



Title	反強磁性体に於る磁化の非定常運動について
Author(s)	鈴木, 英雄
Citation	大阪大学, 1960, 博士論文
Version Type	VoR
URL	https://hdl.handle.net/11094/2501
rights	
Note	

The University of Osaka Institutional Knowledge Archive : OUKA

<https://ir.library.osaka-u.ac.jp/>

The University of Osaka

25

20

15

反強磁性体_n於_m磁化_n非定常運動_{n-m}

10

5

鈴木英雄

§ 1 序論

常磁性体及び強磁性体に於ける磁化の非定常運動は現象論的かつ研究されている。即ち前者では adiabatic rapid passage の場合の考察が、
 Block 方程式又はその修正されたものを問題とすることによって行われている。一方後者では
 20 電子計算機の磁気記憶装置の問題に関連して、磁場反転の際の磁化運動が、
 Landau-Lifshitz 方程式及びその変形の Gilbert 方程式を問題とすることによって議論される。
 (**) Cu 及し反強磁性体の場合については、まだこの称な研究は理論的及び実験的とされていない。しかし最近瞬間的な強磁場(数百 μ s, で最高 750 nT)を用いた反強磁性共鳴吸収の実験が S. Foner⁽¹⁾ によって行われて、
 15 そこでこの論文では将来やがて行われるに違ひない実験にさきかけて、
 CuCl₂·2H₂O, MnF₂, Cr₂O₃ を対象として、反強磁性体に於ける spin flopping
 及び dynamical な運動を現象論的に考察した。

先ず簡単のために話を絶体零度の場合に限ることにする。オール問題には運動方程式などの称な型を取りべきかと云うことである。これは常磁性体及び強磁性体でかなり議論された問題で、現在、緩和効果を現象論的に取り入れた運動方程式としては Block 方程式とその修正されたもの、及び Landau-Lifshitz^(***) 方程式とその変形の Gilbert 方程式^(****) がよく用いられている。vector 方程式とみなす限り、Landau-Lifshitz 型と Gilbert 型の相異は、單なる parameter の定義の相異に帰着する。一方反強磁性体では、共鳴吸収の実験は T. Nagamiya, C. Kittel⁽²⁾ によって独立に提唱された標準的な理論によって良く説明されているが、やはり緩和効果を取り入れた運動方程式としては、Nagamiya-Kittel らの Block 型⁽⁴⁾ 又は Landau-Lifshitz 型の拡張⁽³⁾ を用いている。こでは絶体零度で磁化 vector の長の変化がなくことを考慮せず、微視的な議論することなしに、單に拡張した Landau-Lifshitz 式から出発することとする。即ち

(*) H. C. Torrij, Phys. Rev., 76, 1059 (1949).

G. Krüger and G. Laukien, Zeit. für Phys., 145, 456 (1956).

T. S. Grishchikov, Z.E.T.F., 34, 902 (1958).

(**) R. Mikuchi, J. Appl. Phys., 27, 1352 (1956).

P. R. Gillette and K. Oshima, J. Appl. Phys., 29, 529 (1958).

$$M^{\pm} = \gamma [M^{\pm} \times H_{eff}^{\pm}] - \frac{\lambda}{M_0} [M^{\pm} \times [M^{\pm} \times H_{eff}^{\pm}]] \quad (1.1)$$

ここで M^{\pm} は部分格子磁化 vector, γ は磁気角運動量比, λ は現象論的な減衰定数, M_0 は M^{\pm} の絶対値, H_{eff}^{\pm} は M^{\pm} が働く全有効磁場である。オニセ有効磁場は

$$H_{eff}^{\pm} = H - AM^{\pm} - PM^{\pm} + \phi M^{\pm}, \quad (1.2)$$

で与えられる。 H は外部磁場, $-AM^{\pm}$, $-PM^{\pm}$ は 各々自己以内, 自己以外 の部分格子との交換磁場, ϕM^{\pm} は異方性磁場を表している。今 x 軸を容易軸, y 軸をオニセのそれとすると, linear ϕ の成分は次の如くとよせができる。

$$\phi_x > \phi_y, \quad \phi_z = 0 \quad (1.3)$$

もし ϕ 交換磁場の自乗に比べて外部磁場の自乗は省略され程度, AM^{\pm} 自發磁化の自乗に比べて誘発磁化の自乗が省略され程度であるとする。 §2 ではこの仮定, 及び上記の物質では異方性磁場が交換磁場に比べてかなり小みこと用いて方程式を簡単にする。更に運動は必ず一面内に起るとして期待されるので, 自發磁化の面からのはずれの成分の自乗は面内成分の自乗に比べて省略できるとした。 §3, §4 では磁化の非定常運動の際の最高角速度が通常の反強磁性共鳴吸収の frequency ω_0 に比べてかなり遅い場合を詳し, 速い場合を簡単化する。前者では運動は次の二つのもの直和させとして描像される。即ち一つは ω_0 との実の平衡値をとりながら, 各位置で減衰振子の式で従って運動する部分であり, 他の一つは各位置で“わざわざ”異方振動数をもつ微小振動の部分である。この描像がゆえられることはかほる外部磁場の強さの制限が加わるが, 臨界磁場の程度の場合は上記の物質では大体この描像が成立することがある。後者では運動は複雑である。しかし磁場のないときは, 速い場合で, 大体の運動はやはり減衰振子の式で記述されることがある。最後に §5 では $\sqrt{M_0 \omega_0 / \lambda}$ 比を 1:10, 1:20 の二通りにとって, $CuCl \cdot 2H_2O$, MnF_2 , Cr_2O_3 でどんなことが期待されるかを調べる。なお減衰振子の方程式の解析的性質は Appendix で述べられる。

(***) F. Block, Phys. Rev., 70, 460 (1946).

Coddington, Olds and Tarry, Phys. Rev., 95, 807 (1954).

(****) L.D. Landau and E.M. Lifshitz, Phys. Z. Sowjet., 8, 153 (1935).

T.A. Gilbert, Phys. Rev., 100, 1243 (1955).

T.A. Gilbert and J.M. Kelly, A.I.E.E., New York, 253 (1955).

§2 絶体零度における運動方程式

先に部分格子磁化 M^+ , M^- で書かれて乃是(1.1)を,

$$M = M^+ + M^-, \quad M' = M^+ - M^-, \quad (2.1)$$

で定義した M , M' 式で書きかえる。即ち

$$\dot{M} = \gamma [M \times H] + \frac{\gamma}{2} [M \times \phi M] + \frac{\gamma}{2} [M' \times \phi M'] + \lambda [2H - (A + P)M + \phi M] \quad (2.2)$$

$$- \frac{\lambda}{4M_0^2} M [M \cdot (2H - (A + P)M + \phi M) + (A - P)M'^2 + M' \cdot \phi M']$$

$$- \frac{\lambda}{2M_0^2} M [M \cdot H + M' \cdot (\phi - P)M], \quad (2.2)$$

$$\dot{M}' = \gamma [M' \times (H - A M)] + \frac{\gamma}{2} [M' \times \phi M] + \frac{\gamma}{2} [M \times \phi M'] + \lambda [\phi M + (A - P)M'] \quad (2.3)$$

$$- \frac{\lambda}{4M_0^2} M [M \cdot (2H - (A + P)M + \phi M) + (A - P)M'^2 + M' \cdot \phi M']$$

$$- \frac{\lambda}{2M_0^2} M [M' \cdot H + M' \cdot (\phi - P)M], \quad (2.3)$$

今 (1.1) は M^\pm の大きさを変える方程式であるが、明らかに次の関係が成立してゐる。

$$|M^\pm| = M_0, \quad M \cdot M' = 0, \quad (2.4)$$

従って (2.2), (2.3) における M , M' の項は實は存在しない。

次に各々は H の大きさは、その二乗が交換磁場 H_e に乘れば比例で
ある程度とする。即ち M の大きさは比例の $\chi_u H$, $\chi_u = 1/A$ であることを考えると、これは
 $M^2 \gg M'^2$ を仮定すれば M 。一方問題として $CuCl_2 \cdot 2H_2O$, MnF_2 , Cr_2O_3 では
 $A \gg \phi_x - \phi_y$, $A \gg \phi_x$ が成立してゐる。そこで上の仮定とすると、以下の簡単化では、 ϕ_x, ϕ_y
は A に比べてたしかに一次の微小量と考えることにする。この物質常数間の関係式と、
 $M^2 \gg M'^2$ の仮定は H が臨界磁場 H_c の程度のものである ^{ときには} 確かに consistent になって
いる。^(*) つまり spin flopping の考察は一向に差支えのない仮定と言える。

(*) 二軸性の場合、 xy 面に起る spin flopping の H_c は

$$H_c^2 = 2A(\phi_x - \phi_y)M_0^2, \quad \chi_u A = 1$$

であるが、確かによ

$$M^2 \sim 2(\phi_x - \phi_y)M_0^2 / A \ll M_0^2$$

が成立する。一軸性の場合には $\phi_y = 0$ となるが。

この近似式は式(2.2), (2.3)の maximum term と torque の部分では $\gamma M_0 H$, relaxation の部分では $\lambda H e$ の order で式^(*)。そこで λ -term は $\lambda H e$ 基準とし, γ -term は $\gamma M_0 H$ を基準として 2nd order term を省略すれば, γM_0 と λ の大小関係によると一般的な近似的運動方程式を得ることが出来ます。BPS

$$\dot{M} = \gamma [M \times H] + \frac{\gamma}{2} [M \times \phi M'] + \gamma [H - AM] + \lambda [\phi - \frac{1}{4M_0^2} (M \cdot \phi M')] M - \frac{\lambda}{2M_0^2} [(M \cdot H) + M \cdot \phi M] M' \quad (2.5)$$

$$\dot{M}' = \gamma [M \times (H - AM)] + \frac{\gamma}{2} [M \times \phi M] + \frac{\gamma}{2} [M \times \phi M'] + \frac{\lambda M'}{2M_0^2} (AM^2 - M \cdot H) + \lambda [\phi M' - \frac{1}{4M_0^2} (M \cdot \phi M') M] - \frac{\lambda}{2M_0^2} (M \cdot H) M - \frac{\lambda}{8M_0^2} (M' [M \times \phi M]) M' \quad (2.6)$$

~~もし各の直角では当然 $M^2 = 4M_0^2$, $M = 0$ であるが, $M \cdot M' = M' \cdot M = 0$~~ , BPS

$$\frac{\gamma}{2} M \cdot [M \times \phi M'] + \gamma [AM^2 (M \cdot H)] = 0 \quad (2.7)$$

が成立せねばならぬ。~~(2.6) の M^2 を含む term はこの関係式を用いて書きかえてある。~~

なお $A \gg \phi_x, \phi_y, \phi_z$ のときは更に簡単になる。上記の物質ではこれはかなり近似的である。

$$\dot{M} = \gamma [M \times H] + \frac{\gamma}{2} [M \times \phi M'] + \gamma [H - AM] - \frac{\lambda}{2M_0^2} (M \cdot H) M' \quad (2.8)$$

$$\dot{M}' = \gamma [M \times (H - AM)] + \lambda [\phi - \frac{1}{4M_0^2} (M \cdot \phi M')] M' - \frac{\lambda}{2M_0^2} (M \cdot H) M + \frac{\lambda M'}{2M_0} (AM^2 - M \cdot H) \quad (2.9)$$

さてここで上式から得られる解の性質について考えてみる。先ず $H_x > H_z$ のときは ($H_y = 0$), x 軸が確かに安定であり, $H_x > H_z$ となるこれが不安定になるとこの附近での運

(*) \dot{M}' の方程式ではそれほど直觀的ではない。そこで $M^2 = 4M_0^2 - M^2$ とおいて ± 4 項, ± 5 項を整理してある。

$$\lambda (A - P) M' - \frac{\lambda}{2M_0^2} \left[-\frac{A+P}{2} M^2 + \frac{A-P}{2} M'^2 \right] M' = \frac{\lambda}{4M_0^2} (2AM^2) M'$$

となって main term は $\lambda A M_0$ の order で残る。

動方程式を作成することにより確かめられる。(*) 同様にして $H_x > H > H_z$ のとき y 軸のみが安定な軸であることがわかる。これは H_z は xz 面で spin flopping が起き場合の臨界磁場である。従ってこれから運動はこの場合 x 軸から y 軸に向って起きることがある。更に $H > H_z > H_x$ とすると z 軸附近も安定となる。しかしどの path が現実的であるかは行先の energy の大小によるわけである意味で二軸性異方性 energy の場合とは運動は xy 面内で起つて差がある。実際のことは安定な微小振動の存在によって後で確かめることができる。

一方一軸性の場合とは初めから x 軸を含む面はすべて等價である。もし M_x, M'_x を比較して見れば分かる様に、 xz 面(つまり xy 面に対して)から M, M' がはすれば x 軸回りの慣性モーメントであっても二軸性でも本質的な差がないことがある。従って一軸性の場合では運動は一平面内で起きる。なぜかとすると、(2.5), (2.6) は次の様に書かれます。

$$\dot{m}_x = \frac{\lambda H_x}{2M_0^2} M_y'^2 - \frac{\lambda H_y}{2M_0^2} M_x' M_y' - 2\lambda A_{mx} - \frac{\gamma \phi_x}{2} M_x' M_y' - \gamma H_y m_y, \quad \left. \begin{array}{l} \\ \end{array} \right\} (2.10)$$

$$\dot{m}_y = -\frac{\lambda H_x}{2M_0^2} M_x' M_y' + \frac{\lambda H_y}{2M_0^2} M_x'^2 - 2\lambda A_{my} + \frac{\gamma \phi_x}{2} M_x' M_y' + \gamma H_x m_x,$$

$$\dot{m}_z = -\frac{\lambda H_x}{2M_0^2} M_x M_y' - \frac{\lambda H_y}{2M_0^2} M_y M_y' - 2\lambda D_{my} - \frac{\gamma \phi_x}{2} M_x M_y' - \gamma H_x m_y + \gamma H_y m_x,$$

$$\begin{aligned} \dot{M}'_x &= -\gamma D_{my} M_y' + \gamma A_{my} M_y' - \gamma H_y M_y' + \frac{\lambda M'_x}{2M_0^2} (AM^2 - M \cdot H) \\ &\quad + \frac{\lambda \phi_x}{4M_0^2} M_x M_y'^2 + \frac{\lambda H_x}{2M_0^2} m_y M_y' - \frac{\lambda H_y}{2M_0^2} m_x M_y', \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \dot{M}'_y &= \gamma D_{my} M_x' - \gamma A_{mx} M_x' + \gamma H_x M_x' + \frac{\lambda M'_y}{2M_0^2} (AM^2 - M \cdot H) \\ &\quad - \frac{\lambda A_{xy}}{4M_0^2} M_x'^2 M_y' - \frac{\lambda H_x}{2M_0^2} m_y M_x' + \frac{\lambda H_y}{2M_0^2} m_x M_x', \end{aligned} \quad \left. \begin{array}{l} \\ \end{array} \right\} (2.11)$$

$$\begin{aligned} \dot{M}'_z &= \gamma A (m_x M_y' - m_y M_x') - \gamma H_x M_y' + \gamma H_y M_x' \\ &\quad - \lambda \phi_x M_z' - \frac{\lambda H_x}{2M_0^2} m_y M_x' - \frac{\lambda H_y}{2M_0^2} m_x M_y', \end{aligned}$$

(*) 例えば $\delta M'_y$ に対して次式が成立する。

$$\delta \ddot{M}'_y + 2\lambda A \delta \dot{M}'_y + (\gamma^2 + \frac{\lambda^2}{M_0^2}) (H_x^2 - H_y^2) \delta M'_y = 0$$

これは $H_x > H > H_z$, $\delta M'_y = 0$ の解が安定であることを示します。

(**)

$$M = (m_x, m_y, m_z), M' = (M_x', M_y', M_z'), D = (A + \frac{\phi_x}{2}), \phi_{xy} = \phi_x - \phi_y,$$

$$\text{又 } M_x'^2 + M_y'^2 = 4M_0^2, M \cdot M' = 0 \text{ を用いて適当に書き換えてある。}$$

§3 運の減衰運動の場合

先ず convection では運の減衰運動の場合、即ち xy 面内に起る運動の角速度が、ゆえに 反強磁性共鳴吸收の共鳴周波数に比べて小さい場合を考える。このときは、 M_x, M_y が殆ど平衡値に近い値をとりながら各位置で通過すると云う形で描像することが出来る。なおこの描像がゆえにされることは、必然的にかけた磁場に直角に限が加わる。これは解を求めてみよと云ふが、 $H \sim H_0$ などでは完全正確であることがある。さて

$$\left. \begin{array}{l} M_x = 2M_0 \cos \varphi + \delta M_x \\ M_y = 2M_0 \sin \varphi + \delta M_y \\ M_z = \quad \quad \quad \delta M_z \end{array} \right\} \quad \left. \begin{array}{l} m_x = \chi_0 H \sin(\varphi - \theta) \sin \varphi + \delta m_x \\ m_y = -\chi_0 H \sin(\varphi - \theta) \cos \varphi + \delta m_y \\ m_z = \quad \quad \quad \delta m_z \end{array} \right\} \quad (3.1)$$

ところで、(2.10), (2.11) の方程式を $\dot{\varphi}$ と $\delta M_x, \delta M_y$ に関する 2 組の式に分離してみよ。

既に θ は xy 面内ある磁場と x 軸とのなす角である。 $\dot{\varphi}$ に関する式は

$$\left. \begin{array}{l} \chi_0 H \sin(2\varphi - \theta) \dot{\varphi} = -\gamma H \sin \theta \delta m_y - \gamma M_0 \dot{\varphi} \sin \varphi \delta M_y \\ -\chi_0 H \cos(2\varphi - \theta) \dot{\varphi} = \gamma H \cos \theta \delta m_y + \gamma M_0 \dot{\varphi} \cos \varphi \delta M_y \end{array} \right\} \quad (3.2)$$

$$\left. \begin{array}{l} \delta m_y = -\frac{\gamma \chi_0}{2} [H^2 \sin 2\varphi - H^2 \sin(2\varphi - 2\theta)] - 2\gamma D \delta m_y - \frac{\lambda H}{M_0} \cos(\varphi - \theta) \delta M_y' \\ 2\dot{\varphi} = 2\gamma D \delta m_y + \frac{\lambda \chi_0}{4M_0^2} [H^2 \sin(2\varphi - 2\theta) - H^2 \sin \varphi] + \frac{\lambda H}{2M_0} \cos(\varphi - \theta) \delta M_y' \\ \delta M_y' = -\lambda \dot{\varphi} \delta M_y - \frac{\lambda H}{M_0} \cos(\varphi - \theta) \delta m_y, \end{array} \right\} \quad (3.3)$$

(3.2) は又次の様にかけられる。即ち M_z と共に動く座標系から見た m_y, m_z は

$$\left. \begin{array}{l} -\chi_0 H \cos(\varphi - \theta) \dot{\varphi} = \gamma M_0 \dot{\varphi} \delta M_y' + \gamma H \cos(\varphi - \theta) \delta m_y \\ 0 = -\chi_0 H \sin(\varphi - \theta) \dot{\varphi} + \gamma H \sin(\varphi - \theta) \delta m_y \end{array} \right\} \quad (3.2')$$

右辺の程度であることを意味している。これは (3.3) と矛盾していない。ただし m_y ,

(*) (3.2) によると $\dot{\varphi} = \gamma A \delta m_y$ と、一方 (3.3) と矛盾しないとあるが、(3.3) の $\dot{\varphi}$ と (3.2) に入れられてやると矛盾する。余分な term は 2nd order となる。即ち、

$$\begin{aligned} & \frac{\lambda \chi_0^2}{4M_0^2} H [H^2 \sin(2\varphi - 2\theta) - H^2 \sin 2\varphi] \sin(2\varphi - \theta) \sim \lambda H \left(\frac{H}{H_{ex}} \right)^2, \\ & \frac{\gamma \chi_0}{2M_0} H^2 [\sin(2\varphi - \theta) \cos(\varphi - \theta)] \delta M_y' \sim \gamma M_0 H \left(\frac{\delta M_y'}{M_0} \right) \left(\frac{H}{H_{ex}} \right), \\ & \gamma \chi_0 \dot{\varphi} H \delta m_y / 2 \sim \gamma M_0 H (\dot{\varphi} / A) (\delta m_y / M_0). \end{aligned}$$

25

M_y' を含めておいたのは次の様な理由による。即ち $m_z, M_y' (H^2 \sin(2\varphi - 2\theta) - Hc^2 \sin 2\varphi)$ を0とするは $\varphi = 0$ となることを考えると、磁化の非定常運動はこれで媒介されて起つてゐる。一方 $\theta \rightarrow 0$ の極限で平衡位置附近の微小振動を計算してみれば分子軌道 m_z, M_y' が振動の関与していることが確かである。結局どの term が運動のどの部分に本質的であるか分らぬので、 m_z, M_y' が周波の微小量を考へる限り、 $rMDm_z, rDm_z$ 以降の m_z, M_y' を含む terms 1st order であるてあるて、こではこの2つを本質部分子も本質的であると考へることとする。^(*) 即ち (3.3) の

$$\begin{aligned} 2\ddot{\varphi} &= 2rDm_z + \frac{2X_L}{2M_0^2} [H^2 \sin(2\varphi - 2\theta) - Hc^2 \sin 2\varphi], \\ m_z &= -2rDm_z + \frac{rX_L}{2} [H^2 \sin(2\varphi - 2\theta) - Hc^2 \sin 2\varphi], \end{aligned} \quad (3.4)$$

15

となるが、これは次の様な微分方程式に変形される。

$$2\ddot{\varphi} + 2\lambda A \dot{\varphi} + \left(r^2 + \frac{\lambda^2}{M_0^2}\right) [Hc^2 \sin 2\varphi - H^2 \sin(2\varphi - 2\theta)] = 0, \quad (3.5)$$

の式

少しちじはづか

H

Hc

次に微小振動部分の運動方程式は次の如き

10

$$\begin{aligned} \delta mx &= \frac{2rH}{M_0} \cos \varphi \sin \theta \delta M_y' - \frac{\lambda H}{M_0} \sin \theta (\cos \varphi \delta M_y' - \sin \varphi \delta M_x') - 2rA \delta m_z \\ &\quad - 2rMo \phi_y \sin \varphi \delta M_y' - rH \sin \theta \delta m_z, \\ \delta my &= \frac{2rH}{M_0} \sin \theta \cos \varphi \delta M_x' - \frac{\lambda H}{M_0} \cos \theta (\cos \varphi \delta M_y' + \sin \varphi \delta M_x') - 2rA \delta m_z \\ &\quad - 2rMo \phi_x \cos \varphi \delta M_y' + rH \cos \theta \delta m_z, \\ \delta mz &= -\frac{\lambda H}{M_0} \cos(\varphi - \theta) \delta M_y' - rMo \phi_y (\cos \varphi \delta M_y' + \sin \varphi \delta M_x') - 2rD \delta m_z \\ &\quad - rH \cos \theta \delta m_y + rH \sin \theta \delta m_x, \end{aligned} \quad (3.6)$$

5

$$\begin{aligned} \delta M_x &= -2rMD \sin \varphi \delta m_z - rH(\sin \theta + \sin(\varphi - \theta) \cos \varphi) \delta M_y' + \lambda \phi_y \sin^2 \varphi \delta M_x' \\ &\quad + \frac{2X_L}{4M_0^2} [2Hc^2 \sin 2\varphi - H^2 \sin(2\varphi - 2\theta)] \delta M_y' + \frac{\lambda H}{M_0} (\cos \theta \delta m_y - \sin \theta \delta m_x) \sin \varphi, \\ &\quad + \frac{\lambda M_x'}{2M_0^2} [2AM_0 \cdot \delta M - H \cdot \delta M], \quad + \frac{\lambda M_y'}{2M_0} [2AM_0 \cdot \delta M - H \cdot \delta M] \\ \delta M_y &= 2rMo D \cos \varphi \delta m_z + rH(\cos \theta + \sin(\varphi - \theta) \sin \varphi) \delta M_x' - \lambda \phi_y \cos^2 \varphi \delta M_y' \\ &\quad - \frac{\lambda X_L}{4M_0^2} [2Hc^2 \sin 2\varphi - H^2 \sin(2\varphi - 2\theta)] \delta M_x' - \frac{\lambda H}{M_0} (\cos \theta \delta m_y - \sin \theta \delta m_x) \cos \varphi, \end{aligned}$$

(*) 1st term の採択が当を得たのであることは、(3.3) からいきなり出発することによって(3.5) が導き出されることは確かである。たゞし 0th order と 1st order との話である。

一方(3.5) が 1st order の振動部分でありこれで本質的である。また $D \rightarrow A, X_L D \rightarrow 1$ である。

$$\begin{aligned}\delta M'_z &= \gamma H (\sin(\varphi-\theta) \sin\varphi - \cos\theta) \delta M'_x + \gamma H (\sin(\varphi-\theta) \cos\varphi + \sin\theta) \delta M'_y - \lambda \delta M'_z \\ &+ 2\gamma M_0 A (\sin\varphi \delta m_x - \cos\varphi \delta m_y) - \frac{\lambda H}{M_0} \cos(\varphi-\theta) \delta m_z,\end{aligned}\quad (3.7)$$

これはかなり複雑な方程式であるが、base を次の極限とりなすと、かなり簡単化することができる。

$$\left. \begin{aligned}\delta m_x &= \cos\varphi \delta m_x + \sin\varphi \delta m_y, & \delta M'_x &= \cos\varphi \delta M'_x + \sin\varphi \delta M'_y, \\ \delta m'_y &= -\sin\varphi \delta m_x + \cos\varphi \delta m_y, & \delta M'_y &= -\sin\varphi \delta M'_x + \cos\varphi \delta M'_y, \\ \delta m'_z &= \delta m_z, & \delta M'_z &= \delta M'_z,\end{aligned}\right\} \quad (3.8)$$

式(3.8)を代入

	δm_x	$\delta m'_y$	$\delta m'_z$	$\delta M''_x$	$\delta M''_y$	$\delta M''_z$
δm_x	$2\lambda A, \dots, 0, \gamma H \sin(\varphi-\theta), 0, \frac{\lambda H}{M_0} \sin(\varphi-\theta), 0$					
$\delta M'_y$		$0, -2\lambda A, \gamma H \cos(\varphi-\theta), -\frac{2\lambda H}{M_0} \sin(\varphi-\theta), -\frac{\lambda H}{M_0} \cos(\varphi-\theta), +\gamma M_0^2 \phi_x \sin^2 \phi$				
$\delta m'_z$		$-\gamma H \sin(\varphi-\theta), -\gamma H \cos(\varphi-\theta), -2\lambda D, -\gamma M_0 \phi_{xy} \sin 2\varphi, -\gamma M_0 \phi_{xy} \cos 2\varphi, -\frac{\lambda H}{M_0} \cos(\varphi-\theta)$				
$\delta M''_x$			$-\frac{\lambda H}{M_0} \cos(\varphi-\theta), -\frac{2\lambda H}{M_0} \sin(\varphi-\theta), 0, 0, -\frac{\lambda H}{4M_0^2} \Lambda, 0$			
$\delta M''_y$				$-\frac{\lambda H}{M_0} \sin(\varphi-\theta), -\frac{\lambda H}{M_0} \cos(\varphi-\theta), 2\gamma M_0 D, -\frac{\lambda H}{4M_0^2} \Lambda', -\lambda \phi_{xy} \cos 2\varphi, \gamma H \cos(\varphi-\theta)$		
$\delta M''_z$					$0, -2\gamma M_0 A, -\frac{\lambda H}{M_0} \cos(\varphi-\theta), 0, -\gamma H \cos(\varphi-\theta), -\lambda \phi_x$	

ここで ϕ が出て来る term, $\delta m'_z$ には $m'_y \phi$ の term は order 0 である。

これを省略して、この正当性はここで確められる。又 Λ , Λ' は常に次の通りである。

$$\Lambda = 3H^2 \sin 2\varphi - H^2 \sin 2(\varphi-\theta)$$

$$\Lambda' = H^2 \sin 2\varphi - H^2 \sin 2(\varphi-\theta)$$

この極限微小振巾の運動は、近似的に、固有値問題ができるところである。

$\exists \tau$ (3.5) は xy 面に起る磁化の非定常運動を大雑把に記述するものである。この stationary point は 2つあって、それ

$$H_0^2 \sin 2\phi - H^2 \sin 2(\phi - \theta) = 0 \quad (3.10)$$

を満足するが、どちらの真か不安定かはこの式からだけでは分らぬ。そこで一つの真 ϕ_0 を原点にして、 $\phi = \phi_0 + \phi'$ とおいてみると、(3.5) は次のように。

$$\begin{aligned} 2\ddot{\phi}' + 2\lambda A(2\dot{\phi}') + \left(\gamma^2 + \frac{\lambda^2}{M_0^2}\right) [H_0^2 \cos 2\phi_0 - H^2 \cos 2(\phi_0 - \theta)] \sin 2\phi' &= 0, \\ \text{or } \sin 2\theta &\neq 0 \text{ とき,} \\ 2\ddot{\phi}' + 2\lambda A(2\dot{\phi}') - \left(\gamma^2 + \frac{\lambda^2}{M_0^2}\right) \frac{H^2 \sin 2\theta}{\sin 2\phi_0} \sin 2\phi' &= 0 \end{aligned} \quad (3.11)$$

この式は、云わば、粘性減衰を有する振子の運動方程式である。これらの頻度が分子标记に M と磁場とのなす角 α が

$$\tan 2\alpha = \frac{H_0^2 \sin 2\theta}{H_0^2 \cos 2\theta - H^2} \quad (3.12)$$

を充たす真が平衡真を与える。これと $\frac{\pi}{2}$ だけ異なる真が不安定な saddle point を持つことが分かる。(3.12) の條件は Null⁵⁾, Yasida⁷⁾ によって導かれたものに外ならぬ。実験的には Garter 連れて $\text{CuCl}_2 \cdot 2\text{H}_2\text{O}$ の單結晶に於て発見された⁶⁾

(3.11) と (θ, ϕ) 空間に於ける積分曲線は色々と書いて Fig. 1 が示されている。又 $\mu = 1$, $\mu = 2$ のものが Fig. 3, Fig. 2 にや、詳しく述べられている。この図から分子标记不安定真が出て来る曲線の最高の角速度 $\dot{\phi}_{\max}$ は $\mu = 2$ の $\approx 0.2\gamma H$ の order となる。
 85 の図から分子标记、微小振動数はこれより $2\gamma H$ の order である。それで吾々の理論においては磁場の限界の基準として、 $\mu > 2$ とされる。これは又物質常数 γM_0 、したまわけであるが、通常の反強磁性共鳴吸収の実験で、共鳴線が明らかに識別される真から考えると $\gamma^2 M_0^2 \gg \lambda^2$ 位が眞實に立つと思われる。そうすると $\mu \sim 2(\lambda/M_0)(H_0/H) \sim 2$ となって、我々の立派な結果となつてゐる。1 回目の物質 $n-m$ は 85 で discuss することにする。

(*) Appendix 参照のこと。

(**) $\mu \neq 0$ の $\sin 2\phi$ の係数の root として定義されそれで、 $2\lambda A$ を書いたのである。
 例えば $\theta = 0$, $H > H_0 \cos \theta$, $\phi = \frac{\pi}{2}$ を原点の振子の μ は

$$\mu = 2\lambda A / \sqrt{\left(\gamma^2 + \frac{\lambda^2}{M_0^2}\right)(H^2 - H_0^2)},$$

(***) ϕ が unit は、(**) の場合、 $\sqrt{\left(\gamma^2 + \frac{\lambda^2}{M_0^2}\right)(H^2 - H_0^2)}$ である。

§4 速い減衰運動の場合

section 3 では 非定常運動が比較的遅い場合を調べた。そしてその解か
る、近似が成り立つためには $\mu > 2$ となり称する外部磁場 H_{ext} 近づける必要がある
ことが分った。しかし外部磁場のない場合にはこの称空調節は不可能であるから、
intrinsic な小さなときは考えなくてよい必要がある。例の MnF_2 では $H_{ext} : H_c \approx 5 : 1$
であるで $2M_o \sim 10^3$ にて $\mu \sim 1$ となる。Fig. 3 のように $H_{ext} = 0$ の場合 $\dot{\phi}_{max}$
は $0.5 \sqrt{H_c}$ の程度で、これは大体微小振動数の 4 分の 1 の大きさをもつてゐる。従って節
3 の考察は怪しくなり始めるところである。そこで $H = 0$ の場合を目標にして (2.10), (2.11)
を簡単に考えてみようとする。A $M \cdot M' = 0$ の

$$\begin{aligned} M_y' (m_x M_y - m_y M_x') &= 4M_o m_x + m_x M_x' M_y, \\ M_x' (m_x M_y - m_y M_x') &= -4M_o m_y - m_y M_y' M_x. \end{aligned} \quad (4.1)$$

左の固有式が得られる。これ注意すると、 $H = (H, 0, 0)$ の場合、(2.10), (2.11) は 0 となるとして次の微分方程式を reduce する。

$$\begin{aligned} \ddot{m}_x + 2\lambda A m_x + 2(\gamma^2 M_o^2 \phi_y + \lambda^2 \phi_x) A m_x &= \frac{H}{2M_o^2} (\gamma^2 M_o^2 \phi_y + \lambda^2 \phi_x) M_y' + \frac{\gamma H A}{M_o^2} m_y M_x' M_y, \\ \ddot{m}_y + 2\lambda A m_y + [2(\gamma^2 M_o^2 + \lambda^2) A \phi_x + \gamma^2 H^2] m_y &= -\frac{H \phi_x}{2M_o^2} (\gamma^2 M_o^2 + \lambda^2) M_x' M_y - \frac{\gamma H A}{M_o^2} m_y M_x'^2, \\ m_y + 2(\gamma^2 M_o^2 + \lambda^2) \frac{f}{\lambda} m_y &= -\frac{\gamma M_o^2}{\lambda} 2\dot{\phi}, \end{aligned}$$

$$2\ddot{\phi} + 2\lambda A (2\dot{\phi}) + [2(\gamma^2 M_o^2 + \lambda^2) A \phi_y - \frac{\lambda^2 H^2}{M_o^2}] \sin 2\phi = -2\gamma^2 H A m_y,$$

$$M_y'' + 2\lambda A M_y' + [2(\gamma^2 M_o^2 + \lambda^2) A \phi_x + \gamma^2 H^2] M_y' = \frac{\gamma^2 A \phi_x}{2} M_y' M_y'^2 - 2\gamma^2 H A m_y M_x,$$

左辺

$$M_x' = 2M_o \cos \phi, \quad M_y' = 2M_o \sin \phi$$

したが $H = 0$ のときは一平面内に起る運動を記述する ϕ の微分方程式は (3.5) で
 $H = 0$ としたものと完全に一致する。又 $H \neq 0$ のときも、 M が $(0, 0)$ 平衡位置で止
まることはやはり ϕ の微分方程式は (3.5) にならざらない。一般的の場合には難問の問題となる。

§ 5 Discussions

以上公式的な話をしてきたが、ここでは具体的な物質ではどんなことが期待されるか $\text{CuCl}_2 \cdot 2\text{H}_2\text{O}$, MnF_2 , Cr_2O_3 を対象にして考えてみる。先ず $\text{CuCl}_2 \cdot 2\text{H}_2\text{O}$ について考える。Gorter et al. よりてなされた反強磁性共鳴吸収の実験⁸⁾, Yasuda-Moriya の評價⁹⁾によると、実験の最低温度では、

$$H_a^2 = 5.11 \times 10^7 \phi^2, \quad \phi_x/\phi_y = 3.3$$

である。一方 Van den Handel 連¹⁰⁾によると、大難巴 $g=2$, $S=1/2$ の $H_E = AM_0 = 74.5 \text{ k}\phi$ の程度のが期待される。即ち

$$H_E = 74.5 \text{ k}\phi, \quad H_a = 7.15 \text{ k}\phi,$$

$$\phi_x M_0 = 1.13 \text{ k}\phi, \quad \phi_y M_0 = 0.787 \text{ k}\phi. \quad (5.1)$$

となる。この値々の近似がかなり正確であることが分かる。さて以下の方針で一番問題となるのは 物質常数 γM_0 との大小関係である。通常の反強磁性共鳴吸収で共鳴線が明らかに識別されることは考えると、 $\gamma^2 M_0^2 \gg \lambda^2$ と云ふことが眞実に近いものと思われる。初めに外部磁場のなれどさを考えてみる。試みに $\gamma M_0 = 10 \lambda$ とすると

$$\mu = \frac{2\lambda A}{\gamma H_a} \sim 2.08 \quad (5.2)$$

となる。この時の運動は Fig. 2 の $\mu = 2.1$ の場合を参照されたい。更に $\gamma M_0 = 20 \lambda$ とすると、 $\mu = 1.04$ となるが、Fig. 3 は 3倍の $\mu = 1.00$ の場合である。平衡点は安定な spiral point へと変化しており、 $\mu = 2.1$ の 安定な nodal point へと振動減衰が起る点が異る。又 saddle point から起る運動の $\dot{\phi}_{max}$ が 2 倍に増えてくる。臨界初角速度は 3.53 Hz から 2.16 Hz へと変化する。即ちこれ以上の初角速度 $\dot{\phi}(0)$ を与えてやると（つまり y 軸に瞬間的に $30.7 \text{ k}\phi$ の半分以上の磁場をかける）、 $\mu = 20 \lambda$ の場合は $\dot{\phi}_{max}$ はもう一つか、又はそれ以上瞬間に安定点へ落ちつけることになる。 y 軸から磁化をはじめてやったときの時間と角度との関係は Fig. 4 に示されている。unit は sec の場合 $0.795 \times 10^{-11} \text{ sec}$ となる。

外磁場が存在する場合では、 μ に対する制限を過ぎてかけられ磁場の限界がある。
磁場がないときの極限値はいかぬ。今 $\mu=2$ をめやすにすると (φ_{max} は大体
 γH_c の 0.2 倍となる)^{*}, $\gamma M_0 = 10\lambda$ では, field は 1.42 Hz オリ也小さくなる。

$$H < 1.42 \text{ Hz} = 10.2 \text{ K}\phi, \text{ for } \gamma M_0 = 10\lambda.$$

$$H < 1.13 \text{ Hz} = 8.08 \text{ K}\phi, \text{ for } \gamma M_0 = 20\lambda,$$

となるが, μ を大きくすれば $H \rightarrow H_c$ とせねばならぬことを意味してくる。 μ を大きくする
一つの解決法は, field を面内の位置の方向にかけることである。例えば $\theta = \pi/116$
で field を色々変えると μ の値を求めてみると, 次の表のようだ。この μ は

field	$\gamma M_0 = 10\lambda$	μ	$\gamma M_0 = 20\lambda$	M' の平衡角度 φ_0
9 K ϕ	2.72	1.36	1.51	or $86^\circ 30'$
8.5	3.35	1.68	1.44	$82^\circ 30'$
8.0	4.12	2.06	1.34	$76^\circ 47'$
7.5	4.93	2.47	1.20	$68^\circ 45'$

$$\mu = 2 \left(\frac{\lambda}{\gamma M_0} \right) \left(\frac{H_c}{H} \right) \sqrt{\frac{\sin(2\varphi - 2\theta)}{\sin 2\theta}} \quad (5.3)$$

で与えられる。^{(3.10), (3.11)} が明らかである。Fig. 1, 2, 3 では 安定度の原義
とられてゐるが, 上記の場合ではそれを φ_0 へとすることとする。

一方 $\delta M, \delta M'$ の運動の方はどうであるか。 $\mu > 2$ のときはこの問題は, 立派的な
自由振動の微小固有振動数を求めるところ帰着する。しかし通常の場合と異なれば
 λ -term のために固有値 w_n が複素数となるので, w_n real part or 所謂振動
数を ω_n , imaginary part の微小振動の damping を $\delta \omega_n$ とすると。Fig. 5
は $\gamma M_0 = 20\lambda$, $H_c = 8.0 \text{ K}\phi$ の場合の微小振動数の角度変化を示したものである。
horizontal axis, frequency is $\lambda = 0$ の極限のものに比べてどんなに変化している。 ω_n
の 10% の order の変化があるのは $\lambda A n$ term が大きくなるためである。unit は Hz = 8.0

(*) すぐあとで分かる $\gamma M_0 = 20\lambda$, $H = 8.0 \text{ K}\phi$ のときは ($\mu = 2$), 微小振動
の frequency が 2 Hz の order であるので, φ_{max} は一桁小さいことになる。

$K\phi$ であるが、 g_{max} は $\sin \theta$ の大きさをもつことになる。これから、各々の理論の "Validity criterion" として、 $\mu > 2$ をとつことは正当なものであるといふ。

次に uniaxial anisotropy の反強磁性体 MnF_2 , Cr_2O_3 について調べる。S. Tonomura よると、これらの物質に於ける H_E , H_C , H_A は以下のようになる。

$$MnF_2, \quad H_E = 0.503 \times 10^6 \text{ G}, \quad H_C = 0.96 \times 10^5 \text{ G}, \quad H_A = 0.922 \times 10^4 \text{ G}$$

$$Cr_2O_3, \quad H_E = 2.1 \times 10^6 \text{ G}, \quad H_C = 0.6 \times 10^5 \text{ G}, \quad H_A = 0.0857 \times 10^4 \text{ G} \quad (5.4)$$

field の tan θ の値は、 μ は次のようにある。

$$MnF_2, \quad 1.05 \text{ for } \gamma M_0 = 10\lambda, \quad 0.524 \text{ for } \gamma M_0 = 20\lambda$$

$$Cr_2O_3, \quad 7.0, \quad \dots, \quad 3.5 \quad \dots$$

これらから MnF_2 は非常に強い振動性の減衰運動をすることが分る。

$\mu = 7$ となるのは棄てておいたが、大体の値は見当が付いてある。 $g-t$ curves は 1.0 と 3.5 のものが書かれてる。 unit は MnF_2 で 0.592×10^{-13} sec, Cr_2O_3 で 0.943×10^{-13} である。 field がかけられた時は、有用可能な中は $\mu = 2$ である。

$$MnF_2, \quad H < 1.14 \text{ Hz} \text{ for } \gamma M_0 = 10\lambda, \quad H < 1.03 \text{ Hz} \text{ for } \gamma M_0 = 20\lambda,$$

$$Cr_2O_3, \quad H < 3.63 \text{ Hz} \text{ for } \dots, \quad H < 2.01 \text{ Hz} \quad \dots$$

MnF_2 では $\gamma M_0 = 20\lambda$ の場合の band は 誤差範囲の中に入っています。一方 Cr_2O_3 の場合は、各々の理論にて ideal なところです。そこで MnF_2 の場合の field を面内にかけてみる。 CuCl₂·2H₂O と同じく $\theta = \frac{\pi}{6}$ にて field の大きさを変えてみる。

field	μ		Mの平衡位置
	$\gamma M_0 = 10\lambda$	$\gamma M_0 = 20\lambda$	
107 kG	2.13	1.07	1.32 or $75^\circ 50'$
103 kG	2.33	1.17	1.26 $72^\circ 10'$
101 kG	2.45	1.23	1.21 $69^\circ 35'$
98 kG	2.62	1.31	1.13 65°

25

となる。一方 $107 K \phi \eta$ とき $\theta = \frac{\pi}{8}$ としてみると、 μ_B

$$\theta = \frac{\pi}{8}, \quad 2.63 \text{ (10λ)}, \quad 1.32 \text{ (20λ)}$$

$$107 K \phi: \quad \theta = \frac{\pi}{16}, \quad 2.13 \text{ (10λ)}, \quad 1.07 \text{ (20λ)}$$

20

となって、 $\theta = \pi/16$ へんじると幾分よくなつてゐることがある。結局 $\gamma M_0 \sim 10\lambda$ ではあるならば、
 MnF_2 の極限 $Hc < H_0$ が接近してゐるとされど、吾々の理論は広い適用性をもつて、 γM_0
 $\sim 20\lambda$ の物質になると、余程 $Hc < H_0$ の大小関係がうまい具合になつてゐると、色々
細々させねばならぬ」と云うことになる。

15

以上理論的に期待されるに、及び物質が理論への3条件等にて色々
考えたが、理論の中でも一応問題が残されている。オール運動方程式の採択の是非がある。
近頃強磁性体の場合にて、巨視的見地からの議論及び微視的見地からのもの
のがあるが、(3)式は $0^\circ K$ で"ある限り、その異方性がないとするとならば、全く正しいもの
と思われる。オール γM_0 との大小に関する理論が決定権を持つことである
が、これはひとへ微視的見地からの問題であつて、将来の課題である。しかし
dispersion とか、中性音波によることによって、理象論的に物質との対応をつけることが
可能であると思われる。

5

最後にこの課題を委ねて下され、終始あたたかい御指導をして下さった
永宮先生に心から感謝致します。又色々御親切に面倒をみて下さ
つた永宮研究室の方々に厚く御礼申しあげます。

Appendix 減衰振子の運動方程式について

一平面内に起る磁化の非定常運動の大体の有様は (3.5) の型の微分方程式で表わされる。こではこの方程式の解析的な性質を調べてみる。一般的には

$$\ddot{\psi} + c\dot{\psi} + k \sin \psi = 0, \quad k > 0 \quad (A.1)$$

と書き表わされる。 $k \leq 0$ のときは、 $\psi = \pi + \psi'$ と座標をとりなすとよい。また又、

$$v = \dot{\psi}/\sqrt{k}, \quad \mu = c/\sqrt{k}, \quad \varphi = x \quad (A.2)$$

とおくと、 (x, v) -space における次の形の reduced form の一階微分方程式に変形することができる。R.P.S.

$$\frac{dv}{dx} = -\mu - \frac{\sin x}{v} \quad (A.3)$$

Fig. 1, 2, 3 はこの微分方程式の積分曲線で Runge-Kutta の方法¹¹⁾で数值的に求めたものである。しかし曲線の本質的な点は次の点にて理解出来る。 (A.3) は

$$v(-x) = -v(x) \quad (A.4)$$

が必ず得られる。次に (A.1) の方程式の停留点、か (A.3) の方程式の特異点に対応したこと注目して、その特異性を調べることによって停留点の安定性を判定する。¹²⁾ singularity の判定に関する Poincaré の定理によると、singular point が存在すれば、原点をそのまゝ移して考えた場合、その附近で

$$\frac{dv}{dx} = \frac{ax + bv + P_2(x^2, v^2, xv)}{cx + dv + Q_2(x^2, v^2, xv)}$$

の如き方程式の singularity は

$$\frac{dv}{dx} = \frac{ax + bv}{cx + dv}, \quad \Delta = ad - bc \neq 0 \quad (A.4)$$

のこと全く同じである。そしてこの判定条件は次の D , Δ , $b+c$ の正負の組合せで Table に示されたとあることが出来る。

$$(A.5) \quad D = (b-c)^2 + 4ad, \quad$$

	$\Delta > 0,$	Saddle point.
$D > 0$	$\Delta < 0,$ (i) $b+c > 0,$ (ii) $b+c < 0,$	unstable nodal point. stable nodal point.
$D < 0$	(i) $b+c > 0,$ (ii) $b+c \leq 0,$ (iii) $b+c = 0,$	unstable spiral point. stable spiral point. center point. (A.6)
$D = 0$	(i) $b+c > 0,$ (ii) $b+c < 0,$	unstable nodal point. stable nodal point.

で stable となるのは、 $t \rightarrow \infty$ となるにつれて 構分曲線が 特異点に向って動くことを意味している。さて 各々の場合は、特異点は $x=0$ と $x=\pi$ の二点である。(A.6)から 分析する $x=\pi$ の点は 常に saddle point である。この点からは二本の曲線が出入りしてて その勾配は 次式で与えられる。

$$\left(\frac{dx}{dt} \right)_{x=\pi} = \frac{1}{2} (-\mu \pm \sqrt{\mu^2 + 4}) \quad (A.7)$$

一方 $x=0$ の点は、 μ の大きさによって

$$\left. \begin{array}{ll} \mu \geq 2 & \text{stable nodal point,} \\ \mu < 2 & \text{stable spiral point,} \\ \mu = 2 & \text{center point,} \end{array} \right\} \quad (A.8)$$

の如く変化する。この変化の有様は Fig. 1, 2, 3 に示されている。即ち 前者は 限界的な構分曲線だけを μ を色々変えて書いてある。限界的とは こうのは 原点に向う曲線は この二本で囲まれる領域の中にも存在しないからである。ここでは μ を固定して ときの Fig. 2, 3 を見れば 容易に理解されよう。

References

- 12) S. Foner, Phys. Rev., 107, 683 (1957).
- 20) S. Foner, J. de Phys. et Rad., Suppl., 272 (1958).
- 2) T. Nagamiya, Prog. Theor. Phys., 4, 350 (1951).
- C. Kittel, Phys. Rev., 82, 565 (1951).
- T. Nagamiya, K. Yasuda and R. Kubo, Advances in Phys., 4, 1 (1955).
- 3) H. J. Gerritsen and M. Garber, Physica, 22, 481 (1956).
- 15) M.I. Kaganov and D.M. Tsvetnik, Z.E.T.F., 34, 524 (1958).
- 4) E.S. Dayhoff, J. Appl. Phys., 29, 344 (1958).
- 5) L. Neel, Ann. de Phys., 5, 232 (1936).
- 6) Poulik, van den Handel, Ubbink, Poulik and Gorter, Phys. Rev., 82, 552 (1951).
- 7) K. Yasuda, Prog. Theor. Phys., 6, 691 (1951).
- 8) Ubbink, Poulik, Gerritsen and Gorter, Physica, 18, 361 (1952).
- 9) K. Yasuda and T. Moriya, Kyoto Conf. Theor. Phys., 751 (1953).
- 10) Van den Handel, Gijmraan and Poulik, Physica, 18, 201 (1952).
- 11) H. Levy and E.A. Baggott, "Numerical Studies in Differential Equations," Vol. 1, W.H. Freeman and Co., London (1934).
- 12) J.J. Stoker, "Nonlinear Vibration," Interscience Pub., Inc., New York (1950).
- 13) G.V. Skrotzki and V.T. Shmatov, Z.E.T.F., 34, 740 (1958).
- H.B. Callen, J. Phys. Chem. Solids, 4, 256 (1958).

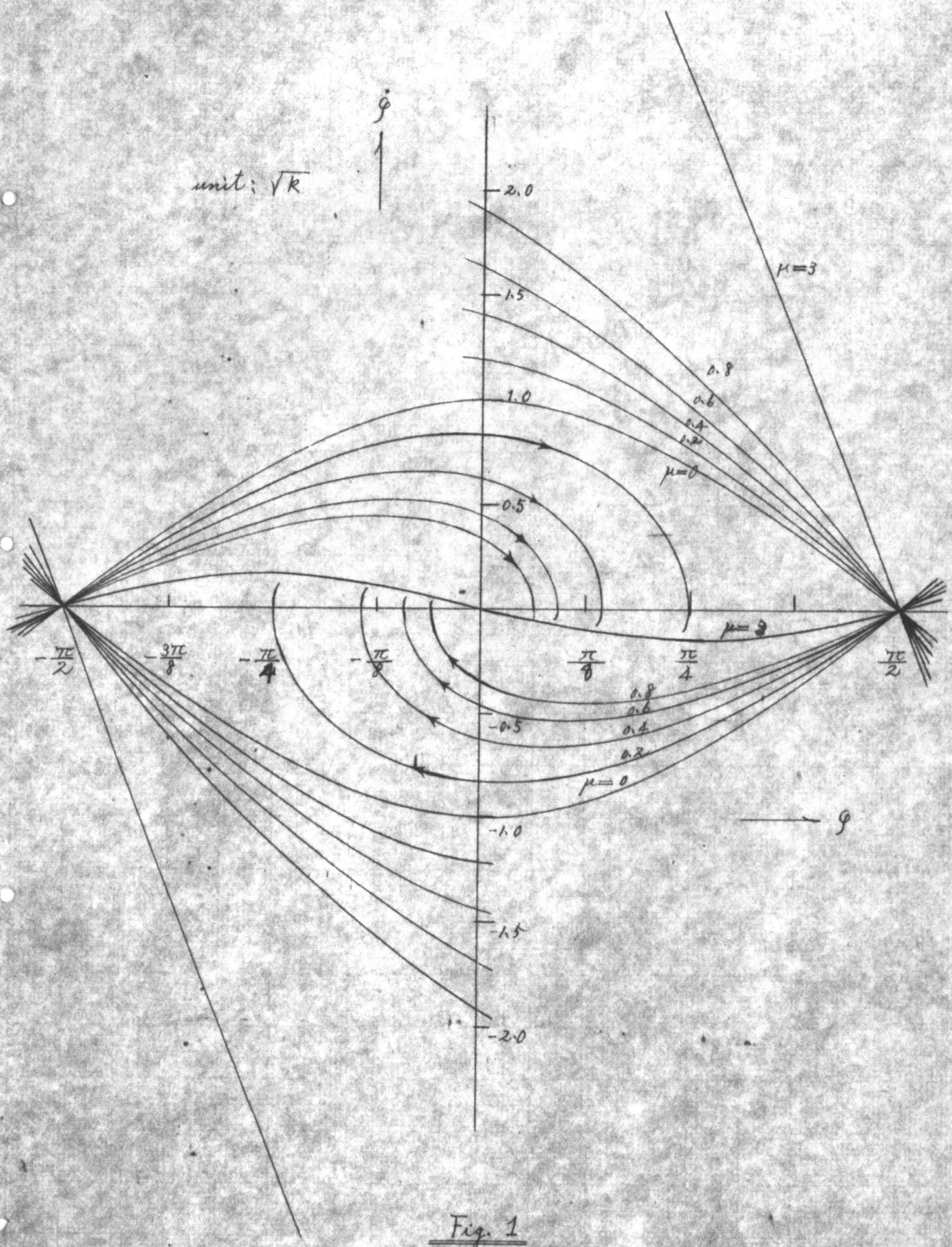


Fig. 1

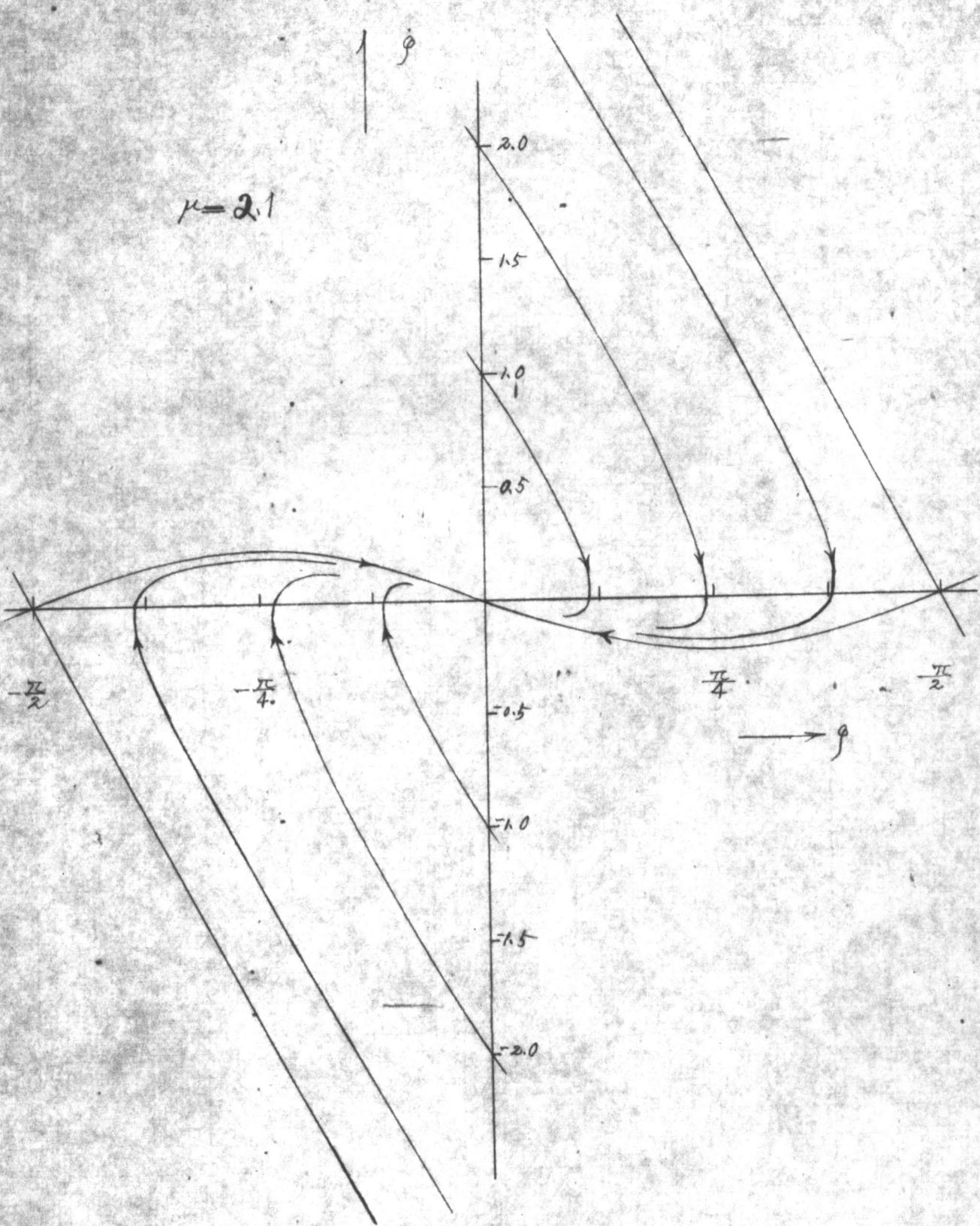


Fig. 2

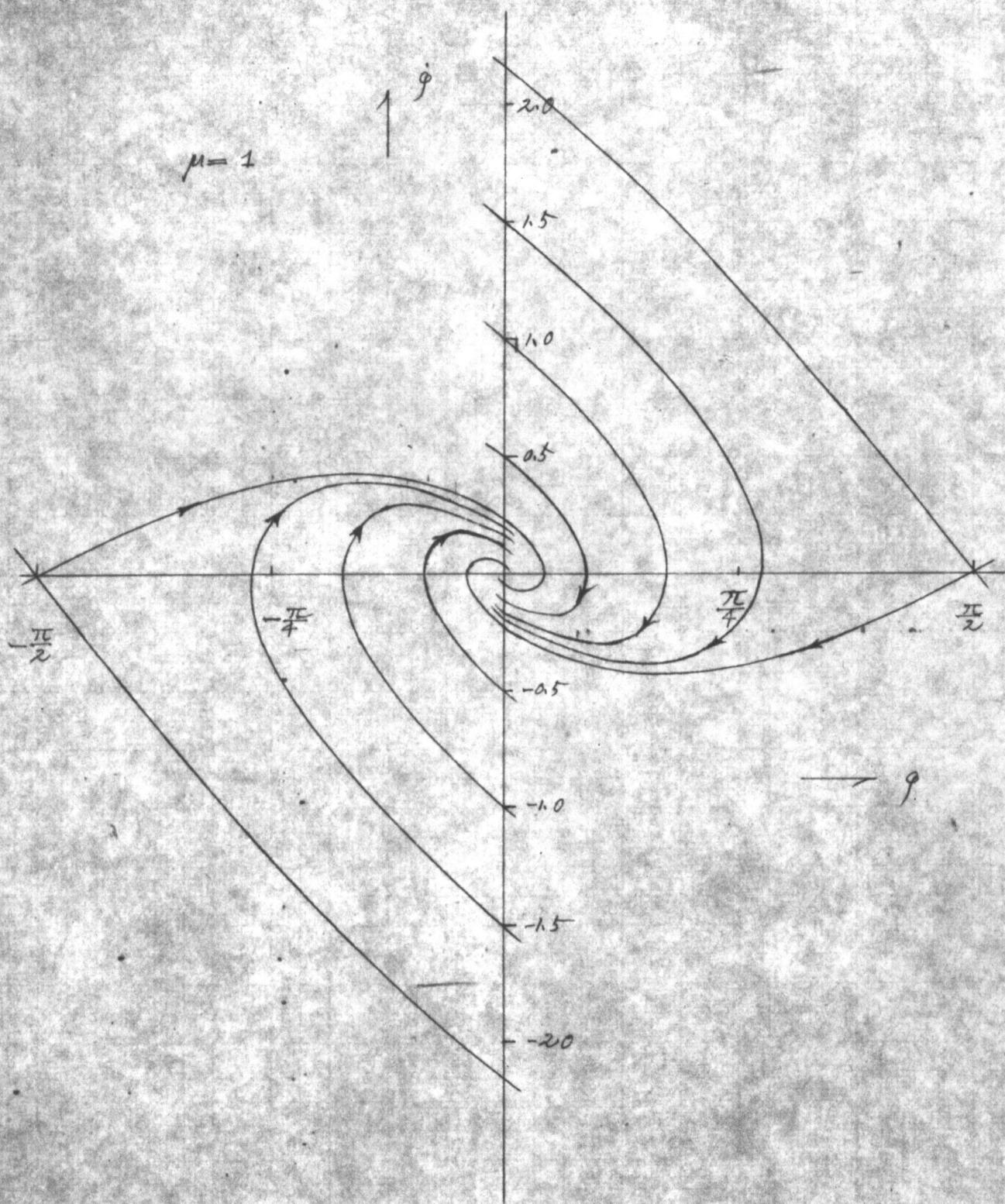
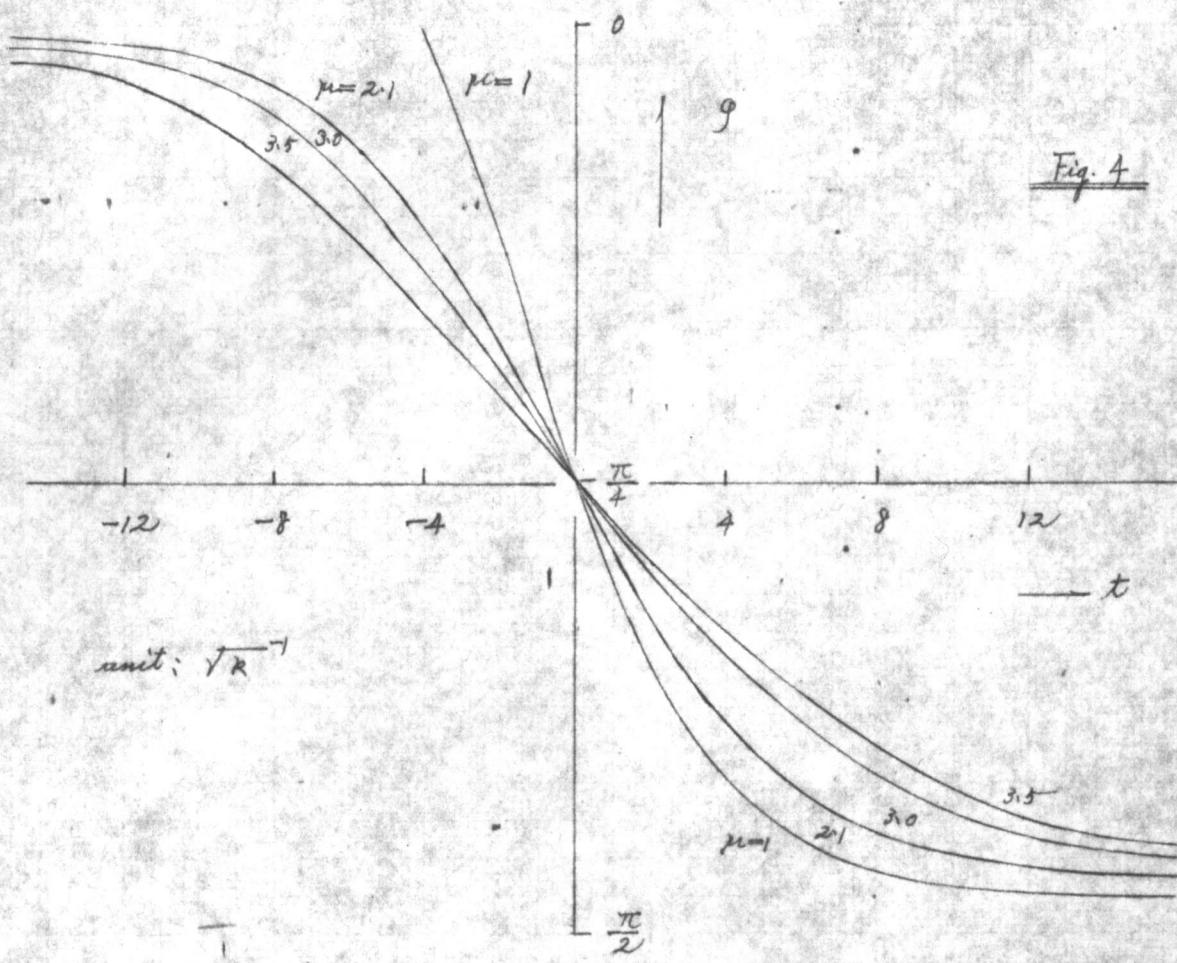


Fig. 3



unit: \sqrt{R}

