Title	Regularity of solutions to non-uniformly characteristic boundary value problems for symmetric systems
Author(s)	高山, 正宏
Citation	大阪大学, 2000, 博士論文
Version Type	VoR
URL	https://doi.org/10.11501/3169099
rights	
Note	

Regularity of solutions to non-uniformly characteristic boundary value problems for symmetric systems

高山 正宏

(Masahiro Takayama)

大阪大学大学院理学研究科

1999 年

目次

正誤表

9 頁の 定理 2.1.4 に以下の誤りがありましたので, お詫び申し上げます

(誤) $\cdots f \in X_{(-\sigma,\tau)}(\Omega; \partial\Omega) \cap \phi_{-} L^2(\Omega), \cdots$

(正) $\cdots f \in X_{(-\sigma,\tau)}(\Omega) \cap \phi_{-} L^2(\Omega), \cdots$

1. 序

1.1 考える問題

Ω を境界 $\partial\Omega$ が滑らかな $\mathbf{R}^n$ $(n \geq 2)$ の有界開集合とし, 次の境界値問題 (BVP) について考える.

$$\text{(BVP)} \qquad \begin{cases} (L+\lambda H)u = f & \text{in} \quad \Omega \\ \qquad\quad u \in M & \text{at} \quad \partial\Omega. \end{cases}$$

ここで $u = (u_1, \ldots, u_N)$ が未知関数であり, L は次のような一階対称系である.

$$Lu = \sum_{j=1}^{n} A_j(x)\partial_j u + B(x)u, \quad A_j(x), B(x) \in C^\infty(\overline{\Omega}), \quad A_j^*(x) = A_j(x).$$

但し $\partial_j = \partial/\partial x_j$ とする. また $H(x) \in C^\infty(\overline{\Omega})$ は 対称行列で 正定値であるものとする. 更に $M(x)\,(x \in \partial\Omega)$ は $\mathbf{C}^N$ の線型部分空間とする (このタイプの境界条件は見慣れないものかもしれないが, "$P(x)u(x) = 0$ on $\partial\Omega$" という形の境界条件を "$u(x) \in \mathrm{Ker}P(x)$ at $x \in \partial\Omega$" という形に書き直したものに過ぎない). この境界空間 $M(x)$ は次の意味で "極大非負" であると仮定する. 即ち, 各 $x \in \partial\Omega$ に対して, 次の二つの条件が満たされるとする.

$$\text{(1.1.1)} \qquad \text{すべての } v \in M(x) \text{ に対して } \langle A_b(x)v, v\rangle \geq 0,$$

$$\text{(1.1.2)} \qquad \dim M(x) = \#\{A_b(x) \text{ の重複度を込めた非負固有値 }\}.$$

ここで $A_b(x)\,(x \in \partial\Omega)$ は境界行列と呼ばれるものであり,

$$A_b(x) = \sum_{j=1}^{n} \nu_j(x)A_j(x) \quad (x \in \partial\Omega)$$

で与えられる. 但し $\nu(x) = (\nu_1(x), \ldots, \nu_n(x))$ は Ω に対する単位外法線を表わす (極大非負の "極大" については, $x \in \partial\Omega$ を固定するごとに, "$M(x)$ を含む $\mathbf{C}^N$ の線型部分空間であって, その空間の任意の元 v に対して $\langle A_b(x)v, v\rangle \geq 0$ となるような空間は $M(x)$ に限る" という意味で "極大" なのである).

まず, 次の定義を思い出そう.

定義. $f \in L^2(\Omega)$ に対して, 次が満たされるとき $u \in L^2(\Omega)$ は (BVP) の弱解であると呼ぶ: $\psi \in C^1(\overline{\Omega})$ であって $\psi \in M^*$ at $\partial\Omega$ となる任意の ψ に対して, 関係式

$$(u, (L^* + \overline{\lambda}H)\psi)_{L^2(\Omega)} = (f, \psi)_{L^2(\Omega)}.$$

が成り立つ. 但し L^*, M^* は次のものを表わす.

$$L^*\psi = -\sum_{j=1}^{n} \partial_j A_j(x)\psi + B^*(x)\psi, \qquad M^*(x) = [A_b(x)M(x)]^\perp \quad (x \in \partial\Omega).$$

この境界値問題 (BVP) の弱解の存在は明らかである (定理 6.1.4 を参照). 本論文では, この弱解の滑らかさについて議論する.

境界 $\partial\Omega$ 上で $\mathrm{rank} A_b(x)$ が一定であるときは, Rauch [17] により, それ以前の結果 (Friedrichs [6], Lax-Phillips [12]) を含むような, 境界値問題 (BVP) に対する詳しい研究がなされている. またこれ以外にも, 解の滑らかさの研究は Gu [7], Tartakoff [25], Yanagisawa-Matsumura [30], Ohno-Shizuta-Yanagisawa [16] などにも見られる (第 6 章 で, これらの結果について説明や証明を与えているので, 参照されたい).

境界 $\partial\Omega$ 上で $\mathrm{rank} A_b(x)$ が一定でないときは, (BVP) の解の滑らかさの研究結果が, 例えば Nishitani-Takayama [13], [14], Secchi [24] などに見られる. きちんと言うと, γ を $\partial\Omega$ に埋め込まれた余次元 1 の部分多様体とし, この γ を境として $\partial\Omega \setminus \gamma$ の片側で $A_b(x)$ が正定値であって, その反対側で負定値であるような場合の結果が [13], [24] で述べられている.

本論文では上と同じく, $\partial\Omega$ 上で γ を横切るときのみ $\mathrm{rank} A_b(x)$ が変わる場合についての研究を行う. 特に, 次の二つの場合について考察する.

(I) $A_b(x)$ は $\partial\Omega \setminus \gamma$ 上で正則行列であり, 各 $\bar{x} \in \gamma$ の近傍 U で考えたとき, $(\partial\Omega \setminus \gamma) \cap U$ の少なくとも片側で, $A_b(x)$ が正定値か負定値になっている.

(II) $A_b(x)$ は $\partial\Omega \setminus \gamma$ 上では rank が一定であるが, γ で rank を変え, γ 上で $A_b(x)$ は 0 (零行列) になっている.

次節の 例 1.2.2 からも分かることだが, これだけでは f がどんなに滑らかであったとしても, (BVP) の解 u が滑らかであるとは限らない ([13, Example 2.1], [24, Example 4] も参照). よって滑らかさの結果を得るために, 第 2 章 では更に仮定を課す (第 1.2 節 の議論も参照). また以下では, 境界空間 $M(x)$ は $\partial\Omega \setminus \gamma$ の各連結成分上, その境界まで込めて滑らかであると仮定する.

1.2 滑らかな解を得るための必要条件

では (BVP) の滑らかな解を得るためには, どのような条件を課すことが必要であるかについて考えてみよう. 説明の簡単のために, 本節のみ $N = 1$ として話を進めていくことにする. つまり, 系ではなくて, 単独スカラーの場合について考えることにする. また簡単のために $n = 2$ とし, 更に低階項はないものとして考察する. 即ち, Ω を境界が滑らかな $\mathbf{R}^2$ の有界開集合とし, 次の境界値問題 (ScBVP) について考える.

$$\text{(ScBVP)} \qquad \begin{cases} (L+\lambda)u = f & \text{in} \quad \Omega \\ \qquad\quad u \in M & \text{at} \quad \partial\Omega. \end{cases}$$

ここで u は未知のスカラー関数であり, L は次のような一階微分作用素 (ベクトル場) である.

$$Lu = a_1(x)\partial_1 u + a_2(x)\partial_2 u, \quad a_1(x), a_2(x) \in C^\infty(\overline{\Omega}).$$

また境界空間 $M(x)$ は, 極大非負であるものとする.

まず, 単独スカラーの場合の境界条件について考えたい. そのために, “流れ” という用語を定義しておく.

定義. $x = (x_1, x_2) \in \overline{\Omega}$ に対して, 次が満たされるとき $X(s) = (X_1(s), X_2(s))$ $(s \in \mathbf{R})$ は x を通る流れであると呼ぶ: $X(s)$ は常微分方程式 $(dX/ds)(s) = a(X(s))$ の解であり, ある $s_0 \in \mathbf{R}$ に対して $X(s_0) = x$ となっている. 但し $a(x) = (a_1(x), a_2(x))$ である.

$X(s)$ を流れとし, u を (ScBVP) の古典解とする. このとき $(L+\lambda)u=f$ は, 次のように書き換えられることに注意する.

$$(d/ds)e^{\lambda s}u(X(s)) = e^{\lambda s}f(X(s)) \tag{1.2.1}$$

また $x \in \partial\Omega$ のとき, 境界行列 $a_b(x)$ と x を通る流れ $X(s)$ の間には, 次のような関係があることが分かる (注意として, 今の場合 $a_b(x)$ は単なるスカラー関数である).

(i) $a_b(x) < 0 \Leftrightarrow$ "$X(s)$ は横断的に $\partial\Omega$ を通って流入する".

(ii) $a_b(x) = 0 \Leftrightarrow$ "$X(s)$ は $\partial\Omega$ に接するか, $X(s) \equiv x$ となっている".

(iii) $a_b(x) > 0 \Leftrightarrow$ "$X(s)$ は横断的に $\partial\Omega$ を通って流出する".

ここで流入とは, $s_0 \in \mathbf{R}$ を $X(s_0) = x$ となるものとし, $\epsilon > 0$ を十分小さなものとして, $s_0 - \epsilon < s < s_0$ のとき $X(s) \notin \Omega$ であって, $s_0 < s < s_0 + \epsilon$ のとき $X(s) \in \Omega$ となるときをこう呼ぶ. 流出は逆の場合をこう呼ぶ.

したがって, $\partial\Omega$ 上で $\mathrm{rank} a_b(x)$ が一定でない場合とは, 粗く言って "流れが境界を通って流入流出する場合" というように言い換えることができ, また極大非負な境界条件とは, "流れが横断的に境界を通って流入する部分で $u=0$ を課す" というように言い換えることができる.

例 1.2.1. Ω を $\mathbf{R}^2$ の単位円板 $\{x; |x| < 1\}$ とし, $L = \partial_1$ について考える. このとき $a_b(x) = x_1$ であるので, 極大非負な境界空間 $M(x)$ は, 次のものである.

$$M(x) = \begin{cases} \{0\} & (|x| = 1,\ x_1 < 0 \text{ のとき}) \\ \mathbf{C} & (|x| = 1,\ x_1 \geq 0 \text{ のとき}). \end{cases}$$

ところで, 流れ $X(s) = (X_1(s), X_2))$ は $X_1(s) = s$, $X_2(s) = \mathrm{const.}$ であるので, 極大非負な境界条件が "流れが横断的に境界を通って流入する部分で $u=0$ を課している" ということが分かる.

さて $\lambda \in \mathbf{C}$, $f \in C^\infty(\overline{\Omega})$ として, (ScBVP) の解 u を求めてみると, (1.2.1) や境界条件に注意することで,

$$u(x_1, x_2) = e^{-\lambda x_1}\int_{-\sqrt{1-|x_2|^2}}^{x_1} e^{\lambda s}f(s, x_2)ds \quad (x = (x_1, x_2) \in \Omega)$$

が解であることが分かる.

次にいよいよ, 解の滑らかさについて考えよう. 容易に分かることだが, $\partial\Omega$ 上で $\mathrm{rank} a_b(x)$ が一定でないときは, 一般には $f \in C_0^\infty(\Omega)$ であってさえも, (ScBVP) の解 u の滑らかさは期待できない.

例 1.2.2. Ω を $\mathbf{R}^2$ のアニュラス $\{x; 1 < |x| < 2\}$ とし, $L = \partial_1$ について考える. このとき, 極大非負な境界空間 $M(x)$ は, 次のものである.

$$M(x) = \begin{cases} \{0\} & (\text{“}|x| = 2,\ x_1 < 0\text{” または “}|x| = 1,\ x_1 > 0\text{” のとき}) \\ \mathbf{C} & (\text{“}|x| = 2,\ x_1 \geq 0\text{” または “}|x| = 1,\ x_1 \leq 0\text{” のとき}). \end{cases}$$

さて $\lambda \in \mathbf{C}$ とし, $f \in C_0^\infty(\Omega \cap \{x_1 < -1\})$ を 次を満たす関数とする.

$$f(x) \geq 0,\ f(x) \not\equiv 0 \quad (x_1 \leq 0,\ x_2 = \pm 1 \text{ のとき}).$$

このとき (ScBVP) の解 u は, 次で与えられる.

$$u(x_1,x_2)=\begin{cases} e^{-\lambda x_1}\int_{-\sqrt{4-|x_2|^2}}^{x_1} e^{\lambda s}f(s,x_2)ds & (x_1<0 \text{ または } |x_2|>1 \text{ のとき}) \\ 0 & (x_1>0,\ |x_2|<1 \text{ のとき}) \end{cases}$$

しかし, これより明らかに, 線分 $\{0<x_1<\sqrt{3},\ x_2=\pm 1\}$ 上で u は不連続になっていることが分かる.

この例からも分かるように, "領域の内側から境界に接する流れが存在する" ような場合のときは, 解に不連続が生じてしまうことが予想される (上の 例 1.2.2 では, 流れ $X(s)=(X_1(s),X_2))$ は $X_1(s)=s$, $X_2(s)=\mathrm{const.}$ であり, 二点 $(0,\pm 1)$ で流れが領域の内側から接している). したがって, 解の滑らかさを望むならば, 少なくとも "領域の内側から境界に接する流れが存在しない" ような場合について考えなければならない. 問題は, これをいかに定式化するかである.

その考察のためには, 境界が直線である場合が分かりやすいので, 以下 Ω を $\mathbf{R}^2$ の 右半平面 $\mathbf{R}^2_+=\{x_1>0\}$ として考えることにする. このとき x_2 軸が境界となるが, x_2 軸上 $x_2>0$ の部分で流れが流入し, $x_2<0$ の部分で流れが流出していて, 原点 $(0,0)$ で $\mathrm{rank} a_b(x)$ が変わる場合について考えよう. このようなベクトル場 L として, 典型的なものは $L=x_2\partial_1+a_2(x)\partial_2$ である (実際 $(0,x_2)\in\partial\mathbf{R}^2_+$ に対して $a_b(0,x_2)=-x_2$ である). このとき $a_2(0,0)$ の値によって, 原点附近での流れの様子は決定される.

(i) $a_2(0,0)<0 \Leftrightarrow$ "原点を通る流れは, 領域の外側から境界に原点で接する".

(ii) $a_2(0,0)=0 \Leftrightarrow$ "原点は流れの停留点となっている".

(iii) $a_2(0,0)>0 \Leftrightarrow$ "原点を通る流れは, 領域の内側から境界に原点で接する".

したがって, 解の滑らかさを望むならば, この (iii) の場合を除外することが必要である. では残った (i) や (ii) の場合, "解の滑らかさを望むことができるかどうか" についての主張が, 本論文の主結果として次章で述べられている (上の (i), (ii) の場合が, それぞれ (I), (II) の場合に対応している). また本論文では, 単独スカラーではなく系に対して一見複雑な仮定が述べられているが, 本質的には, (I) では $a_2(0,0)<0$ であることを, (II) では $a_2(0,0)=0$ であることを仮定しているに過ぎない (次章における $A_{\gamma/b}$ というものが, 上の $a_2(0,0)$ に対応している).

1.3 本論文の構成

本論文の構成は, 以下の通りである: 第 2 章 で, 第 1.1 節 で述べた 場合 (I), (II) に対してきちんとした問題設定をし, 主結果を述べる. 場合 (I) は 第 2.1 節 で, 場合 (II) は 第 2.2 節 でそれぞれ述べることにする.

第 3 章 は主に, 本論文で用いる関数空間の説明にあてられる. しかし 第 3.2 節 では, 本論文を通して重要な働きをするノルムや作用素を定義し, その関係について調べる. この節の補題は, あとの章で重要になるものばかりである.

第 4 章, 第 5 章では, それぞれ 場合 (I), (II) に対する主結果の証明を行っている. 証明の中には共通する部分もあるが, 本質的にはお互いに無関係であるといってよい. 場合 (I) の証明では, "重み関数 $\phi_\pm$ を用いることで, よい評価が得られる" という所が本質であり, 場合 (II) の証明では, "極座標変換することで, よく知られた結果に持ち込める" という所が本質である.

第 6 章 では, 第 4 章, 第 5 章で用いられているよく知られた結果について述べてある. この章は, Friedrichs [5], [6], Lax-Phillips [12], Rauch [17], Tartakoff [25] を短くまとめたものである. 但し 第 6.3 節 の解の滑らかさを得るための証明については, オリジナルな個所はある.

最後の 第 7 章 では, 本論文で考察した境界値問題の背景, 及び今後の展望として, 磁気流体力学系の数学的な扱いについて述べてある. この章のすべては, Yanagisawa-Matsumura [30], [29] に依っていることを断わっておく.

このようにして本論文を進めていきたいと考えている.

2. 問題設定と主結果

2.1 場合 (I) に対する仮定と主結果

まず (I) の場合から考えよう. 仮定をきちんと述べることにする.

$$O^+(O^-) = \{x \in \partial\Omega; A_b(x) \text{ は正 (負) 定値}\}$$

とおき, $\gamma^\pm$ で $O^\pm$ の $\partial\Omega$ での滑らかな境界を表わす. ここでは (I) の場合を考えているので, $\gamma = \gamma^+ \cup \gamma^-$ であり, $A_b(x)$ は γ を除けば正則行列であると仮定してよい. 更に, $\mathrm{Ker} A_b(x)$ が γ 上で C^∞ ベクトル束をなすということも仮定しておく.

滑らかさの結果を得るために, もう一つ条件を導入する. 以下, 各 $\bar{x} \in \gamma$ の近傍 $U \subset \partial\Omega$ で考える. $h(x) \in C^\infty(U)$ を γ の 定義関数とする. また $\{v_1(x), \ldots, v_p(x)\}$ で γ 上の $\mathrm{Ker} A_b(x)$ の滑らかな基底を表わす ($v_i(x)$ は U 上で定義されているとしてよい). このとき $p \times p$ 行列 $\langle A_b(x) v_i(x), v_j(x)\rangle_{i,j=1,\ldots,p}$ は γ 上で 0 になるので, 次のように $h(x)$ をくくり出すことができる.

$$\langle A_b(x) v_i(x), v_j(x)\rangle_{i,j=1,\ldots,p} = h(x) A_{b,\gamma}(x).$$

ここで U 上の行列 $A_{b,\gamma}(x)$ は右辺でもって定義されているとみなす. また $A_{\gamma/b}(x)$ を次で定義する.

$$A_{\gamma/b}(x) = \langle A_{\tilde{h}}(x) v_i(x), v_j(x)\rangle_{i,j=1,\ldots,p}.$$

但し $A_{\tilde{h}}(x) = \sum_{j=1}^n (\partial_j \tilde{h})(x) A_j(x)$ であり, $\tilde{h}(x)$ は $h(x)$ を $\mathbf{R}^n$ における $\bar{x}$ の近傍に拡張したものを表わす. 場合 (I) における本論文の仮定は, 次のものである.

(2.1.1) $A_{b,\gamma}(x)$ と $A_{\gamma/b}(x)$ は, γ 上で同じく正定値であるか, 或いは同じく負定値である.

この仮定の下で, (BVP) に対する滑らかさをもつ解の存在結果が得られる.

次を満たすような $r(x), h(x), h_\pm(x) \in C^\infty(\overline{\Omega})$ をとる.

$$\begin{aligned}
&\Omega = \{r(x) > 0\}, && \partial\Omega \text{ 上で } dr(x) \neq 0,\\
&\gamma = \partial\Omega \cap \{h(x) = 0\}, && dh(x) \text{ と } \nu(x) \text{ は } \gamma \text{ 上で一次独立},\\
&O^\pm = \partial\Omega \cap \{h_\pm(x) > 0\}, && dh_\pm(x) \text{ と } \nu(x) \text{ は } \gamma^\pm \text{ 上で一次独立}.
\end{aligned}$$

また, 次のようにおく.

$$m(x) = \{r(x)^2 + h(x)^2\}^{1/2}, \quad m_\pm(x) = \{r(x)^2 + h_\pm(x)^2\}^{1/2},$$
$$\phi_\pm(x) = \{r(x)^2 + h_\pm(x)^2 + h_\pm(x)^4\}^{1/2} - h_\pm(x).$$

ここで $x \in \overline{\Omega} \setminus \gamma^\pm$ のとき $\phi_\pm(x) > 0$, 及び $x \in \gamma^\pm$ のとき $\phi_\pm(x) = 0$ であることに注意しておく. この $\phi_\pm$ を用いて, $q \in \mathbf{Z}_+$ 及び $\sigma, \tau \in \mathbf{R}$ に対して, 次のような関数空間を導入しよう:

$$X^q_{(\sigma,\tau)}(\Omega) = \bigcap_{j=0}^{q} \phi_+^{\sigma+q-j} \phi_-^{\tau+q-j} H^j(\Omega),$$
$$X^q_{(\sigma,\tau)}(\Omega; \partial\Omega) = \bigcap_{j=0}^{q} \phi_+^{\sigma+q-j} \phi_-^{\tau+q-j} H^j(\Omega; \partial\Omega).$$

ここで $H^q(\Omega)$ は q 次の普通の Sobolev 空間を表わし, また $H^q(\Omega; \partial\Omega)$ は q 次の $\partial\Omega$ に関する余法 Sobolev 空間を表わす (この余法 Sobolev 空間については 第 3.1 節 で説明する).

定理 2.1.1. $q \in \mathbf{Z}_+$ に対して $s(q) > 0$ があって, $\sigma, \tau > s(q)$ のとき 以下を満たす $\Lambda(q,\sigma,\tau) \in \mathbf{R}$ がとれる: $f \in X_{(-\sigma,\tau)}(\Omega;\partial\Omega) \cap \phi_- L^2(\Omega)$ 及び $\mathrm{Re}\lambda > \Lambda(q,\sigma,\tau)$ ならば, (BVP) の弱解 $u \in X_{(-\sigma,\tau)}(\Omega;\partial\Omega) \cap \phi_- L^2(\Omega)$ で, 評価

$$\|u\|_{X_{(-\sigma,\tau)}(\Omega;\partial\Omega)} + \|\phi_-^{-1}u\|_{L^2(\Omega)} \leq C\{\|f\|_{X_{(-\sigma,\tau)}(\Omega;\partial\Omega)} + \|\phi_-^{-1}f\|_{L^2(\Omega)}\}$$

を満たすものが存在する. ここで $C = C(q,\sigma,\tau,\lambda) > 0$ である.

命題 2.1.2. 以下を満たす $\Lambda \in \mathbf{R}$ がとれる: $f \in L^2(\Omega)$ 及び $\mathrm{Re}\lambda > \Lambda$ ならば (BVP) の弱解 u で $u \in m_- L^2(\Omega)$ となるものは唯一つである.

定理 2.1.1 と 命題 2.1.2 より, 次の系が直ちに従う.

系 2.1.3. $q \in \mathbf{Z}_+$ に対して $s(q) > 0$ があって, $\sigma, \tau > s(q)$ のとき 以下を満たす $\Lambda(q,\sigma,\tau) \in \mathbf{R}$ がとれる: $f \in X_{(-\sigma,\tau)}(\Omega;\partial\Omega) \cap \phi_- L^2(\Omega)$, $\mathrm{Re}\lambda > \Lambda(q,\sigma,\tau)$ であって, $u \in m_- L^2(\Omega)$ が (BVP) の弱解ならば, 実は $u \in X_{(-\sigma,\tau)}(\Omega;\partial\Omega) \cap \phi_- L^2(\Omega)$ であり, 評価

$$\|u\|_{X_{(-\sigma,\tau)}(\Omega;\partial\Omega)} + \|\phi_-^{-1}u\|_{L^2(\Omega)} \leq C\{\|f\|_{X_{(-\sigma,\tau)}(\Omega;\partial\Omega)} + \|\phi_-^{-1}f\|_{L^2(\Omega)}\}$$

が成り立つ. ここで $C = C(q,\sigma,\tau,\lambda) > 0$ である.

また次の定理より, γ の近くでの, 弱解の漸近挙動に対する粗い評価も分かる.

定理 2.1.4. $q \in \mathbf{Z}_+$ に対して $s(q) > 0$ があって, $\sigma, \tau > s(q)$ のとき 以下を満たす $\Lambda(q,\sigma,\tau) \in \mathbf{R}$ がとれる: $f \in X_{(-\sigma,\tau)}(\Omega;\partial\Omega) \cap \phi_- L^2(\Omega)$, $\mathrm{Re}\lambda > \Lambda(q,\sigma,\tau)$ であって, $u \in m_- L^2(\Omega)$ が (BVP) の弱解ならば, 実は $u \in m^{-q}\phi_+^{-\sigma}\phi_-^{\tau} H^q(\Omega)$ が成り立つ.

$x \in \overline{\Omega} \setminus \gamma$ のとき $m(x) > 0$ 及び $\phi_\pm(x) > 0$ であるので, この定理より, γ を除けば, 弱解の境界附近での滑らかさも分かる.

さて最後になるが, たとえ $f \in C_0^\infty(\Omega)$ であっても, (BVP) の弱解 u は $H^q(\Omega)$ に属するとは限らないことを見ておく.

例 2.1.1. Ω を $\mathbf{R}^2$ の単位円板 $\{x; |x_1|^2 + |x_2|^2 < 1\}$ とし, 次のような L について考える.

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \partial_1 + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \partial_2 + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

このとき $A_b(x) = \begin{pmatrix} x_1 & 0 \\ 0 & x_2 \end{pmatrix}$ なので, γ は四点 $(\pm 1, 0), (0, \pm 1)$ からなる. ここで, 条件 (2.1.1) が満たされていることに注意しておく. 極大非負な境界空間 $M(x)$ を次のようにとっておく.

$$M(x) = \begin{cases} \mathbf{C}^2 & (x_1 > 0,\ x_2 > 0 \text{ のとき}) \\ \{0\} \times \mathbf{C} & (x_1 < 0,\ x_2 > 0 \text{ のとき}) \\ \{0\} & (x_1 < 0,\ x_2 < 0 \text{ のとき}) \\ \mathbf{C} \times \{0\} & (x_1 > 0,\ x_2 < 0 \text{ のとき}). \end{cases}$$

さて, 次を満たす $\chi \in C_0^\infty(\mathbf{R})$ をとってくる.

$$\chi(s)=1 \quad (|s|<\epsilon \text{ のとき}), \quad \chi(s)=0 \quad (|s|>2\epsilon \text{ のとき}).$$

但し $\epsilon>0$ は十分小さなものとする. この χ を用いて, Ω 上の関数 $g(x)=(g_1(x),g_2(x))$ 及び $v(x)=(v_1(x),v_2(x))$ を次で定義する.

$$g_1(x)=\chi(x_1)\chi(x_2), \quad g_2(x)=0,$$
$$v_1(x)=\int_{-\infty}^{x_1}\chi(s)ds\chi(x_2), \quad v_2(x)=\int_{-\infty}^{x_1}\chi(s)ds\int_{-\sqrt{1-x_1^2}}^{x_2}\chi(s)ds.$$

ここで $\lambda \in \mathbf{R}$ に対して $f(x)=e^{-\lambda(x_1+x_2)}g(x)$, $u(x)=e^{-\lambda(x_1+x_2)}v(x)$ とおくと, この u は (BVP) の弱解であることは容易に分かる.

ところで 点 $(1,0)$ の近くで考えてみよう. $|x_2|<\epsilon$ かつ $x_1>\sqrt{1-\epsilon^2}$ のとき, $v_2(x)=c_0(x_2+\sqrt{1-x_1^2})$ となることに注意しよう. 但し $c_0=\int_{-\infty}^{\infty}\chi(s)ds$ である. これより $f\in C_0^\infty(\Omega)$ であるにもかかわらず, $u\notin H^2(\Omega)$ であることが分かる.

2.2 場合 (II) に対する仮定と主結果

次に (II) の場合について考えよう. ここでもまず, 仮定をきちんと述べよう. 再び, 各 $\bar{x}\in\gamma$ の近傍 $U\subset\partial\Omega$ で考えることにし, $h(x)\in C^\infty(U)$ を γ の定義関数とする. ここでは (II) の場合を考えているので, γ 上で $A_b(x)=0$ となることから, 前節と同様にして, 次のように $A_{b,\gamma}(x)$ が定義できる.

(2.2.1) $$A_b(x)=h(x)A_{b,\gamma}(x).$$

場合 (II) における本論文の最初の仮定は, 次のものである.

(2.2.2) U 上で $\mathrm{rank}A_{b,\gamma}(x)$ は一定である.

また, 滑らかさの結果を得るために, 別の条件も導入する.

(2.2.3) γ 上で $A_{\tilde{h}}(x)\ (=A_{\gamma/b}(x))$ は 0 になる.

但し $\tilde{h}(x)$ は, 前節と同じく, $h(x)$ を $\mathbf{R}^n$ における $\bar{x}$ の近傍に拡張したものを表わす.

境界空間 $M(x)$ は, 次のように書くことができる.

$$M(x)=\begin{cases} M_+(x) & (x\in\Gamma_+ \text{ のとき}) \\ M_-(x) & (x\in\Gamma_- \text{ のとき}).\end{cases}$$

但し $\Gamma_\pm=U\cap\{\pm h(x)>0\}$ である. 更に, 次のことも仮定する.

(2.2.4) γ 上で $\dim[M_+(x)\cap M_-(x)]$ は一定である.

これらの仮定の下で, 解に関する滑らかさの結果が得られる.

次を満たすような $m(x)\in C(\overline{\Omega})\cap C^\infty(\overline{\Omega}\setminus\gamma)$ をとる:

$$m(x)>0 \quad (x\in\overline{\Omega}\setminus\gamma \text{ のとき}), \qquad m(x)=\begin{cases}\mathrm{dist}(x,\gamma) & (\mathrm{dist}(x,\gamma)\le\epsilon \text{ のとき}) \\ 1 & (\mathrm{dist}(x,\gamma)\ge 2\epsilon \text{ のとき}).\end{cases}$$

但し $\epsilon>0$ は 十分小さなものとする. また $q\in\mathbf{Z}_+$ に対して, $H^q(\Omega;\gamma)$, $H^q(\Omega;\partial\Omega,\gamma)$ でそれぞれ q 次の γ に関する余法 Sobolev 空間 及び q 次の $\partial\Omega$ と γ に関する余法 Sobolev 空間を表わす (これらの空間については, 第 3.1 節 で詳しく説明する).

定理 2.2.1. $q \in \mathbf{Z}_+$ 及び $\sigma \geq 0$ に対して, 以下を満たす $\Lambda(q,\sigma) \in \mathbf{R}$ がとれる:
$f \in m^\sigma H^q(\Omega;\partial\Omega,\gamma)$, $\mathrm{Re}\lambda > \Lambda(q,\sigma)$ であって, $u \in L^2(\Omega)$ が (BVP) の弱解ならば, 実は $u \in m^\sigma H^q(\Omega;\partial\Omega,\gamma)$ であり, 評価

$$\|m^{-\sigma}u\|_{H^q(\Omega;\partial\Omega,\gamma)} \leq C\|m^{-\sigma}f\|_{H^q(\Omega;\partial\Omega,\gamma)}$$

が成り立つ. ここで $C = C(q,\sigma,\lambda) > 0$ である.

更に, もし γ 上で $A_{b,\gamma}(x)$ が可逆行列であるならば, 次のことが分かる.

定理 2.2.2. $q \in \mathbf{Z}_+$ 及び $\sigma \geq 0$ に対して, 以下を満たす $\Lambda(q,\sigma) \in \mathbf{R}$ がとれる:
$f \in m^\sigma H^q(\Omega;\gamma)$, $\mathrm{Re}\lambda > \Lambda(q,\sigma)$ であって, $u \in L^2(\Omega)$ が (BVP) の弱解ならば, 実は $u \in m^\sigma H^q(\Omega;\gamma)$ であり, 評価

$$\|m^{-\sigma}u\|_{H^q(\Omega;\gamma)} \leq C\|m^{-\sigma}f\|_{H^q(\Omega;\gamma)}$$

が成り立つ. ここで $C = C(q,\sigma,\lambda) > 0$ である.

注意として, 主張を述べるにあたっては, $H^q(\Omega;\partial\Omega,\gamma)$ や $H^q(\Omega;\gamma)$ を導入することは避けられず, 単純に上の 定理 2.2.1 や 定理 2.2.2 において $H^q(\Omega;\partial\Omega,\gamma)$ や $H^q(\Omega;\gamma)$ を $H^q(\Omega;\partial\Omega)$ や $H^q(\Omega)$ に置き換えた主張は成り立たない.

例 2.2.1. Ω を $\mathbf{R}^2$ の右半平面 $\mathbf{R}^2_+$ とし, $L = x_2\partial_1 - x_1\partial_2$ について考える (つまり $h(x) = x_2$ のときである). このとき $A_b(x) = -x_2$, $A_h(x) = -x_1$ であり, また γ は 原点 $(0,0)$ だけからなっている. ここで, 条件 (2.2.2), (2.2.3) は満たされていることに注意しておく. 極大非負な境界空間 $M(x)$ は, 次のものである.

$$M(x) = \begin{cases} \{0\} & (x_1 = 0,\ x_2 > 0 \text{ のとき}) \\ \mathbf{C} & (x_1 = 0,\ x_2 < 0 \text{ のとき}). \end{cases}$$

さて $\lambda > 0$ とし, $\chi \in C_0^\infty(\mathbf{R}^2)$ を 原点 $(0,0)$ の近くで $\chi \equiv 1$ となるものとする. ここで $\mathbf{R}^2_+$ 上の関数 $v(x)$ を

$$v(x) = \lambda^{-1}(1 - e^{\lambda(\tan^{-1}(x_2/x_1) - \pi/2)})$$

で定義し, $u = \chi v$ 及び $f = (L+\lambda)u = \chi + vL\chi$ とおく. このとき u は (BVP) の弱解であることは容易に分かる. しかしながら $f \in H^\infty(\mathbf{R}^2_+)$ であるにもかかわらず, $u \notin H^1(\mathbf{R}^2_+;\partial\mathbf{R}^2_+)$ が従う.

また次の例は, 流れの様子が上の 例 2.2.1 と全く異なっているが, 同様な結果を与えている. つまり, 力学系の言葉を借りれば, 例 2.2.1 では 原点は流れの中心 (center) になっているが, 下の 例 2.2.2 では 原点は流れの鞍点 (saddle point) になっている. しかし, この例でもやはり, 定理 2.2.1 や 定理 2.2.2 において $H^q(\Omega;\partial\Omega,\gamma)$ や $H^q(\Omega;\gamma)$ を $H^q(\Omega;\partial\Omega)$ や $H^q(\Omega)$ に置き換えた主張は成り立たない.

例 2.2.2. Ω を上と同じく $\mathbf{R}^2$ の右半平面 $\mathbf{R}^2_+$ とし, 今度は $L = x_2\partial_1 + x_1\partial_2$ について考える ($h(x) = x_2$ のときである). このとき $A_b(x) = -x_2$, $A_h(x) = x_1$ であり, また γ は同じく 原点 $(0,0)$ だけからなっている. ここでも, 条件 (2.2.2), (2.2.3) は満たされていることに注意しておく. 極大非負な境界空間 $M(x)$ は, 上の 例 2.2.1 と同じものとなる.

さて $\lambda > 0$ とし, $\chi \in C_0^\infty(\mathbf{R}^2)$ を 原点 $(0,0)$ の近くで $\chi \equiv 1$ となるものとする. ここで $\mathbf{R}_+^2$ 上の関数 $v(x)$ を次で定義する.

$$v(x) = \begin{cases} \lambda^{-1}(1 - (\dfrac{x_2 - x_1}{x_2 + x_1})^{\lambda/2}) & (0 < x_1 < x_2 \text{ のとき}) \\ \lambda^{-1} & (\text{それ以外のとき}) \end{cases}$$

この v を用いて $u = \chi v$ 及び $f = (L + \lambda)u = \chi + vL\chi$ とおく. このとき u は (BVP) の弱解であることは容易に分かる. しかしながら $f \in H^q(\mathbf{R}_+^2)$ $(q = [\lambda/2])$ であるにもかかわらず, $u \notin H^1(\mathbf{R}_+^2; \partial\mathbf{R}_+^2)$ が従う.

注意として, 例 1.2.2 を思い出すことで, 上の 例 2.2.2 でも, 適当な $f \in C^\infty(\overline{\mathbf{R}_+^2})$ をとってくることで, 半直線 $\{x_1 = x_2 > 0\}$ 上で u が不連続になることがあるように一見思うかもしれないが, $\mathrm{Re}\lambda > 0$ を十分大きくとることで, 不連続は生じないことが分かる.

例 2.2.3. Ω を $\mathbf{R}^2$ の円板 $\{|x_1 - 1|^2 + |x_2 - 1|^2 < 2\}$ とし, $L = -x_1\partial_1 + x_2\partial_2$ について考える. このとき $A_b(x) = (x_1 - x_2)(1 - x_1 - x_2)/\sqrt{2}$ であり, γ は四点 $(0,0), (2,2), (\frac{1\pm\sqrt{3}}{2}, \frac{1\mp\sqrt{3}}{2})$ からなっている. また, 極大非負な境界空間 $M(x)$ は, 次のものである.

$$M(x) = \begin{cases} \{0\} & (x \in \partial\Omega,\ \frac{1-\sqrt{3}}{2} < x_2 < 2,\ x_1 > 0 \text{ のとき}) \\ \mathbf{C} & (x \in \partial\Omega,\ \frac{1-\sqrt{3}}{2} < x_1 < 2,\ x_2 > 0 \text{ のとき}) \\ \{0\} & (x \in \partial\Omega,\ 0 < x_2 < \frac{1+\sqrt{3}}{2},\ x_1 < 0 \text{ のとき}) \\ \mathbf{C} & (x \in \partial\Omega,\ 0 < x_1 < \frac{1+\sqrt{3}}{2},\ x_2 < 0 \text{ のとき}). \end{cases}$$

さてこの例では, 原点 $(0,0)$ の近くに注目することにする. この附近での流れの様子は, 上の 例 2.2.2 の原点の近くのものと, 本質的に同じであることに注意しておく. したがって, この例の場合, 線分 $\{x_1 = 0,\ 0 < x_2 < 2\}$ 上で (BVP) の解 u が不連続となるかどうかを考察すればよい.

簡単のために $\lambda > 0$, $f(x_1, x_2) = \chi(x_1)$ とする. ここで $\chi \in C_0^\infty(\mathbf{R})$ は, $\mathrm{supp}\chi \subset \{0 < s < 1\}$ を満たすものとする. このとき (BVP) の解 u は次で与えられる.

$$u(x_1, x_2) = \begin{cases} x_1^\lambda \int_{x_1}^\infty s^{-\lambda-1}\chi(s)ds & (x_1 > 0 \text{ のとき}) \\ 0 & (x_1 < 0 \text{ のとき}). \end{cases}$$

これより $\mathrm{supp}\chi \subset \{\epsilon < s < 1\}$ となる $\epsilon > 0$ をとり, $c_\lambda = \int_0^\infty s^{-\lambda-1}\chi(s)ds$ とおくと, 線分 $\{x_1 = 0,\ 0 < x_2 < 2\}$ の近くで u は次のように表わすことができる.

$$u(x_1, x_2) = \begin{cases} c_\lambda x_1^\lambda & (\ 0 < x_1 < \epsilon \text{ のとき}) \\ 0 & (-\epsilon < x_1 < 0 \text{ のとき}). \end{cases}$$

したがって $\lambda > 0$ を十分大きくとることで, 線分 $\{x_1 = 0,\ 0 < x_2 < 2\}$ の附近で u が十分滑らかとなっているのが分かる.

3. 関数空間と軟化子

3.1 余法 Sobolev 空間

α, α' で, それぞれ $\alpha \in \mathbf{Z}_+^n, \alpha' \in \mathbf{Z}_+^{n+2}$ である多重指数を表わすことにする. また

$$Z = (Z_1, \ldots, Z_n) = (x_1\partial_1, \partial_2, \ldots, \partial_n),$$
$$Z' = (Z'_1, \ldots, Z'_{n+2}) = (x_1\partial_1, x_2\partial_2, \partial_3, \ldots, \partial_n, x_1\partial_2, x_2\partial_1)$$

として $Z^\alpha = Z_1^{\alpha_1} \cdots Z_n^{\alpha_n}$, $Z'^{\alpha'} = Z_1'^{\alpha'_1} \cdots Z'^{\alpha'_{n+2}}_{n+2}$ とおく. このとき $q \in \mathbf{Z}_+$ に対して, 次のような関数空間を導入しよう.

$$\begin{aligned}
H^q(\mathbf{R}_+^n; \partial\mathbf{R}_+^n) &= \{w \in L^2(\mathbf{R}_+^n);\ Z^\alpha w \in L^2(\mathbf{R}_+^n),\ |\alpha| \le q\},\\
H^q(\mathbf{R}_+^n; \gamma) &= \{w \in L^2(\mathbf{R}_+^n);\ Z'^{\alpha'} w \in L^2(\mathbf{R}_+^n),\ |\alpha'| \le q\},\\
H^q(\mathbf{R}_+^n; \partial\mathbf{R}_+^n, \gamma) &= \{w \in L^2(\mathbf{R}_+^n);\ Z'^{\alpha'} w \in L^2(\mathbf{R}_+^n),\ |\alpha'| \le q,\ \alpha'_{n+2} = 0\}.
\end{aligned}$$

但し $\mathbf{R}_+^n = \{x \in \mathbf{R}^n; x_1 > 0\}$, $\gamma = \{x \in \mathbf{R}^n; x_1 = x_2 = 0\}$ である. また以下では $H^q(\mathbf{R}^n)$ で q 次の 普通の Sobolev 空間を表わす.

さて $H^q(\Omega; \partial\Omega)$, $H^q(\Omega; \gamma)$, $H^q(\Omega; \partial\Omega, \gamma)$ を定義するために, 以下のように Ω の有限開被覆 $\{U_i\}_{i=0}^l$ をとる: まず γ を Ω の座標近傍 $U_i\,(i = 1, \ldots, k)$ であって, その座標系 χ_i が $\chi_i : U_i \cap \Omega \to \{|x| < 1,\, x_1 > 0\}$, $U_i \cap \gamma \to \{|x| < 1,\, x_1 = x_2 = 0\}$ となっているもので覆う. 次に $\partial\Omega \setminus \bigcup_{i=1}^k U_i$ を 同じく Ω の座標近傍 $U_i\,(i = k+1, \ldots, l)$ であって, その座標系 χ_i が $\chi_i : U_i \cap \Omega \to \{|x| < 1,\, x_1 > 0\}$ となっているもので覆う. 最後に $\Omega \setminus \bigcup_{i=1}^l U_i$ を $U_0 \subset\subset \Omega$ となる U_0 で覆う. また $\{\psi_i\}_{i=0}^l$ を $\{U_i\}_{i=0}^l$ に附随する 一の分割とする.

定義. $u \in H^q(\Omega; \partial\Omega)$ であることを次で定義する:

$$\begin{aligned}
&\psi_i u \in H^q(\mathbf{R}_+^n; \partial\mathbf{R}_+^n), \quad i = 1, \ldots, l \quad (U_i \text{ の局所座標で}),\\
&\psi_0 u \in H^q(\mathbf{R}^n).
\end{aligned}$$

この $H^q(\Omega; \partial\Omega)$ を "q 次の $\partial\Omega$ に関する余法 Sobolev 空間" と呼ぶ.

定義. $u \in H^q(\Omega; \gamma)$ であることを次で定義する:

$$\begin{aligned}
&\psi_i u \in H^q(\mathbf{R}_+^n; \gamma), \quad i = 1, \ldots, k \quad (U_i \text{ の局所座標で}),\\
&\psi_i u \in H^q(\mathbf{R}_+^n), \quad i = k+1, \ldots, l \quad (U_i \text{ の局所座標で}),\\
&\psi_0 u \in H^q(\mathbf{R}^n).
\end{aligned}$$

この $H^q(\Omega; \gamma)$ を "q 次の γ に関する 余法 Sobolev 空間" と呼ぶ.

定義. $u \in H^q(\Omega; \partial\Omega, \gamma)$ であることを次で定義する:

$$\begin{array}{lll} \psi_i u \in H^q(\mathbf{R}^n_+; \partial\mathbf{R}^n_+, \gamma), & i = 1, \ldots, k & (U_i \text{ の局所座標で}), \\ \psi_i u \in H^q(\mathbf{R}^n_+; \partial\mathbf{R}^n_+), & i = k+1, \ldots, l & (U_i \text{ の局所座標で}), \\ \psi_0 u \in H^q(\mathbf{R}^n). & & \end{array}$$

この $H^q(\Omega; \partial\Omega, \gamma)$ を "q 次の $\partial\Omega$ と γ に関する 余法 Sobolev 空間" と呼ぶ.

このことから $H^q(\Omega; \partial\Omega)$, $H^q(\Omega; \gamma)$, $H^q(\Omega; \partial\Omega, \gamma)$ にノルムを

$$\begin{aligned} \|u\|^2_{H^q(\Omega;\partial\Omega)} &= \sum_{i=1}^{l} \|\psi_i u\|^2_{H^q(\mathbf{R}^n_+;\partial\mathbf{R}^n_+)} + \|\psi_0 u\|^2_{H^q(\mathbf{R}^n)}, \\ \|u\|^2_{H^q(\Omega;\gamma)} &= \sum_{i=1}^{k} \|\psi_i u\|^2_{H^q(\mathbf{R}^n_+;\gamma)} + \sum_{i=k+1}^{l} \|\psi_i u\|^2_{H^q(\mathbf{R}^n_+)} + \|\psi_0 u\|^2_{H^q(\mathbf{R}^n)}, \\ \|u\|^2_{H^q(\Omega;\partial\Omega,\gamma)} &= \sum_{i=1}^{k} \|\psi_i u\|^2_{H^q(\mathbf{R}^n_+;\partial\mathbf{R}^n_+,\gamma)} + \sum_{i=k+1}^{l} \|\psi_i u\|^2_{H^q(\mathbf{R}^n_+;\partial\mathbf{R}^n_+)} + \|\psi_0 u\|^2_{H^q(\mathbf{R}^n)}. \end{aligned}$$

で入れる. ここで

$$\begin{aligned} \|w\|^2_{H^q(\mathbf{R}^n_+;\partial\mathbf{R}^n_+)} &= \sum_{|\alpha|\le q} \|Z^\alpha w\|^2_{L^2(\mathbf{R}^n_+)}, \\ \|w\|^2_{H^q(\mathbf{R}^n_+;\gamma)} &= \sum_{|\alpha'|\le q} \|Z'^{\alpha'} w\|^2_{L^2(\mathbf{R}^n_+)}, \\ \|w\|^2_{H^q(\mathbf{R}^n_+;\partial\mathbf{R}^n_+,\gamma)} &= \sum_{\substack{|\alpha'|\le q \\ \alpha'_{n+2}=0}} \|Z'^{\alpha'} w\|^2_{L^2(\mathbf{R}^n_+)}. \end{aligned}$$

これらの空間について, 次の補題が分かる.

補題 3.1.1. 次の主張が成り立つ.

(i) $C_0^\infty(\Omega)$ は $H^q(\Omega; \partial\Omega)$ で稠密である.

(ii) $\{u \in C^\infty(\overline{\Omega});\ \mathrm{supp}\, u \cap \gamma = \emptyset\}$ は $H^q(\Omega; \gamma)$ で稠密である.

(iii) $C_0^\infty(\Omega)$ は $H^q(\Omega; \partial\Omega, \gamma)$ で稠密である.

(証明) (i) についてのみ示すことにする ((ii), (iii) についても ほぼ同様である). 一の分割を用いることで $u \in H^q(\mathbf{R}^n_+; \partial\mathbf{R}^n_+)$ $(\mathrm{supp}\, u \subset \{|x| < 1,\ x_1 \ge 0\})$ が $\{u_\epsilon\} \subset C_0^\infty(\mathbf{R}^n_+)$ $(\mathrm{supp}\, u_\epsilon \subset \{|x| < 1,\ x_1 \ge 0\})$ で近似されることを示せば十分である. そのために, 次の補題を準備する.

補題 3.1.2. $v \in H^q(\mathbf{R}^n_+; \partial\mathbf{R}^n_+)$ $(\mathrm{supp}\, v \subset \{|x| < 1,\ x_1 \ge 0\})$ とし $\chi \in C_0^\infty(\mathbf{R})$ とする. このとき

$$\chi(kx_1)v \to 0 \quad \text{in} \quad H^q(\mathbf{R}^n_+; \partial\mathbf{R}^n_+) \quad (k \to \infty)$$

が成り立つ.

(証明) q に関する帰納法で示す. Lebesgue の収束定理より $q=0$ のときは明らかである. 次に $q-1$ のときまで主張が成り立つと仮定して q のときを考える. このとき $j=1,\dots,n$ として, 次を示せば十分である.

$$Z_j(\chi(kx_1)v) \to 0 \quad \text{in} \quad H^{q-1}(\mathbf{R}^n_+;\partial\mathbf{R}^n_+) \quad (k\to\infty).$$

ここで次に注意する.

$$Z_j(\chi(kx_1)v) = \begin{cases} \chi(kx_1)Z_1v + \tilde{\chi}(kx_1)v & (j=1) \\ \chi(kx_1)Z_jv & (j=2,\dots,n). \end{cases}$$

但し $\tilde{\chi}(t) = t\chi'(t)$ である. よって $Z_jv \in H^{q-1}(\mathbf{R}^n_+;\partial\mathbf{R}^n_+)$ 及び $\tilde{\chi} \in C_0^\infty(\mathbf{R})$ であることから, 帰納法の仮定より $Z_j(\chi(kx_1)v) \to 0$ in $H^{q-1}(\mathbf{R}^n_+;\partial\mathbf{R}^n_+)$ が分かるので, q のときも主張は成り立つ. ■

(補題 3.1.1 の証明の続き) 原点 0 の近くで $\chi \equiv 1$ となる $\chi \in C_0^\infty(\mathbf{R})$ をとり, $k>0$ に対して $u_k = (1-\chi(kx_1))u$ とおく. このとき 補題 3.1.2 より $u_k \to u$ in $H^q(\mathbf{R}^n_+;\partial\mathbf{R}^n_+)$ $(k\to\infty)$ が分かるので, 予め $\operatorname{supp} v \subset \{|x|<1,\, x_1>0\}$ と仮定しておいてよい. あとは普通に Friedrichs の軟化子を用いて近似すればよい. ■

3.2 余法軟化子

前節で導入した関数空間 $H^q(\mathbf{R}^n_+;\partial\mathbf{R}^n_+)$ $(H^q(\Omega;\partial\Omega))$ について詳しく調べるために, 写像 $\# : L^2(\mathbf{R}^n_+) \to L^2(\mathbf{R}^n)$ 及び $\natural : L^\infty(\mathbf{R}^n_+) \to L^\infty(\mathbf{R}^n)$ を $w^\#(x) = w(e^{x_1},x')e^{x_1/2}$ 及び $a^\natural = a(e^{x_1},x')$ で定義する. 但し $x=(x_1,x')=(x_1,x_2,\dots,x_n)$ とする. このとき $\#,\natural$ はノルム不変な全単射であって, 次のような関係を満たす.

$$\begin{aligned} (aw)^\# = a^\natural w^\#, \quad \partial_j(a^\natural) &= (Z_ja)^\natural \ (j=1,\dots,n), \\ \partial_j(w^\#) &= \begin{cases} (Z_1w)^\# + w^\#/2 & (j=1) \\ (Z_jw)^\# & (j=2,\dots,n). \end{cases} \end{aligned}$$

これより直ちに, 写像 $\# : H^q(\mathbf{R}^n_+;\partial\mathbf{R}^n_+) \to H^q(\mathbf{R}^n)$ が同型写像になっていることが分かる.

次に $0<\delta\le 1$ に対して $\|\cdot\|_{H^q(\mathbf{R}^n_+;\partial\mathbf{R}^n_+)}$ と同値であるノルムの族を導入する:

$$\|w\|^2_{H^q(\mathbf{R}^n_+;\partial\mathbf{R}^n_+),\delta} = \|w^\#\|^2_{H^q(\mathbf{R}^n),\delta} = \int_{\mathbf{R}^n} |\widehat{w^\#}(\xi)|^2 \langle\xi\rangle^{2(q+1)}\langle\delta\xi\rangle^{-2}d\xi.$$

ここで $\langle\xi\rangle^2 = 1+|\xi|^2$ であり, $\widehat{w^\#}(\xi)$ は $w^\#(x)$ の x に関する Fourier 変換を表わす. これを用いて $u \in H^q(\Omega;\partial\Omega)$ に対して

$$\|u\|^2_{H^q(\Omega;\partial\Omega),\delta} = \|\psi_0u\|^2_{H^q(\mathbf{R}^n),\delta} + \sum_{i=1}^k \|\psi_iu\|^2_{H^q(\mathbf{R}^n_+;\partial\mathbf{R}^n_+),\delta}$$

とおく. 但し $\{U_i\},\{\chi_i\},\{\psi_i\}$ は前節のものとする. このとき, 次の補題が従う.

補題 3.2.1. $q \in \mathbf{Z}_+ (q\ge 1)$ とする. このとき, 次の (i), (ii) は 同値である.

(i) $u \in H^q(\Omega; \partial\Omega)$ である.

(ii) $u \in H^{q-1}(\Omega; \partial\Omega)$ であって, かつ $\{\|u\|_{H^{q-1}(\Omega;\partial\Omega),\delta}\}_{0<\delta\le 1}$ は有界である.

更に, この (i), (ii) のいずれかが成り立つとき, $\|u\|_{H^{q-1}(\Omega;\partial\Omega),\delta} \nearrow \|u\|_{H^q(\Omega;\partial\Omega),1}$ $(\delta \searrow 0)$ が従う.

したがって $\|\cdot\|_{H^{q-1}(\Omega;\partial\Omega),\delta}$ というノルムに関する評価を得ることが, 以下では重要になる. そこで, 次のような作用素を導入しよう: $\chi \in C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$ とし, $0 < \epsilon \le 1$ に対して $\chi_\epsilon(y) = \epsilon^{-n}\chi(y/\epsilon)$ とおく. このとき, 作用素 $J_\epsilon : L^2(\mathbf{R}^n_+) \to L^2(\mathbf{R}^n_+)$ を

$$J_\epsilon w(x) = \int_{\mathbf{R}^n} w(x_1 e^{-y_1}, x' - y') e^{-y_1/2} \chi_\epsilon(y) dy$$

で定義する. 次のことは容易に分かる.

$$(J_\epsilon w)^\# = w^\# * \chi_\epsilon, \quad [Z_j, J_\epsilon] = 0, \quad J_\epsilon w \in H^\infty(\mathbf{R}^n_+; \partial\mathbf{R}^n_+) = \bigcap_{j=0}^\infty H^j(\mathbf{R}^n_+; \partial\mathbf{R}^n_+).$$

このことから $w^\# * \chi_\epsilon$ に対して Hörmander [8, Theorem 2.4.1] を適用したものを $J_\epsilon w$ で読み換えることで, 次の命題が得られる (証明については 下の 補題 3.2.3 や 補題 3.2.4 も参照).

命題 3.2.2. $q \in \mathbf{Z}_+$ $(q \ge 1)$ とする. また, 上で定義した J_ϵ の χ について, 次の (i), (ii) を仮定する.

(i) $\hat{\chi}(\xi) = O(|\xi|^{q+1})$ $(\xi \to 0)$ である.

(ii) すべての $t \in \mathbf{R}$ に対して $\hat{\chi}(t\xi) = 0$ であるならば $\xi = 0$ である.

このとき $c_0 = c_0(\chi, q) > 0$ がとれて, すべての $0 < \delta \le 1$ 及び $w \in H^{q-1}(\mathbf{R}^n_+; \partial\mathbf{R}^n_+)$ に対して

$$\begin{aligned} &c_0^{-1}\|w\|^2_{H^{q-1}(\Omega;\partial\Omega),\delta} \\ &\quad \le \int_0^1 \|J_\epsilon w\|^2_{L^2(\mathbf{R}^n_+)} \epsilon^{-2q}(1+\delta^2/\epsilon^2)^{-1} d\epsilon/\epsilon + \|w\|^2_{H^{q-1}(\Omega;\partial\Omega),1} \\ &\quad \le c_0\|w\|^2_{H^{q-1}(\Omega;\partial\Omega),\delta} \end{aligned}$$

が成り立つ. 但し, 後半の不等式を得るためだけならば (ii) は必要ない.

注意. 上の 命題 3.2.2 の 仮定 (i), (ii) を満たす $\chi \in C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$ を得るには, 以下のようにすればよい: $\psi \in C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$ を $\hat{\psi}(0) = \int \psi(y)dy \ne 0$ を満たすものとし, $\chi = (-\Delta)^k\psi$ とおく. 但し $\Delta = \partial_{y_1}^2 + \cdots + \partial_{y_n}^2$ である. このとき χ は $q = 2k-1$ として 仮定 (i) を満たし, 更に 仮定 (ii) も満たすことが分かる.

しかし, 本論文で用いるのは, この 命題 3.2.2 よりも詳しい, 以下の三つの補題である.

補題 3.2.3 $q \in \mathbf{Z}_+$ $(q \geq 1)$ とし, J_ϵ を定める χ について 命題 3.2.2 の 仮定 (ii) を満たすとする. このとき $c_0 = c_0(q,\chi) > 0$ がとれて, すべての $0 < \epsilon_0 \leq 1$, $0 < \delta \leq 1$ 及び $w \in H^{q-1}(\mathbf{R}^n_+; \partial\mathbf{R}^n_+)$ に対して

$$\begin{aligned}&\|w\|^2_{H^{q-1}(\mathbf{R}^n_+;\partial\mathbf{R}^n_+),\delta}\\ &\quad\leq c_0\{\int_0^{\epsilon_0} \|J_\epsilon w\|^2_{L^2(\mathbf{R}^n_+)}\epsilon^{-2q}(1+\delta^2/\epsilon^2)^{-1}d\epsilon/\epsilon + (1+\epsilon_0^{-2})\|w\|^2_{H^{q-1}(\mathbf{R}^n_+;\partial\mathbf{R}^n_+),1}\}\end{aligned}$$

が成り立つ.

補題 3.2.4 $q \in \mathbf{Z}_+$ $(q \geq 1)$ とし, J_ϵ を定める χ について 命題 3.2.2 の 仮定 (i) を満たすとする. このとき $c_0 = c_0(q,\chi) > 0$ がとれて, すべての $0 < \epsilon_0 \leq 1$, $0 < \delta \leq 1$ 及び $w \in H^{q-1}(\mathbf{R}^n_+; \partial\mathbf{R}^n_+)$ に対して

$$\int_0^{\epsilon_0} \|J_\epsilon w\|^2_{L^2(\mathbf{R}^n_+)}\epsilon^{-2q}(1+\delta^2/\epsilon^2)^{-1}d\epsilon/\epsilon \leq c_0\|w\|^2_{H^{q-1}(\mathbf{R}^n_+;\partial\mathbf{R}^n_+),\delta}$$

が成り立つ.

補題 3.2.5 $q \in \mathbf{Z}_+$ とし, J_ϵ を定める χ について 命題 3.2.2 の 仮定 (i) を満たすとする. また $a(x,y) \in \mathcal{B}^\infty(\mathbf{R}^{2n})$ とし $\alpha \in \mathbf{Z}^n_+$ とする. このとき, 以下を満たす $c_0 = c_0(q,\chi,a,\alpha) > 0$ がとれる: $w \in H^{q-1}(\mathbf{R}^n_+; \partial\mathbf{R}^n_+)$ に対して

$$W_\epsilon(x) = \int_{\mathbf{R}^n} a(x,y)w^\#(x-y)y^\alpha\chi_\epsilon(y)dy$$

とおくとき, すべての $0 < \epsilon_0 \leq 1$, $0 < \delta \leq 1$ に対して

$$\int_0^{\epsilon_0} \|W_\epsilon\|^2\epsilon^{-2q}(1+\delta^2/\epsilon^2)^{-1}d\epsilon/\epsilon \leq \begin{cases} c_0\|w\|^2_{H^{q-1}(\mathbf{R}^n_+;\partial\mathbf{R}^n_+),\delta} & (|\alpha| = 0 \text{ のとき}) \\ c_0\|w\|^2_{H^{q-|\alpha|}(\mathbf{R}^n_+;\partial\mathbf{R}^n_+)} & (1 \leq |\alpha| \leq q \text{ のとき}) \\ c_0\|w\|^2_{L^2(\mathbf{R}^n_+)} & (|\alpha| \geq q+1 \text{ のとき}) \end{cases}$$

が成り立つ.

(補題 3.2.3 の証明) $(J_\epsilon w)^\# = w^\# * \chi_\epsilon$ であることや Perseval の公式より

$$\int_0^{\epsilon_0} \|J_\epsilon w\|^2_{L^2(\mathbf{R}^n_+)}\epsilon^{-2q}(1+\delta^2/\epsilon^2)^{-1}d\epsilon/\epsilon = (2\pi)^{-n/2}\int_{\mathbf{R}^n} |\widehat{w^\#}(\xi)|^2 F(\xi,\epsilon_0,\delta)d\xi$$

とできる. 但し

$$F(\xi,\delta,\epsilon_0) = \int_0^{\epsilon_0} |\hat{\chi}(\epsilon\xi)|^2\epsilon^{-2q}(1+\delta^2/\epsilon^2)^{-1}d\epsilon/\epsilon$$

である. ここで $\xi \neq 0$ のときは $\eta = \xi/|\xi|$ を単位ベクトルとし, 新たな変数として $t = \epsilon|\xi|$ を導入することで

$$F(\xi,\delta,\epsilon_0) = |\xi|^{2q}\int_0^{|\epsilon_0\xi|} |\hat{\chi}(t\eta)|^2 t^{-2q}(1+|\delta\xi|^2/t^2)^{-1}dt/t$$

と書ける．これより $|\xi| \geq \epsilon_0^{-1}$ のとき

$$F(\xi,\delta,\epsilon_0) \geq |\xi|^{2q}\int_{1/2}^{1}|\hat{\chi}(t\eta)|^2 t^{-2q}(1+|\delta\xi|^2/t^2)^{-1}dt/t$$
$$\geq |\xi|^{2q}(1+|2\delta\xi|^2)^{-1}\int_{1/2}^{1}|\hat{\chi}(t\eta)|^2 t^{-2q}dt/t$$

とできる．この積分の部分について考えると，これは η に関して連続であって，また 仮定 (ii) と $\hat{\chi}(t\eta)$ の t に関する解析性より，η に無関係な $c>0$ を用いて $\int_{1/2}^{1}|\hat{\chi}(t\eta)|^2 t^{-2q}dt/t \geq c$ とできる．したがって $|\xi| \geq \epsilon_0^{-1}$ のとき，適当な $c'>0$ を用いて

$$F(\xi,\delta,\epsilon_0) \geq c'(1+|\xi|^2)^q(1+|\delta\xi|^2)^{-1}$$

とできることが分かった．また $|\xi| \leq \epsilon_0^{-1}$ のときは，明らかに次が分かる．

$$(1+|\xi|^2)^q(1+|\delta\xi|^2)^{-1} \leq (1+\epsilon_0^{-2})(1+|\xi|^2)^{q-1}.$$

これらより主張が従う．■

(補題 3.2.4 の証明) $F(\xi,\delta,\epsilon_0)$ を上の 補題 3.2.3 の証明にでてきたものとする．この $F(\xi,\delta,\epsilon_0)$ を $(1+|\xi|^2)^q(1+|\delta\xi|^2)^{-1}$ で評価できれば証明が終わる．まず，仮定 (i) より ξ が有界であるならば $F(\xi,\delta,\epsilon_0)$ も有界であることに注意しておく．よって，大きな $|\xi|$ についてが問題となる．上と同じく $\eta=\xi/|\xi|$, $t=\epsilon|\xi|$ とおくと，次のような評価ができる．

$$F(\xi,\delta,\epsilon_0) \leq |\xi|^{2q}\int_0^{\infty}|\hat{\chi}(t\eta)|^2 t^{-2q}(1+|\delta\xi|^2/t^2)^{-1}dt/t$$
$$\leq |\xi|^{2q}(1+|\delta\xi|^2)^{-1}\{\int_0^1|\hat{\chi}(t\eta)|^2 t^{-2q}dt/t+\int_1^{\infty}|\hat{\chi}(t\eta)|^2 t^{2-2q}dt/t\}.$$

ここで，仮定 (i) より，適当な $M>0$ を用いて $|\hat{\chi}(t\eta)| \leq Mt^{q+1}$ とできることや $\hat{\chi}$ が急減少関数であることから，この右辺の二つの積分は η $(|\eta|=1)$ に依らず有界であることが分かる．■

注意． この証明より，次のことも分かる: J_ϵ を定める χ について $\hat{\chi}(\xi)=O(|\xi|)$ $(\xi\to 0)$ を仮定する．このとき $c_0=c_0(\chi)>0$ がとれて，すべての $0<\epsilon_0\leq 1$, $0<\delta\leq 1$ 及び $w\in L^2(\mathbf{R}^n_+)$ に対して

$$\int_0^{\epsilon_0}\|J_\epsilon w\|^2_{L^2(\mathbf{R}^n_+)}(1+\delta^2/\epsilon^2)^{-1}d\epsilon/\epsilon \leq c_0\|w\|^2_{L^2(\mathbf{R}^n_+)}$$

が成り立つ．

(補題 3.2.5 の証明) $\chi^\alpha(y)=y^\alpha\chi(y)$ と表わすことにする．このとき $y^\alpha\chi_\epsilon(y)=\epsilon^{|\alpha|}\chi^\alpha_\epsilon(y)$ とできることに注意しておく．まず $|\alpha|\geq q+1$ のときを考えると，$\|W_\epsilon\| \leq c\epsilon^{|\alpha|}\|w^\#\| \leq c\epsilon^{q+1}\|w^\#\|$ より，次が従う．

$$\int_0^{\epsilon_0}\|W_\epsilon\|^2\epsilon^{-2q}(1+\delta^2/\epsilon^2)^{-1}d\epsilon/\epsilon \leq c\|w\|^2\int_0^{\epsilon_0}\epsilon^2(1+\delta^2/\epsilon^2)^{-1}d\epsilon/\epsilon \leq c'\|w\|^2.$$

次に $|\alpha|\leq q$ のときを考える．$a(x,y)$ が y に無関係な $a(x)\in\mathcal{B}^\infty(\mathbf{R}^n)$ であるときは

$$W_\epsilon(x)=a(x)\epsilon^{|\alpha|}\int w^\#(x-y)\chi^\alpha_\epsilon(y)dy=a(x)\epsilon^{|\alpha|}(w^\# * \chi^\alpha_\epsilon)(x)$$

と書けるので, 補題 3.2.4 の証明での議論と同様にして

$$\int_0^{\epsilon_0} \|W_\epsilon\|^2 \epsilon^{-2q}(1+\delta^2/\epsilon^2)^{-1} d\epsilon/\epsilon$$
$$\leq c\int_0^{\epsilon_0} \|w^\# * \chi_\epsilon^\alpha\|^2 \epsilon^{-2(q-|\alpha|)}(1+\delta^2/\epsilon^2)^{-1} d\epsilon/\epsilon \leq c'\|w^\#\|^2_{H^{q-|\alpha|-1}(\mathbf{R}^n),\delta}$$

とできることが分かる. このとき, 次に注意する.

$$\|w^\#\|_{H^{q-|\alpha|-1}(\mathbf{R}^n),\delta} = \|w\|_{H^{q-1}(\mathbf{R}^n_+;\partial\mathbf{R}^n_+),\delta} \quad (|\alpha| = 0 \text{ のとき}),$$
$$\|w^\#\|_{H^{q-|\alpha|-1}(\mathbf{R}^n),\delta} \leq c\|w\|_{H^{q-|\alpha|}(\mathbf{R}^n_+;\partial\mathbf{R}^n_+)} \quad (1 \leq |\alpha| \leq q \text{ のとき}).$$

最後に, 一般の $a(x,y) \in \mathcal{B}^\infty(\mathbf{R}^{2n})$ のときを考える. $k = q - |\alpha| - 1$ として Taylor 展開を用いると

$$a(x,y) = \sum_{|\beta|\leq k-1} (\beta!)^{-1}(\partial_y^\beta a)(x,0)y^\beta + \sum_{|\beta|=k} R_\beta(x,y)y^\beta,$$
$$R_\beta(x,y) = (\beta!)^{-1}k\int_0^1 (1-\theta)^{k-1}(\partial_y^\beta a)(x,\theta y)d\theta$$

とできるので, 上の議論から主張が示される. ■

3.3 空間 $X^q_{(\sigma,\tau)}(\Omega;\partial\Omega)$ について

第 2.1 節 を思い出してもらうと, 主結果 (I) を述べるにあたって $X^q_{(\sigma,\tau)}(\Omega;\partial\Omega)$ という空間を用いている. そこで本節では, この空間について少し調べておく.

補題 3.3.1. $q_1, q_2 \in \mathbf{Z}_+$ とし $\sigma_1,\sigma_2,\tau_1,\tau_2 \in \mathbf{R}$ とする. このとき $q_2 \geq q_1$, $q_2+\sigma_2 \geq q_1+\sigma_1$, $q_2+\tau_2 \geq q_1+\tau_1$ ならば, 次が成り立つ.

$$X^{q_2}_{(\sigma_2,\tau_2)}(\Omega;\partial\Omega) \hookrightarrow X^{q_1}_{(\sigma_1,\tau_1)}(\Omega;\partial\Omega).$$

補題 3.3.2. $q \in \mathbf{Z}_+$ とし $\sigma,\tau \in \mathbf{R}$ とする. このとき $m^\rho X^q_{(\sigma,\tau)}(\Omega;\partial\Omega)$ $(\rho \in \mathbf{R})$ について, 次が成り立つ.

(i) $\rho \geq 0$ のとき $\quad m^\rho X^q_{(\sigma,\tau)}(\Omega;\partial\Omega) \hookrightarrow X^q_{(\sigma,\tau)}(\Omega;\partial\Omega)$.

(ii) $\rho < 0$ のとき $\quad m^\rho X^q_{(\sigma,\tau)}(\Omega;\partial\Omega) \hookrightarrow X^q_{(\sigma-|\rho|,\tau-|\rho|)}(\Omega;\partial\Omega)$.

補題 3.3.3. $q \in \mathbf{Z}_+$ とし $\sigma,\tau \in \mathbf{R}$ とする. このとき $C_0^\infty(\Omega)$ は $X^q_{(\sigma,\tau)}(\Omega;\partial\Omega)$ で稠密である.

これらを示すには, 定義にまで戻って考える必要がある. そのために

$$X^q_{(\sigma,\tau)}(\mathbf{R}^n_+;\partial\mathbf{R}^n_+) = \bigcap_{j=1}^n \phi_+^{\sigma+q-j}\phi_-^{\tau+q-j}H^j(\mathbf{R}^n_+;\partial\mathbf{R}^n_+)$$

とおいて, $X^q_{(\sigma,\tau)}(\Omega;\partial\Omega)$ の代わりに, この空間で考えることにする. 以下では q,σ,τ と書けば $q \in \mathbf{Z}_+$, $\sigma,\tau \in \mathbf{R}$ を表わすことにする. また, 関数 u などについては $\mathrm{supp} u \subset \{|x| < 1,\ x_1 \geq 0\}$ を仮定しているものとする.

補題 3.3.4. $q \in \mathbf{Z}_+$ とし $\sigma, \tau \in \mathbf{R}$ とするとき, 次の二つのノルムは同値である:

$$\|u\|_{X^q_{(\sigma,\tau)}(\mathbf{R}^n_+;\partial\mathbf{R}^n_+)}, \qquad \sum_{|\alpha|\le q} \|\phi_+^{-\sigma-q+|\alpha|}\phi_-^{-\tau-q+|\alpha|}Z^\alpha u\|_{L^2(\mathbf{R}^n_+)}.$$

(証明) (i) まず, 左側のノルムを右側のノルムで評価しよう. それには $0 \le j \le q$, $|\beta| \le j$ のとき, 次を示せばよい.

$$\|Z^\beta(\phi_+^{-\sigma-q+j}\phi_-^{-\tau-q+j})u\|_{L^2(\mathbf{R}^n_+)} \le C \sum_{|\alpha|\le q} \|\phi_+^{-\sigma-q+|\alpha|}\phi_-^{-\tau-q+|\alpha|}Z^\alpha u\|_{L^2(\mathbf{R}^n_+)}.$$

これは Leibnitz の法則と, 次に注意することで容易に示される.

$$|Z^\beta(\phi_+^s\phi_-^t)| \le c\phi_+^{s-|\beta|}\phi_-^{t-|\beta|} \quad (\{|x|<1,\, x_1 \ge 0\} \text{ 上で}). \tag{3.3.1}$$

但し $c = c(s,t,\beta) > 0$ である.

(ii) 次に, 右側のノルムを左側のノルムで評価しよう. それには $|\alpha|$ $(0 \le |\alpha| \le q)$ に関する帰納法で, 次を示せば十分である.

$$\|\phi_+^{-\sigma-q+|\alpha|}\phi_-^{-\tau-q+|\alpha|}Z^\alpha u\|_{L^2(\mathbf{R}^n_+)} \le C\sum_{j=0}^{q} \|\phi_+^{-\sigma-q+j}\phi_-^{-\tau-q+j}u\|_{H^j(\mathbf{R}^n_+;\partial\mathbf{R}^n_+)}.$$

$|\alpha| = 0$ のときは明らかである. $|\alpha| - 1$ のときまで主張が成り立つと仮定して $|\alpha|$ のときを考える. このとき, 次のようにできることに注意する.

$$\begin{aligned}
&\phi_+^{-\sigma-q+|\alpha|}\phi_-^{-\tau-q+|\alpha|}Z^\alpha u \\
&\quad = Z^\alpha(\phi_+^{-\sigma-q+|\alpha|}\phi_-^{-\tau-q+|\alpha|}u) - \sum_{\beta\le\alpha,\,|\beta|\le|\alpha|-1}\binom{\alpha}{\beta}Z^{\alpha-\beta}(\phi_+^{-\sigma-q+|\alpha|}\phi_-^{-\tau-q+|\alpha|})Z^\beta u.
\end{aligned}$$

この右辺の第一項の $L^2(\mathbf{R}^n_+)$ ノルムは $\|\phi_+^{-s-q+|\alpha|}\phi_-^{-t-q+|\alpha|}u\|_{H^q(\mathbf{R}^n_+;\partial\mathbf{R}^n_+)}$ で評価される. また第二項については, (3.3.1) と帰納法の仮定から

$$\begin{aligned}
&\|Z^{\alpha-\beta}(\phi_+^{-s-q+|\alpha|}\phi_-^{-t-q+|\alpha|})Z^\beta u\|_{L^2(\mathbf{R}^n_+)} \\
&\quad \le c\|\phi_+^{-s-q+|\beta|}\phi_-^{-t-q+|\beta|}Z^\beta u\|_{L^2(\mathbf{R}^n_+)} \le c'\sum_{j=0}^{q}\|\phi_+^{-s-q+j}\phi_-^{-t-q+j}u\|_{H^j(\mathbf{R}^n_+;\partial\mathbf{R}^n_+)}
\end{aligned}$$

とできる. これらの評価から $|\alpha|$ のときも主張が成り立つことが分かった. ■

この補題を使えば, 補題 3.3.1 は直ちに分かる. また 補題 3.3.2 もこの補題を使い, 加えて適当な $c > 0$ を用いて $\{|x| < 1,\, x_1 \ge 0\}$ 上で $\phi_+\phi_- \le cm$ とできることにも注意することで示すことができる. 補題 3.3.3 は 補題 3.1.2 の証明での議論と次の補題を用いれば, 示すことは難しくない.

補題 3.3.5. $q \in \mathbf{Z}_+$ $(q \ge 1)$ とし $\sigma, \tau \in \mathbf{R}$ とする. このとき 次の二つのノルムは 同値である:

$$\|u\|_{X^q_{(\sigma,\tau)}(\mathbf{R}^n_+;\partial\mathbf{R}^n_+)}, \qquad \|u\|_{X^{q-1}_{(\sigma+1,\tau+1)}(\mathbf{R}^n_+;\partial\mathbf{R}^n_+)} + \sum_{|\alpha|\le 1}\|Z^\alpha u\|_{X^{q-1}_{(\sigma,\tau)}(\mathbf{R}^n_+;\partial\mathbf{R}^n_+)}.$$

この証明には, 補題 3.3.4 を用いればよい.

4. 場合 (I) に対する結果の証明

4.1 準備

$\theta > 0$, $\mu \in \mathbf{R}$ に対して

$$m_\pm(x;\theta,\mu) = \{(r(x)+\theta h_\pm(x)^2)^2 + (\mu r(x) - h_\pm(x))^2\}^{1/2},$$
$$\phi_\pm(x;\theta,\mu) = m_\pm(x;\theta,\mu) + \mu r(x) - h_\pm(x)$$

とおく. このとき $c = c(\theta,\mu) > 0$ を適当に選べば, すべての $x \in \Omega$ に対して

$$c^{-1}m_\pm(x) \le m_\pm(x;\theta,\mu) \le cm_\pm(x), \quad c^{-1}\phi_\pm(x) \le \phi_\pm(x;\theta,\mu) \le c\phi_\pm(x)$$

とできる. このことから, 主結果を示すには $m_\pm$, $\phi_\pm$ の代わりに $m_\pm(\cdot;\theta,\mu)$, $\phi_\pm(\cdot;\theta,\mu)$ を用いて示せば十分であることが分かる (詳しくは 第 3.3 節 を参照). したがって, 以下では $m_\pm(\cdot;\theta,\mu)$, $\phi_\pm(\cdot;\theta,\mu)$ を改めて単に $m_\pm$, $\phi_\pm$ で表わすことにする. さて

$$A_r(x) = \sum_{j=1}^n (\partial_j r)(x)A_j(x), \quad A_{h_\pm}(x) = \sum_{j=1}^n (\partial_j h_\pm)(x)A_j(x),$$
$$G_\pm(x) = \sum_{j=1}^n (\partial_j \phi_\pm)(x)A_j(x)$$

とおく. また $\eta \ge 0$ に対して $\phi_{\pm,\eta}(x) = \phi_\pm(x) - \eta$ とおく. このとき, 次の補題は容易に示される.

補題 4.1.1. $G_\pm(x)$ を上のものとするとき, 次の主張が成り立つ.

(i) $G_\pm = m_\pm^{-1}\{(r+\theta h_\pm^2 + \mu\phi_\pm)A_r - (\phi_\pm - 2\theta(r+2\theta h_\pm^2)h_\pm)A_{h_\pm}\}$.

(ii) $G_\pm(x)$ は Ω 上で有界である.

(iii) $\eta \ge 0$, $\sigma \in \mathbf{R}$ に対して $\phi_{\pm,\eta}^{-\sigma} L \phi_{\pm,\eta}^{\sigma} = L + \sigma\phi_{\pm,\eta}^{-1}G_\pm$, $\phi_{\pm,\eta}^{-\sigma} L^* \phi_{\pm,\eta}^{\sigma} = L^* - \sigma\phi_{\pm,\eta}^{-1}G_\pm$.

また次の補題は, 問題を局所的に考えるときに重要になる.

補題 4.1.2. 各 $\bar{x} \in \gamma^+$ に対して, 以下を満たす $\bar{x}$ の $\mathbf{R}^n$ での近傍 U と U 上の 滑らかな可逆行列 $Q(x)$ がとれる:

(i) $Q^*(x)A_r(x)Q(x) = \begin{pmatrix} -h_+(x)I_p & 0 \\ 0 & -I_{N-p} \end{pmatrix} + r(x)\tilde{A}(x)$ (U 上で).

(ii) $Q^*(x)A_{h_+}(x)Q(x) = \begin{pmatrix} B_{11}(x) & B_{12}(x) \\ B_{21}(x) & B_{22}(x) \end{pmatrix}$ (U 上で). ここで $B_{11}(x)$ は $p \times p$ 正定値行列.

(iii) $Q^{-1}(x)M(x) = \begin{cases} \mathbf{C}^N & x \in O^+ \cap U \text{ のとき} \\ \{0\} \times \mathbf{C}^{N-p} & x \in (\partial\Omega \setminus (O^+ \cup \gamma^+)) \cap U \text{ のとき}. \end{cases}$

$$\text{(iv)}\quad Q^{-1}(x)M^*(x) = \begin{cases} \{0\} & x \in O^+ \cap U \text{ のとき} \\ \mathbf{C}^p \times \{0\} & x \in (\partial\Omega \setminus (O^+ \cup \gamma^+)) \cap U \text{ のとき}. \end{cases}$$

但し $p = \dim\mathrm{Ker}A_b(\bar{x})$ とする.

(証明) $\bar{x}$ の座標近傍 U であって, その座標系 χ が $\chi : U \to \{|x| < 1\}$, $x_1 = r \circ \chi^{-1}$, $x_2 = h_+ \circ \chi^{-1}$ となっているものを選ぶ. 局所座標で考えることにより, 次のように仮定してよい.

$$r = x_1, \quad h_+ = x_2, \quad U = \{|x| < 1\}, \quad \Omega = \mathbf{R}^n_+ = \{x;\ x_1 > 0\},$$
$$\gamma^+ = \{(0,0,x'');\ x'' \in \mathbf{R}^{n-2}\}, \quad O^+ = \{(0,x');\ x' \in \mathbf{R}^{n-1},\ x_2 > 0\}.$$

但し $x = (x_1, x') = (x_1, x_2, x'') = (x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n)$ とする. また $\overline{M}(x')$ で $(\partial\Omega \setminus (O^+ \cup \gamma^+)) \cap U$ 上で定義されている $M(x')$ を $\partial\Omega \setminus \cap U$ にまで滑らかに拡張したものを表わす.

さて $\gamma^+ \cap U$ 上で $\dim\mathrm{Ker}A_b(0,x'') = p$ なので,

$$S^{-1}(0,x'')\mathrm{Ker}A_b(0,x'') = \mathbf{C}^p \times \{0\} \quad (\gamma^+ \cap U \text{ 上で})$$

となる滑らかな可逆行列 $S(x')$ がとれる. ここで $V = \begin{pmatrix} I_p \\ 0 \end{pmatrix}$ とおくと, $S(0,x'')V$ の列ベクトルは $\mathrm{Ker}A_b(0,x'')$ の滑らかな基底となっているので,

$$S^*(x')A_b(x')S(x') = \begin{pmatrix} x_2 A_{11}(x') & A_{12}(x') \\ A_{21}(x') & A_{22}(x') \end{pmatrix} \quad (\partial\Omega \cap U \text{ 上で})$$

とできる. ここで $A_{11}(x')$ は正定値, または負定値である (条件 (2.1.1) より). ところで $A_b(x)$ は $O^+ \cap U$ 上で正定値なので $A_{11}(x')$ は正定値であり, また連続性から $A_{22}(0,x'')$ は $\gamma^+ \cap U$ 上で非負定値であることが従う.

ここで $v \in \mathbf{C}^p$ のとき $\gamma^+ \cap U$ 上で $S(0,x'')\begin{pmatrix} v \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathrm{Ker}A_b(0,x'')$ なので

$$0 = S^*(0,x'')A_b(0,x'')S(0,x'')\begin{pmatrix} v \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ A_{21}(0,x'')v \end{pmatrix} \quad (\gamma^+ \cap U \text{ 上で})$$

が分かる. これより $A_{21}(0,x'') = 0$ なので $A_{21}(x') = x_2\tilde{A}_{21}(x')$ と書ける. また $\gamma^+ \cap U$ 上で $\dim\mathrm{Ker}A_b(0,x'') = p$ だったので, $A_{22}(0,x'')$ は 0 の固有値をもたないことが分かり, $A_{22}(0,x'')$ は $\gamma^+ \cap U$ 上で 正定値であることが従う. よって, 必要ならば $\bar{x}$ の座標近傍 U を小さくとっておくことで, $A_{22}(x')$ は $\partial\Omega \cap U$ 上で 正定値であると仮定してよい. ここで

$$T(x') = \begin{pmatrix} I_p & 0 \\ -x_2 A_{22}^{-1}(x')\tilde{A}_{21}(x') & I_{N-p} \end{pmatrix}$$

とおくと

$$T^*(x')S^*(x')A_b(x')S(x')T(x') = \begin{pmatrix} x_2\tilde{A}_{11}(x') & 0 \\ 0 & A_{22}(x') \end{pmatrix} \quad (\partial\Omega \cap U \text{ 上で})$$

となることが分かる．但し $\tilde{A}_{11}(x') = A_{11}(x') - x_2\tilde{A}_{12}(x')A_{22}^{-1}(x')\tilde{A}_{21}(x')$ である．したがって，必要ならば $\bar{x}$ の座標近傍 U を更に小さくとることで，$\tilde{A}_{11}(x')$ は $\partial\Omega \cap U$ 上で正定値であると仮定してよい．これより

$$U_{11}^*(x')\tilde{A}_{11}(x')U_{11}(x') = I_p, \quad U_{22}^*(x')A_{22}(x')U_{22}(x') = I_{N-p}$$

となる $\partial\Omega \cap U$ 上の滑らかな可逆行列 $U_{11}(x'), U_{22}(x')$をとり

$$Q(x') = S(x')T(x')U(x'), \quad U(x') = \begin{pmatrix} U_{11}(x') & 0 \\ 0 & U_{22}(x') \end{pmatrix}$$

とおくとき，

$$Q^*(x')A_b(x')Q(x') = \begin{pmatrix} x_2 I_p & 0 \\ 0 & I_{N-p} \end{pmatrix} \quad (\partial\Omega \cap U \text{ 上で}) \tag{4.1.1}$$

となる．よって $A_r(x) = A_1(x) = A_1(0,x') + x_1\tilde{A}_1(x) = -A_b(x') + x_1\tilde{A}_1(x)$ に注意することで (i) が従う．

次にまず，$\gamma^+ \cap U$ 上で $\overline{M}(0,x'') \cap \mathrm{Ker}A_b(0,x'') = \{0\}$ であることを示そう．背理法で示す．ある $(0,0,y'') \in \gamma^+ \cap U$ で $w_0 \neq 0$ となる $w_0 \in \overline{M}(0,y'') \cap \mathrm{Ker}A_b(0,y'')$ が存在したと仮定する．このとき，$x_2 = 0$ の近くで滑らかである $w(x_2)$ であって，$w(0) = w_0$ 及び $w(x_2) \in \overline{M}(x_2,y'')$ を満たすものがとれる．ここで $v(x_2) = Q^{-1}(x_2,y'')w(x_2)$ とおくと，$T(0,y'') = I_N$ より

$$v(0) = Q^{-1}(0,y'')w_0 \in U^{-1}(0,y'')T^{-1}(0,y'')S^{-1}(0,y'')\mathrm{Ker}A_b(0,y'') = \mathbf{C}^p \times \{0\}$$

となるので，$v(0) = \begin{pmatrix} v_0 \\ 0 \end{pmatrix}$ $(v_0 \in \mathbf{C}^p,\ v_0 \neq 0)$ とできる．よって $v(x_2) = v(0) + x_2\tilde{v}(x_2)$ とできるので，

$$\begin{aligned}&\langle A_b(x_2,y'')w(x_2), w(x_2)\rangle \\ &\quad = \langle Q^*(x_2,y'')A_b(x_2,y'')Q(x_2,y'')v(x_2), v(x_2)\rangle = x_2|v_0|^2 + O(|x_2|^2)\end{aligned}$$

となる．これより，$x_2 < 0$ で $|x_2|$ が十分小さいとき，右辺は負であることが分かる．ところで，$x_2 < 0$ のとき $w(x_2) \in \overline{M}(x_2,y'') = M(x_2,y'')$ だったので，これは境界空間の極大非負性に矛盾する．

また (4.1.1) より $(\partial\Omega \backslash (O^+ \cup \gamma^+)) \cap U$ 上で $\mathrm{dim}M(x') = N-p$ なので，$\mathrm{dim}\overline{M}(x') = N-p$ が従うことから，$\gamma^+ \cap U$ 上で $\mathrm{dim}\overline{M}(0,x'') + \mathrm{dimKer}A_b(0,x'') = N$ が分かる．したがって $S(x')$ について，予め次を仮定しておいてよい．

$$\begin{aligned} S^{-1}(0,x'')\mathrm{Ker}A_b(0,x'') &= \mathbf{C}^p \times \{0\} && (\gamma^+ \cap U \text{ 上で}), \\ S^{-1}(x')\overline{M}(x') &= \{0\} \times \mathbf{C}^{N-p} && (\partial\Omega \cap U \text{ 上で}). \end{aligned}$$

これより

$$Q^{-1}(x')\overline{M}(x') = U^{-1}(x')T^{-1}(x')S^{-1}(x')\overline{M}(x') = \{0\} \times \mathbf{C}^{N-p}$$

なので (iii) が従う．更に $(0,x') \in \partial\Omega \cap U$ のとき $v \in M^*(x')$ 及び $w \in M(x')$ に対して

$$\langle Q^{-1}(x')v, Q^*(x')A_b(x')Q(x')Q^{-1}(x')w\rangle = \langle v, A_b(x')w\rangle = 0$$

が成り立つので, (4.1.1) や (iii) に注意することで (iv) も従う.

あと (ii) を示すことが残っている. $T(0,x'')=I_N$ だったので

$$Q^{-1}(0,x'')\mathrm{Ker}A_b(0,x'')=U^{-1}(0,x'')T^{-1}(0,x'')S^{-1}(0,x'')\mathrm{Ker}A_b(0,x'')=\mathbf{C}^p\times\{0\}$$

が分かる. ここで 再び $V=\begin{pmatrix} I_p \\ 0 \end{pmatrix}$ とおくと, 上のことから $Q(0,x'')V$ の列ベクトルは $\gamma^+\cap U$ 上で $\mathrm{Ker}A_b(0,x'')$ の滑らかな基底となることが分かるので, (2.1.1) 及び (4.1.1) より $B_{11}(0,0,x'')$ は $\gamma^+\cap U$ 上で 正定値となる. 故に, 必要ならば $\bar{x}$ の座標近傍 U を更に小さくとることで, $B_{11}(x)$ は U 上で正定値と仮定できるので (ii) も従う. ■

同様にして, 次も分かる.

補題 4.1.3. 各 $\bar{x}\in\gamma^-$ に対して, 以下を満たす $\bar{x}$ の $\mathbf{R}^n$ での近傍 U と U 上の滑らかな可逆行列 $Q(x)$ がとれる:

(i) $Q^*(x)A_r(x)Q(x)=\begin{pmatrix} h_-(x)I_p & 0 \\ 0 & I_{N-p} \end{pmatrix}+r(x)\tilde{A}(x)$ (U 上で).

(ii) $Q^*(x)A_{h_-}(x)Q(x)=\begin{pmatrix} B_{11}(x) & B_{12}(x) \\ B_{21}(x) & B_{22}(x) \end{pmatrix}$ (U 上で). ここで $B_{11}(x)$ は $p\times p$ 負定値行列.

(iii) $Q^{-1}(x)M(x)=\begin{cases} \{0\} & x\in O^-\cap U \text{ のとき} \\ \mathbf{C}^p\times\{0\} & x\in(\partial\Omega\setminus(O^-\cup\gamma^-))\cap U \text{ のとき}. \end{cases}$

(iv) $Q^{-1}(x)M^*(x)=\begin{cases} \mathbf{C}^N & x\in O^-\cap U \text{ のとき} \\ \{0\}\times\mathbf{C}^{N-p} & x\in(\partial\Omega\setminus(O^-\cup\gamma^-))\cap U \text{ のとき}. \end{cases}$

但し $p=\mathrm{dimKer}A_b(\bar{x})$ とする.

さて, 重み付きアプリオリ評価を得るための重要な考察となるのが, 次の補題である.

補題 4.1.4. $\theta>0$ を十分小さくとり, $\mu>0$ を十分大きくとるとき, 適当な $\delta>0$ を用いて

$$-G_+\gg\delta m_+^{-1}\phi_+I_N\quad(W^+\cap\Omega \text{ 上で}),\quad G_-\gg\delta m_-^{-1}\phi_-I_N\quad(W^-\cap\Omega \text{ 上で})$$

を成り立たせる γ^+,γ^- の近傍 W^+,W^- がとれる.

(証明) G_+ についてのみ示すことにする (G_- についても同様である). 各 $\bar{x}\in\gamma^+$ の近くで示せば十分である. $U,Q(x)$ などの記号を 補題 4.1.2 のものとする. このとき $\delta_0>0$ を十分小さくとり $C_0>0$ を十分大きくとることで

$$-C_0I_n\ll\tilde{A}\ll C_0I_N\quad \text{かつ}\quad \begin{pmatrix} 5\delta_0I_p & 0 \\ 0 & -C_0I_{N-p} \end{pmatrix}\ll Q^*A_{h_+}Q\ll C_0I_N\quad(U \text{ 上で})$$

とできる. また, 必要ならば $\bar{x}$ の近傍 U を小さくすることで, U 上で $|r|<1$, $|h_+|<1$ と仮定してよい.

まず $x \in U \cap \Omega \cap \{h_+ \geq 0\}$ のときを考える．このとき $\phi_+ \geq 0$ 及び $-2\theta(r+\theta h_+^2)h_+ \leq 0$ より，

$$Q^*(-G_+)Q \gg m_+^{-1}\begin{pmatrix} a_{11}I_p & 0 \\ 0 & a_{22}I_{N-p} \end{pmatrix} - m_+^{-1}C_0 r(r+\theta h_+^2+\mu\phi_+)I_N$$

が分かる．ここで

$$\begin{aligned} a_{11} &= (r+\theta h_+^2)h_+ + \mu h_+\phi_+ + 5\delta_0\phi_+ - 2C_0\theta(r+\theta h_+^2)h_+, \\ a_{22} &= r+\theta h_+^2 + \mu\phi_+ - C_0\phi_+ - 2C_0\theta(r+\theta h_+^2)h_+ \end{aligned}$$

である．よって μ, θ を $\mu > C_0 + 3\delta_0$ 及び $0 < \theta < (2C_0)^{-1}$ ととると，

$$\begin{aligned} a_{11} &= (1-2C_0\theta)(r+\theta h_+^2)h_+ + \mu h_+\phi_+ + 5\delta_0\phi_+ &&\geq 3\delta_0\phi_+, \\ a_{22} &= (1-2C_0\theta h_+)(r+\theta h_+^2) + (\mu - C_0)\phi_+ &&\geq 3\delta_0\phi_+ \end{aligned}$$

となる．更に $C_0 r(r+\theta h_+^2+\mu\phi_+) \leq 2\delta_0\phi_+$ も分かる．実際 $\bar{x}$ の近傍 U を小さくすることで，$C_0\mu r \leq \delta_0$, $m_+ - (\mu r - h_+) \leq C_0^{-1}\delta_0$ と仮定してよいので，$C_0\mu r\phi_+ \leq \delta_0\phi_+$ 及び

$$C_0 r(r+\theta h_+^2) \leq \frac{\delta_0 r(r+\theta h_+^2)}{m_+ - (\mu r - h_+)} \leq \frac{\delta_0(r+\theta h_+^2)^2}{m_+ - (\mu r - h_+)} = \delta_0\phi_+$$

が従う．ここまでで，$U \cap \Omega \cap \{h_+ \geq 0\}$ 上で $Q^*(-G_+)Q \gg \delta_0 m_+^{-1}\phi_+ I_N$ が分かった．

次に $x \in U \cap \Omega \cap \{h_+ < 0\}$ のときを考える．このとき $\phi_+ - 2\theta(r+\theta h_+^2)h_+ \geq 0$ より，

$$Q^*(-G_+)Q \gg m_+^{-1}\begin{pmatrix} \tilde{a}_{11}I_p & 0 \\ 0 & \tilde{a}_{22}I_{N-p} \end{pmatrix} - m_+^{-1}C_0 r(r+\theta h_+^2+\mu\phi_+)I_N$$

が分かる．ここで

$$\begin{aligned} \tilde{a}_{11} &= -(r+\theta h_+^2)|h_+| - \mu|h_+|\phi_+ + 5\delta_0\phi_+ + 10\delta_0\theta(r+\theta h_+^2)|h_+|, \\ \tilde{a}_{22} &= r+\theta h_+^2 + \mu\phi_+ - C_0\phi_+ - 2C_0\theta(r+\theta h_+^2)|h_+| \end{aligned}$$

である．上と同じ議論により $\tilde{a}_{22} \geq 3\delta_0\phi_+$ 及び $C_0 r(r+\theta h_+^2+\mu\phi_+) \leq 2\delta_0\phi_+$ は分かる．必要ならば，更に $\bar{x}$ の近傍 U を小さくすることで，$\mu|h_+| < \delta_0$, $r+\theta h_+^2 < \delta_0$ と仮定してよいことから，

$$\begin{aligned} \tilde{a}_{11} &\geq -(r+\theta h_+^2)|h_+| - \mu|h_+|\phi_+ + 5\delta_0\phi_+ \\ &= (4\delta_0 - \mu|h_+|)\phi_+ + \delta_0 m_+ + \delta_0\mu r + (\delta_0 - (r+\theta h_+^2))|h_+| \geq 3\delta_0\phi_+. \end{aligned}$$

が従う．したがって，$U \cap \Omega \cap \{h_+ < 0\}$ 上でも $Q^*(-G_+)Q \gg \delta_0 m_+^{-1}\phi_+ I_N$ が成り立つ．■

4.2 γ^- の近くで 0 になる解の存在

本節を通して，$(\cdot,\cdot)_\Omega$ 及び $\|\cdot\|_\Omega$ で，それぞれ $L^2(\Omega)$ での内積とノルムを表わすことにする．まず，次の補題から示そう．

補題 4.2.1. $\sigma, \tau \in \mathbf{R}$, $\lambda \in \mathbf{C}$ であって $u \in C^1(\overline{\Omega})$ が $u \in M$ at $\partial\Omega$ を満たすならば，不等式

$$\begin{aligned} &(\delta_0 \mathrm{Re}\lambda - \lambda_0)\|m^{1/2}u\|_\Omega^2 - s_0\|u\|_\Omega^2 + \sigma(m\phi_+^{-1}(-G_+)u, u)_\Omega + \tau(m\phi_-^{-1}G_-u, u)_\Omega \\ &\leq \mathrm{Re}(m\phi_+^\sigma\phi_-^{-\tau}(L+\lambda H)\phi_+^{-\sigma}\phi_-^\tau u, u)_\Omega \end{aligned}$$

が成り立つ．ここで $\delta_0 > 0$, $s_0 > 0$, $\lambda_0 \in \mathbf{R}$ は σ, τ, λ, u に無関係である．

(証明) Green の公式より, 次が分かる.

$$(Lmu, u)_\Omega = (mu, L^*u)_\Omega + \int_{\partial\Omega} m\langle A_b u, u\rangle dS.$$

ここで $K(x) = \{(B+B^*) - \sum_{j=1}^n (\partial_j A_j)\}/2$, $A_m(x) = \sum_{j=1}^n (\partial_j m)A_j$ とおくとき, $L^* = -L+2K$ などに注意することで,

$$\begin{aligned}&\mathrm{Re}(m\phi_+^\sigma\phi_-^{-\tau}(L+\lambda H)\phi_+^{-\sigma}\phi_-^\tau u, u)_\Omega \\ &\quad = \mathrm{Re}\lambda(mHu, u)_\Omega + (mKu, u)_\Omega - \frac{1}{2}(A_m u, u)_\Omega \\ &\qquad +\sigma(m\phi_+^{-1}(-G_+)u, u)_\Omega + \tau(m\phi_-^{-1}G_- u, u)_\Omega + \frac{1}{2}\int_{\partial\Omega} m\langle A_b u, u\rangle dS\end{aligned}$$

が従う. よって $H(x)$ は正定値であることや, 境界積分が非負定値であることから, 主張が従う. ■

さて, あとの都合のために, 以下を満たす $\psi_{\pm,1}(x), \psi_{\pm,2}(x) \in C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$ をとっておく: Ω 上で $0 \le \psi_{\pm,i} \le 1$, $\psi_{\pm,1} + \psi_{\pm,2} = 1$ であって $\mathrm{supp}\psi_{\pm,1} \subset W^\pm$ 及び $\Omega \cap \{\phi_{\pm,\eta^*} < 0\}$ 上で $\psi_{\pm,2} = 0$ を満たす. 但し $W^\pm$ は 補題 4.1.4 のものであり, $\eta^* > 0$ は $\Omega \cap \{\phi_{\pm,\eta^*} < 0\} \subset W^\pm$ を満たすのもとする.

命題 4.2.2. $s_0 > 0$ があって, $\sigma, \tau > s_0$ のとき 以下を満たす $\Lambda(\sigma,\tau) \in \mathbf{R}$ がとれる: $\mathrm{Re}\lambda > \Lambda(\sigma,\tau)$ であって $u \in C^1(\overline{\Omega})$ が $u \in M$ at $\partial\Omega$ を満たすならば, 評価

$$\begin{aligned}(\mathrm{Re}\lambda - \Lambda(\sigma,\tau))\|m^{1/2}u\|_\Omega^2 + c_0(\min(\sigma,\tau) - s_0)\|u\|_\Omega^2 \\ \le c_1\|m\phi_+^\sigma\phi_-^{-\tau}(L+\lambda H)\phi_+^{-\sigma}\phi_-^\tau u\|_\Omega^2.\end{aligned}$$

が成り立つ. ここで $c_0 > 0$, $c_1 > 0$ は σ, τ, λ, u に無関係である.

(証明) 次のようにできることに注意する.

$$(m\phi_\pm^{-1}(\mp G_\pm)u, u)_\Omega = \sum_{i=1}^2 (m\phi_\pm^{-1}(\mp G_\pm)u, \psi_{\pm,i}u)_\Omega = I_{\pm,1} + I_{\pm,2}.$$

まず $I_{\pm,1}$ については, 補題 4.1.4 より

$$I_{\pm,1} \ge \delta\|\psi_{\pm,1}^{1/2}m^{1/2}m_\pm^{-1/2}u\|_\Omega^2$$

となることが分かる. 次に $I_{\pm,2}$ について考える. $G_\pm$ は Ω 上で有界なので, 適当な $c_2 > 0$ を用いて

$$I_{\pm,2} \ge -c_2\|\psi_{\pm,2}^{1/2}m^{1/2}\phi_\pm^{-1/2}u\|_\Omega^2$$

とできる. ここで $x \in \mathrm{supp}\psi_{\pm,2} \cap \Omega$ のとき $\phi_\pm(x) \ge \eta^*$ であり, また適当な $c_3 > 0$ を用いて $m_\pm(x) \ge c_3\phi_\pm(x) \ge c_3\eta^*$ とできるので, $w \in L^2(\Omega)$ に対して $\|\psi_{\pm,1}^{1/2}m_\pm^{-1/2}w\|_\Omega$ と $\|\psi_{\pm,1}^{1/2}\phi_\pm^{-1/2}w\|_\Omega$ は同値であることが分かる. よって

$$I_{\pm,2} \ge \delta\|\psi_{\pm,2}^{1/2}m^{1/2}m_\pm^{-1/2}u\|_\Omega^2 - c_4\|\psi_{\pm,1}^{1/2}m^{1/2}u\|_\Omega^2$$

とできる. この $I_{\pm,i}$ の下からの評価を組み合わせることで

$$\begin{aligned}&\sigma(m\phi_+^{-1}(-G_+)u,u)_\Omega+\tau(m\phi_-^{-1}G_-u,u)_\Omega\\&\quad\geq\delta\sigma\|m^{1/2}m_+^{-1/2}u\|_\Omega^2+\delta\tau\|m^{1/2}m_-^{-1/2}u\|_\Omega^2-c_4(\sigma+\tau)\|m^{1/2}u\|_\Omega^2\\&\quad\geq\epsilon_0\delta\min(\sigma,\tau)\|u\|_\Omega^2-c_4(\sigma+\tau)\|m^{1/2}u\|_\Omega^2\end{aligned}$$

が分かる (ここで, 適当な $\epsilon_0>0$ を用いて Ω 上で $m(m_++m_-)\geq\epsilon_0$ とできることを使った). したがって, 望むべきことが示される. ■

また $\eta\geq 0$ に対して $\Omega_\eta^\pm=\Omega\cap\{\phi_{\pm,\eta}>0\}$ とおく. $\eta>0$ が十分小さいとき, $\partial\Omega\cap\{\phi_{\pm,\eta}>0\}$ は滑らかな曲面の和で表わされることに注意しておく. 補題 6.1.2 にも注意して, 補題 4.2.1 と同様に Green の公式より次が従う.

補題 4.2.3. $\eta\geq 0$, $\tau\in\mathbf{R}$, $\lambda\in\mathbf{C}$ であって $u\in C^1(\overline{\Omega})$ が $\overline{\Omega}\cap\{\phi_{-,\eta}=0\}$ 上で $u=0$ であり, かつ $u\in M$ at $\partial\Omega\cap\{\phi_{-,\eta}>0\}$ を満たすならば, 不等式

$$(\delta_0\mathrm{Re}\lambda-\lambda_0)\|m^{1/2}u\|_\Omega^2+\tau(m\phi_-^{-1}G_-u,u)_\Omega\leq\mathrm{Re}(\phi_{-,\eta}^\tau(L^*+\overline{\lambda}H)\phi_{-,\eta}^{-\tau}u,u)_{\Omega_\eta^-}$$

が成り立つ. ここで $\delta_0>0$, $\lambda_0\in\mathbf{R}$ は η,τ,λ,u に無関係である.

これより, 直ちに次が得られる.

補題 4.2.4. $\tau\in\mathbf{R}$ に対して, 以下を満たす $\Lambda(\tau)\in\mathbf{R}$ がとれる: $\mathrm{Re}\lambda>\Lambda(\tau)$ であって $u\in C^1(\overline{\Omega})$ が $u\in M^*$ at $\partial\Omega$ を満たすならば, 評価

$$(\mathrm{Re}\lambda-\Lambda(\tau))\|u\|_\Omega^2\leq c\|\phi_-^\tau(L^*+\overline{\lambda}H)\phi_-^{-\tau}u\|_\Omega^2$$

が成り立つ. ここで $c>0$ は τ,λ,u に無関係である.

(証明) $\psi_{-,i}$ を上でとったものとし, $(\phi_-^{-1}G_-u,u)_\Omega=\sum_{i=1}^2(\phi_-^{-1}G_-u,\psi_{-,i}u)_\Omega=I_1+I_2$ と表わす. 命題 4.2.2 の証明の議論と同様にして

$$I_1\geq\delta\|\psi_{-,1}^{1/2}m_-^{-1/2}u\|_\Omega^2\geq 0,\quad I_2\geq -c_2\|\psi_{-,2}^{1/2}\phi_-^{-1/2}u\|_\Omega^2\geq -c_3\|\psi_{-,2}^{1/2}u\|_\Omega^2$$

が分かるので, $(\phi_-^{-1}G_-u,u)_\Omega\geq -c_3\|u\|_\Omega^2$ が従う. よって, 補題 4.2.3 で $\eta=0$ としたものを考えることで, 望むべき評価が得られる. ■

次の補題より, $\phi_-^\tau L^2(\Omega)$ での弱解の存在が分かる.

補題 4.2.5. $\tau\geq 1$ に対して, 以下を満たす $\Lambda(\tau)\in\mathbf{R}$ がとれる: $f\in\phi_-^\tau L^2(\Omega)$ 及び $\mathrm{Re}\lambda>\Lambda(\tau)$ ならば, (BVP) の弱解 $u\in\phi_-^\tau L^2(\Omega)$ で, 評価

$$(\mathrm{Re}\lambda-\Lambda(\tau))\|\phi^{-\tau}u\|_\Omega^2\leq c\|\phi^{-\tau}f\|_\Omega^2$$

を満たすものが存在する. ここで $c>0$ は τ,λ,f,u に無関係である.

(証明) 次の写像について考える．

$$T : E \ni \phi_-^\tau(L^* + \overline{\lambda}H)\psi \mapsto (\psi, f)_\Omega \in \mathbf{C},$$
$$E = \{\phi_-^\tau(L^* + \overline{\lambda}H)\psi;\ \psi \in C^1(\overline{\Omega}) \text{ は } \psi \in M^* \text{ at } \partial\Omega \text{ を満たすもの}\}.$$

ここで 補題 4.2.4 より，

$$|(\psi, f)_\Omega|^2 \le \|\phi_-^\tau\psi\|_\Omega^2 \|\phi_-^{-\tau} f\|_\Omega^2 \le (\mathrm{Re}\lambda - \Lambda(\tau))^{-1} c \|\phi_-^\tau(L^* + \overline{\lambda}H)\psi\|_\Omega^2 \|\phi_-^{-\tau} f\|_\Omega^2$$

が分かる．よって Riesz の定理より，$\psi \in M^*$ at $\partial\Omega$ となる任意の $\psi \in C^1(\overline{\Omega})$ に対して

$$(\phi_-^\tau(L^* + \overline{\lambda}H)\psi, w)_\Omega = (\psi, f)_\Omega$$

を満たす $w \in L^2(\Omega)$ であって，更に

$$(\mathrm{Re}\lambda - \Lambda(\tau))\|w\|_\Omega^2 \le c\|\phi_-^{-\tau} f\|_\Omega^2$$

を満たすものが存在する．このとき $u = \phi_-^\tau w$ とおくと，この u が望むべき弱解になっている．■

次に，γ^+ の近くで 0 になる弱解の存在と一意性を得るために，まず次を示そう．

補題 4.2.6. η^* を上でとったものとし，$\eta_0 = \eta^*/2$ とおく．このとき $\tau \ge 1/4$ に対して，以下を満たす $\Lambda(\tau) \in \mathbf{R}$ がとれる: $0 < \eta < \eta_0$, $\mathrm{Re}\lambda > \Lambda(\tau)$ であって $u \in C^1(\overline{\Omega})$ が $\overline{\Omega} \cap \{\phi_{-,\eta} = 0\}$ 上で $u = 0$ であり，かつ $u \in M^*$ at $\partial\Omega \cap \{\phi_{-,\eta} > 0\}$ を満たすならば，不等式

$$(\mathrm{Re}\lambda - \Lambda(\tau))\|u\|_{\Omega_\eta^-}^2 + c_0(\tau - 1/4)\|\phi_{-,\eta}^{-1/2} u\|_{\Omega_\eta^-} \le c_1\|\phi_{-,\eta}^{\tau+1/2}(L^* + \overline{\lambda}H)\phi_{-,\eta}^{-\tau} u\|_{\Omega_\eta^-}$$

が成り立つ．ここで $c_0 = c_0(\eta) > 0$, $c_1 = c_1(\eta) > 0$ である．

(証明) 上と同様に $(\phi_{-,\eta}^{-1} G_- u, u)_{\Omega_\eta^-} = \sum_{i=1}^2 (\phi_{-,\eta}^{-1} G_- u, \psi_{-,i} u)_{\Omega_\eta^-} = I_1 + I_2$ と表わすことにする．まず I_1 について考えると，補題 4.1.4 より $I_1 \ge \delta(\phi_{-,\eta}^{-1} m_-^{-1} \phi_- u, \psi_{-,1} u)_{\Omega_\eta^-}$ が分かる．ここで Ω_η^- 上で $\phi_- \ge \eta$ などに注意すると，適当な $\delta' > 0$ を用いて

$$I_1 \ge \delta'\eta\|\psi_{-,1}^{1/2}\phi_{-,\eta}^{-1/2} u\|_{\Omega_\eta^-}^2$$

とできる．次に I_2 について考える．Ω_η^- 上で $\phi_{-,\eta} \ge \eta_0$ に注意して，命題 4.2.2 の証明と同様な議論をすることで，

$$I_2 \ge \delta'\eta\|\psi_{-,2}^{1/2}\phi_{-,\eta}^{-1/2} u\|_{\Omega_\eta^-}^2 - c_4\|\psi_{-,2}^{1/2} u\|_{\Omega_\eta^-}^2$$

が分かる．ここで $c_4 = c_4(\eta_0) > 0$ は η に無関係である．この I_i の下からの評価を組み合わせることで

$$(\phi_{-,\eta}^{-1} G_- u, u)_{\Omega_\eta^-} \ge \delta'\eta\|\phi_{-,\eta}^{-1/2} u\|_{\Omega_\eta^-}^2 - c_3\|u\|_{\Omega_\eta^-}^2$$

が従うので，主張が示される．■

よって，補題 4.2.5 と同様にして次が分かる．

補題 4.2.7. η_0 を 補題 4.2.6 のものとする．このとき，以下を満たす $\Lambda \in \mathbf{R}$ がとれる：
$f \in L^2(\Omega_\eta^-)$ 及び $\mathrm{Re}\lambda > \Lambda$ ならば，$\overline{\Omega} \cap \{\phi_{-,\eta} = 0\}$ 上で $\psi = 0$ であって $\psi \in M^*$ at $\partial\Omega$ となる任意の $\psi \in C^1(\overline{\Omega})$ に対して $((L^* + \overline{\lambda}H)\psi, u)_{\Omega_\eta^-} = (\psi, f)_{\Omega_\eta^-}$ を満たす $u \in \phi_{-,\eta}L^2(\Omega_\eta^-)$ が存在する．

これより，γ^+ の近くで 0 になる弱解の存在が分かる．

命題 4.2.8. 以下を満たす $\Lambda \in \mathbf{R}$ がとれる：$f \in L^2(\Omega)$ $(\mathrm{supp}f \cap \gamma^- = \emptyset)$ 及び $\mathrm{Re}\lambda > \Lambda$ ならば，(BVP) の弱解 $u \in L^2(\Omega)$ $(\mathrm{supp}u \cap \gamma^- = \emptyset)$ が存在する．

(証明) $\mathrm{supp}f \cap \gamma^- = \emptyset$ より $\mathrm{supp}f \subset \overline{\Omega_\eta^-}$ を満たす十分小さな $\eta > 0$ がとれる．この η に対して $u \in \phi_{-,\eta}L^2(\Omega_\eta^-)$ を 補題 4.2.7 のものとし，

$$u^0 = \begin{cases} u & (\Omega_\eta^- \text{ 上で}) \\ 0 & (\text{それ以外で}) \end{cases}$$

と表わすことにする．この u^0 が望むべき弱解であることを示そう．そのためには，$\psi \in M^*$ at $\partial\Omega$ となる任意の $\psi \in C^1(\overline{\Omega})$ に対して $((L^* + \overline{\lambda}H)\psi, u^0)_\Omega - (\psi, f)_\Omega = 0$ を示せばよい．

原点 0 の近くで $\chi \equiv 1$ となる $\chi \in C_0^\infty(\mathbf{R})$ をとると，$k > 0$ に対して

$$\begin{aligned}((L^* + \overline{\lambda}H)\psi, u^0)_\Omega - (\psi, f)_\Omega &= ((L^* + \overline{\lambda}H)\psi, u)_{\Omega_\eta^-} - (\psi, f)_{\Omega_\eta^-} \\ &= ((L^* + \overline{\lambda}H)(1 - \chi(k\phi_{-,\eta}))\psi, u)_{\Omega_\eta^-} - (\psi, f)_{\Omega_\eta^-} \\ &\quad + ((L^* + \overline{\lambda}H)\chi(k\phi_{-,\eta})\psi, u)_{\Omega_\eta^-}\end{aligned}$$

が分かる．ところで $\Psi = (1 - \chi(k\phi_{-,\eta}))\psi \in C^1(\overline{\Omega})$ は $\overline{\Omega} \cap \{\phi_{-,\eta} = 0\}$ 上で $\Psi = 0$ であって，$\Psi \in M^*$ at $\partial\Omega$ であるので，u が 補題 4.2.7 のものであることから

$$\begin{aligned}&((L^* + \overline{\lambda}H)\psi, u^0)_\Omega - (\psi, f)_\Omega \\ &= ((1 - \chi(k\phi_{-,\eta}))\psi, f)_{\Omega_\eta^-} - (\psi, f)_{\Omega_\eta^-} \\ &\quad + ((L^* + \overline{\lambda}H)\chi(k\phi_{-,\eta})\psi, u)_{\Omega_\eta^-} \\ &= -(\chi(k\phi_{-,\eta})\psi, f)_{\Omega_\eta^-} + (\chi(k\phi_{-,\eta})(L^* + \overline{\lambda}H)\psi, u)_{\Omega_\eta^-} \\ &\quad + \sum_{j=1}^{n}(\partial_j(\chi(k\phi_{-,\eta}))A_j\psi, u)_{\Omega_\eta^-} \\ &= I_1 + I_2 + I_3\end{aligned}$$

とできる．ここで Lebesgue の収束定理より $k \to \infty$ のとき $I_1, I_2 \to 0$ が分かる．また I_3 については，G_- の定義や $u = \phi_{-,\eta}w$ $(w \in L^2(\Omega_\eta^-))$ とできることに注意すると，

$$I_3 = -\sum_{j=1}^{n}(k\chi'(k\phi_{-,\eta})(\partial_j\phi)A_j\psi, u)_{\Omega_\eta^-} = -(\tilde{\chi}(k\phi_{-,\eta})G_-\psi, w)_{\Omega_\eta^-}$$

となることが分かる．但し $\tilde{\chi}(t) = t\chi'(t)$ である．したがって，再び Lebesgue の収束定理より，$k \to \infty$ のとき $I_3 \to 0$ となるので，主張が示された．■

4.3 主結果 (I) の証明

本節で, 主結果 (I) の証明を与える. まず, 命題 2.1.2 を示そう.

(命題 2.1.2 の証明) $u \in m_-L^2(\Omega)$ が $f=0$ に対する (BVP) の弱解であると仮定して $u=0$ を示せばよい. $g \in C_0^\infty(\Omega)$ とする. 命題 4.2.8 と同様にして, 次の境界値問題の弱解 $v \in L^2(\Omega)$ $(\mathrm{supp}v \cap \gamma^+ = \emptyset)$ が存在することが分かる.

$$(\mathrm{BVP}^*) \qquad \begin{cases} (L^* + \overline{\lambda}H)v = g & \text{in} \quad \Omega \\ v \in M^* & \text{at} \quad \partial\Omega. \end{cases}$$

さて, 原点 0 の近くで $\chi \equiv 1$ となる $\chi \in C_0^\infty(\mathbf{R})$ をとり, $k>0$ に対して

$$v_k = (1-\chi(km_-))v, \quad g_k = (L^* + \overline{\lambda}H)v_k = (1-\chi(km_-))g - \tilde{\chi}(km_-)A_{m_-}m_-^{-1}v$$

とおく. 但し $\tilde{\chi}(t) = t\chi'(t)$, $A_{m_-} = \sum_{j=1}^n (\partial_j m_-)A_j$ とする. また, v_k もまた g_k に対する (BVP*) の弱解になっている. このとき $\partial\Omega \cap \mathrm{supp}v_k$ 上で $\mathrm{rank}A_b(x)$ は一定なので, 命題 6.1.5 より, 各 v_k に対して, $v_{k,\epsilon} \in C^1(\overline{\Omega})$ かつ $v_{k,\epsilon} \in M^*$ at $\partial\Omega$ となる列 $\{v_{k,\epsilon}\}$ で

$$v_{k,\epsilon} \to v_k, \quad (L^* + \overline{\lambda}H)v_{k,\epsilon} \to g_k \quad \text{in} \quad L^2(\Omega) \quad (\epsilon \to 0)$$

を満たすものが存在する ([17, Theorem 4] も参照). ところで, u は $f=0$ に対する (BVP) の弱解だったので, 定義より $(u, (L^* + \overline{\lambda}H)v_{k,\epsilon})_{L^2(\Omega)} = 0$ とできるので, $\epsilon \to 0$ とすることで $(u, g_k)_{L^2(\Omega)} = 0$ が従う. ここで, 次に注意する.

$$(u, g_k)_{L^2(\Omega)} = (u, (1-\chi(km_-))g)_{L^2(\Omega)} + (w, \tilde{\chi}(km_-)A_{m_-}v)_{L^2(\Omega)}.$$

但し $w = m_-^{-1}u \in L^2(\Omega)$ である. よって Lebesgue の収束定理より, $k \to \infty$ のとき $(u, g_k)_{L^2(\Omega)} \to (u, g)_{L^2(\Omega)}$ となるので, $(u, g)_{L^2(\Omega)} = 0$ が分かる. また $C_0^\infty(\Omega)$ は $L^2(\Omega)$ で稠密なので, $u=0$ が従う. ■

この 命題 2.1.2 と 補題 4.2.5 より, 直ちに次の系が得られる.

系 4.3.1. $\tau \geq 1$ に対して, 以下を満たす $\Lambda(\tau) \in \mathbf{R}$ がとれる: $f \in L^2(\Omega)$, $\mathrm{Re}\lambda > \Lambda(\tau)$ であって $u \in L^2(\Omega)$ $(\mathrm{supp}u \cap \gamma^- = \emptyset)$ が (BVP) の弱解ならば, 評価

$$(\mathrm{Re}\lambda - \Lambda(\tau))\|\phi^{-\tau}u\|^2_{L^2(\Omega)} \leq c\|\phi^{-\tau}f\|^2_{L^2(\Omega)}$$

が成り立つ. ここで $c>0$ は τ, λ, f, u に無関係である.

次に, 定理 2.1.1 を示そう. そのために, 命題を二つ準備する.

命題 4.3.2. $q \in \mathbf{Z}_+$ に対して $s(q) > 0$ があって, $\sigma, \tau > s(q)$ のとき 以下を満たす $\Lambda(q,\sigma,\tau) \in \mathbf{R}$ がとれる: $f \in m^{-2}X^q_{(-\sigma,\tau)}(\Omega;\partial\Omega) \cap L^2(\Omega)$, $\mathrm{Re}\lambda > \Lambda(q,\sigma,\tau)$ であって $u \in L^2(\Omega)$ $(\mathrm{supp}u \cap \gamma^- = \emptyset)$ が (BVP) の弱解ならば, 実は $u \in m^{-2}X^q_{(-\sigma,\tau)}(\Omega;\partial\Omega)$ が成り立つ.

命題 4.3.3. $q \in \mathbf{Z}_+$ に対して $s(q) > 0$ があって, $\sigma, \tau > s(q)$ のとき 以下を満たす $\Lambda(q,\sigma,\tau) \in \mathbf{R}$ がとれる: $f \in C_0^\infty(\Omega)$, $\mathrm{Re}\lambda > \Lambda(q,\sigma,\tau)$ であって $u \in m^{-2}X^{q+[n/2]+2}_{(-\sigma,\tau)}(\Omega;\partial\Omega)$ $(\mathrm{supp}u \cap \gamma^- = \emptyset)$ が (BVP) の弱解ならば, 評価

$$\|u\|^2_{X^q_{(-\sigma,\tau)}(\Omega;\partial\Omega)} \leq C_1\|f\|^2_{X^q_{(-\sigma,\tau)}(\Omega;\partial\Omega)}$$

が成り立つ. ここで $C_1 = C_1(q,\sigma,\tau,\lambda) > 0$ である.

これらの 命題 4.3.2, 命題 4.3.3 が成り立つと仮定して, 定理 2.1.1 を示そう.

(定理 2.1.1 の証明) まず $f \in C_0^\infty(\Omega)$ のときについて考える. 命題 4.2.8 より, (BVP) の弱解 $u \in L^2(\Omega)$ $(\mathrm{supp}u \cap \gamma^- = \emptyset)$ が存在する. ここで 命題 4.3.2 より $u \in m^{-2}X^{q+[n/2]+2}_{(-\sigma,\tau)}(\Omega;\partial\Omega)$ が従い, また 命題 4.3.3 より

$$\|u\|^2_{X^q_{(-\sigma,\tau)}(\Omega;\partial\Omega)} \leq C_1\|f\|^2_{X^q_{(-\sigma,\tau)}(\Omega;\partial\Omega)}$$

も分かる. 更に 系 4.3.1 より

$$\|\phi^{-1}u\|^2_{L^2(\Omega)} \leq C_1\|\phi^{-1}f\|^2_{L^2(\Omega)}$$

も分かるので, これらを組み合わせることで, $f \in C_0^\infty(\Omega)$ のときには, 主張が成り立つことが分かる.

次に一般の $f \in X^{q-1}_{(-\sigma+1,\tau+1)}(\Omega;\partial\Omega) \cap \phi_- L^2(\Omega)$ のときについて考える. このときは $C_0^\infty(\Omega)$ が $X^{q-1}_{(-\sigma+1,\tau+1)}(\Omega;\partial\Omega) \cap \phi_- L^2(\Omega)$ で稠密であることを利用し, 標準的な極限議論をすることで, 主張を示すことができる. ■

上で成り立つことを仮定した 命題 4.3.2 は, 次の命題より分かる.

命題 4.3.4. $q \in \mathbf{Z}_+ (q \geq 1)$ に対して $s(q) > 0$ があって, $\sigma, \tau > s(q)$ のとき 以下を満たす $\Lambda(q,\sigma,\tau) \in \mathbf{R}$ がとれる: $f \in m^{-2}X^{q-1}_{(-\sigma+1,\tau+1)}(\Omega;\partial\Omega) \cap L^2(\Omega)$, $\mathrm{Re}\lambda > \Lambda(q,\sigma,\tau)$ であって $u \in m^{-2}X^{q-1}_{(-\sigma+1,\tau+1)}(\Omega;\partial\Omega) \cap L^2(\Omega)$ $(\mathrm{supp}u \cap \gamma^- = \emptyset)$ が (BVP) の弱解ならば, 実は $\phi_+^\sigma\phi_-^{-\tau}m^2u \in H^{q-1}(\Omega;\partial\Omega)$ であり, すべての $0 < \delta \leq 1$ に対して, 評価

$$\begin{aligned}
&(\min(\sigma,\tau) - s(q))\|\phi_+^\sigma\phi_-^{-\tau}m^2u\|^2_{H^{q-1}(\Omega;\partial\Omega),\delta} \\
&\quad \leq c_0\|\phi_+^\sigma\phi_-^{-\tau}m^2f\|^2_{H^{q-1}(\Omega;\partial\Omega),\delta} \\
&\qquad +C_1\{\|m^2f\|^2_{X^{q-1}_{(-\sigma+1,\tau+1)}(\Omega;\partial\Omega)} + \|f\|^2_{L^2(\Omega)} \\
&\qquad\qquad +\|m^2u\|^2_{X^{q-1}_{(-\sigma+1,\tau+1)}(\Omega;\partial\Omega)} + \|u\|^2_{L^2(\Omega)}\}
\end{aligned}$$

が成り立つ. ここで $c_0 = c_0(q) > 0$, $C_1 = C_1(q,\sigma,\tau,\lambda,\mathrm{supp}u) > 0$ である.

実際, この命題が成り立つことを認めて, 命題 4.3.2 を示しておこう.

(命題 4.3.2 の証明) q に関する帰納法で示す. $q = 0$ のときは明らかである. 次に $q-1$ のときまで主張が成り立つと仮定して q のときを考える. $f \in m^{-2}X^q_{(-\sigma,\tau)}(\Omega;\partial\Omega) \cap L^2(\Omega)$ とし

$u \in L^2(\Omega)$ $(\mathrm{supp}u \cap \gamma^- = \emptyset)$ が (BVP) の弱解であると仮定する. また $\sigma' = \sigma - 1$, $\tau' = \tau + 1$ とおく. このとき $f \in m^{-2}X^{q-1}_{(-\sigma',\tau')}(\Omega;\partial\Omega) \cap L^2(\Omega)$ が従うので, 帰納法の仮定より

$$m^2 u \in X^{q-1}_{(-\sigma',\tau')}(\Omega;\partial\Omega) = X^{q-1}_{(-\sigma+1,\tau+1)}(\Omega;\partial\Omega) = \bigcap_{j=0}^{q-1} \phi_+^{-\sigma+q-j}\phi_-^{\tau+q-j}H^j(\Omega;\partial\Omega)$$

が分かる. 更に 命題 4.3.4 より, 適当な $C > 0$ を用いて $\|\phi_+^{\sigma}\phi_-^{-\tau}m^2u\|_{H^{q-1}(\Omega;\partial\Omega),\delta} \leq C$ とできるので, 補題 3.2.1 より $\phi_+^{\sigma}\phi_-^{-\tau}m^2u \in H^q(\Omega;\partial\Omega)$, つまり $m^2u \in \phi_+^{-\sigma}\phi_-^{\tau}H^q(\Omega;\partial\Omega)$ が分かる. よって

$$m^2u \in \bigcap_{j=0}^{q} \phi_+^{-\sigma+q-j}\phi_-^{\tau+q-j}H^j(\Omega;\partial\Omega) = X^q_{(-\sigma,\tau)}(\Omega;\partial\Omega)$$

となるので, q のときも主張は成り立つ. ■

命題 4.3.4 で $\phi_+^{\sigma}\phi_-^{-\tau}m^2u \in H^{q-1}(\Omega;\partial\Omega)$ であることは, $u \in m^{-2}X^{q-1}_{(-\sigma+1,\tau+1)}(\Omega;\partial\Omega)$ であることから, 第 3.3 節 の議論と同様にして容易に示すことができる. よって問題は評価についてであるが, これについては 第 4.5 節 で示す. また 命題 4.3.3 の証明は, 第 4.6 節 で与えることにする.

主結果 (I) の証明を続けることにする. 定理 2.1.4 は, 定理 2.1.1 と次の命題から直ちに分かる.

命題 4.3.5. $q \in \mathbf{Z}_+$, $\sigma, \tau \in \mathbf{R}$ とし, $u \in X^q_{(\sigma,\tau)}(\Omega;\partial\Omega)$ 及び $(L+\lambda H)u \in X^q_{(\sigma,\tau)}(\Omega)$ とする. このとき, 実は $u \in m^{-q}X^q_{(\sigma,\tau)}(\Omega)$ であり, 評価

$$\|m^q u\|_{X^q_{(\sigma,\tau)}(\Omega)} \leq C\{\|u\|_{X^q_{(\sigma,\tau)}(\Omega;\partial\Omega)} + \|(L+\lambda H)u\|_{X^q_{(\sigma,\tau)}(\Omega)}\}$$

が成り立つ. ここで $C = C(q,\sigma,\tau,\lambda) > 0$ である.

この証明は 第 4.7 節 で与える.

いくつか宿題が残ったものの, 以上より 主結果 (I) が証明された.

4.4 基本となる評価

命題 4.3.4 について詳しく考察するために, 問題を局所化して考えることにする. $\{U_i\}, \{\chi_i\}, \{\psi_i\}$ を 第 3.1 節 でとった Ω の開被覆, 座標系, 一の分割とする. 以下, $u \in L^2(\Omega)$ を $f \in L^2(\Omega)$ に対する (BVP) の弱解であるとする. このとき

$$u_i = \psi_i v, \quad f_i = (L+\lambda H)u_i = \psi_i f + \sum_{j=1}^{n}(\partial_j\psi_i)A_j u$$

とおくと, u_i は f_i に対する (BVP) の弱解になっている. これより 命題 4.3.4 は, f, u の代わりに f_i, u_i に対して示せば十分であることが分かる. $U_i \cap \gamma = \emptyset$ となる近傍 U_i での g_i, v_i に対しては 命題 4.3.4 を示すのは容易である (第 6.3 節 の議論を参照). したがって, 以下では $U_i \cap \gamma \neq \emptyset$ となる近傍の f_i, u_i に対してのみ考えることにする. 簡単のために, 以下では U_i, u_i, f_i を単に U, u, f で表わすことにする.

局所座標で考えることにより, 次のように仮定してよい.

$$\begin{aligned} &r = x_1, \quad h_\pm = \pm x_2, \quad U = \{|x| < 1\}, \quad \Omega = \mathbf{R}^n_+ = \{x;\ x_1 > 0\}, \\ &\gamma^\pm = \{(0,0,x'');\ x'' \in \mathbf{R}^{n-2}\}, \quad \mathrm{supp}u \subset U^\pm_{1-\zeta_0,0}. \end{aligned} \tag{4.4.1}$$

但し $x=(x_1,x')=(x_1,x_2,x'')=(x_1,x_2,x_3,\dots,x_n)$ とし, $\zeta_0>0$ は 十分小さなものとする. また $0<R\le 1$, $0\le\eta\le 1$ に対して, $U^{\pm}_{R,\eta}$ はそれぞれ

$$U^{+}_{R,\eta}=\{x;\ |x|<R,\ x_1\ge 0\},\quad U^{-}_{R,\eta}=\{x;\ |x|<R,\ x_1\ge 0,\ x_1^2+x_2^2>\eta\}$$

を表わす. ($U^{+}_{R,\eta}$ は実際には η には無関係だが, 便利のためにこの記号を用いることにする). このとき, 滑らかな $\tilde{A}(x)$ を用いて

$$L=-A_b(x')\partial_1+\tilde{A}(x)Z_1+\sum_{j=2}^{n}A_j(x)Z_j+B(x) \tag{4.4.2}$$

とできることに注意する. 更に $U\cap\gamma^+\ne\emptyset$ のとき, 従属変数の変換により, 次のように仮定してよい (補題 4.1.2 を参照).

$$\begin{aligned} A_b(x')&=\begin{pmatrix} x_2I_p & 0\\ 0 & I_{N-p}\end{pmatrix},\\ M(x')&=\begin{cases} \mathbf{C}^N & (x_2>0\ \text{のとき})\\ \{0\}\times\mathbf{C}^{N-p} & (x_2<0\ \text{のとき}),\end{cases}\\ M^*(x')&=\begin{cases} \{0\} & (x_2>0\ \text{のとき})\\ \mathbf{C}^p\times\{0\} & (x_2<0\ \text{のとき}).\end{cases}\end{aligned} \tag{4.4.3}$$

$U\cap\gamma^-\ne\emptyset$ のときも, 同様な変換ができる.

さて, 以下この章を通して, J_ϵ を定める χ について, $\mathrm{supp}\chi\subset\{|y|<\zeta_0,\ y_1<0,\ y_2>0\}$ を仮定する. 本節の目的は, 次の評価を得ることである.

命題 4.4.1. $s_0>0$ があって, $\sigma,\tau>s_0$ のとき 以下を満たす $\Lambda(\sigma,\tau)\in\mathbf{R}$ がとれる:
$\mathrm{Re}\lambda>\Lambda(\sigma,\tau)$ であって $u\in L^2(\mathbf{R}^n_+)$ ($\mathrm{supp}u\subset U^{\pm}_{1-\zeta_0,0}$) が (BVP) の弱解ならば, $\mathrm{supp}u$ にのみ依る $\epsilon_0>0$ があって, すべての $0<\epsilon\le\epsilon_0$ に対して, 評価

$$(\min(\sigma,\tau)-s_0)\|\phi_+^\sigma\phi_-^{-\tau}J_\epsilon m^2u\|^2_{L^2(\mathbf{R}^n_+)}\le c\|m\phi_+^\sigma\phi_-^{-\tau}(L+\lambda H)J_\epsilon m^2u\|^2_{L^2(\mathbf{R}^n_+)}$$

が成り立つ. ここで $c>0$ は $\sigma,\tau,\lambda,u,\epsilon_0,\epsilon$ に無関係である.

これを示すために, 次の空間を導入する:

$$\begin{gathered} D^{\pm}_{R,\eta}(\mathbf{R}^n_+)=\{u\in L^2(\mathbf{R}^n_+);\ Lu\in L^2(\mathbf{R}^n_+),\ \mathrm{supp}u\subset U^{\pm}_{R,\eta}\},\\ \|u\|_{D(\mathbf{R}^n_+)}=\|u\|+\|(L+\lambda H)u\|.\end{gathered}$$

但し $\|\cdot\|$ は $L^2(\mathbf{R}^n_+)$ ノルムを表わす. 命題 4.4.1 は, 命題 4.2.2 と次の二つの結果から直ちに従う.

命題 4.4.2. $0<\eta\le 1$ に対して, 以下を満たす $\eta_0=\eta_0(\eta)>0$ 及び $\epsilon_0=\epsilon_0(\eta)>0$ がとれる:
$u\in D^{\pm}_{1-\zeta_0,\eta}(\mathbf{R}^n_+)$が (BVP) の弱解ならば, すべての $0<\epsilon\le\epsilon_0$ に対して,
$m^2J_\epsilon m^2u\in D^{\pm}_{1,\eta_0}(\mathbf{R}^n_+)$ であって, この $m^2J_\epsilon m^2u$ もまた (BVP) の弱解である.

命題 4.4.3. $w \in H^\infty(\mathbf{R}^n_+; \partial\mathbf{R}^n_+)$ $(\mathrm{supp} w \subset U^\pm_{1,\eta_0})$ であって, $m^2 w$ は (BVP) の弱解であるとする. このとき, $w_\epsilon \in C^\infty(\overline{\mathbf{R}^n_+} \setminus \gamma^\pm)$ かつ $\mathrm{supp} w_\epsilon \subset U^\pm_{1,\eta_0}$, $w_\epsilon \in M$ at $\partial\mathbf{R}^n_+$ であって, 更に以下を満たす列 $\{w_\epsilon\}$ がとれる: $\sigma \geq [n/2]+2$ 及び $\tau \in \mathbf{R}$ ならば, $\phi^\sigma_+\phi^\tau_- w_\epsilon \in C^1(\overline{\mathbf{R}^n_+})$ であって, 収束

$$\begin{aligned} \phi^\sigma_+\phi^\tau_- w_\epsilon &\to \phi^\sigma_+\phi^\tau_- w, \quad && \text{in} \quad L^2(\mathbf{R}^n_+), \\ \phi^\sigma_+\phi^\tau_-(L+\lambda H)w_\epsilon &\to \phi^\sigma_+\phi^\tau_-(L+\lambda H)w \quad && \text{in} \quad L^2(\mathbf{R}^n_+) \quad (\epsilon \to 0) \end{aligned}$$

が成り立つ.

まず, 命題 4.4.2 の証明から考える.

補題 4.4.4. $0 < \eta \leq 1$ に対して, 以下を満たす $\eta_0 = \eta_0(\eta) > 0$ 及び $\epsilon_0 = \epsilon_0(\eta) > 0$ がとれる: $u \in D^\pm_{1-\zeta_0,\eta}(\mathbf{R}^n_+)$ ならば, すべての $0 < \epsilon \leq \epsilon_0$ に対して, $\mathrm{supp} J_\epsilon u \subset U^\pm_{1,\eta_0}$ が成り立つ.

補題 4.4.5. $0 < \eta \leq 1$ とし, $\eta_0, \epsilon_0 > 0$ を 補題 4.4.4 のものとする. このとき すべての $0 < \epsilon \leq \epsilon_0$ に対して, 写像 $m^2 J_\epsilon m^2 : D^\pm_{1-\zeta_0,\eta}(\mathbf{R}^n_+) \to D^\pm_{1,\eta_0}(\mathbf{R}^n_+)$ は連続である.

補題 4.4.4 を示すのは難しくないので, 証明は省略する. 補題 4.4.5 の証明については, 次節で与える.

(命題 4.4.2 の証明) $u \in D^\pm_{1-\zeta_0,\eta}(\mathbf{R}^n_+)$ とする. 補題 4.4.5 より $m^2 J_\epsilon m^2 u \in D^\pm_{1,\eta_0}(\mathbf{R}^n_+)$ は明らかである. したがって, あとは $m^2 J_\epsilon m^2 u$ が弱解であることを示せばよい. これを示すために, 命題 6.1.9 を利用することにする.

$\psi \in C^1(\partial\mathbf{R}^n_+)$ を $\psi \in M^*$ at $\partial\mathbf{R}^n_+$ を満たすものとする. $\int_{\partial\mathbf{R}^n_+}\langle A_b m^2 J_\epsilon m^2 u, \psi\rangle dx' = 0$ を示そう. $D^\pm_{1,\eta_0}(\mathbf{R}^n_+) \cap C^1(\overline{\mathbf{R}^n_+})$ が $D^\pm_{1,\eta_0}(\mathbf{R}^n_+)$ で稠密であることは分かっている (第 6.2 節の議論や [5], [17] などを参照). これより $\|u_k - u\|_{D(\mathbf{R}^n_+)} \to 0$ $(k \to \infty)$ となる $\{u_k\} \subset D^\pm_{1,\eta_0}(\mathbf{R}^n_+) \cap C^1(\overline{\mathbf{R}^n_+})$ がとれる. このとき, 各 u_k に対して

(4.4.4)
$$\int_{\partial\mathbf{R}^n_+}\langle (A_b m^2 J_\epsilon m^2 u_k)(0,x'), \psi(0,x')\rangle dx' = \int_{\partial\mathbf{R}^n_+}\langle u_k(0,x'), (m^2 J_{-\epsilon} m^2 A_b \psi)(0,x')\rangle dx'$$

とできる. ところで, 再び 補題 4.4.5 より $\|m^2 J_\epsilon m^2 u_k - m^2 J_\epsilon m^2 u\|_{D(\mathbf{R}^n_+)} \to 0$ $(k \to \infty)$ が分かるので, この左辺は $k \to \infty$ のとき $\int_{\partial\mathbf{R}^n_+}\langle A_b m^2 J_\epsilon m^2 u, \psi\rangle dx'$ に収束する (境界積分の拡張の仕方より). よって $k \to \infty$ のとき, 右辺が 0 に収束することを示せばよい.

以下では $U \cap \gamma^+ \neq \emptyset$ のときを示すことにする ($U \cap \gamma^+ \neq \emptyset$ のときも同様である). さて

$$\Psi(x') = \tilde{A}(x')x_2(J_{-\epsilon} m^2 A_b \psi)(0,x') = \tilde{A}(x')x_2 \int_{\mathbf{R}^n}(x_2 - y_2)^2 (A_b\psi)(x'-y')\chi_{-\epsilon}(y)dy$$

とおく. 但し $\tilde{A}(x') = \begin{pmatrix} I_p & 0 \\ 0 & x_2 I_{N-p} \end{pmatrix}$ とする. このとき (4.4.4) の 右辺は,

$$\int_{\partial\mathbf{R}^n_+}\langle (A_b u_k)(0,x'), \Psi(x')\rangle dx'$$

と書ける．ここで Ψ について調べてみると，$\Psi \in C^\infty(\partial\mathbf{R}^n_+)$ は明らかである．また (4.4.3) より $A_b\psi \in M^*$ at $\partial\mathbf{R}^n_+$ が分かるので，$\Psi \in M^*$ at $\partial\mathbf{R}^n_+$ も従う．これより $\|u_k - u\|_{D(\mathbf{R}^n_+)} \to 0$ $(k \to \infty)$ に注意すると，境界積分の拡張の仕方より

$$\int_{\partial\mathbf{R}^n_+} \langle (A_b u_k)(0,x'), \Psi(x')\rangle dx' \to \int_{\partial\mathbf{R}^n_+} \langle A_b u, \Psi\rangle dx' \quad (k \to \infty)$$

が分かる．ところで u は (BVP) の弱解だったので，命題 6.1.9 より $\int_{\partial\mathbf{R}^n_+}\langle A_b u, \Psi\rangle dx' = 0$ となる．したがって，望んでいたことが示された．■

(命題 4.4.3 の証明) $\mathrm{supp} w_\epsilon \subset U^{\pm}_{1,\eta_0}$ となる w_ϵ を求めようとしているので，$\tau \geq [n/2]+2$ と仮定してもよいことに注意する．以下では $U \cap \gamma^+ \neq \emptyset$ のときを示すことにする ($U \cap \gamma^+ \neq \emptyset$ のときも同様である)．さて，作用素 $I_\epsilon, T_\epsilon : L^2(\mathbf{R}^n) \to L^2(\mathbf{R}^n)$ を次で定義する:

$$(I_\epsilon v)_j(x) = \begin{cases} I^I_\epsilon\, v_j(x) = \int v_j(x_1 - \epsilon x_2 y_1, x')\rho(y_1)dy_1 & (1 \leq j \leq p \text{ のとき}) \\ I^{II}_\epsilon v_j(x) = \int v_j(x_1 - \epsilon y_1, x')\rho(y_1)dy_1 & (p+1 \leq j \leq N \text{ のとき}), \end{cases}$$
$$(T_\epsilon v)_j(x) = \begin{cases} T^I_\epsilon\, v_j(x) = v_j(x_1 + \epsilon x_2, x') & (1 \leq j \leq p \text{ のとき}) \\ T^{II}_\epsilon v_j(x) = v_j(x_1 + \epsilon, x') & (p+1 \leq j \leq N \text{ のとき}). \end{cases}$$

ここで $\rho \in C^\infty_0(\mathbf{R})$ は $\mathrm{supp}\rho \subset \{|y_1| < 1\}$, $\rho(-y_1) = \rho(y_1)$, $\rho \geq 0$, $\int \rho(y_1)dy_1 = 1$ を満たすものであり，また v_j は v の第 j 成分を表わすものとする．これらを用いて $w_\epsilon = (T_\epsilon I_\epsilon w^0)|_{\mathbf{R}^n_+}$ とおく．但し w^0 は $\mathbf{R}^n_+$ 上では w, それ以外では 0 という $\mathbf{R}^n$ 上の関数を表わす．このとき $\{w_\epsilon\}$ が望むべき列であることを以下で示そう．問題となるのは，次の (i), (ii) である (それ以外を示すのは難しくない).

(i) $w_\epsilon \in C^\infty(\overline{\mathbf{R}^n_+} \setminus \gamma^\pm)$.

(ii) $\phi^\sigma_+\phi^\tau_-(L+\lambda H)w_\epsilon \to \phi^\sigma_+\phi^\tau_-(L+\lambda H)w$ in $L^2(\mathbf{R}^n_+)$ $(\epsilon \to 0)$.

簡単のために，以下では $w^I = (w_1, \ldots, w_p)$, $w^{II} = (w_{p+1}, \ldots, w_N)$ と表わすことにする．

まず (i) を示そう．$(w_\epsilon)^{II} \in C^\infty(\overline{\mathbf{R}^n_+})$ なので，$\phi^\sigma_+\phi^\tau_-(w_\epsilon)^I \in C^1(\overline{\mathbf{R}^n_+})$ を示せば十分である．さて $j \geq 3$ のときは，容易に $\partial_j(w_\epsilon)^I = T^I_\epsilon I^I_\epsilon(Z_j w^I)^0 \in L^2(\mathbf{R}^n_+)$ が分かる．また $z = (x_1 - \epsilon x_2 y_1 + \epsilon x_2, x')$ という記号を用いることで

$$\begin{aligned} x_2\partial_1(w_\epsilon)^I &= x_2 \int \partial_1(w^I)^0(z)\rho(y_1)dy_1 = -\epsilon^{-1}\int \partial_{y_1}\{(w^I)^0(z)\}\rho(y_1)dy_1 \\ &= \epsilon^{-1}\int (w^I)^0(z)(\partial_1\rho)(y_1)dy_1 \end{aligned}$$

とできる．これより $x_2\partial_1(w_\epsilon)^I \in L^2(\mathbf{R}^n_+)$ が分かる．同様にして

$$\begin{aligned} x_1\partial_1(w_\epsilon)^I &= x_1 \int \partial_1(w^I)^0(z)\rho(y_1)dy_1 \\ &= \int (Z_1 w^I)^0(z)\rho(y_1)dy_1 - \epsilon x_2 \int \partial_1(w^I)^0(z)(1-y_1)\rho(y_1)dy_1, \\ x_2\partial_2(w_\epsilon)^I &= x_2 \int (Z_2 w^I)^0(z)\rho(y_1)dy_1 + \epsilon x_2 \int \partial_1(w^I)^0(z)(1-y_1)\rho(y_1)dy_1 \end{aligned}$$

とでき，$x_2 \int \partial_1(w^I)^0(z)(1-y_1)\rho(y_1)dy_1$ は上の議論から $L^2(\mathbf{R}^n_+)$ に属することが分かるので，$x_1\partial_1(w_\epsilon)^I, x_2\partial_2(w_\epsilon)^I \in L^2(\mathbf{R}^n_+)$ が分かる．また

$$x_1\partial_2(w_\epsilon)^I = x_1 \int (Z_2 w^I)^0(z)\rho(y_1)dy_1 + \epsilon x_1 \int \partial_1(w^I)^0(z)(1-y_1)\rho(y_1)dy_1$$

であり, $x_1\int\partial_1(w^I)^0(z)(1-y_1)\rho(y_1)dy_1$ については $x_1\partial_2(w_\epsilon)^I$ と同じ議論をすることで, $x_1\partial_2(w_\epsilon)^I\in L^2(\mathbf{R}^n_+)$ も分かる. 以上のことから, $|\alpha|=1$ に対して $m\partial^\alpha(w_\epsilon)^I\in L^2(\mathbf{R}^n_+)$ であることが分かった. これと同じ議論を繰り返すことで, すべての $\alpha\in\mathbf{Z}^n_+$ に対して $m^{|\alpha|}\partial^\alpha(w_\epsilon)^I\in L^2(\mathbf{R}^n_+)$ であることも分かる. このことから, $q=[n/2]+2$ として

$$\sum_{|\alpha|\le q}\|\phi_+^{\sigma-q+|\alpha|}\phi_-^{\tau-q+|\alpha|}\partial^\alpha(w_\epsilon)^I\|\le C\sum_{|\alpha|\le q}\|m^{|\alpha|}\partial^\alpha(w_\epsilon)^I\|<\infty$$

とできるので, 補題 3.3.4 と同様にして

$$(w_\epsilon)^I\in X^q_{(-\sigma,-\tau)}(\mathbf{R}^n_+)=\bigcap_{j=0}^{q}\phi_+^{-\sigma+q-j}\phi_-^{-\tau+q-j}H^j(\mathbf{R}^n_+)$$

が従う. これより $\phi_+^\sigma\phi_-^\tau(w_\epsilon)^I\in H^q(\mathbf{R}^n_+)\hookrightarrow C^1(\overline{\mathbf{R}^n_+})$ が分かるので, (i) が示された.

次に (ii) を示そう. これを示すには $(L+\lambda H)m^2w_\epsilon\to(L+\lambda H)m^2w$ in $L^2(\mathbf{R}^n_+)$ を示せば十分である. 実際,

$$\begin{aligned}&\|\phi_+^\sigma\phi_-^\tau(L+\lambda H)w_\epsilon-\phi_+^\sigma\phi_-^\tau(L+\lambda H)w\|\\&\quad\le C\|m^2(L+\lambda H)w_\epsilon-m^2(L+\lambda H)w\|\\&\quad\le C\{\|(L+\lambda H)m^2w_\epsilon-(L+\lambda H)m^2w\|+\|[m^2,(L+\lambda H)](w_\epsilon-w)\|\}\end{aligned}$$

であるからである. さて $g=(L+\lambda H)m^2w$ とおくと,

$$\|(L+\lambda H)m^2w_\epsilon-g\|\le\|T_\epsilon I_\epsilon(L+\lambda H)m^2w^0-g^0\|+\|[(L+\lambda H)m^2,T_\epsilon I_\epsilon]w^0\|$$

とできる. この右辺について考える.

第一項については, $\mathbf{R}^n_+$ 上の超関数として $T_\epsilon I_\epsilon(L+\lambda H)m^2w^0=T_\epsilon I_\epsilon g^0$ が分かるので, $\epsilon\to0$ のとき, 第一項は 0 に収束する. では超関数として等しいことを示そう. そのためには $\psi\in C_0^\infty(\mathbf{R}^n_+)$ とするとき

$$(T_\epsilon I_\epsilon(L+\lambda H)m^2w^0,\psi)_{L^2(\mathbf{R}^n_+)}=(T_\epsilon I_\epsilon g^0,\psi)_{L^2(\mathbf{R}^n_+)}$$

を示せばよい. さて $I_\epsilon^*=I_\epsilon$, $T_\epsilon^*=T_{-\epsilon}$ に注意することで,

$$\begin{aligned}&(T_\epsilon I_\epsilon(L+\lambda H)m^2w^0,\psi)_{L^2(\mathbf{R}^n_+)}-(T_\epsilon I_\epsilon g^0,\psi)_{L^2(\mathbf{R}^n_+)}\\&\quad=(m^2w,(L^*+\overline{\lambda}H)I_\epsilon T_{-\epsilon}\psi)_{L^2(\mathbf{R}^n_+)}-(g,I_\epsilon T_{-\epsilon}\psi)_{L^2(\mathbf{R}^n_+)}\end{aligned}$$

とできる. ここで, $I_\epsilon T_{-\epsilon}\psi$ は $I_\epsilon T_{-\epsilon}\psi\in C^\infty(\mathbf{R}^n_+)$ 及び $I_\epsilon T_{-\epsilon}\psi\in M^*$ at $\partial\mathbf{R}^n_+$ を満たすことと, m^2w が (g に対する) (BVP) の弱解であることから, この右辺は 0 になることが分かるので, 超関数として等しいことが示された.

あと, $\epsilon\to0$ のとき, 第二項が 0 に収束することを示すことが残っている. ここで $(L+\lambda H)m^2=(x_1^2+x_2^2)(L+\lambda H)+2x_1A_1+2x_2A_2$ に注意すると, $\epsilon\to0$ のとき, 次の各項が 0 に収束することを示せばよい.

$$[x_2^2A_b\partial_1,T_\epsilon I_\epsilon]w^0,\quad[A,T_\epsilon I_\epsilon]w^0,\quad[AZ_j,T_\epsilon I_\epsilon]w^0,\quad[x_i^2AZ_2,T_\epsilon I_\epsilon]w^0.$$

但し $j\ne2$, $i=1,2$ であり, A は $A(x)\in\mathcal{B}^\infty(\mathbf{R}^n)$ なる関数を表わす. これらの項を評価するとき現われる項で, 扱いが微妙なものは次の項である.

$$\epsilon x_iA(x)\int\partial_1(w^I)^0(z)\rho(y_1)dy_1=I_i\quad(i=1,2).$$

まず I_2 から考える．このとき $\epsilon x_2\partial_{x_1}(w^I)^0(z) = -\partial_{y_1}\{(w^I)^0(z)\}$ 及び $\int(\partial_1\rho)(y_1)dy_1 = 0$ より，

$$I_2 = A(x)\int(w^I)^0(z)(\partial_1\rho)(y_1)dy_1 = A(x)\int\{(w^I)^0(z) - (w^I)^0(x)\}(\partial_1\rho)(y_1)dy_1$$

なので，この形から $\epsilon \to 0$ のとき $I_2 \to 0$ であることが分かる．次に I_1 について考えると，

$$I_1 = \epsilon A(x)\int(Z_1 w^I)^0(z)\rho(y_1)dy_1 + \epsilon^2 x_2 A(x)\int\partial_1(w^I)^0(z)(1-y_1)\rho(y_1)dy_1$$

とできるので，I_2 のときの議論にも注意することで，$\epsilon \to 0$ のとき $I_1 \to 0$ となることが分かる．■

4.5 命題 4.3.4 の証明

命題 4.3.4 の証明のためには，$x_i(L+\lambda H)J_\epsilon m^2u$ $(i=1,2)$ という項を扱う必要がある．そこでまず，$(x_i(L+\lambda H)J_\epsilon m^2u)^\#$ について調べよう．次の補題に注意する (証明は難しくない)．

補題 4.5.1. $u \in D^\pm_{1-\zeta_0,0}(\mathbf{R}^n_+)$ のとき すべての $0 < \epsilon \leq 1$ に対して

$$\mathrm{supp}(u^\#(x-y)\chi_\epsilon(y)) \subset \{(x,y);\ x_1 < 0,\ |x'| < 1,\ |y| < \zeta_0\}$$

が成り立つ．

$\psi \in C^\infty(\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n)$ を次を満たすものとする．

$$\psi(x,y) = \begin{cases} 1 & (\{(x,y);\ x_1 < 0,\ |x'| < 1,\ |y| < \zeta_0\} \text{ 上で}) \\ 0 & (\{(x,y);\ x_1 < 1,\ |x'| < 2,\ |y| < 2\zeta_0\} \text{ の外側で}). \end{cases}$$

補題 4.5.1 より，以下の議論に現われる $u^\#(x-y)\chi_\epsilon(y)$ の係数について，必要ならばこの ψ を掛けてもよいことに注意しておく．以下では，$a(x,y)$ でその都度異なる $\mathcal{B}^\infty(\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n)$ の元を表わすことにする．また混乱がない限り，$\|\cdot\|$ で $L^2(\mathbf{R}^n_+)$ または $L^2(\mathbf{R}^n)$ のノルムを表わす．

命題 4.5.2. $u \in D^\pm_{1-\zeta_0,0}(\mathbf{R}^n_+)$ のとき，$(x_i(L+\lambda H)J_\epsilon m^2u)^\#$ $(i=1,2)$ は，次の (i)–(x) の項の和で表わされる:

(i) $\displaystyle\int a(x,y)(m^2(L+\lambda H)u)^\#(x-y)\chi_\epsilon(y)dy,$

(ii) $\displaystyle\int a(x,y)(m^2u)^\#(x-y)\chi_\epsilon(y)dy,$

(iii) $\displaystyle\int a(x,y)(x_iu)^\#(x-y)y^\alpha\chi_\epsilon(y)dy,$

(iv) $\displaystyle\lambda\int a(x,y)(m^2u)^\#(x-y)y^\alpha\chi_\epsilon(y)dy,$

(v) $\displaystyle\epsilon^{-1}\int a(x,y)(m^2u)^\#(x-y)y^\alpha(\partial_j\chi)_\epsilon(y)dy,$

(vi) $\int a(x,y)(x_i(L+\lambda H)u)^{\#}(x-y)y^{\beta}\chi_\epsilon(y)dy,$

(vii) $\int a(x,y)u^{\#}(x-y)y^{\beta}\chi_\epsilon(y)dy,$

(viii) $\lambda\int a(x,y)(x_iu)^{\#}(x-y)y^{\beta}\chi_\epsilon(y)dy,$

(ix) $\epsilon^{-1}\int a(x,y)(x_iu)^{\#}(x-y)y^{\beta}(\partial_j\chi)_\epsilon(y)dy,$

(x) $(x_ix_{i'})^{\natural}(x)\int a(x,y)u^{\#}(x-y)\chi_\epsilon(y)dy.$

但し i,i',j,α,β はそれぞれ $i,i'=1,2,\ j=1,\dots,n,\ |\alpha|=1,\ |\beta|=2$ となるものを表わす.

(証明) 次のようにできる.

$$\begin{aligned}&(x_i(L+\lambda H)J_\epsilon m^2u)^{\#}\\ &\quad=([x_i(L+\lambda H),J_\epsilon]m^2u)^{\#}+(J_\epsilon[x_i(L+\lambda H),m^2]u)^{\#}+(J_\epsilon x_im^2(L+\lambda H)u)^{\#}.\end{aligned}$$

この右辺の各項について調べよう. 明らかに, 第三項は (i) の形で表わされる. よってまず, 第二項から考える. このとき $[x_i(L+\lambda H),m^2]=2x_ix_1A_1+2x_ix_2A_2$ より, 第二項 は $I_{i,i'}=(J_\epsilon x_ix_{i'}Au)^{\#}$ という形の項からなることが分かる. 但し $A(x)\in\mathcal{B}^\infty(\mathbf{R}^n)$ である. ここで, 次のように書けることに注意する.

$$\begin{aligned}I_{1,1}&=e^{2x_1}\int e^{-2y_1}(Au)^{\#}(x-y)\chi_\epsilon(y)dy,\\ I_{1,2}&=e^{x_1}x_2\int e^{-y_1}(Au)^{\#}(x-y)\chi_\epsilon(y)dy-\int(x_1Au)^{\#}(x-y)y_2\chi_\epsilon(y)dy,\\ I_{2,2}&=x_2^2\int(Au)^{\#}(x-y)\chi_\epsilon(y)dy-2\int(x_2Au)^{\#}(x-y)y_2\chi_\epsilon(y)dy\\ &\qquad-\int(Au)^{\#}(x-y)y_2^2\chi_\epsilon(y)dy.\end{aligned}$$

したがって $(Au)^{\#}=A^{\natural}u^{\#}$ 及び $(x_1)^{\natural}=e^{x_1}$ より, 第二項は (iii), (vii), (x) の和で表わされることが分かった.

次に, 第一項 について考える. このとき (4.4.2) を思い出すことで, 次の項を調べれば十分であることが分かる.

$$\begin{aligned}I_1&=([A,J_\epsilon]m^2u)^{\#},\quad I_2=([AZ_j,J_\epsilon]m^2u)^{\#},\\ I_3&=\lambda([A,J_\epsilon]m^2u)^{\#},\quad I_4=([x_2A_b\partial_1,J_\epsilon]m^2u)^{\#}.\end{aligned}$$

ここで, I_1,I_3 がそれぞれ (ii), (iv) で表わされることは容易に分かる. また I_2 については,

$$I_2=([AZ_j,J_\epsilon]m^2u)^{\#}=([A,J_\epsilon]Z_j(m^2u))^{\#}=A^{\natural}((Z_j(m^2u))*\chi_\epsilon)-(A^{\natural}(Z_j(m^2u))*\chi_\epsilon)$$

なので, これは次の項の和で表わされる.

$$\int a(x,y)(m^2u)^{\#}(x-y)y^{\alpha}\chi_\epsilon(y)dy,\quad\int a(x,y)\partial_{x_j}(m^2u)^{\#}(x-y)y^{\alpha}\chi_\epsilon(y)dy.$$

更に $\partial_{x_j}(m^2u)^\#(x-y)=-\partial_{y_j}(m^2u)^\#(x-y)$ を用いることで, 結局 I_2 は (ii), (v) の和で表わされることが分かった. 最後に I_4 について考えると, これは次の項の和で表わされる.

$$I_1'=\int a(x,y)(A_b\partial_1 m^2u)^\#(x-y)y^\alpha\chi_\epsilon(y)dy,\quad I_2'=\int a(x,y)(\partial_1 m^2u)^\#(x-y)y^\beta\chi_\epsilon(y)dy.$$

ここで I_1' については 再び (4.4.2) や $\partial_{x_j}(m^2u)^\#(x-y)=-\partial_{y_j}(m^2u)^\#(x-y)$ を用いることで, I_1' は (ii), (iv), (v) 及び 次の項の和で表わされることが分かる.

$$\int a(x,y)((L+\lambda H)m^2u)^\#(x-y)y^\alpha\chi_\epsilon(y)dy.$$

またこの項は (i), (iii) の和で表わすことができる.

あと I_2' についてが残っている. このとき $\partial_1 m^2u=2x_1u+x_1Z_1u+x_2^2\partial_1u$ より, I_2' は (iii) と 次の項の和で表わされる.

$$\begin{aligned}I_{2,1}'&=\int a(x,y)(x_1)^\natural(x-y)(Z_1u)^\#(x-y)y^\beta\chi(y)dy,\\ I_{2,2}'&=\int a(x,y)(x_2^2\partial_1u)^\#(x-y)y^\beta\chi(y)dy.\end{aligned}$$

ここで $I_{2,1}'$ は, 明らかに (iii), (vii), (ix) の和で表わされる. また $\tilde{A}(x')=\begin{pmatrix} I_p & 0\\ 0 & x_2I_{N-p}\end{pmatrix}$ として $x_2^2\partial_1=x_2\tilde{A}(x')A_b(x')\partial_1$ とできることに注意すると, $I_{2,2}'$ は (iii), (vi), (vii), (viii), (ix) の和で表わされることが分かる. ■

このことから, 前節で証明をやり残した 補題 4.4.5 が示される.

(補題 4.4.5 の証明) 適当な $c>0$ を用いて $\|(L+\lambda H)m^2J_\epsilon m^2u\|\le c\|u\|_{D(\mathbf{R}^n_+)}$ とできることを示せばよい. ここで, 次に注意する.

$$\|(L+\lambda H)m^2J_\epsilon m^2u\|\le\|[(L+\lambda H),m^2]J_\epsilon m^2u\|+\|m^2(L+\lambda H)J_\epsilon m^2u\|.$$

明らかに, この右辺の第一項は $c\|u\|$ で評価できる. また, 第二項 については,

$$\|m^2(L+\lambda H)J_\epsilon m^2u\|\le c\sum_{i=1}^2\|x_i(L+\lambda H)J_\epsilon m^2u\|=c\sum_{i=1}^2\|(x_i(L+\lambda H)J_\epsilon m^2u)^\#\|$$

なので, 命題 4.5.2 より $c\|u\|_{D(\mathbf{R}^n_+)}$ で評価できることが分かる. ■

さて, 命題 4.3.4 の証明を完成させよう. 次の補題に注意しておく (証明は 補題 4.4.4 より従う).

補題 4.5.3. $0<\eta\le 1$ に対して, 以下を満たす $\epsilon_0=\epsilon_0(\eta)>0$ 及び $C=C(\eta)>0$ がとれる: $u\in D^{\pm}_{1-\zeta_0,\eta}(\mathbf{R}^n_+)$ ならば, すべての $0<\epsilon\le\epsilon_0$, $0\le\theta\le 1$ 及び $(x,y)\in\mathrm{supp}(u^\#(x-y)\chi_\epsilon(y))$ に対して,

$$(\phi_+)^\natural(x-y+\theta y)\le C,\quad(\phi_-^{-1})^\natural(x-y+\theta y)\le C$$

が成り立つ.

(**命題 4.3.4** の証明) $q \in \mathbf{Z}_+$ $(q \geq 1)$ とし, $u \in m^{-2}X^{q-1}_{(-\sigma+1,\tau+1)}(\mathbf{R}^n_+; \partial\mathbf{R}^n_+) \cap D^{\pm}_{1-\zeta_0,\eta}(\mathbf{R}^n_+)$ が $f \in m^{-2}X^{q-1}_{(-\sigma+1,\tau+1)}(\mathbf{R}^n_+; \partial\mathbf{R}^n_+)$ に対する (BVP) の弱解であるとする. また $\epsilon_0 = \epsilon_0(\eta) > 0$ を補題 4.5.3 のものとし, J_ϵ を定める χ については, $\mathrm{supp}\chi \subset \{|y| < \zeta_0,\ y_1 < 0,\ y_2 > 0\}$ であることに加えて, 命題 3.2.2 の 仮定 (i), (ii) を満たすものとする. 以下, この証明の中では, c_0 で q にのみ依る定数を表わし, C_1 で $q, \sigma, \tau, \lambda, \eta$ に依る定数を表わすことにする.

命題 4.4.1 より, 次を思い出そう.

$$(\min(\sigma,\tau) - s_0)\|\phi^\sigma_+\phi^{-\tau}_- J_\epsilon m^2 u\|^2 \leq c\|m\phi^\sigma_+\phi^{-\tau}_-(L+\lambda H)J_\epsilon m^2 u\|^2.$$

また Taylor 展開より, 次のようにできる.

$$\begin{aligned}(\phi^\sigma_+\phi^{-\tau}_- J_\epsilon m^2 u)^\#(x) &= \int (\phi^\sigma_+\phi^{-\tau}_-)^\natural(x)(m^2u)^\#(x-y)\chi_\epsilon(y)dy \\ &= \sum_{|\beta|\leq q}(\beta!)^{-1}\int ((Z^\beta\phi^\sigma_+\phi^{-\tau}_-)m^2u)^\#(x-y)y^\beta\chi_\epsilon(y)dy \\ &\qquad + \sum_{|\beta|=q+1}(\beta!)^{-1}(q+1)\int \Phi_\beta(x,y)(m^2u)^\#(x-y)y^\beta\chi_\epsilon(y)dy \\ &= \sum_{|\beta|\leq q} U_\beta(x) + \sum_{|\beta|=q+1} U_\beta(x).\end{aligned}$$

但し

$$\Phi_\beta(x,y) = \int_0^1 (1-\theta)^q (Z^\beta\phi^\sigma_+\phi^{-\tau}_-)^\natural(x-y+\theta y)d\theta.$$

ここで $|\beta| = 0$ のとき

$$U_\beta(x) = \int (\phi^\sigma_+\phi^{-\tau}_- m^2u)^\#(x-y)\chi_\epsilon(y)dy = (J_\epsilon\phi^\sigma_+\phi^{-\tau}_- m^2u)^\#(x)$$

とできるので, 次が従う.

$$\begin{aligned}(\min(\sigma,\tau) - s_0)\{&\int_0^{\epsilon_0}\|J_\epsilon\phi^\sigma_+\phi^{-\tau}_- m^2u\|^2\epsilon^{-2q}(1+\delta^2/\epsilon^2)^{-1}d\epsilon/\epsilon \\ &\qquad + (1+\epsilon_0^{-2})\|\phi^\sigma_+\phi^{-\tau}_- m^2u\|^2_{H^{q-1}(\mathbf{R}^n_+;\partial\mathbf{R}^n_+),1}\} \\ &\leq c\int_0^{\epsilon_0}\|m\phi^\sigma_+\phi^{-\tau}_-(L+\lambda H)J_\epsilon m^2u\|^2\epsilon^{-2q}(1+\delta^2/\epsilon^2)^{-1}d\epsilon/\epsilon \\ &\qquad + C_1\{\sum_{1\leq|\beta|\leq q+1}\int_0^{\epsilon_0}\|U_\beta\|^2\epsilon^{-2q}(1+\delta^2/\epsilon^2)^{-1}d\epsilon/\epsilon + \|\phi^\sigma_+\phi^{-\tau}_- m^2u\|^2_{H^{q-1}(\mathbf{R}^n_+;\partial\mathbf{R}^n_+),1}\}.\end{aligned}$$

また $\phi^\sigma_+\phi^{-\tau}_- m^2u \in H^{q-1}(\mathbf{R}^n_+; \partial\mathbf{R}^n_+)$ だったので, 補題 3.2.3 より, この左辺は次で下から評価される.

$$c_0^{-1}(\min(\sigma,\tau) - s_0)\|\phi^\sigma_+\phi^{-\tau}_- m^2u\|^2_{H^{q-1}(\mathbf{R}^n_+;\partial\mathbf{R}^n_+),\delta}.$$

次に, 右辺について考えよう. まず U_β を含む項から考える. $1 \leq |\beta| \leq q$ のときは, 補題 3.2.5 と補題 3.3.4 より

$$\begin{aligned}&\int_0^{\epsilon_0}\|U_\beta\|^2\epsilon^{-2q}(1+\delta^2/\epsilon^2)^{-1}d\epsilon/\epsilon \\ &\qquad \leq c_0\|(Z^\beta\phi^\sigma_+\phi^{-\tau}_-)m^2u\|^2_{H^{q-|\beta|}(\mathbf{R}^n_+;\partial\mathbf{R}^n_+)} \leq C_1\|m^2u\|_{X^{q-1}_{(-\sigma+1,\tau+1)}(\mathbf{R}^n_+;\partial\mathbf{R}^n_+)}\end{aligned}$$

とでき, また $|\beta| = q+1$ のときは, 補題 3.2.5 と 補題 4.5.3 から

$$\int_0^{\epsilon_0} \|U_\beta\|^2 \epsilon^{-2q}(1+\delta^2/\epsilon^2)^{-1} d\epsilon/\epsilon \le C_1' \|u\|$$

とできる. 更に $\|\phi_+^\sigma \phi_-^{-\tau} m^2 u\|^2_{H^{q-1}(\mathbf{R}^n_+;\partial\mathbf{R}^n_+),1} \le C_1 \|m^2 u\|^2_{X^{q-1}_{(-\sigma+1,\tau+1)}(\mathbf{R}^n_+;\partial\mathbf{R}^n_+)}$ にも注意して, ここまでまとめることで次のようになる.

$$\begin{aligned}(\min(\sigma,\tau)-s_0)&\|\phi_+^\sigma \phi_-^{-\tau} m^2 u\|^2_{H^{q-1}(\mathbf{R}^n_+;\partial\mathbf{R}^n_+),\delta} \\ &\le c_0 \int_0^{\epsilon_0} \|m\phi_+^\sigma \phi_-^{-\tau}(L+\lambda H)J_\epsilon m^2 u\|^2 \epsilon^{-2q}(1+\delta^2/\epsilon^2)^{-1} d\epsilon/\epsilon \\ &\quad + C_1\{\|m^2 u\|^2_{X^{q-1}_{(-\sigma+1,\tau+1)}(\mathbf{R}^n_+;\partial\mathbf{R}^n_+)} + \|u\|^2\}.\end{aligned}$$

さて次に, 右辺の第一項について考える. 次のことに注意しておく.

$$\begin{aligned}&\|m\phi_+^\sigma \phi_-^{-\tau}(L+\lambda H)J_\epsilon m^2 u\|^2 \\ &\quad \le c\sum_{i=1}^2 \|x_i \phi_+^\sigma \phi_-^{-\tau}(L+\lambda H)J_\epsilon m^2 u\|^2 = c\sum_{i=1}^2 \|(\phi_+^\sigma \phi_-^{-\tau})^\natural (x_i(L+\lambda H)J_\epsilon m^2 u)^\#\|^2.\end{aligned}$$

これより, 命題 4.5.2 と 補題 3.2.5 を使って評価していけばよい. そのとき評価が難しいのは, 命題 4.5.2 の (x) の項についてである (この項以外は $(\phi_+^\sigma \phi_-^{-\tau})^\natural(x)$ を Taylor 展開し, 上と同様にして順に評価していくことは難しいことではない). よって, (x) の項の評価についてを以下で述べよう. このときは, $|x_i x_{i'}| \le cm^2$ より $|(x_i x_{i'})^\natural| \le c(m^2)^\natural$ とできることから, 次が従う.

$$\begin{aligned}&\|(\phi_+^\sigma \phi_-^{-\tau})^\natural(\cdot)(x_i x_{i'})^\natural(\cdot)\int a(\cdot,y)u^\#(\cdot - y)\chi_\epsilon(y)dy\|^2 \\ &\quad \le c\|(\phi_+^\sigma \phi_-^{-\tau} m^2)^\natural(\cdot)\int a(\cdot,y)u^\#(\cdot-y)\chi_\epsilon(y)dy\|^2.\end{aligned}$$

したがって $(\phi_+^\sigma \phi_-^{-\tau} m^2)^\natural(x)$ を Taylor 展開すれば, 上と同様にして順に評価していくことができる. 以上によって, 望むべき評価を得ることができる. ■

4.6 命題 4.3.3 の証明

まず, 次のようなアプリオリ評価を導くことから始めよう.

命題 4.6.1. $q \in \mathbf{Z}_+$ $(q \ge 1)$ に対して $s(q) > 0$ があって, $\sigma, \tau > s(q)$ のとき 以下を満たす $\Lambda(q,\sigma,\tau) \in \mathbf{R}$ がとれる: $\mathrm{Re}\lambda > \Lambda(q,\sigma,\tau)$ であって, $u \in C^{q+1}(\overline{\Omega})$ $(\mathrm{supp} u \cap \gamma^- = \emptyset)$ が (BVP) の弱解であるならば, 評価

$$\begin{aligned}(\min(\sigma,\tau)-s(q))&\|u\|^2_{X^q_{(-\sigma,\tau)}(\Omega;\partial\Omega)} \\ &\le c_0\{\|(L+\lambda H)u\|^2_{X^q_{(-s,t)}(\Omega;\partial\Omega)} + |\lambda|^2 \|u\|^2_{X^{q-1}_{(-\sigma,\tau)}(\Omega;\partial\Omega)}\}\end{aligned}$$

が成り立つ. ここで $c_0 = c_0(q) > 0$ である.

これを得るために, 基本となるのが次の命題である (証明は 命題 4.2.2 より従う).

命題 4.6.2. $s_0 > 0$ があって, $\sigma, \tau > s_0$ のとき 以下を満たす $\Lambda(\sigma,\tau) \in \mathbf{R}$ がとれる:
$\mathrm{Re}\lambda > \Lambda(\sigma,\tau)$ であって, $u \in C^1(\overline{\Omega})$ $(\mathrm{supp}u \cap \gamma^- = \emptyset)$ が $u \in M$ at $\partial\Omega$ を満たすならば, 評価

$$(\min(\sigma,\tau) - s_0)\|\phi_+^\sigma \phi_-^{-\tau} u\|^2_{L^2(\Omega)} \le c_0 \|m\phi_+^\sigma \phi_-^{-\tau}(L + \lambda H)u\|^2_{L^2(\Omega)}$$

が成り立つ. ここで $c_0 > 0$ は σ, τ, λ, u に無関係である.

さて, $\{U_i\}$, $\{\chi_i\}$, $\{\psi_i\}$ を 第 3.1 節 でとった Ω の開被覆, 座標系, 一の分割とする. ここで $u_i = \psi_i u$ とおいて, u の代わりに 各 u_i に対して 命題 4.6.1 を示せば u に対する結果も得られることが分かる. したがって, 以下では $\mathrm{supp}u \subset U_i$ となる u に対して考えることにする. 特に $U_i \cap \gamma \neq \emptyset$ のときを考えよう. 第 4.4 節 と同様な議論から (4.4.1), (4.4.3) を仮定してもよい (但し $U_i \cap \gamma^- \neq \emptyset$ のときは (4.4.3) ではなく, それに対応するものとする). また以下では, $a(x)$ でその都度異なる $\mathcal{B}^\infty(\mathbf{R}^n)$ の元を表わすことにする.

このとき, $[(L+\lambda H), Z_k]$ $(k = 1, \ldots, n)$ が, 次の和で表わされることに注意しておく.

$$a(x)Z^\beta \quad (|\beta| \le 1), \qquad a(x)\partial_1, \qquad \lambda a(x). \tag{4.6.1}$$

補題 4.6.3. $q \in \mathbf{Z}_+$ $(q \ge 1)$ とする. このとき, $x_1[(L+\lambda H), Z^\alpha]$ $(|\alpha| \le q)$ は, 次の和で表わされる:

$$a(x)Z^\beta \quad (|\beta| \le q), \qquad \lambda a(x)Z^\gamma, \quad (|\gamma| \le q-1).$$

(証明) q に関する帰納法で示す. $q = 1$ のときは (4.6.1) より明らかである. 次に q のときまで主張が成り立つと仮定して $q+1$ のときを考える. 次に注意しよう.

$$x_1[(L+\lambda H), Z_k Z^\alpha] = x_1[(L+\lambda H), Z_k]Z^\alpha + x_1 Z_k[(L+\lambda H), Z^\alpha] = I_1 + I_2.$$

ここで, 帰納法の仮定から, I_1 は望むべき和で表わすことができることが分かる. また $x_1 Z_k = Z_k x_1 + [x_1, Z_k]$ より, I_2 は次の和で表わされることが分かる.

$$Z_k x_1[(L+\lambda H), Z^\alpha], \qquad x_1[(L+\lambda H), Z^\alpha].$$

したがって, 再び帰納法の仮定から, I_2 もまた望むべき和で表わすことができるので, $q+1$ のときも主張は成り立つ. ■

補題 4.6.4. $q \in \mathbf{Z}_+$ $(q \ge 1)$ とする. このとき, $x_2^q[(L+\lambda H), Z^\alpha]$ $(|\alpha| \le q)$ は, 次の和で表わされる:

$$\begin{array}{ll} x_2^j a(x) Z^\beta & (|\beta| \le j+1 \le q), \\ \lambda x_2^l a(x) Z^\gamma, \quad x_2^l a(x) Z^\gamma (L+\lambda H) & (|\gamma| \le l \le q-1). \end{array}$$

(証明) q に関する帰納法で示す. $q = 1$ のときは, (4.6.1) や, 適当な $\tilde{A}(x) \in \mathcal{B}^\infty(\mathbf{R}^n)$ を用いて $x_2\partial_1 = \tilde{A}(x)A_b(x)\partial_1$ とできることから, 主張は明らかに成り立つ. 次に q のときまで主張が成り立つと仮定して $q+1$ のときを考える. 次に注意しよう.

$$x_2^{q+1}[(L+\lambda H), Z_k Z^\alpha] = x_2^{q+1}[(L+\lambda H), Z_k]Z^\alpha + x_2^{q+1} Z_k[(L+\lambda H), Z^\alpha] = I_1 + I_2.$$

帰納法の仮定から, I_1 は次の和で表わすことができる.

$$x_2^q a(x) Z^\beta Z^\alpha \quad (|\beta| \le 1), \qquad \lambda x_2^q a(x) Z^\alpha, \qquad x_2^q a(x)(L+\lambda H) Z^\alpha.$$

ここで

$$x_2^q (L+\lambda H) Z^\alpha = x_2^q Z^\alpha (L+\lambda H) + x_2^q [(L+\lambda H), Z^\alpha]$$

とできるので, 再び帰納法の仮定から, I_1 は望むべき和で表わすことができることが分かる. 次に I_2 について考えると, $x_2^{q+1} Z_k = Z_k x_2^{q+1} + [x_2^{q+1}, Z_k]$ なので, I_2 は次の和で表わされることが分かる.

$$Z_k x_2^{q+1} [(L+\lambda H), Z^\alpha], \qquad x_2^q [(L+\lambda H), Z^\alpha].$$

したがって, 帰納法の仮定から, I_2 もまた望むべき和で表わすことができるので, $q+1$ のときも主張は成り立つ. ■

また $m(x)^2$ が x_1, x_2 の 二次斉次多項式であることから, 補題 4.6.3 と 補題 4.6.4 より, 次の補題が得られる.

補題 4.6.5. $q \in \mathbf{Z}_+$ $(q \ge 1)$ とする. このとき, $[(L+\lambda H), Z^\alpha]$ $(|\alpha| \le q)$ は, 次の和で表わされる:

$$\begin{array}{ll} m^{-2q} x_1^i x_2^j a(x) Z^\beta & (|\beta| \le i+j-q-1 \le q), \\ \lambda m^{-2q} x_1^k x_2^l a(x) Z^\gamma & (|\gamma| \le k+l-q \le q-1), \\ m^{-2q} x_1^k x_2^l a(x) Z^\gamma (L+\lambda H) & (|\gamma| \le k+l-q \le q-1). \end{array}$$

さて, 命題 4.6.1 を示そう. それには 補題 3.3.4 より, 次を示せば十分である.

命題 4.6.6. $q \in \mathbf{Z}_+$ $(q \ge 1)$ に対して $s(q) > 0$ があって, $\sigma, \tau > s(q)$ のとき 以下を満たす $\Lambda(q, \sigma, \tau) \in \mathbf{R}$ がとれる: $\mathrm{Re}\lambda > \Lambda(q, \sigma, \tau)$ であって, $u \in C^{q+1}(\overline{\mathbf{R}_+^n}) \cap D_{1,0}^{\pm}(\mathbf{R}_+^n)$ が (BVP) の弱解であるならば, 評価

$$\begin{aligned} &(\min(\sigma,\tau) - s(q)) \sum_{|\alpha| \le q} \|\phi_+^{\sigma-q+|\alpha|} \phi_-^{-\tau-q+|\alpha|} Z^\alpha u\|^2 \\ &\quad \le c_0 \{ \sum_{|\alpha| \le q} \|\phi_+^{\sigma-q+|\alpha|} \phi_-^{-\tau-q+|\alpha|} Z^\alpha (L+\lambda H) u\|^2 + \sum_{|\alpha| \le q} \|\phi_+^{\sigma-q+|\alpha|} \phi_-^{-\tau-q+|\alpha|} Z^\alpha u\|^2 \\ &\qquad + |\lambda|^2 \sum_{|\alpha| \le q-1} \|\phi_+^{\sigma-(q-1)+|\alpha|} \phi_-^{-\tau-(q-1)+|\alpha|} Z^\alpha u\|^2 \}. \end{aligned}$$

が成り立つ. ここで $c_0 = c_0(q) > 0$ である.

(証明) 以下この証明では, c_0 でその都度異なる q にのみ依る定数を表わすことにする. これが σ, τ に無関係であることに注意しておく.

$|\alpha| = q' \le q$ とする. このとき $Z^\alpha u \in C^1(\overline{\mathbf{R}_+^n}) \cap D_{1,0}(\mathbf{R}_+^n)$ であり, $Z^\alpha u \in M$ at $\partial \mathbf{R}_+^n$ を満たすので, 命題 4.6.2 より次が分かる.

$$\begin{aligned} &(\min(\sigma,\tau) - s(q)) \|\phi_+^{\sigma-q+q'} \phi_-^{-\tau-q+q'} Z^\alpha u\|^2 \\ &\quad \le c_0 \|m \phi_+^{\sigma-q+q'} \phi_-^{-\tau-q+q'} (L+\lambda H) Z^\alpha u\|^2 \\ &\quad \le c_0 \{ \|m \phi_+^{\sigma-q+q'} \phi_-^{-\tau-q+q'} Z^\alpha (L+\lambda H) u\|^2 + \|m \phi_+^{\sigma-q+q'} \phi_-^{-\tau-q+q'} [(L+\lambda H), Z^\alpha] u\|^2 \}. \end{aligned}$$

この右辺の第二項について考える. $|\alpha|=0$ のときは, この第二項は 0 になる. $|\alpha|\geq 1$ のときは, 補題 4.6.5 より, この第二項は次の項の和で評価される.

$$\begin{aligned}
I_1 &= \|m\phi_+^{\sigma-q+q'}\phi_-^{-\tau-q+q'}m_\pm^{-2q'}x_1^i x_2^j Z^\beta u\|^2 && (|\beta|\leq i+j-q'-1\leq q'),\\
I_2 &= |\lambda|^2\|m\phi_+^{\sigma-q+q'}\phi_-^{-\tau-q+q'}m_\pm^{-2q'}x_1^k x_2^l Z^\gamma u\|^2 && (|\gamma|\leq k+l-q'\leq q'-1),\\
I_3 &= \|m\phi_+^{\sigma-q+q'}\phi_-^{-\tau-q+q'}m_\pm^{-2q'}x_1^k x_2^l Z^\gamma (L+\lambda H)u\|^2 && (|\gamma|\leq k+l-q'\leq q'-1).
\end{aligned}$$

ここで, I_1, I_2, I_3 は次のように評価できる.

$$\begin{aligned}
I_1 &\leq c_0\|\phi_+^{\sigma-q+|\beta|}\phi_-^{-\tau-q+|\beta|}Z^\beta u\|^2,\\
I_2 &\leq c_0|\lambda|^2\|\phi_+^{\sigma-(q-1)+|\gamma|}\phi_-^{-\tau-(q-1)+|\gamma|}Z^{\beta'}u\|^2,\\
I_3 &\leq c_0\|\phi_+^{\sigma-q+|\gamma|}\phi_-^{-\tau-q+|\gamma|}Z^{\beta'}(L+\lambda H)u\|^2.
\end{aligned}$$

これより, 望むべき評価が得られる. ■

したがって, 命題 4.6.1 と 命題 4.6.2 を組み合わせることで, 次の系が得られる.

系 4.6.7. $q\in\mathbf{Z}_+$ に対して $s(q)>0$ があって, $\sigma,\tau>s(q)$ のとき 以下を満たす $\Lambda(q,\sigma,\tau)\in\mathbf{R}$ がとれる: $\mathrm{Re}\lambda>\Lambda(q,\sigma,\tau)$ であって, $u\in C^{q+1}(\overline{\Omega})$ $(\mathrm{supp}u\cap\gamma^-=\emptyset)$ が (BVP) の弱解であるならば, 評価

$$\|u\|^2_{X^q_{(-\sigma,\tau)}(\Omega;\partial\Omega)}\leq C_1\|(L+\lambda H)u\|^2_{X^q_{(-s,t)}(\Omega;\partial\Omega)}$$

が成り立つ. ここで $C_1=C_1(q,\sigma,\tau,\lambda)>0$ である.

次に, いよいよ 命題 4.3.3 を証明しよう. 基本的には上の 系 4.6.7 を用いればよいのだが, $u\in m^{-2}X^{q+[n/2]+2}_{(-\sigma,\tau)}(\Omega;\partial\Omega)$ であっても, それだけでは $u\in C^{q+1}(\overline{\Omega})$ であるとは限らないので, 少し議論が必要となる.

補題 4.6.8. $q\in\mathbf{Z}_+$ $(q\geq 1)$ とする. このとき, $u\in H^q(\Omega;\partial\Omega)$ $(\mathrm{supp}u\cap\gamma=\emptyset)$ が $f\in H^{q-1}(\Omega)$ に対する (BVP) の弱解であるならば, 実は $u\in H^q(\Omega)$ である.

(証明) 以下を満たす Ω の有限開被覆 $\{U_i\}_{i=0}^{k+1}$ をとる: まず $\partial\Omega\cap\mathrm{supp}u$ を Ω の座標近傍 U_i $(i=1,\dots,k)$ であって, その座標系 χ_i が $\chi_i: U_i\cap\Omega\to\{|x|<1, x_1>0\}$ となっているもので覆う. 次に $\partial\Omega\setminus\bigcup_{i=1}^k U_i$ を $U_{k+1}\cap\mathrm{supp}u=\emptyset$ となる U_{k+1} で覆う. 最後に $\Omega\setminus\bigcup_{i=1}^{k+1}U_i$ を $U_0\subset\subset\Omega$ となる U_0 で覆う. また $\{\psi_i\}_{i=0}^{k+1}$ を $\{U_i\}_{i=0}^{k+1}$ に附随する 一の分割とする. ここで

$$u_i=\psi_i u,\quad f_i=(L+\lambda H)u_i=\psi_i f+\sum_{j=1}^n(\partial_j\psi_i)A_j u$$

とおくと, $u_0\in H^q(\mathbf{R}^n)$ 及び $u=0$ であることから, 証明のためには以下のことを示せばよい: 各 i $(i=1,\dots,k)$ について, U_i の局所座標で, 次が成り立つ.

$$Z^\alpha\partial_1^p u_i\in L^2(\mathbf{R}^n_+)\quad(|\alpha|+p\leq q).$$

これを p $(0 \leq p \leq q)$ に関する帰納法で示す. $p=0$ のときは明らかである. 次に $p-1$ のときまで主張が成り立つと仮定して p のときを考える. このとき (4.4.2) より, 次のように書けることに注意する.

$$A_b \partial_1 u_i = -f_i + \tilde{A}_1 Z_1 u_i + \sum_{j=2}^{n} A_j Z_j u_i + B u_i + \lambda H u_i.$$

ところで $U_i \cap \gamma = \emptyset$ だったので, $A_b(x')$ は U_i 上で可逆行列であるとしてよい. これより, 上式の両辺に左から $Z^\alpha \partial_1^{p-1} A_b^{-1}$ を作用させ, 更に帰納法の仮定を用いることで, p のときも主張が成り立つことが分かる. ■

補題 4.6.9. $q \in \mathbf{Z}_+$ とし, $\sigma, \tau \in \mathbf{R}$ とする. また $\chi \in C^\infty(\mathbf{R}^n)$ は, γ^+ の近くで $\chi \equiv 0$ を満たすものとする. このとき, $u \in X^q_{(\sigma,\tau)}(\Omega; \partial\Omega)$ $(\mathrm{supp} u \cap \gamma^- = \emptyset)$ が $f \in H^q(\Omega)$ に対する (BVP) の弱解であるならば, 実は $\chi u \in H^q(\Omega)$ である.

(証明) これを q に関する帰納法で示す. $q=0$ のときは明らかである. 次に $p-1$ のときまで主張が成り立つと仮定して p のときを考える. このとき, $\chi u \in H^q(\Omega; \partial\Omega)$ $(\mathrm{supp} u \cap \gamma = \emptyset)$ であって, χu もまた (BVP) の弱解であることに注意しておく. 更に帰納法の仮定から

$$(L + \lambda H)\chi u = \chi f + \sum_{j=1}^{n} (\partial_j \chi) A_j u \in H^{q-1}(\Omega)$$

が分かるので, 補題 4.6.8 より $\chi u \in H^q(\Omega)$ が従うことから, q のときにも主張は成り立つ. ■

(命題 4.3.3 の証明) 原点 0 の近くで $\chi \equiv 1$ となる $\chi \in C_0^\infty(\mathbf{R})$ をとり, $k > 0$ に対して

$$u_k = (1 - \chi(km))u, \quad f_k = (L + \lambda H)u_k = (1 - \chi(km))f - \tilde{\chi}(km) A_m m^{-1} u$$

とおく. 但し $\tilde{\chi}(t) = t\chi'(t)$, $A_m(x) = \sum_{j=1}^{n} (\partial_j m) A_j$ とする. このとき, 補題 4.6.9 より $u_k \in H^{q+[n/2]+2}(\Omega) \hookrightarrow C^{q+1}(\overline{\Omega})$ が従う. 更に u_k もまた (BVP) の弱解であるので, 系 4.6.7 より

$$\begin{aligned} &\|(1 - \chi(km))u\|^2_{X^q_{(-\sigma,\tau)}(\Omega;\partial\Omega)} \\ &\quad \leq C_1 \{ \|(1 - \chi(km))f\|^2_{X^q_{(-\sigma,\tau)}(\Omega;\partial\Omega)} + \|\tilde{\chi}(km) A_m m^{-1} u\|^2_{X^q_{(-\sigma,\tau)}(\Omega;\partial\Omega)} \} \end{aligned}$$

が分かる. ここで, 補題 3.1.2 の証明の議論と同様にして,

$$(1 - \chi(km_+))u \to u, \quad (1 - \chi(km_+))f \to f \quad \text{in} \quad X^q_{(-\sigma,\tau)}(\Omega; \partial\Omega) \quad (k \to \infty)$$

とできる. また, 補題 3.3.1 や 補題 3.3.2 より ($n \geq 2$ にも注意して)

$$m^{-1} u \in m^{-3} X^{q+[n/2]+2}_{(-\sigma,\tau)}(\Omega; \partial\Omega) \hookrightarrow X^{q+[n/2]+2}_{(-\sigma-3,\tau-3)}(\Omega; \partial\Omega) \hookrightarrow X^q_{(-\sigma,\tau)}(\Omega; \partial\Omega)$$

であるので, 同様にして

$$\|\tilde{\chi}(km) A_m m^{-1} u\|_{X^q_{(-\sigma,\tau)}(\Omega;\partial\Omega)} \to 0 \quad (k \to \infty)$$

も分かる. これより, 望むべき評価が得られる. ■

4.7 命題 4.3.5 の証明

$q \in \mathbf{Z}_+$ 及び $\sigma, \tau \in \mathbf{R}$ とし, また $u \in X^q_{(\sigma,\tau)}(\Omega;\partial\Omega)$ 及び $(L+\lambda H)u \in X^q_{(\sigma,\tau)}(\Omega)$ とする. 更に $\{U_i\}$, $\{\chi_i\}$, $\{\psi_i\}$ を 第 3.1 節 でとった Ω の開被覆, 座標系, 一の分割とする. ここで $u_i = \psi_i u$ とおく. 命題 4.3.5 を証明するには, 各 u_i に対して次を示せばよい.

$$\|m^q u_i\|_{X^q_{(\sigma,\tau)}(\Omega)} \le C\{\|u\|_{X^q_{(\sigma,\tau)}(\Omega;\partial\Omega)} + \|(L+\lambda H)u\|_{X^q_{(\sigma,\tau)}(\Omega)}\}.$$

さて $i=0$ のときは $U_0 \subset\subset \Omega$ より, $u_0 \in H^q(\mathbf{R}^n)$ となるので, 主張は明らかに成り立つ. したがって, 以下では $U_i \cap \partial\Omega \neq \emptyset$ となるものについて考える. 局所座標で考えることで, $r = x_1$, $\mathrm{supp} u_i \subset \{|x|<1, x_1 \ge 0\}$ と仮定してよい. 次が示されれば, 命題 4.3.5 は直ちに分かる.

補題 4.7.1. $U_i \cap \partial\Omega \neq \emptyset$ とする. このとき, $p \in \mathbf{Z}_+$, $\alpha \in \mathbf{Z}^n_+$ が $p + |\alpha| \le q$ を満たすならば, 評価

$$\|m^p \phi_+^{-\sigma-q+|\alpha|} \phi_-^{-\tau-q+|\alpha|} \partial_1^p Z^\alpha u_i\| \le C\{\|u\|_{X^q_{(\sigma,\tau)}(\Omega;\partial\Omega)} + \|(L+\lambda H)u\|_{X^q_{(\sigma,\tau)}(\Omega)}\}$$

が成り立つ. ここで $C = C(q,\sigma,\tau,\lambda,p,\alpha) > 0$ である.

この補題が成り立つことを認めて, まず 命題 4.3.5 の証明を行おう.

(命題 4.3.5 の証明) $|\alpha| \le q$ とする. このとき, $\tilde{\alpha} = (0, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ という記号を用いれば, 次が分かる.

$$\begin{aligned}
&\|m^p \phi_+^{-\sigma-q+|\alpha|} \phi_-^{-\tau-q+|\alpha|} \partial^\alpha u_i\| \\
&\quad \le C\|m^{\alpha_1} \phi_+^{-\sigma-q+\alpha_1+|\tilde{\alpha}|} \phi_-^{-\tau-q+\alpha_1+|\tilde{\alpha}|} \partial_1^{\alpha_1} Z^{\tilde{\alpha}} u_i\| \\
&\quad \le C'\{\|u\|_{X^q_{(\sigma,\tau)}(\Omega;\partial\Omega)} + \|(L+\lambda H)u\|_{X^q_{(\sigma,\tau)}(\Omega)}\}.
\end{aligned}$$

また, 補題 3.3.4 と同様に, 次も成り立つ.

$$\|m^q u_i\|_{X^q_{(\sigma,\tau)}(\Omega)} \le C \sum_{|\alpha|\le q} \|m^p \phi_+^{-\sigma-q+|\alpha|} \phi_-^{-\tau-q+|\alpha|} \partial^\alpha u_i\|.$$

これらのことから, 望むべき評価が得られる. ■

以下で, 補題 4.7.1 を示そう. 特に $U_i \cap \gamma \neq \emptyset$ のときを考えることにする. このとき, $h_\pm = \pm x_2$ と仮定してよい. また以下では, $a(x)$ でその都度異なる $\mathcal{B}^\infty(\mathbf{R}^n)$ の元を表わすことにする.

さて (4.4.2) より, $x_2\partial_1$ が, 次の和で表わされることに注意しておく.

$$a(x)Z^\beta \quad (|\beta| \le 1), \qquad a(x)(L+\lambda H), \qquad \lambda a(x).$$

補題 4.7.2. $p, q \in \mathbf{Z}_+$, $\alpha \in \mathbf{Z}^n_+$ が, $p \ge 1$ 及び $|\alpha| \le q$ を満たすとする. このとき, $(x_2\partial_1)^p Z^\alpha$ は, 次の和で表わされる:

$$\begin{gathered}
a(x) m^{-k} x_1^i x_2^j (x_2\partial_1)^l Z^\beta \\
(0 \le l \le p-1,\ 0 \le k \le 2(p+q),\ 0 \le k-i-j \le q,\ 0 \le |\beta| \le q-k+i+j+1), \\
a(x) m^{-k} x_1^i x_2^j (x_2\partial_1)^l Z^\gamma (L+\lambda H), \quad \lambda a(x) m^{-k} x_1^i x_2^j (x_2\partial_1)^l Z^\gamma \\
(0 \le l \le p-1,\ 0 \le k \le 2(p+q),\ 0 \le k-i-j \le q,\ 0 \le |\gamma| \le q-k+i+j).
\end{gathered}$$

(証明) まず $p=1$ のときを考える. このとき, $(x_2\partial_1)Z^\alpha$ が, 次の和で表わされることに注意しよう.

$$a(x)Z^\beta Z^\alpha \quad (|\beta|\le 1), \qquad a(x)(L+\lambda H)Z^\alpha, \qquad \lambda a(x)Z^\alpha.$$

ここで, $a(x)Z^\beta Z^\alpha$ や $\lambda a(x)Z^\alpha$ は, 望むべきもので表わされている. また, $a(x)(L+\lambda H)Z^\alpha$ については, $(L+\lambda H)Z^\alpha = Z^\alpha(L+\lambda H)+[(L+\lambda H),Z^\alpha]$ とできるので, 補題 4.6.5 より, $(L+\lambda H)Z^\alpha$ もまた望むべき和で表わされることが分かる.

次に $p\ge 2$ のときを考える. このときは, $(x_2\partial_1)^pZ^\alpha=(x_2\partial_1)^{p-1}(x_2\partial_1)Z^\alpha$ とできるので, $p=1$ に対する結果から, 主張が従う. ■

補題 4.7.3. $p,q\in\mathbf{Z}_+$, $\alpha\in\mathbf{Z}_+^n$ が, $p\ge 1$ 及び $p+|\alpha|\le q$ を満たすとする. このとき,

$$\|m^p\phi_+^{-\sigma-q+p+|\alpha|}\phi_-^{-\tau-q+p+|\alpha|}\partial_1^pZ^\alpha u_i\| \tag{4.7.1}$$

は, 次の和で評価される:

$$\begin{aligned}&I_1=(1+|\lambda|)\|m^l\phi_+^{-\sigma-q+l+|\beta|}\phi_-^{-\tau-q+l+|\beta|}\partial_1^lZ^\beta u_i\|,\\ &I_2=\|m^l\phi_+^{-\sigma-q+l+|\beta|}\phi_-^{-\tau-q+l+|\beta|}\partial_1^lZ^\beta(L+\lambda H)u_i\| \quad (0\le l\le p-1,\ l+|\beta|\le q).\end{aligned}$$

(証明) 次のようにできる.

$$\begin{aligned}&\|m^p\phi_+^{-\sigma-q+p+|\alpha|}\phi_-^{-\tau-q+p+|\alpha|}\partial_1^pZ^\alpha u_i\|\\ &\quad\le C\{\|x_1^p\phi_+^{-\sigma-q+p+|\alpha|}\phi_-^{-\tau-q+p+|\alpha|}\partial_1^pZ^\alpha u_i\|\\ &\qquad\quad+\|x_2^p\phi_+^{-\sigma-q+p+|\alpha|}\phi_-^{-\tau-q+p+|\alpha|}\partial_1^pZ^\alpha u_i\|\}\end{aligned}$$

ここで, $x_1^p\partial_1^p$ が Z_1^l $(0\le l\le p)$ の和で表わされることから, この右辺の第一項は, 次の和で評価される.

$$\|\phi_+^{-\sigma-q+(l+|\alpha|)}\phi_-^{-\tau-q+(l+|\alpha|)}Z_1^lZ^\alpha u_i\| \quad (0\le l\le p).$$

これより, 第一項は望むべき和で評価される. また 補題 4.7.2 より, 右辺の第二項も望むべき和で評価される. ■

(補題 4.7.1 の証明) p $(0\le p\le q)$ に関する帰納法で示す. $p=0$ のときは 補題 3.3.4 より明らかである. 次に $p-1$ のときまで主張が成り立つと仮定して p のときを考える. このとき (4.7.1) は, 補題 4.7.3 の I_1, I_2 の項の和で評価される. ここで I_1 については, 帰納法の仮定から, 望むべきもので評価される. また I_2 については,

$$(L+\lambda H)u_i=\psi(L+\lambda H)u+\sum_{j,k}(\partial_j\psi_i)A_ju_k$$

に注意することで, 帰納法の仮定から, これもまた望むべきもので評価されることが分かる. よって p のときも主張は成り立つ. ■

5. 場合 (II) に対する結果の証明

5.1 準備

次に, 場合 (II) における考察に移る. 次の二つの命題を示すことから始めよう.

命題 5.1.1. $\sigma \geq 0$ に対して, 以下を満たす $\Lambda(\sigma) \in \mathbf{R}$ がとれる: $f \in m^\sigma L^2(\Omega)$ 及び $\mathrm{Re}\lambda > \Lambda(\sigma)$ ならば, (BVP) の弱解 $u \in m^\sigma L^2(\Omega)$ で, 評価

$$(\mathrm{Re}\lambda - \Lambda(\sigma))\|m^{-\sigma}u\|^2_{L^2(\Omega)} \leq c\|m^{-\sigma}f\|^2_{L^2(\Omega)}$$

を満たすものが存在する. ここで $c > 0$ は σ, λ, f, u に無関係である.

命題 5.1.2. 以下を満たす $\Lambda \in \mathbf{R}$ がとれる: $f \in L^2(\Omega)$ 及び $\mathrm{Re}\lambda > \Lambda$ ならば, (BVP) の弱解 $u \in L^2(\Omega)$ は唯一つである.

さて

$$A_m(x) = \sum_{j=1}^{n}(\partial_j m)(x)A_j(x)$$

とおき, 命題 5.1.1 の証明のために, 次のような境界値問題を導入する.

$$(\mathrm{BVP}') \qquad \begin{cases} (L + \sigma m^{-1}A_m + \lambda H)v = g & \text{in} \quad \Omega \\ v \in M & \text{at} \quad \partial\Omega. \end{cases}$$

ところで (2.2.1), (2.2.3) より, $\bar{x} \in \gamma$ の近傍で A_r, A_h は, 滑らかな $A^{ij}(x)$ を用いて

$$A_r(x) = r(x)A^{11}(x) + h(x)A^{12}(x), \quad A_h(x) = r(x)A^{21}(x) + h(x)A^{22}(x) \tag{5.1.1}$$

と書けることに注意しておく. これより, $|m^{-1}A_m|$ は Ω 上で有界であることが分かるので, 次の補題が得られる (証明については 定理 6.1.4 を参照).

補題 5.1.3. $\sigma \in \mathbf{R}$ に対して, 以下を満たす $\Lambda(\sigma) \in \mathbf{R}$ がとれる: $g \in L^2(\Omega)$ 及び $\mathrm{Re}\lambda > \Lambda(\sigma)$ ならば, (BVP$'$) の弱解 $v \in L^2(\Omega)$ で, 評価

$$(\mathrm{Re}\lambda - \Lambda(\sigma))\|v\|^2_{L^2(\Omega)} \leq c\|g\|^2_{L^2(\Omega)}$$

を満たすものが存在する. ここで $c > 0$ は σ, λ, g, v に無関係である.

(命題 5.1.1 の証明) $g = m^{-\sigma}f$ とおくと, 補題 5.1.3 より $(\mathrm{Re}\lambda - \Lambda(\sigma))\|v\|^2_{L^2(\Omega)} \leq c\|g\|^2_{L^2(\Omega)}$ を満たす (BVP$'$) の弱解 $v \in L^2(\Omega)$ 存在する. ここで $u = m^\sigma v$ とおくと, この u が望むべき弱解になっている. ■

また, 補題 6.1.1 と 次の補題より, 命題 5.1.2 は直ちに従う.

補題 5.1.4. $u \in L^2(\Omega)$ を $f \in L^2(\Omega)$ に対する (BVP) の弱解とする．このとき, $u_n \in C^1(\overline{\Omega})$ かつ $u_n \in M$ at $\partial\Omega$ となる列 $\{u_n\}$ で,

$$u_n \to u, \quad (L + \lambda H)u_n \to f \quad \text{in} \quad L^2(\Omega) \quad (n \to \infty)$$

を満たすものが存在する．

(証明) 原点 0 の近くで $\chi \equiv 1$ となる $\chi \in C_0^\infty(\mathbf{R})$ をとり,

$$u_k = (1 - \chi(km))u, \quad f_k = (L + \lambda H)u_k = (1 - \chi(km))f - \tilde{\chi}(km)m^{-1}A_m u$$

とおく．但し $\tilde{\chi}(t) = t\chi'(t)$ とする．このとき, u_k は f_k に対する (BVP) の弱解になっている．また $|m^{-1}A_m|$ が有界であることから, $u_k \to u$, $f_k \to f$ in $L^2(\Omega)$ $(k \to \infty)$ も従うので, 予め $\mathrm{supp}u \cap \gamma = \emptyset$ と仮定しておいてよい．このとき, $\partial\Omega \cap \mathrm{supp}u$ 上で $\mathrm{rank}A_b(x)$ は一定なので, 命題 6.1.5 や Rauch [17, Theorem 4] と同様にして, この補題を示すことができる．■

上の 命題 5.1.1 や 命題 5.1.2 の証明と同じ議論によって, 次の二つの命題も得られる．

命題 5.1.5. $\sigma \in \mathbf{R}$ 及び $\tau \geq 0$ に対して, 以下を満たす $\Lambda(\sigma, \tau) \in \mathbf{R}$ がとれる: $g \in m^\tau L^2(\Omega)$ 及び $\mathrm{Re}\lambda > \Lambda(\sigma, \tau)$ ならば, (BVP′) の弱解 $v \in m^\tau L^2(\Omega)$ で, 評価

$$(\mathrm{Re}\lambda - \Lambda(\sigma, \tau))\|m^{-\tau}v\|^2_{L^2(\Omega)} \leq c\|m^{-\tau}g\|^2_{L^2(\Omega)}$$

を満たすものが存在する．ここで $c > 0$ は $\sigma, \tau, \lambda, g, v$ に無関係である．

命題 5.1.6. $\sigma \in \mathbf{R}$ に対して, 以下を満たす $\Lambda(\sigma) \in \mathbf{R}$ がとれる: $g \in L^2(\Omega)$ 及び $\mathrm{Re}\lambda > \Lambda(\sigma)$ のとき, (BVP′) の弱解 $v \in L^2(\Omega)$ は唯一つである．

次節で, 解の滑らかさについて議論する．そのために, 以下のような関数空間を定義しておこう．$w(x)$ を $\mathbf{R}^n_+$ で定義された関数とする．次で与えられる x_1, x_2 に関する極座標を導入する:

$$y_1 = \tan^{-1}(x_2/x_1), \quad y_2 = (x_1^2 + x_2^2)^{1/2}, \quad y_j = x_j \quad (j = 3, \ldots, n).$$

但し y_1 は $y_1 \in I = (-\pi/2, \pi/2)$ に値をとるものとする．この変数変換を $y = \phi(x)$ で表わし, $\tilde{w}(y) = (w \circ \phi^{-1})(y)$ と書くことにする．この $\tilde{w}(y)$ は, $\mathcal{R}_+ = I \times \mathbf{R}_+ \times \mathbf{R}^{n-2}$ で定義されたものであることに注意しておく．更に

$$\tilde{w}^0(y) = \begin{cases} \tilde{w}(y) & (\mathcal{R}_+ \text{ 上で}) \\ 0 & (\text{それ以外で}) \end{cases}$$

で, $\mathcal{R} = I \times \mathbf{R}^{n-1}$ 上の関数 $\tilde{w}^0(y)$ を定義する．

この記号を用いて, $q \in \mathbf{Z}_+$ に対して $Y^q(\Omega; \partial\Omega \setminus \gamma)$ を定義する．

定義. $u \in Y^q(\Omega; \partial\Omega \setminus \gamma)$ であることを次で定義する:

$$\begin{array}{lll} \widetilde{\psi_i u}^0 \in H^q(\mathcal{R}; \partial\mathcal{R}), & i = 1, \ldots, k & (U_i \text{ の局所座標で}), \\ \psi_i u \in H^q(\mathbf{R}^n_+; \partial\mathbf{R}^n_+), & i = k+1, \ldots, l & (U_i \text{ の局所座標で}), \\ \psi_0 u \in H^q(\mathbf{R}^n). & & \end{array}$$

ここで $\{U_i\}, \{\chi_i\}, \{\psi_i\}$ は 第 3.1 節 でとったものであり, $H^q(\mathcal{R}; \partial\mathcal{R})$ は q 次の $\partial\mathcal{R}$ に関する余法 Sobolev 空間を表わす.

この $Y^q(\Omega; \partial\Omega \setminus \gamma)$ に, 次のノルムを入れておく:

$$\|u\|^2_{Y^q(\Omega;\partial\Omega\setminus\gamma)} = \sum_{i=1}^{k} \|\widetilde{\psi_i u}^0\|^2_{H^q(\mathcal{R};\partial\mathcal{R})} + \sum_{i=k+1}^{l} \|\psi_i u\|^2_{H^q(\mathbf{R}^n_+;\partial\mathbf{R}^n_+)} + \|\psi_0 u\|^2_{H^q(\mathbf{R}^n)}.$$

このとき, 次の補題を示すことは難しくない.

補題 5.1.7. 空間 $Y^q(\Omega; \partial\Omega \setminus \gamma)$ を上のものとするとき, 次の主張が成り立つ.

(i) $Y^0(\Omega; \partial\Omega \setminus \gamma) = m^{1/2} L^2(\Omega)$.

(ii) $Y^q(\Omega; \partial\Omega \setminus \gamma) \hookrightarrow H^q(\Omega; \partial\Omega, \gamma)$.

5.2 解の滑らかさ

解の滑らかさを得るために重要な役割を果たすのが, 次の命題である.

命題 5.2.1. $q \in \mathbf{Z}_+$ 及び $\sigma \geq 0$ に対して, 以下を満たす $\Lambda(q, \sigma) \in \mathbf{R}$ がとれる: $g \in Y^q(\Omega; \partial\Omega \setminus \gamma)$, $\mathrm{Re}\lambda > \Lambda(q, \sigma)$ であって, $v \in L^2(\Omega)$ が (BVP$'$) の弱解ならば, 実は $v \in Y^q(\Omega; \partial\Omega \setminus \gamma)$ である.

$\{U_i\}, \{\chi_i\}, \{\psi_i\}$ を 第 3.1 節 のものとする. 命題 5.2.1 を示すために, $\|\cdot\|_{Y^q(\Omega;\partial\Omega\setminus\gamma)}$ と同値である次のようなノルムを導入する: $0 < \delta \leq 1$ に対して,

$$\|u\|^2_{Y^q(\Omega;\partial\Omega\setminus\gamma),\delta} = \sum_{i=1}^{k} \|\widetilde{\psi_i u}^0\|^2_{H^q(\mathcal{R};\partial\mathcal{R}),\delta} + \sum_{i=k+1}^{l} \|\psi_i u\|^2_{H^q(\mathbf{R}^n_+;\partial\mathbf{R}^n_+),\delta} + \|\psi_0 u\|^2_{H^q(\mathbf{R}^n),\delta}$$

とおく. ここで $\|\cdot\|_{H^q(\mathcal{R};\partial\mathcal{R}),\delta}$, $\|\cdot\|_{H^q(\mathbf{R}^n_+;\partial\mathbf{R}^n_+),\delta}$, $\|\cdot\|_{H^q(\mathbf{R}^n),\delta}$ は 第 3.2 節 で定義したものである.

上の 命題 5.2.1 は, 次の 命題 5.2.2 より分かる.

命題 5.2.2. $q \in \mathbf{Z}_+ (q \geq 1)$ 及び $\sigma \geq 0$ に対して, 以下を満たす $\Lambda(q, \sigma) \in \mathbf{R}$ がとれる: $g \in Y^{q-1}(\Omega; \partial\Omega \setminus \gamma)$, $\mathrm{Re}\lambda > \Lambda(q, \sigma)$ であって, $v \in Y^{q-1}(\Omega; \partial\Omega \setminus \gamma)$ が (BVP$'$) の弱解ならば, すべての $0 < \delta \leq 1$ に対して, 評価

$$\begin{aligned} &(\mathrm{Re}\lambda - \Lambda(q, \sigma)) \|v\|^2_{Y^{q-1}(\Omega;\partial\Omega\setminus\gamma),\delta} \\ &\quad \leq c_0 \|g\|^2_{Y^{q-1}(\Omega;\partial\Omega\setminus\gamma),\delta} + C_1 \{\|g\|^2_{Y^{q-1}(\Omega;\partial\Omega\setminus\gamma)} + \|v\|^2_{Y^{q-1}(\Omega;\partial\Omega\setminus\gamma)}\} \end{aligned}$$

が成り立つ. ここで $c_0 = c_0(q, \sigma) > 0$, $C_1 = C_1(q, \sigma, \lambda) > 0$ である.

まず, 命題 5.2.2 が成り立つことを認めて, 命題 5.2.1 を示そう.

(命題 5.2.1 の証明) q に関する帰納法で示す. $q=0$ のときは 補題 5.1.7, 命題 5.1.5, 命題 5.1.6 より明らかである. 次に $q-1$ のときまで主張が成り立つと仮定して q のときを考える. このとき, 命題 5.2.2 より, 適当な $C>0$ を用いて $\|v\|^2_{Y^{q-1}(\Omega;\partial\Omega\setminus\gamma),\delta}\le C$ とできるので, これより $v\in Y^q(\Omega;\partial\Omega\setminus\gamma)$ が従う (補題 3.2.1 も参照). よって q のときも主張は成り立つ. ■

さて, 命題 5.2.2 について考察するために, 問題を局所化して考えることにする. 以下, $g\in Y^{q-1}(\Omega;\partial\Omega\setminus\gamma)$ とし, $v\in Y^{q-1}(\Omega;\partial\Omega\setminus\gamma)$ は (BVP′) の弱解であるとする. このとき

$$v_i=\psi_i v,\quad g_i=(L+\sigma m^{-1}A_m+\lambda H)v_i=\psi_i g+\sum_{j=1}^{n}(\partial_j\psi_i)A_jv$$

とおくと, v_i は g_i に対する (BVP′) の弱解になっている. これより 命題 5.2.2 は g,v の代わりに g_i,v_i に対して示せば十分であることが分かる. $U_i\cap\gamma=\emptyset$ となる近傍 U_i での g_i,v_i に対しては, 命題 5.2.2 を示すのは容易である (第 6.3 節 の議論を参照). したがって, 以下では $U_i\cap\gamma\neq\emptyset$ となる近傍の g_i,v_i に対してのみ考えることにする. 簡単のために, 以下では U_i,v_i,g_i を単に U,v,g で表わすことにする.

局所座標で考えることにより, 次のように仮定してよい.

$$\begin{gathered}\Omega=\mathbf{R}^n_+,\quad \gamma=\{(0,0,x'');\ x''\in\mathbf{R}^{n-2}\},\\ \Gamma_\pm=\{(0,x');\ x'\in\mathbf{R}^{n-1},\ \pm x_2>0\},\quad U=\{x_1^2+x_2^2<1,\ |x''|<1\},\\ \mathrm{supp}v\subset U\cap\overline{\mathbf{R}^n_+}.\end{gathered}\tag{5.2.1}$$

但し $x=(x_1,x')=(x_1,x_2,x'')=(x_1,x_2,x_3,\dots,x_n)$ とする. また (5.1.1) より

$$A_1(x)=x_1A^{11}(x)+x_2A^{12}(x),\quad A_2(x)=x_1A^{21}(x)+x_2A^{22}(x)$$

とできることから, $A_b(x')=-x_2A^{12}(0,x')$ となることにも注意しておく. 更に (2.2.2), (2.2.4) を思い出すことで, 従属変数の変換により, 次のように仮定してよい.

$$\begin{gathered}A_b(x')=\begin{pmatrix}0&0\\0&x_2A(x')\end{pmatrix}\quad (A(x')\ \text{は適当な可逆行列}),\\ M_\pm(x')=M_\pm\quad (\Gamma_\pm\ \text{上で}).\end{gathered}\tag{5.2.2}$$

但し $M_\pm$ は x' に無関係な $\mathbf{C}^N$ の線型部分空間である.

さて, $y=\phi(x)$ により, x から y への変数変換を行う. この変換により, $U,\mathbf{R}^n_+,\Gamma_\pm$ は, それぞれ次のものに移る:

$$\widetilde{U}=I\times(0,1)\times\{|y''|<1\},\quad \widetilde{\mathbf{R}^n_+}=\mathcal{R}_+,\quad \widetilde{\Gamma}_\pm=\{\pm\pi/2\}\times\mathbf{R}_+\times\mathbf{R}^{n-2}.$$

また L は, 次のような行列 $\mathcal{A}_j$ を伴った $\tilde{L}=\sum_{j=1}^n\mathcal{A}_j(y)\partial_{y_j}+\tilde{B}(y)$ に変換される.

$$\begin{aligned}\mathcal{A}_1(y)&=\sin y_1\cos y_1(-\widetilde{A^{11}}(y)+\widetilde{A^{22}}(y))-\sin^2y_1\widetilde{A^{12}}(y)+\cos^2y_1\widetilde{A^{21}}(y),\\ \mathcal{A}_2(y)&=y_2\{\cos^2y_1\widetilde{A^{11}}(y)+\sin^2y_1\widetilde{A^{22}}(y)+\sin y_1\cos y_1(\widetilde{A^{12}}(y)+\widetilde{A^{21}}(y))\},\\ \mathcal{A}_j(y)&=\widetilde{A}_j(y)\quad (j=3,\dots,n).\end{aligned}$$

更に $\mathcal{B}(y)=(m^{-1}A_m)\circ\phi^{-1}(y)$ とおくと, $\mathcal{B}(y)=y_2^{-1}\mathcal{A}_2(y)$ と書けるので, $\mathcal{B}(y)\in C^\infty(\overline{\mathcal{R}_+})$ であることにも注意しておく. よって, 境界値問題 (BVP′) は次のように変換される.

$$\left\{\begin{aligned}(\tilde{L}+\sigma\mathcal{B}+\lambda\tilde{H})\tilde{v}&=\tilde{g}\quad\text{in}\quad\mathcal{R}_+\\ \tilde{v}&\in M_\pm\quad\text{at}\quad\widetilde{\Gamma}_\pm.\end{aligned}\right.\tag{BVP˜}$$

このとき, 境界行列 $\mathcal{A}_b(y)$ は次のようになる.

$$\mathcal{A}_b(y)=\begin{cases} \pm\mathcal{A}_1(y)=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \pm A(y') \end{pmatrix} & (y\in\tilde{\Gamma}_\pm \text{ のとき}) \\ -\mathcal{A}_2(y)=0 & (y\in I\times\{0\}\times\mathcal{R}^{n-2} \text{ のとき}). \end{cases}$$

したがって, (BVP˜) の境界空間は, 極大非負条件を満たしていることが分かる. また $\tilde{v}$, $\tilde{g}\in L^2(\mathcal{R}_+)$ であり, $\tilde{v}$ は (BVP˜) の弱解になっている.

次に, この境界値問題 (BVP˜) を以下のように拡張しよう: 改めて, $\tilde{\Gamma}_\pm$ で $\{\pm\pi/2\}\times\mathcal{R}^{n-1}$ を表わすことにする. また $\tilde{a}(y)=a(y_2\cos y_1, y_2\sin y_1, y'')$ だったので, 自然な拡張により $\mathcal{A}_j$, $\tilde{B}$, $\mathcal{B}$, $\tilde{H}\in C^\infty(\overline{\mathcal{R}})$ とみなせることに注意する. このとき, 新たな境界行列 $\mathcal{A}_b(y)$ は次のようになる.

$$\mathcal{A}_b(y)=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \pm A(y') \end{pmatrix} \quad (y\in\tilde{\Gamma}_\pm \text{ のとき}).$$

これより, 境界空間を拡張して, $y\in\tilde{\Gamma}_\pm$, $y_2>0$ では $\tilde{M}_\pm(y)=M_\pm$ となるような, 滑らかで極大非負な境界空間 $\tilde{M}_\pm(y)\,(y\in\tilde{\Gamma}_\pm)$ を見つけることができる. 更に, $y_2=0$ 上で $\mathcal{A}_2(y)=0$ だったので, 次が分かる.

$$(\tilde{L}+\sigma\mathcal{B}+\lambda\tilde{H})\tilde{v}^0=\tilde{g}^0 \quad \text{in} \quad \mathcal{R}.$$

これらのことから, $\tilde{v}^0$ が次の境界値問題の弱解になっていることが分かる.

$$(\mathrm{BVP}^{\sim 0}) \qquad \begin{cases} (\tilde{L}+\sigma\mathcal{B}+\lambda\tilde{H})\tilde{v}^0=\tilde{g}^0 & \text{in} \quad \mathcal{R} \\ \qquad\qquad \tilde{v}^0\in\tilde{M}_\pm & \text{at} \quad \tilde{\Gamma}_\pm. \end{cases}$$

したがって, 命題 6.3.3 の証明と同様な議論により, 次の補題が得られる.

補題 5.2.3. $q\in\mathbf{Z}_+(q\geq 1)$ 及び $\sigma\geq 0$ に対して 以下を満たす $\Lambda(q,\sigma)\in\mathbf{R}$ がとれる: $\tilde{g}^0\in H^{q-1}(\mathcal{R};\partial\mathcal{R})$, $\mathrm{Re}\lambda>\Lambda(q,\sigma)$ であって $\tilde{v}^0\in H^{q-1}(\mathcal{R};\partial\mathcal{R})$ が $(\mathrm{BVP}^{\sim 0})$ の弱解ならば, すべての $0<\delta\leq 1$ に対して 評価

$$\begin{aligned}&(\mathrm{Re}\lambda-\Lambda(q,\sigma))\|\tilde{v}^0\|^2_{H^{q-1}(\mathcal{R};\partial\mathcal{R}),\delta}\\ &\quad\leq c_0\|\tilde{g}^0\|^2_{H^{q-1}(\mathcal{R};\partial\mathcal{R}),\delta}+C_1\{\|\tilde{g}^0\|^2_{H^{q-1}(\mathcal{R};\partial\mathcal{R})}+\|\tilde{v}^0\|^2_{H^{q-1}(\mathcal{R};\partial\mathcal{R})}\}\end{aligned}$$

が成り立つ. ここで $c_0=c_0(q,\sigma)>0$, $C_1=C_1(q,\sigma,\lambda)>0$ である.

これより, 命題 5.2.2 が証明された.

5.3 アプリオリ評価

本節では, 解の高階微分に対する アプリオリ評価を示す.

命題 5.3.1. $q\in\mathbf{Z}_+(q\geq 1)$ 及び $\sigma\in\mathbf{R}$ に対して, 以下を満たす $\Lambda(q,\sigma)\in\mathbf{R}$ がとれる: $g\in H^q(\Omega;\partial\Omega,\gamma)$, $\mathrm{Re}\lambda>\Lambda(q,\sigma)$ であって, $v\in H^q(\Omega;\partial\Omega,\gamma)$ が (BVP') の弱解ならば, 評価

$$\begin{aligned}&(\mathrm{Re}\lambda-\Lambda(q,\sigma))\|v\|^2_{H^q(\Omega;\partial\Omega,\gamma)}\\ &\quad\leq c_0\{\|(L+\sigma m^{-1}A_m+\lambda H)v\|^2_{H^q(\Omega;\partial\Omega,\gamma)}+\|v\|^2_{H^q(\Omega;\partial\Omega,\gamma)}\}\\ &\qquad+C_1\{\|(L+\sigma m^{-1}A_m+\lambda H)v\|^2_{H^{q-1}(\Omega;\partial\Omega,\gamma)}+\|v\|^2_{H^{q-1}(\Omega;\partial\Omega,\gamma)}\}\end{aligned}$$

が成り立つ. ここで $c_0=c_0(q,\sigma)>0$, $C_1=C_1(q,\sigma,\lambda)>0$ である.

さて, 命題 5.1.6 と 補題 5.1.3 より, 次の補題は容易に得られる.

補題 5.3.2. $\sigma \geq 0$ に対して, 以下を満たす $\Lambda(\sigma) \in \mathbf{R}$ がとれる: $\mathrm{Re}\lambda > \Lambda(\sigma)$ であって, $v \in L^2(\Omega)$ が (BVP′) の弱解ならば, 評価

$$(\mathrm{Re}\lambda - \Lambda(\sigma))\|v\|^2_{L^2(\Omega)} \leq c\|(L + \sigma m^{-1}A_m + \lambda H)v\|^2_{L^2(\Omega)}$$

が成り立つ. ここで $c > 0$ は σ, λ, v に無関係である.

命題 5.3.1 は, 一の分割を用いることで, $\mathrm{supp}u \subset U_i$ となる u に対して示せば十分である. ここでも, $U_i \cap \gamma \neq \emptyset$ となる近傍に対してのみ考えることにする. 第 5.2 節 の議論により, (5.2.1), (5.2.2) を仮定してもよい. また

$$L = -A_b(x')\partial_1 + A^{11}(x)Z_1' + A^{21}(x)Z_{n+1}' + A^{22}(x)Z_2' + \sum_{j=3}^{n} A_j(x)Z_j' + B(x) \tag{5.3.1}$$

に注意しておく. 以下では, $a(x)$ でその都度異なる $\mathcal{B}^\infty(\mathbf{R}^n)$ の元を表わすことにする. 次の二つの補題を示すことは, 難しくない (実際, q に関する帰納法で証明できる).

補題 5.3.3. $q \in \mathbf{Z}_+$ $(q \geq 1)$ とする. このとき, $[a(x)Z_j', Z'^{\alpha'}]$ $(j \neq n+2,\ |\alpha'| \leq q,\ \alpha'_{n+2} = 0)$ は, 次の和で表わされる:

$$a(x)Z'^{\beta'} \quad (|\beta'| \leq q,\ \beta'_{n+2} = 0).$$

補題 5.3.4. $q \in \mathbf{Z}_+$ $(q \geq 1)$ とする. このとき, $[A_b(x')\partial_1, Z'^{\alpha'}]$ $(|\alpha'| \leq q,\ \alpha'_{n+2} = 0)$ は, 次の和で表わされる:

$$a(x)Z'^{\beta'} \quad (|\beta'| \leq q,\ \beta'_{n+2} = 0), \qquad a(x)Z'^{\gamma'}A_b(x')\partial_1 \quad (|\gamma'| \leq q-1,\ \gamma'_{n+2} = 0).$$

(命題 5.3.1 の証明) $|\alpha'| \leq q,\ \alpha'_{n+2} = 0$ とする. このとき, $Z'^{\alpha'}v$ は (BVP′) の弱解となるので, 補題 5.3.2 より

$$\begin{aligned}
&(\mathrm{Re}\lambda - \Lambda(\sigma))\|Z'^{\alpha'}v\|^2_{L^2(\mathbf{R}^n_+)} \\
&\quad \leq c\|(L + \sigma m^{-1}A_m + \lambda H)Z'^{\alpha'}v\|^2_{L^2(\mathbf{R}^n_+)} \\
&\quad \leq c'\{\|Z'^{\alpha'}(L + \sigma m^{-1}A_m + \lambda H)v\|^2_{L^2(\mathbf{R}^n_+)} + \|[(L + \sigma m^{-1}A_m + \lambda H), Z'^{\alpha'}]v\|^2_{L^2(\mathbf{R}^n_+)}\}
\end{aligned}$$

が従う. さて, 右辺の第二項について考えてみる. $|\alpha'| = 0$ のときは, この第二項は 0 になる. また $|\alpha'| \geq 1$ のときは, 補題 5.3.3 と 補題 5.3.4 を用いることで, この第二項が次の項の和で評価されることが分かる.

$$\begin{aligned}
&\|Z'^{\beta'}v\|^2_{L^2(\mathbf{R}^n_+)} && (|\beta'| \leq q,\ \beta'_{n+2} = 0), \\
&\|Z'^{\gamma'}(L + \sigma m^{-1}A_m + \lambda H)v\|^2_{L^2(\mathbf{R}^n_+)} && (|\gamma'| \leq q-1,\ \gamma'_{n+2} = 0), \\
&|\lambda|^2\|Z'^{\gamma'}v\|^2_{L^2(\mathbf{R}^n_+)} && (|\gamma'| \leq q-1,\ \gamma'_{n+2} = 0), \\
&|\sigma|^2\|Z'^{\gamma'}v\|^2_{L^2(\mathbf{R}^n_+)} && (|\gamma'| \leq q-1,\ \gamma'_{n+2} = 0).
\end{aligned}$$

したがって, 主張が示される. ■

よって, 補題 5.3.2 と 命題 5.3.1 より, 次の系が従う.

系 5.3.5. $q \in \mathbf{Z}_+$ 及び $\sigma \in \mathbf{R}$ に対して, 以下を満たす $\Lambda(q,\sigma) \in \mathbf{R}$ がとれる:
$g \in H^q(\Omega;\partial\Omega,\gamma)$, $\mathrm{Re}\lambda > \Lambda(q,\sigma)$ であって, $v \in H^q(\Omega;\partial\Omega,\gamma)$ が (BVP$'$) の弱解ならば, 評価

$$(\mathrm{Re}\lambda - \Lambda(q,\sigma))\|v\|_{H^q(\Omega;\partial\Omega,\gamma)} \leq C\|(L+\sigma m^{-1}A_m + \lambda H)v\|_{H^q(\Omega;\partial\Omega,\gamma)}$$

が成り立つ. ここで $C = C(q,\sigma,\lambda) > 0$ である.

5.4 主結果 (II) の証明

定理 2.2.1 は, 命題 5.1.2 と次の命題を組み合わせることで従う.

命題 5.4.1. $q \in \mathbf{Z}_+$ 及び $\sigma \geq 0$ に対して, 以下を満たす $\Lambda(q,\sigma) \in \mathbf{R}$ がとれる:
$g \in H^q(\Omega;\partial\Omega,\gamma)$ 及び $\mathrm{Re}\lambda > \Lambda(q,\sigma)$ のとき, (BVP) の弱解 $v \in H^q(\Omega;\partial\Omega,\gamma)$ で, 評価

$$\|m^{-\sigma}u\|_{H^q(\Omega;\partial\Omega,\gamma)} \leq C\|m^{-\sigma}f\|_{H^q(\Omega;\partial\Omega,\gamma)}$$

満たすものが存在する. ここで $C = C(q,\sigma,\lambda) > 0$ は f, u に無関係である.

(証明) まず $f \in C_0^\infty(\Omega)$ のときを考える. $g = m^{-\sigma}f$ とおくと, 補題 5.1.3 より (BVP$'$) の弱解 $v \in L^2(\Omega)$ が存在する. このとき, 命題5.2.1 と 補題5.1.7 より $v \in Y^q(\Omega;\partial\Omega\backslash\gamma) \hookrightarrow H^q(\Omega;\partial\Omega,\gamma)$ が分かるので, 系 5.3.5 を用いることで,

$$\|v\|_{H^q(\Omega;\partial\Omega,\gamma)} \leq C\|g\|_{H^q(\Omega;\partial\Omega,\gamma)}.$$

が従う. ここで $u = m^\sigma v$ とおくと, この u は望むべき弱解になっている. 次に $f \in H^q(\Omega;\partial\Omega,\gamma)$ のときを考える. このときは, 補題 3.1.1 に注意することで, 標準的な極限議論によって主張を示すことができる. ■

次に, 定理 2.2.2 の証明に移る. 以下では, γ 上で $A_{b,\gamma}(x)$ が可逆行列であることを仮定する. 定理 2.2.2 は, 定理 2.2.1 と次の補題より従う.

補題 5.4.2. $v \in H^q(\Omega;\partial\Omega,\gamma)$ 及び $g = (L+\sigma m^{-1}A_m + \lambda H)v \in H^q(\Omega;\gamma)$ とする. このとき, 実は $v \in H^q(\Omega;\gamma)$ であり, 評価

$$\|v\|_{H^q(\Omega;\gamma)} \leq C\{\|v\|_{H^q(\Omega;\partial\Omega,\gamma)} + \|g\|_{H^q(\Omega;\gamma)}\}$$

が成り立つ. ここで $C = C(q,\sigma,\lambda) > 0$ である.

これを証明しよう. $\{U_i\}, \{\chi_i\}, \{\psi_i\}$ を 第 3.1 節 のものとして, $v_i = \psi_i v$ とおく. 補題 5.4.2 の証明のためには, 各 v_i に対して, 次の評価を示せば十分である.

$$\|v_i\|_{H^q(\Omega;\gamma)} \leq C\{\|v\|_{H^q(\Omega;\partial\Omega,\gamma)} + \|g\|_{H^q(\Omega;\gamma)}\}.$$

$U_i \cap \gamma = \emptyset$ となる近傍 U_i での v_i に対しては, 上の評価を示すのは容易であるので, 以下では, $U_i \cap \gamma \neq \emptyset$ となる近傍の v_i に対してのみ考えることにする. 局所座標で考えることで (5.2.1) を仮定してよい. このとき, 上の評価は, 次の補題より直ちに従う.

補題 5.4.3. $q \in \mathbf{Z}_+$ とし, $p \in \mathbf{Z}_+$, $\alpha' \in \mathbf{Z}_+^{n+2}$ は $p + |\alpha'| \leq q$, $\alpha'_{n+2} = 0$ を満たすとする. このとき, 評価

$$\|Z'^{\alpha'} Z'^{p}_{n+2} v_i\|_{L^2(\mathbf{R}^n_+)} \leq C\{\|v\|_{H^q(\Omega;\partial\Omega,\gamma)} + \|g\|_{H^q(\Omega;\gamma)}\}$$

が成り立つ. ここで $C = C(q, \sigma, \lambda, p, \alpha') > 0$ である.

(証明) p $(0 \leq p \leq q)$ に関する帰納法で示す. $p = 0$ のときは明らかである. 次に $p-1$ のときまで主張が成り立つと仮定して p のときを考える. このとき (2.2.1) より, $A_b\partial_1 = A_{b,\gamma}Z'_{n+2}$ とできる. また $A_{b,\gamma}$ は U_i 上で可逆行列と仮定してよいので, (5.3.1) にも注意して, $\|Z'^{\alpha'} Z'^{p}_{n+2} v_i\|_{L^2(\mathbf{R}^n_+)}$ は次の項の和で評価されることが分かる.

$$I_1 = \|Z'^{\beta'} Z'^{l}_{n+2} v_i\|_{L^2(\mathbf{R}^n_+)}, \qquad I_2 = \|Z'^{\beta'} Z'^{l}_{n+2}(L + \sigma m^{-1}A_m + \lambda H)v_i\|_{L^2(\mathbf{R}^n_+)}$$
$$(0 \leq l \leq p-1,\ l + |\beta'| \leq q,\ \beta'_{n+2} = 0).$$

ここで, 帰納法の仮定から, I_1 は望むべきもので評価される. 次に I_2 について考えると, $(L + \sigma m^{-1}A_m + \lambda H)v_i = \psi_i g + \sum_{j,k}(\partial_j\psi_i)A_j u_k$ より, 帰納法の仮定から, I_2 もまた望むべきもので評価されることが分かる. よって, p のときも主張は成り立つ. ■

以上より, 主結果 (II) が証明された.

6. 附録一: よく知られた結果

6.1 解の存在, 評価, 一意性など

以下では, $\partial\Omega$ 上で $\mathrm{rank}A_b(x)$ が一定である場合についての結果をまとめておく. 考える境界値問題は同じく (BVP) であり, 境界空間は極大非負であるとする. この章を通して $\partial\Omega$ 上での $A_b(x)$ の 正の固有値, 負の固有値, 0 の固有値の数を, それぞれ p_+, p_-, p_0 $(0 \le p_+, p_-, p_0 \le N$, $p_+ + p_- + p_0 = N)$ で表わすことにする. ここで $p = p_+ + p_-$ とおくと $p = \mathrm{rank}A_b(x)$ が成り立っていることに注意しておく.

まず, 次の補題が分かる.

補題 6.1.1. 以下を満たす $\Lambda \in \mathbf{R}$ がとれる: $\mathrm{Re}\lambda > \Lambda$ であって $u \in C^1(\overline{\Omega})$ が $u \in M$ at $\partial\Omega$ を満たすならば, 評価

$$(\mathrm{Re}\lambda - \Lambda)\|u\|_{L^2(\Omega)}^2 \le c\|(L + \lambda H)u\|_{L^2(\Omega)}^2$$

が成り立つ. ここで $c > 0$ は λ, u に無関係である.

(証明) Green の公式より, 次が分かる.

$$((L + \lambda H)u, u)_{L^2(\Omega)} = (u, (L^* + \overline{\lambda}H)u)_{L^2(\Omega)} + \int_{\partial\Omega} \langle A_b u, u\rangle dS.$$

ここで $K(x) = \{(B + B^*) - \sum_{j=1}^n (\partial_j A_j)\}/2$ とおくとき, $L^* = -L + 2K$ とできることから

$$\mathrm{Re}((L + \lambda H)u, u)_{L^2(\Omega)} = \mathrm{Re}\lambda(Hu, u)_{L^2(\Omega)} + (Ku, u)_{L^2(\Omega)} + \frac{1}{2}\int_{\partial\Omega} \langle A_b u, u\rangle dS$$

が分かる. 更に, 左辺については

$$\begin{aligned}|\mathrm{Re}((L + \lambda H)u, u)_{L^2(\Omega)}| &\le \|(L + \lambda H)u\|_{L^2(\Omega)}\|u\|_{L^2(\Omega)} \\ &\le (\|(L + \lambda H)u\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|u\|_{L^2(\Omega)}^2)/2\end{aligned}$$

とでき, 右辺については $H(x)$ が正定値であることや, 境界積分が非負定値であることに注意することで, 主張が従う. ■

また, 次のことにも注意されたい (Lax-Phillips [12] を参照).

補題 6.1.2. 共役境界空間 $M^*(x)$ は, 形式的共役系 L^* に対して極大非負である.

(証明) 証明は $x \in \partial\Omega$ を固定して示せば十分である. また L^* の境界行列が $-A_b(x)$ であることにも注意しておく. 以下で $M^*(x)$ が (1.1.1), (1.1.2) に対応する条件を満たすことを示そう.

まず (1.1.2) に対応する条件を満たすことから調べよう. $M(x)$ が極大非負であることから, $\mathrm{Ker}A_b(x) \subset M(x)$ が分かる. これより $\dim A_b(x)M(x) = p_+$ となるので, $\dim M^*(x) = N - p_+$ が従う. 一方 $-A_b(x)$ の非負固有値の数は $N - p_+$ であるので, (1.1.2) に対応する条件が満たされることが分かった.

次に (1.1.1) に対応する条件について調べよう. 任意の $v \in M^*(x)$ に対して $-\langle A_b(x)v, v\rangle \geq 0$ であることを示したい. これを背理法で示す. ある $w \in M^*(x)$ に対して $\langle A_b(x)w, w\rangle > 0$ となったとする. このとき w と $M(x)$ の元で張られる空間 $M(x) \oplus w$ について考えると, この空間の任意の元 $u = v + \mu w$ ($v \in M(x)$, $\mu \in \mathbf{C}$) に対して次のようにできる.

$$\langle A_b(x)u, u\rangle = \langle A_b(x)v, v\rangle + 2\mathrm{Re}(\overline{\mu}\langle A_b(x)v, w\rangle) + |\mu|^2\langle A_b(x)w, w\rangle.$$

ここで $v \in M(x)$, $w \in M^*(x)$ だったので $\langle A_b(x)v, w\rangle = 0$ となることから, $\langle A_b(x)u, u\rangle \geq 0$ が分かる. ところで $M(x)$ は極大非負あったので, $M(x) \oplus w = M(x)$ が分かり $w \in M(x)$ が従う. よって $w \in M(x)$, $w \in M^*(x)$ より $\langle A_b(x)w, w\rangle = 0$ となるので, これは仮定したことに矛盾する. したがって (1.1.2) に対応する条件も満たされることが分かった. ■

したがって 補題 6.1.1 と同様にして, 次も分かる.

補題 6.1.3. 以下を満たす $\Lambda \in \mathbf{R}$ がとれる: $\mathrm{Re}\lambda > \Lambda$ であって $u \in C^1(\overline{\Omega})$ が $u \in M^*$ at $\partial\Omega$ を満たすならば, 評価

$$(\mathrm{Re}\lambda - \Lambda)\|u\|^2_{L^2(\Omega)} \leq c\|(L^* + \overline{\lambda}H)u\|^2_{L^2(\Omega)}$$

が成り立つ. ここで $c > 0$ は λ, u に無関係である.

これより, 解の存在についての結果が得られる (Friedrichs [6, Section 4] も参照).

定理 6.1.4. 以下を満たす $\Lambda \in \mathbf{R}$ がとれる: $f \in L^2(\Omega)$ 及び $\mathrm{Re}\lambda > \Lambda$ ならば, (BVP) の弱解 $u \in L^2(\Omega)$ で 評価

$$(\mathrm{Re}\lambda - \Lambda)\|u\|^2_{L^2(\Omega)} \leq c\|f\|^2_{L^2(\Omega)}$$

を満たすものが存在する. ここで $c > 0$ は λ, f, u に無関係である.

(証明) 次の写像について考える.

$$T : E \ni (L^* + \overline{\lambda}H)\psi \mapsto (\psi, f)_\Omega \in \mathbf{C},$$
$$E = \{(L^* + \overline{\lambda}H)\psi;\ \psi \in C^1(\overline{\Omega}) \text{ は } \psi \in M^* \text{ at } \partial\Omega \text{ を満たすもの}\}.$$

ここで 補題 4.1.2 より

$$|(\psi, f)_\Omega|^2 \leq \|\psi\|^2_{L^2(\Omega)}\|f\|^2_{L^2(\Omega)} \leq (\mathrm{Re}\lambda - \Lambda)^{-1}c\|(L^* + \overline{\lambda}H)\psi\|^2_{L^2(\Omega)}\|f\|^2_{L^2(\Omega)}$$

が分かる. よって Riesz の定理より, $\psi \in M^*$ at $\partial\Omega$ となる任意の $\psi \in C^1(\overline{\Omega})$ に対して

$$((L^* + \overline{\lambda}H)\psi, u)_{L^2(\Omega)} = (\psi, f)_{L^2(\Omega)}$$

を満たす $u \in L^2(\Omega)$ であって, 更に

$$(\mathrm{Re}\lambda - \Lambda)\|u\|^2_{L^2(\Omega)} \leq c\|f\|^2_{L^2(\Omega)}$$

を満たすものが存在する. この u が望むべき弱解である. ■

注意. これらの証明を見ても分かるが, 補題 6.1.1, 補題 6.1.2, 補題 6.1.3, 定理 6.1.4 を得るためには, $\partial\Omega$ 上で $\mathrm{rank}A_b$ が 一定であるということは 仮定しなくてもよい.

次の命題の証明は, 次節にまわす (Friedrichs [5], Lax-Phillips [12], Rauch [17], Rauch-Takayama [20] も参照).

命題 6.1.5. $u \in L^2(\Omega)$ を $f \in L^2(\Omega)$ に対する (BVP) の弱解とする. このとき $u_n \in C^1(\overline{\Omega})$ かつ $u_n \in M$ at $\partial\Omega$ となる列 $\{u_n\}$ で

$$u_n \to u, \quad (L+\lambda H)u_n \to f \quad \text{in} \quad L^2(\Omega) \quad (n \to \infty)$$

を満たすものが存在する.

この 命題 6.1.5 と 補題 6.1.1 を組み合わせることで, 解に対する L^2 評価が得られる.

定理 6.1.6. 以下を満たす $\Lambda \in \mathbf{R}$ がとれる: $f \in L^2(\Omega)$, $\mathrm{Re}\lambda > \Lambda$ であって $u \in L^2(\Omega)$ が (BVP) の弱解ならば, 評価

$$(\mathrm{Re}\lambda - \Lambda)\|u\|^2_{L^2(\Omega)} \leq c\|f\|^2_{L^2(\Omega)}$$

が成り立つ. ここで $c > 0$ は λ, u に無関係である.

また 定理 6.1.6 より, 解の一意性も従う.

定理 6.1.7. 以下を満たす $\Lambda \in \mathbf{R}$ がとれる: $f \in L^2(\Omega)$ 及び $\mathrm{Re}\lambda > \Lambda$ ならば (BVP) の弱解 $u \in L^2(\Omega)$ は 唯一つである.

最後に, 境界条件の別の解釈の仕方について述べておきたい. そのためには, 少し準備が必要である. 以下 $\lambda \in \mathbf{C}$ を一つ固定しておく. また, 次のような空間を導入する:

$$D(\Omega) = \{u \in L^2(\Omega);\ Lu \in L^2(\Omega)\}, \quad \|u\|_{D(\Omega)} = \|u\|_{L^2(\Omega)} + \|(L+\lambda H)u\|_{L^2(\Omega)}.$$

このとき $C^1(\overline{\Omega})$ は $D(\Omega)$ で稠密であることが分かる (次節の議論や上記の [5], [12], [17], [20] などを参照).

補題 6.1.8. $\psi \in C^1(\partial\Omega)$ とする. このとき, 写像

$$C^1(\overline{\Omega}) \ni u \mapsto \int_{\partial\Omega} \langle A_b(x)u(x), \psi(x)\rangle dS \in \mathbf{C}$$

は, 連続線型写像 $D(\Omega) \to \mathbf{C}$ に一意的に拡張される.

(証明) $\Psi|_{\partial\Omega} = \psi$ となる $\Psi \in C^1(\overline{\Omega})$ をとってくる．このとき $u \in C^1(\overline{\Omega})$ に対して

$$\int_{\partial\Omega} \langle A_b(x)u(x), \psi(x)\rangle dS = ((L+\lambda H)u, \Psi)_{L^2(\Omega)} - (u, (L^* + \overline{\lambda}H)\Psi)_{L^2(\Omega)}$$

なので，適当な $c > 0$ を用いて

$$\begin{aligned}&|\int_{\partial\Omega} \langle A_b(x)u(x), \psi(x)\rangle dS| \\ &\leq \|(L+\lambda H)u\|_{L^2(\Omega)}\|\Psi\|_{L^2(\Omega)} + \|u\|_{L^2(\Omega)}\|(L^* + \overline{\lambda}H)\Psi\|_{L^2(\Omega)} \\ &\leq c\|u\|_{D(\Omega)}\end{aligned}$$

とできる．これより，連続線型拡張が存在し，その拡張は一意的であることが分かる．■

補題 6.1.8 で拡張した連続線型写像を，同じ記号であるが $\int_{\partial\Omega}\langle A_b u, \psi\rangle dS$ で表わすことにする．このとき，次の命題が分かる (証明は容易である．Rauch [17] も参照)．

命題 6.1.9. $u \in D(\Omega)$ とする．このとき，次の (i), (ii) は同値である．

(i) u は (BVP) の弱解である．

(ii) $\psi \in M^*$ at $\partial\Omega$ となる任意の $\psi \in C^1(\partial\Omega)$ に対して $\int_{\partial\Omega}\langle A_b u, \psi\rangle dS = 0$ が成り立つ．

注意. この命題についても，$\partial\Omega$ 上で $\mathrm{rank}A_b$ が一定であるということは，仮定しなくてもよい．

6.2 近似列

本節で，命題 6.1.5 の証明を与えよう (以下の証明は Rauch [17] による)．証明のために，以下を満たす Ω の有限開被覆 $\{U_i\}_{i=0}^k$ をとる: まず $\partial\Omega$ を Ω の座標近傍 U_i $(i = 1, \ldots, k)$ であって，その座標系 χ_i が $\chi_i : U_i \cap \Omega \to \{|x| < 1, x_1 > 0\}$ となっているもので覆う．次に $\Omega \setminus \bigcup_{i=1}^k U_i$ を $U_0 \subset\subset \Omega$ となる U_0 で覆う．また $\{\psi_i\}_{i=0}^k$ を $\{U_i\}_{i=0}^k$ に附随する一の分割とする．

さて $u \in L^2(\Omega)$ を $f \in L^2(\Omega)$ に対する (BVP) の弱解であるとする．このとき

$$u_i = \psi_i v, \quad f_i = (L+\lambda H)u_i = \psi_i f + \sum_{j=1}^n (\partial_j \psi_i) A_j u$$

とおくと u_i は f_i に対する (BVP) の弱解になっている．これより，命題 6.1.5 は u, f の代わりに u_i, f_i に対して示せば十分である．

(命題 6.1.5 の証明) [$i = 0$ のとき] まず u_0 から考えてみることにする．$\chi \in C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$ を $\mathrm{supp}\chi \subset \{|y| < \epsilon_0\}$, $\chi \geq 0$, $\int \chi(y)dy = 1$ を満たすものとし，$0 < \epsilon \leq 1$ に対して $\chi_\epsilon = \epsilon^{-n}\chi(y/\epsilon)$ とおく．但し $\epsilon_0 = \mathrm{dist}(\mathrm{supp}\psi_0, \partial\Omega)$ とする．ここで $I_\epsilon : L^2(\mathbf{R}^n) \to L^2(\mathbf{R}^n)$ を

$$I_\epsilon v(x) = (v * \chi_\epsilon)(x) = \int_{\mathbf{R}^n} v(x-y)\chi_\epsilon(y)dy$$

で定義する．これを用いて $u_{0,\epsilon} = I_\epsilon u_0$ とおく．このとき，$\{u_{0,\epsilon}\}$ が望むべき列であることを以下で示そう．$u_{0,\epsilon} \in C_0^\infty(\Omega)$ や $u_{0,\epsilon} \to u_0$ in $L^2(\mathbf{R}^n)$ $(\epsilon \to 0)$ は明らかなので，示すべきことは $(L+\lambda H)u_{0,\epsilon} \to f_0$ in $L^2(\mathbf{R}^n)$ $(\epsilon \to 0)$ である．それには，次の補題が示されれば十分である．

補題 6.2.1. すべての $v \in L^2(\mathbf{R}^n)$ に対して $[(L+\lambda H), I_\epsilon]v \to 0$ in $L^2(\mathbf{R}^n)$ $(\epsilon \to 0)$ が成り立つ.

実際, この補題が成り立つことを認めると $(L+\lambda H)u_{0,\epsilon} = I_\epsilon f_0 + [(L+\lambda H), I_\epsilon]u_0$ であることから, 望むべきことが示される. よって 補題 6.2.1 を示そう. それには次の補題を用いる (証明は容易である).

補題 6.2.2. $v \in L^2(\mathbf{R}^n)$ のとき $[(L+\lambda H), I_\epsilon]v$ は 次の項の和で表わされる:

$$I_1 = \int a(x,y)v(x-y)y^\alpha \chi_\epsilon(y)dy, \quad I_2 = \lambda \int a(x,y)v(x-y)y^\alpha \chi_\epsilon(y)dy,$$
$$I_3 = \int a(x,y)\partial_{x_j} v(x-y)y^\alpha \chi_\epsilon(y)dy.$$

但し $a(x,y), j, \alpha$ は それぞれ $a(x,y) \in \mathcal{B}^\infty(\mathrm{R}^{2n}),\ j=1,\ldots,n,\ |\alpha|=1$ となるものを表わす.

(補題 6.2.1 の証明) I_1, I_2, I_3 を 補題 6.2.2 のものとする. 補題 6.2.1 を示すには, $\epsilon \to 0$ のとき, $I_1, I_2, I_3 \to 0$ in $L^2(\mathbf{R}^n)$ を示せばよい. さて $\chi^\alpha(y) = y^\alpha \chi(y)$ と表わすと $y^\alpha \chi_\epsilon(y) = \epsilon \chi_\epsilon^\alpha(y)$ とできることに注意する. よって I_1, I_2 については, 適当な $c>0$ を用いることで

$$\|I_1\|_{L^2(\mathbf{R}^n)} + \|I_2\|_{L^2(\mathbf{R}^n)} \le c\epsilon \|v\|_{L^2(\mathbf{R}^n)}$$

とできることから, 望むべきことが分かる. したがって, 問題は I_3 についてである. ところで $\partial_{x_j} v(x-y) = -\partial_{y_j} v(x-y)$ であるので

$$I_3 = \int \partial_{y_j}\{a(x,y)y^\alpha \chi_\epsilon(y)\}v(x-y)dy$$

とでき, また $a(x,y)y^\alpha \chi_\epsilon(y)$ は y の関数として $C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$ に属するので $\int \partial_{y_j}\{a(x,y)y^\alpha \chi_\epsilon(y)\}dy = 0$ であることから

$$I_3 = \int \partial_{y_j}\{a(x,y)y^\alpha \chi_\epsilon(y)\}\{v(x-y) - v(x)\}dy$$

とできることが分かる. よって $\epsilon \to 0$ のとき $I_3 \to 0$ in $L^2(\mathbf{R}^n)$ も分かる. ■

(命題 6.1.5 の証明の続き) $[i \neq 0$ のとき$]$ さて次に, $i \neq 0$ のときの u_i について考える. 簡単のために, 以下では U_i, u_i, f_i を単に U, u, f で表わすことにする. 局所座標で考えることにより, 次のように仮定してよい.

$$U = \{|x|<1\}, \quad \Omega = \mathbf{R}^n_+ = \{x;\ x_1 > 0\}, \quad \mathrm{supp}\, u \subset U_{1-\zeta_0}. \tag{6.2.1}$$

但し $U_R = \{x;\ |x|<R,\ x_1 \ge 0\}$ とし, $\zeta_0 > 0$ は十分小さなものとする. このとき, 滑らかな $\tilde{A}(x)$ を用いて

$$L = -A_b(x')\partial_1 + \tilde{A}(x)Z_1 + \sum_{j=2}^n A_j(x)Z_j + B(x) \tag{6.2.2}$$

とできることに注意する. 更に, 従属変数の変換により, 次のように仮定してよい.

$$A_b(x') = \begin{pmatrix} \tilde{A}_b(x') & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad M(x') = \{0\} \times \mathbf{C}^{N-p_-}. \tag{6.2.3}$$

但し $\tilde{A}_b(x')$ は滑らかな $p \times p$ 可逆行列である.

また, 次の空間を導入する:

$$D_R(\mathbf{R}^n_+) = \{u \in L^2(\mathbf{R}^n_+);\ Lu \in L^2(\mathbf{R}^n_+),\ \mathrm{supp} u \subset U_R\},$$
$$\|u\|_{D(\mathbf{R}^n_+)} = \|u\|_{L^2(\mathbf{R}^n_+)} + \|(L+\lambda H)u\|_{L^2(\mathbf{R}^n_+)}.$$

さて, 証明は二段階を踏んで行う.

(第一段) 命題 6.1.5 を示すにあたって, $u \in H^1(\mathbf{R}^n_+; \partial\mathbf{R}^n_+)$ と仮定してもよいことを示す.

(第二段) $u \in H^1(\mathbf{R}^n_+; \partial\mathbf{R}^n_+)$ として, 命題 6.1.5 の主張が成り立つことを示す.

まず (第一段) が成り立つことを認めて, 先に (第二段) を示そう. 便利のために $u = (u^I, u^{II}, u^{III})$ と表わすことにする. 但し $u^I = (u_1, \ldots, u_{p_-})$, $u^{II} = (u_{p_-+1}, \ldots, u_p)$, $u^{III} = (u_{p+1}, \ldots, u_N)$ とする. さて $u \in H^1(\mathbf{R}^n_+; \partial\mathbf{R}^n_+)$ 及び

$$A_b(x')\partial_1 u = -f + \tilde{A}(x)Z_1 u + \sum_{j=2}^{n} A_j(x)Z_j u + B(x)u + \lambda H(x)u$$

であることから, $A_b(x')$ の形より $\partial_1 u^I, \partial_1 u^{II} \in L^2(\mathbf{R}^n_+)$ となる. よって $u^I, u^{II} \in H^1(\mathbf{R}^n_+)$ が分かる. ところで $A_b(x')M^*(x') = \mathbf{C}^{p_-} \times \{0\}$ であることから, 命題 6.1.9 より $u^I|_{\partial\mathbf{R}^n_+} = 0$ が分かるので, 特に $u^I \in H^1_0(\mathbf{R}^n_+)$ となる. これより $(u^I)^0$ で $\mathbf{R}^n_+$ 上では u^I, それ以外では 0 という $\mathbf{R}^n$ 上の関数を表わすことにすると, $(u^I)^0 \in H^1(\mathbf{R}^n)$ が分かる. ここで $0 < \eta \leq \zeta_0$ に対して $u^I_\eta(x) = (u^I)^0(x_1 - \eta, x')$ として, $u_\eta = (u^I_\eta, u^{II}, u^{III})$ とおくことにする. このとき $u \in D_{1-\zeta_0}(\mathbf{R}^n_+)$ 及び $(u^I)^0 \in H^1(\mathbf{R}^n)$ より, $u_\eta \in D_1(\mathbf{R}^n_+)$ となることは容易に分かる. また 命題 6.1.9 より u_η は (BVP) の弱解であることも分かる. 更に $\eta \to 0$ のとき $\|u^I_\eta - u^I\|_{H^1(\mathbf{R}^n_+)} \to 0$ であることから, $\|u_\eta - u\|_{D(\mathbf{R}^n_+)} \to 0$ も分かる.

したがって, 予め u に対して $\mathrm{supp} u^I \subset \{x; |x| < 1, x_1 \geq \eta_0\}$ と仮定しておいてよい. 但し $\eta_0 > 0$ は 十分小さなものとする. このあとは $\chi \in C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$ を $\mathrm{supp}\chi \subset \{|y| < \eta_0,\ y_1 < 0\}$, $\chi \geq 0$, $\int \chi(y)dy = 1$ を満たすものとし, 上で議論した $[i = 0$ のとき$]$ の証明と同様にして, $0 < \epsilon \leq 1$ に対して $u_\epsilon = (I_\epsilon u^0)|_{\mathbf{R}^n_+}$ とおけば, この $\{u_\epsilon\}$ が 望むべき列であることが証明できる.

次に, 残った (第一段) を示そう. そのために J_ϵ を定める χ について $\mathrm{supp}\chi \subset \{|y| < \zeta_0,\ y_1 < 0\}$, $\chi \geq 0$, $\int \chi(y)dy = 1$ を仮定する (J_ϵ については 第 3.2 節 を参照). このとき, 次の二つの補題を示せば (第一段) が示される.

補題 6.2.3. すべての $u \in D_{1-\zeta_0}(\mathbf{R}^n_+)$ に対して $[(L+\lambda H), J_\epsilon]u \to 0$ in $L^2(\mathbf{R}^n_+)$ $(\epsilon \to 0)$ が成り立つ.

補題 6.2.4. $u \in D_{1-\zeta_0}(\mathbf{R}^n_+)$ が (BVP) の弱解ならば, すべての $0 < \epsilon \leq 1$ に対して $J_\epsilon u \in D_1(\mathbf{R}^n_+)$ であって, この $J_\epsilon u \in D_1(\mathbf{R}^n_+)$ もまた (BVP) の弱解である.

実際, この二つの補題が成り立つことを認めると, $J_\epsilon u \to u$ in $L^2(\mathbf{R}^n_+)$ $(\epsilon \to 0)$ は 明らかであり, また

$$(L+\lambda H)J_\epsilon u = f + [(L+\lambda H), J_\epsilon]u \to f \quad \text{in} \quad L^2(\mathbf{R}^n_+) \quad (\epsilon \to 0)$$

であることから, 命題 6.1.5 を示すにあたって $u \in H^1(\mathbf{R}^n_+; \partial\mathbf{R}^n_+)$ を仮定してもよいことが分かるからである.

ではまず, 補題 6.2.3 から考えよう. 証明には, 次の補題を用いる.

補題 6.2.5. $u \in D_{1-\zeta_0}(\mathbf{R}^n)$ のとき $([(L+\lambda H), I_\epsilon]u)^{\#}$ は次の項の和で表わされる:

$$I_0 = \int a(x,y)((L+\lambda H)u)^{\#}(x-y)y^\alpha \chi_\epsilon(y)dy, \quad I_1 = \int a(x,y)u^{\#}(x-y)y^\alpha \chi_\epsilon(y)dy,$$
$$I_2 = \lambda \int a(x,y)u^{\#}(x-y)y^\alpha \chi_\epsilon(y)dy, \quad I_3 = \int a(x,y)\partial_{x_j}u^{\#}(x-y)y^\alpha \chi_\epsilon(y)dy.$$

但し $a(x,y), j, \alpha$ は それぞれ $a(x,y) \in \mathcal{B}^\infty(\mathbf{R}^{2n})$, $j = 1, \dots, n$, $|\alpha| = 1$ となるものを表わす.

(証明) 主張を示すには (6.2.2) を思い出すことで, 次の項を調べれば十分であることが分かる.

$$([A, J_\epsilon]u)^{\#}, \quad ([AZ_j, J_\epsilon]u)^{\#}, \quad ([A, J_\epsilon]u)^{\#}, \quad ([A_b\partial_1, J_\epsilon]u)^{\#}.$$

ここで $([A_b\partial_1, J_\epsilon]u)^{\#}$ 以外の三つの項は, I_1, I_2, I_3 の和で表わされることは容易に分かる. よって, この最後の項について考える. ところで $(A_b)^\natural = A_b$ であることなどから, 次のようにできる.

$$\begin{aligned}
&([A_b\partial_1, J_\epsilon]u)^{\#}(x) \\
&\quad = A_b(x')\int (\partial_1 u)^{\#}(x-y)e^{-y_1}\chi_\epsilon(y)dy \\
&\qquad - \int A_b(x'-y')(\partial_1 u)^{\#}(x-y)\chi_\epsilon(y)dy \\
&\quad = \int A_b(x')(\partial_1 u)^{\#}(x-y)(e^{-y_1}-1)\chi_\epsilon(y)dy \\
&\qquad + \int (A_b(x') - A_b(x'-y'))(\partial_1 u)^{\#}(x-y)\chi_\epsilon(y)dy.
\end{aligned}$$

ここで $A_b(x')$ の形に注意することで, 結局 $([A_b\partial_1, J_\epsilon]u)^{\#}$ は 次の項の和で表わされることが分かる:

$$\int a(x,y)(A_b\partial_1 u)^{\#}(x-y)y^\alpha \chi_\epsilon(y)dy.$$

したがって, 再び (6.2.2) を用いることで, $([A_b\partial_1, J_\epsilon]u)^{\#}$ は I_0, I_1, I_2, I_3 の和で表わされることが分かる. ■

(補題 6.2.3 の証明) I_0, I_1, I_2, I_3 を 補題 6.2.5 のものとする. 補題 6.2.1 の証明と同様な議論をすることで, I_0, I_1, I_2 については, 適当な $c > 0$ を用いて

$$\|I_0\|_{L^2(\mathbf{R}^n)} + \|I_1\|_{L^2(\mathbf{R}^n)} + \|I_2\|_{L^2(\mathbf{R}^n)} \le c\epsilon \|u\|_{D(\mathbf{R}^n_+)}$$

とできることから分かり, I_3 については全く同じ議論で証明できる. ■

次に, 補題 6.2.4 の証明に移ろう. そのとき, 次の補題が成り立つことを仮定して, まず 補題 6.2.4 の証明を終わらせてかかろう (この補題の証明は 補題 6.2.4 の証明のあとで与える).

補題 6.2.6. すべての $0 < \epsilon \le 1$ に対して, 写像 $J_\epsilon : D_{1-\zeta_0}(\mathbf{R}^n_+) \to D_1(\mathbf{R}^n_+)$ は連続である.

(補題 6.2.4 の証明) $u \in D_{1-\zeta_0}(\mathbf{R}^n_+)$ とする. 補題 6.2.6 より $J_\epsilon u \in D_1(\mathbf{R}^n_+)$ は明らかである. したがって, あとは $J_\epsilon u$ が弱解であることを示せばよい. これを示すために, 命題 6.1.9 を利用する.
$\psi \in C^1(\partial\mathbf{R}^n_+)$ を $\psi \in M^*$ at $\partial\mathbf{R}^n_+$ を満たすものとして, $\int_{\partial\mathbf{R}^n_+} \langle A_b J_\epsilon u, \psi\rangle dx' = 0$ を示そう. さて $D_1(\mathbf{R}^n_+) \cap C^1(\overline{\mathbf{R}^n_+})$ は $D_1(\mathbf{R}^n_+)$ で稠密であることに注意する (上の [$i = 0$ のとき] の

証明の議論を参照. また [5], [17] なども参照). これより $\|u_k - u\|_{D(\mathbf{R}^n_+)} \to 0\ (k \to \infty)$ となる $\{u_k\} \subset D_1(\mathbf{R}^n_+) \cap C^1(\overline{\mathbf{R}^n_+})$ がとれる. このとき, 各 u_k に対して

$$(6.2.4) \qquad \int_{\partial\mathbf{R}^n_+} \langle (A_b J_\epsilon u_k)(0,x'), \psi(0,x')\rangle dx' = \int_{\partial\mathbf{R}^n_+} \langle u_k(0,x'), (J_{-\epsilon}A_b\psi)(0,x')\rangle dx'$$

とできる. ところで, 再び 補題 6.2.6 より $\|J_\epsilon u_k - J_\epsilon u\|_{D(\mathbf{R}^n_+)} \to 0\ (k \to \infty)$ が分かるので, この左辺は $k \to \infty$ のとき $\int_{\partial\mathbf{R}^n_+} \langle A_b J_\epsilon u, \psi\rangle dx'$ に収束する (境界積分の拡張の仕方より). よって $k \to \infty$ のとき 右辺が 0 に収束することを示せばよい. ここで

$$\Psi(x') = A(x')(J_{-\epsilon}A_b\psi)(0,x') = A(x')\int_{\mathbf{R}^n} (A_b\psi)(x'-y')\chi_{-\epsilon}(y)dy$$

とおく. 但し $A(x') = \begin{pmatrix} \widetilde{A}_b(x')^{-1} & 0 \\ 0 & I_{N-p} \end{pmatrix}$ とする. このとき (6.2.4) の 右辺は

$$\int_{\partial\mathbf{R}^n_+} \langle (A_b u_k)(0,x'), \Psi(x')\rangle dx'$$

と書ける. さて, この Ψ について調べてみると, $\Psi \in C^\infty(\partial\mathbf{R}^n_+)$ は明らかである. また $A_b(x')M^*(x') = \mathbf{C}^{p-} \times \{0\}$ であることから, 各 $x' \in \mathbf{R}^{n-1}$ に対して

$$\Psi(x') \in A(x')M(x')^\perp = A(x')A_b(x')M^*(x') = \begin{pmatrix} I_p & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} M^*(x') \subset M^*(x')$$

とできる (ここで, 最後の包含関係は $M^*(x') = [A_b(x')M(x')]^\perp$ より $M^*(x')$ の形を考えれば分かる). これより $\|u_k - u\|_{D(\mathbf{R}^n_+)} \to 0\ (k \to \infty)$ に注意すると, 境界積分の拡張の仕方より

$$\int_{\partial\mathbf{R}^n_+} \langle (A_b u_k)(0,x'), \Psi(x')\rangle dx' \to \int_{\partial\mathbf{R}^n_+} \langle A_b u, \Psi\rangle dx' \quad (k \to \infty)$$

が分かる. ところで u は (BVP) の弱解だったので, 命題 6.1.9 より $\int_{\partial\mathbf{R}^n_+} \langle A_b u, \Psi\rangle dx' = 0$ となるので, 望んでいたことが示された. ■

では, 補題 6.2.6 を示そう. そのためも補題を準備する.

補題 6.2.7. $u \in D_{1-\zeta_0}(\mathbf{R}^n_+)$ のとき $((L+\lambda H)J_\epsilon u)^\#$ は 次の項の和で表わされる:

$$\int a(x,y)((L+\lambda H)u)^\#(x-y)\chi_\epsilon(y)dy, \quad \int a(x,y)u^\#(x-y)\chi_\epsilon(y)dy,$$
$$\lambda\int a(x,y)u^\#(x-y)y^\alpha\chi_\epsilon(y)dy, \quad \epsilon^{-1}\int a(x,y)u^\#(x-y)y^\alpha(\partial_j\chi)_\epsilon(y)dy.$$

但し $a(x,y), j, \alpha$ は それぞれ $a(x,y) \in \mathcal{B}^\infty(\mathbf{R}^{2n}),\ j = 1,\ldots,n,\ |\alpha| = 1$ となるものを表わす.

(証明) 次のようにできる.

$$((L+\lambda H)J_\epsilon u)^\# = ([(L+\lambda H), J_\epsilon]u)^\# + (J_\epsilon(L+\lambda H)u)^\#$$

この右辺の第二項は, 明らかに望むべき項で表わされている. また, 第一項については, 補題 6.2.5 を用いればよい. そのとき $\partial_{x_j}u^\#(x-y) = -\partial_{y_j}u^\#(x-y)$ などに注意する. ■

(補題 6.2.6 の証明) $u \in D_{1-\zeta_0}(\mathbf{R}^n_+)$ のとき $\mathrm{supp} J_\epsilon u \subset U_1$ であることは 容易に示される. よって, 適当な $c > 0$ を用いて $\|(L+\lambda H)J_\epsilon u\| \le c\|u\|_{D(\mathbf{R}^n_+)}$ とできることを示せばよい. しかし, 補題 6.2.7 より, これは容易に分かる. ■

以上より 命題 6.1.5 の証明が完成した.

6.3 解の滑らかさ

最後に, $\partial\Omega$ 上で $\mathrm{rank}A_b(x)$ が一定である場合について, 解の滑らかさの明らかとなっている結果を述べておく.

定理 6.3.1. $q \in \mathbf{Z}_+$ に対して, 以下を満たす $\Lambda(q) \in \mathbf{R}$ がとれる: $f \in H^q(\Omega;\partial\Omega)$, $\mathrm{Re}\lambda > \Lambda(q)$ であって $u \in L^2(\Omega)$ が (BVP) の弱解ならば, 実は $u \in H^q(\Omega;\partial\Omega)$ であり, 評価

$$\|u\|_{H^q(\Omega;\partial\Omega)} \le C\|f\|_{H^q(\Omega;\partial\Omega)}$$

が成り立つ. ここで $C = C(q,\lambda) > 0$ である.

更に, もし $\partial\Omega$ 上で $A_b(x)$ が可逆行列であるならば, 次のことが分かる.

定理 6.3.2. $q \in \mathbf{Z}_+$ に対して, 以下を満たす $\Lambda(q) \in \mathbf{R}$ がとれる: $f \in H^q(\Omega)$, $\mathrm{Re}\lambda > \Lambda(q)$ であって $u \in L^2(\Omega)$ が (BVP) の弱解ならば, 実は $u \in H^q(\Omega)$ であり, 評価

$$\|u\|_{H^q(\Omega)} \le C\|f\|_{H^q(\Omega)}$$

が成り立つ. ここで $C = C(q,\lambda) > 0$ である.

これ以外にも Yanagisawa-Matsumura [30] による $H^q_*(\Omega)$ という空間を用いた結果もあるが, ここでは, それについて述べることは省略する (Chen Shuxing [3], [4], Ohno-Shizuta-Yanagisawa [16], Secchi [23], Yamamoto [27] なども参照).

さて, 歴史的に見ると, まず Tartakoff [25] が Hörmander [8] の Theorem 2.4.1, Theorem 2.4.2 を利用して 定理 6.3.2 を得て, その後 Rauch [17] が非特性化の手法を用い Tartakoff の結果 (定理 6.3.2) を利用して 定理 6.3.1 を得た.

しかし, ここでは 定理 6.3.2 を経由せず, 直接 定理 6.3.1 を示してみよう (つまり, 定理 6.3.1 の別証明を与えてみよう). このとき 定理 6.3.2 は, 定理 6.3.1 の系として得られる. 以下では 定理 6.3.1 と 定理 6.3.2 を証明するが, 評価について示すことは省略する. つまり, 定理 6.3.1 では $u \in H^q(\Omega;\partial\Omega)$ であること, 定理 6.3.2 では $u \in H^q(\Omega)$ であることだけを示すことにする.

まず, 定理 6.3.1 が成り立つことを認めて, 定理 6.3.2 を示そう.

(定理 6.3.2 の証明) $\{U_i\}, \{\chi_i\}, \{\psi_i\}$ を 前節でとった Ω の開被覆, 座標系, 一の分割とする. ここで

$$u_i = \psi_i u, \quad f_i = (L+\lambda H)u_i = \psi_i f + \sum_{j=1}^n (\partial_j\psi_i)A_j u$$

とおくと, $u_0 \in H^q(\mathbf{R}^n)$ であることから, 証明のためには以下のことを示せばよい: 各 i $(i = 1,\ldots,k)$ について U_i の局所座標で, 次が成り立つ.

$$Z^\alpha\partial_1^p u_i \in L^2(\mathbf{R}^n_+) \quad (|\alpha| + p \le q).$$

これを p $(0 \le p \le q)$ に関する帰納法で示す. $p = 0$ のときは明らかである. 次に $p-1$ のときまで主張が成り立つと仮定して p のときを考える. このとき, 適当な $\tilde{A}_1(x) \in \mathcal{B}^\infty(\mathbf{R}^n)$ を用いて, 次のように書けることに注意する.

$$A_b\partial_1 u_i = -f_i + \tilde{A}_1 Z_1 u_i + \sum_{j=2}^n A_j Z_j u_i + Bu_i + \lambda H u_i.$$

ところで $A_b(x')$ は U_i 上で可逆行列であるので, 上式の両辺に左から $Z^\alpha\partial_1^{p-1}A_b^{-1}$ を作用させ, 更に帰納法の仮定を用いることで, p のときも主張が成り立つことが分かる. ■

さて, 定理 6.3.1 の証明に移ろう. これを示すには, 次の命題が示されれば十分である.

命題 6.3.3. $q\in\mathbf{Z}_+(q\geq 1)$ に対して, 以下を満たす $\Lambda(q)\in\mathbf{R}$ がとれる: $f\in H^{q-1}(\Omega;\partial\Omega)$, $\mathrm{Re}\lambda>\Lambda(q)$ であって $u\in H^{q-1}(\Omega;\partial\Omega)$ が (BVP) の弱解ならば, すべての $0<\delta\leq 1$ に対して, 評価

$$\begin{aligned}&(\mathrm{Re}\lambda-\Lambda(q))\|u\|^2_{H^{q-1}(\Omega;\partial\Omega),\delta}\\&\quad\leq c_0\|f\|^2_{H^{q-1}(\Omega;\partial\Omega),\delta}+C_1\{\|f\|^2_{H^{q-1}(\Omega;\partial\Omega)}+\|u\|^2_{H^{q-1}(\Omega;\partial\Omega)}\}\end{aligned}$$

が成り立つ. ここで $c_0=c_0(q)>0$, $C_1=C_1(q,\lambda)>0$ である.

実際まず, 命題 6.3.3 が成り立つと仮定して 定理 6.3.1 を示しておこう.

(定理 6.3.1 の証明) q に関する帰納法で示す. $q=0$ のときは明らかである. 次に $q-1$ のときまで主張が成り立つと仮定して q のときを考える. このとき 命題 6.3.3 から, 適当な $C>0$ を用いて $\|u\|_{H^{q-1}(\Omega;\partial\Omega),\delta}\leq C$ とできる. よって 補題 3.2.1 より, $u\in H^q(\Omega;\partial\Omega)$ が分かることから, q のときも主張は成り立つ. ■

したがって, 以下で 命題 6.3.3 について考えよう. $\{U_i\},\{\chi_i\},\{\psi_i\}$ を前節でとった Ω の開被覆, 座標系, 一の分割とし, $u\in H^{q-1}(\Omega;\partial\Omega)$ を $f\in H^{q-1}(\Omega;\partial\Omega)$ に対する (BVP) の弱解であるとする. このとき

$$u_i=\psi_i v,\quad f_i=(L+\lambda H)u_i=\psi_i f+\sum_{j=1}^n(\partial_j\psi_i)A_ju$$

とおくと, u_i は f_i に対する (BVP) の弱解になっている. これより, 命題 6.3.3 は u,f の代わりに u_i,f_i に対して示せば十分である.

以下, 命題 6.3.3 の証明の中では c_0 で q にのみ依る定数を表わし, C_1 で q,λ に依る定数を表わすことにする.

(命題 6.3.3 の証明) $[i=0$ のとき$]$ まず, u_0 から考えてみることにする. $\chi\in C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$ を $\mathrm{supp}\chi\subset\{|y|<\epsilon_0\}$ であり, 更に 命題 3.2.2 の 仮定 (i), (ii) を満たすものとする. 但し $\epsilon_0=\mathrm{dist}(\mathrm{supp}\psi_0,\partial\Omega)$ とする. この χ を用いて, 前節の 命題 6.1.5 の証明に出てきたものと同じく I_ϵ を定義することにする. このとき, すべての $0<\epsilon\leq 1$ に対して $I_\epsilon u_0\in C_0^\infty(\Omega)$ なので, 補題 6.1.1 より

$$(\mathrm{Re}\lambda-\Lambda)\|I_\epsilon u_0\|^2_{L^2(\mathbf{R}^n)}\leq c\|(L+\lambda H)I_\epsilon u_0\|^2_{L^2(\mathbf{R}^n)}$$

とできることから, 次が従う.

$$\begin{aligned}&(\mathrm{Re}\lambda-\Lambda)\{\int_0^1\|I_\epsilon u_0\|^2_{L^2(\mathbf{R}^n)}\epsilon^{-2q}(1+\delta^2/\epsilon^2)^{-1}d\epsilon/\epsilon+2\|u_0\|^2_{H^{q-1}(\mathbf{R}^n),1}\}\\&\quad\leq c\int_0^1\|(L+\lambda H)I_\epsilon u_0\|^2_{L^2(\mathbf{R}^n)}\epsilon^{-2q}(1+\delta^2/\epsilon^2)^{-1}d\epsilon/\epsilon+C_1\|u_0\|^2_{H^{q-1}(\mathbf{R}^n),1}\end{aligned}\tag{6.3.1}$$

ここで $u_0\in H^{q-1}(\mathbf{R}^n)$ なので, 補題 3.2.3 と同様にして, この左辺は次で下から評価される.

$$c_0^{-1}(\mathrm{Re}\lambda-\Lambda)\|u_0\|^2_{H^{q-1}(\mathbf{R}^n),\delta}.$$

次に, 右辺について考える. そのとき, 次の補題に注意しよう (証明は, 補題 6.2.2 を用い, 補題 6.2.7 の証明と同じ議論をすればよい).

補題 6.3.4. $v \in D(\Omega)$ のとき $(L+\lambda H)I_\epsilon v$ は次の項の和で表わされる:

$$\int a(x,y)(L+\lambda H)v(x-y)\chi_\epsilon(y)dy, \quad \int a(x,y)v(x-y)\chi_\epsilon(y)dy,$$
$$\lambda\int a(x,y)v(x-y)y^\alpha\chi_\epsilon(y)dy, \quad \epsilon^{-1}\int a(x,y)v(x-y)y^\alpha(\partial_j\chi)_\epsilon(y)dy.$$

但し $a(x,y), j, \alpha$ は それぞれ $a(x,y) \in \mathcal{B}^\infty(\mathbf{R}^{2n})$, $j=1,\ldots,n$, $|\alpha|=1$ となるものを表わす.

この補題と 補題 3.2.5 より, (6.3.1) の右辺は次のもので評価される.

$$c_0\{\|f_0\|^2_{H^{q-1}(\mathbf{R}^n),\delta}+\|u_0\|^2_{H^{q-1}(\mathbf{R}^n),\delta}\}+C_1\{\|f_0\|^2_{H^{q-1}(\mathbf{R}^n)}+\|u_0\|^2_{H^{q-1}(\mathbf{R}^n)}\}.$$

したがって, この $\|u_0\|^2_{H^{q-1}(\mathbf{R}^n),\delta}$ を左辺に移項することで, 望むべき評価が得られる.

[$i \neq 0$ のとき] さて次に, $i \neq 0$ のときの u_i について考える. 簡単のために, 以下では U_i, u_i, f_i を単に U, u, f で表わすことにする. 前節の 命題 6.1.5 の証明での議論と同様にして (6.2.1), (6.2.3) を仮定してもよい.

J_ϵ を定める χ を $\mathrm{supp}\chi \subset \{|y|<\zeta_0,\ y_1<0\}$ であって, 更に 命題 3.2.2 の 仮定 (i), (ii) を満たすものとする. このとき 補題 6.2.4 と 定理 6.1.6 より, すべての $0<\epsilon\leq 1$ に対して

$$(\mathrm{Re}\lambda-\Lambda)\|J_\epsilon u\|^2_{L^2(\mathbf{R}^n_+)}\leq c\|(L+\lambda H)J_\epsilon u\|^2_{L^2(\mathbf{R}^n_+)}$$

とできることから, 次が従う.

$$\begin{aligned}(\mathrm{Re}\lambda-\Lambda)\{&\int_0^1\|J_\epsilon u\|^2_{L^2(\mathbf{R}^n_+)}\epsilon^{-2q}(1+\delta^2/\epsilon^2)^{-1}d\epsilon/\epsilon+2\|u\|^2_{H^{q-1}(\mathbf{R}^n_+;\partial\mathbf{R}^n_+),1}\}\\ &\leq c\int_0^1\|(L+\lambda H)J_\epsilon u\|^2_{L^2(\mathbf{R}^n_+)}\epsilon^{-2q}(1+\delta^2/\epsilon^2)^{-1}d\epsilon/\epsilon+C_1\|u\|^2_{H^{q-1}(\mathbf{R}^n_+;\partial\mathbf{R}^n_+),1}\end{aligned} \tag{6.3.2}$$

ここで $u \in H^{q-1}(\mathbf{R}^n_+;\partial\mathbf{R}^n_+)$ なので, 補題 3.2.3 より, この左辺は次で下から評価される.

$$c_0^{-1}(\mathrm{Re}\lambda-\Lambda)\|u\|^2_{H^{q-1}(\mathbf{R}^n_+;\partial\mathbf{R}^n_+),\delta}.$$

次に, 右辺について考える. 補題 6.2.7 と 補題 3.2.5 より, (6.3.2) の右辺は次のもので評価される.

$$c_0\{\|f\|^2_{H^{q-1}(\mathbf{R}^n_+;\partial\mathbf{R}^n_+),\delta}+\|u\|^2_{H^{q-1}(\mathbf{R}^n_+;\partial\mathbf{R}^n_+),\delta}\}+C_1\{\|f\|^2_{H^{q-1}(\mathbf{R}^n_+;\partial\mathbf{R}^n_+)}+\|u\|^2_{H^{q-1}(\mathbf{R}^n_+;\partial\mathbf{R}^n_+)}\}.$$

したがって, この $\|u_0\|^2_{H^{q-1}(\mathbf{R}^n_+;\partial\mathbf{R}^n_+),\delta}$ を左辺に移項することで, 望むべき評価が得られる.

以上より, 命題 6.3.3 が証明された. ■

7. 附録二: 理想磁気流体力学系の初期境界値問題

7.1 方程式系

Ω を境界 $\partial\Omega$ が滑らかな $\mathbf{R}^3$ の有界領域とする. 理想磁気流体が Ω を満たしているとき, 方程式系は次のように記述される (ここで "理想" というのは, 粘性や電気抵抗の効果がないということを表わしている. また簡単化のため, 運動は等エントロピー的であるとする).

$$\partial_t \rho + \nabla \cdot (\rho u) = 0, \tag{7.1.1}$$

$$\rho(\partial_t + u \cdot \nabla)u + \nabla p + \mu H \times (\nabla \times H) = 0, \tag{7.1.2}$$

$$\mu \partial_t H + \nabla \times E = 0, \tag{7.1.3}$$

$$E = -\mu u \times H, \tag{7.1.4}$$

$$\nabla \cdot H = 0 \qquad \text{in} \quad [0,T] \times \Omega. \tag{7.1.5}$$

ここで 記号について説明すると, $p = p(t,x)$ は圧力, $u = u(t,x) = {}^t(u_1, u_2, u_3)$ は流速, $H = H(t,x) = {}^t(H_1, H_2, H_3)$ は磁場, $E = E(t,x) = {}^t(E_1, E_2, E_3)$ は電場であり, これらが未知関数である. また ρ は密度であり, 状態方程式により p の関数として $\rho = \rho(p)$ と表わされる. 但し $\rho(p)$ は 正の関数であって, $p > 0$ に対して $d\rho/dp (= \rho_p) > 0$ となるものである. 更に μ は透磁率であって, これは正定数である.

最初に注意しておくこととして, 方程式の数は 11 本, 未知関数の数は 10 個 であり, これは数学的に扱うには一見不都合であるように思われる. しかし (7.1.3) の両辺の発散を計算すると $\nabla \cdot (\nabla \times E) = 0$ に注意することで $\partial_t(\nabla \cdot H) = 0$ が得られることから, あとで初期値 $H^0(x)$ に対して $\nabla \cdot H^0 = 0$ in Ω を仮定しておけば (7.1.5) は自然に満たされることが分かる. したがって, これを省略することで, 方程式の数は 10 本とみなすことができる.

さて (7.1.4) を (7.1.3) に代入することなどから, (p, u, H) を未知関数とした以下の方程式系を考えればよい.

$$\alpha(\partial_t + u \cdot \nabla)p + \nabla \cdot u = 0, \tag{7.1.6}$$

$$\rho(\partial_t + u \cdot \nabla)u + \nabla p + \mu H \times (\nabla \times H) = 0, \tag{7.1.2}$$

$$\partial_t H - \nabla \times (u \times H) = 0. \tag{7.1.7}$$

ここで $\alpha = \rho_p / \rho (> 0)$ である. また以下では $\mu \equiv 1$ とする. 実際 H を $\mu^{-1/2} H$ で置き換えればよいからである. 以下で, この方程式系を 対称双曲系にまで変形していこう (但し $p, u, H \in C^1([0,T] \times \overline{\Omega})$ と仮定して変形していくことにする).

まず (7.1.7) の $\nabla \times (u \times H)$ の部分を書き変えておく. 計算により

$$\nabla \times (u \times H) = (H \cdot \nabla)u - (u \cdot \nabla)H + u(\nabla \cdot H) - H(\nabla \cdot u)$$

とでき, 加えて (7.1.5) にも注意することで (7.1.7) は次のようになる.

$$(\partial_t + u \cdot \nabla)H - (H \cdot \nabla)u + H(\nabla \cdot u) = 0. \tag{7.1.8}$$

また $q = p + |H|^2/2$ (全圧力) という新たな未知関数を導入し, (p, u, H) の代わりに (q, u, H) に対する方程式系を導くことにする. ここで $\nabla|H|^2 = 2(H\cdot\nabla)H + H\times(\nabla\times H)$ であるので (7.1.2) は次のよう書き変えることができる.

$$\rho(\partial_t + u\cdot\nabla)u + \nabla q - (H\cdot\nabla)H = 0. \tag{7.1.9}$$

更に $(\partial_t + u\cdot\nabla)|H|^2 = 2H\cdot\partial_t H + H\cdot((u\cdot\nabla)H)$ とできるので (7.1.6) は次のように書き変えられる.

$$\alpha(\partial_t + u\cdot\nabla)q - \alpha(H\cdot\partial_t H + H\cdot((u\cdot\nabla)H)) + \nabla\cdot u = 0. \tag{7.1.10}$$

最後に, 対称化のために (7.1.8) から (7.1.10) の H 倍を引くことで (7.1.8) を次のように書き変える.

$$\begin{aligned}(\partial_t + u\cdot\nabla)H - (H\cdot\nabla)u - \alpha H(\partial_t + u\cdot\nabla)q \\ + \alpha H(H\cdot\partial_t H + H\cdot((u\cdot\nabla)H)) = 0.\end{aligned} \tag{7.1.11}$$

以上により (7.1.10), (7.1.9), (7.1.11) は, 次のような U に対する (準線型) 対称双曲系に書き表わされる.

$$A_0(U)\partial_t U + \sum_{j=1}^{3} A_j(U)\partial_j U = 0 \quad \text{in} \quad [0,T]\times\Omega. \tag{Eq}$$

但し $U = \begin{pmatrix} q \\ u \\ H \end{pmatrix}$ である (以下では 紙面の都合もあって $U = {}^t(q, u, H)$ と表わすこともある).
また, 係数はそれぞれ以下のものである.

$$A_0(U) = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & -\alpha^t H \\ 0 & \rho I_3 & 0 \\ -\alpha H & 0 & I_3 + H\otimes H \end{pmatrix},$$

$$A_j(U) = \begin{pmatrix} \alpha u_j & {}^t e_j & -\alpha u_j{}^t H \\ e_j & u_j I_3 & -H_j I_3 \\ -\alpha u_j H & -H_j I_3 & u_j(I_3 + H\otimes H) \end{pmatrix} \quad (j = 1, 2, 3).$$

ここで $e_1 = {}^t(1,0,0)$, $e_2 = {}^t(0,1,0)$, $e_3 = {}^t(0,0,1)$ であり, $H\otimes H$ は $H\otimes H = (H_i H_j)_{\substack{i\downarrow 1,2,3 \\ j\to 1,2,3}}$ で定義される 3×3 の行列である.

7.2 初期条件と境界条件

初期条件は次で与えられる.

$$U(0,x) = U^0(x) = {}^t(q^0, u^0, H^0)(x) \quad \text{in} \quad \Omega. \tag{IC}$$

前節の議論より, $\nabla\cdot H^0 = 0$ は仮定しておかねばならないことに注意しておく.
次に, 境界条件について考えよう. 流速 u に対しては 次の条件を課す.

$$u\cdot\nu = 0 \quad \text{on} \quad [0,T]\times\partial\Omega. \tag{7.2.1}$$

但し $\nu=\nu(x)$ は Ω に対する単位外法線を表わす．またここでは, 境界が完全導体壁であるときを考えることにする．このとき課すべき条件は, 次のように表わすことができる．

$$\nu\times E=0 \quad \text{on} \quad [0,T]\times\partial\Omega. \tag{7.2.2}$$

ところで (7.1.4) と

$$\nu\times(u\times H)=(\nu\cdot H)u-(\nu\cdot u)H \tag{7.2.3}$$

に注意し, 更に (7.2.1) を用いることで, (7.2.2) は次のように書き直せる．

$$(H\cdot\nu)u=0 \quad \text{on} \quad [0,T]\times\partial\Omega. \tag{7.2.4}$$

これら (7.2.1) と (7.2.4) を合わせた次を境界条件とする．

$$u\cdot\nu=0, \quad (H\cdot\nu)u=0 \qquad \text{on} \quad [0,T]\times\partial\Omega. \tag{7.2.5}$$

この境界条件 (7.2.5) は非線型であることもあって, 少々扱いづらい．そこでこれを, もう少し扱いやすいもので表わし直そう．そのために, 次のような γ 及び Γ を導入する．

$$\gamma=\{x\in\partial\Omega;\ (H^0\cdot\nu)(x)=0\}, \quad \Gamma=\{x\in\partial\Omega;\ (H^0\cdot\nu)(x)\neq 0\}.$$

このとき, 次の補題が分かる．

補題 7.2.1. U を (IC) を満たす (Eq) の古典解とする．このとき, 条件 (7.2.5) は次の条件 (7.2.6) と同値である．

$$u\cdot\nu=0 \quad \text{on} \quad [0,T]\times\gamma, \qquad u=0 \quad \text{on} \quad [0,T]\times\Gamma. \tag{7.2.6}$$

更に (7.2.5) 或いは (7.2.6) のいずれかが成り立つとき, 次も従う．

$$H\cdot\nu=H^0\cdot\nu \quad \text{on} \quad [0,T]\times\partial\Omega. \tag{7.2.7}$$

(証明) (i) まず (7.2.5) ならば (7.2.6) であることを示そう．そのためには (7.2.7) を示せば十分である．実際 (7.2.5) と (7.2.7) を合わせれば (7.2.6) は容易に分かる．さて (7.1.7) の両辺と ν との内積をとると, $\nu=\nu(x)$ が t に無関係であることから $\partial_t(H\cdot\nu)=(\nabla\times(u\times H))\cdot\nu$ とできる．これより $\partial\Omega$ の任意の部分集合 S に対して, 閉曲線 C をその境界とすると, Stokes の定理より

$$\partial_t\int_S(H\cdot\nu)dS=\int_S(\nabla\times(u\times H))\cdot\nu dS=\int_C(u\times H)\cdot dr$$

とできる．ところで (7.2.5) と (7.2.3) より $\nu\times(u\times H)=0$ on $[0,T]\times\partial\Omega$, つまり $[0,T]\times\partial\Omega$ 上では ν と $u\times H$ は平行となるので, 線積分 $\int_C(u\times H)\cdot dr$ は 0 になる．したがって $\partial_t\int_S(H\cdot\nu)dS=0$ となり, S が任意であったことから (7.2.7) が従う．

(ii) 次に (7.2.6) ならば (7.2.5) であることを示そう．この場合も (7.2.7) を示せば十分である．実際 (7.2.6) と (7.2.7) から (7.2.5) を導くことは 難しくない．$\psi(x)$ を 次のような関数とする．

$$\psi(x)=\begin{cases} -\mathrm{dist}(x,\partial\Omega) & (x\in\Omega \text{ のとき}) \\ \ \ \mathrm{dist}(x,\partial\Omega) & (x\notin\Omega \text{ のとき}). \end{cases}$$

このとき $\partial\Omega$ 上で $\nu = \nabla\psi$ なので, この関係により ν は $\partial\Omega$ の近くで定義されているとしてよいことに注意しておく. さて (7.1.8) の両辺と ν との内積を考える. そのとき

$$((u \cdot \nabla)H) \cdot \nu = (u \cdot \nabla)(H \cdot \nu) - H((u \cdot \nabla) \cdot \nu),$$
$$((H \cdot \nabla)u) \cdot \nu = (H \cdot \nabla)(u \cdot \nu) - u((H \cdot \nabla) \cdot \nu)$$

を用いることで, 次が得られる.

$$\begin{aligned}\partial_t(H \cdot \nu) + (u \cdot \nabla)(H \cdot \nu) - H((u \cdot \nabla) \cdot \nu)& \\ -(H \cdot \nabla)(u \cdot \nu) + u((H \cdot \nabla) \cdot \nu) + (\nabla \cdot u)(H \cdot \nu) &= 0.\end{aligned}$$

また $\nu = \nabla\psi$ より $H((u \cdot \nabla) \cdot \nu) = u((H \cdot \nabla) \cdot \nu) = \sum_{i,j=1}^3 H_i u_j \partial_i \partial_j \psi$ とできるので, 次が分かる.

$$\partial_t(H \cdot \nu) + (u \cdot \nabla)(H \cdot \nu) - (H \cdot \nabla)(u \cdot \nu) + (\nabla \cdot u)(H \cdot \nu) = 0.$$

更に τ_1, τ_2 を $\{\tau_1, \tau_2, \nu\}$ が 正規直交系となるようにとってくると,

$$H \cdot \nabla = (H \cdot \tau_1)(\tau_1 \cdot \nabla) + (H \cdot \tau_2)(\tau_2 \cdot \nabla) + (H \cdot \nu)(\nu \cdot \nabla)$$

とでき, また (7.2.6) より $u \cdot \nu = 0$ on $[0, T] \times \partial\Omega$ であることから, 結局次が分かる.

$$\partial_t(H \cdot \nu) + (u \cdot \nabla)(H \cdot \nu) + a(t, x)(H \cdot \nu) = 0 \quad \text{on} \quad [0, T] \times \partial\Omega.$$

但し $a(t, x)$ は $a(t, x) = (\nabla \cdot u) - (\nu \cdot \nabla)(u \cdot \nu)$ というスカラー関数である. ここで $\partial_t + (u \cdot \nabla)$ の特性曲線について考えると, (7.2.6) より $u \cdot \nu = 0$ on $[0, T] \times \partial\Omega$ が分かるので, $(0, x)$ $(x \in \partial\Omega)$ を出発する特性曲線は $[0, T] \times \partial\Omega$ から外には出ないことに注意する. 加えて $u = (u \cdot \tau_1)\tau_1 + (u \cdot \tau_2)\tau_2 + (u \cdot \nu)\nu$ であることから

$$\begin{aligned}a(t, x) = (\tau_1 \cdot \nabla)(u \cdot \tau_1) + (u \cdot \tau_1)(\nabla \cdot \tau_1)& \\ +(\tau_2 \cdot \nabla)(u \cdot \tau_2) + (u \cdot \tau_2)(\nabla \cdot \tau_2) + (u \cdot \nu)(\nabla \cdot \nu)&\end{aligned}$$

なので, (7.2.6) より $(t, x) \in [0, T] \times \Gamma$ のとき $a(t, x) = 0$ であることにも注意する. これらのことから, 特性曲線の手法により $[0, T] \times \partial\Omega$ 上で $H \cdot \nu$ を求めることで, (7.2.7) が示される. ■

この補題より, 境界空間 $M(t, x)$ $((t, x) \in [0, T] \times \partial\Omega)$ を次のように定義しよう (実際には $M(t, x)$ は t には無関係である).

$$M(t, x) = \begin{cases} \{{}^t(q, u, H) \in \mathbf{R}^7; u \cdot \nu(x) = 0\} & ((t, x) \in [0, T] \times \gamma \text{ のとき}) \\ \{{}^t(q, u, H) \in \mathbf{R}^7; u = 0\} & ((t, x) \in [0, T] \times \Gamma \text{ のとき}). \end{cases}$$

このとき, 境界条件は次のように表わされる.

(BC) $$U(t, x) \in M(t, x) \quad \text{at} \quad (t, x) \in [0, T] \times \partial\Omega.$$

以上をまとめることで 次の初期境界値問題の解 U を求めることが目標となる.

(Pr) $$\begin{cases} A_0(U)\partial_t U + \sum_{j=1}^3 A_j(U)\partial_j U = 0 & \text{in} \quad [0, T] \times \Omega \\ U \in M & \text{at} \quad [0, T] \times \partial\Omega \\ U(0, x) = U^0(x) & \text{in} \quad \Omega. \end{cases}$$

7.3 線型化問題

さて, 初期境界値問題 (Pr) を満たす U を求めるためには $X^m([0,T]\times\Omega)$ を適当な滑らかさをもつ関数空間とし, $\bar{U}={}^t(\bar{q},\bar{u},\bar{H})\in X^m([0,T]\times\Omega)$ を

$$\begin{array}{rll} \bar{U}\in M & \text{at} & [0,T]\times\partial\Omega, \\ \bar{H}\cdot\nu=H^0\cdot\nu & \text{on} & [0,T]\times\partial\Omega, \\ \bar{U}(0,x)=U^0(x) & \text{in} & \Omega \end{array}$$

を満たすものとして, 次のような線型化問題を考えるのが標準的である.

$$\text{(LPr)}\qquad \begin{cases} A_0(\bar{U})\partial_t U+\sum_{j=1}^{3}A_j(\bar{U})\partial_j U+B(\bar{U})U=0 & \text{in}\quad [0,T]\times\Omega \\ \qquad U\in M & \text{at}\quad [0,T]\times\partial\Omega \\ \qquad U(0,x)=U^0(x) & \text{in}\quad \Omega. \end{cases}$$

ここで $B(\bar{U})=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & B_{32}(\bar{U}) & B_{33}(\bar{U}) \end{pmatrix}$ であり, $B_{32}(\bar{U}), B_{33}(\bar{U})$ はそれぞれ次で表わされる 3×3 の行列である (但し $\nu=\nu(x)$ は $\nu(x)\in C^\infty(\overline{\Omega})$ に拡張されたものとする).

$$B_{32}(\bar{U})=(\nu_i(\bar{H}\cdot\partial_j\nu))_{\substack{i\downarrow 1,2,3 \\ j\to 1,2,3}},\quad B_{33}(\bar{U})=(\nu_i(\bar{u}\cdot\partial_j\nu))_{\substack{i\downarrow 1,2,3 \\ j\to 1,2,3}}$$

注意として $B(\bar{U})U={}^t(0,0,\{\bar{H}\cdot((u\cdot\nabla)\nu)-\bar{u}\cdot((H\cdot\nabla)\nu)\}\nu)$ より $B(U)U=0$ となっている (線型化問題 (LPr) に, この $B(\bar{U})U$ を導入した理由については, 下の 命題 7.3.1 を参照).

この線型化問題 (LPr) の解 U が存在し, 再び $U\in X^m([0,T]\times\Omega)$ 及び $H\cdot\nu=H^0\cdot\nu$ on $[0,T]\times\gamma$ が満たされていて, 更に適当な評価が成り立てば, 逐次近似法などによって, もとの問題 (Pr) を満たす解が構成できる.

以下では (LPr) が古典解 U をもてば $H\cdot\nu=0$ on $[0,T]\times\partial\Omega$ が満たされることや, (LPr) の境界空間 M が極大非負であることを調べよう. 簡単のために, 以下の議論では $\bar{U}\in C^\infty([0,T]\times\overline{\Omega})$ とする.

命題 7.3.1. $\bar{U}$ を上のものとし, (LPr) が古典解 U をもつとする. このとき $H\cdot\nu=H^0\cdot\nu$ on $[0,T]\times\partial\Omega$ が成り立つ.

(証明) 線型化問題 (LPr) の方程式は 7 行からなっているが, その第 1 行は, 次のように表わすことができる ((7.1.10) も参照).

$$\bar{\alpha}(\partial_t+u\cdot\nabla)q-\bar{\alpha}(\bar{H}\cdot\partial_t H+\bar{H}\cdot((\bar{u}\cdot\nabla)H))+\nabla\cdot u=0. \tag{7.3.1}$$

また, 方程式の第 5, 6, 7 行をまとめて次のように表わすことができる ((7.1.11) や $B(\bar{U})U$ の形も参照).

$$\begin{aligned} &(\partial_t+\bar{u}\cdot\nabla)H-(\bar{H}\cdot\nabla)u-\bar{\alpha}\bar{H}(\partial_t+\bar{u}\cdot\nabla)q \\ &\quad+\bar{\alpha}\bar{H}(\bar{H}\cdot\partial_t H+\bar{H}\cdot((\bar{u}\cdot\nabla)H)) \\ &\quad+\{\bar{H}\cdot((u\cdot\nabla)\nu)-\bar{u}\cdot((H\cdot\nabla)\nu)\}\nu=0. \end{aligned} \tag{7.3.2}$$

したがって (7.3.2) に (7.3.1) の $\bar{H}$ 倍を加えることで, 次が得られる.

$$(\partial_t + \bar{u}\cdot\nabla)H - (\bar{H}\cdot\nabla)u + \bar{H}(\nabla\cdot u) + \{\bar{H}\cdot((u\cdot\nabla)\nu) - \bar{u}\cdot((H\cdot\nabla)\nu)\}\nu = 0.$$

この式の両辺と ν との内積を考える. そのとき 補題 7.2.1 の証明での議論にも注意することで, 次が分かる.

$$\partial_t(H\cdot\nu) + (\bar{u}\cdot\nabla)(H\cdot\nu) - (\bar{H}\cdot\nabla)(u\cdot\nu) + (\nabla\cdot u)(\bar{H}\cdot\nu) = 0.$$

よって, 再び 補題 7.2.1 の証明での議論を用いることで, 結局次のようにできる.

$$\partial_t(H\cdot\nu) + (u\cdot\nabla)(H\cdot\nu) + a(t,x)(\bar{H}\cdot\nu) = 0 \quad \text{on} \quad [0,T]\times\partial\Omega.$$

但し $a(t,x)$ は 補題 7.2.1 の証明のものと同じく $a(t,x) = (\nabla\cdot u) - (\nu\cdot\nabla)(u\cdot\nu)$ というスカラー関数である. したがって, 以下 補題 7.2.1 の証明での議論と同様な特性曲線の手法によって, 望むべき主張が示される. ■

命題 7.3.2. $\bar{U}$ を上のものとするとき, (LPr) の境界空間 M は極大非負である.

(証明) まず $\bar{u}\cdot\nu = 0$ on $[0,T]\times\partial\Omega$ であることから, (LPr) の境界行列 $A_b(\bar{U})(t,x)$ が次のように表わされることに注意する.

$$A_b(\bar{U}) = \sum_{j=1}^{3}\nu_j A_j(\bar{U}) = \begin{pmatrix} 0 & {}^t\nu & 0 \\ \nu & 0 & -(\bar{H}\cdot\nu)I_3 \\ 0 & -(\bar{H}\cdot\nu)I_3 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{on} \quad [0,T]\times\partial\Omega.$$

さて (1.1.1) から確かめよう. $U = {}^t(q,u,H)\in\mathbf{R}^7$ に対して

$$\langle A_b(\bar{U})U, U\rangle = 2q(u\cdot\nu) - 2(\bar{H}\cdot\nu)(H\cdot u)$$

であることが分かる. よって $(t,x)\in[0,T]\times\gamma$ のときは $U\in M(t,x)$ に対して $u\cdot\nu(x) = 0$ より $\langle A_b(\bar{U})U, U\rangle = 0$ となる (このとき $\bar{H}(t,x)\cdot\nu(x) = 0$ であることにも注意しておく). また $(t,x)\in[0,T]\times\Gamma$ のときは $U\in M(t,x)$ に対して $u = 0$ より $\langle A_b(\bar{U})U, U\rangle = 0$ となる. したがって (1.1.1) が満たされることが分かった.

次に (1.1.2) を確かめよう. 計算することにより, $A_b(\bar{U})$ の固有値は 次の 7 個であることが分かる.

$$\sqrt{1+|\bar{H}_\nu|^2},\ -\sqrt{1+|\bar{H}_\nu|^2},\ \bar{H}_\nu,\ \bar{H}_\nu,\ -\bar{H}_\nu,\ -\bar{H}_\nu,\ 0.$$

但し $\bar{H}_\nu = \bar{H}\cdot\nu$ である. よって まず $(t,x)\in[0,T]\times\gamma$ のときは $\bar{H}_\nu = 0$ であることから 非負固有値は 6 個であり, また $\dim M(t,x) = 6$ なので (1.1.2) は満たされる. 次に $(t,x)\in[0,T]\times\Gamma$ のときは $\bar{H}_\nu \neq 0$ であることから 非負固有値は 4 個であり, また $\dim M(t,x) = 4$ なので (1.1.2) は満たされる. 以上のことから, 境界空間 M は極大非負であることが分かった. ■

命題 7.3.2 より (LPr) が L^2 弱解をもつことは容易に分かる. また, もしこの解が滑らかであるならば, 命題 7.3.1 より, 逐次近似法がうまく回ってくれる可能性があることが分かる. したがって, いかにして解 U の滑らかさを得るかが問題になる (もちろん, 空間 $X^m([0,T]\times\Omega)$ の設定の仕方や評価なども問題ではあるが, 滑らかさに関する議論はいずれにしろ避けられない).

本論文では, もとの問題 (Pr) や 線型化問題 (LPr) について, これ以上議論をすることはやめておく. しかし最後に, どのような場合についてが既に研究されているか, 或いは, どのような場合についてが未解決として残っているかについて述べておきたい.

まず, 既に明らかになっていることとしては Yanagisawa-Matsumura [30] の結果がある. 正確な主張を述べることは省くが, 初期値 $U^0 = {}^t(q^0, u^0, H^0)$ に対して 次の (i), (ii) のいずれかが成り立っている場合が, そこでは研究されている (もとの問題 (Pr) についても 線型化問題 (LPr) についても).

(i) $\partial\Omega$ 上で $H^0 \cdot \nu = 0$ となる場合.

(ii) $\partial\Omega$ 上で $|H^0 \cdot \nu| \geq \delta$ となる場合 (但し $\delta > 0$ は適当のもの).

ちなみに (i) は $\partial\Omega = \gamma$ となる場合であり, (ii) は $\partial\Omega = \Gamma$ となる場合である. つまり, 両方とも $\partial\Omega$ 上で $\mathrm{rank} A_b(U^0)$ が一定となっている場合である.

このことからも予想がつくかもしれないが, $\partial\Omega$ 上で $\mathrm{rank} A_b(U^0)$ が一定でない場合, つまり $\partial\Omega$ 上で $H^0 \cdot \nu$ が 0 になったりならなかったりする場合が, 未解決として残っている.

謝辞

最後になりましたが, 西谷達雄 先生 には本論文の作成にあたり, ご多忙中にもかかわらず丁寧なご指導を頂き, 心より感謝いたします. 特にどの個所とは明言しませんが, 本論文におけるさまざまなアイデアも教えて頂きました.

また 松村昭孝 先生 には, この問題の物理的な背景を教えて頂いたり, 論文などの紹介をして頂いたりして, 大変お世話になりました. 深く感謝いたします.

更にノートパソコンをお貸し頂いた 西谷達雄 先生 には重ねて感謝いたします. また TeXの本をお貸し頂いた 上田秀雄 氏, 高野啓児 氏 にも感謝いたします. 加えて表紙や背表紙の作成にあたり, 杉山大海 氏, 竹之内芳文 氏, 加藤芳昭 氏 にはお世話になりました. 本論文をきれいに仕上げることができたのは, 彼らのご好意に依るものです.

また本論文の作成には直接には関係ないものの, 英語の論文などの作成にあたって, 英語の用法などに関する助言を与えてくださった 平澤美可三 氏 にもこの場をかりて感謝いたします.

参考文献

[1] C.Bardos and J.Rauch, *Maximal positive boundary value problems as limits of singular perturbation problems*, Trans. Amer. Math. Soc. **270** (1982), 377–408.

[2] H.Beirão da Veiga, *Perturbation theory and well-posedness in Hadamard's sense of hyperbolic initial boundary value problems*, Nonlinear Anal. **22** (1994), 1285–1308.

[3] Shuxing Chen, *On the initial-boundary value problem for quasilinear symmetric hyperbolic system and their applications*, Chinese Ann. Math. **1** (1980), 511–521.

[4] Shuxing Chen, *On the initial-boundary value problem for quasilinear symmetric hyperbolic system with characteristic boundary*, Chinese Ann. Math. **3** (1982), 223–232.

[5] K.O.Friedrichs, *The identity of weak and strong extensions of differential operators*, Trans. Amer. Math. Soc. **55** (1944), 132–151.

[6] K.O.Friedrichs, *Symmetric positive linear differential operators*, Comm. Pure Appl. Math. **11** (1958), 333–418.

[7] Chaohao Gu, *Differentiable solutions of symmetric positive partial differential equations*, (in chinese) Acta Math. Sinica **14** (1964), 503–516.

[8] L.Hörmander, *Linear Partial Differential Operators*, Springer-Verlag, Berlin-Göttingen-Heidelberg, 1963.

[9] M.Ikawa, *Mixed problem for a hyperbolic system of the first order*, Publ. RIMS, Kyoto Univ. **7** (1971/72), 427–454.

[10] S.Kawashima, *Mixed problems for quasi-linear symmetric hyperbolic systems*, 奈良女子大学数学講究録, 1995.

[11] S.Kawashima, T.Yanagisawa and Y.Shizuta, *Mixed problems for quasi-linear symmetric hyperbolic systems*, Proc. Japan Acad. **63** (1987), 243–246.

[12] P.D.Lax and R.S.Phillips, *Local boundary conditions for dissipative symmetric linear differential operators*, Comm. Pure Appl. Math. **13** (1960), 427–455.

[13] T.Nishitani and M.Takayama, *A characteristic initial boundary value problem for a symmetric positive system*, Hokkaido Math. J. **25** (1996), 167–182.

[14] T.Nishitani and M.Takayama, *Regularity of solutions to characteristic boundary value problem for symmetric systems*, "Geometrical optics and related topics" (F.Colombini and N.Lerner eds.), Birkhäuser, Boston-Basel-Berlin,1997.

[15] T.Nishitani and M.Takayama, *Characteristic initial boundary value problems for a symmetric hyperbolic systems*, Osaka J. Math. **35**, (1998), 629–657.

[16] M.Ohno, Y.Shizuta and T.Yanagisawa, *The initial boundary value problems for linear symmetric hyperbolic systems with characteristic boundary*, Proc. Japan Acad. **67** (1991), 191–196.

[17] J.Rauch, *Symmetric positive systems with boundary characteristic of constant multiplicity*, Trans. Amer. Math. Soc. **291** (1985), 167–187.

[18] J.Rauch, *Boundary value problem with nonuniformly characteristic boundary*, J. Math. Pures Appl. **73** (1994), 347–353.

[19] J.Rauch and F.Massey III, *Differentiability of solutions to hyperbolic initial-boundary value problems*, Trans. Amer. Math. Soc. **189** (1974), 303–318.

[20] J.Rauch and M.Takayama, *Symmetric positive boundary value problems*, 奈良女子大学数学講究録, 1999.

[21] L.Sarason, *Differentiable solutions of symmetrizable and singular symmetric first order systems*, Arch. Rational Mech. Anal. **26** (1967), 357–384.

[22] S.Schochet, *The compressible Euler equations in a bounded domain: Existence of solutions and the incompressible limit*, Comm. Math. Phys. **104** (1986), 49–75.

[23] P.Secchi, *Linear symmetric hyperbolic systems with characteristic boundary*, Math. Methods Appl. Sci. **18** (1995), 855–870.

[24] P.Secchi, *A symmetric positive system with non uniformly characteristic boundary*, preprint.

[25] D.Tartakoff, *Regularity of solutions to boundary value problems for first order systems*, Indiana Univ. Math. J. **21** (1972), 1113–1129.

[26] M.Tsuji, *Regularity of solutions of hyperbolic mixed problems with characteristic boundary*, Proc. Japan Acad. **48** (1972), 719–724.

[27] Y.Yamamoto, *Regularity of solutions of initial boundary value problems for symmetric hyperbolic systems with boundary characteristic of constant multiplicity*, Advances in Nonlinear Partial Differential Equations and Stochastics, World Scientific, 1998, 133–159.

[28] T.Yanagisawa, *The initial boundary value problems for the equations of ideal Magneto-Hydrodynamics*, Hokkaido Math. J. **16** (1987), 295–314.

[29] T.Yanagisawa and A.Matsumura, 理想磁気流体力学の方程式系の初期境界値問題 (境界が完全導体壁の場合), 数理解析研究所講究録 734 (1990), 91–105.

[30] T.Yanagisawa and A.Matsumura, *The fixed boundary value problems for the equations of ideal Magneto-Hydrodynamics with a perfectly conducting wall condition*, Comm. Math. Phys. **136** (1991), 119–140.