OUKA
Osaka University Knowledge Archive

Title	反強磁性体に於る磁化の非定常運動について
Author(s)	鈴木, 英雄
Citation	大阪大学, 1960, 博士論文
Version Type	VoR
URL	https://hdl.handle.net/11094/2501
rights	
Note	

Osaka University Knowledge Archive : OUKA

https://ir.library.osaka-u.ac.jp/

Osaka University

反強磁性体における磁化の非定常運動 I-mT

鈴木英雄

§1 序論

常磁性体及び強磁性体に於ける磁化の非定常運動は現象論的にかなり研究されている。即ち前者では adiabatic rapid passage の場合の考察が，Bloch 方程式又はその修正されたものを問題とすることによって行われている。(*) 一方後者では電子計算機の磁気記憶装置の問題に関連して，磁場反転の際の磁化運動が，Landau-Lifshitz 方程式及びその変形の Gilbert 方程式を問題とすることによって議論されている。(**) これに反し反強磁性体の場合については未だこの様な研究は理論的にも実験的にもなされていない。しかし最近瞬間的な強磁場（数百 μs. で最高 750 kφ）を用いる反強磁性共鳴吸収の実験が S. Foner によってあいついで行われている。そこでこの論文では将来やがて行われるに違いない実験にさきがけて，$CuCl_2 \cdot 2H_2O$, MnF_2, Cr_2O_3 を対象にして，反強磁性体に於ける spin flopping の dynamical な運動を現象論的に考察した。

先ず簡単のために話を絶体零度の場合に限ることにする。先ず問題となるのは運動方程式をどの様な型に取るべきかということである。これは常磁性体及び強磁性体でもかなり議論された問題で，現在，緩和効果を現象論的に取り入れた運動方程式としては Bloch 方程式とその修正されたもの，(***) 及び Landau-Lifshitz の方程式とその変形の Gilbert 方程式 (****) がよく用いられている。vector 方程式とみる限り，Landau-Lifshitz 型と Gilbert 型の相異は，単なる parameter の定義の相異に帰着する。一方反強磁性体では，共鳴吸収の実験は T. Nagamiya, C. Kittel によって独立に提唱された標準的な理論[2]によって良く説明されているが，やはり緩和効果を取り入れた運動方程式としては，Nagamiya-Kittel のそのを Bloch 型[4]又は Landau-Lifshitz 型[3]に拡張したものを用いている。ここでは絶体零度で磁化 vector の長さの変化がないことを考え合せ，微視的な議論することなしに，単に拡張された Landau-Lifshitz の式から出発することにする。即ち

(*) H. C. Torrey, Phys. Rev., 76, 1059 (1949).
G. Krüger and G. Laukien, Zeit. für Phys., 145, 456 (1956).
V. S. Grechishkin, Z. E. T. F., 34, 902 (1958).

(**) R. Kikuchi, J. Appl. Phys., 27, 1352 (1956).
P. R. Gildelte and K. Okima, J. Appl. Phys., 29, 529 (1958).

$$\dot{M}^{\pm} = \gamma [M^{\pm} \times H^{\pm}_{eff}] - \frac{\lambda}{M_0} [M^{\pm} \times [M^{\pm} \times H^{\pm}_{eff}]] \qquad (1.1)$$

ここに $M^{\pm}$ は部分格子磁化 vector, γ は磁気角運動量比, λ は現象論的な減衰定数, M_0 は $M^{\pm}$ の絶体値, $H^{\pm}_{eff}$ は $M^{\pm}$ に働く全有効磁場である。ここに有効磁場は

$$H^{\pm}_{eff} = H - AM^{\mp} - PM^{\pm} + \phi M^{\pm}, \qquad (1.2)$$

で与えられるものとする。H は外部磁場, $-AM^{\mp}$, $-PM^{\pm}$ はそれぞれ自分以内, 自分以外の部分格子からの交換磁場, $\phi M^{\pm}$ は異方性磁場を表わしている。今 x 軸を容易軸, y 軸を困難軸とすると, tensor ϕ の成分は次の如くとることができる。

$$\phi_x > \phi_y, \qquad \phi_z = 0 \qquad (1.3)$$

ここに交換磁場の自乗に比べて外部磁場の自乗は省略される程度, 即ち自発磁化の自乗に比べて誘発磁化の自乗が省略される程度であるとする。§2 ではこの仮定, 及び上記の物質では異方性磁場が交換磁場に比べてかなり小さいことを用いて方程式を簡単にする。更に運動は必ず一面内に起こることが期待されるので, 自発磁化のこの面からのはずれの成分の自乗は面内成分の自乗に比べて省略できるとした。§3, §4 では磁化の非定常運動の際の最高角速度が通常の反強磁性共鳴吸収の frequency に比べてかなり速い場合を詳しく, 遅い場合を簡単に考察する。前者では運動は次の二つのものの重ね合せとして描像される。即ち一つは殆どその長の平衡値をとりながら, 各位置で減衰振子の式に従って運動する部分であり, 他の一つは各位置でわずかずつ異る振動数をもつ微小振動の部分である。この描像がゆるされるためには, かける外部磁場の強さに制限が加わるが, 臨界磁場の程度の場合には上記の物質では大体この描像が成立することが分る。後者では運動は複雑である。しかし磁場のないときには, 速い場合でも, 大体の運動はやはり減衰振子の式で記述されることが分る。最後に §5 では γM_0 と λ の比を 1:10, 1:20 の二通りにとって, $CuCl_2 2H_2O$, MnF_2, Cr_2O_3 でどんなことが期待されるかを調べる。なお減衰振子の方程式の解析的な性質が Appendix で述べられる。

(***) F. Bloch, Phys. Rev., 70, 460 (1946).
Codrington, Olds and Tarr, Phys. Rev., 95, 807 (1954).

(****) L. D. Landau and E. M. Lifshitz, Phys. Z. Sowjet., 8, 153 (1935).
T. A. Gilbert, Phys. Rev., 100, 1243 (1955).
T. A. Gilbert and J. M. Kelly, A. I. E. E., New York, 253 (1955).

§2 絶体零度に於ける運動方程式

先ず部分格子磁化にmで書かれてゐる(1.1)を,

$$\mathbb{M}=\mathbb{M}^{+}+\mathbb{M}^{-},\quad \mathbb{M}'=\mathbb{M}^{+}-\mathbb{M}^{-}, \tag{2.1}$$

で定義されるM, M'の式に書きかえる。即ち

$$\begin{aligned}\dot{\mathbb{M}}=&\gamma[\mathbb{M}\times\mathbb{H}]+\frac{\gamma}{2}[\mathbb{M}\times\phi\mathbb{M}]+\frac{\gamma}{2}[\mathbb{M}'\times\phi\mathbb{M}']+\lambda[2\mathbb{H}-(A+P)\mathbb{M}+\phi\mathbb{M}]\\&-\frac{\lambda}{4M_0^2}\mathbb{M}\left[\mathbb{M}\cdot(2\mathbb{H}-(A+P)\mathbb{M}+\phi\mathbb{M})+(A-P)\mathbb{M}'^2+\mathbb{M}'\cdot\phi\mathbb{M}'\right]\\&-\frac{\lambda}{2M_0^2}\mathbb{M}'\left[\mathbb{M}'\cdot\mathbb{H}+\mathbb{M}'\cdot(\phi-P)\mathbb{M}\right],\end{aligned} \tag{2.2}$$

$$\begin{aligned}\dot{\mathbb{M}}'=&\gamma[\mathbb{M}'\times(\mathbb{H}-A\mathbb{M})]+\frac{\gamma}{2}[\mathbb{M}'\times\phi\mathbb{M}]+\frac{\gamma}{2}[\mathbb{M}\times\phi\mathbb{M}']+\lambda[\phi\mathbb{M}'+(A-P)\mathbb{M}']\\&-\frac{\lambda}{4M_0^2}\mathbb{M}'\left[\mathbb{M}\cdot(2\mathbb{H}-(A+P)\mathbb{M}+\phi\mathbb{M})+(A-P)\mathbb{M}'^2+\mathbb{M}'\cdot\phi\mathbb{M}'\right]\\&-\frac{\lambda}{2M_0^2}\mathbb{M}\left[\mathbb{M}'\cdot\mathbb{H}+\mathbb{M}'\cdot(\phi-P)\mathbb{M}\right],\end{aligned} \tag{2.3}$$

つぎに(1.1)は $\mathbb{M}^{\pm}$の大きさを変えない方程式であるから，明らかに次の関係が成立してゐる。

$$|\mathbb{M}^{\pm}|=M_0,\quad \mathbb{M}\cdot\mathbb{M}'=0, \tag{2.4}$$

従って(2.2),(2.3)に於ける$M_0\cdot M'$の項は実は存在しない。

次に吾々は Hの大きさは，その二乗が交換磁場 H_E の二乗に比べると省略できる程度とする。即ちMの大きさはたかだか $\chi_\perp H$, $\chi_\perp=1/A$ であることを考えると，これは $M'^2\gg M^2$ を仮定することに等しい。一方問題としてゐる $CuCl_2\cdot 2H_2O$, MnF_2, Cr_2O_3 では $A\gg\phi_x-\phi_y$, $A\gg\phi_x$ が成立してゐる。そこで上の仮定とともに，以下の簡単化では，ϕ_x, ϕ_y はAに比べてたかだか一次の微小量と考えることにする。この物質常数間の関係式と，$M'^2\gg M^2$ の仮定は Hが臨界磁場 H_c の程度のものである(ときには)確かに consistent になってゐる。(*) つまり spin flopping の考察には一向に差支えのない仮定と云える。

(*) 二軸性の場合，xy面に起る spin flopping の H_c は

$$H_c^2=2A(\phi_x-\phi_y)M_0^2,\quad \chi_\perp A=1$$

であるから，確かに

$$M^2\sim 2(\phi_x-\phi_y)M_0^2/A\ll M_0^2$$

が成立する。一軸性の場合は $\phi_y=0$ とすればよい。

この近似によると (2.2), (2.3) の maximum term は torque の部分では $\gamma M_0 H$, relaxation の部分では λH_c の order となる。(*) そこで λ-term は λH を基準とし, γ-term は $\gamma M_0 H$ を基準として 2nd order term を省略すれば, γM_0 と λ の大小関係にはよらない一般的な近似的運動方程式を得ることが出来る。即ち

$$\dot{\mathbb{M}} = \gamma[\mathbb{M}\times\mathbb{H}] + \frac{\gamma}{2}[\mathbb{M}\times\phi\mathbb{M}] + 2\lambda(\mathbb{H}-A\mathbb{M}) + \lambda\left[\phi - \frac{1}{4M_0^2}(\mathbb{M}\cdot\phi\mathbb{M})\right]\mathbb{M} - \frac{\lambda}{2M_0^2}[(\mathbb{M}\cdot\mathbb{H})+\mathbb{M}\cdot\phi\mathbb{M}]\mathbb{M}, \quad (2.5)$$

$$\dot{\mathbb{M}} = \gamma[\mathbb{M}\times(\mathbb{H}-A\mathbb{M})] + \frac{\gamma}{2}[\mathbb{M}\times\phi\mathbb{M}] + \frac{\gamma}{2}[\mathbb{M}\times\phi\dot{\mathbb{M}}] + \frac{\lambda\mathbb{M}}{2M_0^2}(AM^2-\mathbb{M}\cdot\mathbb{H}) + \lambda\left[\phi\mathbb{M} - \frac{1}{4M_0^2}(\mathbb{M}\cdot\phi\mathbb{M})\mathbb{M}\right] - \frac{\lambda}{2M_0^2}(\mathbb{M}\cdot\mathbb{H})\mathbb{M} - \frac{\gamma}{8M_0^2}(\mathbb{M}\cdot[\mathbb{M}\times\phi\dot{\mathbb{M}}])\mathbb{M}, \quad (2.6)$$

たゞし吾々の近似では当然 $M^2 = 4M_0^2$, $\dot{M}^2 = 0$ であるから, $\dot{\mathbb{M}}\cdot\mathbb{M} = \mathbb{M}\cdot\dot{\mathbb{M}} = 0$, 即ち

$$\frac{\gamma}{2}\mathbb{M}\cdot[\mathbb{M}\times\phi\dot{\mathbb{M}}] + 2\lambda[AM^2 - (\mathbb{M}\cdot\mathbb{H})] = 0 \quad (2.7)$$

が成立せねばならぬ。(2.6) の M^2 を含む term はこの関係式を用いて書きかえてある。

なお $A \gg \phi_x, \phi_y, \phi_z$ のときには更に簡単になる。上記の物質ではこれはかなりよい近似になっている。

$$\dot{\mathbb{M}} = \gamma[\mathbb{M}\times\mathbb{H}] + \frac{\gamma}{2}[\mathbb{M}\times\phi\dot{\mathbb{M}}] + 2\lambda(\mathbb{H}-A\mathbb{M}) - \frac{\lambda}{2M_0^2}(\mathbb{M}\cdot\mathbb{H})\mathbb{M}, \quad (2.8)$$

$$\dot{\mathbb{M}} = \gamma[\mathbb{M}\times(\mathbb{H}-A\mathbb{M})] + \lambda\left[\phi - \frac{1}{4M_0^2}(\mathbb{M}\cdot\phi\mathbb{M})\right]\mathbb{M} - \frac{\lambda}{2M_0^2}(\mathbb{M}\cdot\mathbb{H})\mathbb{M} + \frac{\lambda\mathbb{M}}{2M_0}(AM^2-\mathbb{M}\cdot\mathbb{H}), \quad (2.9)$$

さてこゝで上式から得られる解の性質について考えてみる。先ず $H_c > H_x$ のときには ($H_y = 0$), x 軸が確かに安定であり, $H_x > H_c$ となるとこれが不安定になることはこの附近での運

(*) $\dot{\mathbb{M}}$ の方程式ではそれほど直観的ではない。そこで $M^2 = 4M_0^2 - \dot{M}^2$ とおいて第4項, 第5項を整理してみると,

$$\lambda(A-\Gamma)\dot{\mathbb{M}} - \frac{\lambda}{2M_0^2}\left[-\frac{A+\Gamma}{2}\dot{M}^2 + \frac{A-\Gamma}{2}\dot{M}^2\right]\dot{\mathbb{M}} = \frac{\lambda}{4M_0^2}(2AM^2)\dot{\mathbb{M}},$$

となって main term は λAM_0 の order でないことが分る。

動方程式を作ってみることにより確められる。(*) 同様にして $H_c' > H > H_a$ のときには y 軸のみが安定な軸であることが分る。ここに H_a' は xy 面に spin flopping が起る場合の臨界磁場である。従ってこれから運動はこの場合 x 軸から y 軸に向って起ることが分る。更に $H > H_c' > H_a$ とすると y 軸附近も安定点になる。しかしどの path が現実的であるかは得失の energy の大小によるわけで、この意味で二軸性異方性 energy の場合には運動は殆ど xy 面内で起っているとして差支えない。実際このことは安定な微小振動の存在によって後で確めることが出来る。一方一軸性の場合には初めから z 軸を含む面はすべて等価である。しかし M_z, M_y' を比較して見れば分る様に、ある面（取りに xy 面としてもよい）から M, M' がはずれ様とする傾向に於ては、一軸性であっても二軸性でも本質的な差がないことが分る。従って一軸性の場合でも運動は一平面内で起る。しかしどの面で起るかは偶然的な要素に支配される点が異なる。そこで今 $M_x'^2, M_y'^2 \gg M_z'^2$ とすると、(2.5), (2.6) は次の様にかかれる。

$$
\left.
\begin{aligned}
\dot{m}_x &= \frac{\lambda H_x}{2M_0^2} M_y'^2 - \frac{\lambda H_y}{2M_0^2} M_x' M_y' - 2\lambda A m_x - \frac{\gamma \phi_y}{2} M_y' M_z - \gamma H_y m_z, \\
\dot{m}_y &= -\frac{\lambda H_x}{2M_0^2} M_x' M_y' + \frac{\lambda H_y}{2M_0^2} M_x'^2 - 2\lambda A m_y + \frac{\gamma \phi_x}{2} M_x' M_z + \gamma H_x m_z, \\
\dot{m}_z &= -\frac{\lambda H_x}{2M_0^2} M_x' M_z - \frac{\lambda H_y}{2M_0^2} M_y' M_z - 2\lambda D m_z - \frac{\gamma \phi_{xy}}{2} M_x' M_y' - \gamma H_x m_y + \gamma H_y m_x,
\end{aligned}
\right\} \quad (2.10)^{(**)}
$$

$$
\left.
\begin{aligned}
\dot{M}_x &= -\gamma D m_y M_y' + \gamma A m_y M_y' - \gamma H_y M_z' + \frac{\lambda M_x'}{2M_0^2}(AM^2 - M\cdot H) \\
&\quad + \frac{\lambda \phi_{xy}}{4M_0^2} M_x' M_y'^2 + \frac{\lambda H_x}{2M_0^2} m_y M_y' - \frac{\lambda H_y}{2M_0^2} m_x M_y', \\
\dot{M}_y &= \gamma D m_y M_x' - \gamma A m_x M_y' + \gamma H_x M_z' + \frac{\lambda M_y'}{2M_0^2}(AM^2 - M\cdot H) \\
&\quad - \frac{\lambda \phi_{xy}}{4M_0^2} M_x'^2 M_y' - \frac{\lambda H_x}{2M_0^2} m_y M_x' + \frac{\lambda H_y}{2M_0^2} m_x M_x', \\
\dot{M}_z &= \gamma A (m_x M_y' - m_y M_x') - \gamma H_x M_y' + \gamma H_y M_x' \\
&\quad - \lambda \phi_z M_z' - \frac{\lambda H_x}{2M_0^2} m_z M_x' - \frac{\lambda H_y}{2M_0^2} m_z M_y',
\end{aligned}
\right\} \quad (2.11)
$$

(*) 例えば $\delta M_y'$ に対して次式が成立する。

$$\delta \ddot{M}_y' + 2\lambda A \delta \dot{M}_y' + (\gamma^2 + \frac{\lambda^2}{M_0^2})(H_a^2 - H^2)\delta M_y = 0$$

これは $H_a > H$ のとき、$\delta M_y = 0$ の解が安定であることを示している。

(**) $M = (m_x, m_y, m_z)$, $M' = (M_x', M_y', M_z')$, $D = (A + \frac{\phi_z}{2})$, $\phi_{xy} = \phi_x - \phi_y$, 又 $M_x'^2 + M_y'^2 = 4M_0^2$, $M \cdot M' = 0$ を用いて適当に書きかえてある。

§3 遅い減衰運動の場合

先ずこのsectionでは遅い減衰運動の場合，即ち xy 面内に起る運動の角速度が，ゆわゆる反強磁性共鳴吸収の共鳴周波数に比べて小さい場合を考える。このときには吾々は，$\mathbb{M}, \mathbb{M}'$ が殆ど平衡値に近い値をとりながら各位置を通過すると云う爪に描像することが出来る。なおこの描像がゆるされるためには，必然的にかける磁場にある制限が加わる。これは解を求めてみると分るが，$H \sim H_c$ のところでは充分正しいものであることが分る。さて

$$\left.\begin{aligned} M_x' &= 2M_0\cos\varphi + \delta M_x', \\ M_y' &= 2M_0\sin\varphi + \delta M_y', \\ M_z' &= \qquad\qquad \delta M_z', \end{aligned}\right\} \quad \left.\begin{aligned} m_x &= \chi_\perp H\sin(\varphi-\theta)\sin\varphi + \delta m_x, \\ m_y &= -\chi_\perp H\sin(\varphi-\theta)\cos\varphi + \delta m_y, \\ m_z &= \qquad\qquad\qquad\qquad \delta m_z, \end{aligned}\right\} \quad (3.1)$$

とおいて，(2.10)，(2.11)の方程式を φ と，$\delta\mathbb{M}'$，$\delta\mathbb{M}$ に関する2組の式に分離してみる。ただし θ は xy 面にある磁場と x 軸とのなす角である。$\dot\varphi$ に関しては

$$\left.\begin{aligned} \chi_\perp H\sin(2\varphi-\theta)\dot\varphi &= -\gamma H\sin\theta\,\delta m_z - \gamma M_0\phi_y\sin\varphi\,\delta M_z' \\ -\chi_\perp H\cos(2\varphi-\theta)\dot\varphi &= \gamma H\cos\theta\,\delta m_z + \gamma M_0\phi_x\cos\varphi\,\delta M_z' \end{aligned}\right\} \quad (3.2)$$

$$\left.\begin{aligned} \delta\dot m_z &= -\frac{\gamma\chi_\perp}{2}\left[H_c^2\sin 2\varphi - H^2\sin(2\varphi-2\theta)\right] - 2\lambda D\,\delta m_z - \frac{\lambda H}{M_0}\cos(\varphi-\theta)\,\delta M_z', \\ 2\dot\varphi &= 2\gamma D\,\delta m_z + \frac{\lambda\chi_\perp}{4M_0^2}\left[H^2\sin(2\varphi-2\theta) - H_c^2\sin 2\varphi\right] + \frac{\gamma H}{2M_0}\cos(\varphi-\theta)\,\delta M_z', \\ \delta\dot M_z' &= -\lambda\phi_x\,\delta M_z' - \frac{\lambda H}{M_0}\cos(\varphi-\theta)\,\delta m_z, \end{aligned}\right\} \quad (3.3)$$

(3.2)は又次の様にもかける。これは $\mathbb{M}'$ と共に動く座標系からみた $\dot m_y$，$\dot m_x$ が

$$\left.\begin{aligned} -\chi_\perp H\cos(\varphi-\theta)\dot\varphi &= \gamma M_0\phi_x\,\delta M_z' + \gamma H\cos(\varphi-\theta)\,\delta m_z \\ 0 &= -\chi_\perp H\sin(\varphi-\theta)\dot\varphi + \gamma H\sin(\varphi-\theta)\,\delta m_z \end{aligned}\right\} \quad (3.2)'$$

右辺の程度であることを意味している。これは(3.3)と矛盾はしていない。(*) ただしここで m_z，

(*) (3.2)′によると $\dot\varphi = \gamma A\,\delta m_z$ で，一見(3.3)と矛盾している様であるが，(3.3)の $\dot\varphi$ を(3.2)′に代入してやると分る様に，余分な term の order は 2nd order となる。即ち，

$$\frac{\lambda\chi_\perp^2}{4M_0^2}H\left[H^2\sin(2\varphi-2\theta) - H_c^2\sin 2\varphi\right]\sin(2\varphi-\theta) \sim \lambda H\left(\frac{H}{H_{ex}}\right)^2,$$

$$\frac{\gamma\chi_\perp}{2M_0^2}H^2\left[\sin(2\varphi-\theta)\cos(\varphi-\theta)\right)\delta M_z' \sim \gamma M_0 H\left(\frac{\delta M_z'}{M_0}\right)\left(\frac{H}{H_{ex}}\right),$$

$$\gamma\chi_\perp\phi H\,\delta m_z/2 \sim \gamma M_0 H(\phi/A)(\delta m_z/M_0).$$

M_z' を含めておいたのは次の様な理由による。即ち m_z, M_z', $(H^2\sin(2\varphi-2\theta)-H_c^2\sin 2\varphi)$ を 0 とすれば $\dot\varphi=0$ となることを考えると，磁化の非定常運動はこれらを媒介として起っている。一方 $\lambda\to 0$ の極限で平衡点附近の微小振動を計算してみれば分る様に，m_z, M_z' が振動に関与していることも確かである。結局どの term が運動のどの部分に本質的であるかが分ればよいが，m_z, M_z' が同位の微小量と考える限り，$\gamma M_0 D m_z$, $\lambda D m_z$ 以外の m_z, M_z' を含む term は 1st order であるので，ここではこの2つのものが減衰部分にも本質的であると考えることにする。(*) 即ち (3.3) から

$$\left.\begin{aligned} 2\dot\varphi &= 2\gamma D m_z+\frac{\lambda\chi_\perp}{2M_0^2}\left[H^2\sin(2\varphi-2\theta)-H_c^2\sin 2\varphi\right],\\ \dot m_z &= -2\lambda D m_z+\frac{\gamma\chi_\perp}{2}\left[H^2\sin(2\varphi-2\theta)-H_c^2\sin 2\varphi\right],\end{aligned}\right\}\qquad(3.4)$$

となるが，これは次の様な微分方程式に変形される。

$$2\ddot\varphi+2\lambda A\,2\dot\varphi+\left(\gamma^2+\frac{\lambda^2}{M_0^2}\right)\left[H_c^2\sin 2\varphi-H^2\sin(2\varphi-2\theta)\right]=0,\qquad(3.5)^{(*)}$$

の式

次に微小振中部分の運動方程式については

$$\left.\begin{aligned}
\delta\dot m_x &= \frac{2\lambda H}{M_0}\cos\theta\sin\varphi\,\delta M_y'-\frac{\lambda H}{M_0}\sin\theta(\cos\varphi\,\delta M_y'+\sin\varphi\,\delta M_x')-2\lambda A\,\delta m_x\\
&\quad-\gamma M_0\phi_y\sin\varphi\,\delta M_z'-\gamma H\sin\theta\,\delta m_z,\\
\delta\dot m_y &= \frac{2\lambda H}{M_0}\sin\theta\cos\varphi\,\delta M_x'-\frac{\lambda H}{M_0}\cos\theta(\cos\varphi\,\delta M_y'+\sin\varphi\,\delta M_x')-2\lambda A\,\delta m_y\\
&\quad-\gamma M_0\phi_x\cos\varphi\,\delta M_z'+\gamma H\cos\theta\,\delta m_z,\\
\delta\dot m_z &= -\frac{\lambda H}{M_0}\cos(\varphi-\theta)\,\delta M_z'-\gamma M_0\phi_{xy}(\cos\varphi\,\delta M_y'+\sin\varphi\,\delta M_x')-2\lambda D\,\delta m_z\\
&\quad-\gamma H\cos\theta\,\delta m_y+\gamma H\sin\theta\,\delta m_x,
\end{aligned}\right\}\qquad(3.6)$$

$$\left.\begin{aligned}
\delta\dot M_x &= -2\gamma M_0 D\sin\varphi\,\delta m_z-\gamma H(\sin\theta+\sin(\varphi-\theta)\cos\varphi)\,\delta M_z'+\lambda\phi_{xy}\sin^2\varphi\,\delta M_x'\\
&\quad+\frac{\lambda\chi_\perp}{4M_0^2}\left[2H_c^2\sin 2\varphi-H^2\sin(2\varphi-2\theta)\right]\delta M_z'+\frac{\lambda H}{M_0}(\cos\theta\,\delta m_y-\sin\theta\,\delta m_x)\sin\varphi,\\
&\quad+\frac{\lambda M_z'}{2M_0^2}\left[2AM_z\cdot\delta M_z-H_z\cdot\delta M_z\right],\qquad+\frac{\lambda M_z'}{2M_0}\left[2AM_z\cdot\delta M_z-H_z\cdot\delta M_z\right]\\
\delta\dot M_y &= 2\gamma M_0 D\cos\varphi\,\delta m_z+\gamma H(\cos\theta+\sin(\varphi-\theta)\sin\varphi)\,\delta M_z'-\lambda\phi_{xy}\cos^2\varphi\,\delta M_y'\\
&\quad-\frac{\lambda\chi_\perp}{4M_0^2}\left[2H_c^2\sin 2\varphi-H^2\sin(2\varphi-2\theta)\right]\delta M_x'-\frac{\lambda H}{M_0}(\cos\theta\,\delta m_y-\sin\theta\,\delta m_x)\cos\varphi,
\end{aligned}\right\}$$

(*) この term の撰択が当を得たものであることは，(3.3) から いきなり出発することによっても (3.5) が導き出されることから確められる。ただし 0次 order のところまでの話である。一方 (3.5) を 1st order を振動部分にくり込んだ系からすると本質的に 0次 order のものである。それで $D\to A$, $\chi_\perp D\to 1$ としてある。

$$\delta\dot{M}_{\zeta}=\gamma H(\sin(\varphi-\theta)\sin\varphi-\cos\theta)\delta M_{\xi}+\gamma H(\sin(\varphi-\theta)\cos\varphi+\sin\theta)\delta M_{\eta}-\lambda\phi_{z}M_{\zeta}$$
$$+2\gamma M_{0}A(\sin\varphi\,\delta m_{x}-\cos\varphi\,\delta m_{y})-\frac{\lambda H}{M_{0}}\cos(\varphi-\theta)\,\delta m_{\zeta},\qquad(3.7)$$

これはかなりうるさい方程式であるが，base を次の様にとりなおすと，かなり簡単にすることができる。

$$\left.\begin{aligned}&\delta m_{\xi}=\cos\varphi\,\delta m_{x}+\sin\varphi\,\delta m_{y},\quad &&\delta M_{x}''=\cos\varphi\,\delta M_{\xi}+\sin\varphi\,\delta M_{\eta},\\&\delta m_{\eta}=-\sin\varphi\,\delta m_{x}+\cos\varphi\,\delta m_{y},\quad &&\delta M_{y}''=-\sin\varphi\,\delta M_{\xi}+\cos\varphi\,\delta M_{\eta},\\&\delta m_{\zeta}=\delta m_{z},\quad &&\delta M_{z}''=\delta M_{\zeta},\end{aligned}\right\}\qquad(3.8)$$

即ち(3.8)式をおいて

	$\delta\dot{m}_{\xi}$	$\delta\dot{m}_{\eta}$	$\delta\dot{m}_{\zeta}$	$\delta\dot{M}_{x}''$	$\delta\dot{M}_{y}''$	$\delta\dot{M}_{z}''$
$\delta\dot{m}_{\xi}$	$2\lambda A$,	0,	$\gamma H\sin(\varphi-\theta)$,	0,	$\frac{\lambda H}{M_{0}}\sin(\varphi-\theta)$,	0
$\delta\dot{M}_{y}''$	0,	$-2\lambda A$,	$\gamma H\cos(\varphi-\theta)$,	$-\frac{2\lambda H}{M_{0}}\sin(\varphi-\theta)$,	$-\frac{\lambda H}{M_{0}}\cos(\varphi-\theta)$,	$\gamma M_{0}^{2}\phi_{x}\cos^{2}\phi+\gamma M_{0}^{2}\phi_{y}\sin^{2}\phi$
$\delta\dot{m}_{\zeta}$	$-\gamma H\sin(\varphi-\theta)$,	$-\gamma H\cos(\varphi-\theta)$,	$-2\lambda D$,	$-\gamma M_{0}\phi_{xy}\sin 2\varphi$,	$-\gamma M_{0}\phi_{xy}\cos 2\varphi$,	$-\frac{\lambda H}{M_{0}}\cos(\varphi-\theta)$
$\delta\dot{M}_{x}''$	$-\frac{\lambda H}{M_{0}}\cos(\varphi-\theta)$,	$-\frac{\lambda H}{M_{0}}\sin(\varphi-\theta)$,	0,	0,	$-\frac{\lambda\chi_{t}}{4M_{0}^{2}}\Lambda$,	0
$\delta\dot{M}_{y}''$	$-\frac{\lambda H}{M_{0}}\sin(\varphi-\theta)$,	$-\frac{\lambda H}{M_{0}}\cos(\varphi-\theta)$,	$2\gamma M_{0}D$,	$-\frac{\lambda\chi_{t}}{4M_{0}^{2}}\Lambda'$,	$-\lambda\phi_{xy}\cos 2\varphi$,	$\gamma H\cos(\varphi-\theta)$
$\delta\dot{M}_{z}''$	0,	$-2\gamma M_{0}A$,	$-\frac{\lambda H}{M_{0}}\cos(\varphi-\theta)$,	0,	$-\gamma H\cos(\varphi-\theta)$,	$-\lambda\phi_{z}$

(3.9)

ただしここで ϕ から出て来る term，即ち $\dot{m}_{\xi}$ になおする m_{η} ϕ の様な term は order が一つ小さいとして直略した。これの正当性はあとで確められる。又 Λ, Λ' の定義は次の通りである。

$$\Lambda'=3H_{e}^{2}\sin 2\varphi-H^{2}\sin 2(\varphi-\theta)$$
$$\Lambda=H_{e}^{2}\sin 2\varphi-H^{2}\sin 2(\varphi-\theta)$$

この様な微小振巾の運動は，近似的に，固有値問題にひきなおされることになる。

さて(3.5)はxy面に起る磁化の非定常運動を大雑巴に記述するものである。これの stationary point は2つあって、ともに

$$H_c^2 \sin 2\varphi - H^2 \sin 2(\varphi-\theta) = 0 \qquad (3.10)$$

を満足するが、どちらの点が安定であるかはこの式からだけでは分らない。そこで一つの点 φ_0 を原点にとって、$\varphi = \varphi_0 + \varphi'$ とおいてみると、(3.5)は次の様になる。

$$2\ddot{\varphi}' + 2\lambda A(2\dot{\varphi}') + \left(\gamma^2 + \frac{\lambda^2}{M_0^2}\right)\left[H_c^2 \cos 2\varphi_0 - H^2 \cos 2(\varphi_0-\theta)\right] \sin 2\varphi' = 0,$$

or $\sin 2\theta \neq 0$ のとき、

$$2\ddot{\varphi}' + 2\lambda A(2\dot{\varphi}') - \left(\gamma^2 + \frac{\lambda^2}{M_0^2}\right)\frac{H^2 \sin 2\theta}{\sin 2\varphi_0} \sin 2\varphi' = 0 \qquad (3.11)$$

この式は、云わば、粘性減衰を有する振子の運動方程式である。これとの類推から分る様に M' と磁場とのなす角 α が

$$\tan 2\alpha = \frac{H_c^2 \sin 2\theta}{H_c^2 \cos 2\theta - H^2} \qquad (3.12)$$

を充たす点が平衡点を与え、これと $\frac{\pi}{2}$ だけ異る点が不安定な Saddle point を与えることが分る。(*) (3.12)の條件は Neel[5], Yosida[7] によって導かれたものに外ならぬ。実験的には Garter 達によって $CuCl_2 \cdot 2H_2O$ の単結晶に於て発見された。[6]

(3.11)の$(\varphi, \dot{\varphi})$空間に於ける積分曲線は色々μをかえて(**) Fig. 1に示されている。又 $\mu=1$, $\mu=2.1$ のものが Fig. 3, Fig. 2 にやゝ詳しく画かれている。この図から分る様に不安定点から出ている曲線の最高の角速度 $\dot{\varphi}_{max}$ は $\mu=2$ のとき $0.2\gamma H$ の order となる。(***) §5の議論からも分る様に、微小振動数はこのとき $2\gamma H$ の order である。それで吾々の理論にあてはまる磁場の限界の基準として、$\mu > 2$ をとることにする。これは又物質常数 γM_0, λ によるわけであるが、通常の反強磁性共鳴吸収の実験で、共鳴線が明らかに識別される点から考えると $\gamma^2 M_0^2 \gg \lambda^2$ 位が眞実に近いところと思われる。そうすると $\mu \sim 2(\lambda/\gamma M_0)(H_E/H) \sim 2$ となって、我々の近似がよいものになっている。個々の物質については §5で discuss することにする。

(*) Appendix 参照のこと。

(**) μ は $\sin 2\varphi$ の係数の root として定義されるもので、$2\lambda A$ を割ったもの。
例えば $\theta=0$, $H>H_c$ のときの、$\varphi=\frac{\pi}{2}$ を原点した振子の μ は

$$\mu = 2\lambda A \Big/ \sqrt{\left(\gamma^2 + \frac{\lambda^2}{M_0^2}\right)(H^2 - H_c^2)},$$

(***) $\dot{\varphi}$ の unit は、(**)の場合、$\sqrt{\left(\gamma^2 + \frac{\lambda^2}{M_0^2}\right)(H^2 - H_c^2}$ である。

§4 速い減衰運動の場合

section 3では非定常運動が比較的遅い場合を調べた。そしてその解から，近似がたゞしいためには $\mu > 2$ となる様に外部磁場を H_c に近ずける必要があることが分った。しかし外部磁場のない場合にはこの様な調節は不可能であるから，μ が intrinsic に小さいときには考えなおす必要がある。例えば MnF_2 では $H_{ex} : H_c$ が $5:1$ であるので $\gamma M_0 \sim 10\lambda$ としても $\mu \sim 1$ となる。Fig. 3 から分る様に，この場合 $\dot{\varphi}_{max}$ は $0.5\gamma H_c$ の程度で，これは大体微小振動数の4分の一の大きさをもっている。従って節3の考察は怪しくなり始めるところである。そこで $H=0$ の場合を目標にして (2.10), (2.11) を簡単に考えてみることにする。今 $\mathbb{M}\cdot\mathbb{M}'=0$ から

$$M_y'(m_x M_y' - m_y M_x') = 4M_0^2 m_x + m_z M_x' M_z',$$
$$M_x'(m_x M_y' - m_y M_x') = -4M_0^2 m_y - m_z M_y' M_z'. \qquad (4.1)$$

なる関係式が得られることに注意すると，$\mathbb{H}=(H,0,0)$ の場合，(2.10), (2.11) は 0次のところで次の微分方程式に reduce される。

$$\ddot{m}_x + 2\lambda A\dot{m}_x + 2(\gamma^2 M_0^2\phi_y + \lambda^2\phi_x)Am_x = \frac{H}{2M_0^2}(\gamma^2 M_0^2\phi_y + \lambda^2\phi_x)M_y'^2 + \frac{\gamma\lambda HA}{M_0^2}m_z M_x' M_y',$$
$$\ddot{m}_y + 2\lambda A\dot{m}_y + [2(\gamma^2 M_0^2 + \lambda^2)A\phi_x + \gamma^2 H^2]m_y = -\frac{H\phi_x}{2M_0^2}(\gamma^2 M_0^2 + \lambda^2)M_x' M_y' - \frac{\gamma\lambda HA}{M_0^2}m_z M_x'^2,$$
$$\dot{m}_z + 2(\gamma^2 M_0^2 + \lambda^2)\frac{A}{\lambda}m_z = \frac{\gamma M_0^2}{\lambda}2\dot{\varphi},$$

$$2\ddot{\varphi} + 2\lambda A(2\dot{\varphi}) + \left[2(\gamma^2 M_0^2 + \lambda^2)A\phi_{xy} - \frac{\lambda^2}{M_0^2}H^2\right]\sin 2\varphi = -2\gamma^2 HAm_y,$$
$$\ddot{M}_z' + 2\lambda A\dot{M}_z' + [2(\gamma^2 M_0^2 + \lambda^2)A\phi_x + \gamma^2 H^2]M_z' = \frac{\gamma^2 A\phi_{xy}}{2}M_z' M_y'^2 - 2\gamma^2 HAm_z M_x',$$

たゞし

$$M_x' = 2M_0\cos\varphi, \quad M_y' = 2M_0\sin\varphi$$

とした。$H=0$ のときには一平面内に起る運動を記述する φ の微分方程式は (3.5) で $H=0$ としたものに完全に一致することが分る。又 $H\neq 0$ のときでも，$\mathbb{M}$ が殆ど平衡値に近いときにはやはり φ の微分方程式は (3.5) になることが分る。一般の場合には難かしい問題となる。

§5 Discussions

以上公式的な話をしてきたが，ここでは具体的な物質ではどんなことが期待されるか $CuCl_2\cdot 2H_2O$, MnF_2, Cr_2O_3 を対象にして考えてみる。先ず $CuCl_2\cdot 2H_2O$ について考える。Garter et al. によってなされた反強磁性共鳴吸収の実験から[8]，Yasida–Moriya の評価したものによると[9] 実験の最低温度では，

$$H_E^2 = 5.11\times 10^7\,\phi^2, \quad \phi_x/\phi_{xy} = 3.3$$

である。一方 Van den Handel 達[10]によると $\theta = 5°K$ を用いると，大雑把に $g=2$, $S=1/2$ として $H_E = AM_0 = 74.5\ K\phi$ の程度のものが期待される。即ち

$$H_E = 74.5\ K\phi, \quad H_d = 7.15\ K\phi,$$
$$\phi_x M_0 = 1.13\ K\phi, \quad \phi_y M_0 = 0.787\ K\phi. \qquad (5.1)$$

となる。これから吾々の近似がかなりよいものであることが分る。さて以下の考察で一番問題となるのは物質常数 γM_0 と λ の大小関係である。通常の反強磁性共鳴吸収で共鳴線が明らかに識別されることを考えると，$\gamma^2 M_0^2 \gg \lambda^2$ という事が真実に近いものと思われる。初めに外部磁場のないときを考えよう。試みに $\gamma M_0 = 10\lambda$ とすると

$$\mu \cong \frac{2\lambda A}{\gamma H_d} \sim 2.08 \qquad (5.2)$$

となる。このときの運動については Fig. 2 の $\mu = 2.1$ のものを参照されたい。更に $\gamma M_0 = 20\lambda$ とすると，$\mu = 1.94$ となるが，Fig. 3 は殆どこれに近い $\mu = 1.00$ のものである。平衡点は安定な spiral point へと変化しており，$\mu = 2.1$ の安定な nodal point に比べると振動減衰が起る点が異る。又 Saddle point から起る運動の ϕ_{max} を2倍に増えている。臨界初角速度は 3.53 Hz から 2.16 Hz に変っている。即ちこれ以上の初角速度 $\dot\phi(0)$ を与えてやると（例えば z 軸に瞬間的に 30.7 $K\phi$ の半分以上の磁場をかける，ただし $\gamma M_0 = 20\lambda$ のとき），M はもう一つか，又はそれ以上離れた安定点に落ちつくことになる。y 軸から磁化をはなしてやったときの時間と角度との関係は Fig. 4 に示されている。unit はこの場合 0.795×10^{-11} sec となる。

外磁場が存在する場合には，μに対する制限を通じてかける磁場に限界があるから，磁場のないときの様に手放しにはいかぬ。今 $\mu=2$ をめやすにすると（φ_{max} は大体 γH_c の0.2倍となる），(*) $\gamma M_0=10\lambda$ では，field は 1.42 H_c よりも小さくないといけない。

$$H < 1.42\, H_c = 10.2\, K\phi \quad ; \quad \text{for } \gamma M_0 = 10\lambda .$$

$$H < 1.13\, H_c = 8.08\, K\phi \quad , \quad \text{for } \gamma M_0 = 20\lambda ,$$

となるが，μ を大きくするには $H \to H_c$ とせねばならぬ ということを意味している。μ を大きくする一つの解決法は，field を面内の任意の方向にかけることである。例えば今 $\theta = \pi/16$ として field を色々変えたときの μ の値を求めてみると，次の表の様になる。ただし φ_0 は

field	μ		M' の平衡位相 φ_0	
	$\gamma M_0 = 10\lambda$	$\gamma M_0 = 20\lambda$		
$9K\phi$	2.72	1.36	1.51	or $86°30'$
8.5	3.35	1.68	1.44	$82°30'$
8.0	4.12	2.06	1.34	$76°47'$
7.5	4.93	2.47	1.20	$68°45'$

$$\mu = \lambda \left(\frac{\lambda}{\gamma M_0}\right)\left(\frac{H_E}{H_c}\right)\sqrt{\left|\frac{\sin(2\varphi_0 - 2\theta)}{\sin 2\theta}\right|} \qquad (5.3)$$

で与えられる。(3.10), (3.11) から明らかであろう。Fig. 1, 2, 3 では 安定点が原点にとられているが，上記の場合にはそれを φ_0 のところに移すとよい。

一方 δM, $\delta M'$ の運動の方はどうであろうか。$\mu > 2$ のときにはこの問題は，近似的に，自由振動の微小固有振動数を求めることに帰着する。しかし通常の場合と異る点は λ-term のために固有値 ω が複素数となることで，ω の real part が所謂振動数を与え，imaginary part が微小振動の damping を与えることになる。Fig. 5 は $\gamma M_0 = 20\lambda$, $H_z = 8.0\, K\phi$ の場合の微小振動数の角度変化を示したものである。λ が小さいため，frequency は $\lambda = 0$ の極限のものに比べてそんなに変化していないが 10% の order の変化があるのは λA の term が大きく効くためである。unit は $H_z = 8.0$

(*) すぐあとで分る様に $\gamma M_0 = 20\lambda$, $H = 8.0\, K\phi$ のときには ($\mu = 2$), 微小振動の frequency が $2H_c\gamma$ の order であるので，φ_{max} は一桁小さいことになる。

Kφ であるから，φ_{max} はこれの 10分の一の大きさをもつことになる．これから，吾々の理論の "Validity criterion" として，$\mu > 2$ をとったことは正当なものであることが分る．

次に uniaxial anisotropy の反強磁性体 MnF_2, Cr_2O_3 について調べる．S. Tonerによると[1]，これらの物質における H_E, H_c, H_A は次の様になっている．

$$MnF_2, \quad H_E = 0.503\times10^6\phi, \quad H_c = 0.96\times10^5\phi, \quad H_A = 0.922\times10^4\phi$$
$$Cr_2O_3, \quad H_E = 2.1\times10^6\phi, \quad H_c = 0.6\times10^5\phi, \quad H_A = 0.0857\times10^4\phi \qquad (5.4)$$

field のない場合には μ は夫々次の様になっている．

MnF_2, 1.05 for $\gamma M_0 = 10\lambda$, 0.524 for $\gamma M_0 = 20\lambda$

Cr_2O_3, 7.0 〃 , 3.5 〃

これから分る様に MnF_2 は非常に強い振動性の減衰運動をすることが分る．図には $\mu = 7$ と云うのは乗っていないが大体の様子は見当がつくであろう．φ–t curve には 1.0 と 3.5 のものが画かれている．unit は MnF_2 で 0.592×10^{-13} sec, Cr_2O_3 で 0.943×10^{-13} である．field がかけられたときには応用可能な中は $\mu = 2$ にて

MnF_2, $H < 1.14\,H_c$ for $\gamma M_0 = 10\lambda$, $H < 1.03\,H_c$ for $\gamma M_0 = 20\lambda$,

Cr_2O_3, $H < 3.63\,H_c$ for 〃 , $H < 2.01\,H_c$ 〃 ,

MnF_2 では $\gamma M_0 = 20\lambda$ となると band は誤差範囲の中に入ってしまう．一方 Cr_2O_3 の方は吾々の理論にとって ideal なものと云える．そこで MnF_2 の場合に field を面内にかけてみる．$CuCl_2\cdot2H_2O$ のときと同様に $\theta = \frac{\pi}{6}$ として field の大きさを変えてみると

field	μ		M' の平衡位相
	$\gamma M_0 = 10\lambda$	$\gamma M_0 = 20\lambda$	
107 Kφ	2.13	1.07	1.32 or 75°50′
103 Kφ	2.38	1.17	1.26 72°10′
101 Kφ	2.45	1.23	1.21 69°35′
98 Kφ	2.62	1.31	1.13 65°

となる。一方 107 kφ のときに $\theta=\frac{\pi}{8}$ としてみると，μ は

107 kφ：	$\theta=\frac{\pi}{8}$，	2.63 (10λ)，	1.32 (20λ)
	$\theta=\frac{\pi}{16}$，	2.13 (10λ)，	1.07 (20λ)

となって，$\theta=\pi/16$ の比べると幾分よくなっていることが分る。結局 $\gamma M_0 \sim 10\lambda$ であるならば，Mn 五の称れ He と Hc が接近しているときにも，吾々の理論は広い適用性をもつが，$\gamma M_0 \sim 20\lambda$ の物質になると，余裕 He と Hc の大小関係がうまい具合になっていないと，色々小細工をせねばならぬ ということになる。

以上理論的に期待されること，及び物質が理論にのる条件等について色々考えたが，理論の中にも一応問題が考えられる。それは運動方程式の採択の是非がある。近頃強磁性体の場合について，巨視的見地からの議論及び微視的見地からのものがあるが，[13] (1.1)の式は 0°K である限り，その異方性がないとするならば，全く正しいものと思われる。それと γM_0 との大小に関して理論が決定権をもっていないことであるが，これはもと〜微視見地的からの問題であって，将来の課題である)。しかし dispersion とか，巾を調べることによって，[3),4)] 現象論的にと物質との対応をつけることが可能であると思われる。

最後にこの課題を与えて下され，終始あたたかい御指導をして下さった永宮先生に心から感謝致します。又色々御親切に面倒をみて下さった永宮研究室の方々に厚く御礼申しあげます。

Appendix　減衰振子の運動方程式について

一平面内に起る磁化の非定常運動の大体の有様は (3.5) の型の微分方程式で表わされる。ここではこの方程式の解析的な性質を調べてみる。一般的にこれは

$$\ddot{\psi} + c\dot{\psi} + k\sin\psi = 0 \quad , \quad k > 0 \tag{A.1}$$

と書き表わされる。$k<0$ のときには、$\psi = \pi + \psi'$ と座標をとりなおすとよい。これは又、

$$v = \dot{\psi}/\sqrt{k} \quad , \quad \mu = c/\sqrt{k} \quad , \quad \tau = x \tag{A.2}$$

とおくと、(x, v)-space に於ける次の様な reduced form の一階微分方程式に変形することが出来る。即ち

$$\frac{dv}{dx} = -\mu - \frac{\sin x}{v} \quad . \tag{A.3}$$

Fig. 1, 2, 3 はこの微分方程式の積分曲線を Runge-Kutta の方法[11]で数値的に求めたものである。しかし曲線の本質的な点は次の様にして理解出来る。(A.3) より

$$v(-x) = -v(x) \tag{A.4}$$

が先ず得られる。次に、(A.1) の方程式の停留点が (A.3) の方程式の特異点に対応していることに注目して、その特異性を調べることによって停留点の安定性を判定する。singularity の判定に関する Poincaré の定理によると[12]、singular point が孤立して実在するときには、原点をその点に移して考えた場合、その附近で

$$\frac{dv}{dx} = \frac{ax + bv + P_2(x^2, v^2, xv)}{cx + dv + Q_2(x^2, v^2, xv)}$$

の如き方程式の singularity は

$$\frac{dv}{dx} = \frac{ax+bv}{cx+dv} \quad , \quad \Delta \equiv ad - bc \neq 0 \tag{A.4}$$

のものと全く同じである。そしてその判定条件は次の D(*), Δ, $b+c$ の正負の組合せで次の table の様にまとめることが出来る。

(*)　$$D \equiv (b-c)^2 + 4ad \quad , \tag{A.5}$$

$D>0$	$\Delta>0$,		Saddle point.
	$\Delta<0$,	(I) $b+c>0$,	unstable Nodal point.
		(II) $b+c<0$,	stable Nodal point.
$D<0$		(i) $b+c>0$,	unstable Spiral point.
		(II) $b+c\leqq 0$,	stable Spiral point.
		(III) $b+c=0$,	Center point.
$D=0$		(I) $b+c>0$,	unstable Nodal point.
		(II) $b+c<0$,	stable Nodal point.

(A.6)

ここに stable というのは, $t\to\infty$ となるにつれて積分曲線が特異点に向って動くことを意味している。さて吾々の場合には, 特異点は $x=0$ と $x=\pi$ の二点である。(A.6)から分る様に $x=\pi$ の点は常に Saddle point である。この点からは二本の曲線が出入りしていてその勾配は次式で与えられる。

$$\left(\frac{dv}{dx}\right)_{x=\pi}=\frac{1}{2}\left(-\mu\pm\sqrt{\mu^2+4}\right) \tag{A.7}$$

一方 $x=0$ の点は, μ の大きさによって

$$\left.\begin{array}{ll} \mu\geqq 2 & \text{のとき stable Nodal point,} \\ \mu<2 & \text{のとき stable Spiral point,} \\ \mu=2 & \text{のとき Center point,} \end{array}\right\} \tag{A.8}$$

の如く変化する。この変化の有様は Fig. 1, 2, 3 に示されている。即ち前者は限界的な積分曲線だけを μ を色々に変えて画いたものである。"限界的"というのは原点に向う曲線はこの二本で囲まれる領域の中にしか存在し得ないからである。このことは μ を固定したときの Fig. 2, 3 を見れば容易に理解されるであろう。

References

1) S. Foner, Phys. Rev., 107, 683 (1957).
S. Foner, J. de Phys. et Rad., Suppl., 272 (1958).

2) T. Nagamiya, Prog. Theor. Phys., 4, 350 (1951).
C. Kittel, Phys. Rev., 82, 565 (1951).
T. Nagamiya, K. Yosida and R. Kubo, Advances in Phys., 4, 1 (1955).

3) H. J. Gerritsen and M. Garber, Physica, 22, 481 (1956).
M. I. Kaganov and U. M. Tsukernik, Z. E. T. F., 34, 524 (1958).

4) E. S. Dayhoff, J. Appl. Phys., 29, 344 (1958).

5) L. Neél, Ann. de phys., 5, 232 (1936).

6) Poulis, van den Handel, Ubbink, Poulis and Gorter, Phys. Rev., 82, 552 (1951).

7) K. Yosida, Prog. Theor. Phys., 6, 691 (1951).

8) Ubbink, Poulis, Gerritsen and Gorter, Physica, 18, 361 (1952).

9) K. Yosida and T. Moriya, Kyoto Conf. Theor. Phys., 751 (1953).

10) Van den Handel, Gijsman and Poulis, Physica, 18, 201 (1952).

11) H. Levy and E. A. Baggott, "Numerical Studies in Differential Equations," Vol. 1, Watt and Co., London (1934).

12) J. J. Stoker, "Nonlinear Vibration," Interscience Pub., Inc., New York (1950).

13) G. V. Skrotskii and V. T. Shmatov, Z. E. T. F., 34, 740 (1958).
H. B. Callen, J. Phys. Chem. Solids, 4, 256 (1958).

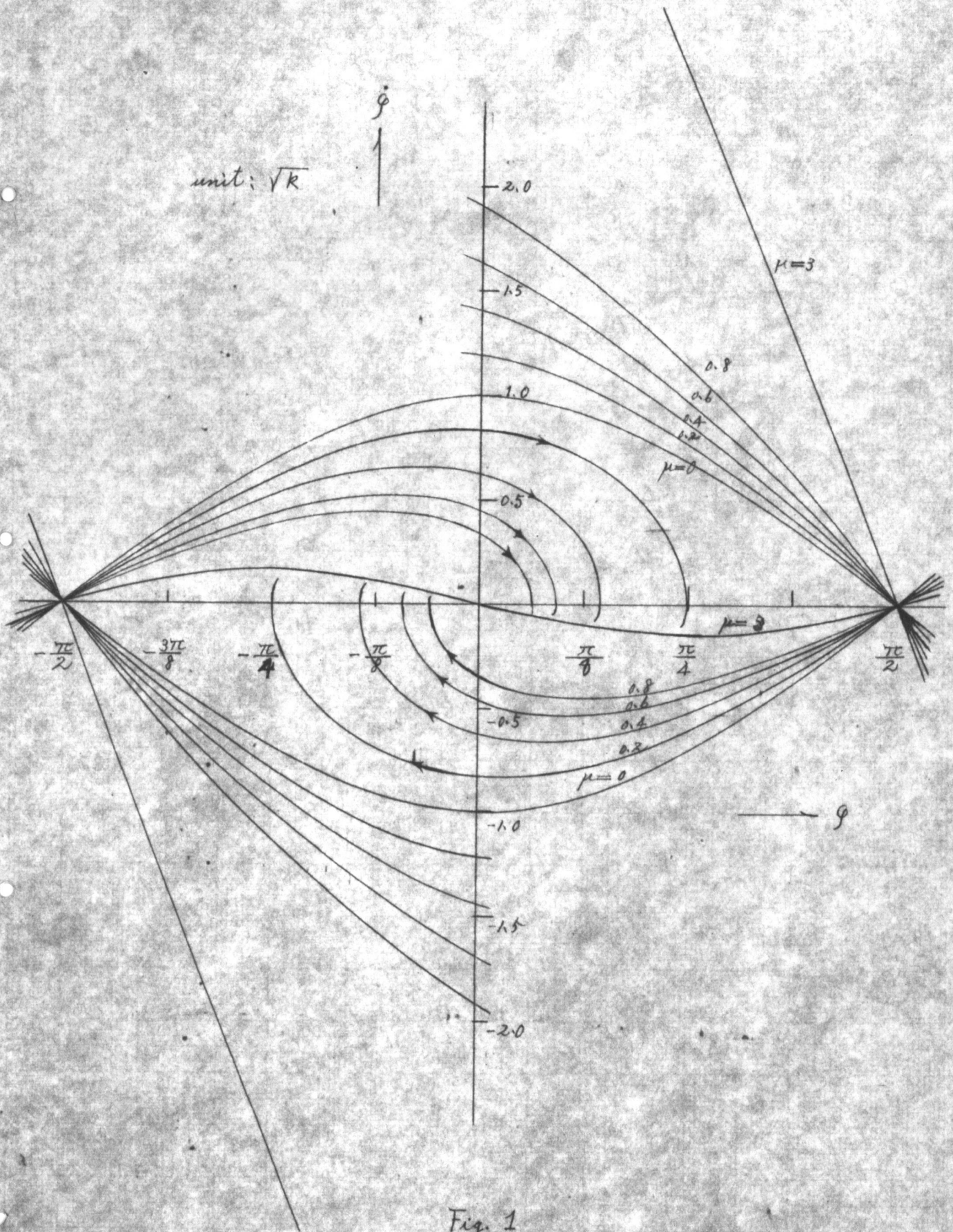

unit: $\sqrt{k}$
$\dot{\varphi}$
2.0
1.5
1.0
0.5
-0.5
-1.0
-1.5
-2.0
$\mu=3$
0.8
0.6
0.4
0.2
$\mu=0$
$-\frac{\pi}{2}$
$-\frac{3\pi}{8}$
$-\frac{\pi}{4}$
$-\frac{\pi}{8}$
$\frac{\pi}{8}$
$\frac{\pi}{4}$
$\frac{\pi}{2}$
φ

Fig. 1

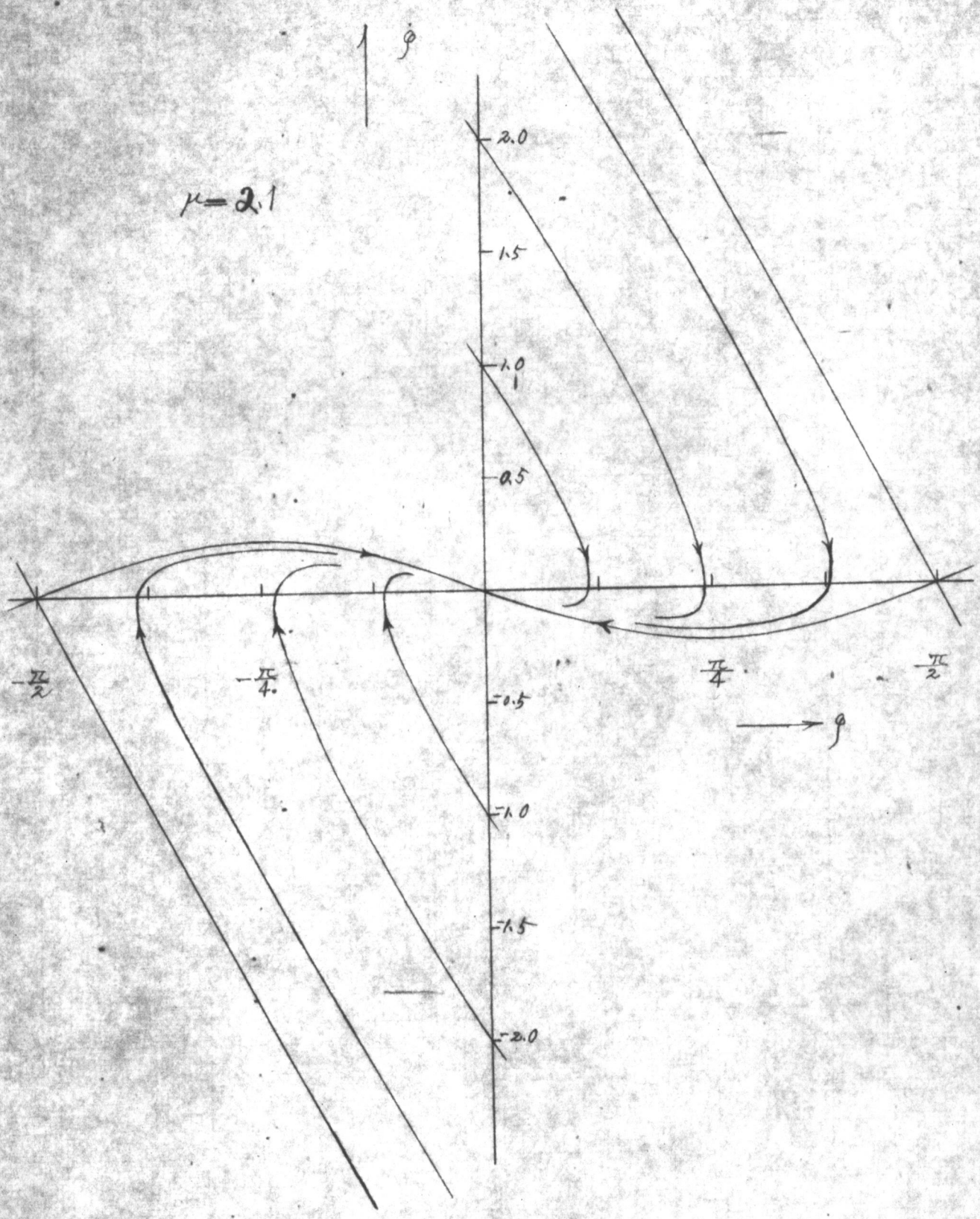

$\dot{\varphi}$
$\mu = 2.1$
2.0
1.5
1.0
0.5
-0.5
-1.0
-1.5
-2.0
$-\frac{\pi}{2}$
$-\frac{\pi}{4}$
$\frac{\pi}{4}$
$\frac{\pi}{2}$
φ

Fig. 2

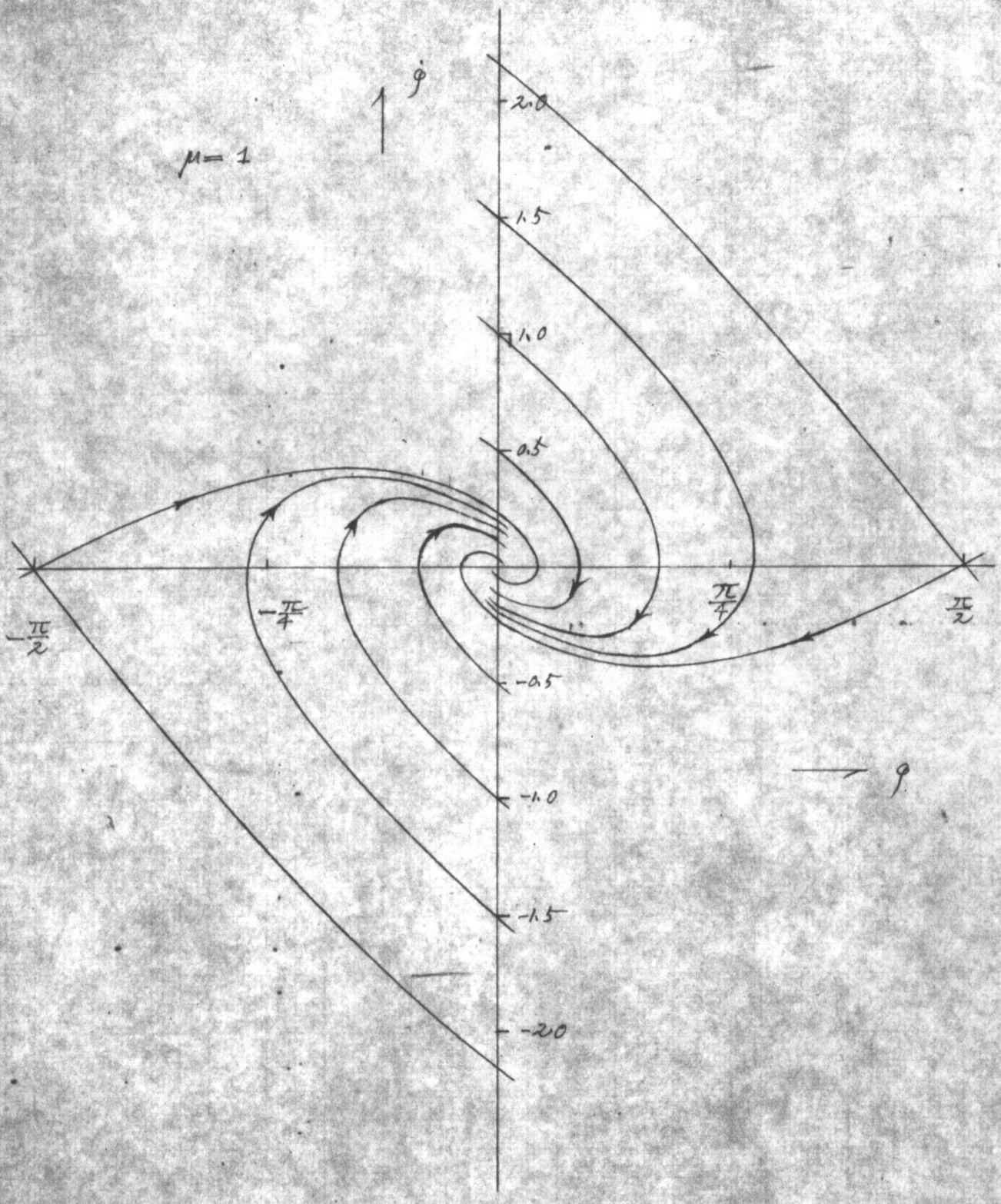
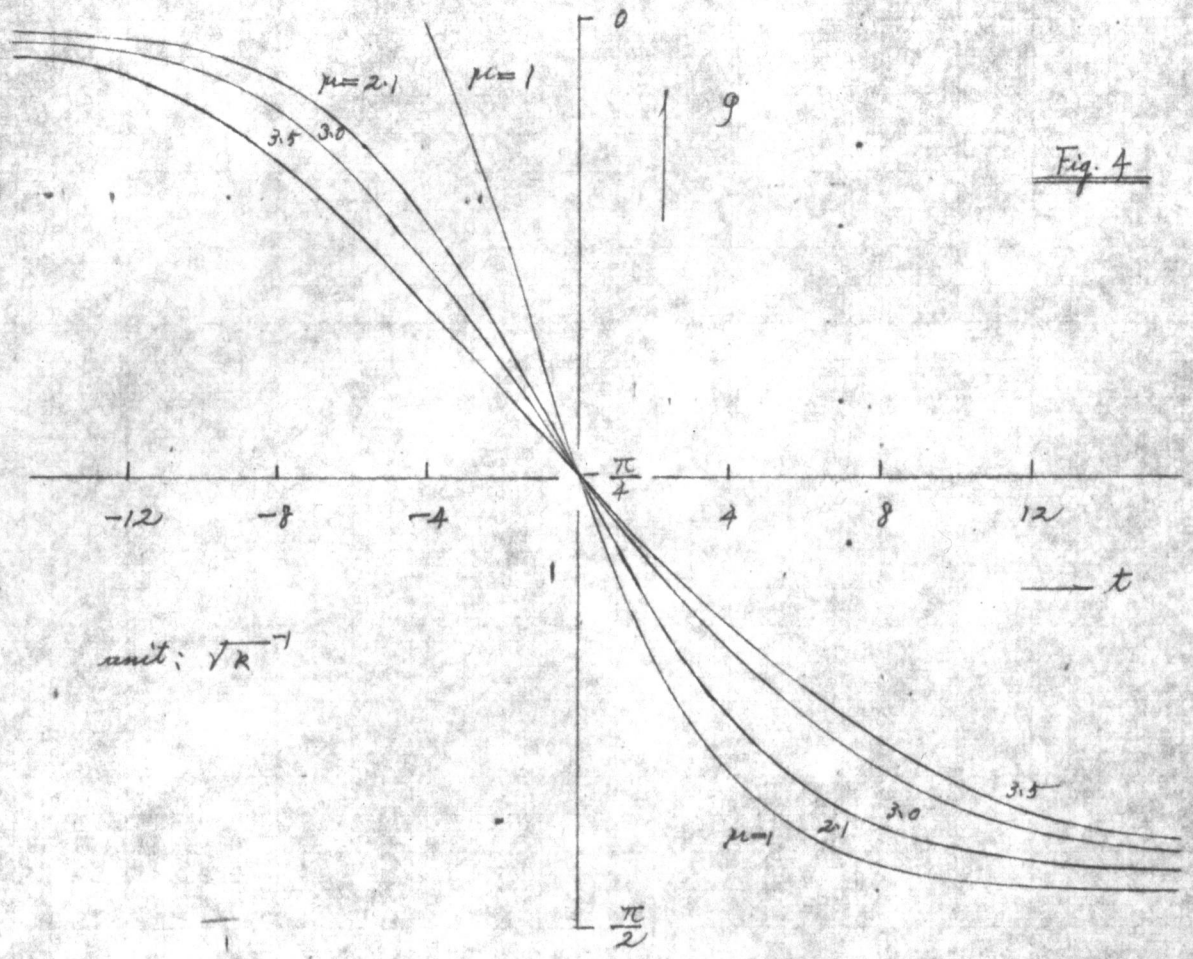
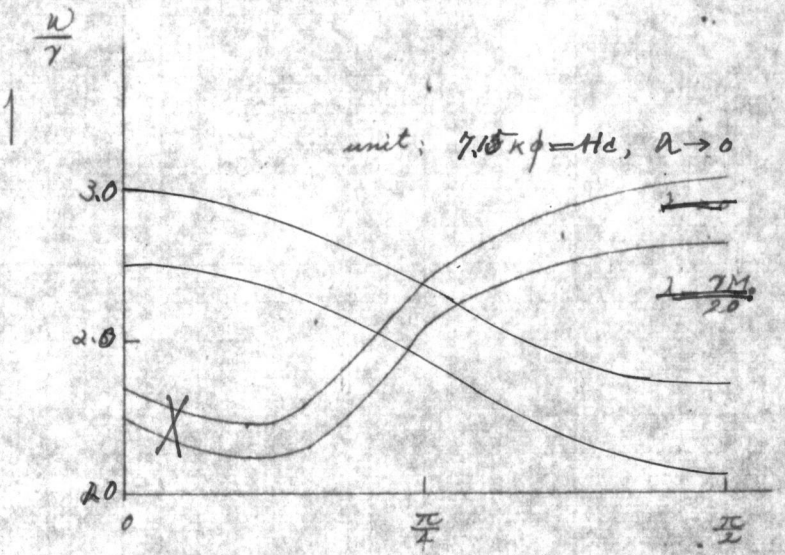

$\dot{\varphi}$
$\mu = 1$
2.0
1.5
1.0
0.5
-0.5
-1.0
-1.5
-2.0
$-\frac{\pi}{2}$
$-\frac{\pi}{4}$
$\frac{\pi}{4}$
$\frac{\pi}{2}$
φ

Fig. 13



0
$\mu=2.1$
$\mu=1$
3.5
3.0
φ
$\frac{\pi}{4}$
-12
-8
-4
4
8
12
1
t
unit: $\sqrt{k}^{-1}$
3.5
3.0
2.1
$\mu=1$
$\frac{\pi}{2}$

Fig. 4



$\frac{w}{\gamma}$
unit: $7.15\,k\phi = Hc$, $\lambda \to 0$
3.0
2.0
2.0
0
$\frac{\pi}{4}$
$\frac{\pi}{2}$

Fig. 5