The University of Osaka
Institutional Knowledge Archive

Title	多モード分布結合系の理論とその応用に関する研究
Author(s)	山口, 孜
Citation	大阪大学, 1976, 博士論文
Version Type	VoR
URL	https://hdl.handle.net/11094/2512
rights	
Note	

The University of Osaka Institutional Knowledge Archive : OUKA

https://ir.library.osaka-u.ac.jp/

The University of Osaka

多モード分布結合系の理論とその応用に関する研究

山口　　孜

昭和50年12月

内　容　梗　概

本論文は著者が大阪大学大学院工学研究科（通信工学専攻），並びに近畿大学理工学部電子工学科において行なった，分布結合系の理論とその応用に関する研究の成果をまとめたもので，全体を次の５章から構成している．

第１章は序論であり，通信工学に関連した伝送系の諸問題におけるモード結合理論の重要性を述べ，その応用に関するこれ迄の研究を概説するとともに，この分野での本研究の地位を明らかにしている．

第２章では，多モードの分布結合系で，特定の２つのモード間に完全な電力の移行が生ずる，いわゆる完全結合系について検討を加えている．そのため，まず伝送方向に一様な分布結合系が，結合のない場合と，結合がある場合に対応した２種の正規モード系の接続として記述できることを示し，完全結合の条件を，これらの正規モード系の変換を定める変換行列と，結合領域での各正規モードの位相定数とについて与えている．さらに，これらの条件を用いて，完全結合系の一般的な特性を明らかにし，結合に関与するモードの個数を具体的に与えた場合について，完全結合系の結合係数を定めるための設計式を導出している．

第３章では，特定の機能をもつ分布結合素子の設計条件の導出法について論じている．まず，系の機能をあらわす伝達行列と結合系の構造に関係した結合行列（各モードの位相定数とモード間の結合係数をその要素にもつ）との関係を明らかにし，伝達行列が与えられた場合の結合行列の計算法を示している．次に，結合を用いた回路素子の一つとして，任意のモードへの入力を出力端ですべてのモードに等しく分配する，電力等分配器を提案し，回路素子としての応用について論ずるとともに，その伝達行列について検討している．これらの結果を用いて，モードの個数が２および３の場合の電力等分配器について，位相定数

ならびに結合係数に関する設計式を導き，その数値計算結果を示している．

第4章では，誘電体導波路からなる結合系に対して得られる結合方程式を，一般的なモード結合理論に関連づけて検討し，あわせてその解法について論じている．結合系としては，伝送方向に一様でない誘電体導波系，および複数個の誘電体線路が並列して配置されているような導波系の2つを，誘電体が非等方性である場合を含めて取り扱っている．これらの系に対する結合方程式は，一般化されたモード結合理論の解析法が適用できる形に適当に変形し得ることを示し，その変形の物理的な意味についても考察を加えている．さらに，系を構成する誘電体が微小な損失をもつ場合の近似解法が，伝送方向に一様な系について示されている．

第5章は結論であって，以上の研究の成果を総括して述べている．

以上の各章を構成する研究内容は，すべて電子通信学会論文誌，電子通信学会マイクロ波研究会，輻射科学研究会等において，すでに発表されたものである．

目　　次

第1章　序　　論……1

第2章　多モード分布結合系における完全結合の条件とその応用……5

2.1　緒　　言……5

2.2　結合方程式を用いた多モード分布結合系の記述……5

2.3　完全結合の条件……8

2.4　完全結合の条件を満たす結合系の一般的特性……11

2.5　結合系の構成例……12

2.5.1　3モード結合系……13

2.5.2　4モード結合系……17

2.5.3　特殊な結合系……20

2.6　結　　言……22

第3章　多モード分布結合系を用いた回路素子の設計とその応用……25

3.1　緒　　言……25

3.2　結合行列と伝達行列の関係……25

3.3　結合行列の計算法……27

3.4　電力等分配器とその伝達行列……29

3.5　電力等分配器の結合行列……32

3.5.1　2モードの場合……32

3.5.2　3モードの場合……35

3.6　結　　言……40

第4章　誘電体導波路からなる分布結合系へのモード結合理論の適用……41
4.1　緒　　言……41
4.2　結合系の基本的特性と結合行列の関係……42
4.3　等方性誘電体導波路からなる分布結合系の結合方程式……45
4.4　非等方性誘電体導波路からなる分布結合系の結合方程式……53
4.5　わずかな損失を含む誘電体線路からなる結合系の近似解法……57
4.5.1　一般的取り扱い……57
4.5.2　誘電体導波路への応用例……59
4.6　結　　言……61

第5章　結　　論……63

謝　　辞……65

文　　献……67

付　　録……71

第1章　序　　論

「モード結合理論（Coupled Mode Theory）」は，通信工学や応用電子工学などの諸分野の研究者にとって，なじみ深い理論の一つとなっている．実際，この理論は，光をも含めた電磁波，弾性波，あるいは電子ビームなど，いわゆる波動とみなせる現象を扱うすべての領域に適用できるものであり，また，この理論を適用することによって，簡潔な数学的記述が可能となり，しかも現象の物理的な意味を明確に把握できるなど，数々の利点を備えており，研究者にとって非常に利用価値の高い理論であるといえる．

モード結合理論の考えは，波動の相互作用を，波動を構成するモード間の結合とみなし，回路論的な立場から統一的に取り扱おうとするものであるが，この考えは，進行波管の研究に関連して，１９５４年Pierce[1]によって初めて提唱されたものである．そしてその同じ年に，Miller[2]はこの考えを，現在一般に用いられるモード結合理論の形式，すなわち，モード間の結合を各モードの複素振幅に関する一階連立微分方程式（結合方程式）として表わして解析を進める形に定式化している．以来，モード結合理論は，マイクロ波電子管や各種の回路素子の開発などの工学的応用[3][4]ばかりでなく，物理学の分野に至るまで幅広く応用されている[5]．

工学的な様々の応用の中でも，特に，電磁波の伝送系の問題は，モード結合理論が大きな力を発揮する領域である．急激に増大する情報を伝送するという社会的な要請に答えて，通信に用いられる電磁波の領域はマイクロ波，ミリ波からさらには光へと波長の短かい領域に進もうとしている．またこれに伴なって伝送系としての研究対象も，導波管，ストリップ線路から誘電体線路へと，めまぐるしい移り変わりをみせてきた[6]．これらの多種多様な伝送系に対して，モード結合理論の応用分野は大きく２つに分類できる．その一つは，伝送方向

に不整のある伝送系の特性解析の問題であり，例えば，壁面不整をもつ導波管や誘電体線路の解析[7][8]，あるいはテーパ状の伝送路や曲がり部分の最適設計の問題[9]～[11]などがこれにあたる．もう一方の適用分野は，モード間の結合を積極的に利用して，何らかの特性をもたせようとする，いわゆる回路素子設計への適用であり，各種の伝送路を用いた方向性結合器，モードフィルター，モード変換器等の設計がこれに相当する[12]～[14]．

本論文は，これら伝送系の諸問題に対するモード結合理論の応用に関連して，多数個のモードが互いに結合する分布結合系をとりあげ，一般的なモード結合理論の立場から，回路素子の設計法や伝送特性の解析法を論ずるものである．

第２章，第３章は多モード分布結合系を用いて回路素子を構成する問題を取り扱ったものである．従来，モード間の結合を利用した回路素子は，そのほとんどが２つのモード間の結合を利用したものであった．その原因は，多モードの結合回路素子があまり必要とされなかったというためばかりでなく，むしろ，多数個のモードが互いに強く結合するような結合系を，実際に構成することが難かしかったためであると思われる．モード間の結合は，結合しあうモードの位相定数が似かよっている場合に強くおこるが，最近光の伝送路として着目されている誘電体線路[15][16]を用いれば，多数本の線路を並列して配置したり，あるいは，伝送路に非等方性誘電体を用いたりすることによって，位相定数が似かよった多数個のモードを結合させることが可能となってきた．そして，また，このような多モード結合系の研究例も，すでにいくつか報告されている[17]～[20]

そこで，まず第２章では，結合を用いた回路素子の機能として最も基本的なものの一つである完全結合の生ずる系について検討を加える[21][22]．結合系が２つのモードのみで構成されている場合には，これらのモードの位相定数が等しく，且つ結合長 l と結合係数 c の間に $2cl=\pi$ の関係があるとき完全結合がおこることが知られていた[23]．また，２モードの結合系で位相定数が異なる場

合にも，結合係数を伝送方向に周期的に変化させたり[24]，あるいは，結合係数の異なる結合区間を多段に縦続接続させる[25][26]ことにより完全結合をおこすことができるなど，細かな検討がなされてきた．しかし，結合に関与するモードの個数が３つ以上の多モード結合系に対しては，モード間の完全結合がどのような条件のもとでおこるかということは，詳しく検討されていなかった．第２章では，一般に n 個のモードが伝送方向に一様に分布結合する結合系で，そのうちの２つのモード間に完全結合がおこるための条件を明らかにし，また，このような系の一般的な特性を調べる．さらに，モードの個数を定めた場合を具体例として，系の構造を調べ，位相定数と結合係数に関する設計公式を与える．

また，第３章では，やはり伝送方向に一様な多モードの分布結合系について，回路素子としての特定の機能を与えた場合に，その機能を実現させるために必要な条件，すなわち，各モードの位相定数と結合係数の関係を導く一般的な手法を示す[22][27]．そして，この手法の応用の一つとして，任意のモードの入力電力が，出力端で，結合に関与するすべてのモードに等しく分配される結合器（電力等分配器）を提案し，この結合器の特性，ならびに実現のための条件を明らかにする．

第２章，第３章での議論は，一般的なモード結合理論を用いた一種の合成論的な議論であるが，解析的な面でも，この一般的なモード結合理論の応用価値は大きい．すなわち，系が，例えば無損失であったり相反則を満たすなどの基本的特性をもつ場合には，結合係数の間に特殊な関係が成立つことが知られており，この関係を用いて結合方程式を比較的簡単に解くことができる[29]．このような利点は，特に，伝送方向に一様な分布結合系の場合に顕著にあらわれる．よって，個々の具体的な結合系について，結合係数，あるいは結合方程式を導出する場合にも，なるべく一般的な理論からのずれを小さくする方が有利であるといえる．そこで，第４章では，誘電体導波路からなる結合系の結合方程式

について議論する[28].

誘電体導波路からなる結合系としては，複数本の誘電体線路を並列に配置し，各線路の伝送モード間に結合を起させる系や，線路を構成する媒質に非等方性誘電体を用い，TEモードとTMモードの間に結合を起させる系などの伝送方向に一様な結合系と，線路の壁面に不整のある場合のような，伝送方向に結合度が変化する結合系とが考えられる．複数本の誘電体線路からなる結合系の結合係数は，これまで，Green 函数を用いる方法[29]，相反定理やMaxwellの方程式を用いて摂動的に求める方法[30][31]，結合系の伝送モードの位相定数から逆算する方法[32][33]など，様々の手法によって求められていた．非等方性誘電体を含む結合系については，Marcuse[34]が摂動理論を用いて結合方程式を導出し，この結果を変調器の設計に利用している[35]．また，最近ではSnyder[36]が，等方性誘電体からなる結合系で，伝送方向に一様な場合とそうでない場合とを含めて，Maxwell の方程式から結合方程式を導いている．

しかしながら，これらの結果をみると，結合系が複数本の誘電体線路よりなる場合には，得られた結合係数の間には，一般的なモード結合理論で定まるような特殊な関係が必らずしも成立しているとはいえない．一方，沢[37]は，変分法を用いて，一般的なモード結合理論にみあう形で結合係数を導出しているが，その結合係数が対応するモードについては，物理的意味を明確にしていない．

第4章では，これらの疑問点を解消する意味から，各種の誘電体導波路からなる結合系の結合方程式を，一般的なモード結合理論と対応する形で導出できることを示し，その際用いた変換の物理的意味を明確にする．また，一般的なモード結合理論の立場から，結合方程式の摂動的な解法を考え，誘電体線路が微小な損失を含む場合についてこの解法を適用する．

第2章　多モード分布結合系における完全結合の条件とその応用

2.1 緒　　言

モード結合理論の応用の一つとして，方向性結合器や姿態変換器などの回路素子設計への応用があげられるが，その際，最も重要な事項の一つが，モード間で完全な電力の移行がおこる，いわゆる完全結合の条件である．従来，結合に関与するモードが2つのみの場合については，2つのモードの位相定数が等しく，かつ結合長 l と結合係数 c の間に $2cl=\pi$ の関係があるとき完全結合のおこることが知られていたが[23]，3つ以上のモードが結合する多モード結合系については，この条件は詳しく検討されていなかった．

本章は，多モードの一様な分布結合系において，適当なモード間に完全結合がおこるための条件を明らかにし，また，このような結合系の特性を検討するものである．すなわち，まず一般的な結合方程式の解から，系が，結合が存在しない場合と存在する場合に対応する2種の正規モード系を接続したものとして記述できることを示し，完全結合の条件を，2種の正規モード系の変換を定める行列と，結合の存在するときの各正規モードの位相定数について与える．

さらに，これらの条件から，完全結合をおこす結合系の一般的な特性を明らかにし，実際にモードの個数を3および4とした場合を具体例として，このような結合系の各モードの位相定数と結合係数の関係を式および図表で与える．最後に，モードの個数が 2^m のときに得られる，設計が簡便な結合系についても検討を行う．

2.2 結合方程式を用いた多モード分布結合系の記述

n 個のモードが同一の伝送軸（z 軸）に沿い，伝送方向に一様に分布結合し

ている無損失で可逆な伝送系を考えるとき，結合方程式は次式で与えられる．

$$\frac{d}{dz}\mathbf{a} = j\mathbf{C}\mathbf{a} \tag{2.1}$$

ここで j は虚数単位をあらわす．列ベクトル $\mathbf{a}$ の各要素 a_i ($i=1,2,\cdots,n$) は，結合がない場合の正規モード (i) (今後，特に必要のない限りモード (i) と呼ぶ) の複素振幅をあらわし，モード (i) の伝送電力を P_i とするとき

$$P_i = a_i a^*_i \quad (i=1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ n) \tag{2.2}$$

となるように規格化されている．ここで * は複素共役をあらわす．また，行列 $\mathbf{C}$ は結合行列と呼ばれ，対角要素 c_{ii} はモード (i) の位相定数であり[+]，非対角要素 c_{ij} はモード (i)・(j) 間の結合の強さをあらわす結合係数である．本章で取り扱かう系については，$\mathbf{C}$ は実対称行列として扱かってよい．[++]

式 (2.1) の結合方程式の解は，行列表示を用いるなら，形式的に次式であらわすことができる．

$$\mathbf{a} = \exp[j\mathbf{C}(z-z_0)]\mathbf{a}_0 = \mathbf{A}\ \mathbf{a}_0 \tag{2.3}$$

ここで $\mathbf{a}_0$ は結合系の入力端 $z=z_0$ での入力をあらわし，行列 $\mathbf{A}$ は結合系の入出力間の関係を示す伝達行列である．伝達行列 $\mathbf{A}$ は，結合行列 $\mathbf{C}$ の行列指数関数としてあらわされているため，$\mathbf{C}$ から直接 $\mathbf{A}$ を計算することは難かしい．しかし，行列 $\mathbf{C}$ が適当な直交行列 $\mathbf{T}$ とその転置行列 $\mathbf{T}^T$ を用いて対角化できること，すなわち

$$\mathbf{C} = \mathbf{T}\ \Lambda\ \mathbf{T}^T \tag{2.4}$$

+　実察には，C_{ii} には結合による微小項が付け加わるが，以下では，この項の影響は無視できるものとして議論を進める．

++　系の基本的な特性に応じた結合行列の性質については４．２で詳しく検討されている．

ただし　$$\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & 0 \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_n \end{pmatrix} \tag{2.5}$$

なる関係を用いると+，伝達行列**A**は

$$\mathbf{A} = \mathbf{T}\ \exp[j\Lambda(z-z_0)]\mathbf{T}^T$$

$$= \mathbf{T}\begin{pmatrix} e^{j\lambda_1(z-z_0)} & & & 0 \\ & e^{j\lambda_2(z-z_0)} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & e^{j\lambda_n(z-z_0)} \end{pmatrix}\mathbf{T}^T \tag{2.6}$$

とあらわせ，簡単に計算できる.[39]

ここで新らたにベクトル**b**，$\mathbf{b}_0$を

$$\mathbf{b} = \mathbf{T}^T\mathbf{a} \quad , \quad \mathbf{b}_0 = \mathbf{T}^T\mathbf{a}_0 \tag{2.7}$$

と定義するならば，式(2.6)を式(2.3)に代入し，両辺に左側から$\mathbf{T}^T$をかけることにより

$$\mathbf{b} = \exp[j\Lambda(z-z_0)]\mathbf{b}_0 \tag{2.8}$$

が得られる．式(2.8)であらわされるn個の式は互いに独立である．よって，ベクトル**b**の各要素$b_i(i=1,2,\cdots,n)$は，モード間の結合によって新らたに構成された正規モード（以後，結合系正規モードと呼ぶ）の規格化振幅をあらわ

+　実対称行列は直交行例を用いて式(2.4)のように対角化できる．**T**を式(2.9)のようにベクトル$\mathbf{e}_i(i=1,2,\cdots,n)$で表現するとき，$\lambda_i$，$\mathbf{e}_i(i=1,2,\cdots,n)$は**C**の固有値および固有ベクトルとして計算される.[38]

し，また λ_i ($i=1,2,\cdots,n$) は各結合系正規モードの位相定数をあらわすことが分る．

ここで，２つの正規モード系の変換を定める行列 **T** の各要素について調べてみよう．仮に，直交行列 **T** を，その各列ベクトルを $\mathbf{e}_i$ ($i=1,2,\cdots,n$) として

$$\mathbf{T}=(\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2,\cdots\cdots,\mathbf{e}_n) \tag{2.9}$$

とあらわすならば，式 (2.7)より

$$b_i=\sum_k e_{ik}a_k \quad (i=1,2,\cdots\cdots,n) \tag{2.10}$$

が得られる．ここで e_{ik} は列ベクトル $\mathbf{e}_i$ の第 k 行の要素をあらわす．式 (2.10)は，ベクトル $\mathbf{e}_i$ の各要素が，結合系正規モード (i) を結合のない場合の正規モードの１次結合であらわすときの，展開係数を与えることを示している．同様にして

$$\mathbf{T}^T=(\mathbf{f}_1,\mathbf{f}_2,\cdots\cdots,\mathbf{f}_n) \tag{2.11}$$

とあらわす場合，$\mathbf{a}=\mathbf{T}\mathbf{b}$ より，列ベクトル $\mathbf{f}_i$ の各要素 f_{ik} ($k=1,2,\cdots\cdots,n$) が，結合のない場合の正規モード (i) を結合系正規モードの１次結合であらわすときの，展開係数となることが分る．

以上のように，伝送方向に一様な分布結合系は，入力端 ($z=z_0$)，出力端 ($z=z$) を境として，図２．１に示すような，異なった正規モード系を縦続接続したものとしてとらえることができる．

2.3 完全結合の条件

まず，多モード結合系における完全結合を次のように定義する．「結合系の一端で各モードの電力 P_i ($i=1,2,\cdots\cdots,n$) が $P_i=1$, $P_k=0$ ($i\neq k$, $k=1,2,\cdots$

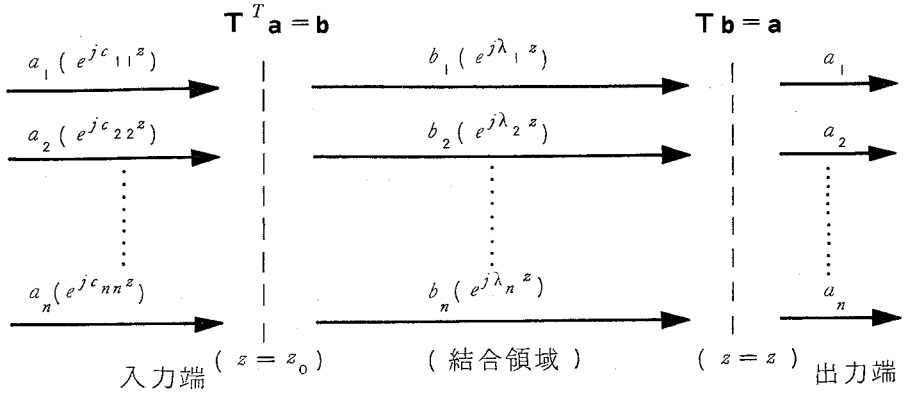


図２．１　２種の正規モード系の接続として表わした結合系

, n)であり，結合系の他端で $P_j=1$, $P_k=0$ ($j\neq k$, $k=1,2,\cdots,n$)となるとき，モード (i) と (j) とが完全結合するという．」また，上記のような完全結合の生ずる結合系の結合部分の長さを「モード (i) ・ (j) 間の完全結合長」と呼ぶ．

この定義に従い，結合系の入力端 ($z=z_0$) のモード (i) が，出力端 ($z=z$) でモード (j) に完全結合する場合を考える．両端面におけるモード振幅をあたえるベクトル $\mathbf{a}_0$ ，$\mathbf{a}$ の各要素は

$$\left.\begin{array}{lll} a_{0i}=e^{j\phi_1}\ , & a_{0k}=0 & (i\neq k\ ,\ k=1,2,\cdots,n)\ (z=z_0) \\ a_j=e^{j\phi_2}\ , & a_k=0 & (j\neq k\ ,\ k=1,2,\cdots,n)\ (z=z) \end{array}\right\} \quad (2.12)$$

となる．ここで ϕ_1 ，ϕ_2 は位相をあらわす任意の定数である．式 (2.12) を式 (2.3) に代入し，式 (2・6) (2・7) および (2.11) の関係を用いると次式が得られる．

$$\mathbf{f}_j=\exp[j\Lambda l-\phi\mathbf{I}]\mathbf{f}_i \quad (2.13a)$$

あるいは

$$f_{jk}=e^{j(\lambda_k l-\phi)}f_{ik} \quad (k=1,2,\cdots,n) \quad (2.13b)$$

ただし

$$l = z - z_0 \tag{2.14}$$

$$\phi = \phi_2 - \phi_1 \tag{2.15}$$

であり，また行列 **I** は n 次の単位行列である．

式（2.13b）の両辺の絶対値をとれば，$e^{j(\lambda_k l-\phi)}$は絶対値が1の複素数であるから，

$$\text{条件 I} \quad |f_{ik}| = |f_{jk}| \quad (k=1,2,\cdots,n) \tag{2.16}$$

が導かれる．条件Iは，モード(i)およびモード(j)を結合系正規モードに変換するとき，各結合系正規モードに分配される電力の比が，それぞれの場合について等しいことを意味している．

また式(2.13b)より，$f_{ik}\cdot f_{jk}$は共に実数だから，$e^{j(\lambda_k l-\phi)}$も当然実数（±1）となる．しかもその符号は，f_{ik} と f_{jk} の符号関係によって定まる．このことから

$$\text{条件 II} \quad \lambda_k l - \phi = m_k \pi \quad (k=1,2,\cdots,n) \tag{2.17}$$

ただし

$$m_k = \begin{cases} \text{奇数} & f_{ik} = -f_{jk} \\ \text{偶数} & f_{ik} = f_{jk} \end{cases} \tag{2.18}$$

が導かれる．条件IIは，結合系の入出力間で，各結合系正規モードの移相量が，共通な位相ϕを除いて，すべてπの整数倍となることを示している．

条件Iを満たす $\mathbf{f}_i$，$\mathbf{f}_j$をもつ直交行列**T**と，条件IIを満たすλ_i（$i=1,2,\cdots,n$）をもつ対角行列Λを設定するならば，式（2.4)を用いて結合行列**C**を計算することができる．

2.4 完全結合の条件を満たす結合系の一般的特性

モードの個数を具体的に与えて結合行列を計算する前に，完全結合の生ずるような多モード結合系について成立する一般的特性を検討しよう．

いま，式（2.11）のように，$\mathbf{f}_i(i=1,2,\cdots,n)$ を用いて**T**を表現し，式(2.4)から，結合行列の要素 c_{ii}，c_{jj} を計算すれば，それぞれ

$$c_{ii}=\sum_k f_{ik}^2\lambda_k \quad , \quad c_{jj}=\sum_k f_{jk}^2\lambda_k$$

となる．モード(i)と(j)とが完全結合するものとして，式（2.16）を考慮すれば，

$$c_{ii}=c_{jj} \tag{2.19}$$

が得られる．c_{ii}，c_{jj}はそれぞれモード(i)および(j)の位相定数であるから，完全結合する２つのモードの位相定数は常に等しいことが分る．

次に，モード(i)・(j)が完全結合する結合系と同じ値の結合係数・位相定数をもつ，任意の長さの結合系を考える．いま，この結合系の入力端にモード(i)のみを励振したとき，入力端から距離 l' の点で単一のモード（(i)，(j)以外のモードでもよい）に電力が完全に移行したと仮定する．モード(i)・(j)間の最小完全結合長を l とするとき，l'は常に l の整数倍となる．+

+ l'についても式（２．１７）に対応する式

$$\lambda_k l'-\phi'=m'_k\pi \quad (k=1,2,\cdots,n)$$

が得られる．l'と l との比を $l'/l=N$ とおけば，上式と式（２．１７）より次の n 個の関係式が得られる．

$$(m'_k-Nm_k)+(\phi'-N\phi)=0 \quad (k=1,2,\cdots,n)$$

この関係式が成立するのは，$m'_k=Nm_k(k=1,2,\cdots,n)$，$\phi'=N\phi$ のときのみである．一方，$m_k\cdot m'_k(k=1,2,\cdots,n)$ は整数であり，しかも $m_k(k=1,2,\cdots,n)$ には共通の因数は存在しない．（共通の因数 α が存在すれば l/α の結合長でも完全結合がおこり，l が最小完全結合長であることと矛盾する．）従って

$$\frac{m'_1}{m_1}=\frac{m'_2}{m_2}=\cdots\cdots\cdots\cdots=\frac{m'_n}{m'_n}=N$$

となるためには m'_k は m_k を因数として含まねばならず，結局 N が整数となることが示される．

l'がlの奇数倍のとき，入力端からみた各結合系正規モードの移相量は，$l'=(2m+1)l$（m：整数）とおいて

$$e^{j\lambda_k l'}=e^{j\lambda_k l}\,e^{j2m(m_k\pi+\phi)}$$
$$=e^{j(\lambda_k l+2m\phi)}\quad(k=1,2,\cdots,n)\qquad(2.20)$$

と計算される．ただし，式(2.17)の関係を用いた．$2m\phi$を任意の位相量$-\phi$とおきかえれば，式(2.20)は式(2.13b)の関係を満足し，距離l'の点で電力の集中したモードはモード(j)であることが分る．

また，l'がlの偶数倍の場合には，$l'=2ml$（m：整数）として，式(2.20)と同様に

$$e^{j\lambda_k l'}=e^{j2m\phi}\quad(k=1,2,\cdots,n)\qquad(2.21)$$

が導かれる．このような位相変化は，入力モード（モード(i)）の位相を$2m\phi$変化させるにすぎない．

以上のことから，完全結合はその最小完全結合長の2倍の周期でおこり，しかも，あらかじめ定められた完全結合をおこす2つのモードから，それ以外のモードに完全結合することはあり得ないことが明らかとなる．

2.5 結合系の構成例

本節では，2.3で与えた条件Ⅰ・条件Ⅱを用いて，実際に結合行列を計算する．結合行列は，その要素をすべて非負として計算されている．[+] また，条件Ⅱ

+ 結合係数の符号の選び方は結合系の構造には影響を与えず，単に結合するモード間の位相差をπ変化させるにすぎない．よって，結合行列**C**の要素をすべて非負として計算すれば，同じ結合系を重複して計算する危険はさけられる．
Perron の定理[40]によれば，「すべての要素が非負の行列には，重複のない最大固有値が存在し，その固有値には，すべての要素が非負の固有ベクトルが対応する．」よって，最大のλ_kに非負ベクトル$\mathbf{e}_k$を対応させて結合行列を計算すればよい．

を適用する際，任意の位相量ϕを除くため，式(2.17)のかわりに

$$(\lambda_1 - \lambda_k) L = M_k \qquad (k = 2, 3, \cdots, n) \tag{2.22}$$

ただし

$$M_k = (m_1 - m_k) \tag{2.23}$$

$$l = \pi L \tag{2.24}$$

を用いることにする．

2.5.1 3モード結合系

3モード結合系で，例えばモード(1)と(2)の間に完全結合のおこる結合系を考える．このとき，正規モード系を変換する行列**T**は，付録A式(A.1)の一般的な直交行列の第1行と第2行のベクトル($\mathbf{f}_1$, $\mathbf{f}_2$)に条件I(式(2.16))を適用することにより

$$\mathbf{T} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \sin\theta & \cos\theta & 1 \\ \sin\theta & \cos\theta & -1 \\ \sqrt{2}\cos\theta & -\sqrt{2}\sin\theta & 0 \end{pmatrix} \tag{2.25}$$

とあらわされる．よって，結合行列は式(2.25)を式(2.4)に代入して以下のように計算される．

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} \beta_a & c_1 & c_2 \\ c_1 & \beta_a & c_2 \\ c_2 & c_2 & \beta_b \end{pmatrix} \tag{2.26}$$

ただし

$$\left.\begin{aligned}
\beta_a &= \lambda_1 - \frac{1}{2L}(M_2\cos^2\theta + M_3) \\
\beta_b &= \lambda_1 - \frac{1}{L}M_2\sin^2\theta \\
c_1 &= \frac{1}{2L}(M_3 - M_2\cos^2\theta) \\
c_2 &= \frac{1}{2\sqrt{2}L}M_2\sin 2\theta \\
&0 \leqq \theta \leqq \frac{\pi}{2}
\end{aligned}\right\} \qquad (2.27)$$

ここで，式(2.25)におけるf_1とf_2の関係から，M_2は偶数，M_3は奇数でなければならない．

結合系の構造を具体的にとらえるため，1つのモードに1本の線路を対応させ，また結合係数の絶対値の大小を線路間の間隔の大小であらわしてみる．このような表示は，例えば，基本モードのみを伝送する誘電体線路を配列したような結合系に対応するが，結合係数と線路間隔が線形に比例しないから，真の結合系の構造を示すものではないことに注意しなければならない．いまの例では，結合系は図2．2に示すような二等辺三角形の配列としてあらわすことができる．

式(2.27)からθを消去すれば，結合係数c_1，c_2は位相定数を用いて以下の式であらわすことができる．

$$\left.\begin{aligned}
c_1 L &= \frac{1}{3}(X + 2M_3 - M_2) \\
c_2 L &= \frac{\sqrt{2}}{6}\left\{-4X^2 - 2(2M_3 - M_2)X + (2M_2 - M_3)(M_2 + M_3)\right\}^{1/2} \\
X &= (\beta_a - \beta_b)L
\end{aligned}\right\} \qquad (2.28)$$

ただし

$$-\frac{1}{2}(M_2+M_3) \leqq X \leqq \frac{1}{2}\cdot(2M_2-M_3) \qquad (2.29)$$

例えば，（M_2，M_3）の値が（2，3），（2，5），（4，3），（4，5）の各場合の，Xとc_1L，c_2Lの関係を示せば図2．3のようになる．

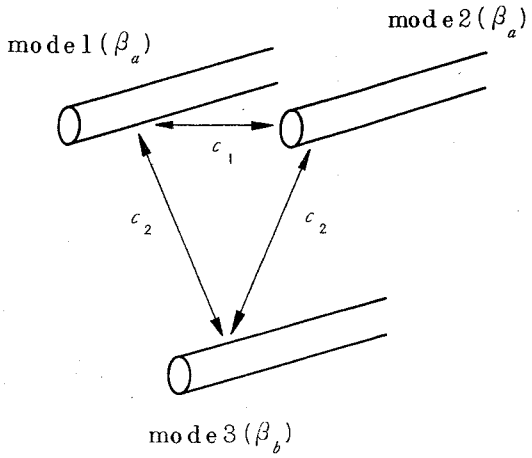


図2．2　モード(1)と(2)とが完全結する3モード結合系

また，式（2，28）を用いて，特殊な構造の3モード結合系について，完全結合の可能性の有無を検討することができる．例えば，図2．4(a)のように，同じ位相定数をもつ線路が正三角形に配列しているときには，

$$X=0 \quad , \quad c_1L=c_2L$$

より，式（2.28）から

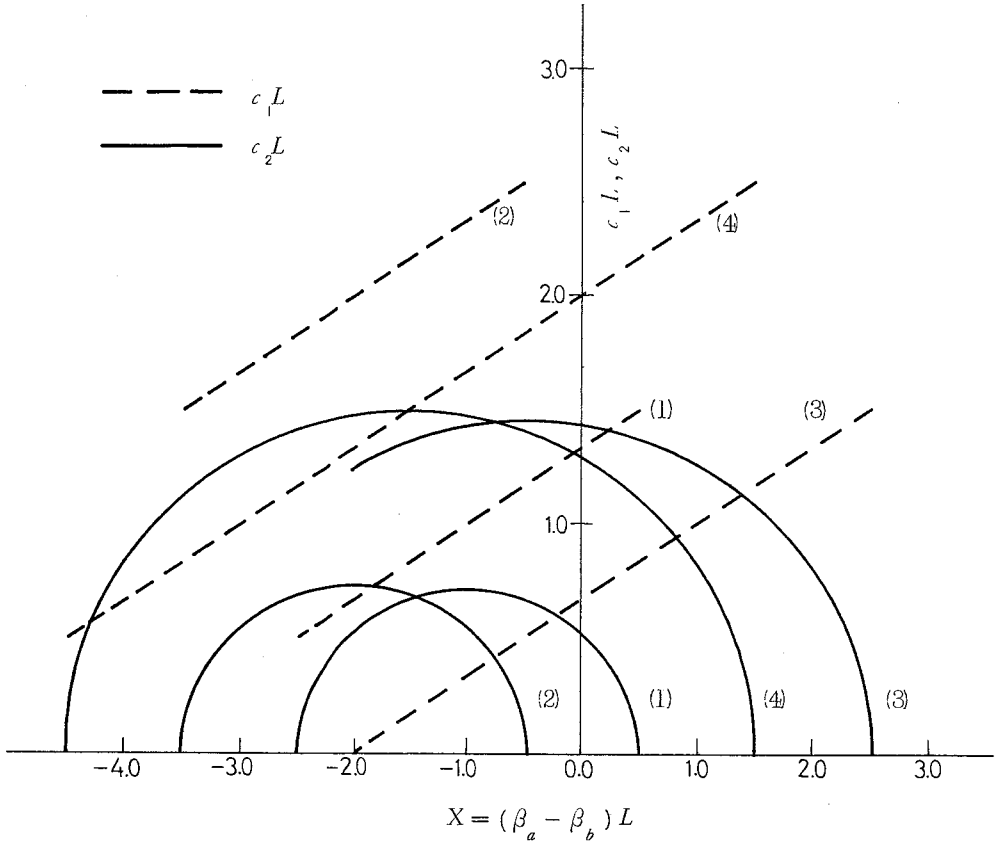
$$M_3(M_2-M_3)=0 \qquad (2.30)$$

なる関係式が得られる．式（2.30）を満たすM_2，M_3の組み合わせは存在しないので，このような結合系では完全結合はおこらない．

また，図2．4(b)のように，同じ位相定数をもつ線路が等間隔に配列しており，両端の線路間の結合がないような場合には，

$$X=0 \quad , \quad c_1L=0$$

より，式（2.28）から



(1)　$(M_2, M_3) = (2, 3)$, (2) $(2, 5)$, (3) $(4, 3)$, (4) $(4, 5)$

図２．３　３モード完全結合系における位相定数と結合係数の関数

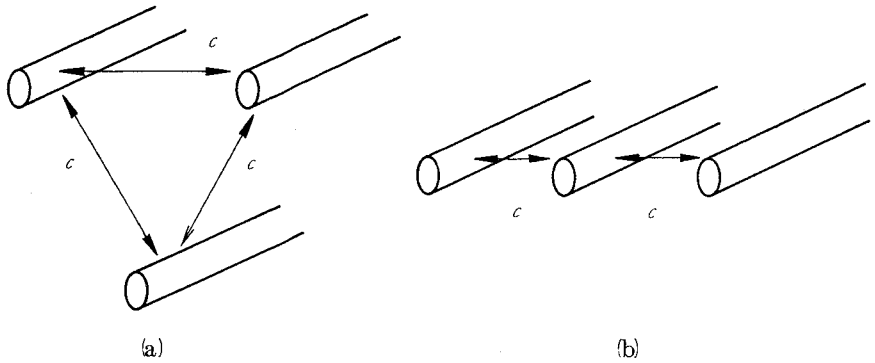


図２．４　３モード結合系の特殊な配列

$$2M_3 - M_2 = 0 \tag{2.31}$$

となり，$M_2 = 2$，$M_3 = 1$ のときに，最小の結合長で完全結合がおこる．すなわち，最小の完全結合長と結合係数の間には次の関係が成立する．

$$\sqrt{2}\, c l = \pi \tag{2.32}$$

2.5.2 4モード結合系

4モード結合系で，モード(1)と(2)の間に完全結合がおこるときの結合行列は，付録A式（A．1）の直交行列に条件Iを適用して得られる直交行列

$$\mathbf{T} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}}\sin\theta & \frac{1}{\sqrt{2}}\cos\theta & \frac{1}{\sqrt{2}}\sin\phi & \frac{1}{\sqrt{2}}\cos\phi \\ \frac{1}{\sqrt{2}}\sin\theta & \frac{1}{\sqrt{2}}\cos\theta & -\frac{1}{\sqrt{2}}\sin\phi & -\frac{1}{\sqrt{2}}\cos\phi \\ \cos\theta\sin\psi & -\sin\theta\sin\psi & -\cos\phi\cos\psi & -\sin\phi\cos\psi \\ \cos\theta\cos\psi & -\sin\theta\cos\psi & -\cos\phi\sin\psi & \sin\phi\sin\psi \end{pmatrix} \tag{2.33}$$

を式(2.4)に代入して，以下のように計算される．

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} \beta_a & c_{12} & c_{13} & c_{14} \\ c_{12} & \beta_a & c_{23} & c_{24} \\ c_{13} & c_{23} & \beta_b & c_{34} \\ c_{14} & c_{24} & c_{34} & \beta_c \end{pmatrix} \tag{2.34}$$

ただし

$$\beta_a = \lambda_1 - \frac{1}{2L}(M_2\cos^2\theta + M_3\sin^2\phi + M_4\cos^2\phi)$$

$$
\left.
\begin{aligned}
\beta_b &= \lambda_1 - \frac{1}{L}(M_2 \sin^2\theta \sin^2\psi + M_3 \cos^2\phi \cos^2\psi + M_4 \sin^2\phi \cos^2\psi) \\
\beta_c &= \lambda_1 - \frac{1}{L}(M_2 \sin^2\theta \cos^2\psi + M_3 \cos^2\phi \sin^2\psi + M_4 \sin^2\phi \sin^2\psi) \\
c_{12} &= -\frac{1}{2L}(M_2 \cos^2\theta - M_3 \sin^2\phi - M_4 \cos^2\phi) \\
c_{13} &= -\frac{1}{2\sqrt{2}L}\{M_2 \sin 2\theta \sin\psi - (M_3 - M_4) \sin 2\phi \cos\psi\} \\
c_{14} &= \frac{1}{2\sqrt{2}L}\{M_2 \sin 2\theta \cos\psi + (M_3 - M_4) \sin 2\phi \sin\psi\} \\
c_{23} &= \frac{1}{2\sqrt{2}L}\{M_2 \sin 2\theta \sin\psi + (M_3 - M_4) \sin 2\phi \cos\psi\} \\
c_{24} &= \frac{1}{2\sqrt{2}L}\{M_2 \sin 2\theta \cos\psi - (M_3 - M_4) \sin 2\phi \sin\psi\} \\
c_{34} &= -\frac{1}{2L} \sin 2\psi (M_2 \sin^2\theta - M_3 \cos^2\phi - M_4 \sin^2\phi) \\
& 0 \leqq \theta,\ \psi \leqq \frac{\pi}{2}, \quad 0 \leqq \phi \leqq 2\pi
\end{aligned}
\right\} \quad (2.35)
$$

ここで，式(2.33)における $\mathbf{f}_1$，$\mathbf{f}_2$の関係から，M_2は偶数，M_3，M_4は奇数でなければならない．

4モード結合系の場合には，3モード結合系の場合のように単純な幾何学的配列として結合系をあらわすことは，一般的にはできないが，特殊な例として，たとえば，完全結合に関係しないモード(3)と(4)の位相定数β_bとβ_cとが等しい場合を考える．式(2.35)から

$$
\psi = \frac{\pi}{4} \tag{2.36}
$$

のときに$\beta_b = \beta_c$となることが分る．式(2.36)が満たされるときには，またc_{13}

$=c_{24}$，$c_{14}=c_{23}$となり，結合系は図2.5に示される台形の配列としてあらわされる．式(2.35)に式(2.36)を代入し，ϕを消去すれば，各結合係数は

$$\left.\begin{aligned}
c_{12}L &= -\frac{1}{2}X - M_2\cos^2\theta + \frac{1}{4}(M_2+M_3+M_4) \\
c_{13}L &= \frac{1}{4}\left\{M_2\sin 2\theta - \sqrt{(M_3-M_4)^2-(2X+M_2\cos 2\theta)^2}\right\} \\
c_{14}L &= \frac{1}{4}\left\{M_2\sin 2\theta + \sqrt{(M_3-M_4)^2-(2X+M_2\cos 2\theta)^2}\right\} \\
c_{34}L &= \frac{1}{2}X - M_2\sin^2\theta + \frac{1}{4}(M_2+M_3+M_4) \\
X &= (\beta_a-\beta_b)L
\end{aligned}\right\} \qquad (2.37)$$

ただし

$$|2X+M_2\cos 2\theta| < |M_3-M_4| \qquad (2.38)$$

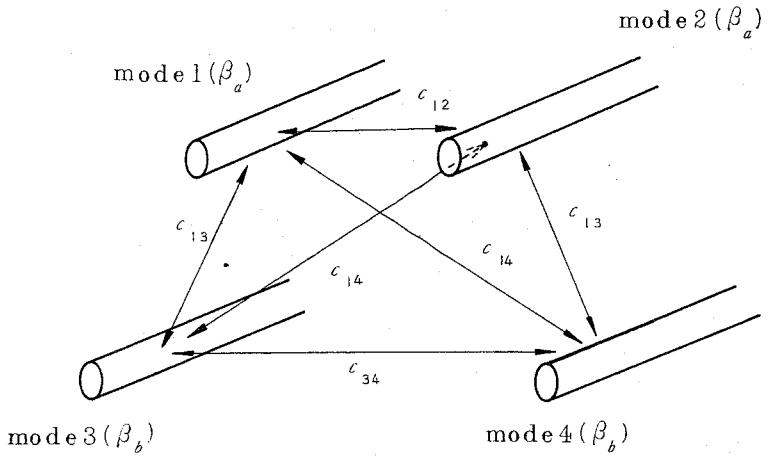
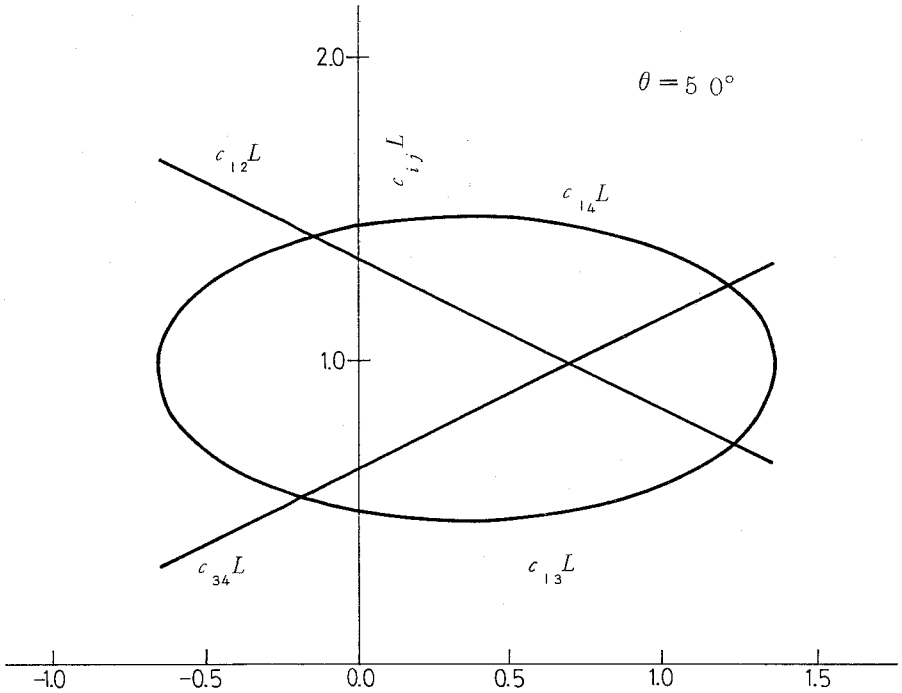


図2．5　台形の配列をなす4モード結合系

となる．すなわち，X，M_k (k=2,3,4)，θを与えることにより，結合係数を決

定できる．（M_2，M_3，M_4）＝（4，3，5），$\theta=50°$の場合の位相定数と結合係数の関係を図２．６に示す．



$X=(\beta_a-\beta_b)L$

（M_2，M_3，M_4）＝（4，3，5）

第２．６　台形の配列をなす４モード結合系の位相定数と結合係数の関係

2.5.3　特殊な結合系

仮に条件Ｉ（式(2.16)）が，ベクトル $\mathbf{f}_i$，$\mathbf{f}_j$ の間だけでなく，n 個のベクトル $\mathbf{f}_i$（$i=1,2,\cdots,n$）のうちから任意に選らぶすべての組み合わせについても満足されているときには，結合系正規モードの位相定数を変化させるだけで，完全結合するモードの組み合わせを変えることができる．このような例は，結合素子を設計するときの取り扱いが簡単であるばかりでなく，系の構造を大きく

変えることなく，完全結合するモードの組み合わせを変化させられるものとして，応用上興味深い．

上記の条件が満たされるためには，正規モード系を変換する直交行列**T**の各要素の絶対値がすべて等しくなることが必要であるが，モードの個数が

$$n = 2^m \quad (m=1,2,\cdots\cdots) \tag{2.39}$$

の場合にのみ，このような直交行列を得ることができる．（付録B） 例えば，$n=4$の場合，付録B式（B．9）を式（2．4）に代入して結合行列を計算すれば，

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} \beta & c_1 & c_2 & c_3 \\ c_1 & \beta & c_3 & c_2 \\ c_2 & c_3 & \beta & c_1 \\ c_3 & c_2 & c_1 & \beta \end{pmatrix} \tag{2.40}$$

ただし

$$\left.\begin{aligned} \beta L &= \lambda_1 L - \frac{1}{4} M \\ c_1 L &= \frac{1}{4} M - \frac{1}{2} M_2 \\ c_2 L &= \frac{1}{4} M - \frac{1}{2} M_3 \\ c_3 L &= \frac{1}{4} M - \frac{1}{2} M_4 \\ M &= M_2 + M_3 + M_4 \end{aligned}\right\} \tag{2.41}$$

となり，結合系は図2．7に示すような長方形の配列としてあらわすことがで

きる．

完全結合するモードの組み合わせを変えようとする場合，例えばモード(1)，(2)が完全結合している系（M_3が偶数，M_2，M_4が奇数）を，モード(1)，(3)が完全結合するように変えるには，新らたなM_k（$k=2,3,4$）としてM_2'を偶数，M_3'，M_4'を奇数として与えればよい．しかし，このときに

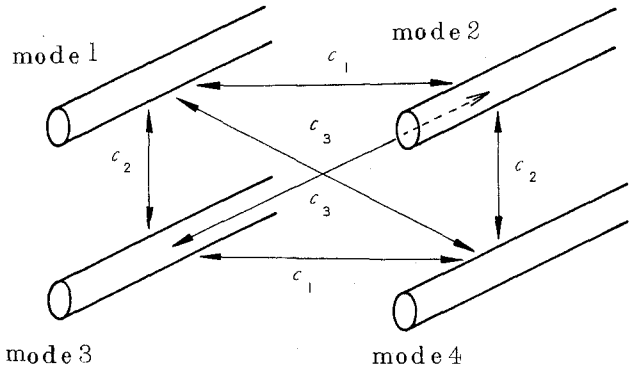


図２．７　完全結合するモードの組合せを簡単に変えることのできる結合系

$$M_2' + M_3' = M_2 + M_3 \quad , \quad M_4' = M_4 \tag{2.42}$$

とするならば，式（2.41）のc_3は変化しない．すなわち，図２．７のような結合系では，２種の結合係数を変化させるだけで，完全結合するモードの組み合わせを自由に選らぶことができる．

2.6 結　言

本章では，従来明らかでなかった，特定のモード間に完全結合のおこる多モード結合系について検討し，系の構造を定める結合行列の導出法を明らかにした．このような系の一般的特徴として，完全結合する２つのモードの位相定数は等しいこと，完全結合長には周期性があることが明らかとなった．また，モードの個数を３，４とした場合を具体例として，結合行列を導出し，結合係数と位相定数の関係を，式および図表で示した．

本章で示したような，系の機能から逆に結合行列を求める取り扱いは，従

来，ほとんど行なわれていない．次章では，この取り扱いをさらに一般化し，完全結合以外の他の機能をもつ結合系について結合行列を導出することを考える．

第3章　多モード分布結合系を用いた回路素子の設計とその応用

3.1　緒　　言

2章では，完全結合の条件を満たす結合系について，系の構造を定める結合行列を導いたが，本章では，この取り扱いをさらに進め，一般的な結合系について，その回路的な特性を表す伝達行列から，結合行列を導出する手法を示す．そして，この手法を用いて電力等分配器の特性を考察し，具体的な設計式や数値計算例を示す．

ここでいう電力等分配器とは，任意のモードの入力電力が，出力端で，結合に関与する n 個のすべてのモードに等分されるような結合器のことをさす．このような結合器は，可変移相器と組み合わせて，希望するモード間に完全結合を起こさせるような選択的なモード変換器を構成することもでき，回路素子としても興味ぶかいものである．

本章で述べる手法は，電力等分配器に限らず，他の多くの結合回路素子の設計にも広く利用できるものと思われる．

3.2　結合行列と伝達行列の関係

多モード分布結合系の結合行列についてはすでに2章で詳しく述べているので，本節では3章の議論に必要な結果のみを簡単にまとめておくことにする．

n 個のモードが同一の伝送軸（ z 軸）に沿い，伝送方向に一様に分布結合している，無損失で可逆な結合系について考える．この系の結合方程式は，行列表示を用いて

$$\frac{d}{dz}\mathbf{a} = j\mathbf{C}\mathbf{a} \tag{3.1}$$

ただし

$$\mathbf{a}=\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}, \quad \mathbf{C}=\begin{pmatrix} \beta_1 & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{12} & \beta_2 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ c_{1n} & \cdots & \cdots & \beta_n \end{pmatrix}$$

とあらわされる．ここで a_i ($i=1,2,\cdots,n$)はモード(i)の複素振幅であり，その複素共役との積 $a_i a_i^*$が，モード(i)の伝送電力を与えるように規格化されている．また，行列$\mathbf{C}$は結合行列と呼ばれ，結合系の構造に密接に関係している．結合行列の対角要素β_i ($i=1,2,\cdots,n$)はモード(i)の位相定数を与え，非対角要素 c_{ij} ($i,j=1,2,\cdots,n$)はモード(i)・(j)間の結合係数を与える．ここで扱う系については結合行列$\mathbf{C}$は実対称行列となる．

一方，伝達行列$\mathbf{A}$は，結合系の入，出力端における入力モードおよび出力モードの振幅をあらわすベクトルをそれぞれ $\mathbf{a}^{(i)}$, および $\mathbf{a}^{(o)}$ とするとき

$$\mathbf{a}^{(o)}=\mathbf{A}\,\mathbf{a}^{(i)} \tag{3.2}$$

で定義され，系の特性はすべてこの伝達行列$\mathbf{A}$に含まれる．伝達行列は，式(3.1)の結合方程式の解から，

$$\mathbf{A}=\exp[j\mathbf{C}l]=\mathbf{T}\exp[j\Lambda l]\mathbf{T}^T \tag{3.3}$$

ただし

$$\Lambda=\begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \lambda_2 & \\ & & \ddots \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}, \quad \exp[j\Lambda l]=\begin{pmatrix} e^{j\lambda_1 l} & & 0 \\ & e^{j\lambda_2 l} & \\ & & \ddots \\ 0 & & e^{j\lambda_n l} \end{pmatrix}$$

とあらわすことができる．ここで行列$\mathbf{T}$，$\mathbf{T}^T$ は，それぞれ直交行列とその転置行列であり，

$$\mathbf{C} = \mathbf{T}\,\Lambda\,\mathbf{T}^T \tag{3.4}$$

なる関係を満たしている．またlは，系の結合部分の長さである．

式(3.3)の転置行列$\mathbf{A}^T$ および複素共役行列$\mathbf{A}^*$ は，それぞれ

$$\mathbf{A}^T = \mathbf{A}$$

$$\mathbf{A}^* = \exp[-j\mathbf{C}l] = \mathbf{A}^{-1} \tag{3.6}$$

となり，行列$\mathbf{A}$は対称なユニタリ行列であることがわかる．

3.3 結合行列の計算法

伝達行列$\mathbf{A}$を用いて結合行列$\mathbf{C}$を求めるには，式(3.3)の両辺の対数をとって得られる式

$$\mathbf{C}l = -j\ln\mathbf{A} \tag{3.7}$$

を用いればよい．上式によれば結合行列$\mathbf{C}$の要素に系の結合部分の長さlをかけた値が求められる．

式(3.7)を実際に計算するには，次の2つの方法が考えられる．1つは，伝達行列$\mathbf{A}$を

$$\mathbf{M} = \mathbf{T}^T\mathbf{A}\,\mathbf{T} \tag{3.8}$$

なる形に対角化するような対角行列$\mathbf{M}$，および直交行列$\mathbf{T}$を求め，式(3.7)を

$$\mathbf{C}l = -j\mathbf{T}\ln\mathbf{M}\mathbf{T}^T \tag{3.9}$$

ただし

$$\mathbf{M}=\begin{pmatrix}\mu_1 & & 0\\ & \mu_2 & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \mu_n\end{pmatrix},\quad \ln\mathbf{M}=\begin{pmatrix}\ln\mu_1 & & 0\\ & \ln\mu_2 & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \ln\mu_n\end{pmatrix}$$

として求める方法である．行列**A**の対角化は，**A**の固有値問題を解くことによってできる．[+] この方法は，結合に関与するモードの個数が多く，数値計算によって解を得ようとする場合に適している．

もう一つの方法は，行列**A**の固有値μ_i ($i=1,2,\cdots,n$)を計算し，行列関数の計算公式であるLagrange−Sylvesterの補間公式[(41)]から，式(3.7)を

$$\mathbf{C}_l=-j\sum_{k=1}^{n}\frac{(\mathbf{A}-\mu_1\mathbf{I})\cdots\cdots(\mathbf{A}-\mu_{k-1}\mathbf{I})(\mathbf{A}-\mu_{k+1}\mathbf{I})}{(\mu_k-\mu_1)\cdots\cdots(\mu_k-\mu_{k-1})(\mu_k-\mu_{k+1})}\frac{\cdots\cdots(\mathbf{A}-\mu_n\mathbf{I})}{\cdots\cdots(\mu_k-\mu_n)}\ln\mu_k \qquad (3.10)$$

ただし　**I**；単位行列

として$\mathbf{C}_l$を求める方法である．[++] この方法は，結合に関与するモードの個数が比較的少なく，**A**の固有値を解析的に求め得るような場合に，結合行列の各要素，すなわち位相定数および結合係数，に関する設計式を導くのに適している．

伝達行列**A**はユニタリ行列であるから，その固有値μ_i ($i=1,2,\cdots,n$)は絶対値が1の複素数となる．[(38)] 式(3.9)，あるいは式(3.10)を計算する場合，

+　対角行列**M**の各要素は**A**の固有値に，直交行列**T**の各列ベクトルは**A**の固有ベクトルに対応する．[(38)]

++　式(3.10)は，固有値μ_i ($i=1,2,\cdots,n$)に縮退のない場合の式であり，縮退のある場合は別の式を用いなければならない．[(41)]

固有値の対数 $\ln\mu_i$ が必要となるが，複素数の対数には常に 2π の整数倍の不定性がある．そこで，$\ln\mu_i$ を一意的に定めるため，$\ln\mu_i$ を次のように表わすことにする．

$$\ln\mu_i = j(\lambda_i l + 2n_i\pi) \quad (i=1,2,\cdots,n) \tag{3.11}$$

ただし $0<\lambda_i l \leq 2\pi$ であり，また n_i ($i=1,2,\cdots,n$) は零，あるいは正の整数である．式(3.11)で $\lambda_i l$ とおいたのは，式(3.3)と式(3.9)の対応関係を明確にするためである．

3.4 電力等分配器とその伝達行列

本節以下では，前節までの議論の適用例として，電力等分配器をとりあげ，その伝達行列と結合行列との関係を求め，具体的な数値計算例等を示すことにする．

図3．1に示すように，入力端で任意のモード(i)にのみ加えられた入力電力 P を，出力端で，n 個のすべてのモードに等しく分配するような結合系を考え，このような結合系を以下，電力等分配器とよぶことにする．このような結合系においては，電力を加える入力モードを変えても，出力端の各モード出力の振幅は変化せず，ただ，それらの間の位相関係のみが異なってくる．

このような特性を用いれば，例えば，図3．2(a)に示すように，各モードに等振幅の入力を加え，各入力の位相を可変移相

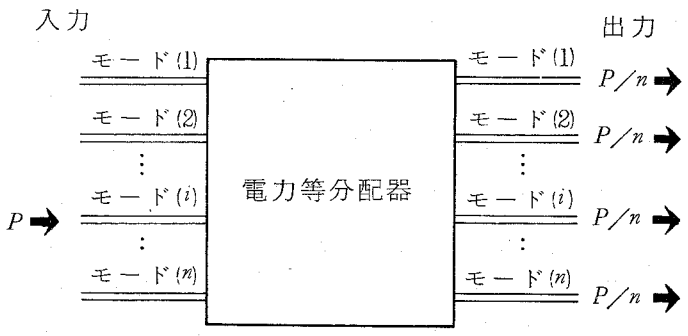


図3．1　電力等分配器

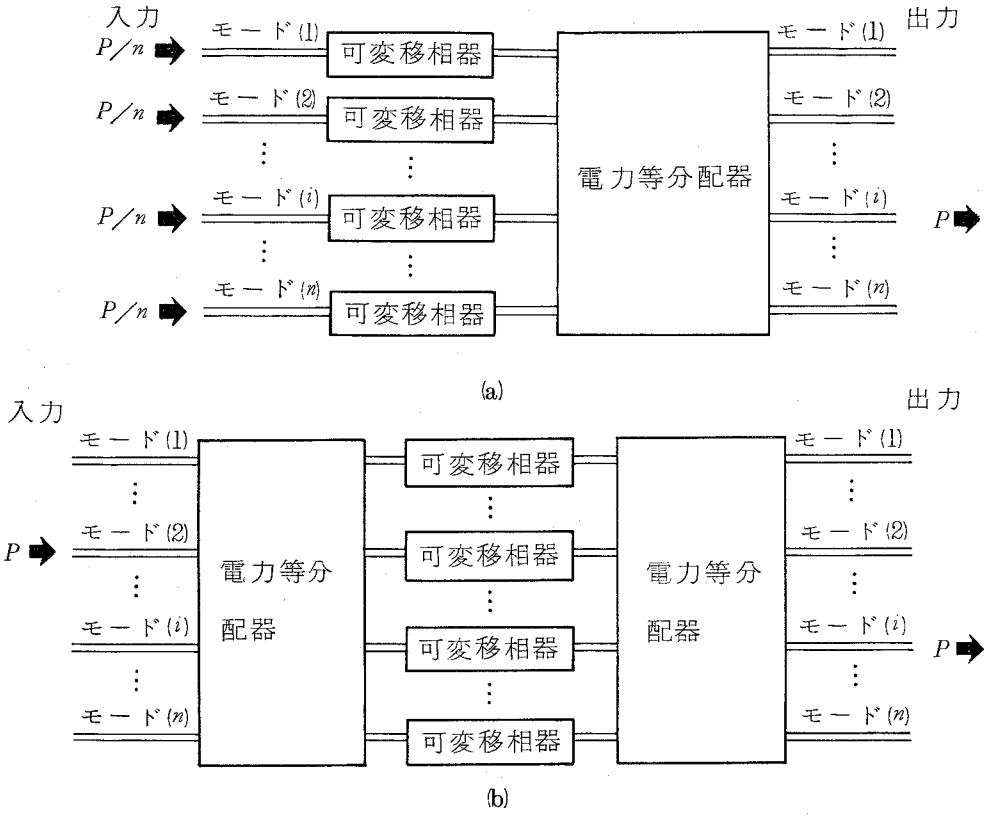


図３．２　電力等分配器の応用例

器によって調整することにより，希望するモードにのみ出力を得ることのできるような，一種の偏向器を構成することができる．あるいはまた，図３．２(b)のように，２つの電力等分配器を可変移相器を介して接続し，移相量を変化させることによって希望する入出力モード間にのみ完全結合を起させるような，一種の可変方向性結合器を構成することもできる．

そこでまず，電力等分配器の伝達行列の一般的な特徴を調べる．いま，入力端における入力モードの振幅をあらわすベクトル $\mathbf{a}^{(i)}$ と電力等分配器の伝達行列 $\mathbf{A}$ の各要素を，それぞれ

$$\mathbf{a}^{(i)}=\begin{pmatrix} a_1^{(i)} \\ a_2^{(i)} \\ \vdots \\ a_n^{(i)} \end{pmatrix} \quad , \quad \mathbf{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots\cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots\cdots & \cdots\cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

とし，モード(i)にのみ単位振幅の入力を加えた場合，すなわち

$$a_i^{(i)}=1 \ , \ a_j^{(i)}=0 \qquad (j \neq i \ , j=1,2,\cdots,n)$$

なる場合を考える．式(3.2)に上の関係を代入すれば，出力端における出力モードの振幅をあらわすベクトルは

$$\mathbf{a}^{(o)}=\begin{pmatrix} a_{1i} \\ a_{2i} \\ \vdots \\ a_{ni} \end{pmatrix}$$

となり，各出力モードの振幅が等しいことから，次の関係がなりたつことになる．

$$|a_{1i}| = |a_{2i}| = \cdots\cdots\cdots\cdots = |a_{ni}| \tag{3.12}$$

すべての i ($i=1,2,\cdots,n$) について式(3.12)の関係が成立し，しかも行列**A**が対称でかつユニタリな行列であることを考慮すると，結局伝達行列**A**の各要素の絶対値は

$$|a_{ij}|=1/\sqrt{n} \qquad (i,j=1,2,\cdots,n) \tag{3.13}$$

で与えられることになる．すなわち，電力等分配器の伝達行列は，対称かつユニタリで，しかもすべての要素の絶対値が$1/\sqrt{n}$ となるような行列である．

このような，対称かつユニタリで，しかもすべての要素の絶対値が等しいような行列については，付録Bで詳しく述べている．

3.5 電力等分配器の結合行列

モード数が2個または3個の場合には，電力等分配器の伝達行列の固有値は，2次または3次方程式の根の公式を用いて，解析的に導出できる．よって，この2つの場合を例にとって，電力等分配器の結合行列を計算し，その特徴を調べてみる．

3.5.1 2モードの場合

2モードの電力等分配器は，通常の3dB結合器と同じものとなる．この場合の伝達行列は，付録Bの式(B.1)および式(B.5)より，次のようにあらわせる．

$$\mathbf{A}=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} e^{j\phi_1} & 0 \\ 0 & e^{j\phi_2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e^{j\phi_1} & 0 \\ 0 & e^{j\phi_2} \end{pmatrix} \tag{3.14}$$

ここで，ϕ_1，ϕ_2は任意の実数である．

3.4で述べたように，一般に行列**A**の第i列よりなるベクトルは，モード(i)にのみ入力を加えたときの，各出力モードの振幅と位相をあらわす．このことから，モード(i) ($i=1,2,\cdots,n$)にのみ入力を加えた場合の，任意の出力モード(j)と(k)との間の位相差

$$\Delta\psi_{jk}=\psi_k-\psi_j \tag{3.15}$$

を，行列**A**から求めることができる．ここで，ψ_j，ψ_k ($j,k=1,2,\cdots,n$)はそれぞれ任意の出力モード(j)および(k)の位相である．逆に，この位相関係を満たすような等振幅の入力を電力等分配器のすべての入力モードに加えれば，出力

端でモード(i)にのみ出力が得られるから，これらの位相関係は，電力等分配器を図３．２(a)(b)に示すような用い方をする場合の可変移相器で調整すべき移相量に関連して，大きな意味をもってくる．

２モードの場合，式(3.14)を計算し，モード(1)の出力の位相を基準として，表３．１(a)の結果が得られる．ここで$\Delta\phi$は

$$\Delta\phi = \phi_2 - \phi_1 \tag{3.16}$$

である．表３．１(a)から分るように，入力を加えるモードを変えても，出力モード(1)，(2)の間の位相差は単にπ異なっているにすぎない．したがって，このような２モード結合系を用いて図３．２(a)，(b)に示したような結合器を構成する場合，可変移相器で２つのモード間にπの位相差を与えると，出力を得るモードを変え得ることが表３．１(a)よりわかる．

式(3.12)の伝達行列の固有値を計算し，その対数をとると，式(3.11)の$\lambda_i l$ (i=1,2)は次のようにあらわされる．

$$\left.\begin{aligned} \lambda_1 l &= \phi + \tan^{-1}(\sin\Delta\phi/\sqrt{2-\sin^2\Delta\phi}) \\ \lambda_2 l &= \phi - \tan^{-1}(\sin\Delta\phi/\sqrt{2-\sin^2\Delta\phi}) \end{aligned}\right\} \tag{3.17}$$

ただし

$$\phi = \phi_1 + \phi_2 \tag{3.18}$$

これらの値を，式(3.10)に代入して結合行列を計算すると，次の結果が得られる．

$$\left.\begin{aligned} \beta_1 l &= \phi + (n_1 + n_2)\pi + F(\Delta\phi)\cos\Delta\phi \\ \beta_2 l &= \phi + (n_1 + n_2)\pi - F(\Delta\phi)\cos\Delta\phi \end{aligned}\right\} \tag{3.19}$$

$$C_{12}l = F(\Delta\phi)$$

ただし

$$F(\Delta\phi) = \frac{1}{\sqrt{2-\sin^2\Delta\phi}}\left\{\tan^{-1}\frac{\sin\Delta\phi}{\sqrt{2-\sin^2\Delta\phi}} + (n_1 - n_2)\pi\right\} \quad (3.20)$$

ここでn_1，n_2は，式(3.11)に示される零または正の整数である．式(3.19)からわかるように，2つのモードの位相定数β_1，β_2の値は，ϕによって結合係数c_{12}とは無関係に変えることができる．よって，電力等分配器の設計には，$\Delta\phi$によって定まる，結合係数c_{12}および位相定数の差($\beta_1 - \beta_2$)を与えておけばよい．

いま，$n_1 = n_2$として，$\Delta\phi$と($\beta_1 - \beta_2$)lおよび$c_{12}l$との関係を図示すると，図3．3のようになる．ただしlは，系の結合部分の長さである．なお，ここでは結合係数が正となる範囲のみを示した．

表3．1　入力を加えるモードを変えた場合の各出力モード間の位相差

位相差＼入力モード	モード(1)	モード(2)
$\Delta\psi_{12}$	$-\Delta\phi$	$\pi-\Delta\phi$

(a)　2モードの場合

位相差＼入力モード	モード(1)	モード(2)	モード(3)
$\Delta\psi_{12}$	$-\Delta\phi_a$	$\frac{2}{3}\pi-\Delta\phi_a$	$\frac{4}{3}\pi-\Delta\phi_a$
$\Delta\psi_{13}$	$-\Delta\phi_b$	$\frac{4}{3}\pi-\Delta\phi_b$	$\frac{2}{3}\pi-\Delta\phi_b$

(b)　2モードの場合

3.5.2　3モードの場合

3モードからなる電力等分配器を，付録Bの式(B.1)および，(B.6)から与えられる伝達行列**A**を用いて検討する.[+]

$$\mathbf{A}=\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} e^{j\phi_1} & & 0 \\ & e^{j\phi_2} & \\ 0 & & e^{j\phi_3} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \omega^2 & \omega \\ 1 & \omega & \omega^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e^{j\phi_1} & & 0 \\ & e^{j\phi_2} & \\ 0 & & e^{j\phi_3} \end{pmatrix} \qquad (3.21)$$

ただし

$$\omega=(-1+j\sqrt{3})/2$$

ここで，ϕ_1，ϕ_2，ϕ_3は任意の実数である.

2モードの場合と同様に，入力を加えるモードを変化させた場合の各出力モード間の位相差は，式(3.21)を計算して，表3.1(b)のようになる．ただし，$\Delta\phi_a$，$\Delta\phi_b$はそれぞれ，

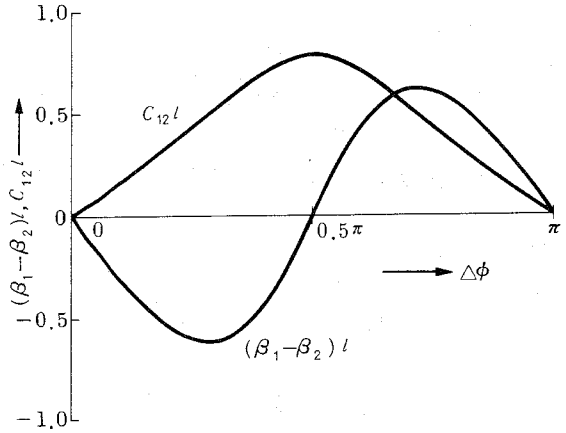


図3．3　電力等分配器の位相定数と結合係数(2モード)

$$\Delta\phi_a=\phi_2-\phi_1 \quad , \quad \Delta\phi_b=\phi_3-\phi_1$$

である．よって，この結合器を図3．2(a)，(b)のような用い方をする場合，出力

+　ここでは式(B．6)の左側の式を用いた．右側の式は左側の複素共役形であるから，右側の式を用いる場合には，ϕ_i($i=1,2,\cdots,n$)の符号をかえて伝達行列全体を式(3．21)の複素共役形にしておけば，得られる結果(すなわち$\beta_i l$，$c_{ij}l$)の符号がかわるだけで，以下の議論はそのままなりたつ.

を得るモードを変えるには，可変移相器で$\pm\frac{2}{3}\pi$の位相変化を起させればよいことがわかる．

行列**A**の固有値を求め，[+] 式（3.10）を用いて結合行列の各要素を計算すれば，各モードの位相定数β_i（i=1，2，3），および，モード間の結合係数c_{ij}（$i<j$；i，j=1，2，3）はそれぞれ以下のようにあらわせる．

\+ 式（3.21）で示される行列**A**の特性方程式は，変数をμとして

$$\mu^3+P_1\mu^2+P_2\mu+P_3=0$$

$$P_1=-\frac{1}{\sqrt{3}}\{e^{j2\phi_1}+\omega^2e^{j2\phi_2}+\omega^2e^{j2\phi_3}\}$$

$$P_2=-\frac{1}{3}(1-\omega^2)\{e^{j2(\phi_1+\phi_2)}+e^{j2(\phi_2+\phi_3)}+e^{j2(\phi_1+\phi_3)}\}$$

$$P_3=-\frac{1}{\sqrt{3}}(\omega-\omega^2)e^{j2(\phi_1+\phi_2+\phi_3)}$$

となる．Cardano の公式を用いて，上式の3根を求めると，結果は次のようになる．

$$\mu_{\substack{1\\2\\3}}=\frac{1}{\sqrt{3}}e^{j\frac{2}{3}(\phi_1+\phi_2+\phi_3)}\left[Re^{j\frac{2}{3}\eta}+\begin{Bmatrix}u+v\\ \omega u+\omega^2v\\ \omega^2u+\omega v\end{Bmatrix}\right]$$

ただし

$$u=\sqrt[3]{A+B}\quad,\quad v=\sqrt[3]{A-B}$$

$$A=R^3e^{j2\eta}-j\frac{3\sqrt{3}}{2}(R^2-1)$$

$$B=\sqrt{\frac{9}{4}(R^4+6R^2-3)-6\sqrt{3}R^3\sin 2\eta}$$

であり，また，R，ηは実数で

$$Re^{j\frac{2}{3}\eta}=\frac{1}{3}\{e^{j\frac{2}{3}(2\phi_1-\phi_2-\phi_3)}+\omega^2e^{j\frac{2}{3}(2\phi_2-\phi_1-\phi_3)}+\omega^2e^{j\frac{2}{3}(2\phi_3-\phi_1-\phi_2)}\}$$

なる関係を満たす．

$$\beta_i l = \frac{2}{3}\phi + \frac{2}{3}(n_1+n_2+n_3)\pi$$

$$-j\frac{1}{6B}\Big[f(\theta_i, u, v)\Big\{\ln\kappa_1 + j\frac{2}{3}(2n_1-n_2-n_3)\pi\Big\}$$

$$+f(\theta_i, \omega u, \omega^2 v)\Big\{\ln\kappa_2 + j\frac{2}{3}(2n_2-n_1-n_3)\pi\Big\}$$

$$+f(\theta_i, \omega^2 u, \omega v)\Big\{\ln\kappa_3 + j\frac{2}{3}(2n_3-n_1-n_2)\pi\Big\}\Big]$$

$$(i=1, 2, 3) \qquad (3.22)$$

$$c_{ij} l = -j\frac{1}{6B}\Big[g(\theta_i, \theta_j, u, v)\Big\{\ln\kappa_1 + j\frac{2}{3}(2n_1-n_2-n_3)\pi\Big\}$$

$$+g(\theta_i, \theta_j, \omega u, \omega^2 v)\Big\{\ln\kappa_2 + j\frac{2}{3}(2n_2-n_1-n_3)\pi\Big\}$$

$$+g(\theta_i, \theta_j, \omega^2 u, \omega v)\Big\{\ln\kappa_3 + j\frac{2}{3}(2n_3-n_1-n_2)\pi\Big\}\Big]$$

$$(i<j\ ;\ i, j=1, 2, 3) \qquad (3.23)$$

ただし

$$\left.\begin{aligned}
f(\theta, x, y) &= (x-y)\Big[R^2 e^{j\frac{4}{3}\eta} + (3\omega-2)Re^{j\frac{2}{3}\eta}e^{j\theta} \\
&\quad + (1-\omega)e^{j2\theta} - (Re^{j\frac{2}{3}\eta} - e^{j\theta})(x+y) + (x^2-xy+y^2)\Big] \\
g(\theta_i, \theta_j, x, y) &= \omega^2(x-y)e^{j\frac{1}{2}(\theta_i+\theta_j)}\Big[(3\omega^2-2)Re^{j\frac{2}{3}\eta} \\
&\quad + (1-\omega^2)(e^{j\theta_1} + e^{j\theta_2}) + (x+y)\Big]
\end{aligned}\right\}$$

$$(3.24)$$

$$
\left.
\begin{aligned}
\kappa_{\substack{1\\2\\3}} &= \frac{1}{\sqrt{3}}\left[Re^{j\frac{2}{3}\eta} + \begin{Bmatrix} u+v \\ \omega u+\omega^2 v \\ \omega^2 u+\omega v \end{Bmatrix} \right] \\
\theta_1 &= -\frac{2}{3}(\Delta\phi_a + \Delta\phi_b) \\
\theta_2 &= -\frac{2}{3}(-2\Delta\phi_a + \Delta\phi_b - 2\pi) \\
\theta_3 &= -\frac{2}{3}(\Delta\phi_a - 2\Delta\phi_b - 2\pi) \\
\phi &= \phi_1 + \phi_2 + \phi_3
\end{aligned}
\right\} \qquad (3.25)
$$

であり，u, v, B, R, η などの値は，行列**A**の固有値に関係する値で，脚注に示されている．

3モードの場合も2モードの場合と同様に，$\Delta\phi_a$，$\Delta\phi_b$ のみで，結合係数と位相定数の差とが定まる．いま，$n_1 = n_2 = n_3$として，これらの関係を図示すると，図3．4，図3．5のようになる．

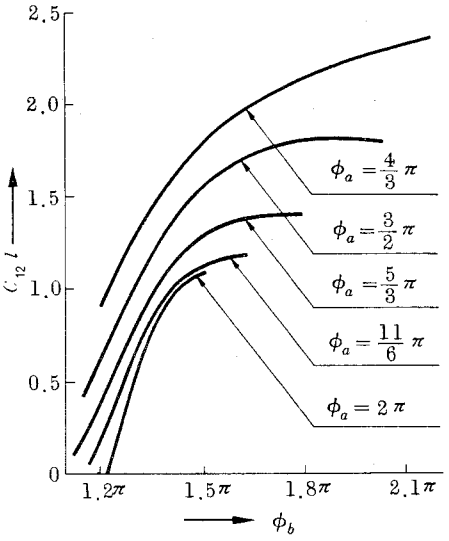
式(3.23)～(3.25)，あるいは図3．4，図3．5から明らかなように，

$\Delta\phi_a = \frac{4}{3}\pi$，($\theta_1 = \theta_2$)の時　$\beta_1 = \beta_2$　，　$c_{13} = c_{23}$

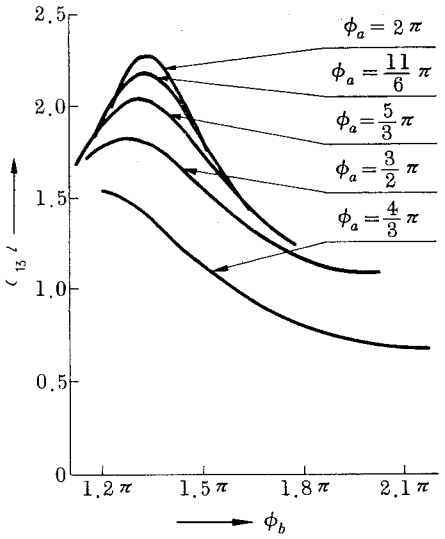
$\Delta\phi_b = \frac{4}{3}\pi$，($\theta_1 = \theta_3$)の時　$\beta_1 = \beta_3$　，　$c_{12} = c_{23}$

$\Delta\phi_a = \Delta\phi_b$，($\theta_2 = \theta_3$)の時　$\beta_2 = \beta_3$　，　$c_{12} = c_{13}$

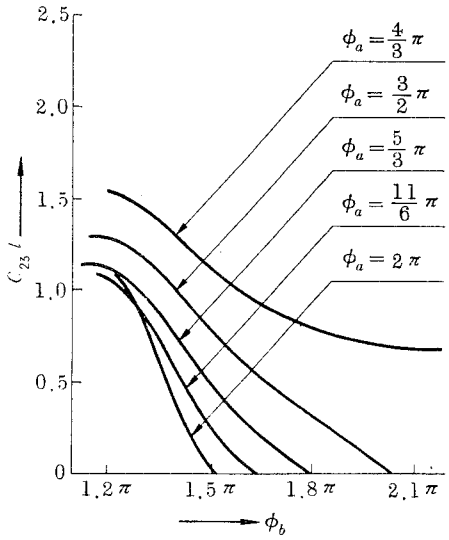
なる関係があることがわかる．このような関係は，モード間の結合機構に対称性があるような結合系や，同じ値の位相定数をもつモードを用いるような結合系の設計に利用できる．



(a) $c_{12}\ l$



(b) $c_{13}\ l$



(c) $c_{23}\ l$

図３．４　電力等分配器の結合係数（３モード）

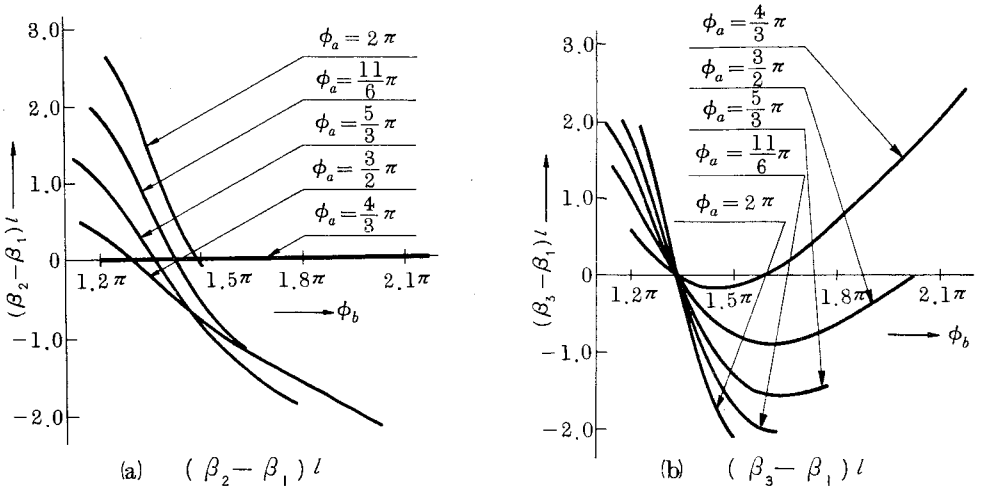


図３．５　電力等分配器の位相定数（３モード）

3.6 結　　言

本章では，伝送方向に一様な分布結合機構をもつ多モードの結合系について，系の回路的な特性を与える伝達行列から，結合系の構造を定める結合行列を求める手法を明らかにした．また，その応用として，任意の入力モード電力を出力端ですべてのモードに均等に分配する，電力等分配器をとりあげ，その伝達行列の一般的な与え方，および，モードの個数を２あるいは３とした場合の結合行列の求め方を示し，その特性を明らかにした．

多数個のモードからなる一様な分布結合系は，例えば，最近さかんに研究されている誘電体導波路を用いて簡単に実現でき，本章で取り上げた電力等分配器は，光集積回路の回路素子などへの応用が期待できる．

また，本章で示した結合行列の導出法は，電力等分配器に限らず，種々の結合素子についても適用できる．

第4章　誘電体導波路からなる分布結合系へのモード結合理論の適用

4.1 緒　　言

モード結合理論が多くの分野で用いられている理由の一つは，様々な結合系の問題が結合方程式におきかえられ，統一的に取り扱かわれる点にある．加えて，特に結合系が無損失や相反性などの基本的な特性をもつ場合には，結合方程式やその解についての一般的な性質が知られており，このことがモード結合理論の応用価値をさらに高めているともいえる．

モード結合理論を具体的な結合系に適用する場合，その結合方程式の導出には様々な手法が用いられる．誘電体導波路からなる結合系については，例えばSnyder[36]やMarcuse[31]はMaxwellの方程式を用いて結合方程式を導出しているが，彼らの導いた結合方程式は，結合系が複数個の誘電体線路からなるような場合には，基本的な系の特性から定まる性質を満足する形には表現されていない．また，沢[37]は変分法を用いて，基本的な系の特性から定まる性質を満たす形で結合方程式を導出しているが，その際，結合に関与する各モード振幅に対して適当な線形変換を行なっており，その物理的意味については明確に述べていない．

本章では，Snyderの行なったと類似の手法を用いて，等方性および非等方性誘電体導波路からなる結合系の結合方程式を導出する．その際，従来省略されていた項を考慮に入れることにより，得られた結合方程式を，系の基本的な特性から定まる性質を満たす形に変形し得ることを示し，また，その変形の物理的意味を明らかにする．さらに，モード結合理論の適用範囲を広める意味から，系がわすかな損失を含む場合の近似解法を示す．

4.2 結合系の基本的特性と結合行列の関係

本節では，一般的なモード結合理論における，結合系の基本的特性と結合行列の関係を明らかにし，あわせて結合系が伝送方向に一様である場合の結合方程式の解について検討する．

いま，n 個のモードが，同一の伝送方向に一様に結合しながら伝搬する結合系を考える．第2章および第3章における一般的なモード結合理論の記述法に従い，この系の結合方程式を式(4.1)のように行列表示する．

$$\frac{d}{dz}\mathbf{a} = j\mathbf{C}\mathbf{a} \tag{4.1}$$

ここでベクトル $\mathbf{a}$ は，各モードの複素振幅を要素とする列ベクトルであり，係数行列 $\mathbf{C}$ は結合行列と呼ばれる．また，j は虚数単位である．式(4.1)の解は，

$$\mathbf{a}^{(o)} = \mathbf{A}\,\mathbf{a}^{(i)} \tag{4.2}$$

ただし

$$\mathbf{A} = \exp[\,j\mathbf{C}\,l\,] \tag{4.3}$$

で与えられる．ベクトル $\mathbf{a}^{(i)}$, $\mathbf{a}^{(o)}$ は，それぞれ結合系の入出力端における各モードの複素振幅を表わすベクトルであり，l は結合部分の長さである．式(4.3)の行列 $\mathbf{A}$ は伝達行列と呼ばれる．

結合系の基本的特性と結合行列 $\mathbf{C}$ との関係について調べてみる．各モードの伝送電力 $P_i\,(i=1,2,\cdots,n)$ は，そのモードの規格化振幅 a_i とその複素共役 a_i^* との積として

$$P_i = a_i\,a_i^* \qquad (i=1,2,\cdots,n) \tag{4.4}$$

と表わされる．いま，結合系が無損失であるとするならば，

$$\frac{d}{dz}\sum_i P_i = \sum_i \left(\frac{da_i}{dz} a_i^* + a_i \frac{da_i^*}{dz}\right) = 0 \tag{4.5}$$

なる電力保存則が成立する．上式に式(4.1)を代入すると

$$\mathbf{C}^T = \mathbf{C}^* \tag{4.6}$$

なる関係が得られる．ここで^{T}は行列の転置を，また*は複素共役を表わす．すなわち，無損失な結合系の結合行列はエルミート行列となる．

一方，通常の結合系においては，zの負方向に伝搬するn個のモード間にもやはり結合が生じている．そこで，zの正方向に伝搬するモードを前進波モード，負方向に伝搬するモードを後進波モードとよぶことにし，これらに関係する諸量をそれぞれ＋および－の添字をつけて区別することにすれば，後進波モードについても式(4.1)と同様の結合方程式

$$\frac{d}{dz}\mathbf{a}_- = j\mathbf{C}_-\mathbf{a}_- \tag{4.7}$$

が成立し，その解もやはり式(4.2)，(4.3)と同様に

$$\mathbf{a}_-^{(o)} = \exp[j\mathbf{C}_-(-l)]\mathbf{a}_-^{(i)} \tag{4.8}$$

となる．[+] このような結合系を，結合部分の両端にそれぞれn個の端子対をもつ$2n$端子対回路と考え，その散乱行列$\mathbf{S}$を

$$\begin{pmatrix} \mathbf{a}_+^{(o)} \\ \hline \mathbf{a}_-^{(o)} \end{pmatrix} = \mathbf{S} \begin{pmatrix} \mathbf{a}_-^{(i)} \\ \hline \mathbf{a}_+^{(i)} \end{pmatrix} \tag{4.9}$$

＋　厳密には，前進波モードと後進波モードの間にも結合が生じるが，その結合は充分小さいものと考え，ここでは無視する．

で定義すれば，$\mathbf{S}$は式(4.2),(4.3)および(4.8)より

$$\mathbf{S}=\left(\begin{array}{c|c} 0 & \exp[j\mathbf{C}_{+}l] \\ \hline \exp[-j\mathbf{C}_{-}l] & 0 \end{array}\right) \tag{4.10}$$

となる．結合系が相反則を満たす系であれば，行列$\mathbf{S}$が対称となることから，

$$(\exp[j\mathbf{C}_{+}l])^{T}=\exp[-j\mathbf{C}_{-}l] \tag{4.11}$$

すなわち

$$\mathbf{C}_{+}^{T}=-\mathbf{C}_{-} \tag{4.12}$$

なる関係が得られる．

一方，結合系がその入出力端からみてまったく対称な構造をもつような場合（伝送方向に一様な結合系では，系を構成する媒質が等方性の媒質よりなる場合がこれに相等する．）には，前進波モードに関する伝達行列と後進波モードに関するそれとがまったく同じ形になることから

$$\mathbf{C}_{-}=-\mathbf{C}_{+} \tag{4.13}$$

なる関係が得られる．よって，たとえば結合系が無損失でかつ等方性の媒質よりなる場合には，式(4.6),(4.12)および(4.13)より，結合行列$\mathbf{C}$は実対称行列となり，また損失をもつ等方性媒質よりなる場合には式(4.12),(4.13)より複素対称な行列となることがわかる．以上のことから，結合行列$\mathbf{C}$は系を構成する媒質に応じて表4.1のように分類することができる．[+]

+ 結合行列に関するこのような性質は，結合方程式がzの位意の値に対して成立する関係式であることからも分るように，結合系が伝送方向に一様でない場合，すなわち$\mathbf{C}$がzの関数であるような場合についても成立する．

表4．1　結合系を構成する媒質と行列**C**，**T**との関係

結合系を構成する媒質	行列**C**	行　列　**T**
無損失・等方性媒質	実対称行列	実直交行列（$\mathbf{T}^{-1}=\mathbf{T}^{T}$）
損失をもつ等方性媒質	複素対称行列	複素直交行列（$\mathbf{T}^{-1}=\mathbf{T}^{T}$）
無損失・非等方性媒質（相反）	エルミート行列（但し$\mathbf{C}_{+}^{T}=-\mathbf{C}_{-}$）	ユニタリ行列（$\mathbf{T}^{-1}=\mathbf{T}^{*T}$）
無損失・非等方性媒質（非相反）	エルミート行列	

式（4.2)を実際に計算する場合には，しばしば結合行列**C**を適当な行列**T**とその逆行列$\mathbf{T}^{-1}$を用いて，

$$\mathbf{C}=\mathbf{T}\,\Lambda\,\mathbf{T}^{-1} \tag{4.14}$$

Λ ；対角行列

のように対角化し，式（4.3)の伝達行列**A**を

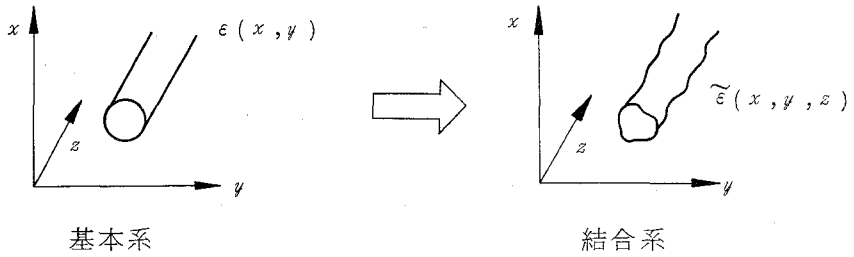
$$\mathbf{A}=\mathbf{T}\ \exp[j\Lambda l]\mathbf{T}^{-1}$$

として計算する方法がとられる．特に，結合行列**C**が特殊な行列である場合には，式（4.14）における行列**T**がある性質を満足し，計算の手続きを簡単にする場合が多い．結合行列**C**の性質に応じた行列**T**の性質を表4．1に示す．

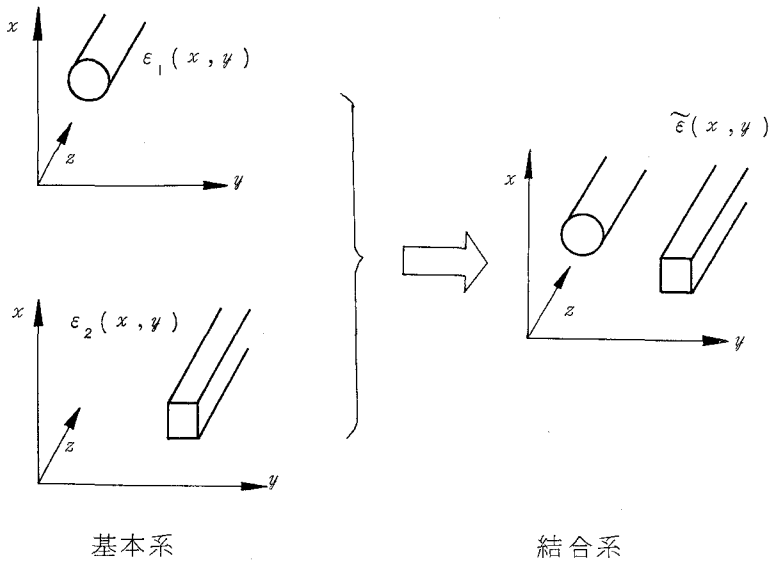
4.3　等方性誘電体導波路からなる分布結合系の結合方程式

誘電体導波系で，たとえば，その伝送方向に不整のあるような導波系や，あるいは多数本の誘電体線路が並列して配置されているような導波系は，伝送方向に一様な線路が単独に存在する場合の，各線路の正規モードが結合する結合系とみなすことができる．本節では，等方性誘電体線路からなるこのような結合系について，その結合方程式を導出し，従

来得られている結合方程式と比較検討する．



(a)　単独線路における結合



(b)　多線路における結合

図４．１　誘電体導波路からなる結合系の例

いま，結合系の電磁界をそれぞれ$\tilde{\mathbf{E}}$，$\tilde{\mathbf{H}}$とすると，Maxwell の方程式

$$\nabla \times \tilde{\mathbf{E}} = -j\omega\mu\tilde{\mathbf{H}}$$
$$\nabla \times \tilde{\mathbf{H}} = j\omega\tilde{\varepsilon}\tilde{\mathbf{E}} \tag{4.16}$$

が成立する．ここで，$\tilde{\varepsilon}$は結合系の誘電率を表わし，伝送方向をz方向とすると，一般にxおよびyの関数として与えられ，また，結合系が伝送方向に不整のある誘電体導波路よりなる場合には，zの関数ともなる．また，系が損失を含む場合には$\tilde{\varepsilon}$は複素数となるが，そのような場合については4.5で近似解を求める方法を考察する．μは透磁率を表わし，ここでは定数と仮定しておく．また，ωは角周波数を表わす．

一方，伝送方向に一様な線路が唯一つ単独に存在するような導波系（以下，結合系に対応させて，このような系を基本系と呼ぶことにする．）の正規モードを表わす電磁界$\mathbf{E}_i$,$\mathbf{H}_i$ についても，もちろんMaxwell の方程式

$$\nabla \times \mathbf{E}_i = -j\omega\mu\mathbf{H}_i$$
$$\nabla \times \mathbf{H}_i = j\omega\varepsilon_i\mathbf{E}_i \tag{4.17}$$

が成立する．ただし，添字iは結合系を構成する各線路（基本系）の伝搬可能なモードを通し番号で表わしたモード番号である．誘電率ε_i は正規モード(i)（$\mathbf{E}_i$,$\mathbf{H}_i$ で表わされるモード）が存在する基本系の誘電率であり，一般にxおよびyの関数である．以下の議論では，基本系を無損失と仮定し，ε_i は実数として取り扱うことにする．基本系の正規モード(i)の電磁界$\mathbf{E}_i$,$\mathbf{H}_i$は，伝送方向（z方向）の位相定数をβ_i として

$$\mathbf{E}_i = \mathbf{e}_i e^{-j\beta_i z} = (\mathbf{e}_{it} + \mathbf{e}_{iz}) e^{-j\beta_i z}$$
$$\mathbf{H}_i = \mathbf{h}_i e^{-j\beta_i z} = (\mathbf{h}_{it} + \mathbf{h}_{iz}) e^{-j\beta_i z} \tag{4.18}$$

と表わすことができる．ここで小文字で表わした電磁界$\mathbf{e}_i$,$\mathbf{h}_i$ 等はすべて横断

面の座標 x および y のみの関数となる．また，添字 t および z は，それぞれ電磁界の横断面成分および伝送方向（ z 方向）成分を表わす．

ここで，結合系の電磁界の横断面成分の複素共役 $\tilde{\mathbf{E}}_t^*$ ， $\tilde{\mathbf{H}}_t^*$ を，基本系の電磁界の横断面成分の複素共役 $\mathbf{e}_{it}^*$, $\mathbf{h}_{it}^*$ の線形結合としてつぎのように表わす．

$$\begin{aligned}\tilde{\mathbf{E}}_t^* &= \sum_i a_i \mathbf{e}_{it}^* \\ \tilde{\mathbf{H}}_t^* &= \sum_i a_i \mathbf{h}_{it}^*\end{aligned} \tag{4.19}$$

係数 a_i は基本系の各正規モードの複素振幅を表わすことになる．このとき，結合系の電磁界の z 方向成分は，式（4.16）より

$$\begin{aligned}\tilde{\mathbf{E}}_z^* &= \sum_i a_i \frac{\epsilon_i}{\tilde{\epsilon}^*} \mathbf{e}_{iz}^* \\ \tilde{\mathbf{H}}_z^* &= \sum_i a_i \mathbf{h}_{iz}^*\end{aligned} \tag{4.20}$$

として表わされる．

さて，図４．２に示すような，z 方向に微小な幅をもつ領域に Gauss の定理を適用することにより，任意のベクトル $\mathbf{F}$ に対して次の恒等式が成立する．

$$\int_s \nabla \cdot \mathbf{F}\, ds = \frac{d}{dz}\int_s \mathbf{F} \cdot \mathbf{i}_z\, ds + \oint_{L_s} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, dl \tag{4.21}$$

ここで $\int_s$ は，$x \cdot y$ 面内の面積 S にわたる積分を表わし，$\oint_{L_s}$ は，その平面 S の外周についての線積分を表わす．また，$\mathbf{i}_z$ および $\mathbf{n}$ は，図に示すように，それぞれ z 方向および L_s に垂直な単位ベクトルである．いま，ベクトル $\mathbf{F}$ を

$$\mathbf{F} = \mathbf{E}_i \times \tilde{\mathbf{H}}^* + \tilde{\mathbf{E}}^* \times \mathbf{H}_i \tag{4.22}$$

と定義すると，その発散は式（4.16）（4.17）を用いて

$$\nabla \cdot \mathbf{F} = j\omega(\tilde{\varepsilon}^* - \varepsilon_i)\mathbf{E}_i \cdot \tilde{\mathbf{E}}^* \qquad (4.23)$$

となる．式(4.22)(4.23)の$\mathbf{E}_i$,$\mathbf{H}_i$を式(4.18)を用いて$\mathbf{e}_i$,$\mathbf{h}_i$で表わし，式(4.21)へ代入すると

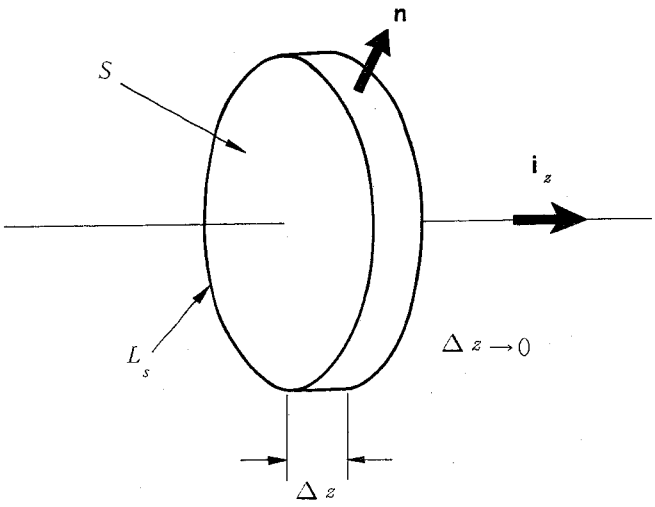


図4．2　式(4.21)の積分領域

$$\int_s j\omega(\tilde{\varepsilon}^* - \varepsilon_i)\mathbf{e}_i \cdot \tilde{\mathbf{E}}^* ds$$
$$= \left(\frac{d}{dz} - j\beta_i\right)\int_s (\mathbf{e}_i \times \tilde{\mathbf{H}}^* + \tilde{\mathbf{E}}^* \times \mathbf{h}_i) \cdot \mathbf{i}_z ds$$
$$+ \oint_{L_s} (\mathbf{e}_i \times \tilde{\mathbf{H}}^* + \tilde{\mathbf{E}}^* \times \mathbf{h}_i) \cdot \mathbf{n}\, dl \qquad (4.24)$$

となる．式(4.19)(4.20)を上式の$\tilde{\mathbf{E}}^*$,$\tilde{\mathbf{H}}^*$に代入し，面積分領域Sを無限平面に拡大すると，式(4.24)の右辺第2項の線積分は零となり，各モードの複素振幅a_i ($i=1,2,\cdots,n$) に関する次の微分方程式が得られる．[+]

$$\mathbf{P}\frac{d}{dz}\mathbf{a} = j(\mathbf{BP} + \mathbf{W})\mathbf{a} \qquad (4.25)$$

ここで行列$\mathbf{P}$，$\mathbf{W}$はそれぞれ以下に示すようなp_{ij}，w_{ij} ($i,j=1,2,\cdots,n$) を要素とするn次の正方行列であり，また行列$\mathbf{B}$はβ_i ($i=1,2,\cdots,n$)を対角要素とするようなn次の対角行列である．

+　ここでは便宜上，n個の基本系モードが結合に関与しているものと考え，行列表示を用いる．

$$p_{ij}=\int_{S_\infty}(\mathbf{e}_{it}\times\mathbf{h}_{jt}^{*}+\mathbf{e}_{jt}^{*}\times\mathbf{h}_{it})\cdot\mathbf{i}_z\,ds \tag{4.26}$$

$$w_{ij}=\int_{S_\infty}\omega(\tilde{\varepsilon}^{*}-\varepsilon_i)\mathbf{e}_i\cdot(\mathbf{e}_{jt}+\frac{\varepsilon_j}{\tilde{\varepsilon}^{*}}\mathbf{e}_{jz}^{*})\,ds \tag{4.27}$$

Snyder[36] は行列**P**を単位行列とし，式（4.25）より

$$\frac{d}{dz}\mathbf{a}=j(\mathbf{B}+\mathbf{W})\mathbf{a} \tag{4.28}$$

なる結合方程式を導いた．行列**P**の要素p_{ij}は，式（4.26）より明らかなように基本系の(i)モードと(j)モードの電磁界によって伝送される電力を表わす項である．よって，結合系が単独線路よりなる場合（たとえば，図4．1(a)のような場合）には，モードの直交性により行列**P**は単位行列となるが，結合系が多線路より構成される場合（図4．1(b)のような場合）にはモードの直交性が成立しないので行列**P**の非対角要素p_{ij}が値をもち，行列**P**は厳密には単位行列とならない．このことより，Snyderが導いた結合方程式が正確に適用できるのは，結合系が単独線路よりなる場合に限られるのがわかる．

式（4.25）の行列**P**を単位行列とする制限を付すことなしに，基本系の各モードに関する結合方程式を導いてみる．行列**P**，**B**および**W**の間になりたつ関係式+

+　ベクトル**F**を

$$\mathbf{F}=\mathbf{E}_i\times\mathbf{H}_j^{*}+\mathbf{E}_j^{*}\times\mathbf{H}_i$$

とおき，式（4.21）に代入して積分領域を無限に拡げると

$$(\beta_j-\beta_i)\int_{S_\infty}(\mathbf{e}_i\times\mathbf{h}_j^{*}+\mathbf{e}_j^{*}\times\mathbf{h}_i)\cdot\mathbf{i}_z\,ds$$
$$=\int_{S_\infty}\omega(\varepsilon_j-\varepsilon_i)\mathbf{e}_i\cdot\mathbf{e}_j^{*}\,ds$$

つづきは次ページへ

$$\mathbf{PB}-\mathbf{BP}=\mathbf{W}-\mathbf{W}^T \tag{4.29}$$

を用いれば，式（4.25）は**a**に関する結合方程式として，

$$\frac{d}{dz}\mathbf{a}=j(\mathbf{B}+\mathbf{P}^{-1}\mathbf{W}^T)\mathbf{a} \tag{4.30}$$

なる形に変形できる．式（4.30）の右辺第1項は，結合がない場合の各モードの位相変化を表わし，第2項は各モード間の結合に起因する項である．この結合方程式（式（4.30））は，多線路の場合にも正確に適用できるものである．

式（4.26），（4.27）からわかるように，式（4.30）の結合方程式の結合行列（$\mathbf{B}+\mathbf{P}^{-1}\mathbf{W}^T$）は，結合系が多線路より構成される場合には非対称行列となる．このことは，等方性誘電体線路からなる結合系の結合行列が対称でなければならないという4.2の結果と矛盾するように思われるが，その原因は，基本系モードとして非直交モードも含まれていることに起因している．このことは，結合系の全伝送電力P_{total}が，4.2の場合のように

$$\sum_i a_i^* a_i=\mathbf{a}^{*T}\mathbf{a} \tag{4.31}$$

なる形では表現されず

$$P_{total}=Re\left[\int_{S_\infty}\tilde{\mathbf{E}}_t\times\tilde{\mathbf{H}}_t^*\cdot\mathbf{i}_z\,ds\right]=\frac{1}{2}\mathbf{a}^{*T}\mathbf{Pa} \tag{4.32}$$

が得られる．一方，式（4.27）からは

$$w_{ij}-w_{ji}=\int_{S\infty}\omega(\varepsilon_j-\varepsilon_i)\mathbf{e}_i\cdot\mathbf{e}_j^*\,ds$$

なる関係式が得られる．但し基本系が無損失であることから電磁界の横断面成分を実数，伝送方向成分を純虚数として扱った．これらの式と式（4.26）を用いて

$$(\beta_j-\beta_i)P_{ij}=w_{ij}-w_{ji}$$

を導くことができ，この式を行列表示すると式（4.29）の関係式となる．

となることからも明らかである．

いま，複素振幅を表わすベクトルとして，新らたに

$$\bar{\mathbf{a}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{P}^{\frac{1}{2}}\mathbf{a} \tag{4.33}$$

を定義する．ここで$\mathbf{P}^{\frac{1}{2}}$は

$$\mathbf{P}^{\frac{1}{2}}\mathbf{P}^{\frac{1}{2}} = \mathbf{P} \tag{4.34}$$

を満たすn次の正方行列であり，式(4.26)より$\mathbf{P}$がエルミート行列であることから，$\mathbf{P}^{\frac{1}{2}}$もまたエルミート行列となる($\mathbf{P}^{\frac{1}{2}*T}=\mathbf{P}^{\frac{1}{2}}$)．このとき，

$$\bar{\mathbf{a}}^{*T}\bar{\mathbf{a}} = \frac{1}{2}\mathbf{a}^{*T}\mathbf{P}\mathbf{a} = P_{total} \tag{4.35}$$

となり，式(4.33)は，ベクトル$\bar{\mathbf{a}}$の各要素に対応する電磁界を直交させるような変換であることがわかる．また式(4.30)の結合方程式は，式(4.33)を用いて

$$\frac{d}{dz}\bar{\mathbf{a}} = j\mathbf{C}\bar{\mathbf{a}} \tag{4.36}$$

$$\mathbf{C} = \mathbf{P}^{\frac{1}{2}}(\mathbf{B}+\mathbf{P}^{-1}\mathbf{W}^{T})\mathbf{P}^{-\frac{1}{2}} \tag{4.37}$$

と変形されるが，式(4.37)の行列$\mathbf{C}$は式(4.29)を用いて対称であることが確かめられる．結局，式(4.33)のベクトル$\bar{\mathbf{a}}$および式(4.37)の結合行列$\mathbf{C}$が，4.2で述べた一般的な結合方程式の正規モードの振幅を表わすベクトルおよび結合行列に対応することになる．

先に述べたように，Snyderは行列$\mathbf{P}$を単位行列とおいて結合方程式を導出しているが，この仮定は基本系の各モードをすべて直交モードと考えることに対応している．したがって，この方法では，結合系が多線路よりなる場合には

式（4.28）の結合行列は対称行列として表現されるべきである．結局，行列**P**を考慮に入れて始めて一般的なモード結合理論との対応関係が明らかになる．

沢[37]は，多線路より構成される等方性誘電体導波系を変分法を用いて解析し，相反則を満足させる形として対称な結合行列を導出した．しかし，その際得られた結合行列は，基本系の各モードの複素振幅を表わすベクトルに$\mathbf{U}^{\frac{1}{2}}$なる行列をかけて得られる新らたな振幅ベクトルについて得られたものである．行列**U**の要素が本文の行列**P**の要素と等価であることから明らかなように，+ $\mathbf{U}^{\frac{1}{2}}$による変換は式（4.33）の変換とまったく同じであり，文献(37)で対称な結合行列が得られたのは，非直交な基本系のモードを互いに直交するようなモードに変換し，そのモード間の結合を考えているためであると考えられる．

結合係数というよび方は，通常，基本系の各モードに対して用いられるため，文献(37)あるいは式（4.37）で与えられる結合行列の要素を結合係数とよぶことは誤解をまねきやすい．しかし，式（4.36）のような，一般的な結合方程式とまったく対応する式を得ることは，**4.2**に示した解法をそのまま用いることができるため，解の一般形を示したり，あるいは多数個のモードからなる結合系を解析する場合には便利な点が多い．

4.4　非等方性誘電体導波路からなる分布結合系の結合方程式

系を構成する媒質が非等方性の誘電体を含む場合についても，前節とまったく同じ手続きによって結合方程式を導くことができる．基本系としては，等方

+　行列**U**のi行j列の要素u_{ij}は

$$u_{ij}=\int_s [\mu^{-1}(\nabla\times\mathbf{e}_{it})\cdot(\nabla\times\mathbf{e}_{jt})-\omega^2\varepsilon\mathbf{e}_{it}\cdot\mathbf{e}_{jt}]\,ds$$

で与えられている．この式は式（4.26）のp_{ij}と同様に，基本系のモード(i)とモード(j)の電磁界によって伝送される電力を表わしている．

性の誘電体線路，非等方性の誘電体線路のいずれを用いてもよいが，ここでは一般の場合に適用できるように，基本系を非等方性の誘電体線路として扱うことにする．

結合系および基本系の誘電率テンソル $\tilde{\varepsilon}$，ε_i をそれぞれ次のように表わす．

$$\tilde{\varepsilon} = \begin{pmatrix} \tilde{\varepsilon}_{xx} & \tilde{\varepsilon}_{xy} & \tilde{\varepsilon}_{xz} \\ \tilde{\varepsilon}_{yx} & \tilde{\varepsilon}_{yy} & \tilde{\varepsilon}_{yz} \\ \tilde{\varepsilon}_{zx} & \tilde{\varepsilon}_{zy} & \tilde{\varepsilon}_{zz} \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{c|c} \tilde{\varepsilon}_{tt} & \tilde{\varepsilon}_{tz} \\ \hline \tilde{\varepsilon}_{zt} & \tilde{\varepsilon}_{zz} \end{array}\right) \tag{4.38}$$

$$\varepsilon_i = \begin{pmatrix} \varepsilon^i_{xx} & \varepsilon^i_{xy} & \varepsilon^i_{xz} \\ \varepsilon^i_{yx} & \varepsilon^i_{yy} & \varepsilon^i_{yz} \\ \varepsilon^i_{zx} & \varepsilon^i_{zy} & \varepsilon^i_{zz} \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{c|c} \varepsilon^i_{tt} & \varepsilon^i_{tz} \\ \hline \varepsilon^i_{zt} & \varepsilon^i_{zz} \end{array}\right) \tag{4.39}$$

誘電率テンソルは系が無損失の場合にはエルミート行列で表わされ，特に相反的な系に対しては実対称行列となる．以下では簡単のため，基本系，結合系ともに無損失として議論をすすめる．また，式(4.38)(4.39)の最右辺は，誘電率テンソルを便宜上線路の横断面成分（t 成分），伝送方向成分（z 成分）およびその両方の成分を含む要素に分類して表示したものである．電界の横断面成分および z 方向成分をそれぞれ $\mathbf{e}_t$ および $\mathbf{e}_z$ とし，各成分が

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_t &= \mathbf{i}_x e_x + \mathbf{i}_y e_y \\ \mathbf{e}_z &= \mathbf{i}_z e_z \end{aligned} \tag{4.40}$$

で表わされるとき

$$\left.\begin{aligned} \varepsilon_{tt} \cdot \mathbf{e}_t &= \mathbf{i}_x (\varepsilon_{xx} e_x + \varepsilon_{xy} e_y) \\ &\quad + \mathbf{i}_y (\varepsilon_{yx} e_x + \varepsilon_{yy} e_y) \\ \varepsilon_{tz} \cdot \mathbf{e}_z &= \mathbf{i}_x \varepsilon_{xz} e_z + \mathbf{i}_y \varepsilon_{yz} e_z \end{aligned}\right\} \tag{4.41}$$

$$\left.\begin{aligned}\varepsilon_{zt}\cdot\mathbf{e}_t &= \mathbf{i}_z(\varepsilon_{zx}\,e_x+\varepsilon_{zy}\,e_y)\\ \varepsilon_{zz}\cdot\mathbf{e}_z &= \mathbf{i}_z\,\varepsilon_{zz}\,e_z\end{aligned}\right\}$$

と定義する．ここで，$\mathbf{i}_x$，$\mathbf{i}_y$，$\mathbf{i}_z$はそれぞれx，yおよびz方向の単位ベクトルである．

4.3と同様に，結合系の電磁界の横断面成分を基本系の電磁界の横断面成分の線形結合として表わした場合，結合系の電磁界のz方向成分の複素共役は，式(4.41)の定義を用いて

$$\widetilde{\mathbf{E}}_z^* = \sum_i a_i\left(\frac{\varepsilon_{zt}^i-\widetilde{\varepsilon}_{zt}}{\widetilde{\varepsilon}_{zz}}\cdot\mathbf{e}_{it}+\frac{\varepsilon_{zz}^i}{\widetilde{\varepsilon}_{zz}}\cdot\mathbf{e}_{iz}\right)^* \tag{4.42}$$

$$\widetilde{\mathbf{H}}_z^* = \sum_i a_i\,\mathbf{h}_{iz}^* \tag{4.43}$$

と表わすことができる．

以下，4.3とまったく同じ手順により，式(4.25)と同様の微分方程式

$$\mathbf{P}\frac{d}{dz}\mathbf{a}=j(\mathbf{BP}+\mathbf{W})\mathbf{a} \tag{4.44}$$

が導出される．ただし

$$p_{ij}=\int_{S_\infty}(\mathbf{e}_{it}\times\mathbf{h}_{jt}^*+\mathbf{e}_{jt}^*\times\mathbf{h}_{it})\cdot\mathbf{i}_z\,ds \tag{4.45}$$

$$w_{ij}=\int_{S_\infty}\omega\mathbf{e}_i\cdot(\widetilde{\varepsilon}^*-\varepsilon_i^*)\cdot$$

$$\left\{\left(1+\frac{\varepsilon_{zt}^j-\widetilde{\varepsilon}_{zz}}{\widetilde{\varepsilon}_{zz}}\right)\cdot\mathbf{e}_{jt}+\frac{\varepsilon_{zz}^j}{\widetilde{\varepsilon}_{zz}}\cdot\mathbf{e}_{jz}\right\}^*ds \tag{4.46}$$

系が単独の線路よりなる場合には，行列$\mathbf{P}$は対角行列となり，この場合式(4.44)～(4.46)の表現はMarcuse[34]が単独の線路からなる結合系について得た

結合方程式とまったく等価であることが確かめられる．

また，系が複数個の誘電体線路よりなるような場合には，4.3と同様に行列Pが非対角要素に値をもつので，次の関係式+

$$\mathbf{PB}-\mathbf{BP}=\mathbf{W}-\mathbf{W}^{*T} \tag{4.47}$$

を用いて

$$\frac{d}{dz}\mathbf{a}=j(\mathbf{B}+\mathbf{P}^{-1}\mathbf{W}^{*T})\mathbf{a} \tag{4.48}$$

が得られる．4.3の場合と同様に，上式の右辺第2項が結合による影響を与える項である．

式(4.48)より得られる結合行列($\mathbf{B}+\mathbf{P}^{-1}\mathbf{W}^{*T}$)はエルミート行列とはならず，式(4.30)と同様一般的な結合方程式の結合行列に対応しない．この原因は，やはり前節で指摘したように，基本系モードとして非直交なモードも含

+ 式(4.47)は式(4.30)を導出したのと全く同じ手順から得られる．すなわち，ベクトルFを

$$\mathbf{F}=\mathbf{E}_i\times\mathbf{H}_j^*+\mathbf{E}_j^*\times\mathbf{H}_i$$

とおき，式(4.21)に代入し積分領域を無限に拡げることにより

$$(\beta_j-\beta_i)\int_{S_\infty}(\mathbf{e}_i\times\mathbf{h}_j^*+\mathbf{e}_j^*\times\mathbf{h}_i)\cdot\mathbf{i}_z\,ds$$
$$=\int_{S_\infty}\omega\mathbf{e}_i\cdot(\varepsilon_j^*-\varepsilon_i^*)\cdot\mathbf{e}_j^*\,ds$$

が得られ，また式(4.46)からは

$$w_{ij}-w_{ji}^*=\int_{S_\infty}\omega\mathbf{e}_i\cdot(\varepsilon_j^*-\varepsilon_i^*)\cdot\mathbf{e}_j^*\,ds$$

が得られる．これらの式と式(4.45)を用いて

$$(\beta_j-\beta_i)p_{ij}=w_{ij}-w_{ji}^*$$

なる関係を得る．この式を行列表示すれば式(4.47)が得られる．

まれていることに起因している．すなわち，4.3と同様に

$$\bar{\mathbf{a}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \mathbf{P}^{\frac{1}{2}} \mathbf{a} \tag{4.49}$$

と定義すれば，式（4.48）は$\bar{\mathbf{a}}$に関する結合方程式として

$$\frac{d}{dz} \bar{\mathbf{a}} = j \mathbf{C} \bar{\mathbf{a}} \tag{4.50}$$

$$\mathbf{C} = \mathbf{P}^{\frac{1}{2}} (\mathbf{B} + \mathbf{P}^{-1} \mathbf{W}^{*T}) \mathbf{P}^{-\frac{1}{2}} \tag{4.51}$$

のように変形され，この行列$\mathbf{C}$は式（4.47）を用いてエルミート行列となることが示される．

4.5　わずかな損失を含む誘電体線路からなる結合系の近似解法

伝送方向に一様な誘電体線路からなる結合系において，誘電体線路がわずかな損失をもつ場合を考える．このような結合系を解析するには，原理的には4.2で触れた損失項を含めた結合方程式を直接解けばよいわけであるが，ここでは，無損失な系の解を用いて，わずかな損失のある系の解を近似的に求める摂動的な解法について考える．

4.5.1　一般的な取り扱い

結合方程式の解を求めるということは，4.2の式（4.14）の対角行列Λと，結合行列を対角化するための行列$\mathbf{T}$を求めることに帰着される．ここで，損失を含む結合系の結合行列$\mathbf{C}$が，無損失な場合の結合行列$\mathbf{C}_0$に損失項$\Delta\mathbf{C}$が付加された形

$$\mathbf{C} = \mathbf{C}_0 + \Delta \mathbf{C} \tag{4.52}$$

で表わされるとする．また，行列$\mathbf{C}$，$\mathbf{C}_0$はそれぞれ

$$\mathbf{C} = \mathbf{T}\,\Lambda\,\mathbf{T}^{-1} \quad , \quad \mathbf{C}_0 = \mathbf{T}_0 \Lambda_0 \mathbf{T}_0^{-1} \tag{4.53}$$

のように対角化され,

$$\mathbf{T}_0 = (\mathbf{t}_{01}, \mathbf{t}_{02}, \cdots, \mathbf{t}_{0n}), \mathbf{T} = (\mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2, \cdots, \mathbf{t}_n) \tag{4.54}$$

$$\Lambda_0 = \begin{pmatrix} \lambda_{01} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_{0n} \end{pmatrix} \quad , \quad \Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} \tag{4.55}$$

で表わされるとする．ここで，$\mathbf{t}_{0i}, \mathbf{t}_i$ ($i=1, 2, \cdots, n$) はそれぞれ n 次の列ベクトルである．4.2の表4.1より $\mathbf{T}_0$ はユニタリ行列であるから，ベクトル $\mathbf{t}_{0i}$ ($i=1, 2, \cdots, n$) の間には

$$\mathbf{t}_{0i}^{*T} \mathbf{t}_{0j} = \delta_{ij} \tag{4.56}$$

なる関係が成立する．ここで，δ_{ij} はKronecker のデルタである．

いま,

$$\lambda_i = \lambda_{0i} + \Delta\lambda_i \tag{4.57}$$

$$\mathbf{t}_i = \mathbf{t}_{0i} + \sum_{j \neq i} m_j \mathbf{t}_{0j} \tag{4.58}$$

とおき，行列の固有値問題に関する近似解法 (付録 **C**) を適用して $\Delta\lambda_i, m_j$ を計算すれば，1次近似式，2次近似式として以下の式が得られる．

(i) 1次近似式

$$\Delta\lambda_i = \mathbf{t}_{0i}^{*T} \Delta\mathbf{C}\ \mathbf{t}_{0i} \tag{4.59}$$

$$m_j = 0 \tag{4.60}$$

(ii) 2次近似式

$$\Delta\lambda_i = \mathbf{t}_{0i}^{*T}\Delta\mathbf{C}\,\mathbf{t}_{0i} + \sum_{j\neq i}\frac{(\mathbf{t}_{0j}^{*T}\Delta\mathbf{C}\,\mathbf{t}_{0i})^2}{\lambda_{0i}-\lambda_{0j}} \tag{4.61}$$

$$m_j = \frac{\mathbf{t}_{0j}^{*T}\Delta\mathbf{C}\,\mathbf{t}_{0i}}{\lambda_{0i}-\lambda_{0j}} \tag{4.62}$$

ただし，計算過程で$\Delta\mathbf{C}$が対称行列であることを利用した．

ベクトル $\mathbf{t}_{0i}$ や $\mathbf{t}_i$の各要素は，結合系の正規モードを結合がない場合のモードの線形結合で表わす場合の各モードの振幅の割合を表わす（2.2参照）．よって，1次近似式は，損失の影響が小さく，これらの振幅の割合が無損失の場合とほとんど変らないとみなせる場合に適用できる式であり，また2次近似式は，ある程度損失の影響が大きくなる場合に適用される式である．

4.5.2 誘電体導波路への応用例

誘電体導波路からなる結合系を考えるとき，損失による結合行列の付加項$\Delta\mathbf{C}$は，結合系の誘電率$\tilde{\varepsilon}$を，損失項$-j\Delta\tilde{\varepsilon}$ を含めて（$\tilde{\varepsilon}-j\Delta\tilde{\varepsilon}$)とし，式(4.27)あるいは式(4.46)を計算することにより得られる．ここでは，その一つの適用例として，n本の損失を含む等方均質な誘電体線路が，無損失媒質中に並列に配置されており，しかも，各線路の1つのモード（例えば基本モード）どうしが互いに結合するような結合系を考える．また，このとき，各モードがほとんど直交しているとみなせる（すなわち行列$\mathbf{P}$が単位行列とみなせる）と仮定する．

いま，i番目の線路の損失項が$-j\tilde{\varepsilon}_i'$とするなら，$\Delta\mathbf{C}$は式(4.27)より

$$\Delta\mathbf{C} = \frac{j}{2}(\mathbf{WK}+\mathbf{KW}+2\mathbf{D}) \tag{4.63}$$

と計算される．ここで，行列$\mathbf{W}$は式(4.27)を要素とする正方行列，また，行列$\mathbf{K}$，$\mathbf{D}$はそれぞれ$k^{(i)}, d^{(i)}$($i=1,2,\cdots,n$)を対角要素とする対角行列であり，

$k^{(i)}, d^{(i)}$は

$$k^{(i)} = \frac{2\tilde{\varepsilon}_i'}{\varepsilon_i - \varepsilon_0} \tag{4.64}$$

$$d^{(i)} = \int_{S_\infty} \omega \tilde{\varepsilon}_i' (\mathbf{e}_{it} \cdot \mathbf{e}_{it} - \mathbf{e}_{iz} \cdot \mathbf{e}_{iz})\, ds \tag{4.65}$$

で与えられる．ただし，$\varepsilon_i, \varepsilon_0$ はそれぞれ i 番目の線路の誘電率および線路外部の誘電率を表わし，また，$\Delta\mathbf{C}$の計算には，式（4.27）における z 方向の電界が関係する積分の寄与が充分小さいという近似を用いた．

式（4.63）を式（4.61），（4.62）の2次近似式に代入し，$\mathbf{C}_0 = \mathbf{B} + \mathbf{W}$なる関係を用いれば

$$\Delta\lambda_i = j\, \mathbf{t}_{0i}^{*T} (\lambda_{0i}\mathbf{K} - \mathbf{B}\,\mathbf{K} + \mathbf{D})\, \mathbf{t}_{0i}$$

$$+ \sum_{j \neq i} \frac{j}{\lambda_{0i} - \lambda_{0j}} \left\{ \mathbf{t}_{0j}^{*T} \left(\frac{\lambda_{0i} + \lambda_{0j}}{2} \mathbf{K} - \mathbf{B}\mathbf{K} + \mathbf{D} \right) \mathbf{t}_{0i} \right\}^2 \tag{4.66}$$

$$m_j = \frac{j}{\lambda_{0i} - \lambda_{0j}}\, \mathbf{t}_{0j}^{*T} \left(\frac{\lambda_{0i} + \lambda_{0j}}{2} \mathbf{K} - \mathbf{B}\mathbf{K} + \mathbf{D} \right) \mathbf{t}_{0i} \tag{4.67}$$

が得られる．式（4.66）の右辺第1項は，損失による減衰項であり，また第2項は損失による位相変化項である．

特別な場合として，n 本の線路がすべて同じ線路であるとするならば，行列$\mathbf{B}$，$\mathbf{K}$，$\mathbf{D}$はすべて定数と単位行列の積，すなわち

$$\mathbf{B} = \beta\, \mathbf{I}\ ,\ \mathbf{K} = k\, \mathbf{I}\ ,\ \mathbf{D} = d\, \mathbf{I}$$

$\mathbf{I}$ ；単位行列

と表わされ，式（4.66），（4.67）はそれぞれ

$$\Delta \lambda_i = j \{ k (\lambda_{0i} - \beta_0) + d \} \tag{4.68}$$

$$m_j = 0 \tag{4.69}$$

と簡単な形になる．結局，このような場合には，1次近似式を用いてるだけで充分であることが分る．

4.6 結　言

本章では，等方性および非等方性誘電体導波路からなる分布結合系の結合方程式を，Maxwell の方程式からそれぞれ導出した．その際，従来の導出過程では省略されていた項を導入することにより，一般的なモード結合理論と対応づけられる形で結合方程式を導き得ることを示した．そして，結合方程式を一般的なモード結合理論に対応させるための変換は，文献（37）で用いられた変換と全く等価であり，また，この変換が，結合に関与するモードを直交させるものであることを明らかにした．さらに，わずかな損失をもつ結合系の結合方程式の解を，無損失な結合系に関する結合方程式の解の摂動として求める近似解法を示し，誘電体線路からなる分布結合系が誘電体損失をもつ場合に適用した．

第5章　結　　論

本章は，この論文に関する結論で，本研究によって得た成果を総括して述べたものである．著者は，本論文において，多数個のモードからなる分布結合系へのモード結合理論の応用を考え，いくつかの興味ある結果を得た．

第２章では，多モードの分布結合系で，特定のモード間に完全結合がおこる為の条件を明らかにし，この条件を用いて，結合系の構造を定める結合行列を導出する手法を示した．また，このような系の特徴として，完全結合する２つのモードの位相定数は等しく，完全結合長には周期性のあることを明らかにした．加えて，モードの個数を具体的に与えた場合の，この系の結合係数と各モードの位相定数の関係を，式および図表で示した．

第３章では，結合系の回路的な特性をあらわす伝達行列を用いて，系の構造を定める結合行列を導出するための一般的手法を示した．さらに，この手法の一つの応用として，「電力等分配器」を提案し，この系の特徴ならびに応用について検討を加えた．

第4章では，等方性および非等方性誘電体導波路からなる分布結合系の結合方程式を導出した．その際，従来の導出過程で省略されていた項を導入することにより，一般的なモード結合理論と対応づけられる形で結合方程式を導き得ることを示した．さらに，結合方程式の摂動的な解法を示し，誘電体線路が微小な損失を含む場合に適用し，その近似解の表式を得た．

以上，本研究で得られた成果が，今後の通信工学の発展にいささかなりとも寄与するならば，著者の最も幸いとするところである．

謝　　辞

本研究を行なうに際し，終始御懇切な御指導，御激励をいただいた大阪大学工学部熊谷信昭教授，ならびに種々有益な御教示，御助言をいただいた大阪大学工学部板倉清保教授に衷心より感謝の意を表わす．

大阪大学大学院在学中には，通信工学一般に関して御指導，御教示をいただいた大阪大学工学部青柳健次名誉教授，笠原芳郎名誉教授，滑川敏彦教授，手塚慶一教授，中西義郎教授に深謝する．

本研究遂行にあたって，種々有益な御討論，御助言をいただいた大阪大学工学部松原正則助教授，倉薗貞夫助教授，前田肇講師ならびに愛媛大学工学部沢新之輔助教授に深謝する．

本論文をまとめるにあたって数々の御助言，御激励をいただいた近畿大学理工学部岡本允夫教授をはじめとする近畿大学理工学部電子工学科の諸先生方に深謝する．

また，本研究に関して御協力いただいた大阪大学大学院勝田正夫氏に感謝するとともに，有益な御助言をいただいた大阪大学工学部講師堤誠博士，大阪大学工学部助手森田長吉氏ならびに塩沢俊之博士の諸氏に感謝する．

さらに，日頃御討論いただいた大阪大学大学院大高真人氏をはじめとする大阪大学工学部熊谷研究室の諸兄に厚くお礼申し上げる．

文　　献

(1) J.R.Pierce;"Coupling of modes of propagation",J.appl. Phys.,25,2,p.179 (Feb.1957)

(2) S.E.Miller;"Coupled wave theory and waveguide applications",Bell Syst.tech.J.,33,3,p.661 (May 1954)

(3) 斎藤成文；"電子ビーム電磁回路論"，オーム社　(昭35)

(4) A.Yariv;"Coupled-mode theory for guided-wave optics", IEEE J.QE,QE-9,9,p.919 (Sept,1973)

(5) 例えば，J.R.Pierce;"Almost all about waves",MIT Press, Cambridge (1974)

(6) 例えば，喜安善市他；"将来の伝送技術特集"，信学本誌，53,11, p.1465 (昭45-11)

(7) H.E.Rowe and E.D.Waters;"Transmission in multimode waveguide with random imperfections",Bell Syst.tech. J.,41,5,p.1031 (May 1962)

(8) D.Marcuse;"Mode conversion caused dy surface imperfections of a dielectric slab waveguide",Bell Syst.tech. J.,48,10,p.3187 (Dec.1969)

(9) H.Unger;"Circular waveguide taper of improved design", Bell Syst.tech.J.,37,7,p.899 (July 1958)

(10) 小口文一；"マイクロ波およびミリ波回路"，Chap.7，丸善 (昭39)

(11) A.W.Snyder;"Coupling of modes on a tapered dielectric cylinder",IEEE Trans.MTT,MTT-18,7,p.383 (July 1970)

(12) E.A.J.Marcatili;"Dielectric rectangular waveguide and

directional coupler for integrated optics",Bell Syst. tech.J.,48,7,p.2071 (Sept.1969)

(13) 島田禎晉；"ミリ波円形TE_{02}モードフィルタ"，通研実報，16,4,p.647 (昭42)

(14) 山本錠彦，小山田弥平，牧本利夫；"異方性薄膜光導波系の固有モード解析とその応用"，信学論(C)，55-C,10,p.550 (昭47—10)

(15) D.Gloge;"Optical waveguide transmission",Proc.IEEE,58,10,p.1513 (Oct.1970)

(16) P.K.Tien;"Light waves in thin films and integrated optics",Appl.Opt.,10,11,p.2395 (Nov.1971)

(17) P.D.McIntyre and A.W.Snyder;"Power transfer between optical fibers",J.Opt.Soc.Amer.,63,12,p1518 (Dec.1973)

(18) S.Somekh,E.Garmire,A.Yariv,H.L.Garvin and R.G. Hunsperger;"Channel optical waveguide directional couplers",Appl.Phys.Lett.,22,2,p.46 (Jan.1973)

(19) 岩崎敬一郎，倉薗貞夫，板倉清保；"誘電体3スラブ線路間のモード結合理論"，信学論(C)，58-C,8,p.443 (昭50—8)

(20) 小山正樹；"光方向性結合器の理論"，信学マイクロ研資，MW74-64 (昭49-9)

(21) 山口孜，熊谷信昭；"多モード結合系における完全結合の条件とその応用"，信学論(B)，58-B,11,p.613 (昭50—11)

(22) 山口孜，熊谷信昭；"多モード結合系における完全結合の条件とその応用"，信学マイクロ研資，MW74-74 (昭49—10)

(23) W.H.Louisell;"Coupled mode and parametric electronics", John Wiley & Sons,New York (1960)

(24) S.E.Miller;"On solutions for two waves with periodic coupling", Bell Syst.tech.J.,47,8,p.1801 (Oct.1968)

(25) 岩崎敬一郎，倉薗貞夫；"位相定数が相異なる二線路間における0dB結合の条件"，信学論(B)，56－B，8，p．358（昭48－8）

(26) 山本錠彦，長沢隆士，岡村康行，牧本利夫；"異方性薄膜光学回路素子の位相補償"，信学マイクロ研資，MW73－103（昭48-11）

(27) 山口孜，熊谷信昭；"多モード分布結合系の理論とその応用"，輻射科学研資（昭50－9）

(28) 勝田正夫，山口孜，熊谷信昭；"誘電体導波路からなる分布結合系のモード結合理論に関する二，三の考察"，輻射科学研資（昭50-12）

(29) A.L.Jones;"Coupling of optical fibers and scattering in fibers",J.Opt.Soc.Amer.,55,3,p.261 (Mar.1965)

(30) R.Vanclooster and P.Phariseau;"The coupling of two parallel dielectric fibers",Physica,47,4,p.485 (June 1970)

(31) D.Marcuse;"The coupling of degenerate modes in two parallel dielectric waveguides",Bell Syst.tech.J., 50,6,p.1791 (Jnly-Aug.1971)

(32) M.F.Bracey,A.L.Cullen,E.F.F.Gillespie and J.A. Staniforth;"Surface-wave research in Sheffield",IRE Trans.AP,AP-7,Special supplement,p.S219 (Dec.1959)

(33) 松原正則，熊谷信昭；"開放型伝送線路間の結合理論とその光回路への応用"，信学論(C)，55－C，4．p．201（昭47-4）

(34) D·Marcuse;"Coupled-mode thery for anisotropic optical waveguides",Bell Syst.tech. J.,54,6,p.985 (June 1975)

(35) D.Marcuse;"Electrooptic coupling between TE and TM modes in anisotropic slabs", IEEE J.QE,QE-11,9,p.759 (Sept.1975)

(36) A.W.Snyder;"Coupled-mode theory for optical fibers", J.Opt.Soc.Amer.,62,11,p.1267 (Nov.1972)

(37) 沢新之輔;"変分法による誘電体光線路間のモード結合理論",信学論(C),57-C,8,p.241 (昭49-8)

(38) R.Bellman;"Introduction to matrix analysis",Chap.3, McGraw-Hill Book Co.Inc.,New York (1960)

(39) 文献(38),Chap.6

(40) 文献(38),Chap.16

(41) F.R.Gantmacher;"The theory of matrices. vol.1",Chap.5, Chelsea Pub,Co.,New York (1960)

(42) K.Kurokawa;"An introduction to the theory of microwave circuits",Chap.6, Academic Press,New York (1969)

付　　録

A. 直交行列の一般的な表現

n 次の直交行列には $n(n-1)/2$ 個の独立なパラメタが存在する．このパラメタは n 次元の空間での各座標軸の回転角として与えることができる．よって一般的な n 次の直交行列は，例えば

$$\mathbf{T}=\mathbf{T}_{12}\cdot\mathbf{T}_{13}\cdot\cdots\cdots\cdot\mathbf{T}_{(n-1)n} \tag{A.1}$$

として計算することができる．ここで $\mathbf{T}_{ij}$ は，単位行列の i 行 i 列，j 行 j 列の要素を $\sin\theta_{ij}$ に，i 行 j 列，j 行 i 列の要素をそれぞれ $\cos\theta_{ij}$，$-\cos\theta_{ij}$ におきかえた直交行列，すなわち

$$\mathbf{T}_{ij}=\begin{pmatrix} 1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & \sin\theta_{ij} & \cdots & \cos\theta_{ij} & & \\ & & \vdots & & \vdots & & \\ & & -\cos\theta_{ij} & \cdots & \sin\theta_{ij} & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix} \quad (i<j:i,j=1,2,\cdots,n) \tag{A.2}$$

であり，添字 ij は1から n 迄の整数から2つを選らぶ組み合わせのすべてに対応する．

B. 要素の絶対値がすべて等しい対称ユニタリ行列

n 次の対称なユニタリ行列の自由度は $n(n+1)/2$ であるが，要素の絶対値がすべて等しいという条件を付加すれば，このような行列の自由度は n となる．以下では，この自由度を n 個の実数 ϕ_i $(i=1,2,\cdots,n)$ であらわし，求めるべきユニタリ行列 $\mathbf{A}$ を，次式のようなユニタリ変換の形で表現する．

$$\mathbf{A} = \exp[j\Phi]\mathbf{U}\exp[j\Phi] \tag{B.1}$$

ただし

$$\Phi = \begin{pmatrix} \phi_1 & & & 0 \\ & \phi_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \phi_n \end{pmatrix}, \quad \exp[j\Phi] = \begin{pmatrix} e^{j\phi_1} & & & 0 \\ & e^{j\phi_2} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & e^{j\phi_n} \end{pmatrix}$$

ここで行列**U**は，すべての要素の絶対値が等しいような，ある対称ユニタリ行列である．式(B.1)で，対角行列$\exp[j\Phi]$を**U**の両側からかけているのは，行列の対称性を維持し，かつ，行列の各要素の絶対値を変化させないためである．+

次に，1のn乗根を用いて行列**U**を求めることを考える．1のn乗根の1つ$e^{j(2\pi/n)}$をxとすれば，次の恒等式が成立する．

$$1 + x + x^2 + \cdots\cdots + x^{n-1} = 0 \tag{B.2}$$

いま，すべての要素の絶対値が等しいベクトルの1つとして

$$\mathbf{e}_1 = \frac{1}{\sqrt{n}}(1, 1, \cdots\cdots, 1) \tag{B.3}$$

を考えると，$\mathbf{e}_1$との内積が式(B.2)を満たす正規化されたベクトル$\mathbf{e}_2$は

$$\mathbf{e}_2 = \frac{1}{\sqrt{n}}(1, x^{n-1}, x^{n-2}, \cdots, x) \tag{B.4}$$

+ この他にも，**U**のi行とj行およびi列とj列とを入れ替える変換も考えられるが，このような変換は，第3章で伝達行列として用いる場合，単にモード番号(i)，(j)を置き換えることに対応し，系の特性には変化を与えないので，ここでは省略した．

となる．次に，$\mathbf{e}_2$との内積がやはり式(B.2)を満たすベクトル$\mathbf{e}_3$を定める．以下同様にして，順次得られるn個の正規直交ベクトル$\mathbf{e}_i$ ($i=1,2,\cdots,n$) から，対称な行列$\mathbf{U}$を作ればよい．$\mathbf{U}$の第1行には常に式(B.3)のベクトル$\mathbf{e}_1$を用いることにして，$n=2$および$n=3$の場合を示せば，以下のようになる．

$$\mathbf{U}^{(2)}=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix} \tag{B.5}$$

$$\mathbf{U}^{(3)}=\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & \omega^2 & \omega\\ 1 & \omega & \omega^2\end{pmatrix},\ \text{および}\ \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & \omega & \omega^2\\ 1 & \omega^2 & \omega\end{pmatrix} \tag{B.6}$$

ただし

$$\omega=(-1+\sqrt{3}\,j)/2$$

特に$n=m^l$ (m,lは2以上の整数)の場合には，上記以外に，1のm乗根を用いて$\mathbf{U}$を与えることができる．例えば$l=2$の場合には，上記の方法で求められるm次の行列$\mathbf{U}^{(m)}$を用いて

$$\mathbf{U}^{(m^2)}=\left(\begin{array}{c|c|c|c}
u_{11}^{(m)}\mathbf{U}^{(m)} & \cdots\cdots & u_{1m}^{(m)}\mathbf{U}^{(m)}\\ \hline
\vdots & \ddots & \vdots\\ \hline
u_{m1}^{(m)}\mathbf{U}^{(m)} & \cdots\cdots & u_{mm}^{(m)}\mathbf{U}^{(m)}
\end{array}\right) \tag{B.7}$$

が計算され，同じ手順を繰り返せば，lが3以上の場合も求めることができる．ここで，$u_{ij}^{(m)}$は行列$\mathbf{U}^{(m)}$のi行j列の要素をあらわす．また，mを2とする場合には，1の2乗根は実数となるため，得られる行列は直交行列となる．

例えば$n=4$ ($=2^2$)の場合を考えれば，1の4乗根を用いて得られる行列

$$\mathbf{U}^{(4)}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & -j & -1 & j\\ 1 & -1 & 1 & -1\\ 1 & j & -1 & -j\end{pmatrix},\quad \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & j & -1 & j\\ 1 & -1 & 1 & -1\\ 1 & -j & -1 & -j\end{pmatrix} \tag{B.8}$$

以外に，1の2乗根を用いて

$$\mathbf{U}^{(4)}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & -1 & 1 & -1\\ 1 & 1 & -1 & -1\\ 1 & -1 & -1 & 1\end{pmatrix} \tag{B.9}$$

なる直交行列が得られる．

著者が検討した限りでは，以上のようにして求められる$\mathbf{U}$を用いれば，要素の絶対値がすべて等しい伝達行列は式(B.1)を用いて表現でき，これに反するような例を見出すことはできなかった．

C. 行列固有値の摂動的解法

あるエルミート行列$\mathbf{C}_0$に，摂動項$\Delta\mathbf{C}$が加わって得られる行列$\mathbf{C}$

$$\mathbf{C}=\mathbf{C}_0+\Delta\mathbf{C} \tag{C.1}$$

の固有値を，$\mathbf{C}_0$の固有値と固有ベクトルを用いて近似的に計算する手法を考える．

行列$\mathbf{C}_0$の固有値，固有ベクトルを，それぞれλ_{0i}，$\mathbf{t}_{0i}$（$i=1,2,\cdots,n$）とするならば，それらの間には次の関係が成立する．

$$\mathbf{C}_0\,\mathbf{t}_{0i}=\lambda_{0i}\,\mathbf{t}_{0i} \tag{C.2}$$

$$\mathbf{t}_{0i}^{*T}\,\mathbf{t}_{0j}=\delta_{ij} \tag{C.3}$$

ここで，*，^{T}はそれぞれ，行列あるいはベクトルの複素共役および転置をあらわし，またδ_{ij}はKronecker のデルタである．行列$\mathbf{C}$の固有値λ_i，固有ベクトル$\mathbf{t}_i$（$i=1,2,\cdots,n$）を$\mathbf{C}_0$の固有値，固有ベクトルに微小な摂動が加わっ

たものとして

$$\lambda_i = \lambda_{i0} + \Delta\lambda_i \tag{C.4}$$

$$\mathbf{t}_i = \mathbf{t}_{0i} + \sum_{j \neq i} m_j \mathbf{t}_{0j} \tag{C.5}$$

と表わすことにする．行列$\mathbf{C}$の固有値，固有ベクトルについても式(C.2)と同様の関係

$$\mathbf{C}\,\mathbf{t}_i = \lambda_i \mathbf{t}_i \tag{C.6}$$

が成立するから，式(C.4)，(C.5)を式(C.6)に代入し式(C.2)の関係を利用すれば次の関係が得られる．

$$(\Delta\mathbf{C} - \Delta\lambda_i)\,\mathbf{t}_{0i} = \sum_{j \neq i} m_j \{(\lambda_{0i} - \lambda_{0j}) - (\Delta\mathbf{C} - \Delta\lambda_i)\}\,\mathbf{t}_{0j} \tag{C.7}$$

式(C.7)の左側から$\mathbf{t}_{0i}^{*T}$をかけると

$$\Delta\lambda_i = \mathbf{t}_{0i}^{*T}\Delta\mathbf{C}\,\mathbf{t}_{0i} + \sum_{j \neq i} m_j \mathbf{t}_{0i}^{*T}\Delta\mathbf{C}\,\mathbf{t}_{0j} \tag{C.8}$$

が，また式(C.7)の左側から$\mathbf{t}_{0j}^{*T}$をかけると

$$(\lambda_{0i} - \lambda_{0j})\,m_j = \mathbf{t}_{0j}^{*T}\Delta\mathbf{C}\,\mathbf{t}_{0i} - \Delta\lambda_i m_j + \sum_{j \neq i} m_j \mathbf{t}_{0j}^{*T}\Delta\mathbf{C}\,\mathbf{t}_{0j} \tag{C.9}$$

が，それぞれ得られる．

式(C.8)において，2次の微小項（右辺第2項）を無視すると，1次近似の式として

$$\Delta\lambda_i = \mathbf{t}_{0i}^{*T}\Delta\mathbf{C}\,\mathbf{t}_{0i} \tag{C.10}$$

が得られる．この式はm_j（$j=1,2,\cdots,n$）を零と考えた場合の近似に対応する．

また，式(C.9)の2次の微小項（右辺第2項，第3項）を無視して得られる

m_jの値

$$m_j = \frac{\mathbf{t}_{0j}^{*T} \Delta \mathbf{C}\, \mathbf{t}_{0i}}{\lambda_{0i} - \lambda_{0j}} \tag{C.11}$$

を，式(C.8)に代入して，2次近似式

$$\Delta\lambda_i = \mathbf{t}_{0i}^{*T} \Delta \mathbf{C}\, \mathbf{t}_{0i} + \sum_{j \neq i} \frac{(\mathbf{t}_{0j}^{*T} \Delta \mathbf{C}\, \mathbf{t}_{0i})(\mathbf{t}_{0i}^{*T} \Delta \mathbf{C}\, \mathbf{t}_{0j})}{\lambda_{0i} - \lambda_{0j}} \tag{C.12}$$

を得ることができる．以下，この操作をくりかえしてより精度の高い固有値を求めることが可能である．