

Title	反強磁性体に於る磁化の非定常運動について
Author(s)	鈴木, 英雄
Citation	大阪大学, 1960, 博士論文
Version Type	VoR
URL	https://hdl.handle.net/11094/2501
rights	
Note	

Osaka University Knowledge Archive : OUKA

<https://ir.library.osaka-u.ac.jp/>

Osaka University

25

20

15

反強磁性体の磁化の非定常運動 κ -MT

鈴木英雄

10

5

§1 序論

常磁性体及び強磁性体に於ける磁化の非定常運動は現象論的にかなり研究されている。即ち前者では *adiabatic rapid passage* の場合の考察が、Bloch 方程式又はその修正されたものを問題とする^(*) こと行われている。一方後者では電子計算機の磁気記憶装置の問題に関連して、磁場及転の際の磁化運動が、Landau-Lifshitz 方程式^(**) 及びその変形の Gilbert 方程式と問題とする^(**) こと行われている。さらし及強磁性体の場合^(**) には、未だこの様な研究は理論的に及実験的になされておらず、しかし最近瞬間的な強磁場(数百 μs , 最高 750 k ϕ)を用いた強磁性共鳴吸収の実験が S. Jones¹⁾ によって行われておる。この論文では将来やがて行われようとする実験をさきかき、 $\text{CuCl}_2 \cdot 2\text{H}_2\text{O}$, MnF_2 , Cr_2O_3 を対象として、強磁性体における spin flopping の dynamical な運動を現象論的に考察した。

先ず簡単なために話を絶体零度の場合に限ることとする。その問題となるのは運動方程式などの様な型を取らざるべからざることである。さらし常磁性体及び強磁性体でかなり議論された問題で、現在、緩和効果を現象論的に取り入れた運動方程式としては Bloch 方程式とその修正されたもの、及び Landau-Lifshitz の方程式とその変形の Gilbert 方程式^(***) がよく用いられている。vector 方程式とみる限り、Landau-Lifshitz 型と Gilbert 型の相異は、単なる parameter の定義の相異に帰着する。一方強磁性体では、共鳴吸収の実験は J. Nagamiya, C. Kittel²⁾ によって独立に提唱された標準的な理論²⁾ によってよく説明されているが、やはり緩和効果をとり入れた運動方程式としては、Nagamiya-Kittel のものを Bloch 型⁴⁾ 又は Landau-Lifshitz 型³⁾ の拡張したものを用いる。こゝでは絶体零度で磁化 vector の長さの変化がなると考え合せ、微視的な議論するのではなく、単に拡張された Landau-Lifshitz の式から出発することとする。即ち

(*) H. C. Torrey, *Phys. Rev.*, 76, 1059 (1949).
 G. Krüger and G. Laubien, *Zeit. für Phys.*, 145, 456 (1956).
 V. S. Grechishkin, *Z. E. T. F.*, 34, 902 (1958).
 (***) R. Kikuchi, *J. Appl. Phys.*, 27, 1352 (1956).
 P. R. Gillette and K. Oshima, *J. Appl. Phys.*, 29, 529 (1958).

25

$$\dot{M}^{\pm} = \gamma [M^{\pm} \times H_{\text{eff}}^{\pm}] - \frac{\lambda}{M_0} [M^{\pm} \times [M^{\pm} \times H_{\text{eff}}^{\pm}]] \quad (1.1)$$

ここで M^{\pm} は部分格子磁化 vector, γ は磁気角運動量比, λ は現象論的な減衰定数, M_0 は M^{\pm} の絶対値, H_{eff}^{\pm} は M^{\pm} 働く全有効磁場である。零二有効磁場は

20

$$H_{\text{eff}}^{\pm} = H - A M^{\pm} - P M^{\pm} + \phi M^{\pm}, \quad (1.2)$$

で与えられるとする。 H は外部磁場, $-A M^{\pm}, -P M^{\pm}$ は又 自分以外 の部分格子との交換磁場, ϕM^{\pm} は異方性磁場を表わす。今 x 軸を容易軸, y 軸を M^{\pm} の z 軸とすると, $\text{linear } \phi$ の成分は次の如くとすることが出来る。

15

$$\phi_x > \phi_y, \quad \phi_z = 0 \quad (1.3)$$

10

・零三有効交換磁場の自乗に比べて外部磁場の自乗は省略される程度, 即ち自発磁化の自乗に比べて誘発磁化の自乗が省略される程度であるとする。 §2 ではこの仮定, 及び上記の物質では異方性磁場が交換磁場に比べてかなり小さいを用いて方程式を簡単にする。更に運動は必ず一面内を起すことが期待されるので, 自発磁化の z 面からのみはすべし成分の自乗は面内成分の自乗に比べて省略できるとし。 §3, §4 では磁化の非定常運動の際の最高角速度が通常の反強磁性共鳴吸収の frequency に比べてかなり遅い場合を詳説, 速い場合を簡単に考察する。前者では運動は次の二つの直交成分として描像される。即ち一つは ω_0 とその奥の平衡値をとりながら, 各位置で減衰振子の式に従って運動する部分であり, 他一つは各位置でわずかな異方性振動数による微小振動の部分である。この描像がゆるされるためにはかなり外部磁場の強さ制限があるが, 臨界磁場の程度の場合には上記の物質では大体この描像が成立するところから。後者では運動は複雑である。この磁場の強さには, 速い場合で, 大体の運動はやはり減衰振子の式で記述されることになる。最後に §5 では M_0 の比を 1, 10, 100 の二通りとして, $\text{CuCl}_2 \cdot 2\text{H}_2\text{O}, \text{MnF}_2, \text{Cr}_2\text{O}_3$ でこの仮定が期待されることを調べる。なお減衰振子の方程式の解析的な性質の Appendix で述べられる。

(***) F. Bloch, Phys. Rev., 70, 460 (1946)
 Codrington, Olds and Tarr, Phys. Rev., 95, 807 (1954).
 (***) L. D. Landau and E. M. Lifshitz, Phys. Z. Sowjet., 8 153 (1935).
 T. A. Gilbert, Phys. Rev., 100, 1243 (1955).
 T. A. Gilbert and J. M. Kelly, A. I. E. E., New York, 253 (1955).

§2 絶体零度に於ける運動方程式

先ず 部分格子磁化を m で書かれて n は (1.1) と,

$$M = M^+ + M^-, \quad M' = M^+ - M^-, \quad (2.1)$$

で定義する M, M' の式を書きかえよ。即ち

$$\begin{aligned} \dot{M} = & \gamma \{ M \times H \} + \frac{\gamma}{2} \{ M \times \phi M \} + \frac{\gamma}{2} \{ M' \times \phi M' \} + \lambda \{ 2H - (A + P)M + \phi M \} \\ & - \frac{\lambda}{4M_0^2} M \{ M \cdot (2H - (A + P)M + \phi M) + (A - P)M'^2 + M' \cdot \phi M' \} \\ & - \frac{\lambda}{2M_0^2} M' \{ M' \cdot H + M' \cdot (\phi - P)M \}, \end{aligned} \quad (2.2)$$

$$\begin{aligned} \dot{M}' = & \gamma \{ M' \times (H - AM) \} + \frac{\gamma}{2} \{ M' \times \phi M \} + \frac{\gamma}{2} \{ M' \times \phi M' \} + \lambda \{ \phi M' + (A - P)M' \} \\ & - \frac{\lambda}{4M_0^2} M' \{ M \cdot (2H - (A + P)M + \phi M) + (A - P)M'^2 + M' \cdot \phi M' \} \\ & - \frac{\lambda}{2M_0^2} M' \{ M' \cdot H + M' \cdot (\phi - P)M \}, \end{aligned} \quad (2.3)$$

この (2.1) は M^{\pm} の大きさを変える方程式であるが、明らかに次の関係が成立し得る。

$$|M^{\pm}| = M_0, \quad M \cdot M' = 0, \quad (2.4)$$

従って (2.2), (2.3) に於ける M, M' の項は実は存在しない。

次に吾々は H の大きさは、その二乗の交換磁場 H_e の二乗に比べて著略できる程度とする。即ち M の大きさは H_e の $\lambda_2 H$, $\lambda_2 = 1/A$ であることを見え、これは $M^2 \gg M'^2$ と仮定すれば等しい。一方問題として $\text{CuCl}_2 \cdot 2\text{H}_2\text{O}$, MnF_2 , Cr_2O_3 等は $A \gg \phi_x - \phi_y$, $A \gg \phi_x$ が成立し得る。そこで上の仮定とこれと、以下の簡単化では、 ϕ_x, ϕ_y は A に比べて H_e の一次の微小量と考えることにする。この物定数間の関係式と、 $M^2 \gg M'^2$ の仮定は H_e の臨界磁場 H_c の程度 n 程度 n である ^{ときは} 確からず consistent にならない ^(*) の spin flopping の考察は一向に差支えない仮定と見えて。

(*) 二軸性の場合、 xy 面に起る spin flopping の H_c は

$$H_c^2 = 2A(\phi_x - \phi_y)M_0^2, \quad \lambda_2 A = 1$$

であるが、確かに

$$M^2 \sim 2(\phi_x - \phi_y)M_0^2/A \ll M_0^2$$

が成立する。一軸性の場合には $\phi_y = 0$ とする。

この近似方程式 (2.2), (2.3) の maximum term は torque の部分では $\gamma M_0 H$, relaxation の部分では λH の order となる。^(*) さて λ -term は λH を基準とし, γ -term は $\gamma M_0 H$ を基準として 2nd order term を省略すれば, γM_0 と λ の大小関係は必ずしも一般的に近似的運動方程式を導き出すことが出来る。即ち

$$\dot{M} = \gamma [M \times H] + \frac{\gamma}{2} [M' \times \phi M'] + 2\lambda (H - AM) + \lambda \left[\phi - \frac{1}{4M_0^2} (M' \cdot \phi M') \right] M - \frac{\lambda}{2M_0^2} [(M' \cdot H) + M' \cdot \phi M'] M' \quad (2.5)$$

$$\dot{M}' = \gamma [M' \times (H - AM)] + \frac{\gamma}{2} [M' \times \phi M'] + \frac{\gamma}{2} [M' \times \phi M'] + \frac{\lambda M'}{2M_0^2} (AM^2 - M' \cdot H) + \lambda \left[\phi M' - \frac{1}{4M_0^2} (M' \cdot \phi M') M' \right] - \frac{\lambda}{2M_0^2} (M' \cdot H) M - \frac{\gamma}{8M_0^2} (M' [M' \times \phi M']) M' \quad (2.6)$$

ただし吾々の近似では当然 $M^2 = 4M_0^2$, $M^2 = 0$ であるから, $M' \cdot M' = M \cdot M = 0$, 即ち

$$\frac{\gamma}{2} M' \cdot [M' \times \phi M'] + 2\lambda [AM^2 - (M' \cdot H)] = 0 \quad (2.7)$$

が成立せねばならぬ。(2.6) の M' を含む term はこの関係式を用いて書きかえてある。

なお $A \gg \phi_x, \phi_y, \phi_z$ のときは更に簡単になる。上記の物価では ϕ はかなり微小な値となる。

$$\dot{M} = \gamma [M \times H] + \frac{\gamma}{2} [M' \times \phi M'] + 2\lambda (H - AM) - \frac{\lambda}{2M_0^2} (M' \cdot H) M' \quad (2.8)$$

$$\dot{M}' = \gamma [M' \times (H - AM)] + \lambda \left[\phi - \frac{1}{4M_0^2} (M' \cdot \phi M') \right] M' - \frac{\lambda}{2M_0^2} (M' \cdot H) M + \frac{\lambda M'}{2M_0} (AM^2 - M' \cdot H) \quad (2.9)$$

さてここで上式から得られる解の性質をみておいてみる。まず $H_x > H_c$ のときは ($H_y = 0$), x 軸が確かに安定であり, $H_x > H_c$ となれば ϕ が不安定になることは ϕ の方程式の導

(*) M' の方程式では ϕ は ϕ の直観的近似値。さて $M^2 = 4M_0^2 - M'^2$ として 4項, 5項を整理しておくと

$$\lambda (A - P) M' - \frac{\lambda}{2M_0^2} \left[-\frac{A+P}{2} M^2 + \frac{A-P}{2} M'^2 \right] M' = \frac{\lambda}{4M_0^2} (2AM^2) M'$$

となる main term は λAM_0 の order となるからである。

25

動方程式を解いておけることが示される。(*) 同様に $H_0 > H > H_c$ のときは y 軸の方向に安定な軸であることが示される。この H_0 は xz 面の spin flopping が起る場合の臨界磁場である。従ってこの運動はこの場合 x 軸から y 軸の方向に起ることが示される。更に $H > H_0 > H_c$ とすれば y 軸附近に安定長になる。このどの path が現実的であるかは行先の energy の大小によるわけで、この意味で二軸性異方性 energy の場合の運動は強に xy 面内で起るとして差支えない。実際のことには安定な微小振動の存在によって後で確かめることが出来る。

20

一方一軸性の場合には初めの x 軸を含む面内すべて等価である。この M_x, M_y を比較して見れば分かるが、ある面 (仮りに xy 面として cdn) から M_x, M_y のいずれか一方に振り向くのは、一軸性であっても二軸性でも本質的な差がないことが示される。従って一軸性の場合での運動は一平面内で起る。このどの面内で起るかは偶然的要素に支配される点がある。そこで

15

今 $M_x^2, M_y^2 \gg M_z^2$ とすれば、(2.5), (2.6) は次の様になる。

$$\begin{aligned} m_x &= \frac{\lambda H_c}{2M_0^2} M_y'^2 - \frac{\lambda H_y}{2M_0^2} M_x' M_y' - 2l A m_x - \frac{\gamma \phi_{xy}}{2} M_y' M_z' - \gamma H_y m_y, \\ m_y &= -\frac{\lambda H_c}{2M_0^2} M_x' M_y' + \frac{\lambda H_x}{2M_0^2} M_x'^2 - 2l A m_y + \frac{\gamma \phi_{xz}}{2} M_x' M_z' + \gamma H_x m_x, \\ m_z &= -\frac{\lambda H_c}{2M_0^2} M_x' M_z' - \frac{\lambda H_y}{2M_0^2} M_y' M_z' - 2l D m_z - \frac{\gamma \phi_{xy}}{2} M_x' M_y' - \gamma H_x m_y + \gamma H_y m_x, \end{aligned} \quad (2.10)$$

10

$$\begin{aligned} M_x' &= -\gamma D m_z M_y' + \gamma A m_y M_z' - \gamma H_y M_z' + \frac{\lambda M_x'}{2M_0^2} (A M_0^2 - M \cdot H) \\ &\quad + \frac{\lambda \phi_{xy}}{4M_0^2} M_x' M_y' + \frac{\lambda H_c}{2M_0^2} m_y M_y' - \frac{\lambda H_y}{2M_0^2} m_x M_y', \\ M_y' &= \gamma D m_z M_x' - \gamma A m_x M_z' + \gamma H_x M_z' + \frac{\lambda M_y'}{2M_0^2} (A M_0^2 - M \cdot H) \\ &\quad - \frac{\lambda \phi_{xy}}{4M_0^2} M_x' M_y' - \frac{\lambda H_c}{2M_0^2} m_y M_x' + \frac{\lambda H_x}{2M_0^2} m_x M_x', \\ M_z' &= \gamma A (m_x M_y' - m_y M_x') - \gamma H_x M_y' + \gamma H_y M_x' \\ &\quad - \lambda \phi_{xz} M_z' - \frac{\lambda H_c}{2M_0^2} m_z M_x' - \frac{\lambda H_y}{2M_0^2} m_z M_y', \end{aligned} \quad (2.11)$$

5

(*) 例えば $\delta M_y'$ に対して方程式を立てる。

$$\delta M_y'' + 2l A \delta M_y' + (\gamma^2 + \frac{\lambda^2}{M_0^2})(H_c^2 - H^2) \delta M_y = 0$$
 これは $H_0 > H$ のとき、 $\delta M_y = 0$ の解が安定であることを示す。

(**) $M = (m_x, m_y, m_z), M' = (M_x', M_y', M_z'), D = (A + \frac{\phi_{xz}}{2}), \phi_{xy} = \phi_x - \phi_y,$
 又 $M_x'^2 + M_y'^2 = 4M_0^2, M \cdot M' = 0$ を用いて適当に書きかえてある。

§3 遅い減衰運動の場合

先ず connection では遅い減衰運動の場合、即ち xy 面内を起る運動の角速度が、ゆわゆる反強磁性共鳴吸収の共鳴周波数に比べて小さい場合を考へる。このときは吾々は、 M_x, M_y が殆ど平衡値に近しい値となりながら各位置を通過するに等しいに描像することが出来る。なほこの描像がゆわゆる反強磁性共鳴に於ける磁場のある制限が加へられる。これは解を求めておきかゝるが、 $H \sim H_c$ のときは充分正しいのであつておきかゝる。さて

$$\left. \begin{aligned} M_x' &= 2M_0 \cos \varphi + \delta M_x' \\ M_y' &= 2M_0 \sin \varphi + \delta M_y' \\ M_z' &= \delta M_z' \end{aligned} \right\} \left. \begin{aligned} m_x &= \chi_2 H \sin(\varphi - \theta) \sin \varphi + \delta m_x \\ m_y &= -\chi_2 H \sin(\varphi - \theta) \cos \varphi + \delta m_y \\ m_z &= \delta m_z \end{aligned} \right\} \quad (3.1)$$

とて、(2.10), (2.11) の方程式を φ と、 $\delta M_x', \delta M_y'$ に関する 2 組の式に分離しておき、 φ と θ は xy 面にある磁場と z 軸とのなす角である。 φ に関する

$$\left. \begin{aligned} \chi_2 H \sin(2\varphi - \theta) \dot{\varphi} &= -\gamma H \sin \theta \delta m_z - \gamma M_0 \dot{\varphi}_z \sin \varphi \delta M_y' \\ -\chi_2 H \cos(2\varphi - \theta) \dot{\varphi} &= \gamma H \cos \theta \delta m_z + \gamma M_0 \dot{\varphi}_z \cos \varphi \delta M_y' \end{aligned} \right\} \quad (3.2)$$

$$\left. \begin{aligned} \delta m_z &= -\frac{\gamma \chi_2}{2} [H^2 \sin 2\varphi - H^2 \sin(2\varphi - 2\theta)] - 2\lambda D \delta m_z - \frac{\lambda H}{M_0} \cos(\varphi - \theta) \delta M_y' \\ 2\dot{\varphi} &= 2\gamma D \delta m_z + \frac{\lambda \chi_2}{4M_0^2} [H^2 \sin(2\varphi - 2\theta) - H^2 \sin 2\varphi] + \frac{\gamma H}{2M_0} \cos(\varphi - \theta) \delta M_y' \\ \delta M_y' &= -2\dot{\varphi}_z \delta M_y' - \frac{\lambda H}{M_0} \cos(\varphi - \theta) \delta m_z \end{aligned} \right\} \quad (3.3)$$

(3.2) は又次の形にかけられる。これは M_x' と共に動く座標系を以て m_y, m_x の

$$\left. \begin{aligned} -\chi_2 H \cos(\varphi - \theta) \dot{\varphi} &= \gamma M_0 \dot{\varphi}_z \delta M_y' + \gamma H \cos(\varphi - \theta) \delta m_z \\ 0 &= -\chi_2 H \sin(\varphi - \theta) \dot{\varphi} + \gamma H \sin(\varphi - \theta) \delta m_z \end{aligned} \right\} \quad (3.2')$$

右辺の程度であることの意味して置く。これは (3.3) と予値はして置く。 (*) の m_z 、

(*) (3.2') によると $\dot{\varphi} = \gamma A \delta m_z$ として、一見 (3.3) と予値はして置く形であるが、(3.3) の $\dot{\varphi}$ を (3.2') に代入しておくとおきかゝる形に、余分の term の order は 2nd order となる。即ち、

$$\begin{aligned} \frac{\lambda \chi_2^2}{4M_0^2} H [H^2 \sin(2\varphi - 2\theta) - H^2 \sin 2\varphi] \sin(2\varphi - \theta) &\sim \lambda H \left(\frac{H}{H_{ex}}\right)^2 \\ \frac{\gamma \chi_2}{2M_0} H^2 [\sin(2\varphi - \theta) \cos(\varphi - \theta)] \delta M_y' &\sim \gamma M_0 H \left(\frac{\delta M_y'}{M_0}\right) \left(\frac{H}{H_{ex}}\right) \\ \gamma \chi_2 \dot{\varphi}_z H \delta m_z / 2 &\sim \gamma M_0 H (\dot{\varphi}_z / A) (\delta m_z / M_0) \end{aligned}$$

25

M'_z を含む項は次の様な理由による。即ち $m_z, M'_z, (H^2 \sin(2\varphi - 2\theta) - Hc^2 \sin 2\varphi)$ と
 0 とする。 $\dot{\varphi} = 0$ と仮定して考えれば、磁化の非定常運動は c による媒介として起る。
 一方 $\lambda \rightarrow 0$ の極限で平衡位置附近の微小振動を計算してみれば、 m_z, M'_z
 が振動に関与してはいることも確かである。結局この term の運動のこの部分に本質的
 であるか否かは δn_z 、 m_z, M'_z の同位の微小量と考える限り、 $\gamma M_0 D m_z, \lambda D m_z$
 以外の m_z, M'_z を含む term は 1st order であるので、ここではこの 2 つの term の減衰部
 分は本質的であると考えられる。^(*) 即ち (3.3) の

20

$$\left. \begin{aligned} 2\dot{\varphi} &= 2\gamma D m_z + \frac{\lambda \chi_1}{2M_0^2} [H^2 \sin(2\varphi - 2\theta) - Hc^2 \sin 2\varphi], \\ \dot{m}_z &= -2\lambda D m_z + \frac{\gamma \chi_1}{2} [H^2 \sin(2\varphi - 2\theta) - Hc^2 \sin 2\varphi], \end{aligned} \right\} \quad (3.4)$$

15

となるが、これは次の様な微分方程式に変形される。

$$2\ddot{\varphi} + 2\lambda A \dot{\varphi} + \left(\gamma^2 + \frac{\lambda^2}{M_0^2}\right) [Hc^2 \sin 2\varphi - H^2 \sin(2\varphi - 2\theta)] = 0, \quad (3.5)^{(*)}$$

の式
 ψ
 H
 H_c

次に微小振動部分の運動方程式を m とは

10

$$\left. \begin{aligned} \delta \dot{m}_x &= \frac{2\lambda H}{M_0} \cos\theta \sin\varphi \delta M'_y - \frac{\lambda H}{M_0} \sin\theta (\cos\varphi \delta M'_y + \sin\varphi \delta M'_x) - 2\lambda A \delta m_x \\ &\quad - \gamma M_0 \phi_y \sin\varphi \delta M'_y - \gamma H \sin\theta \delta m_y, \\ \delta \dot{m}_y &= \frac{2\lambda H}{M_0} \sin\theta \cos\varphi \delta M'_x - \frac{\lambda H}{M_0} \cos\theta (\cos\varphi \delta M'_y + \sin\varphi \delta M'_x) - 2\lambda A \delta m_y \\ &\quad - \gamma M_0 \phi_x \cos\varphi \delta M'_y + \gamma H \cos\theta \delta m_x, \\ \delta \dot{m}_z &= -\frac{\lambda H}{M_0} \cos(\varphi - \theta) \delta M'_y - \gamma M_0 \phi_{xy} (\cos\varphi \delta M'_y + \sin\varphi \delta M'_x) - 2\lambda D \delta m_z \\ &\quad - \gamma H \cos\theta \delta m_y + \gamma H \sin\theta \delta m_x, \end{aligned} \right\} \quad (3.6)$$

5

$$\left. \begin{aligned} \delta \dot{M}'_x &= -2\gamma M_0 D \sin\varphi \delta m_z - \gamma H (\sin\theta + \sin(\varphi - \theta) \cos\varphi) \delta M'_y + \lambda \phi_{xy} \sin^2\varphi \delta M'_x \\ &\quad + \frac{\lambda \chi_1}{4M_0^2} [2Hc^2 \sin 2\varphi - H^2 \sin(2\varphi - 2\theta)] \delta M'_y + \frac{\lambda H}{M_0} (\cos\theta \delta m_y - \sin\theta \delta m_x) \sin\varphi, \\ &\quad + \frac{\lambda M'_y}{2M_0^2} [2\lambda M_0 \delta M_1 - H \delta M_1], \quad + \frac{\lambda M'_x}{2M_0} [2\lambda M_0 \delta M_1 - H \delta M_1] \\ \delta \dot{M}'_y &= 2\gamma M_0 D \cos\varphi \delta m_z + \gamma H (\cos\theta + \sin(\varphi - \theta) \sin\varphi) \delta M'_x - \lambda \phi_{xy} \cos^2\varphi \delta M'_y \\ &\quad - \frac{\lambda \chi_1}{4M_0^2} [2Hc^2 \sin 2\varphi - H^2 \sin(2\varphi - 2\theta)] \delta M'_x - \frac{\lambda H}{M_0} (\cos\theta \delta m_y - \sin\theta \delta m_x) \cos\varphi, \end{aligned} \right\}$$

(*) この term の振動が当て得るものであることは、(3.3) からわざわざ出発するのではなくて
 (3.5) から導き出されることから確かである。尤も 0 次 order のことについての話である。
 一方 (3.5) の 1st order を振動部分に与えれば、 $\lambda \rightarrow 0$ の極限で本質的の 0 次 order
 のものである。それで $D \rightarrow \lambda, \lambda D \rightarrow 1$ としてある。

$$\delta \dot{M}_z' = \gamma H (\sin(\varphi - \theta) \sin \varphi - \cos \theta) \delta M_y' + \gamma H (\sin(\varphi - \theta) \cos \varphi + \sin \theta) \delta M_x' - \lambda \phi_2 M_y' + 2\gamma M_0 A (\sin \varphi \delta m_x - \cos \varphi \delta m_y) - \frac{\lambda H}{M_0} \cos(\varphi - \theta) \delta m_z \quad (3.7)$$

これはかなりよい近似方程式であるが、base 上の座標に作り変えると、かなり簡単にすることができ。

$$\left. \begin{aligned} \delta m_x &= \cos \varphi \delta m_x + \sin \varphi \delta m_y, & \delta M_x'' &= \cos \varphi \delta M_x' + \sin \varphi \delta M_y', \\ \delta m_y &= -\sin \varphi \delta m_x + \cos \varphi \delta m_y, & \delta M_y'' &= -\sin \varphi \delta M_x' + \cos \varphi \delta M_y', \\ \delta m_z &= \delta m_z, & \delta M_z'' &= \delta M_z' \end{aligned} \right\} \quad (3.8)$$

表 3 (3.8) の対して

	δm_x	δm_y	δm_z	$\delta M_x''$	$\delta M_y''$	$\delta M_z''$
δm_x	$2\lambda A$	0	$\gamma H \sin(\varphi - \theta)$	0	$\frac{\lambda H}{M_0} \sin(\varphi - \theta)$	0
$\delta M_x''$	0	$-2\lambda A$	$\gamma H \cos(\varphi - \theta)$	$-\frac{2\lambda H}{M_0} \sin(\varphi - \theta)$	$-\frac{\lambda H}{M_0} \cos(\varphi - \theta)$	$\gamma M_0^2 \phi_2 \cos^2 \varphi + \gamma M_0^2 \phi_2 \sin^2 \varphi$
δm_z	$-\gamma H \sin(\varphi - \theta)$	$-\gamma H \cos(\varphi - \theta)$	$-2\lambda D$	$-\gamma M_0 \phi_{xy} \sin 2\varphi$	$-\gamma M_0 \phi_{xy} \cos 2\varphi$	$-\frac{\lambda H}{M_0} \cos(\varphi - \theta)$
$\delta M_z''$	$-\frac{\lambda H}{M_0} \cos(\varphi - \theta)$	$-\frac{\lambda H}{M_0} \sin(\varphi - \theta)$	0	0	$-\frac{\lambda \chi_2}{4M_0^2} \Lambda$	0
$\delta M_y''$	$-\frac{\lambda H}{M_0} \sin(\varphi - \theta)$	$-\frac{\lambda H}{M_0} \cos(\varphi - \theta)$	$2\gamma M_0 D$	$-\frac{\lambda \chi_2}{4M_0^2} \Lambda$	$-\lambda \phi_{xy} \cos 2\varphi$	$\gamma H \cos(\varphi - \theta)$
$\delta M_x'$	0	$-2\gamma M_0 A$	$-\frac{\lambda H}{M_0} \cos(\varphi - \theta)$	0	$-\gamma H \cos(\varphi - \theta)$	$-\lambda \phi_2$

(3.9)

ただしここで ϕ の出て来る term, 表 3 の m_x に対する m_y の座標 term は order $\epsilon \rightarrow 0$ となるので省略した。この正当性はあとで確かになる。又 Λ, Λ' の定義は次の通りである。

$$\Lambda' = 3H\epsilon^2 \sin 2\varphi - H^2 \sin 2(\varphi - \theta)$$

$$\Lambda = H\epsilon^2 \sin 2\varphi - H^2 \sin 2(\varphi - \theta)$$

この座標微小振動中の運動は、近似的に、固有値問題にのみならずこれになる。

25

さて (3.5) は xy 面に起る磁化の非定常運動を大雑把に記述するに於てある。この stationary point は 2つあり、これら

$$H_0^2 \sin 2\varphi - H^2 \sin 2(\varphi - \theta) = 0 \quad (3.10)$$

を満足するが、これらの真の安定であるかはこの式からだけでは分らない。そこで一つの真 φ_0 を原真とて、 $\varphi = \varphi_0 + \varphi'$ とおいてみると、(3.5) は次の形になる。

20

$$\left. \begin{aligned} 2\ddot{\varphi}' + 2\lambda A(2\dot{\varphi}') + \left(\gamma^2 + \frac{\lambda^2}{M_0^2}\right) \left[H_0^2 \cos 2\varphi_0 - H^2 \cos 2(\varphi_0 - \theta) \right] \sin 2\varphi' &= 0, \\ \text{or } \sin 2\theta \neq 0 \text{ のとき,} \\ 2\ddot{\varphi}' + 2\lambda A(2\dot{\varphi}') - \left(\gamma^2 + \frac{\lambda^2}{M_0^2}\right) \frac{H^2 \sin 2\theta}{\sin 2\varphi_0} \sin 2\varphi' &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (3.11)$$

15

この式は、云わば、粘性減衰を有する振子の運動方程式である。この類推から分る様に M と磁場とのなす角 α が

$$\tan 2\alpha = \frac{H_0^2 \sin 2\theta}{H_0^2 \cos 2\theta - H^2} \quad (3.12)$$

10

を充たす真が平衡真を与え、これと反対側の真が不安定の saddle point を与えることが分る。(*) (3.12) の条件は Kell⁵⁾, Yasuda⁷⁾ によって導かれたものに外ならない。実験的には Foster⁶⁾ によって $\text{CuCl}_2 \cdot 2\text{H}_2\text{O}$ の単結晶に於て発見された。

(3.11) の $(\varphi, \dot{\varphi})$ 空間に於ける積分曲線は色々 μ をおいて Fig. 1 に示してある。又 $\mu = 1, \mu = 2$ のものを Fig. 3, Fig. 2 に、詳しく描いてある。この図から分る様に不安定真の出る曲線の最高の角速度 $\dot{\varphi}_{max}$ は $\mu = 2$ のとき $0.2\gamma H$ の order になる。(**)

5

§5 の議論から分る様に、微小振動数は μ のとき $2\gamma H$ の order である。それで吾々の理論にあてはまる磁場の限界の基準として、 $\mu > 2$ とおこされる。これは又物理常数 $\gamma M_0, \lambda$ によるわけであるが、通常の反強磁性共鳴吸収の実験で、共鳴線が明らかになり識別される真から考えれば $\gamma^2 M_0^2 \gg \lambda^2$ 位の真実の近似をこら思われる。こうすれば $\mu \sim 2(\lambda/\gamma M_0)(H_0/H) \sim 2$ となり、我々の近似が成り立つことになる。個々の物値に m については §5 で discuss するにしよう。

(*) Appendix 参照のこと。
 (***) μ は $\sin 2\varphi$ の係数の root として定義するに於て、 $2\lambda A$ を割ったもの。例として $\theta = 0, H > H_0$ のとき、 $\varphi = \frac{\pi}{2}$ を原真とて振子の μ は
$$\mu = 2\lambda A / \sqrt{\left(\gamma^2 + \frac{\lambda^2}{M_0^2}\right)(H^2 - H_0^2)},$$

 (***) $\dot{\varphi}$ の unit は、(**) の場合、 $\sqrt{\left(\gamma^2 + \frac{\lambda^2}{M_0^2}\right)(H^2 - H_0^2)}$ である。

§4 遅い減衰運動の場合

section 3 では非定常運動が比較的遅い場合を調べた。そこでその解から、近似が成り立つのは $\mu > 2$ となる様に外部磁場を H_0 に近づける必要があることが分った。しかし外部磁場の異なる場合にはこの条件調節は不可能であるから、 μ の intrinsic 小さいときは考え直す必要がある。例として MnF_2 では $H_0 : H_c \approx 5 : 1$ であるので $\gamma M_0 \sim 10^2$ として $\mu \sim 1$ となる。Fig. 3 から分る様に、この場合 $\dot{\phi}_{max}$ は $0.5 \gamma H_c$ の程度で、これは大体微小振動数の4分の1の大きさをとっている。従って節3の考察は概して成り立ちつつある。そこで $H=0$ の場合を目標として (2.10), (2.11) を簡単に考えてみることにする。 $A \cdot M \cdot M = 0$ として

$$\begin{aligned} M_y' (m_x M_y' - m_y M_x') &= 4M_0^2 m_x + m_y M_x' M_y' \\ M_x' (m_x M_y' - m_y M_x') &= -4M_0^2 m_y - m_z M_y' M_z' \end{aligned} \quad (4.1)$$

なる関係式が得られることに注意すると、 $H=(H, 0, 0)$ の場合、(2.10), (2.11) は0次のとして次の微分方程式を reduce される。

$$\begin{aligned} \ddot{m}_x + 2\lambda A m_x + 2(\gamma^2 M_0^2 \phi_y + \lambda^2 \phi_x) A m_x &= \frac{H}{2M_0^2} (\gamma^2 M_0^2 \phi_y + \lambda^2 \phi_x) M_y'^2 + \frac{\gamma \lambda H A}{M_0^2} m_y M_x' M_y' \\ \ddot{m}_y + 2\lambda A m_y + [2(\gamma^2 M_0^2 + \lambda^2) A \phi_x + \gamma^2 H^2] m_y &= -\frac{H \phi_x}{2M_0^2} (\gamma^2 M_0^2 + \lambda^2) M_x' M_y' - \frac{\gamma \lambda H A}{M_0^2} m_x M_x'^2 \\ \dot{m}_z + 2(\gamma^2 M_0^2 + \lambda^2) \frac{A}{\lambda} m_z &= \frac{\gamma M_0^2}{\lambda} 2\dot{\phi} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2\ddot{\phi} + 2\lambda A (2\dot{\phi}) + [2(\gamma^2 M_0^2 + \lambda^2) A \phi_y - \frac{\lambda^2 H^2}{M_0^2}] \sin 2\phi &= -2\gamma^2 H A m_y \\ \ddot{M}_y' + 2\lambda A \dot{M}_y' + [2(\gamma^2 M_0^2 + \lambda^2) A \phi_x + \gamma^2 H^2] M_y' &= \frac{\gamma^2 A \phi_y}{2} M_y' M_y'^2 - 2\gamma^2 H A m_y M_x' \end{aligned}$$

ここで

$$M_x' = 2M_0 \cos \phi, \quad M_y' = 2M_0 \sin \phi$$

とすれば $H=0$ のときは一平面内での起る運動を記述する ϕ の微分方程式は (3.5) で $H=0$ としたものを完全一致するようになる。又 $H \neq 0$ のときは、 M が強磁場で平面的に振動するときはやはり ϕ の微分方程式は (3.5) となることになる。一般の場合には難問の問題になる。

§ 5 Discussions

以上公式的な話を述べたが、ここでは具体的な物質ではどんなものが期待されるか $CuCl_2 \cdot 2H_2O$, MnF_2 , Cr_2O_3 を対象として考えてみる。先ず $CuCl_2 \cdot 2H_2O$ について考える。Gorter et al. によってなされた反強磁性共鳴吸収の実験⁸⁾, Yasuda-Moriya の評価⁹⁾ によると、実験の最低温度では、

$$H_c^2 = 5.11 \times 10^7 \phi^2, \quad \phi_x / \phi_y = 3.3$$

である。一方 Van den Handel 達¹⁰⁾ $\theta = 5^\circ K$ を用いると、大雑巴に $g=2$, $\beta=1/2$ とし $HE = AM_0 = 74.5 \text{ k}\phi$ の程度のものが期待される。即ち

$$HE = 74.5 \text{ k}\phi, \quad H_c = 7.15 \text{ k}\phi,$$

$$\phi_x M_0 = 1.13 \text{ k}\phi, \quad \phi_y M_0 = 0.787 \text{ k}\phi. \quad (5.1)$$

となる。このときの近似がかなりよいものであることが分る。さて以下の考察で一番問題となるのは 物質定数 γM_0 と λ の大小関係である。通常の反強磁性共鳴吸収で共鳴線が明らか識別されることを考えると、 $\gamma^2 M_0^2 \gg \lambda^2$ と云うことが実際に正しいかと思われる。初めに外部磁場のなしを考慮しよう。試みに $\gamma M_0 = 10\lambda$ とすると

$$\mu = \frac{2\lambda A}{\gamma H_c} \sim 2.08 \quad (5.2)$$

となる。このときの運動については Fig. 2 の $\mu = 2.1$ のものを参照されたい。更に $\gamma M_0 = 20\lambda$ とすると、 $\mu = 1.04$ となるが、Fig. 3 は殆ど $\mu = 1.00$ のものである。平衡点は安定な spiral point と変化しており、 $\mu = 2.1$ の安定 nodal point の比 μ と振動減衰の起る点が変わる。又 saddle point の起る運動の ϕ_{max} を 2 倍に増える。臨界初角速度は 3.53 He の 2.16 He に変わる。即ち ω 以上の初角速度 $\dot{\phi}(0)$ を与えてやると (例えば z 軸に瞬間的に $30.7 \text{ k}\phi$ の半分以上の磁場をかける、或は $\gamma M_0 = 20\lambda$ のとき)、 M はもう一つ、又はそれ以上離れた安定点に落ちつくことになる。 y 軸の磁化を h としてやるときの時間と角度との関係は Fig. 4 に示されている。unit はこの場合 $0.795 \times 10^{-11} \text{ sec}$ となる。

外磁場が存在する場合 μ は、 μ に対する制限を通じてかけ磁場の限界があるが、
 磁場のなしとの標 μ を比較しはつかぬ。今 $\mu=2$ をめやすにす(ϕ_{max} は大体
 γH_c の0.2倍と仮定^{*}), $\gamma M_0 = 10\lambda$ では, fieldは $1.42 H_c$ よりも小さくなく $10.2 H_c$

$$H < 1.42 H_c = 10.2 K\phi, \text{ for } \gamma M_0 = 10\lambda,$$

$$H < 1.13 H_c = 8.08 K\phi, \text{ for } \gamma M_0 = 20\lambda,$$

となるが、 μ を大きくする時は $H \rightarrow H_c$ とせねばならぬ(さうことを意味する。 μ を大きくする
 一つの解決法は, fieldを面内の任意の方向にかけることである。例として今 $\theta = \pi/16$
 として fieldを色々変え μ と μ の値を求めておき、次の表の標になる。 μ の値は

field	μ		M の平衡位置 ϕ_0
	$\gamma M_0 = 10\lambda$	$\gamma M_0 = 20\lambda$	
9Kφ	2.72	1.36	1.51 or 86°30'
8.5	3.35	1.68	1.44 82°30'
8.0	4.12	2.06	1.34 76°47'
7.5	4.93	2.47	1.20 68°45'

$$\mu = 2 \left(\frac{\lambda}{\gamma M_0} \right) \left(\frac{H_c}{H} \right) \sqrt{ \left| \frac{\sin(2\theta - 2\phi)}{\sin 2\theta} \right| } \quad (5.3)$$

で与えられる。(3.10), (3.11)から明らかである。Fig. 1, 2, 3では安定角の原点
 とられているが、上記の場合にはそれを ϕ_0 のところに移すこと。

一方 $\delta M, \delta M'$ の運動の方はどうであるか。 $\mu > 2$ のときはこの問題は、立体的
 に、自由振動の微小固有振動数を求めることに帰着する。しかし通常の場合と異なるとは
 λ -termのため固有値 ω が複素数となることで、 ω の real partが所謂振動
 数を与え、imaginary partが微小振動のdampingを与えることになる。Fig. 5
 は $\gamma M_0 = 20\lambda, H_c = 8.0 K\phi$ の場合の微小振動数の角度変化を示したものである。
 λ が小さいため、frequencyは $\lambda=0$ の極限の値に比べてそんなに変化してない。が
 10%のorderの変化があるのは λ termが大きくなるためである。unitは $H_c = 8.0$

(*) すぐあとで分る標 $\gamma M_0 = 20\lambda, H = 8.0 K\phi$ のときは ($\mu=2$), 微小振動
 の frequencyが $2 H_c \gamma$ の orderであるので、 ϕ_{max} は一桁小さいことになる。

κφであるが, ϕ_{max} は c.m.d の 10 分の 1 の大きさをとつておく。c.m.d, 吾々の理論の "Validity criterion", 及び $\mu > 2$ をとらせば正当なものであることが分る。

次に uniaxial anisotropy の反強磁性体 MnF_2, Cr_2O_3 について調べる。S. Tonner によると, c.m.d の物質に於ける H_E, H_C, H_A は次の様に与えられる。

$$\begin{aligned} MnF_2, & H_E = 0.503 \times 10^6 \phi, H_C = 0.96 \times 10^5 \phi, H_A = 0.922 \times 10^4 \phi \\ Cr_2O_3, & H_E = 2.1 \times 10^6 \phi, H_C = 0.6 \times 10^5 \phi, H_A = 0.0857 \times 10^4 \phi \end{aligned} \quad (5.4)$$

field の異なる場合 μ は又々次の様に与えられる。

$$\begin{aligned} MnF_2, & 1.05 \text{ for } \gamma M_0 = 10\lambda, & 0.524 \text{ for } \gamma M_0 = 20\lambda \\ Cr_2O_3, & 7.0 & 3.5 \end{aligned}$$

c.m.d の分子標 MnF_2 は非常に強い振動性の減衰運動をすることが分る。図 1 及び $\mu = 7$ とするのとは異つて μ の方が大体の分子標を見当がよつてゐる。g-t curve 等は 1.0 と 3.5 のものを重ねて置かれてゐる。unit は MnF_2 で 0.592×10^{-13} sec, Cr_2O_3 で 0.943×10^{-13} である。field がかけられれば応用可能な中は $\mu = 2$ まで

$$\begin{aligned} MnF_2, & H < 1.14 H_C \text{ for } \gamma M_0 = 10\lambda, H < 1.03 H_C \text{ for } \gamma M_0 = 20\lambda, \\ Cr_2O_3, & H < 3.63 H_C \text{ for } \gamma M_0 = 10\lambda, H < 2.01 H_C \text{ for } \gamma M_0 = 20\lambda \end{aligned}$$

MnF_2 では $\gamma M_0 = 20\lambda$ と仮定して c.m.d は誤差範囲の中に入れて置ける。一方 Cr_2O_3 の方は吾々の理論によつて ideal なものと云える。そこで MnF_2 の場合 field を面内方向にかけ、 $CuCl_2 \cdot 2H_2O$ のときと同様に $\theta = \frac{\pi}{2}$ として field の大きさを逐つておき

field	μ		M' の平衡方位角
	$\gamma M_0 = 10\lambda$	$\gamma M_0 = 20\lambda$	
107 κφ	2.13	1.07	1.32 or 75° 50'
103 κφ	2.33	1.17	1.26 72° 10'
101 κφ	2.45	1.23	1.21 69° 35'
98 κφ	2.62	1.31	1.13 65°

25

となる。一方 107 K のときは $\theta = \frac{\pi}{8}$ にとりかえ、 μ は

$$107 \text{ K}: \begin{matrix} \theta = \frac{\pi}{8}, & 2.63 (10\lambda), & 1.32 (20\lambda) \\ \theta = \frac{\pi}{16}, & 2.13 (10\lambda), & 1.07 (20\lambda) \end{matrix}$$

20

とすると、 $\theta = \pi/16$ のときは μ が幾分よくなっていくことが分る。結局 $\gamma M_0 \sim 10\lambda$ であるならば、 MnF_2 の極小 $He \times He$ が接近していきると、吾々の理論は広い適用性をもつが、 $\gamma M_0 \sim 20\lambda$ の物質になると、余程 $He \times He$ の大小関係がよい具合になるとはなると、色々細工をせねばならぬことになる。

15

以上理論的に期待されること、及び物質が理論にどの条件等に従って色々考えたり、理論の中にも一応問題が考えられる。尤も運動方程式の採択の是非がある。血塊強磁性体の場合にも、巨視的見地からの議論及び微視的見地からのものがあろう、¹³⁾ (1.1)の式は $0^{\circ}K$ である限り、 λ の異方性があるときは、全く正しいと思われる。尤も γM_0 と λ の大小に関して理論が決定権をいつていたことであるが、これは \wedge 微視見地的からの問題であつて、将来の課題である。しかし dispersion とか、中を調べることによって、現象論的¹⁴⁾ としと物質との対応をつけることが可能であると思われる。

10

最後にこの課題を承えて下さり、終始末元宛の御指導を頂戴して下さり永宮先生に心から感謝致します。又色々御親切に面倒をみて下さり永宮研究室の方々に厚く御礼申し上げます。

5

Appendix 減衰振子の運動方程式について

一平面内に起る磁化の非定常運動の大体的有様は (3.5) の型の微分方程式で表わされる。さてはこの方程式の解析的な性質を調べてみる。一般的にこれは

$$\ddot{\psi} + c\dot{\psi} + k \sin \psi = 0, \quad k > 0 \quad (A.1)$$

と書き表わされる。 $k < 0$ のときは、 $\psi = \pi + \psi'$ と座標をとりなおすとよい。これは又、

$$v = \dot{\psi} / \sqrt{k}, \quad \mu = c / \sqrt{k}, \quad \psi = x \quad (A.2)$$

と式と、 (x, v) -space に於ける次の有様 reduced form の一階微分方程式に變形する事が出来る。RPS

$$\frac{dv}{dx} = -\mu - \frac{\sin x}{v} \quad (A.3)$$

Fig. 1, 2, 3 はこの微分方程式の積分曲線と Runge-Kutta の方法¹¹⁾ で数値的に求めたものである。この曲線の本質的な点は次の有様に理解出来る。(A.3) の

$$v(-x) = -v(x) \quad (A.4)$$

が先ず得られる。次に、(A.1) の方程式の停留点から (A.3) の方程式の特異点に對してはなことに注目して、その特異性を調べることによって停留点の安定性を判定する。singularity の判定に關する Poincaré の定理¹²⁾ によれば、singular point が孤立して存在するときには、原点とその点に對して考えた場合、その附近で

$$\frac{dv}{dx} = \frac{ax + bv + P_2(x, v, xv)}{cx + dv + Q_2(x, v, xv)}$$

の如き方程式の singularity は

$$\frac{dv}{dx} = \frac{ax + bv}{cx + dv}, \quad \Delta \equiv ad - bc \neq 0 \quad (A.4)$$

のものと全く同じである。さてその判定条件は次の D と、 Δ と、 $b+c$ の正負の組合せて次の Table の有様にまとめられる。

$$(*) \quad D = (b-c)^2 + 4ad, \quad (A.5)$$

25

20

15

10

5

D > 0	$\Delta > 0,$	Saddle point.	
	$\Delta < 0,$ (i) $b+c > 0,$	unstable nodal point.	
	(ii) $b+c < 0,$	stable nodal point.	
D < 0	(i) $b+c > 0,$	unstable spiral point.	(A.6)
	(ii) $b+c < 0,$	stable spiral point.	
	(iii) $b+c = 0,$	Center point.	
D = 0	(i) $b+c > 0,$	unstable nodal point.	
	(ii) $b+c < 0,$	stable nodal point.	

stable と云うのは、 $t \rightarrow \infty$ となるにつれて積分曲線が特異点に向って動くことを意味してゐる。さて吾々の場合の、特異点は $x=0$ と $x=\pi$ の二点である。(A.6)の分母杯に $x=\pi$ の点は常に saddle point である。この点からは二本の曲線が出入りしてその勾配は次式で与えられる。

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=\pi} = -\frac{1}{2}(-\mu \pm \sqrt{\mu^2 + 4}) \quad (A.7)$$

一方 $x=0$ の点には、 μ の大きさによつて

$$\left. \begin{array}{l} \mu > 2 \text{ のときは stable nodal point,} \\ \mu < 2 \text{ のときは stable spiral point,} \\ \mu = 2 \text{ のときは Center point,} \end{array} \right\} (A.8)$$

の如く変化する。この変化の有様は Fig. 1, 2, 3 に示してゐる。即ち前者は限界的な積分曲線だけを μ を色々に変えて重ねたものである。"限界的"と云うのは原点に向つて曲線はこの二本で囲まれる領域の中にも存在し得るからである。このことは μ を固定したときの Fig. 2, 3 を見れば容易に理解されるであらう。

References

1) S. Foner, *Phys. Rev.*, 107, 683 (1957).
 S. Foner, *J. de Phys. et Rad.*, Suppl., 272 (1958).

2) T. Nagamiya, *Prog. Theor. Phys.*, 4, 350 (1951).
 C. Kittel, *Phys. Rev.*, 82, 565 (1951).
 T. Nagamiya, K. Yasuda and R. Kubo, *Advances in Phys.*, 4, 1 (1955).

3) H. J. Gerritsen and M. Gorter, *Physica*, 22, 481 (1956).
 M. I. Kaganov and D. M. Teukernik, *Z. E. T. F.*, 34, 524 (1958).

4) E. S. Dayhoff, *J. Appl. Phys.*, 29, 344 (1958).

5) L. Néel, *Ann. de Phys.*, 5, 232 (1936).

6) Poulis, van den Mandel, Ubbink, Poulis and Gorter,
Phys. Rev., 82, 552 (1951).

7) K. Yasuda, *Prog. Theor. Phys.*, 6, 691 (1951).

8) Ubbink, Poulis, Gerritsen and Gorter, *Physica*, 18, 361 (1952).

9) K. Yasuda and T. Moriya, *Kyoto Conf. Theor. Phys.*, 751 (1953).

10) Van den Mandel, Gijssman and Poulis, *Physica*, 18, 201 (1952).

11) H. Levy and E. A. Baggott, "Numerical Studies in Differential Equations," Vol. 1, Watt and Co., London (1934).

12) J. J. Stoker, "Nonlinear Vibration," Interscience Pub., Inc.,
 New York (1950).

13) G. V. Skrotshii and V. T. Shmatov, *Z. E. T. F.*, 34, 740 (1958).
 H. B. Callen, *J. Phys. Chem. Solids*, 4, 256 (1958).

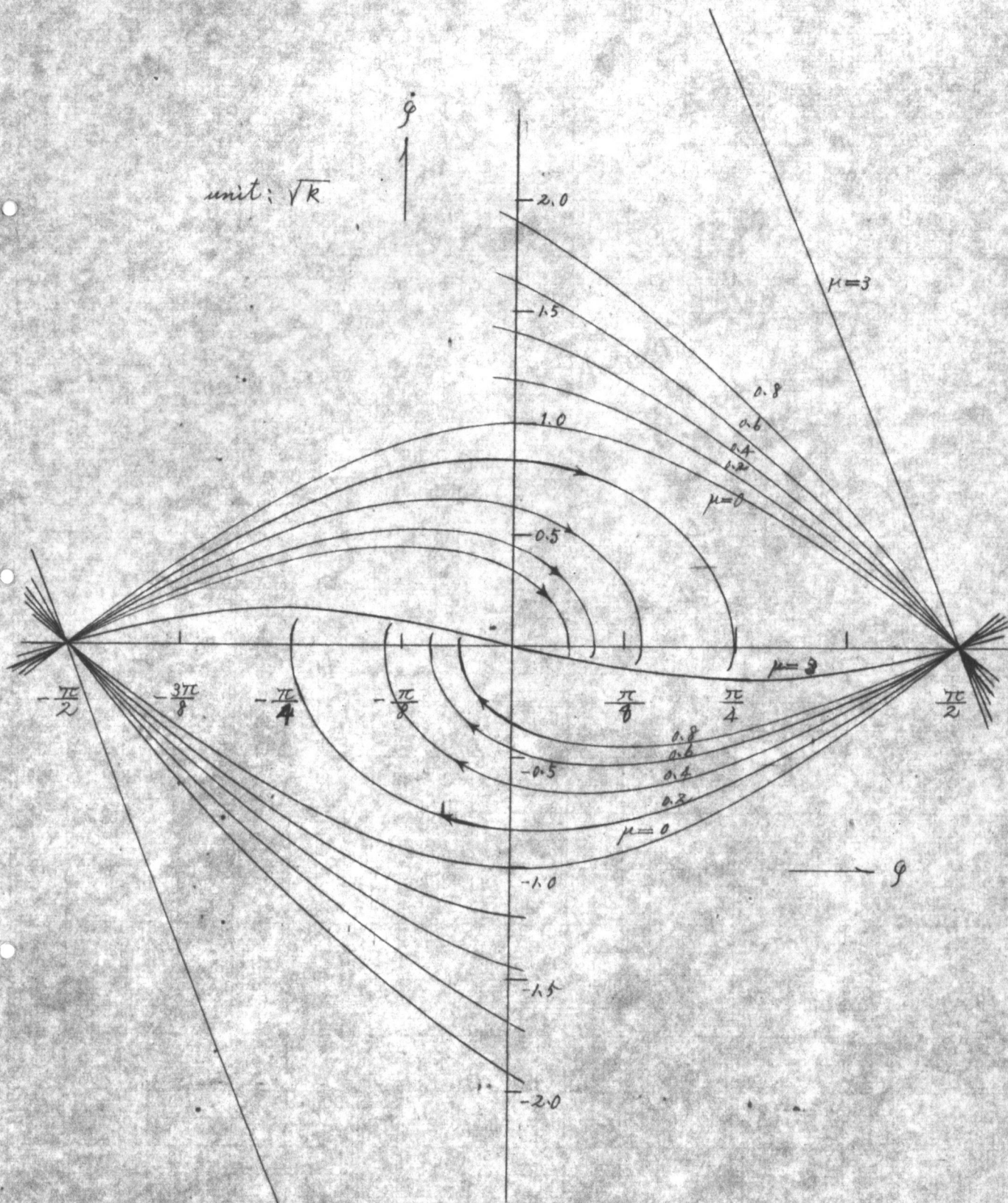


Fig. 1

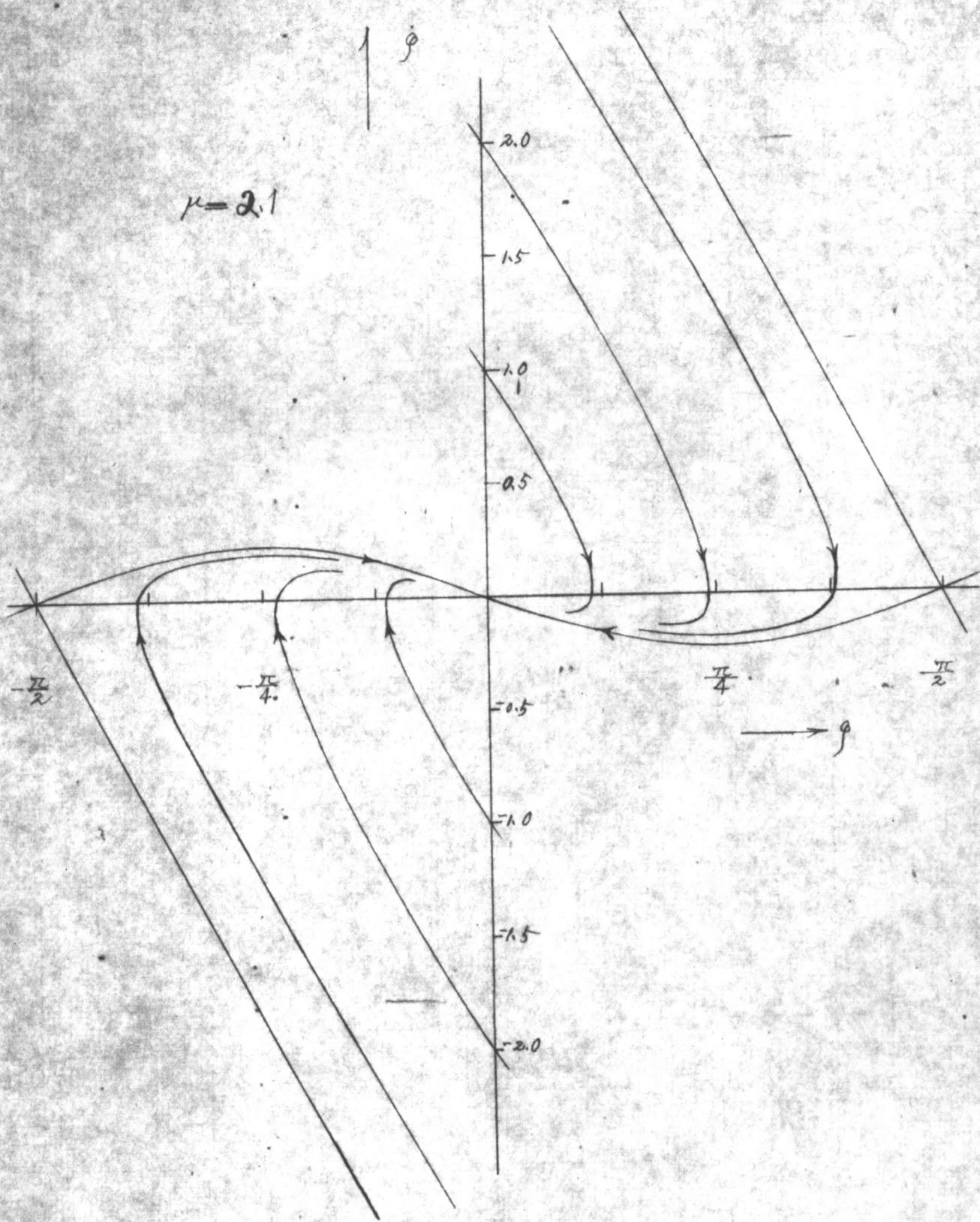


Fig. 2

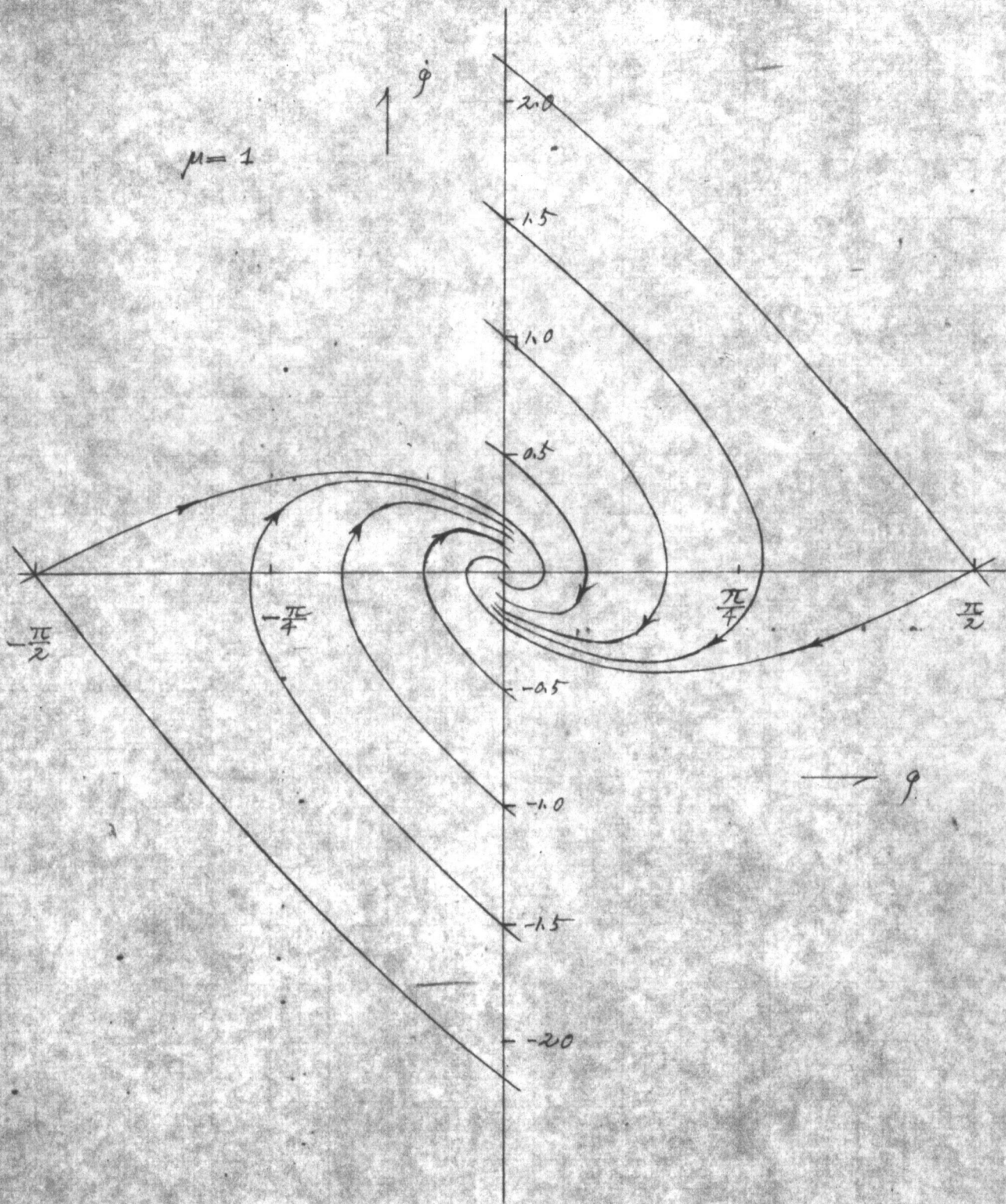


Fig. 3

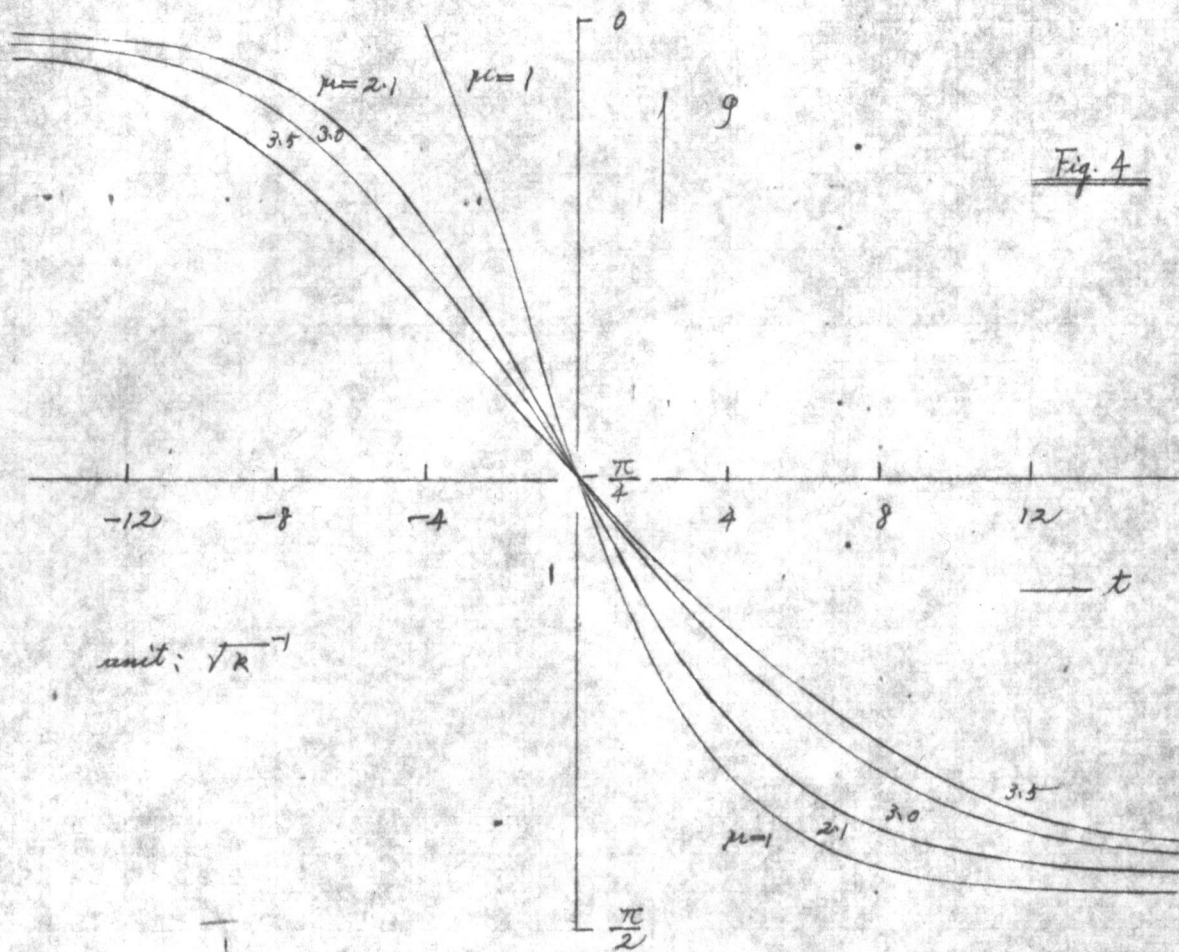


Fig. 4

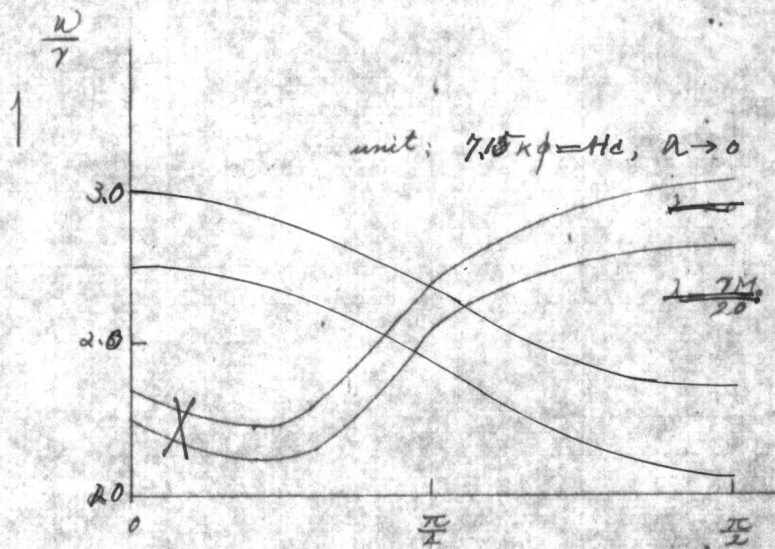


Fig. 5