] w^j \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \sum_{j=1,2,3} \left( f_{\text{reaction}}^j - m_0 \tau_0 \frac{d^2 w^j}{d\tau^2} - \frac{m_0 \tau_0}{c^2} \frac{dw^\rho}{d\tau} \frac{dw_\rho}{d\tau} w^j + \frac{m_0 \tau_0 w^0 w^j}{(w^0)^2 - c^2} \frac{d^2 w^0}{d\tau^2} \right) \cdot w^j = 0 \quad (2.5-2.5)$$

ゆえに速度がすべての成分で任意と思うとき、反作用力の空間成分が

$$f_{\text{reaction}}^j = m_0 \tau_0 \frac{d^2 w^j}{d\tau^2} + \frac{m_0 \tau_0}{c^2} \frac{dw^\rho}{d\tau} \frac{dw_\rho}{d\tau} w^j - \frac{m_0 \tau_0 w^0 w^j}{(w^0)^2 - c^2} \frac{d^2 w^0}{d\tau^2} \quad (2.5-2.6)$$

この反作用力は、 $|\boldsymbol{\beta}| \ll 1$ で確かに(2.5-1.4)式に収束する。反作用力が時間成分と3次元空間成分と出そろったので4次元の時空で一纏めに書くと、

$$f_{\text{reaction}}^\mu = m_0 \tau_0 \frac{d^2 w^\mu}{d\tau^2} + \frac{m_0 \tau_0}{c^2} g_{\rho\sigma} \frac{dw^\rho}{d\tau} \frac{dw^\sigma}{d\tau} w^\mu - m_0 \tau_0 \frac{w^0 w^\mu - c^2 \delta_0^\mu}{(w^0)^2 - c^2} \frac{d^2 w^0}{d\tau^2} \quad (2.5-2.7)$$

である。これを放射の反作用力として外力のように運動方程式に組み込めば我々の望む方程式

$$m_0 \frac{dw^\mu}{d\tau} = -e F_{\text{ex}}^{\mu\nu} w_\nu + m_0 \tau_0 \frac{d^2 w^\mu}{d\tau^2} + \frac{m_0 \tau_0}{c^2} g_{\rho\sigma} \frac{dw^\rho}{d\tau} \frac{dw^\sigma}{d\tau} w^\mu - m_0 \tau_0 \frac{w^0 w^\mu - c^2 \delta_0^\mu}{(w^0)^2 - c^2 + |\boldsymbol{\varepsilon}_{\rightarrow 0}|} \frac{d^2 w^0}{d\tau^2} \quad (2.5-2.8)$$

を得る。ここに $\delta_\nu^\mu$ は、Kroneckerの $\delta(\mu = \nu \Rightarrow \delta_\nu^\mu = 1, \mu \neq \nu \Rightarrow \delta_\nu^\mu = 0)$ である。 $|\boldsymbol{\varepsilon}_{\rightarrow 0}|$ は特異点を生まないようにするために組み込んだ正の値であり計算の最後に0に収束させるようにする。次いでこの方程式が安定であることを示す。

## 2.6 新方程式の安定性

運動方程式(2.5-2.8)式の時間成分に注目する。すると、微分方程式

$$\frac{dw^0}{d\tau} + \frac{1}{m_0 c^2} \frac{dW}{dt} w^0 = \frac{Q}{m_0} F_{\text{ex}}^{0\nu} w_\nu \quad (2.6.1)$$

が手に入る。この式は $w^0$ についての線形微分方程式であるので、解は

$$w^0(\tau) = w^0(0) \times \exp \left[ - \int_0^\tau d\tau' \frac{1}{m_0 c^2} \frac{dW}{dt}(\tau') \right] + \int_0^\tau d\tau' \frac{Q}{m_0} F_{\text{ex}}^{0\nu} w_\nu(\tau') \times \exp \left[ - \int_{\tau'}^\tau d\tau'' \frac{1}{m_0 c^2} \frac{dW}{dt}(\tau'') \right] \quad (2.6.2)$$

である。ここで、 $dW/dt \geq 0$ は(2.1.2)式で定義されたエネルギーロスであることを強調しておく。LAD 方程式と違うことは指数の肩が負の値で収束する傾向にあることである。つまり、時間成分は少なくとも run-away とならないことがこれより理解される。では空間成分はどうだろうか？たとえば空間成分の1つ  $w^1$  が無限の値を持ち、ほかの数値は有限な値をとり安定であるとしよう。すると、通常理論では  $g_{\mu\nu} w^\mu w^\nu = c^2$  であることに対して

$$\begin{aligned} g_{\mu\nu} w^\mu w^\nu &= (w^0)^2 - (w^1)^2 - (w^2)^2 - (w^3)^2 \\ &= (\text{finite}) - (\text{infinite}) - (\text{finite}) - (\text{finite}) \\ &= (\text{infinite}) \neq c^2 = (\text{finite}) \end{aligned} \quad (2.6.3)$$

と、満たすべき関係を満たせない。これはほかの空間成分が無限の値を持って同様である。ゆえに全成分が有限の値に納まらねばならない<sup>[7]</sup>。よって、全成分が run-away から解放されたことになる。この点が新方程式(2.5-2.8)式を利用した際の大きな強みである。

## 2.7 結論

LAD 方程式の run-away を克服した運動方程式(2.5-2.8)式が解析的に安定解を持つことを本章で確認した。この理論は(2.4.2)式、あるいは(2.4.3)式という受け入れやすい方程式を基礎として導かれた方程式であり、エネルギーバランス式が明瞭である点で Landau-Lifshitz による従来の回避方法より優れている。この方程式は3章で示すように超高強度レーザー・高エネルギー電子相互作用では Landau-Lifshitz 方程式の解とで一致する傾向を持ち、4章で示すように、4章で示す結果より電子の相対論因子  $\gamma > 10$  という領域では Landau-Lifshitz 方程式を内包できる。また非相対論的レーザー・電子相互作用の場合に LAD 方程式内の Schott 項に対応する項の有無で電子からの電磁放射とその反作用の位相がずれる結果を Landau-Lifshitz 方程式は予言するが、(2.5-2.8)式はそのような位相ずれは存在せず放射と同時に電子運動にフィードバックがかかり、保存則を崩さないという利点がみられる。

放射の反作用力が無視できないようなシチュエーションとして、超高強度レーザー・電子相互作用のテスト計算の結果を次章に示す。

## 参考文献

- [1] P. A. M. Dirac, Proc. Roy Soc. A **167**, 148 (1938).
- [2] W. K. H. Panofsky and M. Phillips, *Classical Electricity and Magnetism* (Addison-Wesley Publishing Co. Inc., London, 1962).
- [3] J. D. Jackson, *Classical Electrodynamics* (John Wiley & Sons Inc., New York, 1962).
- [4] L. D. Landau and E. M. Lifshitz, *The Classical theory of fields* (Pergamon, New York, 1994).
- [5] 西島和彦、紀伊国屋数学叢書 27 場の理論(紀伊国屋書店、2008年オンデマンド版).
- [6] K. SETO, H. NAGATOMO and K. MIMA, Plasma Fusion Res. **6**, 2404099 (2011).
- [7] K. SETO, H. NAGATOMO, J. KOGA and K. MIMA, Phys. Plasmas **18**, 123101 (2011).

### 第3章 超相対論的レーザー・高エネルギー電子相互作用

今後の超高強度レーザーのフィールドで放射の反作用が有効になるだろうという話を序論で述べた。10<sup>22</sup>W/cm<sup>2</sup>を超える超相対論的強度をレーザーがもち、かつ電子が高エネルギーである場合にカウンター照射配位をとることで、より制動放射が発生しやすく、放射の反作用の効果が得られることが期待される。このような物理過程では Schott 項の影響は他の項に比べて小さなオーダーとなるために現在提案されているあらゆる理論は一致傾向をもつ。2章で提案した新方程式を数値計算した結果と従来の方法との一致を示す<sup>[1]</sup>。

#### 3.1 カウンター配位の初期値

もつとも制動放射を放つシチュエーションは超高強度レーザーと高エネルギー電子を正面衝突させることである。レーザーの進行方向を  $x$  軸正方向に設定する。このレーザーは簡単のために平面波を仮定し、

$$\mathbf{E} = \hat{\mathbf{y}} E_0 \exp\left[-\frac{(\omega_{\text{laser}} t - k_{\text{laser}} x)^2}{(\omega_{\text{laser}} \Delta t)^2}\right] \times \sin(\omega_{\text{laser}} t - k_{\text{laser}} x) \quad (3.1.1)$$

と  $y$  軸方向に電場が立っているとする。ゆえに磁場は  $z$  軸方向の成分を持つ。ここで、レーザーの波長は1 $\mu\text{m}$  でパルス幅  $\Delta t$  をレーザー周期の7倍としている。また、レーザーのピーク強度を  $5 \times 10^{22} \text{ W/cm}^2$  としている。これに対して電子には1GeVのエネルギーをもって  $x$  負方向に向いて進んでいくものとしよう。以上を初期セットアップとして Fig.3-1 にまとめる。この初期値を(2.5-2.8)式の電子の運動方程式に適応したシミュレーションの結果を次の小節で示す。なお以降の計算結果は規格化されており、質量・速度・時間・電荷量はそれぞれ  $m_0, c, T_{\text{laser}}, e$  で無次元化されている。また計算は Leap frog 法<sup>[2]</sup>を利用している。

#### 3.2 カウンター配位のシミュレーション結果

ここでのシミュレーションの目的は放射の反作用がある場合とない場合でどれほどの差が生じるかの検討である。まずはエネルギーについて見るのがよい。電子の運動エネルギーは  $E = m_0 \gamma c^2$  である。1GeV というエネルギーがおおよそ  $\gamma = 2000$  に相当する。エネルギーの時間変化(Fig.3-2)を眺めると、放射の反作用を無効にした場合の計算(赤い線)はエネルギー

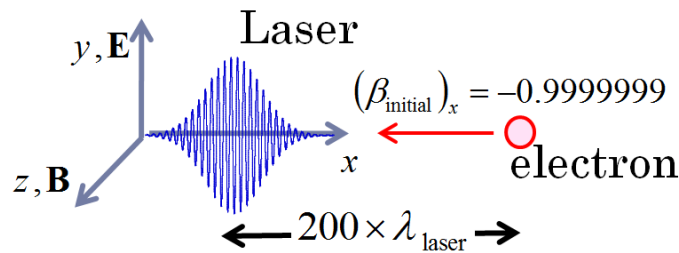


Fig.3-1 カウンター配位の初期セットアップ

ギーがほとんど変化していないように見える。1GeVの慣性を保持してレーザーの平面波をすり抜けるためである。一方で、制動放射を有効にした場合(青い線)は、およそ8レーザー周期程度の期間で急激なエネルギー減少効果を見せている。このエネルギー減少が制動放射のエネルギーロスの意味する。このエネルギーロスを制動放射の指向性と強度で示したものが放射の反作用力で、Fig.3-3に示す。ちょうどFig.3-2の制動放射に対応する部分で赤色の放射の反作用を意味する力が発生していることが読み取れる。特に注目すべきはこの力がレーザーによる電磁力( $-eF_{\text{laser}}^{\mu\nu}w_\nu$ )のピーク時の値を超える振幅を持ちえる点である。運動軌跡そのものにも決定的な差が生まれる。Fig.3-4において赤色の線が制動放射を無効にしたもので、青色が制動放射を有効にした計算結果である。放射を無効にした場合エネルギーがほぼ $\gamma = 2000$ を保ったままであるのはFig.3-3(a)を見れば理解できる。制動放射でエネルギーを失うことは、慣性を失うことと等価であり、レーザーで加速しやすくなることと等価である。青色の計算結果は、①制動放射によって慣性を失い、②レーザーによって8の字運動(Fig.3-4(b))を行った後に③レーザーを抜けるという過程を経たと解釈される。8の字運動はレーザーのパルス幅7周期に対応している。運動軌跡が8の字運動の前後で対称に見えるのは早い段階で制動放射で電子は9割のエネルギーを失ってしまったことに起因する。エネルギーを失い8の字運動に移行した際にも当然ながら制動放射は発生するが、レーザーによるLorentz力に比べると比較的小さく、運動軌跡を大きく変更させることができない。エネルギーを失った電子は、それ以降に放射の反作用の影響を表に出せなくなるとも言える。このためにFig.3-4のような対称な運動軌跡を描く。

以上を踏まえて、超相対論レーザーと高エネルギー電子の相互作用は明らかに放射の反作用の有無でそのダイナミクスを変えることが分かった。これらの成果はJ. Koga<sup>[3]</sup>の行ったLandau-Lifhitzs<sup>[4]</sup>の計算結果の傾向とよく一致する。この理由はSchott項がほかの項

に比べて無視することが可能な程度小さいことに由来し、高エネルギー電子の方程式は(2.5-2.8)式が

$$m_0 \frac{dw^\mu}{d\tau} = -eF_{\text{laser}}^{\mu\nu} w_\nu + \frac{m_0 \tau_0}{c^2} g_{\rho\sigma} \frac{dw^\rho}{d\tau} \frac{dw^\sigma}{d\tau} w^\mu \quad (3.2.1)$$

となり、Landau-Lifshitz 方程式は

$$m_0 \frac{d}{d\tau} w^\mu = F_{\text{ex}}^\mu + \frac{\tau_0}{m_0 c^2} g_{\rho\sigma} F_{\text{ex}}^\rho F_{\text{ex}}^\sigma w^\mu \quad (3.2.2)$$

に収束する。もちろん、 $F_{\text{ex}}^\mu = -eF_{\text{laser}}^{\mu\nu} w_\nu$  としている。これらの方程式は高エネルギー電子の場合の近似式といえる。(3.2.1)式の右辺に含まれる加速度を外力のみで近似した式とみなせるために2つの運動はほぼ一致した運動軌跡となる。

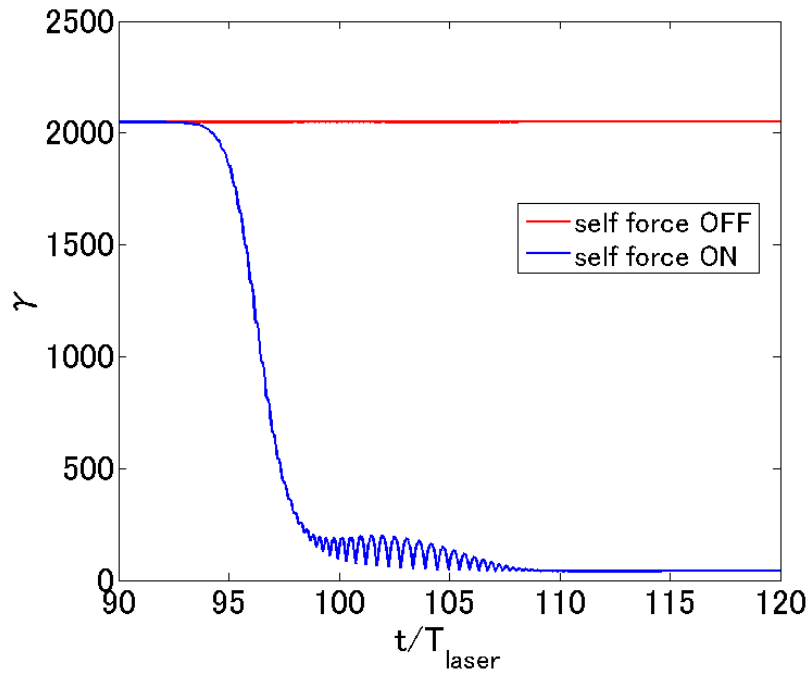


Fig.3-2 電子の運動エネルギー変化

赤色の線が放射の反作用を無効にした計算結果で青色が有効にした場合の計算結果。

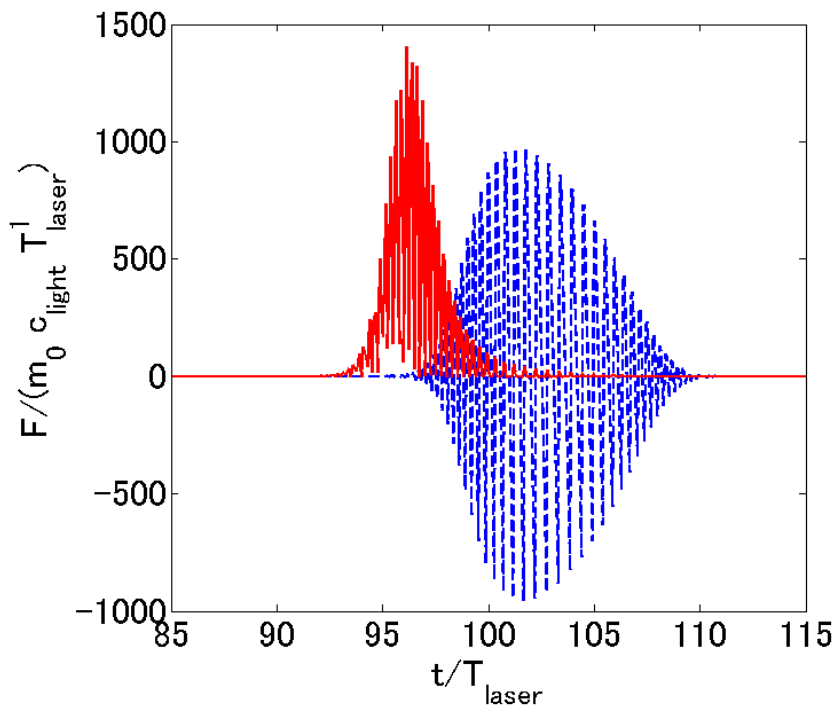
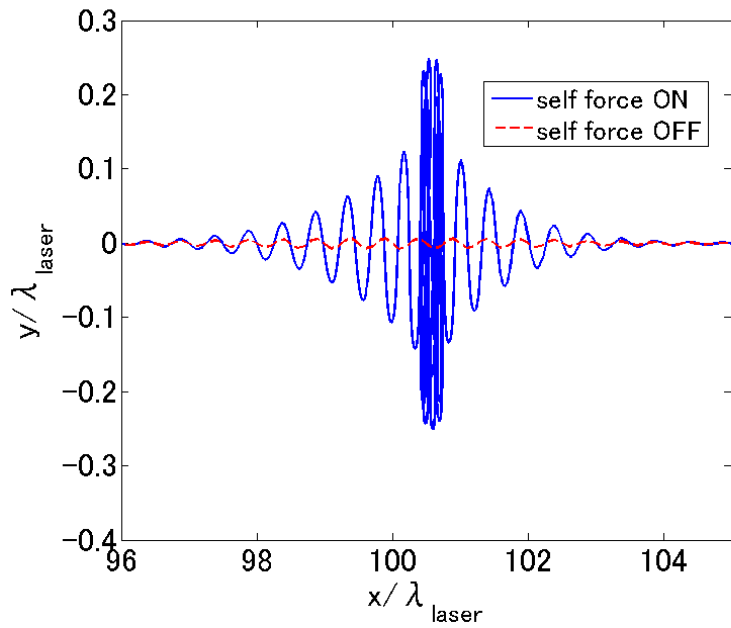


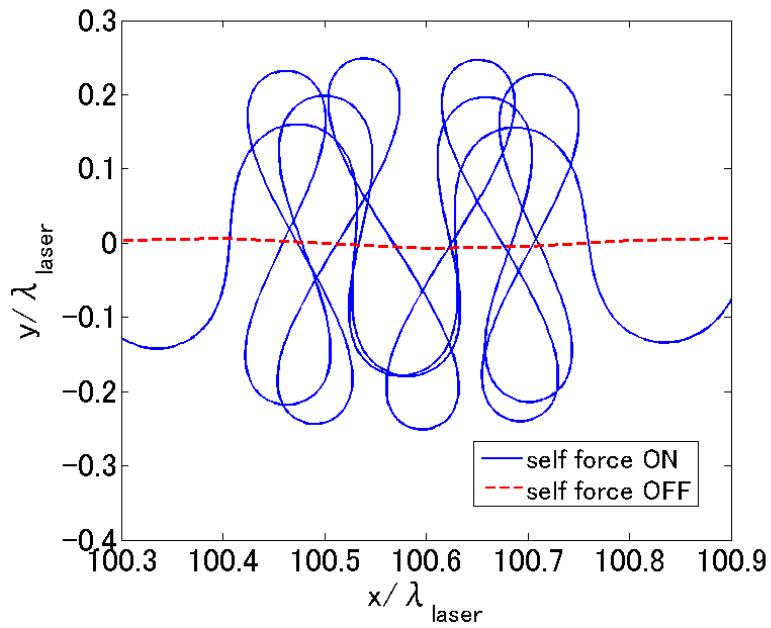
Fig.3-3 電子に働く  $x$  軸方向の力

赤色の線が放射の反作用力で青色の点線がレーザーの電磁力を意味する。





(a) 電子の運動軌跡



(b) 運動軌跡の拡大図

Fig.3-4 電子の運動軌跡

赤色の線が放射の反作用を無効にした計算結果で青色が有効にした場合の計算結果。右から電子が進行して左に抜けていく。

### 3.3 静止電子へのレーザー照射

カウンター配位の条件のうち電子のエネルギーを  $\gamma = 1$  として時間発展させた場合についても考察する。この場合はほとんど同様な運動軌跡を得る。Fig.3-5 と Fig.3-6 に初期静止電子の運動軌跡とエネルギー ( $\gamma$ ) の時間発展を示す。電子軌跡 Fig.3-5 は原点に電子を置き、左 ( $x$  軸負方向) からレーザーを照射している。相対論における特徴的なレーザー電子相互作用の結果である 8 の字運動を取ることがわかるが、 $x$  軸と  $y$  軸の尺度が違うことに注目すれば、8 の字運動はしているがほとんど直進していることがわかる。青色の放射の反作用の効果をとり入れた計算と赤色の放射の反作用を考えていない運動が似ているのは、実効的な加速方向がレーザーの進行方向 ( $\mathbf{v} \times \mathbf{B}$ ) 方向であるために電子の運動方向と加速方向が揃ってしまったために、制動放射が起こりやすいシチュエーションから離れていることに起因していると考えられる。Fig.3-6 のエネルギーの変化を見ればこのことが良くわかる。電子を照射するレーザーが強力なために電子は簡単に光の速さに到達する。上にも述べたように電子の進行方向はレーザーの進行方向とほぼ一致するのでレーザーの光子と電子が光の速度で並進し、 $\mathbf{v} \times \mathbf{B}$  方向に(電子の固有時間で見たときに)長い間相互作用することで高エネルギーを持つようになったことを示している。

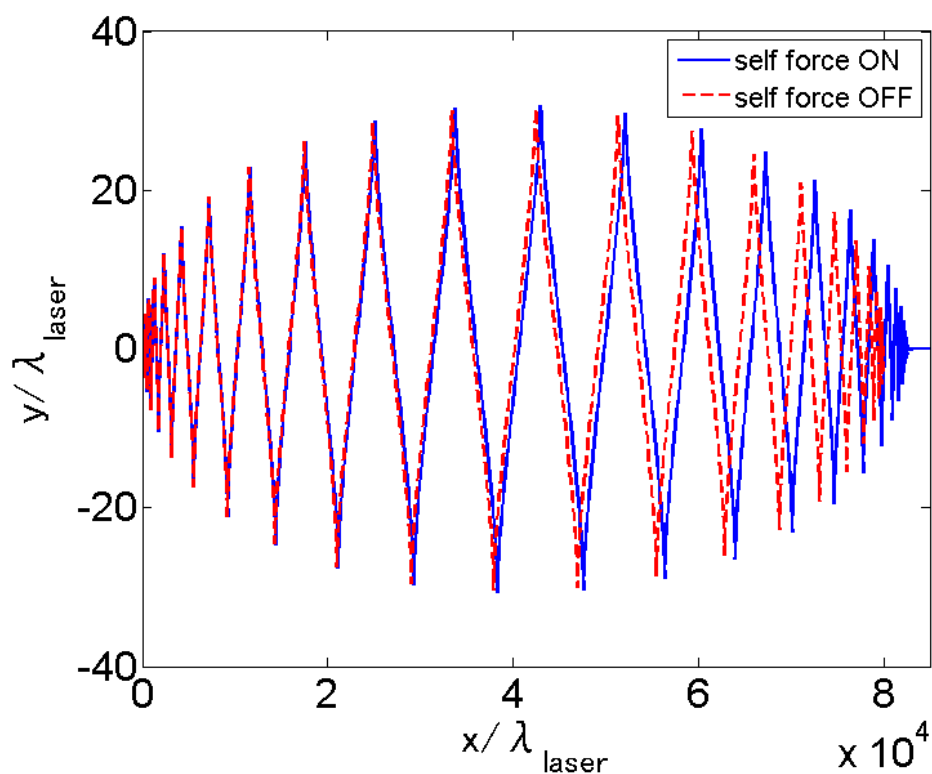


Fig.3-5 初期静止電子の場合の運動軌跡

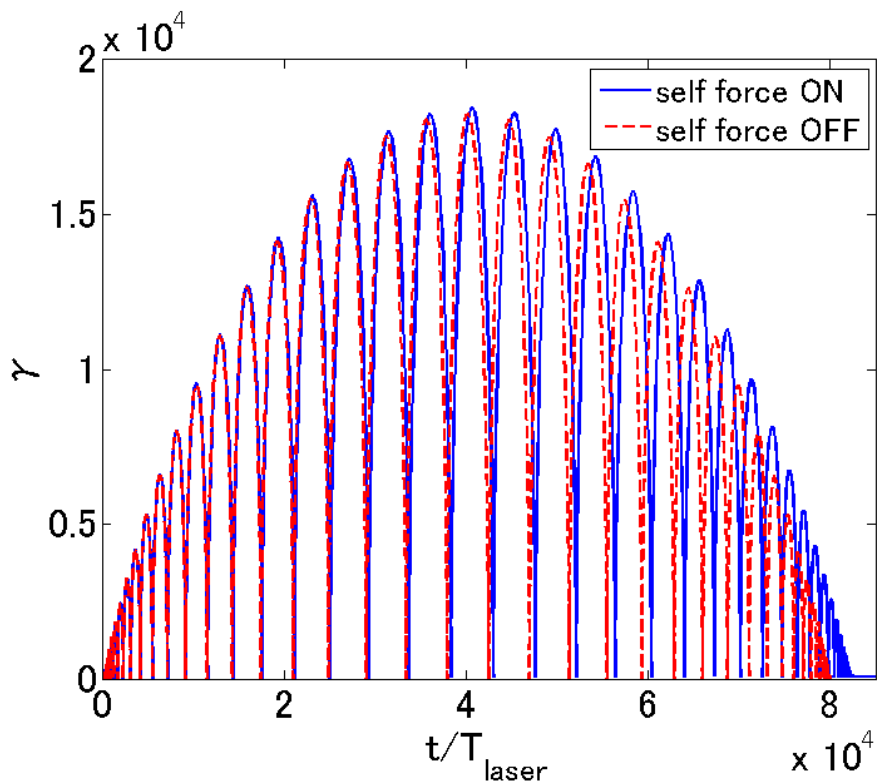


Fig.3-6 初期静止電子のエネルギーの時間発展

運動軌跡も電子のエネルギーも共に振動が最大に達したあたりから放射の反作用の有無による僅かなずれが発生している。他の影響に比べて支配的ではないにせよ放射の反作用は荷電粒子が加速運動する場合には必ず発生する。高エネルギー電子の場合放出される光子は電子の運動方向に発生する。このため電子は小さな値ではあるが、制動放射によりエネルギー・運動量を失う。すると、レーザーの光子と電子は並進しながらその位相がずれてしまう。このことを捉えたのがこの2つの図、Fig.3-5とFig.3-6である。

### 3.3 結論

もっとも強力で指向性の強い制動放射を生み出せる状況として、超相対論レーザーと高エネルギー電子のカウンター配置について計算した。このとき同時に強力な放射の反作用力が発生する。 $10^{22}\text{W/cm}^2$  のレーザーと  $1\text{GeV}$  の電子の組み合わせの場合、計算結果から反作用力の有無で大きく電子のダイナミクスが変化するので、放射の反作用の効果は無視できない。このため超相対論レーザーを利用する場合はこの効果が大変重要である。(2.5-2.8)式と Landau-Lifshitz 方程式、2つの理論の一致傾向についても述べたが、さらに詳しくは第4章で述べるように電子のエネルギー( $\gamma$ )の値でその度合いを調べることが可能となる。具体的に放射の反作用力が一致するためには $\gamma > 10$ が満たされねばならないことが次章の計算結果から結論付けられる。この領域に考察する物理過程が限定できる場合は(3.2.1)式、もしくは Landau-Lifshitz 方程式から導かれた(3.2.2)式という簡単な方程式を利用してもよい。ただし、次章で述べるようなレーザー強度を相対論的強度よりも少し低い $10^{17}\text{W/cm}^2$ として電子運動に非相対論領域を含むような場合は高エネルギー近似する前の方程式である(2.5-2.8)式を解かねばならない。また、静止した電子に $10^{22}\text{W/cm}^2$ のレーザーを照射した場合には、レーザー下では基本的な相対論的運動である8の字運動を行う。この場合レーザーの進行方向に電子を加速し続けるために、レーザーによる電子のエネルギー変化が制動放射よりも支配的であり、よって放射の反作用の有無による運動の差異はカウンター配位に比べると殆どないといえる。しかし、わずかな制動放射によってレーザーと電子の位相ずれが大きくなる。つまりレーザーと電子の位相ずれを観測することでも放射の反作用が実際に発生したか否かを判定できる。

## 参考文献

- [1] K. SETO, H. NAGATOMO and K. MIMA, Plasma Fusion Res. **6**, 2404099 (2011).
- [2] C. K. Birdsall and A. B. Langdon, Plasma Physics via Computer Simulation (Taylor & Francis, New York, 2005)
- [3] J. Koga, Phys. Rev. E **70**, 046502 (2004).
- [4] L. D. Landau and E. M. Lifshitz, *The Classical theory of fields* (Pergamon, New York, 1994).

## 第4章 非相対論的レーザー・電子相互作用

新理論<sup>[1,2]</sup>は超高強度レーザー・電子相互作用下で従来の Landau-Lifshitz<sup>[3]</sup>の方法と一致することを示したが、レーザー強度が相対論領域よりも弱いものになると理論間のずれが生じる。これは新理論の過程によって取り除かれた時間成分の Schott 項が引き起こすずれである。そこで、本章ではこの理論の差を見ることのできる  $10^{17}\text{W/cm}^2$  のレーザーと電子の相互作用についての計算結果を示し、放射の位相と電子が失うエネルギーの位相の関係は新理論のほうがあり得るであろうことを解説する。また、2つの理論の一致・不一致の傾向が電子のエネルギーに依存していることを述べる。

### 4.1 初期値

第3章でも示したように、超高強度レーザー・電子相互作用では(2.5-2.8)式と Landau-Lifshitz 方程式<sup>[3]</sup>は一致する傾向を有することを数値計算と解析的に示した<sup>[1,2]</sup>。それに対して、強度を下げた  $1 \times 10^{17}\text{W/cm}^2$  の強度、波長が  $1\mu\text{m}$  でパルス幅が  $20\text{fsec}$  の平面波レーザー(式としては(3.1.1)と同じ)を、静止した電子、非相対論領域の運動をしている電子、相対論領域に達した電子にカウンター照射するという放射の反作用力が有効でない(しかしながら、現象は切り落とさず考慮する)物理状況を考察する(Fig.4-1)。電子のエネルギーを徐々に変えて(レーザーにカウンター注入)、第3章での結論の一つである2つの理論の一致傾向を数値計算によって確認する。ここでの計算も超高強度の場合と同じように leap frog 法を使って運動を追跡している。確認には放射の反作用力の時間成分について調べる。すなわち、新たに提案した方程式として(2.5-2.8)式から

$$f_{\text{reaction}}^0 = -\frac{\gamma}{c} \frac{dW}{dt} = \frac{m_0 \tau_0}{c^2} g_{\rho\sigma} \frac{dw^\rho}{d\tau} \frac{dw^\sigma}{d\tau} w^0 \quad (4.1.1)$$

と、Landau-Lifshitz 方程式(2.3.2)式より

$$\left(f_{\text{reaction}}^0\right)_{\text{L-L}} = \tau_0 \frac{dF_{\text{ex}}^0}{d\tau} + \frac{\tau_0}{m_0 c^2} g_{\rho\sigma} F_{\text{ex}}^\rho F_{\text{ex}}^\sigma w^0 \quad (4.1.2)$$

の時間発展を見比べていくことにする。

### 4.2 シミュレーション結果

まずは単純な比較から始める。静止した電子を初期状態にして解き、(4.1.1)式と(4.1.2)

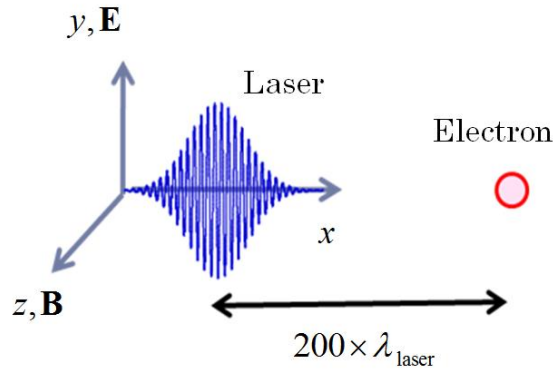


Fig.4-1 理論比較用の計算

電子はレーザーの進行方向とはカウンターに進行し $\gamma=1, 1.1, 2, 10$ の4パターンについて考える。

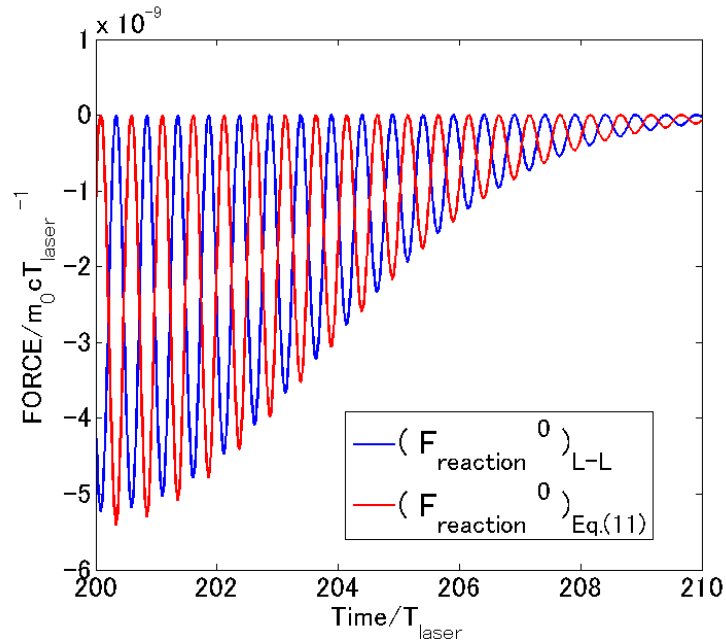


Fig.4-2 静止電子での反作用力の比較

式に相当する部分を抽出して並べたものが Fig.4-2 である。青い線が Landau-Lifshitz のモデルであり、赤い線が著者の提案した方程式の計算結果である。包絡線は一致しているように見えるがきれいに位相がずれている。レーザー周期の倍の周波数を持つので、このずれは $\pi/2$ の位相ずれであることが読み取れる。外部で観測される制動放射によるエネルギーのロス( $\leq 0$ )は、(4.1.1)式の場合は

$$\frac{m_0 \tau_0}{c^2} g_{\rho\sigma} \frac{dw^\rho}{d\tau} \frac{dw^\sigma}{d\tau} w^0 \quad (4.2.1)$$

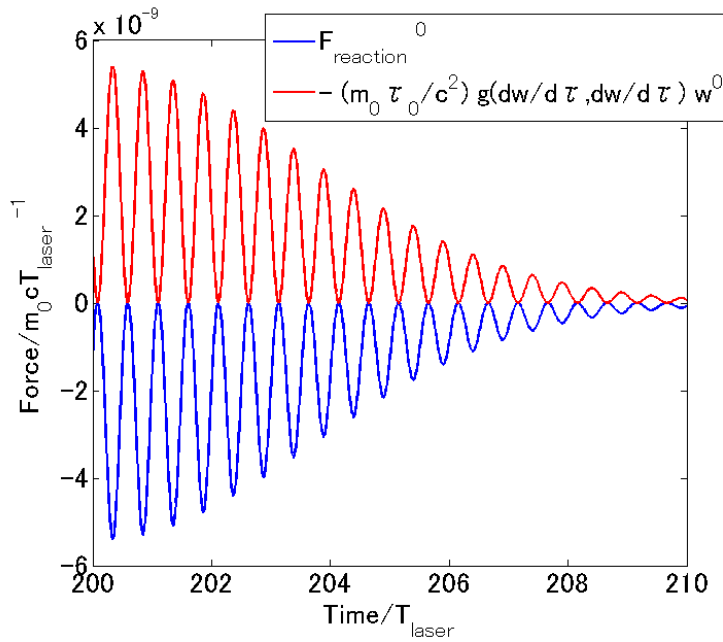


Fig.4-3 (4.1.1)式の関係  
電子は $\gamma=1$ の初期静止状態。

赤い線が放射のエネルギーロスで赤い線が放射の反作用力の時間成分。

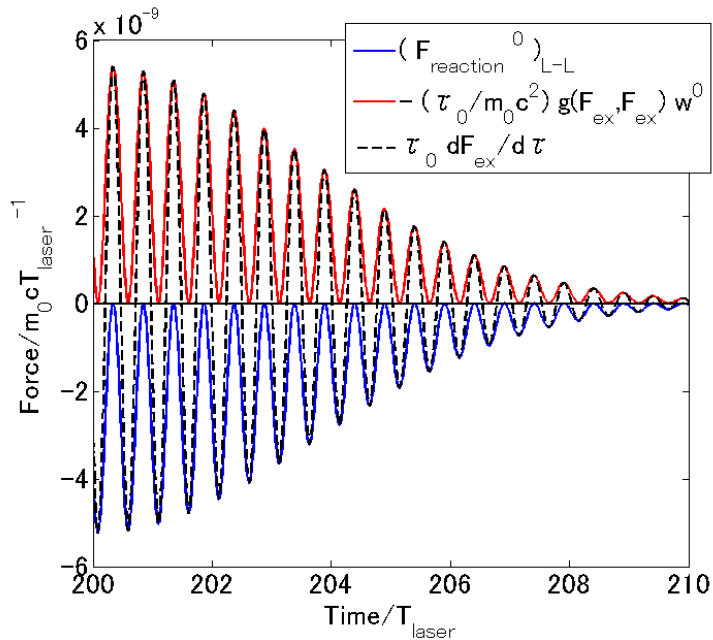


Fig.4-4 (4.1.2)式の関係  
電子は $\gamma=1$ の初期静止状態。  
黒い点線は Schott 項  $\tau_0 dF_{ex}^0 / d\tau$ 。



で、Landau-Lifshitz(5.1.2)式の場合

$$\frac{\tau_0}{m_0 c^2} g_{\rho\sigma} F_{\text{ex}}^\rho F_{\text{ex}}^\sigma w^0 \quad (4.2.2)$$

で書ける。著者が提案する方程式はその定義から放射の反作用力の時間成分と制動放射のエネルギーロス(正負が違っただけで振幅は完全に一致する。それが Fig.4-3 で示された通りである。これは電子の初期状態を変更したとしても変わらない関係である。Landau-Lifshitz の場合の制動放射のエネルギーロス(4.2.1)式は(4.2.2)式と位相を含めほぼ一致する(各図の赤色の線がこれに相当する)。にもかかわらず反作用力(各図の青色の線)の位相ずれが存在するのは Schott 項(Landau-Lifshitz の計算結果内の黒色の点線)の存在による。実際にグラフをプロットすれば Fig.4-4 の通り、Schott 項が上に述べたふるまいをしていることが読み取れる。今回提案された理論は放出された放射の位相をそのまま電子に与えるのに対して、Landau-Lifshitz の方法は Schott 項のためにレーザー周期を単位にして  $\pi/2$  の位相差を生む。電子の内部構造に依存し位相がずれることは考えられるが、外場の周期に同期することは考えにくい。この点で新理論はエネルギー保存が明瞭である利点がある。しかしながらこの利点は解釈に限った話であり、最終的には実験という形で自然に問いかけるほかない。

電子の初期エネルギー  $\gamma$  を徐々に上げることで徐々に Schott 項がほかの項に比べて小さなものになっていく様子がわかる(Fig.4-5,7,9)。これは、第3章で述べた理論の一致を意味し、レーザー強度に依存するのではなく電子エネルギーに依存し、 $\gamma > 10$  であれば(3.2.1)式を利用できるを示している。LAD 方程式の run-away 問題は Schott 項によって引き起こされている<sup>[1]</sup>ことを述べたが、 $\gamma > 10$  では Schott 項は支配的ではないので、予め取りはらって物理を考察してよいということの証明と言える。ただし、Schott 項が Lorentz 共変を保持するために導入されたことを思い浮かべれば、Lorentz 共変から次第にずれ始めることは想像しやすい。

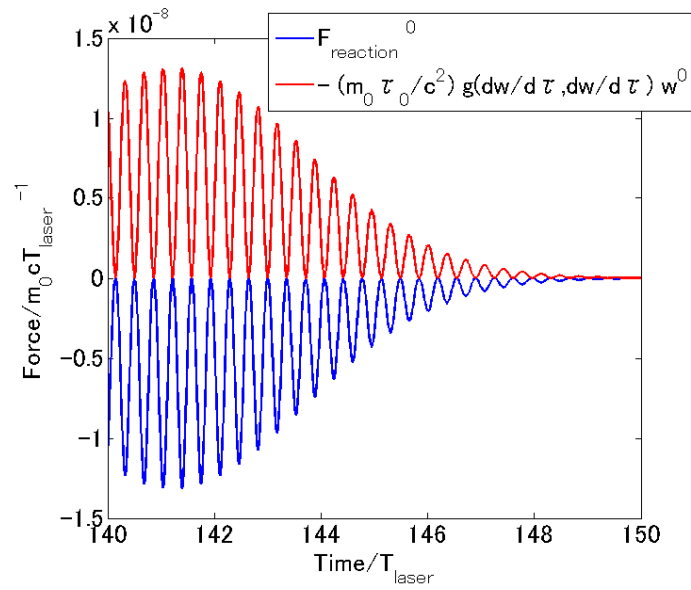


Fig.4-5 (4.1.1)式の関係

電子は $\gamma=1.1$ のエネルギーを初期に持っている。

赤い線が放射のエネルギーロスで赤い線が放射の反作用力の時間成分。

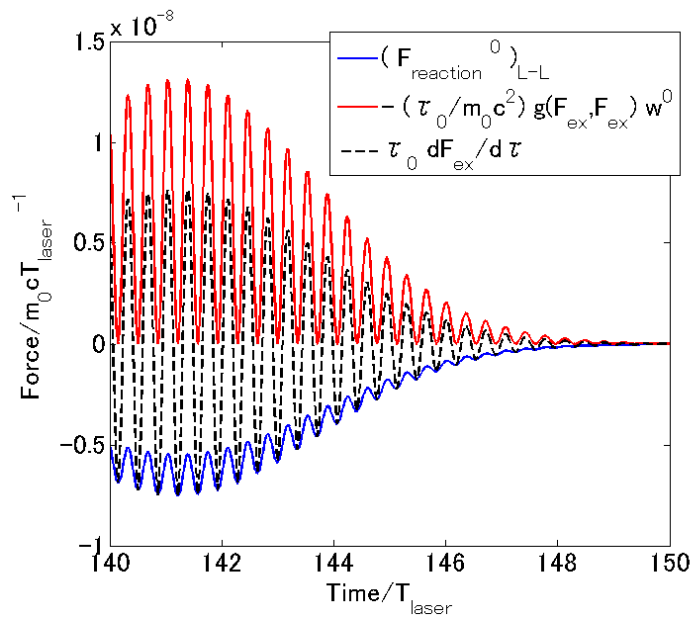


Fig.4-6 (4.1.2)式の関係

電子は $\gamma=1.1$ のエネルギーを初期に持っている。

黒い点線は Schott 項  $\tau_0 dF_{ex}^0 / d\tau$ 。

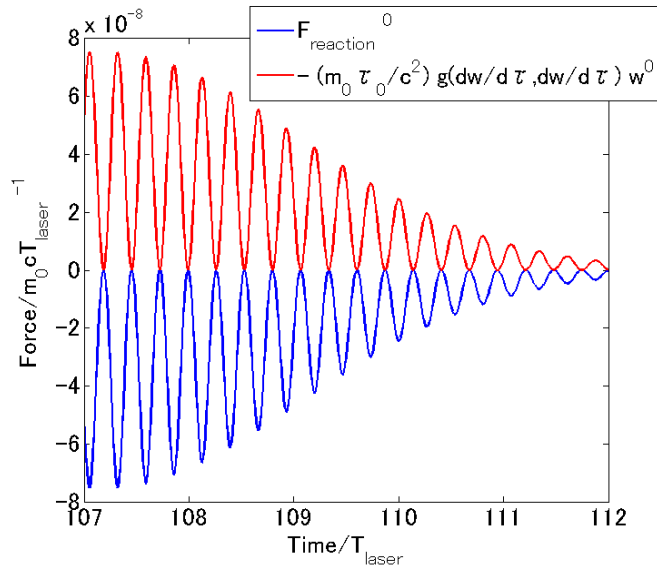


Fig.4-7 (4.1.1)式の関係

電子は $\gamma=2$ のエネルギーを初期に持っている。

赤い線が放射のエネルギーロスで赤い線が放射の反作用力の時間成分。

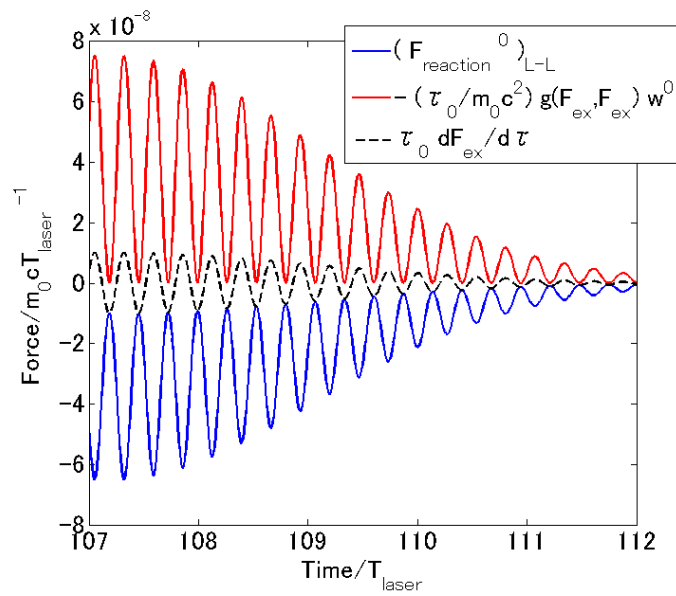


Fig.4-8 (4.1.2)式の関係

電子は $\gamma=2$ のエネルギーを初期に持っている。

黒い点線は Schott 項  $\tau_0 dF_{ex}^0 / d\tau$ 。

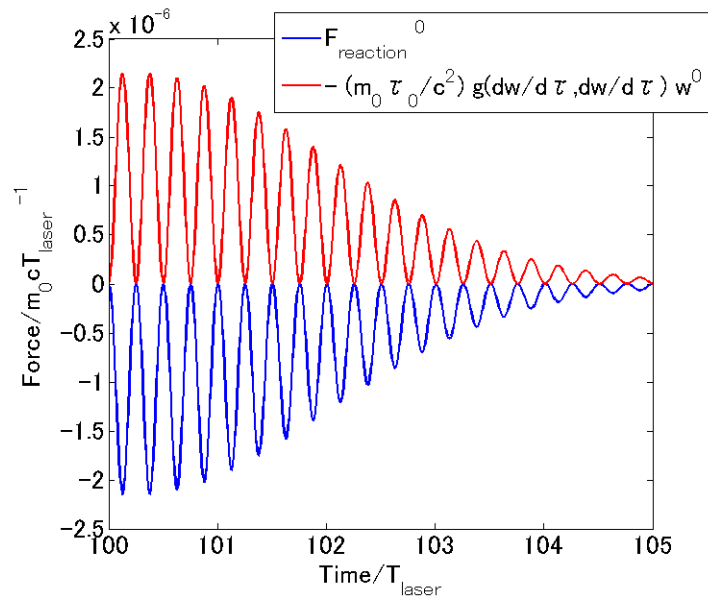


Fig.4-9 (4.1.1)式の関係

電子は $\gamma=10$ のエネルギーを初期に持っている。

赤い線が放射のエネルギーロスで赤い線が放射の反作用力の時間成分。

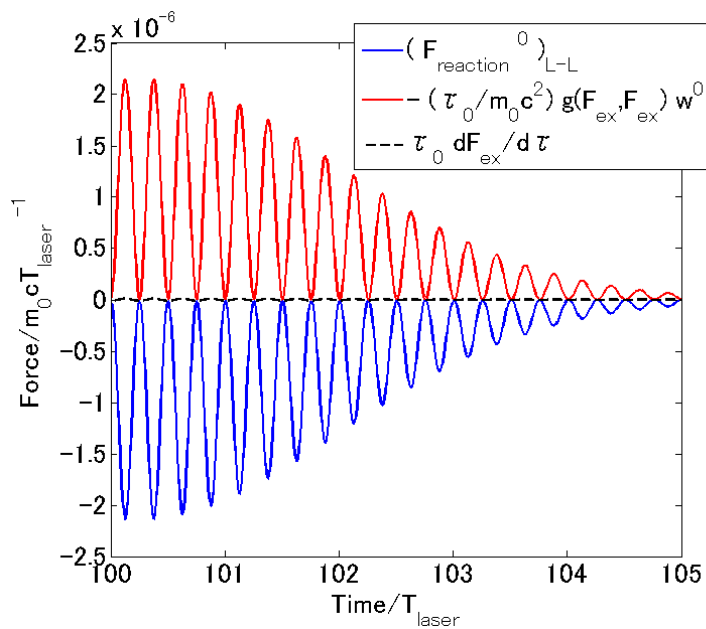


Fig.4-9 (4.1.2)式の関係

電子は $\gamma=10$ のエネルギーを初期に持っている。

黒い点線は Schott 項  $\tau_0 dF_{ex}^0 / d\tau$ 。

### 4.3 結論

非相対論的強度のレーザーの場合は理論の間に差が生まれる。特に注目すべきは Landau-Lifshitz 方程式による放射の反作用力は電磁放射と  $\pi/2$  の位相ずれを持つことである。新方程式(2.5-2.8)式から得られた結果は、光の放出と反作用力が完全に同期しており、エネルギー保存則の観点から、放射と反作用力の関係が明瞭である点で有用である。しかしながら、最終的な理論の正統性は実験を通じて自然に問いかけるほかなく、現在の状況は実験ができる環境になった際に参照できる方程式を可能な限り導けるだけ準備していることに相当すると認識せねばならない。電子が高エネルギーになるほど、本章で取り扱った新理論と Landau-Lifshitz の方法は一致する傾向があり、このことは方程式からも読み取れるように Schott 項が  $(m_0\tau_0/c^2)g_{\rho\sigma}(dw^\rho/d\tau)(dw^\sigma/d\tau)w^0$  などの項に比べどの程度のオーダーの数値であるかに左右される。これが第 3 章の(3.2.1)式と(3.2.2)式の方程式の一致傾向を捉えたものである。具体的には電子のエネルギーが  $\gamma > 10$  であれば 3.2 節で述べた単純化した理論式が適用可能である。

## 参考文献

- [1] K. SETO, H. NAGATOMO and K. MIMA, *Plasma Fusion Res.* **6**, 2404099 (2011).
- [2] K. SETO, H. NAGATOMO, J. KOGA and K. MIMA, *Phys. Plasmas* **18**, 123101 (2011).
- [3] L. D. Landau and E. M. Lifshitz, *The Classical theory of fields* (Pergamon, New York, 1994).
- [4] P. A. M. Dirac, *Proc. Roy Soc. A* **167**, 148 (1938).
- [5] W. K. H. Panofsky and M. Phillips, *Classical Electricity and Magnetism* (Addison-Wesley Publishing Co. Inc., London, 1962).
- [6] J. D. Jackson, *Classical Electrodynamics* (John Wiley & Sons Inc., New York, 1962).

## 第 5 章 結論

最終章として本研究に関する重要事項をまとめる。

レーザーの超高強度化に伴い、目標として  $10^{24-25}\text{W/cm}^2$  の強度が照準となった。この強度に至るまでの間に、我々が最初に克服すべき理論は  $10^{22}\text{W/cm}^2$  から観測されるであろう強力な制動放射の運動への寄与、放射の反作用力である。この理論の基礎である LAD 方程式は基礎であるにもかかわらず run-away 解を持っている<sup>[1]</sup>ので、その克服が急務であった。本論文では一つの解決方法として新たな放射の反作用力の式を提案し、その有用性を示した<sup>[2,3]</sup>。

まず 2 章で新たに提案した運動方程式の導出を行った。この方程式は LAD 方程式の時間成分(エネルギーバランス方程式)から物理解釈が困難な Schott 項を取り除き、制動放射に関連した電子と外部とのエネルギーのやりとりは  $m_0\tau_0 g_{\rho\sigma} (dw^\rho/d\tau)(dw^\sigma/d\tau)$  だけであるという仮定に立脚している(第 2.4 節)<sup>[2,3]</sup>。最終的な運動方程式は

$$m_0 \frac{dw^\mu}{d\tau} = -eF_{\text{ex}}^{\mu\nu} w_\nu + m_0\tau_0 \frac{d^2 w^\mu}{d\tau^2} + \frac{m_0\tau_0}{c^2} g_{\rho\sigma} \frac{dw^\rho}{d\tau} \frac{dw^\sigma}{d\tau} w^\mu - m_0\tau_0 \frac{w^0 w^\mu - c^2 \delta_0^\mu}{(w^0)^2 - c^2 + |\boldsymbol{\varepsilon}_{\rightarrow 0}|} \frac{d^2 w^0}{d\tau^2} \quad (2.5-2.8)$$

であり(第 2.5 節)、run-away 不安定性を生み出す Schott 項の時間成分を取り外したので数学的に安定な解を持つことを示すことに成功した(第 2.6 節)。

第 3 章ではこれまで提案されてきたほぼすべてのモデルの挙動が一致する物理過程として、超相対論レーザー・高エネルギー電子相互作用の問題を(2.5-2.8)式を利用して数値計算を行った。レーザーと電子はカウンター配置から入射され、電子はレーザーに散乱された際に強大な制動放射を発生させ、そのフィードバックとして制動放射の影響を考えなかった場合とは大きく異なる軌道を描いた。この運動軌跡は従来理論で数値計算に良く利用される Landau-Lifshitz の近似<sup>[4]</sup>による結果と完全に一致した。そのため、まずこの物理領域においては従来の理論の代わりに(2.5-2.8)式を利用出来ることが確認できた。

一方で、従来の方法の代表として Landau-Lifshitz の方法を選んだときに差が生じたのが第 4 章で述べた低強度レーザー・低エネルギー電子(あるいは静止電子)相互作用である。ここでは、制動放射で失う単位時間当たりのエネルギーと放射の反作用力が電子にする仕事

に注目しその位相がどれだけずれるかを確認した。(2.5-2.8)式はその方程式を導く仮定からこの2つの間に位相差は存在しないが、Landau-Lifshitzの方法の場合はSchott項がこれらの中にレーザー周期を基準にして $\pi/2$ の位相差を生むこと、これは電子のエネルギーが高くなるごとに次第に無視できるようになることがシミュレーションによって示された。電子の内部構造により位相差がずれる場合、レーザー周期にここまで呼応することはないと予想されるので位相ずれは方程式の抱える問題であり、制動放射とそれが電子に与える影響に位相差がない(2.5-2.8)式はエネルギーのやり取りを解釈する上で有用である。

本論文において理論とシミュレーションを用いて示されたように、(2.5-2.8)式は電子について低エネルギーから少なくともGeVクラスの超相対論的な領域までをカバーできるダイナミックレンジの大変広い方程式である。物理現象を古典物理に限定することができるのであれば、(2.5-2.8)式はあらゆる電子運動を記述でき有用なリファレンスである。



## 参考文献

- [1] P. A. M. Dirac, Proc. Roy Soc. A **167**, 148 (1938).
- [2] K. SETO, H. NAGATOMO and K. MIMA, Plasma Fusion Res. **6**, 2404099 (2011).
- [3] K. SETO, H. NAGATOMO, J. KOGA and K. MIMA, Phys. Plasmas **18**, 123101 (2011).
- [4] L. D. Landau and E. M. Lifshitz, *The Classical theory of fields* (Pergamon, New York, 1994).

# 附録

本文中の計算で煩雑と思われる計算、あるいは必要と思われる最低限の予備知識などをこの附録に収録する。

- A1. 放射エネルギーの定式化
- A2. 相対論における運動方程式
- A3. 相対論的量子論の中での放射の反作用



## A1. 放射エネルギーの定式化

放射の反作用理論は荷電粒子からの放射エネルギーの粒子運動への寄与を考察するものである。ここでは電磁場の基礎理論である Maxwell 方程式から出発して、本論で使える制動放射のエネルギーロスの公式を導く。

### A1.1 Liénard-Wiechert ポテンシャル

真空中の Maxwell 方程式とポテンシャルによる場の定義は以下の式である。

$$\begin{cases} \nabla \cdot \mathbf{E} = \varepsilon_0^{-1} \rho \\ \nabla \times \mathbf{E} = -\partial_t \mathbf{B} \\ \nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \\ \nabla \times \mathbf{B} = \mu_0^{-1} \mathbf{j} + \partial_t (\varepsilon_0 \mathbf{E}) \end{cases} \quad \begin{cases} \mathbf{E} = -\nabla \varphi - \partial_t \mathbf{A} \\ \mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} \end{cases} \quad (\text{A1.1.1})$$

これらの式を組み合わせれば

$$\left( \nabla^2 - c_{\text{light}}^{-2} \partial_t^2 \right) \begin{Bmatrix} \mathbf{A} \\ \varphi \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\mu_0 \mathbf{j} \\ -\varepsilon_0^{-1} \rho \end{Bmatrix} \quad (\text{A1.1.2})$$

というポテンシャルについての波動方程式を得る。この式の解を探る。この式と同型のものとして

$$\left( \partial_t^2 - c^2 \nabla^2 \right) \mathbf{A}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{R}(\mathbf{x}, t) \quad (\text{A1.1.3})$$

を考える。これを Fourier 変換して解を導く。Fourier 変換・逆変換を

$$\begin{cases} \hat{f}(\omega) = F[f(t)](\omega) \equiv \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt \\ f(t) = F^{-1}[\hat{f}(\omega)](t) \equiv \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega) e^{i\omega t} d\omega \end{cases}$$

で定義する。以後どんな時でも  $c = k^{-1}\omega$  で変数変換することができるものとしよう。注目している波動方程式(2.1.3)式を Fourier 変換すれば、

$$\left\{ (-i\omega)^2 - c^2 \nabla^2 \right\} \hat{\mathbf{A}}(\mathbf{x}, \omega) = \hat{\mathbf{R}}(\mathbf{x}, \omega) \Leftrightarrow (\nabla^2 + k^2) \hat{\mathbf{A}}(\mathbf{x}, \omega) = -c^{-2} \hat{\mathbf{R}}(\mathbf{x}, \omega)$$

この方程式の計算の続きは Green 関数  $G(\mathbf{x}, \mathbf{x}')$  を持つてくる。

$$(\nabla^2 + k^2) G(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = -\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \quad (\text{A1.1.4})$$

この方程式は Green 関数の定義ともいえる。この方程式に  $c^{-2} \hat{\mathbf{R}}(\mathbf{x}', \omega)$  をかけ、 $\mathbf{x}'$  について

積分を行う。

$$(\nabla^2 + k^2) \int d^3 \mathbf{x}' c^{-2} \hat{\mathbf{R}}(\mathbf{x}', \omega) G(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = -c^{-2} \hat{\mathbf{R}}(\mathbf{x}, \omega) \quad (\text{A1.1.5})$$

この式と元の式の Fourier 変換後の方程式から、

$$\hat{\mathbf{A}}(\mathbf{x}, \omega) = \int d^3 \mathbf{x}' c^{-2} \hat{\mathbf{R}}(\mathbf{x}', \omega) G(\mathbf{x}, \mathbf{x}') \quad (\text{A1.1.6})$$

でなければならないことが分かる。Green 関数の型が分かればなお計算がしやすい。仮定として Green 関数は球対称な解をもつものとする。すなわち、 $\mathbf{x}'$  を中心とし、系方向  $r \equiv |\mathbf{x} - \mathbf{x}'|$  にのみ依存した関数  $\tilde{G}(r)$  であるとする。このとき Green 関数の定義(A1.1.4)式は、

$$\frac{1}{r} \frac{d^2}{dr^2} (r \tilde{G}(r)) + k^2 \tilde{G}(r) = -\delta(r) \quad (\text{A1.1.7})$$

と変形され、 $r\delta(r) \equiv 0$  に留意すれば、

$$\tilde{G}(r) = \frac{e^{\pm ikr}}{4\pi r} \quad (\text{A1.1.8})$$

が導かれる。これを 3 次元での Green 関数と呼ぼう。この 3 次元の Green 関数に現れる  $4\pi$  は  $\delta$  関数の重要な関係式、

$$\nabla^2 \frac{1}{4\pi r} = -\delta(r) \quad (\text{A1.1.9})$$

が満たされることに起因する。以上より、

$$\hat{\mathbf{A}}(\mathbf{x}, \omega) = \frac{1}{4\pi c^2} \int d^3 \mathbf{x}' \frac{\hat{\mathbf{R}}(\mathbf{x}', \omega)}{r} e^{\pm ikr} \quad (\text{A1.1.10})$$

という解が厳密に得られる。これを Fourier 逆変換すれば波動方程式の解を得る。

$$\begin{aligned} \mathbf{A}(\mathbf{x}, t) &= F^{-1}[\hat{\mathbf{A}}(\mathbf{x}, \omega)] = \frac{1}{2\pi} \int d\omega \left[ \frac{1}{4\pi c^2} \int d^3 \mathbf{x}' \frac{\hat{\mathbf{R}}(\mathbf{x}', \omega)}{r} e^{\pm ikr} \right] e^{i\omega t} \\ &= \frac{1}{4\pi c^2} \int d^3 \mathbf{x}' \left[ \frac{1}{2\pi} \int d\omega \frac{\hat{\mathbf{R}}(\mathbf{x}', \omega)}{r} e^{i\omega \left(t \pm \frac{r}{c}\right)} \right] \\ &= \frac{1}{4\pi c^2} \int d^3 \mathbf{x}' \frac{\mathbf{R}\left(\mathbf{x}', t \pm \frac{r}{c}\right)}{r} \end{aligned} \quad (\text{A1.1.11})$$

数学の世界では一般にある集合  $S$  上に点  $P$  と  $S$  の部分集合  $Q$  をとったとき、

$$U(P) = \int_{x \in Q} \mu(dx) K(P, x) \in \mathbb{R}$$

というタイプの関数  $U \in C(S)$  を集合  $S$  上のポテンシャルと呼ぶ。ここで関数  $\mu: S \rightarrow \mathbb{R}$  は測度(measure)であり、平たく言えば  $\mu(dx)$  が体積素を意味していると思えばよかろう。また、被積分関数  $K: S \times S \rightarrow \mathbb{R}$  はポテンシャル核(kernel)と呼ばれる。ポテンシャル核は通常 2 つの引数の間の距離を用いることが多い。先に求めた式をこの定義と比較すれば  $\mathbf{A}$  は  $(4\pi c^2 r)^{-1} \mathbf{R}(\mathbf{x}', t \pm r/c)$  を核とするベクトル型のポテンシャルである(成分 1 つを取り出せば定義と一致できる)。もう少し集合論的な書き方をするならば、核は

$$\mathbf{K}(P, Q)(t) = \frac{1}{4\pi c_{\text{light}}^2 r_{Q \rightarrow P}} \mathbf{R}\left(Q, t \pm \frac{r_{Q \rightarrow P}}{c}\right)$$

と書ける。  $r_{Q \rightarrow P}$  は点  $Q$  から点  $P$  までの距離である。このポテンシャルを、式中の  $\pm$  の  $+$  をとったときは先進、 $-$  をとったときには遅延ポテンシャルと呼ぶ。ところで  $\mathbf{R}$  はソース項に相当する。元の式と見比べればその対応から明らかである。この式は一般的なソースの場合の表記であるが、たとえばソースがある 1 点に集約された場合というのはどのようなポテンシャルの式になるであろうか。いま、ソースを  $\delta$  関数を持ちいて

$$\mathbf{R}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{R}_0(t) \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0(t)) \quad (\text{A1.1.12})$$

とおく。ここで湧き出し点は  $\mathbf{x}_0$  であり時間経過によりその位置を変動させることができる。これをポテンシャル核に適用して

$$\begin{aligned} \mathbf{A}(\mathbf{x}, t) &= \frac{1}{4\pi c^2} \int d^3 \mathbf{x}' \frac{\mathbf{R}\left(\mathbf{x}', t \pm \frac{r}{c}\right)}{r} \\ &= \frac{1}{4\pi c^2} \int d^3 \mathbf{x}' \frac{\mathbf{R}_0\left(t \pm \frac{r}{c}\right)}{r} \delta\left(\mathbf{x}' - \mathbf{x}_0\left(t \pm \frac{r}{c}\right)\right) \\ &= \frac{1}{4\pi c^2} \int d^3 \mathbf{x}' \int dt' \frac{\mathbf{R}_0(t')}{r} \delta(\mathbf{x}' - \mathbf{x}_0(t')) \delta\left(t' - \left(t \pm \frac{r}{c}\right)\right) \end{aligned}$$

ここで  $r \equiv |\mathbf{x} - \mathbf{x}'|$  であったことに留意する。最後の式において空間積分から先に計算することで以下のように変形することができる。

$$\begin{aligned}
\mathbf{A}(\mathbf{x}, t) &= \frac{1}{4\pi c^2} \int d^3\mathbf{x}' \int dt' \frac{\mathbf{R}_0(t')}{r} \delta(\mathbf{x}' - \mathbf{x}_0(t')) \delta\left(t' - \left(t \pm \frac{r}{c}\right)\right) \\
&= \frac{1}{4\pi c^2} \int dt' \frac{\mathbf{R}_0(t')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0(t')|} \delta\left(t' - \left(t \pm \frac{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0(t')|}{c}\right)\right)
\end{aligned}$$

以後の計算を見やすいようにするために  $h(|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0(t')|, t, t') = t' - t \mp |\mathbf{x} - \mathbf{x}_0(t')|/c \equiv 0$  と定義する。要するに  $\delta$  関数の引数である。これを用いてさらに変形を進めると、

$$\begin{aligned}
\mathbf{A}(\mathbf{x}, t) &= \frac{1}{4\pi c^2} \int dt' \frac{\mathbf{R}_0(t')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0(t')|} \delta\left(h(|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0(t')|, t, t')\right) \\
&= \frac{1}{4\pi c^2} \int dh \frac{dt'}{dh} \frac{\mathbf{R}_0(t')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0(t')|} \delta\left(h(|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0(t')|, t, t')\right) \\
&= \left[ \frac{1}{4\pi c^2} \left(\frac{dh}{dt'}\right)^{-1} \frac{\mathbf{R}_0(t')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0(t')|} \right]_{h=0} \\
&= \left[ \frac{1}{4\pi c^2} \frac{\mathbf{R}_0(t')}{\left(1 \pm \frac{(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0(t')) \cdot \dot{\mathbf{x}}_0(t')}{c|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0(t')|}\right) |\mathbf{x} - \mathbf{x}_0(t')|} \right]_{h=0}
\end{aligned}$$

さらに次のようなベクトルを導入する。

$$\begin{cases}
\mathbf{n}(t') \equiv \frac{\mathbf{x} - \mathbf{x}_0(t')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0(t')|} \\
\dot{\mathbf{x}}_0(t') \equiv \partial_{t'} \mathbf{x}_0(t') \\
\boldsymbol{\beta}(t') \equiv \frac{\dot{\mathbf{x}}_0(t')}{c}
\end{cases}$$

これにより、

$$\begin{aligned}
\mathbf{A}(\mathbf{x}, t) &= \frac{1}{4\pi c^2} \frac{\mathbf{R}_0(t')}{(1 \pm \mathbf{n}(t') \cdot \boldsymbol{\beta}(t')) |\mathbf{x} - \mathbf{x}_0(t')|} \\
&\quad \because t' = t \pm \frac{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0(t')|}{c}
\end{aligned} \tag{A1.1.13}$$

を得る。これを Liénard-Wiechert ポテンシャルという。古典的な議論では先進ポテンシャルを選択することはしない。それは未来の情報をその点から過去の点である現在に遡ってポテンシャルの値として集約するという理解しがたい項であるためである。われわれは古典的な視野に立ち、理解の容易な遅延ポテンシャルの身を選択することにする。すなわち

$$\begin{aligned}\mathbf{A}(\mathbf{x}, t) &= \frac{1}{4\pi c^2} \int d^3\mathbf{x}' \frac{\mathbf{R}\left(\mathbf{x}', t - \frac{r}{c}\right)}{r} \\ &= \frac{1}{4\pi c^2} \frac{\mathbf{R}_0(t')}{(1 - \mathbf{n}(t') \cdot \boldsymbol{\beta}(t')) |\mathbf{x} - \mathbf{x}_0(t')|}\end{aligned}\quad (\text{A1.1.14})$$

を採用し、これを以後 Liénard-Wiechert ポテンシャルと呼ぶことにする。電位とベクトルポテンシャルにこれを書き換えるには、 $\mathbf{R}$  を次のように書き換える。

$$\mathbf{R}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{R}_0(t) \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0(t)) \rightarrow \begin{cases} -\frac{e}{\varepsilon_0} \dot{\mathbf{x}}_0(t') \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0(t')) \\ -\frac{c_{\text{light}}^2}{\varepsilon_0} \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0(t')) \end{cases}$$

これに対応する Liénard-Wiechert ポテンシャルは以下の通り。

$$\begin{cases} \mathbf{A}(\mathbf{x}, t) = -\frac{\mu_0 e}{4\pi} \frac{1}{(1 - \mathbf{n}(t') \cdot \boldsymbol{\beta}(t'))} \frac{\dot{\mathbf{x}}_0(t')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0(t')|} \\ \varphi(\mathbf{x}, t) = -\frac{e}{4\pi\varepsilon_0} \frac{1}{(1 - \mathbf{n}(t') \cdot \boldsymbol{\beta}(t'))} \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0(t')|} \end{cases}\quad (\text{A1.1.15})$$

このポテンシャルは運動している電子の作る(その電子のいる点を除いたところでのみ意味を持つ)ポテンシャルである。このポテンシャルをもとに電磁場を導き出すことができる。

## A1.2 Liénard-Wiechert 場

電磁場の Liénard-Wiechert ポテンシャルは

$$\begin{cases} \mathbf{A}(\mathbf{x}, t) = -\frac{\mu_0 e}{4\pi} \frac{1}{(1 - \mathbf{n}(t') \cdot \boldsymbol{\beta}(t'))} \frac{\dot{\mathbf{x}}_0(t')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0(t')|} \\ \varphi(\mathbf{x}, t) = -\frac{e}{4\pi\varepsilon_0} \frac{1}{(1 - \mathbf{n}(t') \cdot \boldsymbol{\beta}(t'))} \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0(t')|} \end{cases}\quad (\text{A1.1.15})$$

であった。これを電磁場の定義に適用する。以下詳細な導出を述べる。

電場の定義に Liénard-Wiechert ポテンシャルを導入すれば、

$$\begin{aligned}\mathbf{E}(\mathbf{x}, t) &= -\nabla\varphi(\mathbf{x}, t) - \partial_t \mathbf{A}(\mathbf{x}, t) \\ &= \frac{e}{4\pi\varepsilon_0} \nabla \left( \frac{1}{\kappa(\mathbf{x}, t')} \frac{1}{R(\mathbf{x}, t')} \right) + \frac{e}{4\pi\varepsilon_0 c} \partial_t \left( \frac{1}{\kappa(\mathbf{x}, t')} \frac{\boldsymbol{\beta}(t')}{R(\mathbf{x}, t')} \right)\end{aligned}\quad (\text{A1.2.1})$$

ここで、



$$\begin{cases} R(\mathbf{x}, t') = |\mathbf{x} - \mathbf{x}_0(t')| \\ \kappa(\mathbf{x}, t') = 1 - \mathbf{n}(t') \cdot \boldsymbol{\beta}(t') \end{cases}$$

であったことに留意する。 $(\kappa R)^{-1}$ は $x$ と $t'(x)$ の関数であるとみなせるので

$$\nabla \left( \frac{1}{\kappa(\mathbf{x}, t')} \frac{1}{R(\mathbf{x}, t')} \right) = \nabla \left( \frac{1}{\kappa(\mathbf{x}, t')} \frac{1}{R(\mathbf{x}, t')} \right)_{t'} + (\nabla t') \partial_{t'} \left( \frac{1}{\kappa(\mathbf{x}, t')} \frac{1}{R(\mathbf{x}, t')} \right)_{\mathbf{x}}$$

熱力学風に変数を固定して偏微分を計算することを括弧の外に添え字をつけることで表現することにする。以後の計算で非常に有用になる $t'$ の導関数を導いておく。

$t' = t - R/c$  ( $= t - |\mathbf{x} - \mathbf{x}_0(t')|/c$ )なので

$$\begin{aligned} \partial_{t'} t' &= 1 - \frac{1}{c} \partial_{t'} R = 1 - \frac{1}{c} \frac{(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) \cdot (-\dot{\mathbf{x}}_0 \partial_{t'})}{R} = 1 + \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\beta} \partial_{t'} \\ \Leftrightarrow \partial_{t'} t' &= \frac{1}{1 - \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\beta}} = \frac{1}{\kappa} \quad \left( \because n(t') \equiv \frac{\mathbf{x} - \mathbf{x}_0}{R} = \frac{\mathbf{x} - \mathbf{x}_0}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0|} \right) \end{aligned}$$

また、 $\partial_x t'$ は

$$\begin{aligned} \partial_x t' &= -\frac{1}{c} \partial_x R = -\frac{1}{c} \partial_x |\mathbf{x} - \mathbf{x}_0(t')| \\ &= -\frac{1}{c} \frac{(x - x_0)(1 - \dot{x}_0 \partial_x t') + (y - y_0)(-\dot{y}_0 \partial_x t') + (z - z_0)(-\dot{z}_0 \partial_x t')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0|} \\ &= -\frac{1}{c} \frac{(x - x_0)}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0|} + \frac{1}{c} \frac{(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) \cdot \mathbf{x}_0}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0|} \partial_x t' \end{aligned}$$

と計算できるため、 $y, z$ 成分をふやして、

$$\begin{aligned} \nabla t' &= -\frac{1}{c} \frac{\mathbf{x} - \mathbf{x}_0}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0|} + \frac{1}{c} \frac{(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) \cdot \mathbf{x}_0}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0|} \nabla t' = -\frac{1}{c} \mathbf{n}(t') + (\mathbf{n}(t') \cdot \boldsymbol{\beta}(t')) \nabla t' \\ \nabla t' &= -\frac{1}{c} \frac{\mathbf{n}}{1 - \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\beta}} = -\frac{1}{c} \frac{\mathbf{n}}{\kappa} \end{aligned}$$

である。このあたりで電場の計算に戻ることにする。ここまでの計算を電場の式に代入することで以下の計算まで進むことができる。

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}(\mathbf{x}, t) &= \frac{e}{4\pi\epsilon_0} \nabla \left( \frac{1}{\kappa R} \right) + \frac{e}{4\pi\epsilon_0 c} \partial_{t'} \left( \frac{\boldsymbol{\beta}}{\kappa R} \right) \\
&= \frac{e}{4\pi\epsilon_0} \nabla \left( \frac{1}{\kappa R} \right)_{t'} + \frac{e}{4\pi\epsilon_0} (\nabla t') \partial_{t'} \left( \frac{1}{\kappa R} \right)_x \\
&\quad + \frac{e}{4\pi\epsilon_0 c} \boldsymbol{\beta} (\partial_{t'} t') \partial_{t'} \left( \frac{1}{\kappa R} \right)_x + \frac{e}{4\pi\epsilon_0 c} \frac{1}{\kappa R} (\partial_{t'} t') \dot{\boldsymbol{\beta}} \\
&= \frac{e}{4\pi\epsilon_0} \nabla \left( \frac{1}{\kappa R} \right)_{t'} - \frac{e}{4\pi\epsilon_0 c} \frac{\mathbf{n} - \boldsymbol{\beta}}{\kappa} \partial_{t'} \left( \frac{1}{\kappa R} \right)_x + \frac{e}{4\pi\epsilon_0 c} \frac{\dot{\boldsymbol{\beta}}}{\kappa^2 R}
\end{aligned}$$

あとの問題は $(\kappa R)^{-1}$ の導関数であるが、これもまた磁場を計算するときにご利用できるので別個に丁寧に計算してみよう。

$$\partial_{t'} \frac{1}{\kappa(\mathbf{x}, t') R(\mathbf{x}, t')} = - \frac{\partial_{t'}(\kappa R)}{\kappa^2 R^2}$$

$$\begin{aligned}
\partial_{t'} R &= \partial_{t'} |\mathbf{x} - \mathbf{x}_0(t')| \\
&= -\mathbf{n} \cdot \dot{\mathbf{x}}_0 = -c\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\beta}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\partial_{t'}(\kappa)_x \\
&= \partial_{t'} \left( 1 - \frac{\mathbf{R} \cdot \boldsymbol{\beta}}{R} \right) \\
&= - \frac{(-\dot{\mathbf{x}}_0)R - \mathbf{R}(-\mathbf{n} \cdot \dot{\mathbf{x}}_0)}{R^2} \cdot \boldsymbol{\beta} - \frac{\mathbf{R} \cdot \dot{\boldsymbol{\beta}}}{R} \\
&= \frac{c\boldsymbol{\beta}^2 - c(\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\beta})^2}{R} - \mathbf{n} \cdot \dot{\boldsymbol{\beta}}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= - \frac{(\partial_{t'} \kappa)R + \kappa(\partial_{t'} R)}{\kappa^2 R^2} \\
&= - \frac{c\boldsymbol{\beta}^2 - c(\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\beta})^2 - (\mathbf{n} \cdot \dot{\boldsymbol{\beta}})R + \kappa(-c\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\beta})}{\kappa^2 R^2} \\
&= - \frac{c\boldsymbol{\beta}^2 - c(\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\beta})^2 - \kappa c\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\beta}}{\kappa^2 R^2} + \frac{\mathbf{n} \cdot \dot{\boldsymbol{\beta}}}{\kappa^2 R}
\end{aligned}$$

また空間についての微分を用意しておこう。

$$\begin{aligned}
\partial_x \frac{1}{\kappa(\mathbf{x}, t') R(\mathbf{x}, t')} &= - \frac{\partial_x(\kappa R)}{\kappa^2 R^2} \\
&= - \frac{(\partial_x \kappa)R + \kappa(\partial_x R)}{\kappa^2 R^2} \\
&= \left[ \frac{(\boldsymbol{\beta} - (\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\beta})\mathbf{n}) - \kappa\mathbf{n}}{\kappa^2 R^2} \right]_x
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\partial_x(\kappa)_{t'} &= \partial_x(1 - \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\beta}) = -\partial_x(\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\beta}) \\
&= -\partial_x \left( \frac{\mathbf{x} - \mathbf{x}_0(t')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0(t')|} \cdot \boldsymbol{\beta}(t') \right) \\
&= - \frac{\boldsymbol{\beta}_x R - (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0(t')) \cdot \boldsymbol{\beta}(t') \partial_x R}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0(t')|^2} \\
&= \left[ - \frac{\boldsymbol{\beta} - (\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\beta})\mathbf{n}}{R} \right]_x
\end{aligned}$$

一応の計算道具は揃ったので計算を進めると、

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}(\mathbf{x}, t) &= \frac{e}{4\pi\epsilon_0} \nabla \left( \frac{1}{\kappa R} \right) + \frac{e}{4\pi\epsilon_0 c} \frac{\dot{\boldsymbol{\beta}}}{\kappa^2 R} - \frac{e}{4\pi\epsilon_0 c} \frac{\mathbf{n} - \boldsymbol{\beta}}{\kappa} \partial_{t'} \left( \frac{1}{\kappa R} \right) \\
&= \frac{e}{4\pi\epsilon_0} \frac{(\boldsymbol{\beta} - (\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\beta}) \mathbf{n}) - \kappa \mathbf{n}}{\kappa^2 R^2} + \frac{e}{4\pi\epsilon_0 c} \frac{\dot{\boldsymbol{\beta}}}{\kappa^2 R} \\
&\quad - \frac{e}{4\pi\epsilon_0 c} \frac{\mathbf{n} - \boldsymbol{\beta}}{\kappa} \left( \frac{-c\boldsymbol{\beta}^2 + c(\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\beta})^2 + \kappa c \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\beta}}{\kappa^2 R^2} + \frac{\mathbf{n} \cdot \dot{\boldsymbol{\beta}}}{\kappa^2 R} \right) \\
&= -\frac{e}{4\pi\epsilon_0 c} \frac{\mathbf{n} \cdot \dot{\boldsymbol{\beta}} (\mathbf{n} - \boldsymbol{\beta}) - \kappa \dot{\boldsymbol{\beta}}}{\kappa^3 R} \\
&\quad - \frac{e}{4\pi\epsilon_0 c} \frac{(-c\boldsymbol{\beta}^2 + c(\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\beta})^2 + \kappa c \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\beta})(\mathbf{n} - \boldsymbol{\beta}) - \kappa c ((\boldsymbol{\beta} - (\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\beta}) \mathbf{n}) - \kappa \mathbf{n})}{\kappa^3 R^2}
\end{aligned}$$

各項の分子は相当複雑な形をしているが、次のように変形して簡単化できる。まずは第1項の分子について

$$\begin{aligned}
\mathbf{n} \cdot \dot{\boldsymbol{\beta}} (\mathbf{n} - \boldsymbol{\beta}) - \kappa \dot{\boldsymbol{\beta}} &= \mathbf{n} \cdot \dot{\boldsymbol{\beta}} (\mathbf{n} - \boldsymbol{\beta}) - (1 - \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\beta}) \dot{\boldsymbol{\beta}} \\
&= (\mathbf{n} \cdot \dot{\boldsymbol{\beta}}) (\mathbf{n} - \boldsymbol{\beta}) - (\mathbf{n} \cdot (\mathbf{n} - \boldsymbol{\beta})) \dot{\boldsymbol{\beta}} \\
&= \mathbf{n} \times (\mathbf{n} - \boldsymbol{\beta}) \times \dot{\boldsymbol{\beta}}
\end{aligned}$$

とわりとすっきりした形に変形することができ、また第2項の分子を同様に変形していくと次のようになる。

$$\begin{aligned}
&(-\boldsymbol{\beta}^2 + (\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\beta})^2 + \kappa \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\beta})(\mathbf{n} - \boldsymbol{\beta}) - \kappa ((\boldsymbol{\beta} - (\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\beta}) \mathbf{n}) - \kappa \mathbf{n}) \\
&= (-\boldsymbol{\beta}^2 + (\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\beta})^2 + (1 - \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\beta})(\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\beta}))(\mathbf{n} - \boldsymbol{\beta}) \\
&\quad - \kappa \{ (\boldsymbol{\beta} - (\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\beta}) \mathbf{n}) - (1 - \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\beta}) \mathbf{n} \} \\
&= \{ (\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\beta}) - \boldsymbol{\beta}^2 \} (\mathbf{n} - \boldsymbol{\beta}) - \kappa (\boldsymbol{\beta} - \mathbf{n}) \\
&= \{ (\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\beta}) - \boldsymbol{\beta}^2 \} (\mathbf{n} - \boldsymbol{\beta}) - c(1 - \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\beta})(\boldsymbol{\beta} - \mathbf{n}) \\
&= \{ (\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\beta}) - \boldsymbol{\beta}^2 + (1 - \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\beta}) \} (\mathbf{n} - \boldsymbol{\beta}) \\
&= (1 - \boldsymbol{\beta}^2) (\mathbf{n} - \boldsymbol{\beta})
\end{aligned}$$

かなり遠回りな計算ばかりになってしまったがようやく電場の計算が完了した。

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}, t) = -\frac{e}{4\pi\epsilon_0 c} \frac{\mathbf{n} \times (\mathbf{n} - \boldsymbol{\beta}) \times \dot{\boldsymbol{\beta}}}{\kappa^3 R} - \frac{e}{4\pi\epsilon_0} \frac{(1 - \boldsymbol{\beta}^2) (\mathbf{n} - \boldsymbol{\beta})}{\kappa^3 R^2} \quad (\text{A1.2.1})$$

磁場についても同様の手順を経て

$$\begin{aligned}
\mathbf{B}(\mathbf{x}, t) &= \nabla \times \mathbf{A} \\
&= \frac{\mathbf{n}}{c_{\text{light}}} \times \left[ -\frac{e}{4\pi\epsilon_0 c_{\text{light}}} \frac{\mathbf{n} \times (\mathbf{n} - \boldsymbol{\beta}) \times \dot{\boldsymbol{\beta}}}{\kappa^3 R} - \frac{e}{4\pi\epsilon_0} \frac{(1 - \boldsymbol{\beta}^2)(\mathbf{n} - \boldsymbol{\beta})}{\kappa^3 R^2} \right] \\
&= \frac{\mathbf{n}}{c_{\text{light}}} \times \mathbf{E} \tag{A1.2.2}
\end{aligned}$$

とできる。ただし、 $R(\mathbf{x}, t') = |\mathbf{x} - \mathbf{x}_0(t')|$ ,  $\kappa(\mathbf{x}, t') = 1 - \mathbf{n}(t') \cdot \boldsymbol{\beta}(t')$ である。真空中を伝搬する電磁波の電場と磁場が直交するというのは磁場の計算結果から明らかである。今得られた電場の考察を簡単に行っておこう。磁場については電界とダイレクトに関係つけられているので電場で述べたことがそのまま磁場にも通用する。電場  $R^{-2}$  の項は電子の速度が低速になり  $|\boldsymbol{\beta}| \rightarrow 0$  となると Coulomb の静電場の書式に完全に一致する。ゆえにこの項は静電場を一般化した項であるとみなすことができる。

### A1.3 制動放射によるエネルギー放射

前節で得られた電磁場は  $R^{-2}$  と  $R^{-1}$  で依存するフィールドに分離できる。前者は電子から離れるほど、影響が弱まる。一方、残された  $R^{-1}$  は遠距離でも相互作用可能で輻射に関わる項である。理由は Poynting ベクトル  $\mathbf{P}$  を考えればわかる。Poynting ベクトルは

$$\mathbf{P} = \mu_0^{-1} \mathbf{E} \times \mathbf{B} \tag{A1.3.1}$$

と定義されている。上で求めた電磁場をこの式に代入すれば、 $R^{-2}, R^{-3}, R^{-4}$  に比例した項を得る。運動している電子を中心に半径  $R$  の球面をとり、この球面を通過するエネルギーを考える。そうすると、 $R^{-3}, R^{-4}$  の項は  $R \rightarrow \infty$  で 0 となり  $R^{-2}$  の項のみ無限遠方で値を持つ。この  $R^{-2}$  の項を構成できるのは電場、磁場共に  $R^{-1}$  の項のみである。そのような理由で  $R^{-1}$  を持つ場のことを放射場と呼ぶことにする。

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{E}_{\text{Coulomb}} \equiv -\frac{e}{4\pi\epsilon_0} \frac{(1 - \boldsymbol{\beta}^2)(\mathbf{n} - \boldsymbol{\beta})}{\kappa^3 R^2} \\ \mathbf{B}_{\text{Coulomb}} \equiv \frac{\mathbf{n}}{c} \times \mathbf{E}_{\text{Coulomb}} \end{array} \right. \tag{A1.3.2-1}$$

$$\begin{cases} \mathbf{E}_{\text{radiation}} \equiv -\frac{e}{4\pi\epsilon_0 c} \frac{\mathbf{n} \times (\mathbf{n} - \boldsymbol{\beta}) \times \dot{\boldsymbol{\beta}}}{\kappa^3 R} \\ \mathbf{B}_{\text{radiation}} \equiv \frac{\mathbf{n}}{c} \times \mathbf{E}_{\text{radiation}} \end{cases} \quad (\text{A1.3.2-1})$$

では、放射にかかわる部分を使って、具体的な Poynting ベクトルを計算してみる。

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_{\text{radiation}}(\mathbf{x}, t) &= \frac{1}{\mu_0} \mathbf{E}_{\text{radiation}} \times \mathbf{B}_{\text{radiation}} \\ &= \frac{1}{c\mu_0} \mathbf{E}_{\text{radiation}} \times (\mathbf{n} \times \mathbf{E}_{\text{radiation}}) \\ &= \frac{1}{c\mu_0} (\mathbf{E}_{\text{radiation}}^2 \mathbf{n} - (\mathbf{E}_{\text{radiation}} \cdot \mathbf{n}) \mathbf{E}_{\text{radiation}}) \\ &= \frac{1}{c\mu_0} \mathbf{E}_{\text{radiation}}^2 \mathbf{n} \quad (\because \mathbf{E}_{\text{radiation}} \cdot \mathbf{n} = 0) \end{aligned} \quad (\text{A1.3.3})$$

先に定義した放射場の電場を代入すれば、

$$\mathbf{P}_{\text{radiation}}(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{c\mu_0} \left( \frac{e}{4\pi\epsilon_0 c} \right)^2 \frac{(\mathbf{n} \times (\mathbf{n} - \boldsymbol{\beta}) \times \dot{\boldsymbol{\beta}})^2}{\kappa^6 R^2} \mathbf{n} \quad (\text{A1.3.4})$$

Poynting ベクトルというのは、単位時間単位断面あたりエネルギー(エネルギーフロー)として認識されている。ゆえにある単位時間に微小立体角  $d\Omega$  方向へのエネルギーの流れを放射強度と言うことにして  $dI/d\Omega$  で書くことにする。  $t = t' + |\mathbf{x} - \mathbf{x}_0(t')|/c$  という関係があったことを思い出すと、  $t'$  は湧き出し点での時間、  $t$  は観測点(場の点)での時間であった。今述べた放射の定義では穴がある。それは  $dI$  というのは湧き出し点で測定されたエネルギーであるということであり Poynting ベクトルは観測点でのエネルギーフローであるということである。  $dt'$  の間に湧き出し点からエネルギー放射され、  $R = |\mathbf{x} - \mathbf{x}_0(t')|$  の半径の球の微小立体角  $d\Omega$  方向に、この点において  $dt$  の時間を費やして通過するものとする。するとエネルギー保存から次式が成立するであろう。

$$\begin{aligned} dI dt' &= \mathbf{P}_{\text{radiation}} \cdot \mathbf{n} R^2 d\Omega dt \quad , \quad dt' = (\partial_{t'} t) dt = \frac{1}{\kappa} dt \\ dI &= \kappa \mathbf{P}_{\text{radiation}} \cdot \mathbf{n} R^2 d\Omega \\ &= \frac{1}{c\mu_0} \left( \frac{e}{4\pi\epsilon_0 c} \right)^2 \frac{(\mathbf{n} \times (\mathbf{n} - \boldsymbol{\beta}) \times \dot{\boldsymbol{\beta}})^2}{\kappa^5} d\Omega \end{aligned} \quad (\text{A1.3.5})$$

これが電子から  $d\Omega$  の立体角方向に単位時間に放射されるエネルギーである。全方位への合

計エネルギーは立体角で積分すればよい。

反作用力を計算するためには電子が全方位へ放つエネルギーの式が必要であり、ゆえに(A1.3.5)式を立体角で積分する必要がある。ここではこの積分手法について詳細に解説する。まず、ベクトル演算を簡単にする。

$$\begin{aligned}
 \frac{dI}{d\Omega} &= \frac{1}{c\mu_0} \left( \frac{e}{4\pi\epsilon_0 c} \right)^2 \frac{(\mathbf{n} \times (\mathbf{n} - \boldsymbol{\beta})) \times \dot{\boldsymbol{\beta}}}{\kappa^5} \\
 &= \frac{1}{c\mu_0} \left( \frac{e}{4\pi\epsilon_0 c} \right)^2 \frac{[(\mathbf{n} \cdot \dot{\boldsymbol{\beta}})(\mathbf{n} - \boldsymbol{\beta}) - \{\mathbf{n} \cdot (\mathbf{n} - \boldsymbol{\beta})\} \dot{\boldsymbol{\beta}}]}{\kappa^5} \\
 &= \frac{1}{c\mu_0} \left( \frac{e}{4\pi\epsilon_0 c} \right)^2 \frac{[(\mathbf{n} \cdot \dot{\boldsymbol{\beta}})(\mathbf{n} - \boldsymbol{\beta}) - \kappa \dot{\boldsymbol{\beta}}]}{\kappa^5} \\
 &= \frac{1}{c\mu_0} \left( \frac{e}{4\pi\epsilon_0 c} \right)^2 \frac{(\mathbf{n} \cdot \dot{\boldsymbol{\beta}})^2 (1 - 2\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\beta}^2) - 2\kappa (\mathbf{n} \cdot \dot{\boldsymbol{\beta}})(\mathbf{n} \cdot \dot{\boldsymbol{\beta}} - \boldsymbol{\beta} \cdot \dot{\boldsymbol{\beta}}) + (\kappa \dot{\boldsymbol{\beta}})^2}{\kappa^5} \\
 &= \frac{1}{c\mu_0} \left( \frac{e}{4\pi\epsilon_0 c} \right)^2 \frac{(\mathbf{n} \cdot \dot{\boldsymbol{\beta}})^2 \{2\kappa - 1 + \boldsymbol{\beta}^2\} - 2\kappa (\mathbf{n} \cdot \dot{\boldsymbol{\beta}})(\mathbf{n} \cdot \dot{\boldsymbol{\beta}} - \boldsymbol{\beta} \cdot \dot{\boldsymbol{\beta}}) + (\kappa \dot{\boldsymbol{\beta}})^2}{\kappa^5} \\
 &= \frac{1}{c\mu_0} \left( \frac{e}{4\pi\epsilon_0 c} \right)^2 \frac{(\mathbf{n} \cdot \dot{\boldsymbol{\beta}})^2 (-1 + \boldsymbol{\beta}^2) + 2\kappa (\mathbf{n} \cdot \dot{\boldsymbol{\beta}})(\boldsymbol{\beta} \cdot \dot{\boldsymbol{\beta}}) + (\kappa \dot{\boldsymbol{\beta}})^2}{\kappa^5} \\
 &= \frac{1}{c\mu_0} \left( \frac{e}{4\pi\epsilon_0 c} \right)^2 \left\{ \frac{\dot{\boldsymbol{\beta}}^2}{\kappa^3} + \frac{2(\mathbf{n} \cdot \dot{\boldsymbol{\beta}})(\boldsymbol{\beta} \cdot \dot{\boldsymbol{\beta}})}{\kappa^4} - \frac{(\mathbf{n} \cdot \dot{\boldsymbol{\beta}})^2 (1 - \boldsymbol{\beta}^2)}{\kappa^5} \right\} \quad \because \kappa \equiv 1 - \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\beta}
 \end{aligned}$$

計算を進めるために座標系を導入する。ある瞬間の速度をz軸方向にとり、加速度を速度の方向とそれ以外に分解する。それ以外の成分をy方向にとれば加速度はy-z平面にとること

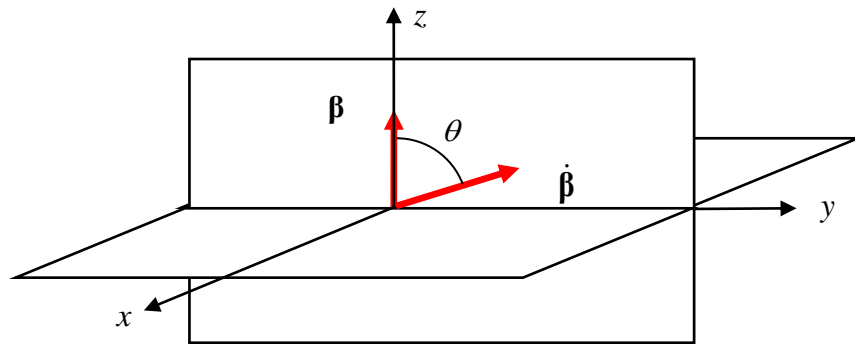


Fig.B-1 座標の取り方

ができるため、 $\boldsymbol{\beta}=(0,0,\beta)$ ,  $\dot{\boldsymbol{\beta}}=(\dot{\beta}_y,\dot{\beta}_z)$  と成分表示できる。方位を表す  $\mathbf{n}$  は、 $\mathbf{n}=(\cos\varphi\sin\theta,\sin\varphi\sin\theta,\cos\theta)$  で書く。これら具体的に用意した成分を利用して計算を行ってみる。

$$\begin{aligned}\frac{dI}{d\Omega} &= \frac{1}{c\mu_0} \left( \frac{e}{4\pi\epsilon_0 c} \right)^2 \left\{ \frac{\dot{\boldsymbol{\beta}}^2}{\kappa^3} + \frac{2(\mathbf{n}\cdot\dot{\boldsymbol{\beta}})(\boldsymbol{\beta}\cdot\dot{\boldsymbol{\beta}})}{\kappa^4} - \frac{(\mathbf{n}\cdot\dot{\boldsymbol{\beta}})^2(1-\beta^2)}{\kappa^5} \right\} \\ &= \frac{1}{c\mu_0} \left( \frac{e}{4\pi\epsilon_0 c} \right)^2 \left\{ \frac{\dot{\beta}_y^2 + \dot{\beta}_z^2}{(1-\beta\cos\theta)^3} + \frac{2\beta\dot{\beta}_z(\mathbf{n}\cdot\dot{\boldsymbol{\beta}})}{(1-\beta\cos\theta)^4} - \frac{(\mathbf{n}\cdot\dot{\boldsymbol{\beta}})^2(1-\beta^2)}{(1-\beta\cos\theta)^5} \right\}\end{aligned}$$

面倒な  $\mathbf{n}\cdot\dot{\boldsymbol{\beta}}$  は別個で考えてみる。

$$\begin{cases} \mathbf{n}\cdot\dot{\boldsymbol{\beta}} = \dot{\beta}_y \sin\varphi \sin\theta + \dot{\beta}_z \cos\theta \\ (\mathbf{n}\cdot\dot{\boldsymbol{\beta}})^2 = \dot{\beta}_y^2 \sin^2\varphi \sin^2\theta + 2\dot{\beta}_y\dot{\beta}_z \sin\varphi \sin 2\theta + \dot{\beta}_z^2 \cos^2\theta \end{cases}$$

立体角での積分は

$$\int d\Omega = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi d\theta \sin\theta = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{-1}^1 d(\cos\theta)$$

を意味するわけであるが特に  $\varphi$  での積分を最初に行うと、

$$\begin{cases} \int_0^{2\pi} d\varphi \mathbf{n}\cdot\dot{\boldsymbol{\beta}} = 2\pi \dot{\beta}_z \cos\theta \\ \int_0^{2\pi} d\varphi (\mathbf{n}\cdot\dot{\boldsymbol{\beta}})^2 = 2\pi \left( \frac{1}{2} \dot{\beta}_y^2 \sin^2\theta + \dot{\beta}_z^2 \cos^2\theta \right) \end{cases}$$

この式を考慮して全方位への放射量を求めると、

$$\begin{aligned}I &= \frac{e^2}{8\pi\epsilon_0 c} \int_{-1}^1 d(\cos\theta) \\ &\quad \left\{ \frac{\dot{\beta}_y^2 + \dot{\beta}_z^2}{(1-\beta\cos\theta)^3} + \frac{2\beta\dot{\beta}_z^2 \cos\theta}{(1-\beta\cos\theta)^4} - \frac{(1-\beta^2) \left( \frac{1}{2} \dot{\beta}_y^2 \sin^2\theta + \dot{\beta}_z^2 \cos^2\theta \right)}{(1-\beta\cos\theta)^5} \right\}\end{aligned}$$

あとは以下の公式にあてはめて計算すればよい。

$$\begin{aligned}\int_{-1}^1 d(\cos\theta) \frac{1}{(1-\beta\cos\theta)^3} &= \frac{2}{(1-\beta^2)^2} & \int_{-1}^1 d(\cos\theta) \frac{\sin^2\theta}{(1-\beta\cos\theta)^5} &= \frac{4}{3(1-\beta^2)^3} \\ \int_{-1}^1 d(\cos\theta) \frac{\cos\theta}{(1-\beta\cos\theta)^4} &= \frac{8\beta}{3(1-\beta^2)^3} & \int_{-1}^1 d(\cos\theta) \frac{\cos^2\theta}{(1-\beta\cos\theta)^5} &= \frac{2(1+5\beta^2)}{3(1-\beta^2)^3}\end{aligned}$$

詳細な計算は省くが、

$$\frac{d}{d(\cos \theta)} \frac{1}{(1 - \beta \cos \theta)^n} = \frac{n\beta}{(1 - \beta \cos \theta)^{n+1}}$$

$$\Leftrightarrow \int d(\cos \theta) \frac{1}{(1 - \beta \cos \theta)^{n+1}} = \frac{1}{n\beta(1 - \beta \cos \theta)^n} + \text{Const.}$$

と部分積分を組み合わせればそこまで複雑なテクニックを使わず導ける。

$$\begin{aligned} I &= \frac{e^2}{8\pi\epsilon_0 c} \left\{ \frac{2(\dot{\beta}_y^2 + \dot{\beta}_z^2)}{(1 - \beta^2)^2} + \frac{16\beta^2 \dot{\beta}_z^2}{3(1 - \beta^2)^3} - (1 - \beta^2) \left( \frac{2\dot{\beta}_y^2}{3(1 - \beta^2)^3} + \frac{2\dot{\beta}_z^2(1 + 5\beta^2)}{3(1 - \beta^2)^3} \right) \right\} \\ &= \frac{e^2}{8\pi\epsilon_0 c} \left\{ \frac{4\dot{\beta}_y^2}{3(1 - \beta^2)^2} + \frac{4\dot{\beta}_z^2}{3(1 - \beta^2)^3} \right\} \\ &= \frac{e^2}{6\pi\epsilon_0 c} \frac{(1 - \beta^2)\dot{\beta}_y^2 + \dot{\beta}_z^2}{(1 - \beta^2)^3} \\ &= \frac{e^2}{6\pi\epsilon_0 c} \frac{(1 - \beta^2)\dot{\beta}^2 \sin^2 \vartheta + \dot{\beta}^2 \cos^2 \vartheta}{(1 - \beta^2)^3} \\ &= \frac{e^2}{6\pi\epsilon_0 c} \frac{\dot{\beta}^2 - \beta^2 \dot{\beta}^2 \sin^2 \vartheta}{(1 - \beta^2)^3} \quad \because \begin{cases} \dot{\beta}_y = \dot{\beta} \sin \vartheta \\ \dot{\beta}_z = \dot{\beta} \cos \vartheta \end{cases} \\ &= \frac{e^2}{6\pi\epsilon_0 c} \frac{\dot{\beta}^2 - (\boldsymbol{\beta} \times \dot{\boldsymbol{\beta}})^2}{(1 - \beta^2)^3} \end{aligned}$$

あまりエレガントな計算ではないが求めていた公式を得ることができた。

$$\boxed{I = \frac{e^2}{6\pi\epsilon_0 c} \frac{\dot{\beta}^2 - (\boldsymbol{\beta} \times \dot{\boldsymbol{\beta}})^2}{(1 - \beta^2)^3}} \quad (\text{A1.3.6})$$



参考文献：

- [1] 牟田泰三 『電磁力学』 現代物理学叢書 (岩波書店)
- [2] エリ・デ・ランダウ、イエ・エム・リフシツ 場の古典論(原書第6版)理論物理学教程(恒藤敏彦、広重徹訳、東京図書株式会社、2005)
- [3] パノフスキー・フィリップス 新版 電磁気学 物理学叢書(林忠四郎、天野恒雄訳、吉岡書店、2002)

## A2. 相対論における運動方程式

本論文は、電子運動が光の速さに到達する領域を含むため、また方程式の型をある程度束縛するために特殊相対性理論の知識を読者に要求せねばならない。それは

1. 特殊相対性(共変性)原理
2. 光速不変の原理

と呼ばれるもので、一つ目はどんな実験をしても現象は同じものだという主張でそれを数学的に示したものが共変性と呼ばれるものであり、Lorentz 変換である。一方、二つ目は言葉の通り真空中の光の速さがどのような系でも一定値であることを言うもので Michelson と Moreley による実験で保障されている。そこで、本小節では、この論文を読む上で重要な特殊相対性理論の方程式を導出しながら列挙する。

### A2.1 時空の数学的構成と時空内の粒子運動

Einstein の時空理論は Maxwell の電磁理論を出発点に理論展開することが正統である。Maxwell 方程式を座標不変にする方法として、座標変換を Lorentz 変換とよばれるものに限定するという話をするためには最初に通らねばならない。しかしながら、座標変換に関しては、何かそういうものがあるという認識にとどめれば具体的に Lorentz 変換を知らなくても理論が展開できる。時空という概念を受け入れてもらえれば、電磁場から入るより粒子の話題を考察するほうが理解しやすいだろう。

そのような理由から、まず  $\mathbb{R}^3$  での運動方程式  $m\ddot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}$  を Minkowski 時空上の方程式に書き換えることを考える。Galileo が数学空間に座標という名の目盛を設定して以降、我々はあらゆる問題に盲目的に座標を設定するようになった。しかしながら、本来の物理空間にはそのようなものは用意されておらず、解析しやすいように人為的にセットされている。相対性理論はそういう意味でいえば目盛の選び方によらない、あるいは目盛を必要としないような物理理論である。標語を挙げるとすれば

(少なくとも古典)物理はアフィン空間 (affine space) 上で取り扱われなければならない。

ここで Minkowski 時空というのは(定値)Lorentz 計量  $g$  を持つ 4 次元アフィン空間  $A^4$  の

対  $(A^4, g)$  をいう。 [1,2]

**定義 1**<sup>[3]</sup>: 集合  $A$  と  $\mathbb{R}$  上の線形空間  $L$  および写像  $\varphi: A \times L \rightarrow A$  が与えられ次の性質を満たすとき  $A$  を  $L$  をモデルとする **アフィン空間** という。  $p \in A, \mathbf{u} \in L$  で  $\varphi(p, \mathbf{u}) = p + \mathbf{u}$  と書くとき

$$(i) \quad (p + \mathbf{u}) + \mathbf{v} = p + (\mathbf{u} + \mathbf{v})$$

$$(ii) \quad p + \mathbf{0} = p \text{ となる } \mathbf{0} \in L \text{ が存在する。}$$

$$(iii) \quad \text{各 } p \in A \text{ について、対応 } \mathbf{u} \mapsto p + \mathbf{u} \text{ は } L \text{ から } A \text{ への全単射を与える。}$$

また、2 つのアフィン空間の間の写像でアフィン構造を保つものを **アフィン写像** という。

今、Minkowski 時空上の点を  $x = (x^0, x^1, x^2, x^3) \equiv (ct, \mathbf{r})$  で書くことにする。  $c$  は光の速さである。この時空上に2つの事象  $P, Q$  をとるとき Minkowski 時空はアフィン空間に属するので  $(x^\mu)_P - (x^\mu)_Q$  という差を定義することができる。この差はアフィン空間の定義で述べたところの線形空間  $L$  内の元と言える。そこで  $P, Q$  の間隔を極限まで狭めて

$$dx^\mu \equiv (x^\mu)_{P \rightarrow Q} - (x^\mu)_Q \in L \quad (\text{A2.1.1})$$

を定義する。特殊相対性理論の世界では Minkowski 時空内の点を **世界点** という。2 つの世界点をつないで世界間隔を定義する。 **世界間隔** は  $\mathbb{R}^3$  の線形空間でいうところの長さにあたる概念であり、Lorentz 計量によって定義される。

**定義**: Lorentz 計量とは  $g: L \times L \rightarrow \mathbb{R}$  という写像であり、特に特殊相対性理論においては定値行列表示で次のように表わされる。

$$g = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad (\text{A2.1.2})$$

この Lorentz 計量を用いて(微小)世界間隔  $ds$  を以下のように定義する。

$$ds^2 \equiv g(dx, dx) = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = c^2 dt^2 - d\mathbf{r}^2 \quad (\text{A2.1.3})$$

ここに、上下に同じ添え字が付いている場合は

$$A_\mu B^\mu = \sum_\mu A_\mu B^\mu$$

というような計算をすると約束しておく。これを Einstein の規約と呼ぶ。また、Lorentz 計量を用いれば以下のように添え字の上下を入れ替える書き方ができる。

$$dx_\mu \equiv g_{\mu\nu} dx^\nu$$

ここで最も重要なことは、任意の慣性系において(A2.1.3)式は不変であることである(たとえば参考文献[4~6]を参照)。すなわち特殊相対性理論の適用範囲では世界間隔は不変(共変)的である。無数の慣性系の中から一つ基準として選びその系の原点における時間でもって固有時間  $\tau$  を定義する。つまり、

$$\begin{aligned} c^2 d\tau^2 &\equiv g(dx, dx) = c^2 dt^2 - d\mathbf{r} \\ \Leftrightarrow d\tau &= dt \sqrt{1 - \left(\frac{\dot{\mathbf{r}}}{c}\right)^2} = \frac{dt}{\gamma} \end{aligned} \quad (\text{A2.1.4})$$

Minkowski 時空の構成はだいたい用意できたので運動の記述に移る。まずは 4 次元に拡張された速度から定義する。4 次元速度  $w^\mu$  は

$$\begin{aligned} w &\equiv \frac{dx}{d\tau} = \frac{dt}{d\tau} \frac{dx}{dt} \\ &= (\gamma c_{\text{light}}, \gamma \dot{\mathbf{r}}) \in L \end{aligned} \quad (\text{A2.1.5})$$

で定義する。重要なのは 4 次元速度は線形空間  $L$  上のベクトルであることである。 $dx \in L$  を固有時間  $d\tau \in \mathbb{R}$  で割っているだけなのでベクトルの線形性よりこのことは自明である。

$\mathbb{R}^3$  における運動方程式  $d(m\dot{\mathbf{r}})/dt = \mathbf{F}$  を相対論的に書きなおしてみる。 $i = 1, 2, 3$  として

$$\left[ \frac{d}{dt} (m\dot{\mathbf{r}}) \right]^i = \frac{d\tau}{dt} \frac{d}{d\tau} (m\gamma w^i) = \frac{1}{\gamma} \frac{d}{d\tau} (m_0 w^i) = [\mathbf{F}]^i$$

と計算できる。ただし

$$m_0 \equiv \frac{m}{\gamma} = \sqrt{1 - \boldsymbol{\beta}^2} m \quad (\text{A2.1.6})$$

と置いており ( $\boldsymbol{\beta} = \mathbf{v}/c$ )、 $m_0$  はいわゆる静止質量と呼ばれるものである。さらに 4 次元運動量を

$$p^\mu \equiv m_0 w^\mu \quad (\text{A2.1.7})$$

で定義することで、運動方程式は  $K^i \equiv \gamma[\mathbf{F}]^i$  と置くことで

$$\boxed{\frac{dp^\mu}{d\tau} = K^\mu \in L} \quad (\text{A2.1.8})$$

の形に変形されることが類推される。空間成分は以上の導出により右辺の  $K^i$  の形が定まっているが時間成分については求まっていない。これは

$$\begin{aligned} \mathbf{F} \cdot \mathbf{u} &= \frac{d\mathbf{p}}{dt} \cdot \dot{\mathbf{r}} = \frac{d}{dt} \left( \frac{m_0 \dot{\mathbf{r}}}{\sqrt{1-\beta^2}} \right) \cdot \dot{\mathbf{r}} = \frac{d}{dt} \left( \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1-\beta^2}} \right) \\ &= \frac{d}{dt} (cp^0) = c \frac{d\tau}{dt} \frac{dp^0}{d\tau} = \frac{c}{\gamma} K^0 \end{aligned}$$

であることから定まる。このため4次元力は

$$K \equiv (\gamma \mathbf{F} \cdot \boldsymbol{\beta}, \gamma \mathbf{F}) \quad (\text{A2.1.9})$$

で書きかえられる。要するに相対論的な運動をするときには(A2.1.8)式に当てはまるような形に書き換えてやる必要がある。続いて電磁場を導入したい。

## A2.2 相対論における電磁波の扱い

Minkowski 時空では計量に具体的な行列が対応していた。(特殊)相対性理論のウリは電磁場の法則が座標変換に対して不変であるということである。まず電磁場の導入のために4次元ポテンシャル  $A$  というものを電磁場のスカラー・ベクトルポテンシャルを成分として

$$A \equiv \left( \frac{\varphi}{c}, \mathbf{A} \right) \in L \quad (\text{A2.2.1})$$

で定義して次のようなテンソルを考察する。

$$F \equiv (\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu) \partial_\mu \otimes \partial_\nu \in L \otimes L$$

これを電磁場テンソルと呼ぶ。 $\otimes$  はテンソル積で  $\{\partial_\mu\}$  は  $L$  の正規直交基底であり、演算として  $(\partial_0, \partial_1, \partial_2, \partial_3) = (\partial_{ct}, \nabla)$ 、また  $\partial^\mu \equiv g^{\mu\nu} \partial_\nu$  と定義して  $(\partial^0, \partial^1, \partial^2, \partial^3) = (\partial_{ct}, -\nabla)$  である。これを駆使すれば電界は

$$\begin{aligned} [\mathbf{E}]^i &= [-\nabla\varphi - \partial_i \mathbf{A}]^i = \partial^i (cA^0) - (c\partial^0) A^i \\ &= cF^{i0} \quad (i=1,2,3) \end{aligned} \quad (\text{A2.2.2})$$

であり、磁界は

$$[\mathbf{B}]^i = [\nabla \times \mathbf{A}]^i = \varepsilon^i{}_{jk} (-\partial^j) A^k \quad (\text{A2.2.3})$$

に  $\varepsilon^{\alpha\beta}_i$  をかけて  $\varepsilon^{\alpha\beta}_i \varepsilon^i_{jk} = \delta^\alpha_j \delta^\beta_k - \delta^\alpha_k \delta^\beta_j$  を適用すれば

$$\begin{aligned}\varepsilon^{\alpha\beta}_i [\mathbf{B}]^i &= \varepsilon^{\alpha\beta}_i \varepsilon^i_{jk} (-\partial^j) A^k \\ &= -(\delta^\alpha_j \delta^\beta_k - \delta^\alpha_k \delta^\beta_j) \partial^j A^k \\ &= -(\partial^\alpha A^\beta - \partial^\beta A^\alpha) = -F^{\alpha\beta}\end{aligned}$$

であり電磁場テンソルは確かに電磁場を表現できている。Lorentz 計量のように電磁場テンソルを行列のように書き下すと

$$F^{\mu\nu} = \begin{bmatrix} 0 & -E_x/c & -E_y/c & -E_z/c \\ E_x/c & 0 & -B_z & B_y \\ E_y/c & B_z & 0 & -B_x \\ E_z/c & -B_y & B_x & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{A2.2.4})$$

である。添え字  $\mu$  が行番号を、添え字  $\nu$  が列番号となるように並べている。この電磁場テンソルの代数で最も重要な性質は

$$F^{\mu\nu} = -F^{\nu\mu} \quad (\text{A2.2.5})$$

というように、添え字の順番を入れ替えると符号が正負逆転する性質である。このようなルールを満たすテンソルを反対称テンソルと呼ぶ。

これらを使って Lorentz 力を書き直すと

$$\begin{aligned}[q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B})]^i &= q[\mathbf{E}]^i + q\varepsilon^{ij}_k [\mathbf{v}]_j [\mathbf{B}]^k \\ &= qc_{\text{light}} F^{i0} + eF^{ij} [\mathbf{v}]_j = qF^{i\nu} \frac{dx_\nu}{dt}\end{aligned}$$

ただし、 $i=1,2,3$  であり  $\nu=1,2,3,4$  で和を取っていることには注意しなくてはならない。我々は 4 次元について考えているため(C.2.3)式を(C.1.6)式に代入してやらねばならない。

$$\begin{aligned}q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot \boldsymbol{\beta} &= q\mathbf{E} \cdot \boldsymbol{\beta} = qc_{\text{light}} F^{i0} \frac{[\mathbf{v}]_i}{c_{\text{light}}} \\ &= -qF^{i0} \frac{dx_i}{dt} = -qF^{\nu 0} \frac{dx_\nu}{dt} = qF^{0\nu} \frac{dx_\nu}{dt}\end{aligned}$$

であるために

$$\begin{aligned}K_{E.M.} &\equiv \left( \gamma qF^{0\nu} \frac{dx_\nu}{dt}, \gamma qF^{i\nu} \frac{dx_\nu}{dt} \right) \\ &= \left( qF^{0\nu} \frac{dx_\nu}{d\tau}, qF^{i\nu} \frac{dx_\nu}{d\tau} \right)\end{aligned}$$

つまり、

$$\boxed{K_{E.M.} = qF^{\mu\nu} \frac{dx_\nu}{d\tau} \partial_\mu \in L} \quad (\text{A2.2.6})$$

この式が、相対性理論における Lorentz 力である。(A2.1.5)式の速度を使って、

$$K_{E.M.}{}^\mu = qF^{\mu\nu} w_\nu$$

にさらに速度との Lorentz 内積を取ると、

$$w_\mu K_{E.M.}{}^\mu = 0 \quad (\text{A2.2.7})$$

が成立する。これは一般の外力でも成立する関係式で、(A2.1.9)式の力に内積を取っても

$$w_\mu K_{E.M.}{}^\mu = 0 \quad (\text{A2.2.8})$$

となることが示される。そのような意味で、上手く相対論的な枠組みに電磁力を変換できたといえる。

少し、一般化した議論をする。モデル空間  $L$  の双対空間  $L^*$  の基底  $\{dx^\mu\}$  も駆使すれば、この局所座標系で 2 つの計量

$$g \equiv g_{\mu\nu} dx^\mu \otimes dx^\nu \in L^* \otimes L^* \quad (\text{A2.2.9})$$

が定義できる。電磁場テンソルが今

$$F: L^* \rightarrow L: \omega = \omega_\mu dx^\mu \mapsto F(\bullet, \omega) \equiv F^{\mu\nu} \omega_\nu \partial_\mu \quad (\text{A2.2.10})$$

というような写像であるとみなし、同様に計量も

$$g: L \rightarrow L^*: v = v^\mu \partial_\mu \mapsto g(v, \bullet) = g_{\mu\nu} v^\mu dx^\nu = v_\nu dx^\nu \quad (\text{A2.2.11})$$

だと考え、さらに表記のために  $v^b \equiv g(v, \bullet)$  と書くことにする。

$$w = w^\mu \partial_\mu \in L \quad (\text{A2.2.12})$$

に対して

$$w^b \equiv g(w, \bullet) = g_{\mu\nu} w^\mu dx^\nu = w_\nu dx^\nu \in L^* \quad (\text{A2.2.13})$$

かつ、

$$F[\bullet, w^b] = F[\bullet, g(w, \bullet)] = F^{\mu\nu} w_\nu \partial_\mu \in L \quad (\text{A2.2.14})$$

と書けるために(A2.2.6)式と比較することで次のような表記が得られる。

$$\boxed{K_{E.M.} = qF[\bullet, w^b] \in L} \quad (\text{A2.2.15})$$

この式もやはり座標系にとらわれたような表記ではない。(A2.2.6)式が Minkowski 時空上での Lorentz 力であるとみなそう。さらにもう 1 ステップ進んだ、この Lorentz 力の表現 (A2.2.15)式を曲った時空である Lorentz 多様体に持ち上げた力であるとみなす。

### A2.3 電磁場の共変理論

歴史的に電磁場の共変性を導入するために相対性理論が生まれたことは既に述べた。電磁気学の上級概念が相対性理論なわけであるが、ここでは電磁気学の基礎法則である Maxwell 方程式の相対論化について考えてみる。先に述べたベクトルポテンシャル、電磁場テンソルに合わせて、4次元電流密度を以下のように定義する。

$$\mathbf{j} = (c\rho, \mathbf{j}) \quad (\text{A2.3.1})$$

そして、Maxwell 方程式は

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{E} &= \frac{\rho}{\varepsilon_0} & \nabla \times \mathbf{B} &= \mu_0 \mathbf{j} + \varepsilon_0 \mu_0 \partial_t \mathbf{E} \\ \nabla \times \mathbf{E} + \partial_t \mathbf{B} &= \mathbf{0} & \nabla \cdot \mathbf{B} &= \mathbf{0} \end{aligned} \quad (\text{A2.3.2})$$

という SI 単位系で書くことにする。難しいことは考えず、上 2 つの式をポテンシャルを用いた書き方で書いてみよう。意味が通じると感じて略記号を使ってきたが微分記号のベクトル化について述べておく。A2.1 節で述べたようなルールに従い、 $\partial_\mu = \partial/\partial x^\mu = (\partial_{ct}, \nabla)$  とする。このことに連動して  $\partial^\mu = g^{\mu\nu} \partial_\nu = (\partial_{ct}, -\nabla)$  である。まずは電場についての Gauss の法則から考える。 $c^2 = 1/\varepsilon_0 \mu_0$  に留意して、

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{E} &= \nabla \cdot (-\nabla \phi - \partial_t \mathbf{A}) = \sum_{i=1,2,3} \partial_i [\partial^i (cA^0) - c\partial^0 A^i] = \frac{1}{c\varepsilon_0} j^0 = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \\ \Leftrightarrow \sum_{i=1,2,3} \partial_i [\partial^i A^0 - \partial^0 A^i] &= \sum_{i=0,1,2,3} \partial_i [\partial^i A^0 - \partial^0 A^i] = \mu_0 j^0 \end{aligned} \quad (\text{A2.3.3})$$

最後の行の変形には

$$\partial^{i=0} A^0 - \partial^0 A^{i=0} = 0$$

を組み込んでいる。続いて Amperé の法則も似たような処方を行う。第  $i$  成分だけ取り出して

考えると外積は  $(\mathbf{A} \times \mathbf{B})^i = \sum_{j,k=1,2,3} \varepsilon^i{}_{jk} A^j B^k$  とできる ( $\varepsilon$  は Levi-Civita の記号) ので

$$\begin{aligned} (\nabla \times \mathbf{B})^i &= \sum_{j,k=1,2,3} \varepsilon^{ij}{}_{k} \partial_j B^k \\ &= \sum_{j,k=1,2,3} \varepsilon^{ij}{}_{k} \partial_j \left[ \sum_{\alpha,\beta=1,2,3} \varepsilon^k{}_{\alpha\beta} (-\partial^\alpha) A^\beta \right] \\ &= - \sum_{\substack{j,k,\alpha,\beta \\ =1,2,3}} \varepsilon^{ij}{}_{k} \varepsilon^k{}_{\alpha\beta} \partial_j \partial^\alpha A^\beta \\ &= \mu_0 j^i + c\varepsilon_0 \mu_0 \partial_0 [\partial^i (cA^0) - c\partial^0 A^i] \end{aligned} \quad (\text{A2.3.4})$$



である。ここで、Levi-Civita の記号には次のような公式がある(ベクトル 3 重積を用いる)。

$$\sum_{k=1,2,3} \varepsilon^{ij}_k \varepsilon^k_{\alpha\beta} = \delta^i_\alpha \delta^j_\beta - \delta^i_\beta \delta^j_\alpha \quad (\text{A2.3.5})$$

この式を使って、Amperé の法則(2.4.5)の右辺は

$$\begin{aligned} - \sum_{\substack{j,k,\alpha,\beta \\ =1,2,3}} \varepsilon^{ij}_k \varepsilon^k_{\alpha\beta} \partial_j \partial^\alpha A^\beta &= - \sum_{\substack{j,k,\alpha,\beta \\ =1,2,3}} (\delta^i_\alpha \delta^j_\beta - \delta^i_\beta \delta^j_\alpha) \partial_j \partial^\alpha A^\beta \\ &= \sum_{j=1,2,3} (-\partial_j \partial^i A^j + \partial_j \partial^j A^i) \end{aligned}$$

だから、

$$\begin{aligned} \sum_{j=1,2,3} (-\partial_j \partial^i A^j + \partial_j \partial^j A^i) - \partial_0 [\partial^i A^0 - \partial^0 A^i] &= \mu_0 j^i \\ \Leftrightarrow \sum_{j=0,1,2,3} \partial_j (\partial^j A^i - \partial^i A^j) &= \mu_0 j^i \end{aligned} \quad (\text{A2.3.6})$$

というように計算できる。正直これだけではありがたみを感じないが、ここで 2 つの法則を並べてみる。

$$\begin{aligned} \sum_{k=0,1,2,3} \partial_k [\partial^k A^0 - \partial^0 A^k] &= \mu_0 j^0 \\ \sum_{k=0,1,2,3} \partial_k (\partial^k A^i - \partial^i A^k) &= \mu_0 j^i \end{aligned}$$

眺めると  $0, i=1,2,3$  のところしか差がないことに気づく。ということは

$$\partial_\nu (\partial^\nu A^\mu - \partial^\mu A^\nu) = \mu_0 j^\mu$$

というように 2 つの式を一纏めにするのが賢いだろう。見やすさのため、電磁場テンソルを導入し適応することで、

$$\partial_\nu F^{\mu\nu} = \mu_0 j^\mu \quad (\text{A2.3.7})$$

を得る。この簡潔な方程式こそ Maxwell 方程式である。これは Maxwell 方程式の第 2 組というように呼ばれ、型の違う磁場に関する Gauss の法則と Faraday の電磁誘導の法則を一つにまとめた第 1 組が存在する。それは電磁場テンソルが満たすべき項等式、数学的には Jacobi の項等式に相当するが、

$$\partial^\lambda F^{\mu\nu} + \partial^\mu F^{\nu\lambda} + \partial^\nu F^{\lambda\mu} = 0 \quad (\text{2.4.11})$$

が物理的要請ではなく電磁場テンソルの定義から自動的に成立する。そういう意味で考えれば、(A2.3.7)式が真空中の Maxwell 方程式のすべてを統一した方程式といえる。

参考文献：

- [1] 砂田利一 『数学から見た連続体の力学と相対論』 岩波講座 物理の世界 (岩波書店、2005)
- [2] 新井朝雄 『物理学の数理 ニュートン力学から量子力学まで』 量子数理シリーズ 3 (丸善出版、2012)
- [3] 砂田利一 『数学から見た物体と運動』 岩波講座 物理の世界 (岩波書店、2007)
- [4] 牟田泰三 『電磁力学』 現代物理学叢書 (岩波書店)
- [5] エリ・デ・ランダウ、イエ・エム・リフシッツ 場の古典論(原書第6版) 理論物理学教程(恒藤敏彦、広重徹訳、東京図書株式会社、2005)
- [6] パノフスキー・フィリップス 新版 電磁気学 物理学叢書(林忠四郎、天野恒雄訳、吉岡書店、2002)

### A3. 相対論的量子論の中での放射の反作用

ここまでの放射の反作用はすべて古典物理として扱われてきた。周知の通り電子は 1/2 スピンという量子特性を持つので、本来は量子的な取り扱いがなされるべきである。本小節では電子の量子論モデルとして Dirac 方程式を採用し、これに放射の反作用を入れた方程式を導く

#### A3.1 Dirac 方程式

量子力学における主導原理 Schrödinger 方程式を相対論で取り扱うにはどのようにすれば良いのだろうか? Schrödinger 曰く、エネルギー保存の式

$$E = \frac{\mathbf{p}^2}{2m} + V(x) \quad (\text{A3.1.1})$$

の関係式に

$$E \mapsto i\hbar\partial_t, \quad \mathbf{p} \mapsto -i\hbar\nabla \quad (\text{A3.1.2})$$

の置き換え(演算子化)をしたのちに右から両辺に関数  $\psi$  をくっつけた

$$i\hbar\partial_t\psi(t, \mathbf{x}) = \left[ -\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 + V(\mathbf{x}) \right] \psi(t, \mathbf{x}) \quad (\text{A3.1.3})$$

が微小粒子の運動方程式(Schrödinger)である<sup>[1]</sup>。対論化するためにはエネルギーの式を共変にして

$$p_\mu p^\mu = \frac{E^2}{c^2} - \mathbf{p}^2 = m^2 c^2 \quad (\text{A3.1.4})$$

に演算子化を施してはどうだろうか? 本項では静止質量を  $m$  と書くことにする。Schrödinger 方程式と同じ手順で導かれる

$$\left( \partial_{ct}^2 - \nabla^2 + \frac{m^2 c^2}{\hbar^2} \right) \psi(x) = \left( \partial_\mu \partial^\mu + \frac{m^2 c^2}{\hbar^2} \right) \psi(x) = 0 \quad (\text{A3.1.5})$$

は Klein-Gordon 方程式と呼ばれる。しかし、これは良く言われるように負の確率密度を持つ<sup>[2]</sup>ことが導かれる。そこで Dirac はこの方程式を 1 階の連立微分方程式に分解することを考えた。波動関数を 4 成分 1 組にした  $\psi = {}^t[\psi_1, \psi_2, \psi_3, \psi_4]$  として以下を仮定する。

$$(i\hbar\gamma^\mu \partial_\mu - mc\mathbb{I}^{4\times 4})\psi = 0 \quad (\text{A3.1.6})$$

この方程式こそ Schrödinger 方程式を相対論化した波動方程式で、Dirac 方程式と呼ばれる  
 [1]。ここに  $\gamma^{0,1,2,3}$  は Clifford 代数と呼ばれる

$$\gamma^\mu \gamma^\nu + \gamma^\nu \gamma^\mu = 2g^{\mu\nu} \mathbb{I}^{4 \times 4} \quad (\text{A3.1.7})$$

を満たす  $4 \times 4$  行列で、ゆえに波動関数も 4 成分存在する。Clifford 代数を示すためには  
 Dirac 方程式に

$$i\hbar \gamma^\mu \partial_\mu + mc \mathbb{I}^{4 \times 4} \quad (\text{A3.1.8})$$

を左から作用させ、Klein-Gordon 方程式に一致することを条件とすればよい。この  $\gamma$  行列  
 は Pauli のスピン行列  $\sigma^{i=1,2,3}$  を用いることで

$$\gamma^0 = \begin{bmatrix} \mathbb{I}^{2 \times 2} & 0 \\ 0 & -\mathbb{I}^{2 \times 2} \end{bmatrix} \quad \gamma^{i=1,2,3} = \begin{bmatrix} 0 & \sigma^i \\ -\sigma^i & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{A3.1.9})$$

というような行列を選ぶことが可能である。これは必ずしもユニークな行列表現というわ  
 けではなく波動関数を選び直すことで自由度を持つ。しかしながらこの表現を選んだ場合、  
 方程式にスピン  $\sigma^{i=1,2,3}$  の情報が既に含まれていると読むことができ、ゆえに Dirac 方程式  
 はスピンを持つ、特にスピン 1/2 をもつ電子の方程式とみなされる。電子に限らず Dirac  
 方程式を満たし得る物理実態を Dirac 粒子と呼ぶことにする。

### A3.2 Dirac 粒子の電磁相互作用

解析力学によると、電磁相互作用を受けた電子(質量  $m$ 、電荷量  $-e$ )の正準運動量は

$$p^\mu = m_0 w^\mu - eA^\mu \quad (\text{A3.2.1})$$

であることが知られている。Schrödinger による演算子化法はこの正準パラメータを演算子  
 に書き換えるものであった。相対論的な共役ルール(A3.1.4)式を正準パラメータで書きかえ  
 れば今の場合

$$(p_\mu + eA_\mu)(p^\mu + eA^\mu) = m^2 c^2 \quad (\text{A3.2.2})$$

と書ける。これで Klein-Gordon 方程式を作るなら、

$$\left[ \left( \partial_\mu - \frac{ie}{\hbar} A_\mu \right) \left( \partial^\mu - \frac{ie}{\hbar} A^\mu \right) + \frac{m^2 c^2}{\hbar^2} \right] \psi(x) = 0 \quad (\text{A3.2.3})$$

となろう。記号的には

$$\partial_\mu \mapsto D_\mu \equiv \partial_\mu - \frac{ie}{\hbar} A_\mu \quad (\text{A3.2.4})$$

という演算子の取り換えをしたにすぎない。この置き換えをミニマル代入と呼んだりするのだが、Dirac 方程式にもこのミニマル代入を利用することができる。結果として電磁場と相互作用する電子の方程式は

$$\left[ i\hbar\gamma^\mu \left( \partial_\mu - \frac{ie}{\hbar} A_\mu \right) - mc \mathbb{I}^{4 \times 4} \right] \psi = 0 \quad (\text{A3.2.5})$$

である。この方程式は QED の摂動計算を行う上ですべての起点となる方程式であり大変重要な方程式である。一方で、この波動関数が導く確率流を用いて、荷電カレントは

$$j^\mu = -ec\bar{\psi}\gamma^\mu\psi \quad (\text{A3.2.6})$$

で定義される。ただし、 $\bar{\psi} = \psi^\dagger \gamma^0 = [\psi_1, \psi_2, \psi_3, \psi_4] \gamma^0$  である。分かりやすい言い方をすればこれは電流密度と等価であり、このような単一量子的電子からの電磁放射は Lorentz ゲージ  $\partial_\mu A^\mu = 0$  を付与した Maxwell 方程式

$$\partial_\nu \partial^\nu A^\mu = -e\mu_0 c \bar{\psi}\gamma^\mu\psi \quad (\text{A3.2.7})$$

を解くことで導かれる。

### A3.3 Dirac による放射の反作用~先進場の利用~

放射の反作用を導入するために、Dirac の考えた方法を再考しよう。電磁相互作用を含む電子の量子的方程式は(A3.2.5)式であることはすでに述べた。あらゆる電磁相互作用はこの方程式を起点にして Feynman ダイアグラムとして知られる方法で摂動計算される。この相互作用は電子のフォトンの吸収のみならず、フォトンの放出、つまり制動放射まで考慮できることは当時の段階で理解されていた。しかしながら、自己相互作用と呼ばれる電子が放ったフォトンが電子自身が受け取るようなプロセスを計算した場合に発散解を持つことも当時の段階で示されており、これを回避するための逃げ道として Dirac は 1938 年に Lorentz-Abraham-Dirac 方程式と呼ばれる式を生み出した。つまり、古典の運動方程式ではあるが、いくらか量子論的なセンスを含んだ電子モデルと言える。Dirac の電子モデルの最たる特徴は時間発展の可逆性の導入である。これについて述べよう。Maxwell 方程式

$$\partial_\nu \partial^\nu A^\mu(x) = \mu_0 j^\mu(x) \quad (\text{A3.3.1})$$

を解くことを考える。この方程式は次のようなプロセスを経て解を導ける<sup>[2-4]</sup>。まず Green 関数の定義を考える。

$$\partial_\nu \partial^\nu G(x, x') = \delta^4(x - x') \quad (\text{A3.3.2})$$

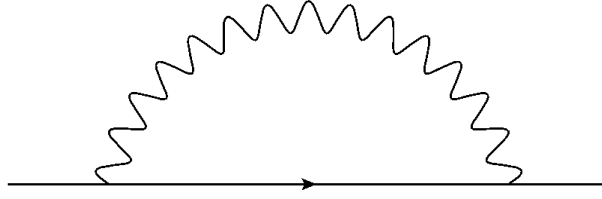


Fig. A3-1 自己相互作用ダイアグラム

実線が電子、波線が光子を意味し、古典的には電子の周りに Coulomb 場がまとわりついていることを QED 的に表現している。

この Green 関数の定義方程式を解くことで 4 次元 Minkowski 時空上の Green 関数は次のようにすればよいことが知られている。

$$G^{\pm}(x, x') = \frac{1}{4\pi|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \delta(x^0 - x'^0 \mp |\mathbf{x} - \mathbf{x}'|) \quad (\text{A3.3.3})$$

ここで、2 階の微分方程式であったので解が 2 種類手に入ったことに留意せねばならない。

(A3.3.2)式に  $j^{\nu}(x')$  を乗じて  $x'$  について積分することで、

$$\partial_{\nu} \partial^{\nu} \left[ \int_{\mathbb{R}^4} d^4 x' \mu_0 j^{\mu}(x') G^{\pm}(x, x') \right] = \mu_0 j^{\mu}(x) \quad (\text{A3.3.4})$$

を得る。(A3.3.1)式と(A3.3.4)式を見比べることで、4 次元ベクトルポテンシャルは

$$\begin{aligned} A^{\pm \mu}(x) &= \int_{\mathbb{R}^4} d^4 x' \mu_0 j^{\mu}(x') G^{\pm}(x, x') \\ &= \int_{\mathbb{R}^3} d^3 \mathbf{x}' \frac{\mu_0 j^{\nu}(x^0 \pm |\mathbf{x} - \mathbf{x}'|, \mathbf{x}')}{4\pi|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \end{aligned} \quad (\text{A3.3.5})$$

と得られたもののを、境界条件を付与して線形結合したものとなる。ここで、 $A_{\text{ret}} = A^{+}$  と書いて遅延場、 $A_{\text{adv}} = A^{-}$  と書いて先進場と名付ける。古典物理においては常識的に遅延場のみを電子から発生する電磁場として採用し、先進場は物理に適応しない要素とみなして切り捨ててきた。本論の第 2 章における理論、附録 A1 の理論はこのような計算を行い制動放射の公式を導いている。しかし、Dirac はここで次のように考えた。放射場(制動放射の場)  $A_{\text{radiation}}^{\mu}$  は場の湧き出しから切り離して表現できる場でなければならず、光子の自由伝搬と対応すべきで

$$\partial_{\nu} \partial^{\nu} A_{\text{radiation}}^{\mu}(x) = 0 \quad (\text{A3.3.6})$$

を満たす場であると仮定した。これを満たし得る場のうちの 하나가、

$$A_{\text{radiation}}{}^{\mu}(x) = \frac{A_{\text{ret}}{}^{\mu}(x) - A_{\text{adv}}{}^{\mu}(x)}{2} \quad (\text{A3.3.7})$$

であろう。Dirac も次の理由からこれを放射場と定義した。この方程式をわき出し項を用いて表現すると、

$$A_{\text{radiation}}{}^{\mu}(x) = \int_{\mathbb{R}^3} d^3\mathbf{x}' \frac{\mu_0}{4\pi|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|} \times \frac{1}{2} \begin{bmatrix} j^{\nu}(x^0 - |\mathbf{x}-\mathbf{x}'|, \mathbf{x}') \\ - \\ j^{\nu}(x^0 + |\mathbf{x}-\mathbf{x}'|, \mathbf{x}') \end{bmatrix} \quad (\text{A3.3.8})$$

と表現できる。場の名前通り、時間遅延と時間先進の湧きだしを含むわけであるが、

1. 電子の点で発散するような場ではない
2. 遅延場だけでなく先進場も利用しているので時間逆転の話題を持ちこめる

という利点がある。利点 1 は時間に関する Taylor 展開によって示される。Dirac 自身が特に強調したのは利点 2 の時間逆行性である<sup>[5]</sup>。相対論的に Maxwell 方程式を書き続けてきたが、これを考える上では時間と空間を別々に書いたほうが理解しやすい。(A3.3.6)式を通常の電磁気学での書き方で表現すれば

$$\left( \frac{1}{c^2} \partial_t^2 - \nabla^2 \right) A_{\text{radiation}}{}^{\mu}(t, \mathbf{x}) = 0 \quad (\text{A3.3.9})$$

である。この方程式は時間微分が 2 階微分であるので、

$$\left[ \frac{1}{c^2} (-\partial_t)^2 - \nabla^2 \right] A_{\text{radiation}}{}^{\mu}(t, \mathbf{x}) = 0 \quad (\text{A3.3.10})$$

と時間の逆発展に対しても解が成立せねばならない。それゆえ、遅延場の逆発展である先進場を導入するのは、まず数学的に要求される。QED において、電子と光子は Fock 空間と呼ばれる Hilbert 空間の拡張状態空間上の生成・消滅演算子として表現される。物理過程を限定できる場合はこれを利用して、いわゆる Feynman ダイアグラムを組むわけであるが、ここに相対論的量子力学から場の量子論への思想の切り替えが含まれる。すなわち、相対論的量子力学(1 粒子に対する Dirac 方程式)では時間逆行する負のエネルギー状態を持つ電子が存在したが、量子場ではこれを時間正方向に進む、正のエネルギーを持った陽電子(電子の反粒子: 反粒子は電荷量のみ符号が違う粒子)と読み替える。光子に関しては実際に観測できるものとして実場の仮定を取っているが、遅延場の光子を通常の光子とみなすのであれば、光子の反粒子なる先進場が同時に用意されなければ QED との対応が取れないことが Dirac の脳裏にはあったのであろうと推測される。一般に QED における自由伝搬する電磁場の演算子は規格化などを除けば

$$A^\mu(x) = \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3 2k^0} \sum_{\lambda=1,2} \left[ \begin{array}{c} \varepsilon_\lambda^\mu(\mathbf{k}) a_\lambda(\mathbf{k}) e^{-ik_\mu x^\mu} \\ + \\ \varepsilon_\lambda^{\mu*}(\mathbf{k}) a_\lambda^\dagger(\mathbf{k}) e^{ik_\mu x^\mu} \end{array} \right] \quad (\text{A3.3.11})$$

のスタイルを取る。ここで、 $\varepsilon_\lambda^\mu(\mathbf{k})$  は電磁場の偏光を表現するベクトルで、 $a_\lambda^\dagger(\mathbf{k}), a_\lambda(\mathbf{k})$  は状態  $\mathbf{k}$  のフォトンの生成・消滅を意味する Fock 空間上の演算子である。古典のイメージと演算子は

$$A_{\text{laser}}(x) \leftrightarrow \varepsilon_\lambda^\mu(\mathbf{k}) a_\lambda(\mathbf{k}) e^{-ik_\mu x^\mu} \quad (\text{A3.3.12-a})$$

$$A_{\text{radiation}}(x) \leftrightarrow \varepsilon_\lambda^{\mu*}(\mathbf{k}) a_\lambda^\dagger(\mathbf{k}) e^{ik_\mu x^\mu} \quad (\text{A3.3.12-b})$$

の関係があると思えば分かりやすいかもしれない。通常のセンスでいえば電子がレーザーを吸収することでフォトンが消滅させ、制動放射を発生させることでフォトンが発生する。時間発展方向を逆転して考えると、制動放射でフォトン吸収しレーザーに対応するものでフォトンが発生するとみなす。これが電磁理論の時間可逆性である。纏めると Dirac の考えは、Maxwell 方程式(A3.3.1)の解の一つの遅延場は

$$A_{\text{ret}}^\mu(x) = \frac{A_{\text{ret}}^\mu(x) + A_{\text{adv}}^\mu(x)}{2} + \frac{A_{\text{ret}}^\mu(x) - A_{\text{adv}}^\mu(x)}{2} \quad (\text{A3.3.13})$$

であり、反対称成分のみを放射場として取り出すべきだというものである。実際に Schwinger もこの放射場を定義として計算した場合に我々の知る放射の公式

$$\frac{dW}{dt} = m_0 c^2 \tau_0 \frac{\dot{\boldsymbol{\beta}}^2 - (\boldsymbol{\beta} \times \dot{\boldsymbol{\beta}})^2}{(1 - \boldsymbol{\beta}^2)^3} \quad (\geq 0) \quad (\text{2.1.1})$$

を得ることを示している。これらを妥当性として、(A3.3.7)式、あるいは(A3.3.8)式を放射場とみなす。

#### A3.4 放射の反作用の導入

電磁場は重ね合わせの可能なベクトル波動である。放射の反作用を考えると、レーザーの電磁場と電子からの放射場が重ねあわされる。相対論において電磁場は電磁場テンソルで定義され、たとえばレーザーの電磁場は

$$F_{\text{laser}}^{\mu\nu} = F^{\mu\nu}(A_{\text{laser}}) = \partial^\mu A_{\text{laser}}^\nu - \partial^\nu A_{\text{laser}}^\mu \quad (\text{A3.4.1})$$

で書ける。量子論において電磁場のポテンシャルは運動量のように振る舞う。放射のポテンシャルは電子から見ればその分の運動量を失うとみなすのが妥当であろう。つまり電子



に働くポテンシャルは

$$A_{\text{laser}} + A_{\text{reaction}} = A_{\text{laser}} - A_{\text{radiation}} \quad (\text{A3.4.2})$$

で与えられるものだと仮定すれば、これにより導かれる電磁場は

$$\begin{aligned} F^{\mu\nu}(A_{\text{laser}} + A_{\text{reaction}}) &= \partial^\mu (A_{\text{laser}}^\nu + A_{\text{reaction}}^\nu) - \partial^\nu (A_{\text{laser}}^\mu + A_{\text{reaction}}^\mu) \\ &= (\partial^\mu A_{\text{laser}}^\nu - \partial^\nu A_{\text{laser}}^\mu) + (\partial^\mu A_{\text{reaction}}^\nu - \partial^\nu A_{\text{reaction}}^\mu) \\ &= F_{\text{laser}}^{\mu\nu} + F_{\text{reaction}}^{\mu\nu} \end{aligned} \quad (\text{A3.4.3})$$

であり、古典論との対応がつく。そこで、電磁相互作用を含む Dirac 方程式には(A3.4.2)式の電磁ポテンシャルを採用することにする。

$$\left\{ i\hbar g_{\mu\nu} \gamma^\mu \left[ \partial^\nu - \frac{ie}{\hbar} (A_{\text{laser}}^\nu + A_{\text{reaction}}^\nu) A_\mu \right] - mc \mathbb{I}^{4 \times 4} \right\} \psi = 0 \quad (\text{A3.4.4})$$

これが、量子論的な電子の方程式である Dirac 方程式に放射の反作用を組み込んだ方程式である<sup>[6]</sup>。

### A3.5 摂動計算法

Dirac 方程式に放射の反作用を組み込むことは(A3.4.4)式で達成された。後は解き方の問題である。一つの解き方として Volkov の方法が挙げられるが、彼の方法は電磁場は外部印加のみの場合で利用できる方法で、今回の問題は電磁場の中に波動関数を含むので簡単にはこの方法を利用できない。そこで、いわゆる摂動計算を利用することで厳密な解に近づけることを考える。Dirac 方程式を解く前にまずは放射場について解析する。

$$A_{\text{radiation}}^\mu(x) = \int_{\mathbb{R}^3} d^3\mathbf{x}' \frac{\mu_0}{4\pi|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|} \times \frac{1}{2} \begin{bmatrix} j^\nu(x^0 - |\mathbf{x}-\mathbf{x}'|, \mathbf{x}') \\ - \\ j^\nu(x^0 + |\mathbf{x}-\mathbf{x}'|, \mathbf{x}') \end{bmatrix} \quad (\text{A3.3.8})$$

まずは、放射場の中の電流について注目する。Fourier 逆変換を駆使することで

$$\begin{aligned} & j^\nu(x^0 - |\mathbf{x}-\mathbf{x}'|, \mathbf{x}') - j^\nu(x^0 + |\mathbf{x}-\mathbf{x}'|, \mathbf{x}') \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk_0}{2\pi} \hat{j}^\nu(k_0, \mathbf{x}') e^{ik_0 x^0} (-i) \sin k_0 |\mathbf{x}-\mathbf{x}'| \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk_0}{2\pi i} \hat{j}^\nu(k_0, \mathbf{x}') e^{ik_0 x^0} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)!} (k_0 |\mathbf{x}-\mathbf{x}'|)^{2n-1} \end{aligned} \quad (\text{A3.5.1})$$

なる関係を得る。これを元の式に代入することで以下の放射の展開式を得る。

$$A_{\text{radiation}}^{\nu}(x) = -\frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\mathbb{R}^3} d^3\mathbf{x}' \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|^{2n-2}}{(2n-1)!} \partial_0^{2n-1} j^{\nu}(x^0, \mathbf{x}') \quad (\text{A3.5.2})$$

ただし、式をまとめるために

$$\partial_0^{\alpha} j^{\nu}(x^0, \mathbf{x}') = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk_0}{2\pi} (ik_0)^{\alpha} \hat{j}^{\nu}(k_0, \mathbf{x}') e^{ik_0 x^0} \quad (\text{A3.5.3})$$

という Fourier 逆変換を高周波数成分は無視できると仮定して利用している。この式は電子の点で特異点を持たないために安定となる上に、電子の存在範囲はある狭い領域であるので積分も有界値を取るであろうことが予想される。Dirac のいう電子の点で発散する場ではないということはこの式からも理解できる。ゆえに、波動関数が分かれば電流密度に焼き直し、放射場を計算することが可能となった。問題は Dirac 方程式の解の導き方である。

QED の計算でよくつかわれるものの中にプロパゲータ(伝搬関数)と呼ばれるものがある。これは数学的には考えている微分演算子に対する Green 関数で、Dirac 粒子である電子の場合 Green 関数を  $S(x, x')$  として

$$(i\hbar\gamma^{\mu}\partial_{\mu} - mc\mathbb{I}^{4\times 4})S(x, x') = \mathbb{I}^{4\times 4}\delta(x - x') \quad (\text{A3.5.4})$$

で定義される。これは物理的には名の通り、相互作用のない電子が  $x'$  から  $x$  まで移動することを意味する。ここで  $-e\gamma^{\mu}A_{\mu}(x')\psi(x')$  を乗じて  $x'$  で Minkowski 時空上で積分することと

$$(i\hbar\gamma^{\mu}\partial_{\mu} - mc\mathbb{I}^{4\times 4}) \left\{ \int_{\mathbb{R}^4} d^4x' S(x, x') \times [-e\gamma^{\mu}A_{\mu}(x')\psi(x')] \right\} = -e\gamma^{\mu}A_{\mu}(x)\psi(x) \quad (\text{A3.5.5})$$

を得る。ところで、相互作用の無い Dirac 方程式の解を  $\psi_{\text{free}}(x)$  とすれば

$$(i\hbar\gamma^{\mu}\partial_{\mu} - mc\mathbb{I}^{4\times 4})\psi_{\text{free}}(x) = 0 \quad (\text{A3.5.6})$$

が満たされるが、ここで(A3.5.5)式と(A3.5.6)式を足し合わせると

$$(i\hbar\gamma^{\mu}\partial_{\mu} - mc\mathbb{I}^{4\times 4}) \left\{ \begin{array}{c} \psi_{\text{free}}(x) \\ + \\ \int_{\mathbb{R}^4} d^4x' S(x, x') \times [-e\gamma^{\mu}A_{\mu}(x')\psi(x')] \end{array} \right\} = -e\gamma^{\mu}A_{\mu}(x)\psi(x) \quad (\text{A3.5.7})$$

という方程式を得るわけであるがここで

$$\psi(x) = \psi_{\text{free}}(x) + \int_{\mathbb{R}^4} d^4x' S(x, x') \times [-e\gamma^{\mu}A_{\mu}(x')\psi(x')] \quad (\text{A3.5.8})$$

とすれば、(A3.5.7)式は電磁相互作用を含む Dirac 方程式に一致する。それゆえ(A3.5.8)式は

$$\left[ i\hbar\gamma^\mu \left( \partial_\mu - \frac{ie}{\hbar} A_\mu \right) - mc \mathbb{I}^{4 \times 4} \right] \psi = 0 \quad (\text{A3.2.5})$$

の解になりうるが解の右辺の積分にも解自身を含む積分方程式である。加えて今は放射の反作用の電磁場にも波動関数を含む。それゆえに、厳密解を得ることは困難であることは述べた。そこで、一つの便宜として(A3.5.8)式に自身を代入させてみる。

$$\begin{aligned} \psi(x) &= \psi_{\text{free}}(x) + \int_{\mathbb{R}^4} d^4x' S(x, x') \times \left[ -e\gamma^\mu A_\mu(x') \psi(x') \right] \\ &= \psi_{\text{free}}(x) + \int_{\mathbb{R}^4} d^4x' S(x, x') \times \left[ -e\gamma^\mu A_\mu(x') \psi_{\text{free}}(x') \right] \\ &\quad + \int_{\mathbb{R}^4} d^4x' S(x, x') \times \left[ -e\gamma^\mu A_\mu(x') \right] \\ &\quad \quad \times \int_{\mathbb{R}^4} d^4x'' S(x', x'') \times \left[ -e\gamma^\mu A_\mu(x'') \psi(x'') \right] \end{aligned}$$

最後の項に波動関数が残っており問題が複雑化しただけのように見えるが、この計算は  $e^0, e^1, e^2$  をパラメータとした多項式のように見なせる。もちろん電子電荷の値は小さなものであるので高次になるほど無視できるであろう。これを繰り返し計算するスキームを考えてみる。

相互作用なしの場合の波動関数プロファイルとして  $\psi_{\text{free}}(x)$  を知っているとする。これは相互作用なしの Dirac 方程式を解くことで手に入る。この相互作用なしの波動関数を差し迫っての解と仮定し

$$\begin{aligned} \psi_{(1)}(x) &= \psi_{\text{free}}(x) - e \int d^4x' S(x, x') \\ &\quad \times g_{\mu\nu} \gamma^\mu \left[ A_{\text{laser}}^\nu(x') - A_{\text{radiation}}^{(0)\nu}(x') \right] \psi_{\text{free}}(x') \end{aligned} \quad (\text{A3.5.9})$$

を用意する。ここで放射場は自由伝搬の波動関数を用いて

$$A_{\text{radiation}}^{(0)\nu}(x) = -\frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\mathbb{R}^3} d^3\mathbf{x}' \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^{2n-2}}{(2n-1)!} \partial_0^{2n-1} j_{\text{free}}^\nu(x^0, \mathbf{x}') \quad (\text{A3.5.10})$$

$$j_{\text{free}}^\nu = -ec\bar{\psi}_{\text{free}}\gamma^\nu\psi_{\text{free}} \quad (\text{A3.5.11})$$

とする。これを使って補正された放射場を考える。電流密度を

$$j_{(1)}^\nu = -ec\bar{\psi}_{(1)}\gamma^\nu\psi_{(1)} \quad (\text{A3.5.12})$$

と書きなおし

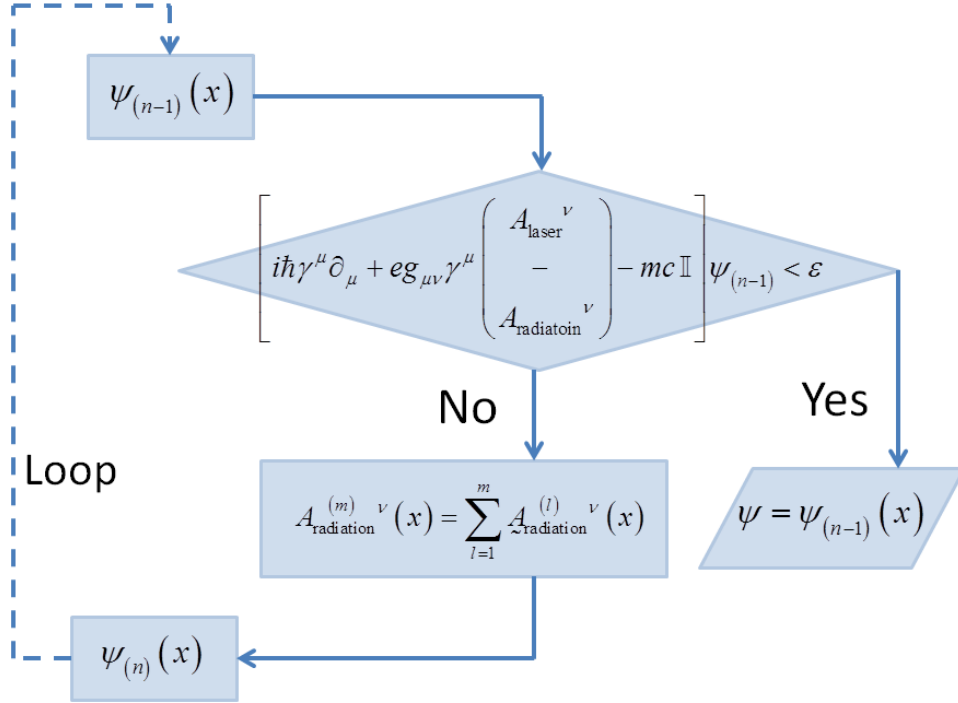


Fig. A3-2 Dirac 方程式計算スキーム

$$A_{\text{radiation}}^{(1)\nu}(x) = -\frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\mathbb{R}^3} d^3\mathbf{x}' \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|^{2n-2}}{(2n-1)!} \partial_0^{2n-1} j_{(1)}^\nu(x^0, \mathbf{x}') \quad (\text{A3.5.13})$$

というように修正する。この新しい放射場を用いて

$$\begin{aligned} \psi_{(2)}(x) = & \psi_{\text{free}}(x) - e \int d^4x' S(x, x') \\ & \times g_{\mu\nu} \gamma^\mu \left[ A_{\text{laser}}^\nu(x') - A_{\text{radiation}}^{(1)\nu}(x') \right] \psi_{(1)}(x') \end{aligned} \quad (\text{A3.5.14})$$

とすれば、 $\psi_{(1)}(x')$  よりも精密な解となるであろう。理想的にはこの操作を繰り返せばよい。

以降のアルゴリズムを一般的に書けば、 $m$  回目の波動関数を知っているときには、まずは電流密度を

$$j_{(m)}^\nu = -ec\bar{\psi}_{(m)}\gamma^\nu\psi_{(m)} \quad (\text{A3.5.15})$$

で定義した時に、放射場が

$$A_{\text{radiation}}^{(m)\nu}(x) = -\frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\mathbb{R}^3} d^3\mathbf{x}' \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|^{2n-2}}{(2n-1)!} \partial_0^{2n-1} j_{(m)}^\nu(x^0, \mathbf{x}') \quad (\text{A3.5.16})$$

であるので、一つ精度を上げた波動関数は

$$\begin{aligned} \psi_{(m+1)}(x) = & \psi_{\text{free}}(x) - e \int d^4x' S(x, x') \\ & \times g_{\mu\nu} \gamma^\mu \left[ A_{\text{laser}}{}^\nu(x') - A_{\text{radiation}}{}^\nu(x') \right] \psi_{(m)}(x') \end{aligned} \quad (\text{A3.5.17})$$

である。数値計算をするうえでは Fig. A3-2 のようにあらゆるパラメータを有限桁で打ち切るのが良いだろう。

参考文献：

- [1] P. A. M. Dirac, Proc. Roy. Soc. London A **117**, 610 (1928).
- [2] 牟田泰三 『電磁力学』 現代物理学叢書 (岩波書店)
- [3] エリ・デ・ランダウ、イエ・エム・リフシッツ 場の古典論(原書第6版) 理論物理学教程(恒藤敏彦、広重徹訳、東京図書株式会社、2005)
- [4] パノフスキー・フィリップス 新版 電磁気学 物理学叢書(林忠四郎、天野恒雄訳、吉岡書店、2002)
- [5] P. A. M. Dirac, Proc. Roy. Soc. London A **167**, 610 (1938).
- [6] K. SETO, H. NAGATOMO, J. KOGA and K. MIMA, Phys. Plasma **18**, 123101 (2011).

## 謝辞

素晴らしい研究テーマを与えていただいたこと、私が本研究を遂行するにあたり私の疑問に真摯に答え、研究の道筋を示して下さいだったこと、指導教官として終始変わらず懇篤なる御指導、ご鞭撻を賜りました大阪大学レーザーエネルギー学研究センターの長友英夫准教授に深厚な謝意を表します。

本研究を通じて細やかな御指導をしていただき、常に深い考察で物理の本質を捉え、理論の検討・考え方の提案など進むべき展望を御教示いただきました大阪大学レーザーエネルギー学研究センター三間名誉教授に心から謝意申し上げます。

本研究テーマが関連する領域の次世代のレーザー物理について基礎から理論・克服すべき問題等をご教示いただきました大阪大学レーザーエネルギー学研究センター中井光男教授に、この場を借りて深い謝意を表します。

本論文作成にあたり貴重な御指導とご助言をいただきました大阪大学レーザーエネルギー学研究センター村上匡且教授、大阪大学大学院工学研究科田中和夫教授、羽原英明准教授に謝意を表します。

また、共同研究者として日本原子力研究開発機構の甲賀ジェームス博士には製作した新モデルの議論、新たに提案された別の理論の提示など数えきれないほどの助力をいただきました。改めて感謝いたします。

大学院在学中、御指導・御教授いただきました大阪大学大学院工学研究科飯田敏行教授、上田良夫教授、兒玉了祐教授、宮永憲明教授、西村博明教授、實野孝久特任教授、坂和洋一准教授、村田勲准教授、加藤裕史准教授、大塚裕介助教、尾崎典雅助教、佐藤文信助教、佐野孝好助教、有川安信助教、砂原淳研究員、城崎知至准教授(広島大)、坂上仁志教授(核融合科学研究所)、田口俊弘教授(摂南大)に厚く感謝致します。

本研究を進めるにあたり、活発な議論、惜しみないご協力を頂きました同じ理論シミュレーショングループの博士前期課程2年前田悠佑氏、井岡侑祐氏に感謝致します。

素晴らしい計算機環境を提供して頂きましたレーザー研計算機室、ならびに大阪大学サイバーメディアセンターに感謝致します。

併せて本研究に関して多くのご助言を頂きました、大阪大学レーザーエネルギー学研究センターの皆様感謝致します。

最後になりましたが、研究生活を経済的、精神的に支えてくれた、家族に深く感謝致します。

## 研究業績

### 学術論文

・ Keita SETO, Hideo NAGATOMO, Kunioki MIMA, “Theoretical Study of Ultra-Relativistic Laser Electron Interaction in the Strong Radiation Reaction Regime”, Plasma and Fusion Research Volume 6, 2404099 (2011).

・ Keita SETO, Hideo NAGATOMO, James KOGA, and Kunioki MIMA, "Equation of motion with radiation reaction in ultrarelativistic laser-electron interactions", Physics of Plasmas" 18, 123101 (2011).

and also selected in Volume 11, Issue 1 of Virtual Journal of Ultrafast Science (January 2012).

・ Keita SETO, Hideo NAGATOMO, James KOGA and Kunioki MIMA, "Theoretical Study of Ultra-Relativistic Laser Electron Interaction with Radiation Reaction by Quantum Description", Plasma and Fusion Research Volume 7, 2404010 (2012).

### 国際会議における発表

・ Keita SETO, Hideo NAGATOMO, Kunioki MIMA “Theoretical Study of Ultra-Relativistic Laser Electron Interaction in the Strong Radiation Reaction Regime”, 20<sup>th</sup> International Toki Conference, P2-52, Toki, Japan (December, 2010).

・ K. Seto, H. Nagatomo, J. Koga, T. Taguchi, K. Mima, "Theoretical study of ultra-relativistic laser electron interaction with radiation reaction", Inertial Fusion Sciences and Applications (IFSA2011), P.Mo\_90 Bordeaux, France (September, 2011).

・ Keita SETO, Hideo NAGATOMO, James KOGA and Kunioki MIMA, "Theoretical Study of Ultra-Relativistic Laser Electron Interaction with Radiation Reaction by Quantum Description", 21<sup>st</sup> International Toki Conference(ITC-21), P1-96, Toki, Japan (December, 2011)



・ Keita SETO, Hideo NAGATOMO, Kunioki MIMA "Radiation Reaction in Ultra-relativistic Laser -Electron Interactions", 39th European Physical Society Conference on Plasma Physics 16th International Congress on Plasma Physics, P4. 096, Stockholm, Sweden, (July, 2012)

国内学会・シンポジウムなどにおける発表

・ 瀬戸慧大、長友英夫、三間罔興、『制動放射を考慮した相対論レーザープラズマ相互作用に関する理論研究』、日本物理学会 2010 年秋季大会、24aQA-7、大阪府立大学、2010 年 9 月

・ 瀬戸慧大、長友英夫、三間罔興、『制動放射を考慮した超相対論レーザー電子相互作用に関する理論研究』、日本物理学会 2011 年春季大会、26aGZ-2、新潟大学、2011 年 3 月

・ 瀬戸慧大、長友英夫、甲賀ジェームス、三間罔興、中井光男、畦地宏、『超相対論レーザー電子相互作用の下における放射の反作用モデル』、日本物理学会 2012 年春季大会、27aYE-6、関西学院大学、2012 年 3 月

国内学会・シンポジウムなどにおける発表（ポスター発表）

・ 瀬戸慧大、長友英夫、三間罔興、『超相対論レーザープラズマ相互作用における放射の反作用の影響』、プラズマ・核融合学会第 27 回年会、01P71、北海道大学、2010 年 12 月

・ 瀬戸慧大、甲賀ジェームス、長友英夫、三間罔興、『超相対論レーザーの元での放射の反作用の理論研究』、Plasma2011、24P166-B、石川県立音楽堂、2011 年 12 月

受賞歴

・ 瀬戸慧大、第 1 回若手優秀発表賞(プラズマ・核融合学会)、2010 年 12 月