

Title	円板摩擦ポンプに関する研究
Author(s)	家元, 良幸
Citation	大阪大学, 1974, 博士論文
Version Type	VoR
URL	https://hdl.handle.net/11094/2533
rights	
Note	

Osaka University Knowledge Archive : OUKA

<https://ir.library.osaka-u.ac.jp/>

Osaka University

円板摩擦ポンプに関する研究

昭和 49 年 10 月

家 元 良 幸

目 次

第 1 章	序 論	1
第 2 章	回転円板間内の流れを層流と仮定した場合の解析	6
第 1 節	緒 言	6
第 2 節	理 論 式	8
2. 1	解析に用いる仮定	8
2. 2	円板入口付近の流れ	8
2. 2. 1	基礎式	8
2. 2. 2	座標変換	10
2. 2. 3	級数展開	13
2. 2. 4	級数解	16
2. 2. 5	数値計算	19
2. 3	中間領域の流れ	20
2. 3. 1	基礎式	20
2. 3. 2	差分近似	22
2. 3. 3	計算式	23
2. 3. 4	動 圧	27
2. 4	大きな半径の領域の流れ	29
第 3 節	数値計算例	34
第 4 節	結 言	37
第 3 章	回転円板間内の流れを乱流と仮定した場合の解析	39
第 1 節	緒 言	39
第 2 節	理 論 式	40
2. 1	解析に用いる仮定	40
2. 2	座標系	41

2.	3	基礎式	44
2.	3.	1 運動方程式	44
2.	3.	2 連続の式	48
2.	3.	3 境界層近似	48
2.	3.	4 基礎式	49
2.	4	境界層内の速度分布および摩擦応力	54
2.	4.	1 境界層内の速度分布	54
2.	4.	2 壁面摩擦応力	55
2.	4.	3 円板間中央における摩擦応力の勾配	55
2.	5	計算式	56
2.	5.	1 助走区間の計算式	57
2.	5.	2 円板入口の初期値	58
2.	5.	3 充満区間の計算式	60
2.	5.	4 大きな半径の領域の計算式	62
2.	5.	5 流速および動圧	64
第 3	節	数値計算例および考察	65
3.	1	計算例および考察	65
3.	1.	1 流量の相違による流れの変化	65
3.	1.	2 円板の回転速度の相違による流れの変化	66
3.	1.	3 入口半径の相違による流れの変化	67
3.	1.	4 係数 k の相違による流れの変化	69
3.	2	層流の場合の計算結果との比較	70
第 4	節	結 言	73
第 4	章	回転円板間内の流れの実験的検証	76
第 1	節	緒 言	76
第 2	節	実験装置	76
2.	1	実験装置の構成	76

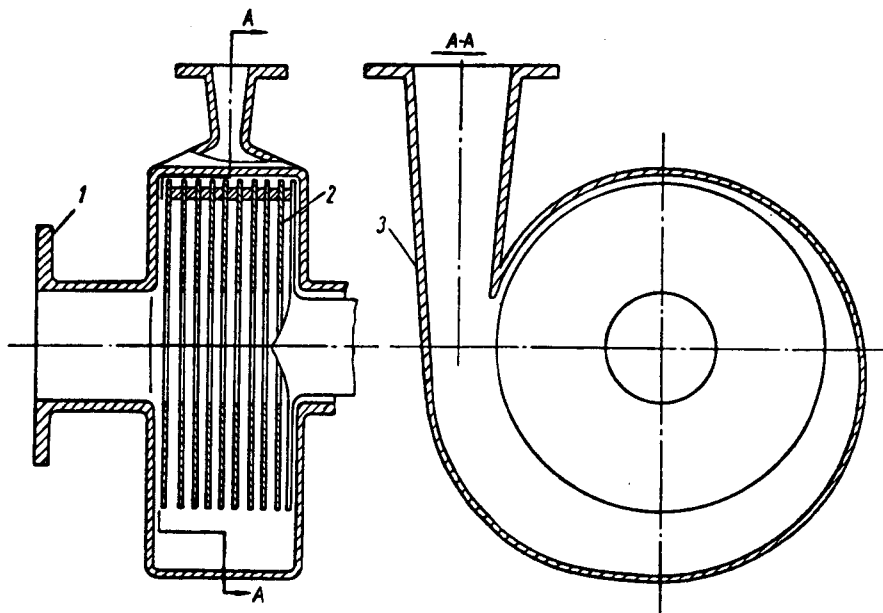
2.	2	回転円板	79
2.	3	リングディフューザ	80
2.	4	吸込管	80
2.	5	回転マノメータ	81
2.	6	水槽	82
2.	7	駆動機	82
第 3 節		実験方法および実験結果の整理方法	82
3.	1	実験方法	82
3.	2	回転円板壁面静圧と回転マノメータの指示値	83
3.	3	実験結果の整理方法	84
第 4 節		実験結果と計算結果および考察	85
4.	1	実験結果と計算結果	85
4.	2	考 察	87
4. 2.	1	端面効果	87
4. 2.	2	理論値と実験値の比較	89
4. 2.	3	円板摩擦ポンプの回転数に対する相似則	90
第 5 節		結 言	90
第 5 章		円板摩擦ポンプの性能	92
第 1 節		緒 言	92
第 2 節		ポンプ性能の計算式	92
2.	1	入 力	92
2.	2	損 失	93
2.	3	出 力	93
2.	4	揚 程	94
2.	5	内部効率	94
2.	6	静圧揚程	95

第 3 節	計算式に対する検討	95
3. 1	内部効率について	96
3. 2	出力について	97
3. 3	揚程について	98
3. 4	回転数に対する相似則について	99
3. 5	解析法について	100
第 4 節	計算結果と実験結果の比較および考察	101
第 5 節	結 言	103
第 6 章	回転円板間内の流れの状態	105
第 1 節	緒 言	105
第 2 節	熱線風速計による実験	106
2. 1	実験装置	106
2. 1. 1	実験装置の構成	106
2. 1. 2	回転円板	107
2. 1. 3	吸込管	109
2. 1. 4	駆動機	109
2. 1. 5	熱線風速計	109
2. 2	実験方法および実験結果の整理方法	110
2. 2. 1	実験方法	110
2. 2. 2	実験結果の整理方法	111
第 3 節	トレーサ法による実験	111
3. 1	実験装置	111
3. 1. 1	回転円板	111
3. 1. 2	回転マノメータ	112
3. 1. 3	水 槽	112
3. 2	実験方法および実験結果の整理方法	112
3. 2. 1	実験方法	112

3. 2. 2	実験結果の整理方法	112
第 4 節	実験結果および考察	113
4. 1	流量の大きい場合	113
4. 2	流量の小さい場合	117
4. 3	種々の流量について	117
4. 4	円板間隔の広い場合	119
4. 5	渦についての一考察	121
第 5 節	結 言	122
第 7 章	結 論	125
謝 辞		129
付 録	回転円板の出口端面効果の理論解析	130
第 1 節	緒 言	130
第 2 節	理 論 式	130
2. 1	基礎式	130
2. 2	級数展開	133
2. 3	解	133
第 3 節	数値計算例および考察	135
第 4 節	結 言	137
文 献		139

第 1 章 序 論

遠心羽根車は二枚のシュラウドの間に数枚の羽根を植えて、羽根の遠心作用によって流体にエネルギーを与えるものである。この二枚のシュラウドはある場合には抵抗として作用し、羽根によって与えられたエネルギーを消費する役割しか果さないが、ある条件ではシュラウド壁面での摩擦力がポンプ作用を果すこともある。円板摩擦ポンプはこのポンプ作用を積極的に利用し、羽根を取り去った羽根車、すなわち二枚のシュラウドのみで構成される羽根車を遠心羽根車の一つの極端な形式として用いるポンプである。円板摩擦ポンプの構造を図 1.1 に示す。ポンプ内の流体は、吸込管 1，回転円板（羽根車）2，渦巻きケーシング 3 の順に流れる。回転円板は中心に開口部をもつ多数の薄い円板で構成され、円板外周付近のボルトなどにより互いに一定の間隔を隔てて一体に組立ててある。



1. 吸込管 2. 回転円板（羽根車） 3. 渦巻きケーシング

図 1.1 円板摩擦ポンプの構造〔1〕

回転円板間内の粘性流体は回転円板との摩擦力により周方向に回転し、発生した遠心力によって回転円板外周に吐出される。

これとは逆に外周から円板に流体を吹きつけることにより、タービンとして利用することができる。

流体機械において、流体と流路壁面との摩擦力は、工学的見地からは運動エネルギーを費やす役割しか果たさず、通常有害なものと考えられてきたが、この摩擦力を積極的に利用するターボ機械は、今世紀の初頭に Tesla によって着想試作され特許になった〔2〕。しかし時代の要求を満たすことができず、幅広い応用にいたらなかった。

その後長らく効果的な用途を見出せないまま顧りみられなかったが、1950 年代以降新しい工業分野の発達にともなってその数々の特長が注目され、特殊な用途が試みられている。すなわちこのポンプは高粘性流体に対して比較的効率が高いので石油輸送パイプラインのポンプとして〔3〕、羽根が無いために流れがはく離を起さず、はく離にともなう騒音が小さいので空気調和用送風機として〔4〕、羽根が無いためキャビテーション特性が良く〔5〕、流量を増すと円板との相対速度が増し、ヘッドが確実に低下するという作動の安定性と、吐出圧力が高い〔6〕ためロケット用インデューサ〔7〕、ボイラ給水用ポンプなどとして、また円板が互いに接近しているのを利用して熱した回転円板により流体を暖めかつ同時に輸送するポンプ送風機として〔8〕、応用する意味が復活した。

このように摩擦を利用する流体機械が見直されるにともなって、この流体機械に関する研究が行なわれるようになった。

1955 年、Vannérus〔8〕は流体を加熱圧送するポンプ送風機として製作された円板摩擦ポンプに対してはじめて理論的考察を加えた。この後も円板摩擦ポンプの設計法の確立のために研究は進められた。その多くは Vannérus 同様 Euler の遠心羽根車理論に基づく一次元理論であり、Rice〔9〕、Куликов〔4〕、Васильцов & Невелич〔1〕らは円板壁

面上の摩擦係数は半径位置にかかわらず一定で、流体の相対速度に関係しないという仮定を用いており、この近似はあらずぎると考えられる。また **Hasinger & Kehrt**〔7〕, **Nendl**〔3〕は周方向と径方向の速度分布を放物線分布と仮定して層流の場合を解いたが、流速分布が放物線分布であるというのはあやまりである。

回転円板間内の流れを層流と仮定した場合の流れは、二枚の回転円板間内の流れという純流体力学の見地から行なわれた研究成果と密接な関連をもっている。層流の場合には、与えられた境界条件を満たすべくナビア・ストークスの式を精度よく解くことに帰着する。回転円板を通り抜ける流れがない場合に対して、**Batchelor**〔10〕, **Stewartson**〔11〕は回転円板間内の流体は回転円板とともに剛体的に回転する解しかないことを示した。回転中心に吹き出しあるいは吸い込みのある場合に対しては、**村田**〔12〕, **Peube & Kreith**〔13〕および **Breiter & Pohlhausen**〔14〕が、円板摩擦ポンプの回転円板間内の流れを層流と仮定した場合の解析に重要な役割をはたす近似解を与えたが、これらの解はさらに精度を上げることが可能である。

一方、乱流と仮定した場合の解析は、速度分布と壁面摩擦力などを仮定することによって積分条件式を用いて行なわれた〔15〕〔16〕。この積分条件式を用いる方法は古くから用いられてきた近似解法であり比較的精度よく近似できるが、その精度は仮定される速度分布と壁面摩擦力などの近似度に負うところが多く、改良の余地は大きい。

さて上述のように回転円板間内の流れの理論解析は、流れを層流あるいは乱流と仮定することによって行なわれており、円板摩擦ポンプの設計の際には回転円板間内の流れが層流域にあるのか乱流域にあるのか遷移域にあるのかを決定することは重要である。この問題に対して **Hasinger & Kehrt** は回転円板間内の流れは小形および中形ポンプでは層流域あるいは遷移域にあるといい、**Васильцов & Невелич**の引用文献は回転円板入口の流れに注目して通常の円板摩擦ポンプでは本質的に乱

流であると述べ、**Köhler**〔15〕は回転円板間内の流れは遷移域では線形の渦を形成し、遷移は円板外周から生じることを明らかにした。また**Pater, Crowther & Rice**〔17〕は円板入口部を除けば、通常層流域あるいは遷移域で運転されると述べている。以上のように回転円板間内の流れ状態について、従来の結果から最終的な結論は得られないように思われる。

さて層流あるいは乱流と仮定した多くの理論は、回転円板の直径が無限に大きいという条件のもとで立てられたが、実際の円板摩擦ポンプの円板径は有限である。

回転円板間内を通り抜ける流れが無い場合の実験結果〔18〕〔19〕によると、この円板径が有限であることが回転円板間内の流れに影響を与え、円板外周付近では流体は円板とともに剛体的に回転せず、この影響は円板間隔が広ければ広いほど著るしい。この実験結果は円板摩擦ポンプの回転円板間内の流れを検討する際に重要な指針を与える。

この円板径が有限であることの回転円板間内の流れに及ぼす影響を端面効果と呼ぶことにする。

端面効果に対する理論解析として、**Nendl**は出口端面効果の及ぶ領域では流体のもつ角運動量は保存されるとして行なったが、この近似は粗いと考えられる。また円板間を通り抜ける流れが無い場合に対しては、**Bennetts & Hocking**〔20〕は端面近くの円板壁面に**Ekman**層が形成され円板間中央付近は一様流である場合の流れを解いている。

円板摩擦ポンプは遠心式や軸流式に比して研究された歴史が浅く、円板摩擦ポンプの構成要素の一つである回転円板の間の流れのみに着目しても上述のような多くの問題が残っている。

そこで、本研究では、円板摩擦ポンプの性能を精度よく推定し、設計パラメータの最適値を求める目的で、その主要構成要素である回転円板に注目して、回転円板間内の流れを解析している。

すなわち本論文の第2章では、入口径は有限で出口径は無限に大き

い回転円板の間の流れを、いたるところ層流と仮定して解析した結果を述べている。この種の計算はきわめて数多いが、本論文の方法は入口付近をゲルトラー級数で展開し、半径の十分大きい位置に **Peube & Kreith** の無限遠からのせつ動解を用い、中間の領域を差分解でつないだもので、厳密に解かれている。このような厳密な解はほかに例がなく、流れの特徴が明解に把握された。

第3章では、いたるところ乱流と仮定して解析し、その計算結果に考察を加え、あわせて第2章の計算結果と比較している。この方法は、回転円板内の流れは本質的にねじれ境界層であることを考慮に入れたもので、直交曲線座標を用いたほかに例のない方法で、仮定される速度分布の形も物理的に無理がなく、ねじれた流れを良好に表わしている。

第4章では第2章と第3章の計算結果を実験的に検証している。そして円板間隔が狭い場合には、層流の場合の無限半径位置からのせつ動解は実験とよく一致し、層流の場合の厳密解は実験とさらに良く一致することを明らかにしている。また円板間隔が広い場合には、理論値は実験値と一致しないが、これは出口端面効果のためであることを明らかにしている。

第5章では第4章の結果を基礎に円板摩擦ポンプの性能の予測方法を示し、最適円板間隔、最適入口径などを求めている。

第6章では、熱線風速計あるいはトレーサ注入法により回転円板間内の流れ状態を明らかにしており、流量などの相違により2種類の渦が観測され、円板入口出口付近を除けば、回転円板間内の流れは層流的であることを示している。

付録では、回転円板の出口端面効果について理論解析している。この理論は遅い流れに対してなされたものであるが、円板間隔が狭いほど端面効果の影響の及ぶ領域は小さく、円板間隔を十分小さくすれば出口端面効果は無視できることを示している。

第2章 回転円板間内の流れを層流と 仮定した場合の解析

第1節 緒 言

本章では、円板摩擦ポンプの回転円板間内の流れがいたるところ層流であると仮定して、流れを理論解析した結果について述べる。

回転軸上に吹き出し、あるいは吸い込みのある無限に大きな二枚の回転円板間内の層流流れは、ポンプとしてのみならず流体力学的にも基礎的な流れの一つであり、ナヴィア・ストークスの式を与えられた境界条件のもとにできるだけ精度良く簡単に解くべく数多くの研究がなされている。

1952年村田〔12〕は、無限半径位置から展開した級数解の第1項までを厳密に、第2項以降の係数をレイノルズ数で展開して求め、始めて解を示した。この解の無限半径位置の流れを示す第0項は流体が円板とともに剛体的に回転することを表わしている。1962年に有名なBreiter & Pohlhausen〔14〕の解が発表されたが、この線形解は村田の級数解の第1項までの解と一致している。また Peube & Kreith〔13〕は村田と同様にして級数の第2項の係数をレイノルズ数による展開ではなく厳密に求めている。

さらに Matsch & Rice〔21〕, Мисюра〔22〕は無限半径位置での流体の剛体的回転と径方向のポアズイユ流を第1項として円板の回転数により級数に展開して求めたが、この解は村田が既に解いたレイノルズ数によって展開した級数解と一致するものであり、円板の回転数が大きく円板間隔が広い場合には級数の収束が悪い。

上述の無限遠からのせつ動解はいずれも半径が小さくなるにつれて収束は急速に悪くなる。そこで半径の小さい領域に対して境界層近似を行なったナヴィア・ストークスの式を数値的に解くことが試みられ、

Breiter & Pohlhausen〔14〕は円板入口付近を含め半径が小さな領域の流れを差分法により求め、半径が大きな領域で成り立つ彼らの線形解に接続した。

Boyd & Rice〔23〕もBreiterと同じように差分法を用い線形化することにより連立一次方程式に変換し数値計算したが、円板間中央において運動方程式を用いず境界条件のみで流れを求めており、解の精度は低い。

Byalyi〔24〕は差分近似を行なったのち緩和法により数値計算したが、この方法は演算時間が長く、収束しないことがある。また Boyack & Rice〔25〕は計算時間を短縮する目的で速度分布を回転軸方向座標の多項式で近似したが、これでポンプ性能を計算する場合には精度がきわめて低い。

本研究では、まず特異点である円板入口とその付近の領域に対して、石沢〔26〕が静止円板間の流れの解析に用いたゲルトラー級数〔27〕を使い厳密解を求めた。この級数は入口から離れるにしたがい収束が悪くなるので、そのような中間領域に対しては差分法により数値計算し半径が大きい領域の解に接続した。通常の境界層問題に対する差分計算法として Görtler〔28〕によって開発され Witting〔29〕によって改良された方法などの直接差分法は、計算時間は短かいが、誤差が一ヶ所に集まり不安定を生じる欠点がある。本研究ではこの欠点を Breiter & Pohlhausen の間接法によって避けている。この差分法は円板壁面上で連続の式を用いるが円板間中央で連続の式を用いない方法と、円板壁面上で連続の式を用いないが円板間中央で連続の式を用いる方法がある。いずれの方法も精度と計算時間に大差はないと考えられるが、本研究ではこの方法のうち Breiter & Pohlhausen と異なり、後者の方法を用いている。半径が十分大きな領域に対しては上述の村田— Peube & Kreith によって求められた解を用いている。

以上のように回転円板間内の領域を三つに分けて解析することにより、

従来 of 解よりも精度よく解析することが可能になった。

第 2 節 理 論 式

2. 1 解析に用いる仮定

解析には次の仮定を用いる。

1. 流れは定常で非圧縮である。
2. 流れは回転軸に関し対称であり、かつ二枚の回転円板間の中央の面に関し対称である。
3. 流れ面は回転円板の回転軸に垂直な面内にある。
4. 円板間流路への流入前の流れは、円板の回転軸方向にいちように分布し径方向に流れ、回転円板入口径の位置から境界層が発達する。
5. 回転円板の直径は無限に大きい。

2. 2 円板入口付近の流れ

はじめに両円板に沿って入口円周から発達する境界層に対して、ゲルトラー級数を適用した解析を述べる。

2. 2. 1 基礎式

回転軸を z 軸とし、一円板上に原点のある円柱座標系 (r, θ, z) を考え、各方向の流速を (u, v, w) とし、圧力を p 、密度を ρ 、動粘性係数を ν とすると、境界層近似を行なった運動方程式は

$$u \frac{\partial u}{\partial r} + w \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{v^2}{r} = -\frac{1}{\rho} \frac{dp}{dr} + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \quad (2.1)$$

$$u \frac{\partial v}{\partial r} + w \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{uv}{r} = \nu \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \quad (2.2)$$

であり，連続の式は

$$\frac{\partial(ur)}{\partial r} + \frac{\partial(wr)}{\partial z} = 0 \quad (2.3)$$

である。また境界条件は次のように表わされる。

円板内 $r > r_i$ において

$$\left\{ \begin{array}{l} z = 0 \text{ (円板壁面)} : u = w = 0, \quad v = r\omega \end{array} \right. \quad (2.4)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} z = h/2 \text{ (ポテンシャルコア部)} : u = U_p(r) \text{ [未知]}, \\ v = w = 0 \end{array} \right. \quad (2.5)$$

$$\text{円板入口半径 } r_i \text{ において } u = U_i, \quad u = w = 0 \quad (2.6)$$

ただし U_i は入口における流入流速で流量が定まると決定される定数， $U_p(r)$ はポテンシャルコア部の流速で半径位置のみの関数， ω は円板の回転角速度， h は円板間隔である。

ところで，円板を通り抜ける流量を Q とすると

$$Q = 4\pi r \int_0^{h/2} u dz = 2\pi r_i h U_i \quad (2.7)$$

である。境界層の排除厚さを δ^* とすると

$$U_p \delta^* = \int_0^{h/2} (U_p - u) dz \quad (2.8)$$

であり，式(2.8)を用いると，式(2.7)は次のようになる。

$$Q = 4\pi r (h/2 - \delta^*) U_p \quad (2.9)$$

あるいは

$$U_p \delta^* = \frac{h}{2} \left(U_p - \frac{Q}{2\pi r h} \right) \quad (2.10)$$

今、円板間中央部付近にポテンシャルコアの存在する助走区間を対象としているので、ポテンシャルコア部では式(2.1)より圧力は

$$-\frac{1}{\rho} \frac{dp}{dr} = U_p \frac{dU_p}{dr} \quad (2.11)$$

あるいは

$$p + \frac{1}{2} \rho U_p^2 = (\text{一定}) \quad (2.12)$$

である。

2. 2. 2 座 標 変 換

物理空間座標 (r , z) を新しい座標 (ζ , η) に次式を用いて変換する。

$$\zeta = \left(\frac{16\pi^2\nu}{Q^2} \right) \int_{r_i}^r U_p r^2 dr = \int_0^\xi U_* r_*^2 d\xi \quad (2.13)$$

$$\eta = \frac{U_p r z}{\left[2\nu \int_{r_i}^r U_p r^2 dr \right]^{1/2}} = \left(\frac{4\pi}{Q} \right) \frac{U_p r z}{(2\zeta)^{1/2}} \quad (2.14)$$

ただし

$$\left. \begin{aligned} U_* &= \frac{U_p}{U_i}, \quad r_* = \frac{r}{r_i}, \quad \xi = \frac{1}{R_u} \frac{r - r_i}{r_i} \\ R_u &= \frac{U_i h^2}{4 r_i \nu}, \quad R_v = \frac{h^2 w}{4 \nu} \end{aligned} \right\} \quad (2.15)$$

で、 R_u, R_v はレイノルズ数である。

さて連続の式 (2. 3) を満足する流れ関数 $\Psi(r, z)$ として次の形を与える。

$$u = \frac{1}{r} \frac{\partial \Psi}{\partial z}, \quad w = -\frac{1}{r} \frac{\partial \Psi}{\partial r} \quad (2. 16)$$

$$\Psi(r, z) = \left(\frac{Q}{4\pi}\right) (2\zeta)^{1/2} F(\zeta, \eta) \quad (2. 17)$$

式 (2. 13), (2. 14), (2. 17) を式 (2. 16) に代入すると、 u と w はそれぞれ次式で表わされる。

$$u = U_p F_\eta \quad (2. 18)$$

$$w = -\frac{4\pi\nu}{Q} \frac{U_p r}{(2\zeta)^{1/2}} \left[F + 2\zeta F_\zeta + \left\{ 2\zeta \frac{(U_p r)_\zeta}{U_p r} - 1 \right\} \eta F_\eta \right] \quad (2. 19)$$

ただし、添字 ζ, η はそれぞれ ζ, η に関する微分を表わす。また

$$v = r\omega G(\zeta, \eta) \quad (2. 20)$$

とおくと、運動方程式 (2. 1), (2. 2) はそれぞれ次式のようにになる。

$$\begin{aligned} U_*^3 r_* \{ F_{\eta\eta\eta} + FF_{\eta\eta} + \lambda(\zeta)(1-F_\eta^2) \\ - 2\zeta(F_\eta F_{\eta\zeta} - F_{\eta\eta} F_\zeta) \} + 2 \frac{R_v^2}{R_u} \zeta G^2 = 0 \end{aligned} \quad (2. 21)$$

$$\begin{aligned} U_* r_*^3 \{ G_{\eta\eta} + (F + 2\zeta F_\zeta) G_\eta - 2\zeta F_\eta G_\zeta \} \\ - 4R_u \zeta F_\eta G = 0 \end{aligned} \quad (2. 22)$$

ただし $\lambda(\zeta)$ は principal function で

$$\lambda(\zeta) = \frac{2\zeta}{U_*} \frac{dU_*}{d\zeta} \quad (2.23)$$

である。

円板間中央付近にポテンシャルコア部を有する助走区間では、境界条件 $z = h/2 : u = U_p(r), v = 0$ は、 $\eta \rightarrow \infty : u \rightarrow U_p(r), v \rightarrow 0$ と置換することができるから、境界条件は次式で表わされる。

$$\left. \begin{aligned} F(\zeta, 0) &= F_\eta(\zeta, 0) = 0 \\ [F_\eta(\zeta, \eta)]_{z=h/2} &= \lim_{\eta \rightarrow \infty} F_\eta(\zeta, \eta) = 1 \end{aligned} \right\} \quad (2.24)$$

$$G(\zeta, 0) = 1, \quad [G(\zeta, \eta)]_{z=h/2} = \lim_{\eta \rightarrow \infty} G(\zeta, \eta) = 0 \quad (2.25)$$

次に上と同様のことから式(2.8)における積分の上限 $z = h/2$ も $\eta \rightarrow \infty$ と置換することができ、式(2.8)は次のようになる。

$$\begin{aligned} U_p \delta^* &= \left(\frac{Q}{4\pi r} \right) (2\zeta)^{1/2} \int_0^{z=h/2} [1 - F_\eta(\zeta, \eta)] d\eta \\ &= \left(\frac{Q}{4\pi r} \right) (2\zeta)^{1/2} \lim_{\eta \rightarrow \infty} [\eta - F(\zeta, \eta)] \end{aligned} \quad (2.26)$$

式(2.10)と式(2.26)を等置すると、連続の条件として次式を得る。

$$U_* r_* = 1 + (2\zeta)^{1/2} \lim_{\eta \rightarrow \infty} [\eta - F(\zeta, \eta)] \quad (2.27)$$

2. 2. 3 級 数 展 開

微分方程式系(2. 21), (2. 22), (2. 23), (2. 24), (2. 25) および (2. 27) を, ζ をパラメータとする級数に展開して解く。そこで, $U_* r_*$, $F(\zeta, \eta)$, $G(\zeta, \eta)$ を次のような級数に展開できるものと仮定する。

$$U_* r_* = \sum_{k=0}^{\infty} A_{k/2} \zeta^{k/2} \quad (2. 28)$$

$$F(\zeta, \eta) = \sum_{k=0}^{\infty} F_{k/2}(\eta) \zeta^{k/2} \quad (2. 29)$$

$$G(\zeta, \eta) = \sum_{k=0}^{\infty} G_{k/2}(\eta) \zeta^{k/2} \quad (2. 30)$$

式(2. 28), (2. 29) を連続の条件(2. 27) に代入すると, 式(2. 28) の係数 $A_0, A_{1/2}, A_1, \dots$ は次のように与えられる。

$$A_0 = 1; \quad A_{1/2} = \sqrt{2} \lim_{\eta \rightarrow \infty} [\eta - F_0(\eta)]; \quad (2. 31)$$

$$A_{k/2} = -\sqrt{2} F_{(k-1)/2}(\infty) \quad (k = 2, 3, 4, \dots)$$

式(2. 28)の展開に適合するためには, $U_*(\zeta), r_*(\zeta)$ はそれぞれ次のような級数で表わされるものでなければならない。

$$U_*(\zeta) = \sum_{k=0}^{\infty} K_{k/2} \zeta^{k/2}, \quad (K_0 = 1) \quad (2. 32)$$

$$r_*(\zeta) = \sum_{k=0}^{\infty} L_{k/2} \zeta^{k/2}, \quad (L_0 = 1, \quad L_{1/2} = 0) \quad (2. 33)$$

さて微分方程式系(2. 21), (2. 22), (2. 23), (2. 24), (2. 25)および(2. 27) はすべて変換された座標系(ζ, η)によって表わされている。したがって, ζ と η の対応関係を明らかにしておく必要が

ある。式 (2. 13) の逆変換は、

$$\xi = \int_0^{\zeta} [U_*(\zeta) r_*^2(\zeta)]^{-1} d\zeta \quad (2. 34)$$

であるから、これに式 (2. 32), (2. 33) の級数表示を入れて整理すれば、次のように $\xi = \xi(\zeta)$ の級数表示が得られる。

$$\xi = \zeta \sum_{k=0}^{\infty} B_{k/2} \zeta^{k/2} \quad (2. 35)$$

$$\left. \begin{aligned} B_0 &= 1 ; \quad B_{1/2} = -\frac{2}{3} K_{1/2} ; \quad B_1 = \frac{1}{2} K_{1/2}^2 - \frac{1}{2} K_1 - L_1 ; \\ B_{3/2} &= -\frac{2}{5} K_{1/2}^3 + \frac{4}{5} K_{1/2} K_1 - \frac{2}{5} K_{3/2} + \frac{4}{5} K_{1/2} L_1 - \frac{4}{5} L_{3/2} ; \\ B_2 &= \frac{1}{3} K_{1/2}^4 - K_{1/2}^2 K_1 + \frac{1}{3} K_1^2 + \frac{2}{3} K_{3/2} K_{1/2} - \frac{1}{3} K_2 \\ &\quad - \frac{2}{3} K_{1/2}^2 L_1 + \frac{2}{3} K_1 L_1 + L_1^2 + \frac{2}{3} K_{1/2} L_{3/2} - \frac{2}{3} L_2 ; \dots \end{aligned} \right\} \quad (2. 36)$$

式 (2. 35) を逆変換して $\zeta = \zeta(\xi)$ の級数表示を求めると次のようになる。

$$\zeta = \xi \sum_{k=0}^{\infty} C_{k/2} \xi^{k/2} \quad (2. 37)$$

$$\left. \begin{aligned} C_0 &= 1 ; \quad C_{1/2} = -B_{1/2} ; \quad C_1 = -B_1 + \frac{3}{2} B_{1/2}^2 ; \\ C_{3/2} &= -B_{3/2} + \frac{7}{2} B_{1/2} B_1 - \frac{21}{8} B_{1/2}^3 ; \\ C_2 &= -B_2 + 4 B_{1/2} B_{3/2} - 10 B_{1/2}^2 B_1 + 2 B_1^2 + 5 B_{1/2}^4 ; \dots \end{aligned} \right\} \quad (2. 38)$$

式 (2. 37), (2. 38) を式 (2. 33) に代入すると、物理空間座標 ξ の関数としての $r_*(\xi)$ の級数表示が得られる。

$$r_*(\xi) = \sum_{k=0}^{\infty} M_{k/2} \xi^{k/2} \quad (2. 39)$$

$$\left. \begin{aligned} M_0 &= 1 ; \quad M_{1/2} = 0 ; \quad M_1 = L_1 ; \quad M_{3/2} = L_{3/2} + \frac{2}{3} K_{1/2} L_1 ; \\ M_2 &= L_2 + K_{1/2} L_{3/2} + L_1 \left(\frac{1}{6} K_{1/2}^2 + \frac{1}{2} K_1 + L_1 \right) ; \dots \end{aligned} \right\} \quad (2.40)$$

さて，式 (2.15) から次の関係がある。

$$\xi = \frac{1}{R_u} \frac{r - r_i}{r_i} = \frac{1}{R_u} (r_* - 1)$$

あるいは

$$r_* = 1 + R_u \xi \quad (2.41)$$

したがって式 (2.39) と式 (2.41) を等置すると次式を得る。

$$M_1 = R_u ; \quad M_{k/2} = 0 \quad (k = 3, 4, 5, \dots) \quad (2.42)$$

式 (2.42) を用いると，式 (2.33) の $L_{k/2}$ ($k=1, 2, 3, \dots$) は式 (2.40) からこれを逆に解くことにより次のようになる。

$$\left. \begin{aligned} L_1 &= R_u ; \quad L_{3/2} = -\frac{2}{3} K_{1/2} R_u ; \\ L_2 &= \left(\frac{1}{2} K_{1/2}^2 - \frac{1}{2} K_1 - R_u \right) R_u ; \dots \end{aligned} \right\} \quad (2.43)$$

次に関数 $\lambda(\zeta)$ の級数展開は式 (2.23) に式 (2.32) を代入することによって次のように与えられる。

$$\lambda(\zeta) = \frac{2\zeta}{U_*} \frac{dU_*}{d\zeta} = \sum_{k=1}^{\infty} r_{k/2} \zeta^{k/2} \quad (2.44)$$

$$\left. \begin{aligned} r_{1/2} &= K_{1/2} \quad ; \quad r_1 = 2K_1 - K_{1/2}^2 \quad ; \quad r_{3/2} = 3K_{3/2} - 3K_{1/2}K_1 + K_{1/2}^3 \quad ; \\ r_2 &= 2K_2 - 4K_{1/2}K_{3/2} - 2K_1^2 + 4K_{1/2}^2K_1 - K_{1/2}^4 \quad ; \dots \end{aligned} \right\} \quad (2.45)$$

以下のすべての計算を通じて式(2.44)の係数 $r_{k/2}$ ($k = 1, 2, 3, \dots$) は中心的な役割を演ずる。したがって $K_{k/2}$ ($k = 1, 2, 3, \dots$) はすべて $r_{k/2}$ に書き直して処理する。

$$\left. \begin{aligned} K_{1/2} &= r_{1/2} \quad ; \quad K_1 = \frac{1}{2} (r_1 + r_{1/2}^2) \quad ; \\ K_{3/2} &= \frac{1}{3} (r_{3/2} + \frac{3}{2} r_{1/2} r_1 + \frac{1}{2} r_{1/2}^3) \quad ; \\ K_2 &= \frac{1}{4} (r_2 + \frac{4}{3} r_{1/2} r_{3/2} + \frac{1}{2} r_1^2 + r_{1/2}^2 r_1 + \frac{1}{6} r_{1/2}^4) \quad ; \dots \end{aligned} \right\} \quad (2.46)$$

以上の計算を総合すればわかるように $U_*(\zeta)$ および $r_*(\zeta)$ などの級数展開における各係数は、すべて $r_{k/2}$ を与えることによって定められることになる。

2. 2. 4 級 数 解

式(2.29), (2.30) および (2.44) を運動方程式(2.21), (2.22) に代入して ζ の指数の等しい係数をまとめると次式を得る。

ζ^0 の係数：

$$X_0 = 0, \quad Y_0 = 0 \quad (2.47)$$

$\zeta^{1/2}$ の係数：

$$X_{1/2} = 0, \quad Y_{1/2} = 0 \quad (2.48)$$

$\zeta^{k/2}$ ($k = 2, 3, 4, \dots$) の係数：

$$\left. \begin{aligned}
& X_{k/2} + \sum_{m=1}^k \sum_{n=0}^m \sum_{j=0}^n K_{i/2} K_{(j-1)/2} K_{(n-j)/2} L_{(m-n)/2} X_{(k-m)/2} \\
& + 2 \frac{R_{v^2}}{R_u} \sum_{j=0}^{k-2} G_{j/2} G_{(k-j-2)/2} = 0, \\
& Y_{k/2} + \sum_{m=1}^k \sum_{n=0}^m \sum_{j=0}^n K_{i/2} L_{(j-1)/2} L_{(n-j)/2} L_{(m-n)/2} Y_{(k-m)/2} \\
& - 4R_u \sum_{j=0}^{k-2} F'_{j/2} G_{(k-j-2)/2} = 0
\end{aligned} \right\} (2.49)$$

ただし,

$$X_0 = F_0''' + F_0 F_0'' , \quad Y_0 = G_0'' + F_0 G_0' \quad (2.50)$$

$$\left. \begin{aligned}
& X_{k/2} = F_{k/2}''' + F_0 F_{k/2}'' - k F_0' F_{k/2}' + (k+1) F_0'' F_{k/2} - r_{k/2} (F_0'^2 - 1) \\
& - \sum_{j=1}^{k-1} \sum_{i=1}^{k-j} r_{j/2} F_{j/2}' F_{(k-i-j)/2}' - F_0' \sum_{j=1}^{k-1} r_{j/2} F_{(k-j)/2}' \\
& - \sum_{j=1}^{k-1} (k-j) F_{j/2}' F_{(k-j)/2}' + \sum_{j=1}^{k-1} (1+j) F_{j/2} F_{(k-j)/2}'' \\
& Y_{k/2} = G_{k/2}'' + F_0 G_{k/2}' - k F_0' G_{k/2} \\
& - \sum_{j=1}^k (k-j) F_{j/2}' G_{(k-j)/2} + \sum_{j=1}^k (1+j) F_{j/2} G_{(k-j)/2}' \\
& (k = 1, 2, 3, \dots)
\end{aligned} \right\} (2.51)$$

であり, 微分は η に関する微分を表わす。

境界条件は式 (2.24), (2.25) よりそれぞれ次のようになる。

$$\left. \begin{aligned}
& F_0(0) = F_0'(0) = 0 , \quad F_0'(\infty) = 1 \\
& F_{k/2}(0) = F_{k/2}'(0) = F_{k/2}'(\infty) = 0 \quad (k=1, 2, 3, \dots)
\end{aligned} \right\} (2.52)$$

$$\left. \begin{aligned} G_0(0) &= 1, \quad G_0(\infty) = 0 \\ G_{k/2}(0) &= G_{k/2}(\infty) = 0 \quad (k = 1, 2, 3, \dots) \end{aligned} \right\} \quad (2.53)$$

さて、2.2.3 において述べたように λ の ζ による級数表示の係数 $r_{k/2}$ ($k = 1, 2, 3, \dots$) を決定することができれば、流れは完全に求められることになる。

式 (2.32), (2.33) を式 (2.28) の左辺に代入し、式 (2.43), (2.46) を用いると、 $A_{k/2}$ に関する次のような表示が得られる。

$$\left. \begin{aligned} A_{1/2} &= r_{1/2} \quad ; \quad A_1 = \frac{1}{2} r_1 + \frac{1}{2} r_{1/2}^2 + R_u \quad ; \\ A_{3/2} &= \frac{1}{3} r_{3/2} + \frac{1}{2} r_{1/2} r_1 + \frac{1}{6} r_{1/2}^3 + \frac{1}{3} r_{1/2} R_u \quad ; \\ A_2 &= \frac{1}{4} r_2 + \frac{1}{3} r_{1/2} r_{3/2} + \frac{1}{8} r_1^2 + \frac{1}{4} r_{1/2}^2 r_1 + \frac{1}{24} r_{1/2}^4 \\ &\quad + \frac{1}{12} r_{1/2}^2 R_u + \frac{1}{4} r_1 R_u - R_u^2 \quad ; \quad \dots \end{aligned} \right\} \quad (2.54)$$

式 (2.54) を式 (2.31) に代入して整理すると、 $r_{k/2}$ ($k=1, 2, 3, \dots$) を定める次式が得られる。

$$\left. \begin{aligned} r_{1/2} &= \sqrt{2} \lim_{\eta \rightarrow \infty} [\eta - F_0(\eta)] \quad ; \\ r_1 &= -r_{1/2}^2 - 2\sqrt{2} F_{1/2}(\infty) - 2R_u \quad ; \\ r_{3/2} &= -\frac{3}{2} r_{1/2} r_1 - \frac{1}{2} r_{1/2}^3 - r_{1/2} R_u - 3\sqrt{2} F_1(\infty) \quad ; \\ r_2 &= -\frac{1}{6} r_{1/2}^4 - r_{1/2}^2 r_1 - \frac{4}{3} r_{1/2} r_{3/2} - \frac{1}{2} r_1^2 - \frac{1}{3} r_{1/2}^2 R_u \\ &\quad - r_1 R_u + 4R_u^2 - 4\sqrt{2} F_{3/2}(\infty) \quad ; \quad \dots \end{aligned} \right\} \quad (2.55)$$

2. 2. 5 数 値 計 算

計算は微分方程式 (2. 47), (2. 48), (2. 49) を境界条件 (2. 52), (2. 53) を満たすべく, 式 (2. 55)を用いて Runge - Kut ta - Gil l 法により行ない, $F_{k/2}$, $G_{k/2}$ を $k = 0$ から順次高次に対して定める。

以上の計算により (ζ, η) を与えると, 式 (2. 35)より ε , そして式 (2. 15) より r , 式 (2. 14) より z が定まる。さらに, 式 (2. 29), (2. 30) から式 (2. 18), (2. 19), (2. 20) を用いて u , v , w が, 式 (2. 12) より p が定まり, 円板入口付近の流れは完全に解けたことになる。

通常ゲルトラー級数を用いるこの種の計算はレイノルズ数に無関係な相似関数群の和で表わされるのが大きな特長であるが, 本計算では $k = 0$ と 1 を除いて相似関数で表わすことができず, レイノルズ数 R_u , R_v が変わるたびに計算しなければならない。しかしながら, このゲルトラー級数を用いる方法は円板入口付近の流れを解く手段として最も精度が高いと考えられる。

数値計算の結果, $k = 0$ と $k = 1$ の $F_{k/2}$ と $G_{k/2}$ の初期値は次のようになる。

$$\left. \begin{aligned} F_0''(0) &= 0.469600 \\ r_{1/2} &= 1.72079 \\ G_0'(0) &= -0.469600 \end{aligned} \right\} \quad (2. 56)$$

$$\left. \begin{aligned} F_{1/2}''(0) &= 1.94975 \\ r_1 &= r_{1/2}^2 - 2\sqrt{2} F_{1/2}(\infty) - 2R_u, \quad F_{1/2}(\infty) = 2.28070 \\ G_{1/2}'(0) &= -0.463266 \end{aligned} \right\} \quad (2. 57)$$

なお本計算では積分間隔 $\Delta\eta$ を 0.05 , $\eta \rightarrow \infty$ を $\eta = 10$ とし, $k = 4$ まで行なった。

以後, 度々用いる二つのレイノルズ数

$$R_1 = \frac{u_0 h}{\nu} \quad , \quad R_2 = \frac{v_0 h}{\nu} \quad (2.58)$$

と本計算に用いた R_u , R_v との関係は,

$$R_u = \frac{R_1}{4 \alpha_i^2} \quad , \quad R_v = \frac{R_2}{4} \quad (2.59)$$

である。ただし, R_1 は流量を代表するレイノルズ数, R_2 は円板の回転速度を代表するレイノルズ数であり, u_0 は半径 $r = h$ における径方向平均流速で $u_0 = Q / (2\pi h^2)$, v_0 は半径 $r = h$ における円板周速で $v_0 = h\omega$, α_i は $\alpha_i = r_i / h$ である。

2. 3 中間領域の流れ

円板入口付近の流れに対するゲルトラー級数の収束が悪くなったこの中間領域の流れに対して差分法を用い, 半径の大きな領域に成り立つ無限半径位置からのせつ動解に接続する。

2. 3. 1 基礎式

中間領域の流れに対しても円板入口付近の流れの解法に用いた座標系をそのまま用いると, 運動方程式と連続の式はそれぞれ式 (2.1), (2.2) と式 (2.3) である。境界条件は次のように表わされる。

$$z = 0 \quad : \quad u = w = 0, \quad v = r\omega \quad (2.60)$$

$$z = h/2 \quad : \quad \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\partial v}{\partial z} = w = 0 \quad (2.61)$$

微分方程式系 (2. 1), (2. 2), (2. 3) を境界条件 (2. 60), (2. 61) を用いて解くに際し, これらの式を次のような無次元量を用いて表わす。

$$\text{座標} \quad \alpha = r/h, \quad \beta = z/h \quad (2. 62)$$

$$\left. \begin{aligned} \text{流速} \quad u^* &= u/u_0, \quad v^* = v/v_0, \quad w^* = w/u_0 \\ \text{静圧} \quad P &= p/(\rho v_0^2/2) \end{aligned} \right\} (2. 63)$$

$$\text{レイノルズ数} \quad R_1 = u_0 h/\nu, \quad R_2 = v_0 h/\nu \quad (2. 64)$$

ただし,

$$u_0 = Q/(2\pi h^2), \quad v_0 = h\omega \quad (2. 65)$$

である。

以上の無次元量を用いると, 運動方程式は次のように表わされる。

$$\begin{aligned} u^* \frac{\partial u^*}{\partial \alpha} + w^* \frac{\partial u^*}{\partial \beta} - \left(\frac{R_2}{R_1}\right)^2 \frac{v^{*2}}{\alpha} \\ - \frac{1}{2} \left(\frac{R_2}{R_1}\right)^2 \frac{dP}{d\alpha} + \frac{1}{R_1} \frac{\partial^2 u^*}{\partial \beta^2} \end{aligned} \quad (2. 66)$$

$$u^* \frac{\partial v^*}{\partial \alpha} + w^* \frac{\partial v^*}{\partial \beta} + \frac{u^* v^*}{\alpha} = \frac{1}{R_1} \frac{\partial^2 v^*}{\partial \beta^2} \quad (2. 67)$$

連続の式は次のようになる。

$$\frac{\partial(u^* \alpha)}{\partial \alpha} + \frac{\partial(w^* \alpha)}{\partial \beta} = 0 \quad (2. 68)$$

あるいは

$$\alpha \int_0^{1/2} u^* d\beta = \frac{1}{2} \quad (2. 69)$$

である。また境界条件は次のようになる。

$$\beta = 0 : \quad \mathbf{u}^* = \mathbf{w}^* = 0, \quad \mathbf{v}^* = \alpha \quad (2.70)$$

$$\beta = 1/2 : \quad \frac{\partial \mathbf{u}^*}{\partial \beta} = \frac{\partial \mathbf{v}^*}{\partial \beta} = \mathbf{w}^* = 0 \quad (2.71)$$

さらに $\beta = 1/2$ において式 (2.68) を用いると、

$$\left(\frac{\partial^2 \mathbf{w}^*}{\partial \beta^2} \right)_{\beta=1/2} = 0 \quad (2.72)$$

となり、これを付加的な式として用いることにする。

2. 3. 2 差分近似

微分方程式は放物形であるので流れは上流から下流に向かって
順次定まる

図 2.1 に示すように領域
を α 方向に g_k , β 方向に
1 の長方形格子に区切り、
 $\alpha = \alpha_{k-1}$ における流れを既
知として、 $\alpha = \alpha_k$ におけ
る流れを求める式をたてる。

この時、格子点は次のよ
うに表わされる。

$$\alpha_k = \alpha_{k-1} + g_k, \quad \beta_j = (j-1)l \quad (j=1, 2, 3, \dots, j_c) \quad (2.73)$$

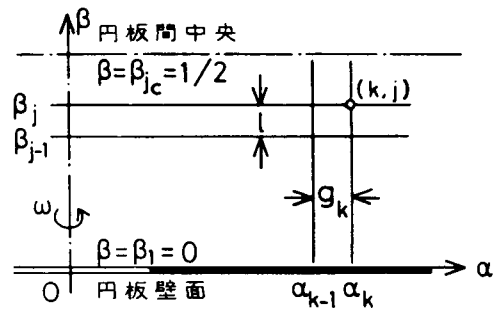


図 2.1 差分近似に用いる格子

そして次のような α 方向に後方差分、 β 方向に中央差分を用いる。

$$\left(\frac{\partial u^*}{\partial \alpha}\right)_{k,j} = \frac{u_{k,j}^* - u_{k-1,j}^*}{g_k} \equiv \frac{\Delta u_j^*}{g_k} \quad (2.74)$$

$$\left(\frac{\partial u^*}{\partial \beta}\right)_{k,j} = \frac{u_{k,j+1}^* - u_{k,j-1}^*}{2l} \quad (2.75)$$

$$\left(\frac{\partial^2 u^*}{\partial \beta^2}\right)_{k,j} = \frac{u_{k,j+1}^* + u_{k,j-1}^* - 2u_{k,j}^*}{l^2} \quad (2.76)$$

v^*, w^*, P についても同様である。

2. 3. 3 計 算 式

上述の差分近似式 (2.73), (2.74), (2.75) および (2.76) を基礎式 (2.66), (2.67), (2.68), (2.70), (2.71) および (2.72) に適用する。

$\Delta u_1^*, \Delta v_1^*, \Delta w_1^*$ および $\Delta w_{j_c}^*$ は, 境界条件より次のように既知である。

$$j = 1 \quad : \quad \Delta u_1^* = \Delta w_1^* = 0, \quad \Delta v_1^* = g_k \quad (2.77)$$

$$j = j_c \quad : \quad \Delta w_{j_c}^* = 0 \quad (2.78)$$

さて α 方向の格子間隔 g_k を十分小さくとると $\Delta u_j^*, \Delta v_j^*, \Delta w_j^*$ および ΔP は十分小さく, Δ の量の積は Δ の量に比べて十分小さく無視できる。この結果, 計算式は次のような Δu_j^* ($j = 2, 3, 4, \dots, j_c$), Δv_j^* ($j = 2, 3, 4, \dots, j_c$), Δw_j^* ($j = 2, 3, 4, \dots, j_c - 1$), ΔP に関する $3(j_c - 1)$ 元の連立一次方程式となる。

j = 2 :

$$\begin{aligned}
& \left(\frac{\mathbf{u}_{k-1,2}^*}{\mathbf{g}_k} + \frac{2}{\mathbf{R}_1 l^2} \right) \Delta \mathbf{u}_2^* + \left(\frac{\mathbf{w}_{k-1,2}^*}{2l} - \frac{1}{\mathbf{R}_1 l^2} \right) \Delta \mathbf{u}_3^* \\
& + \left[-2 \left(\frac{\mathbf{R}_2}{\mathbf{R}_1} \right)^2 \frac{\mathbf{v}_{k-1,2}^*}{\alpha_k} \right] \Delta \mathbf{v}_2^* + \left(\frac{\mathbf{u}_{k-1,3}^*}{2l} \right) \Delta \mathbf{w}_2^* \\
& + \left[\frac{1}{2} \left(\frac{\mathbf{R}_2}{\mathbf{R}_1} \right)^2 \frac{1}{\mathbf{g}_k} \right] \Delta \mathbf{P} = \left(\frac{\mathbf{R}_2}{\mathbf{R}_1} \right)^2 \frac{\mathbf{v}_{k-1,2}^{*2}}{\alpha_k} - \mathbf{w}_{k-1,2}^* \frac{\mathbf{u}_{k-1,3}^*}{2l} \\
& + \frac{\mathbf{u}_{k-1,3}^* - 2\mathbf{u}_{k-1,2}^*}{\mathbf{R}_1 l^2} \quad (2.79)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \left(\frac{\mathbf{v}_{k-1,2}^*}{\alpha_k} \right) \Delta \mathbf{u}_2^* + \left(\frac{\mathbf{u}_{k-1,2}^*}{\mathbf{g}_k} + \frac{\mathbf{u}_{k-1,2}^*}{\alpha_k} + \frac{2}{\mathbf{R}_1 l^2} \right) \Delta \mathbf{v}_2^* \\
& + \left(\frac{\mathbf{w}_{k-1,2}^*}{2l} - \frac{1}{\mathbf{R}_1 l^2} \right) \Delta \mathbf{v}_3^* + \left(\frac{\mathbf{v}_{k-1,3}^* - \alpha_{k-1}}{2l} \right) \Delta \mathbf{w}_2^* \\
& = \mathbf{g}_k \left(\frac{\mathbf{w}_{k-1,2}^*}{2l} + \frac{1}{\mathbf{R}_1 l^2} \right) - \frac{\mathbf{u}_{k-1,2}^* \mathbf{v}_{k-1,2}^*}{\alpha_k} - \mathbf{w}_{k-1,2}^* \frac{\mathbf{v}_{k-1,3}^* - \alpha_{k-1}}{2l} \\
& + \frac{\mathbf{v}_{k-1,3}^* + \alpha_{k-1} - 2\mathbf{v}_{k-1,2}^*}{\mathbf{R}_1 l^2} \quad (2.80)
\end{aligned}$$

$$\left(\frac{1}{\mathbf{g}_k} + \frac{1}{\alpha_k} \right) \Delta \mathbf{u}_2^* + \left(\frac{1}{2l} \right) \Delta \mathbf{w}_3^* = - \frac{\mathbf{u}_{k-1,2}^*}{\alpha_k} - \frac{\mathbf{w}_{k-1,3}^*}{2l} \quad (2.81)$$

j = 3, 4, 5, ..., j_c - 2 :

$$\begin{aligned}
& \left(-\frac{\mathbf{w}_{k-1,j}^*}{2l} - \frac{1}{\mathbf{R}_1 l^2} \right) \Delta \mathbf{u}_{j-1}^* + \left(\frac{\mathbf{u}_{k-1,j}^*}{\mathbf{g}_k} + \frac{2}{\mathbf{R}_1 l^2} \right) \Delta \mathbf{u}_j^* \\
& + \left(\frac{\mathbf{w}_{k-1,j}^*}{2l} - \frac{1}{\mathbf{R}_1 l^2} \right) \Delta \mathbf{u}_{j+1}^* + \left[-2 \left(\frac{\mathbf{R}_2}{\mathbf{R}_1} \right)^2 \frac{\mathbf{v}_{k-1,j}^*}{\alpha_k} \right] \Delta \mathbf{v}_j^*
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \left(\frac{u_{k-1,j+1}^* - u_{k-1,j-1}^*}{2l} \right) \Delta w_j^* + \left[\frac{1}{2} \left(\frac{R_2}{R_1} \right)^2 \frac{1}{g_k} \right] \Delta P \\
& = \left(\frac{R_2}{R_1} \right)^2 \frac{v_{k-1,j}^{*2}}{\alpha_k} - w_{k-1,j}^* \frac{u_{k-1,j+1}^* - u_{k-1,j-1}^*}{2l} \\
& \quad + \frac{u_{k-1,j+1}^* + u_{k-1,j-1}^* - 2u_{k-1,j}^*}{R_1 l^2}
\end{aligned} \tag{2.82}$$

$$\begin{aligned}
& \left(\frac{v_{k-1,j}^*}{\alpha_k} \right) \Delta u_j^* + \left(-\frac{w_{k-1,j}^*}{2l} - \frac{1}{R_1 l^2} \right) \Delta v_{j-1}^* \\
& + \left(\frac{u_{k-1,j}^*}{g_k} + \frac{u_{k-1,j}^*}{\alpha_k} + \frac{2}{R_1 l^2} \right) \Delta v_j^* + \left(\frac{w_{k-1,j}^*}{2l} - \frac{1}{R_1 l^2} \right) \Delta v_{j+1}^* \\
& + \left(\frac{v_{k-1,j+1}^* - v_{k-1,j-1}^*}{2l} \right) \Delta w_j^* \\
& = - \frac{u_{k-1,j}^* v_{k-1,j}^*}{\alpha_k} - w_{k-1,j}^* \frac{v_{k-1,j+1}^* - v_{k-1,j-1}^*}{2l} \\
& \quad + \frac{v_{k-1,j+1}^* + v_{k-1,j-1}^* - 2v_{k-1,j}^*}{R_1 l^2}
\end{aligned} \tag{2.83}$$

$$\begin{aligned}
& \left(\frac{1}{g_k} + \frac{1}{\alpha_k} \right) \Delta u_j^* + \left(-\frac{1}{2l} \right) \Delta w_{j-1}^* + \left(\frac{1}{2l} \right) \Delta w_{j+1}^* \\
& = - \frac{u_{k-1,j}^*}{\alpha_k} - \frac{w_{k-1,j+1}^* - w_{k-1,j-1}^*}{2l}
\end{aligned} \tag{2.84}$$

$$j = j_c - 1 :$$

$$\begin{aligned}
& \left(-\frac{w_{k-1,j}^*}{2l} - \frac{1}{R_1 l^2} \right) \Delta u_{j-1}^* + \left(\frac{u_{k-1,j}^*}{g_k} + \frac{2}{R_1 l^2} \right) \Delta u_j^* \\
& + \left(\frac{w_{k-1,j}^*}{2l} - \frac{1}{R_1 l^2} \right) \Delta u_{j+1}^* + \left[-2 \left(\frac{R_2}{R_1} \right)^2 \frac{v_{k-1,j}^*}{\alpha_k} \right] \Delta v_j^*
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \left(\frac{u_{k-1,j+1}^* - u_{k-1,j-1}^*}{2l} \right) \Delta w_j^* + \left[\frac{1}{2} \left(\frac{R_2}{R_1} \right)^2 \frac{1}{g_k} \right] \Delta P \\
& = \left(\frac{R_2}{R_1} \right)^2 \frac{v_{k-1,j}^{*2}}{\alpha_k} - w_{k-1,j}^* \frac{u_{k-1,j+1}^* - u_{k-1,j-1}^*}{2l} \\
& + \frac{u_{k-1,j+1}^* + u_{k-1,j-1}^* - 2u_{k-1,j}^*}{R_1 l^2} \quad (2.85)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \left(\frac{v_{k-1,j}^*}{\alpha_k} \right) \Delta u_j^* + \left(-\frac{w_{k-1,j}^*}{2l} - \frac{1}{R_1 l^2} \right) \Delta v_{j-1}^* \\
& + \left(\frac{u_{k-1,j}^*}{g_k} + \frac{u_{k-1,j}^*}{\alpha_k} + \frac{2}{R_1 l^2} \right) \Delta v_j^* + \left(\frac{w_{k-1,j}^*}{2l} - \frac{1}{R_1 l^2} \right) \Delta v_{j+1}^* \\
& + \left(\frac{v_{k-1,j+1}^* - v_{k-1,j-1}^*}{2l} \right) \Delta w_j^* \\
& = -\frac{u_{k-1,j}^* v_{k-1,j}^*}{\alpha_k} - w_{k-1,j}^* \frac{v_{k-1,j+1}^* - v_{k-1,j-1}^*}{2l} \\
& + \frac{v_{k-1,j+1}^* + v_{k-1,j-1}^* - 2v_{k-1,j}^*}{R_1 l^2} \quad (2.86)
\end{aligned}$$

$$\left(\frac{1}{g_k} + \frac{1}{\alpha_k} \right) \Delta u_j^* + \left(-\frac{1}{2l} \right) \Delta w_{j-1}^* = -\frac{u_{k-1,j}^*}{\alpha_k} \frac{w_{k-1,j-1}^*}{2l} \quad (2.87)$$

$j = j_c :$

$$\begin{aligned}
& \left(-\frac{2}{R_1 l^2} \right) \Delta u_{j_c-1}^* + \left(\frac{u_{k-1,j_c}^*}{g_k} + \frac{2}{R_1 l^2} \right) \Delta u_{j_c}^* \\
& + \left[-2 \left(\frac{R_2}{R_1} \right)^2 \frac{v_{k-1,j_c}^*}{\alpha_k} \right] \Delta v_{j_c}^* + \left[\frac{1}{2} \left(\frac{R_2}{R_1} \right)^2 \frac{1}{g_k} \right] \Delta P \\
& = \left(\frac{R_2}{R_1} \right)^2 \frac{v_{k-1,j_c}^{*2}}{\alpha_k} + \frac{2(u_{k-1,j_c-1}^* - u_{k-1,j_c}^*)}{R_1 l^2} \quad (2.88)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \left(\frac{v_{k-1,jc}^*}{\alpha_k} \right) \Delta u_{jc}^* + \left(-\frac{2}{R_1 l^2} \right) \Delta v_{jc-1}^* \\
& + \left(\frac{u_{k-1,jc}^*}{g_k} + \frac{u_{k-1,jc}^*}{\alpha_k} + \frac{2}{R_1 l^2} \right) \Delta v_{jc}^* \\
& = -\frac{u_{k-1,jc}^* v_{k-1,jc}^*}{\alpha_k} + \frac{2(v_{k-1,jc-1}^* - v_{k-1,jc}^*)}{R_1 l^2} \quad (2.89)
\end{aligned}$$

$$\left(\frac{1}{g_k} + \frac{1}{\alpha_k} \right) \Delta u_{jc}^* + \left(-\frac{1}{l} \right) \Delta w_{jc-1}^* = -\frac{u_{k-1,jc}^*}{\alpha_k} + \frac{w_{k-1,jc-1}^*}{l} \quad (2.90)$$

以上の計算式により $\alpha = \alpha_k$ における u^* , v^* , w^* および P は定まり, 無限半径位置からのせつ動解に接続することができる。

計算に際して α 方向の格子間隔 g_k を 0.01~0.1 とし, β 方向の格子の数を 20, すなわち格子間隔 $l = 1/40$, $j_c = 21$ とし, Δu_{jc}^* , Δv_{jc}^* , Δw_{jc}^* , Δu_{jc-1}^* , Δv_{jc-1}^* , Δw_{jc-1}^* , ..., Δu_{jc}^* , Δv_{jc}^* , $[(1/2)(R_2/R_1)^2 (1/g_k)] \Delta P$ を未知数とする 60 元の連立一次方程式を消去法により数値計算した。

回転軸方向の格子間隔を $l=1/40$ としたが, この値は Boyd & Rice が十分な精度があると述べているし, またこれ以上分割点を多くすると数値計算に膨大な時間を必要とするからである。半径方向の格子間隔 g_k についても同様である。

これらの計算結果の精度の検定のための一方法として, 連続の式の積分形 (2.69) を用いた。

2. 3. 4 動 圧

流速分布が定まると動圧を決定できる。回転軸方向の流速は小さいからこれを無視すると, 絶対流速 c_j は次のように表わされる。

$$c_j = \sqrt{u_j^2 + v_j^2} \quad (2.91)$$

これを回転軸方向に平均した平均流速 \bar{c} は次のようになる。

$$\bar{c} = \frac{1}{2j_c - 1} \sum_{j=1}^{2j_c-1} c_j \quad (2.92)$$

そして動圧 p_d は，

$$p_d = \frac{\rho}{2} \bar{c}^2 \quad (2.93)$$

で表わされる。

無次元動圧 P_d を次のように定義する。

$$P_d = p_d / \left(\frac{\rho}{2} v_o^2 \right) \quad (2.94)$$

この方法は各流体粒子のもつ速度を平均し，その平均速度による動圧を算出したものである。

本研究に用いた上述の動圧を算出する方法のほかにも次のような方法がある。

$$P_d = \frac{1}{2j_c - 1} \sum_{j=1}^{2j_c-1} \left(\frac{\rho}{2} c_j^2 \right) \quad (2.95)$$

しかし，流体は回転円板間内の非一様分布を回転円板流出後も維持できず，いちようになっていく。この時エネルギーの消散があるため，式(2.95)のように各流体粒子が円板内でもつ運動エネルギーの平均値を，そのままその半径位置での動圧と見積ることは不適当である。

2. 4 大きな半径の領域の流れ

無限半径位置から展開して求められた級数解の第2項までの厳密解を

$$\left. \begin{aligned} \text{径方向流速} \quad U &= \frac{u\alpha}{u_0} \\ \text{周方向流速} \quad V &= \frac{v}{v_0 \alpha} \\ \text{軸方向流速} \quad W &= \frac{w\alpha}{u_0} \\ \text{静 圧} \quad P &= \frac{p^{\beta=0}}{\rho v_0^2 / 2} \end{aligned} \right\} \quad (2.96)$$

と無次元量で表わすと次のようになる。

$$\begin{aligned} U &= \frac{\sqrt{R_2}}{\sinh\sqrt{R_2} - \sin\sqrt{R_2}} \left[\sinh\sqrt{R_2}\beta \cos\sqrt{R_2}\beta \sin\sqrt{R_2} \right. \\ &\quad - \sinh\sqrt{R_2}\beta \sin\sqrt{R_2}\beta (\cosh\sqrt{R_2} + \cos\sqrt{R_2}) \\ &\quad \left. + \cosh\sqrt{R_2}\beta \sin\sqrt{R_2}\beta \sinh\sqrt{R_2} \right] \\ &\quad - \frac{R_1}{\alpha^2} \frac{\cosh\sqrt{R_2} + \cos\sqrt{R_2}}{(\sinh\sqrt{R_2} - \sin\sqrt{R_2})^2} \left[\frac{1}{5} \frac{1}{\sinh\sqrt{R_2} - \sin\sqrt{R_2}} \right. \\ &\quad \times \{ 2 \sinh\sqrt{R_2}\beta \sin\sqrt{R_2}\beta (\sinh\sqrt{R_2} \cos\sqrt{R_2} - \cosh\sqrt{R_2} \sin\sqrt{R_2}) \\ &\quad + \sinh\sqrt{R_2}\beta \cos\sqrt{R_2}\beta (\cosh^2\sqrt{R_2} - 2 \cosh\sqrt{R_2} \cos\sqrt{R_2} \\ &\quad - \sinh\sqrt{R_2} \sin\sqrt{R_2} + 1) + \cosh\sqrt{R_2}\beta \sin\sqrt{R_2}\beta (\cos^2\sqrt{R_2} \\ &\quad - 2 \cosh\sqrt{R_2} \cos\sqrt{R_2} + \sinh\sqrt{R_2} \sin\sqrt{R_2} + 1) \\ &\quad \left. - \cosh\sqrt{R_2}\beta \cos\sqrt{R_2}\beta (\sinh\sqrt{R_2} - \sin\sqrt{R_2})(\cosh\sqrt{R_2} - \cos\sqrt{R_2}) \} \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{5} \{ (\sinh^2 \sqrt{R_2} \beta + \cosh^2 \sqrt{R_2} \beta) \cosh \sqrt{R_2} \\
& \quad - 2 \sinh \sqrt{R_2} \beta \cosh \sqrt{R_2} \beta \sinh \sqrt{R_2} \\
& \quad - 2 \sin \sqrt{R_2} \beta \cos \sqrt{R_2} \beta \sin \sqrt{R_2} \\
& \quad + (\sin^2 \sqrt{R_2} \beta - \cos^2 \sqrt{R_2} \beta) \cos \sqrt{R_2} \} \\
& + \frac{1}{4} \{ -\sinh \sqrt{R_2} \beta \sin \sqrt{R_2} \beta (\cosh \sqrt{R_2} + \cos \sqrt{R_2}) \\
& \quad + \sinh \sqrt{R_2} \beta \cos \sqrt{R_2} \beta \sin \sqrt{R_2} \\
& \quad + \cosh \sqrt{R_2} \beta \sin \sqrt{R_2} \beta \sinh \sqrt{R_2} \} \\
& + \frac{\sqrt{R_2}}{4} \left[\frac{1}{\sinh \sqrt{R_2} - \sin \sqrt{R_2}} \right. \\
& \quad \times \{ 2 \sinh \sqrt{R_2} \beta \sin \sqrt{R_2} \beta \sinh \sqrt{R_2} \sin \sqrt{R_2} \\
& \quad + (\sinh \sqrt{R_2} \beta \cos \sqrt{R_2} \beta + \cosh \sqrt{R_2} \beta \sin \sqrt{R_2} \beta) \\
& \quad \times (\sinh \sqrt{R_2} \cos \sqrt{R_2} - \cosh \sqrt{R_2} \sin \sqrt{R_2}) \} \\
& \quad + \beta \{ \sinh \sqrt{R_2} \beta \sin \sqrt{R_2} \beta (\sinh \sqrt{R_2} - \sin \sqrt{R_2}) \\
& \quad + \cosh \sqrt{R_2} \beta \cos \sqrt{R_2} \beta (\sinh \sqrt{R_2} + \sin \sqrt{R_2}) \\
& \quad - (\sinh \sqrt{R_2} \beta \cos \sqrt{R_2} \beta + \cosh \sqrt{R_2} \beta \sin \sqrt{R_2} \beta) \\
& \quad \times (\cosh \sqrt{R_2} + \cos \sqrt{R_2}) \} \left. \right] \quad (2.97)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
V &= 1 + \frac{R_1}{\alpha^2 \sqrt{R_2}} \frac{1}{\sinh \sqrt{R_2} - \sin \sqrt{R_2}} \\
& \quad \times \{ -\sinh \sqrt{R_2} \beta \cos \sqrt{R_2} \beta \sinh \sqrt{R_2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \cosh\sqrt{R_2}\beta \sin\sqrt{R_2}\beta \sin\sqrt{R_2} \\
& + (\cosh\sqrt{R_2}\beta \cos\sqrt{R_2}\beta - 1) (\cosh\sqrt{R_2} + \cos\sqrt{R_2}) \} \\
& - \frac{R_1^2}{\alpha^4 R_2} \frac{\cosh\sqrt{R_2} + \cos\sqrt{R_2}}{(\sinh\sqrt{R_2} - \sin\sqrt{R_2})^2} \left[\frac{1}{5} \frac{1}{\sinh\sqrt{R_2} - \sin\sqrt{R_2}} \right. \\
& \quad \times \{ -\sinh\sqrt{R_2}\beta \sin\sqrt{R_2}\beta (\sinh\sqrt{R_2} - \sin\sqrt{R_2}) \\
& \quad \times (\cosh\sqrt{R_2} - \cos\sqrt{R_2}) + \sinh\sqrt{R_2}\beta \cos\sqrt{R_2}\beta (-\cos^2\sqrt{R_2} \\
& \quad + 2 \cosh\sqrt{R_2} \cos\sqrt{R_2} - \sinh\sqrt{R_2} \sin\sqrt{R_2} - 1) \\
& \quad + \cosh\sqrt{R_2}\beta \sin\sqrt{R_2}\beta (\cosh^2\sqrt{R_2} - 2 \cosh\sqrt{R_2} \cos\sqrt{R_2} \\
& \quad - \sinh\sqrt{R_2} \sin\sqrt{R_2} + 1) - 2 \cosh\sqrt{R_2}\beta \cos\sqrt{R_2}\beta \\
& \quad \times (\sinh\sqrt{R_2} \cos\sqrt{R_2} - \cosh\sqrt{R_2} \sin\sqrt{R_2}) \\
& \quad + \frac{1}{4} (3 \sinh\sqrt{R_2} \cosh\sqrt{R_2} + 11 \sinh\sqrt{R_2} \cos\sqrt{R_2} \\
& \quad - 11 \cosh\sqrt{R_2} \sin\sqrt{R_2} - 3 \sin\sqrt{R_2} \cos\sqrt{R_2}) \} \\
& + \frac{1}{4} \{ \sinh\sqrt{R_2}\beta \cos\sqrt{R_2}\beta \sinh\sqrt{R_2} \\
& \quad - \cosh\sqrt{R_2}\beta \sin\sqrt{R_2}\beta \sin\sqrt{R_2} \\
& \quad - \cosh\sqrt{R_2}\beta \cos\sqrt{R_2}\beta (\cosh\sqrt{R_2} + \cos\sqrt{R_2}) \} \\
& + \frac{1}{10} \{ (\sinh^2\sqrt{R_2}\beta + \cosh^2\sqrt{R_2}\beta) \cosh\sqrt{R_2} \\
& \quad - 2 \sinh\sqrt{R_2}\beta \cosh\sqrt{R_2}\beta \sinh\sqrt{R_2} + (\cos^2\sqrt{R_2}\beta \\
& \quad - \sin^2\sqrt{R_2}\beta) \cosh\sqrt{R_2} + 2 \sin\sqrt{R_2}\beta \cos\sqrt{R_2}\beta \sin\sqrt{R_2} \}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{\sqrt{R_2}}{4} \left[\frac{1}{\sinh\sqrt{R_2} - \sin\sqrt{R_2}} \right. \\
& \times \{ 2 (1 - \cosh\sqrt{R_2}\beta \cos\sqrt{R_2}\beta) \sinh\sqrt{R_2} \sin\sqrt{R_2} \\
& - (\sinh\sqrt{R_2}\beta \cos\sqrt{R_2}\beta - \cosh\sqrt{R_2}\beta \sin\sqrt{R_2}\beta) \\
& \times (\sinh\sqrt{R_2} \cos\sqrt{R_2} - \cosh\sqrt{R_2} \sin\sqrt{R_2}) \} \\
& + \beta \{ \sinh\sqrt{R_2}\beta \sin\sqrt{R_2}\beta (\sinh\sqrt{R_2} + \sin\sqrt{R_2}) \\
& - \cosh\sqrt{R_2}\beta \cos\sqrt{R_2}\beta (\sinh\sqrt{R_2} - \sin\sqrt{R_2}) \\
& + (\sinh\sqrt{R_2}\beta \cos\sqrt{R_2}\beta - \cosh\sqrt{R_2}\beta \sin\sqrt{R_2}\beta) \\
& \times (\cosh\sqrt{R_2} + \cos\sqrt{R_2}) \} \left. \right] \quad (2.98)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
W = & - \frac{2R_1}{\alpha^3\sqrt{R_2}} \frac{\cosh\sqrt{R_2} + \cos\sqrt{R_2}}{(\sinh\sqrt{R_2} - \sin\sqrt{R_2})^2} \left[\frac{1}{10} \frac{1}{\sinh\sqrt{R_2} - \sin\sqrt{R_2}} \right. \\
& \times \{ \sinh\sqrt{R_2}\beta \sin\sqrt{R_2}\beta (\cosh^2\sqrt{R_2} \\
& - 4 \cosh\sqrt{R_2} \cos\sqrt{R_2} + \cos^2\sqrt{R_2} + 2) \\
& + \sinh\sqrt{R_2}\beta \cos\sqrt{R_2}\beta (-\sinh\sqrt{R_2} \cosh\sqrt{R_2} \\
& - \sinh\sqrt{R_2} \cos\sqrt{R_2} + 3 \cosh\sqrt{R_2} \sin\sqrt{R_2} \\
& - \sin\sqrt{R_2} \cos\sqrt{R_2}) + \cosh\sqrt{R_2}\beta \sin\sqrt{R_2}\beta \\
& \times (-\sinh\sqrt{R_2} \cosh\sqrt{R_2} + 3 \sinh\sqrt{R_2} \cos\sqrt{R_2} \\
& - \cosh\sqrt{R_2} \sin\sqrt{R_2} - \sin\sqrt{R_2} \cos\sqrt{R_2}) \\
& \left. + \cosh\sqrt{R_2}\beta \cos\sqrt{R_2}\beta (\sinh\sqrt{R_2} - \sin\sqrt{R_2})^2 \right\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{10} \{ -(\sinh^2 \sqrt{R_2} \beta + \cosh^2 \sqrt{R_2} \beta) \sinh \sqrt{R_2} \\
& + 2 \sinh \sqrt{R_2} \beta \cosh \sqrt{R_2} \beta \cosh \sqrt{R_2} \\
& + (-\sin^2 \sqrt{R_2} \beta + \cos^2 \sqrt{R_2} \beta) \sin \sqrt{R_2} \\
& - 2 \sin \sqrt{R_2} \beta \cos \sqrt{R_2} \beta \cos \sqrt{R_2} \} \\
& + \frac{\sqrt{R_2}}{4} \left[\frac{1}{\sinh \sqrt{R_2} - \sin \sqrt{R_2}} \{ (-\sinh \sqrt{R_2} \beta \cos \sqrt{R_2} \beta \right. \\
& + \cosh \sqrt{R_2} \beta \sin \sqrt{R_2} \beta) \sinh \sqrt{R_2} \sin \sqrt{R_2} \\
& + \sinh \sqrt{R_2} \beta \sin \sqrt{R_2} \beta (\sinh \sqrt{R_2} \cos \sqrt{R_2} \\
& - \cosh \sqrt{R_2} \sin \sqrt{R_2}) \} \\
& + \beta \{ -\sinh \sqrt{R_2} \beta \sin \sqrt{R_2} \beta (\cosh \sqrt{R_2} + \cos \sqrt{R_2}) \\
& + \sinh \sqrt{R_2} \beta \cos \sqrt{R_2} \beta \sin \sqrt{R_2} \\
& + \cosh \sqrt{R_2} \beta \sin \sqrt{R_2} \beta \sinh \sqrt{R_2} \} \Big] \Big]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
P = & \alpha^2 - 4 \frac{R_1}{\sqrt{R_2}} \log_e \alpha \frac{\cosh \sqrt{R_2} + \cos \sqrt{R_2}}{\sinh \sqrt{R_2} - \sin \sqrt{R_2}} \\
& + \frac{R_1^2}{\alpha^2 R_2} \frac{\cosh \sqrt{R_2} + \cos \sqrt{R_2}}{(\sinh \sqrt{R_2} - \sin \sqrt{R_2})^3} \\
& \times \left[\frac{1}{10} (-7 \sinh \sqrt{R_2} \cosh \sqrt{R_2} + \sinh \sqrt{R_2} \cos \sqrt{R_2} \right. \\
& - \cosh \sqrt{R_2} \sin \sqrt{R_2} + 7 \sin \sqrt{R_2} \cos \sqrt{R_2}) \\
& \left. + \sqrt{R_2} \sinh \sqrt{R_2} \sin \sqrt{R_2} \right] + (\text{定数})
\end{aligned} \tag{2.99}$$

無次元動圧 P_a は式 (2. 91), (2. 92), (2. 93), (2. 94) を用い, 回転軸方向の分割点をさらに多くして数値的に求めた。

第 3 節 数値計算例

流量を代表するレイノルズ数 R_1 , 円板の回転速度を代表するレイノルズ数 R_2 , 入口無次元半径 α_i の三つの値によって流れは決定される。

図 2. 2 に $R_1 = 13500$, $R_2 = 17.5$, $\alpha_i = 35$ の場合の流速分布, 図 2. 3 に $R_1 = 1640$, $R_2 = 17.3$, $\alpha_i = 35$ の場合の流速分布を示す。 U は径方向無次元流速, V は周方向無次元流速である。図の縦軸 β は回転軸方向座標を示し, $\beta = 0$ は円板壁面を, $\beta = 0.5$ は円板間中央を表わす。流れは円板間中央の面に関して対称であるので半分のみを表示してある。

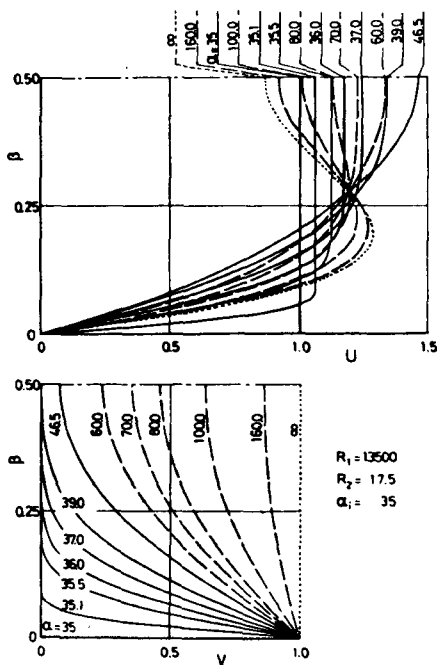


図 2. 2 層流流速分布

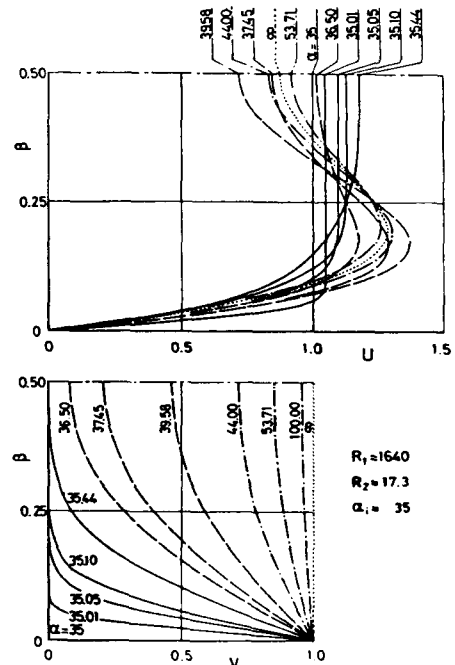


図 2. 3 層流流速分布

またパラメータ α は半径位置を表わしている。

図 2.4 にそれぞれの場合の静圧 P と動圧 P_d の半径 α に対する分布を示す。静圧および動圧は円板入口で 0 と表示してある。

流量の大きな $R_1 = 13500$ の場合には、 $\alpha = 35$ で予回転なしにいちように円板に流入した流れのポテンシャルコア部の径方向流速 U は、境界層の発達のために増加する。静圧 P は減少し動圧 P_d は増

加するが全圧は負の値を示し、円板はエネルギーを与えるのではなくかえって抵抗として作用する。 $\alpha = 40$ 付近になると全圧は正となり、円板は流体にエネルギーを与えポンプ作用をするようになる。そして $\alpha = 40$ までの助走区間を経たのちも U は円板間中央で増速を続け $\alpha = 46.5$ で最大となる。この半径位置まで静圧 P は減少する一方である。こののち円板の回転によって周方向流速 V は大きくなり静圧は上昇し、円板壁面の強い遠心作用のため U は壁面近くで大きく中央で小さい無限半径位置での分布に近づく。

流量の小さな $R_1 = 1640$ の場合には、助走区間の径方向の長さは短かく、 U の増速は小さいので静圧低下は少なく、入口から流体はエネルギーを与えられる。そして小さな半径位置から円板の回転による遠心効果が見られ、 U は円板壁面付近で大きく円板間中央付近で小さな分布を示す ($\alpha = 40$ 付近)。 V の分布がいちようになり遠心力がいちようになる

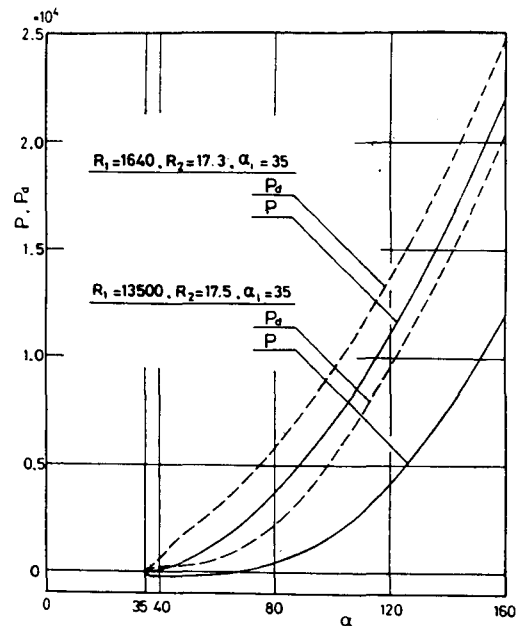


図 2.4 層流静圧分布および動圧分布

につれて、遠心力を除く慣性力の効果が表われて、 U は円板間中央付近で大きく壁面付近で小さい傾向になる ($\alpha = 40 \sim 54$ 付近)。こののち半径の増加とともに慣性力は減少し、遠心力と圧力勾配と粘性力のつりあう無限半径位置の流れに近づく。

図 2.5 は無限半径位置からのせつ動解の収束範囲を示すもので、円板間中央における径方向流速 $U_{\beta=0.5}$ を縦軸に、半径 α を横軸に表わしてある。

無限半径位置から展開した級数の第 1 項の $U_{\beta=0.5}$ は、流量の相違にもかかわらず R_2 がほとんど変わらないので、図では一本の直線になる。流量が小さい場合には入口の影響がなくなると ($\alpha = 58$ 付近) 無限半径位置から展開した第 2 項までの級数解につながるが、流量が大きい場合には $\alpha = 160$ においてもつながらず、流量が大きい場合には入口の影響は半径の大きな位置にまで及び、またこの級数解の収束は悪くなることを示している。

なお、ゲルトラー級数は、 $R_1=13500$ の場合には $\alpha=35.01$ まで、 $R_1=1640$ の場合には $\alpha=35.01$ まで用いた。ゲルトラー級数の第 1 項は、径方向にはブラジウス流れを示し、周方向にはかきとり境界層の流れを示している。流量が大きいほどこの傾向は強く、円板の回転の効果は半径の比較的大きな位置で表われはじめ、流量が大きいほどより大きな半径位置までゲルトラー級数の収束は良好となる。

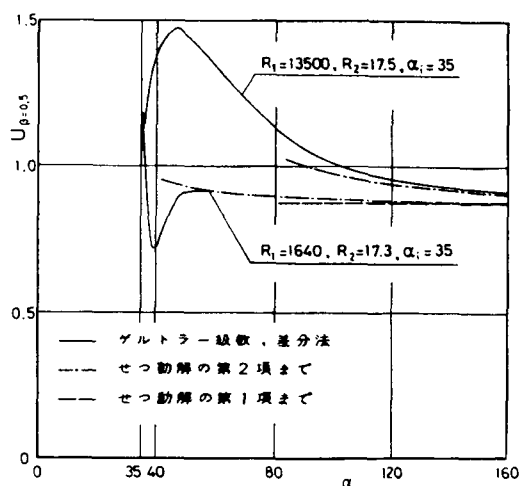


図 2.5 層流の場合の無限半径位置からのせつ動解の収束範囲

第 4 節 結 言

本章では、回転軸上に吹き出しのある有限の入口径をもつ無限に大きな二枚の同じ向きに等速で回転する円板の間の流れを、いたるところ層流であると仮定してその解析の方法を述べ、それを用いて二つの流量に対して計算した結果を示した。この結果、流量が大きい場合には円板は入口付近で抵抗として作用し、エネルギーを消費する役割しか果たさないため、円板入口径を大きくすべきであり、また流量が大きい場合には円板入口の影響が円板の大きな半径位置にまで及ぶことが明らかとなった。

本研究に用いた解析方法は、円板を半径方向に三つの領域に分け、入口付近にゲルトラー級数を用い、中間領域を差分法により、そして大きな半径位置には村田—Peube & Kreith の級数を用いて解いたもので、特異点である円板入口とその付近の流れを厳密に解くことができるようになった。

最も簡単に計算できるのは村田—Peube & Kreith の級数解である。次に一部数値計算の入るゲルトラー級数であり、中間領域に対する差分法は多元の連立一次方程式を解くという純粋な数値計算によらなければならない、長い演算時間を必要とする。

R_1 が大きい場合には、遠心力を除く慣性力が大きいためにゲルトラー級数は半径の比較的大きな位置まで収束は良好であるが、村田—Peube & Kreith の級数の収束は悪くなり、より大きな半径位置までしか用いることができない。これとは逆に R_2 , α_1 が大きい場合には、円板の回転の効果が小さな半径位置から表われ、ゲルトラー級数の収束は円板入口から円板内に入るにつれて急速に悪くなり、入口の極く近傍にしか用いることができない。しかし村田—Peube & Kreith の解はより小さな半径位置まで適用でき、入口の影響がなくなれば用いることが可能となる。

実際に計算する際には，上述のことから三つの領域を R_1, R_2, α_i の値によって半径方向に移動すべきであることがわかる。

また中間領域の計算に際しては，流量が大きくなると差分法により数値計算しなければならない半径域は増加するが，流れの半径位置に対する変化の割合が比較的小さくなるために，差分法に用いる半径方向の格子間隔を広くしても計算精度は低下しないと考えられる。

第 3 章 回転円板間内の流れを乱流と 仮定した場合の解析

第 1 節 緒 言

本章では、円板摩擦ポンプの回転円板間内の流れがいたるところ乱流であると仮定して流れを解析した結果について述べ、さらに前章の層流の場合の計算結果と比較検討する。

乱流流れは現在においても盛んに研究されているが、未知の点が数多く残っている。しかしながら実際の流体機械を設計する際には近似的にしろ、この乱流流れを解かねばならない。

円板摩擦ポンプの回転円板間内の流れを乱流と仮定した場合に対して Rice〔9〕らは運動量理論に基づく一次元理論をたてたが、円板壁面上の摩擦係数を半径位置にかかわらず一定で相対流速に関係しないという仮定を用いており、この近似はあらずぎると考えられる。このような幼稚な一次元理論を改良すべく Köhler〔15〕は運動方程式を回転軸方向に積分した積分条件式を用いて解析した。流れはいたるところ乱流境界層内にあるとし、径方向と周方向の速度分布として Kármán が単一回転円板に用いた速度分布〔30〕を二枚の回転円板間内の流れにもほとんどそのまま用いたが、流れは円板に流入してから無限半径に至るまで相似な速度分布を保つことはありえない。また Bakke, Kreider & Kreith〔16〕は径方向の圧力分布を求めるために、回転軸方向の流速を完全に無視して周方向に $1/7$ 乗則のなりたつ速度分布を仮定し積分条件式を解いている。

この積分条件式を用いる方法は、レイノルズ応力の未知である乱流流れに対する古典的な近似解法の一つで、比較的精度よく流れを表わすことができるが、その精度は仮定される速度分布や壁面摩擦力などの精度に

より左右され、改良の余地は大きい。

本研究では、円板入口付近のポテンシャルコアの存在する助走区間、およびポテンシャルコアが消失し円板間内の流れがすべて境界層内にある充満区間に対して、積分条件式による三次元境界層理論を用いた。この三次元境界層理論は、Gruschwitz〔31〕が静止曲り流路の流れの考察に用い、Mager〔32〕により回転する曲り流路にも適用できるように一般化された理論であり、三宅〔33〕は遠心羽根車のシュラウドに沿う境界層の流れの解析に用いた。三宅は主流流線が対数らせんを描くと仮定して主流流線に沿う方向とそれに直交する方向に座標軸をとる直交曲線座標系を用いたが、この座標系は回転円板間内の流れの解析にも重要な指針を与える。本研究に用いた解析法は、従来の方法に比べて未知数の数が多く計算は複雑になるが、仮定する速度分布に無理がないため、計算後に得られた結果は回転円板間内のねじれた流れをより良好に表わすことができた。

第 2 節 理 論 式

2. 1 解析に用いる仮定

解析には次の仮定を用いる。

1. 流れは定常で非圧縮である。
2. 流れは回転軸に関し対称であり、かつ二枚の回転円板間の中央の面に関し対称である。
3. 流れ面は回転円板の回転軸に垂直な面内にある。
4. 円板間流路への流入前の流れは、円板の回転軸方向にいちように分布し径方向に流れ、回転円板入口径の位置から境界層が発達し、始めから乱流境界層である。

5. 回転円板の直径は無限に大きい。

2. 2 座 標 系

計算には図 3.1 に示す直交曲線座標を用いる。図中の r_i は回転円板の入口半径を、 h は円板間隔を、

ω は回転角速度を表わす。図のように回転軸を z 軸とし、円板間中央における流線に沿って s 軸、 s 軸と z 軸に直角に n 軸をとる。ただし (n, s, z) の順に右手系をなすように座標軸の正の向きを定める。このように定めると、 s 軸は流れの向きと反対の向きが正になる。 λ は円板間中央の流線の円周に対する傾き角で順流の場合は正、逆流の場合は負の符号をとり、半径 r のみの関数である。

このとき座標 (n, s) は円柱座標 (r, θ) を用いて次のように表わされる。

$$n = \pm \theta \pm \int_{r'}^r \frac{\cot \lambda}{r} dr \quad (3.1)$$

$$s = \theta - \int_{r'}^r \frac{\tan \lambda}{r} dr \quad (3.2)$$

ただし、複号の上段は順流の場合で、下段は逆流の場合である。

以下、式 (3.15) までの複号はこれに従う。

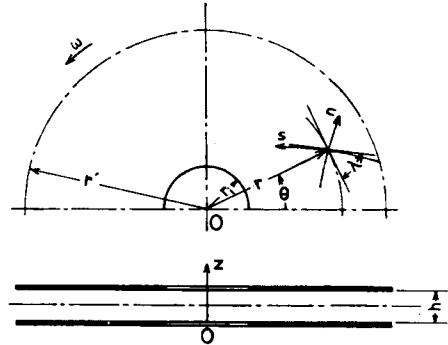


図 3.1 (a) 順流の場合の座標系

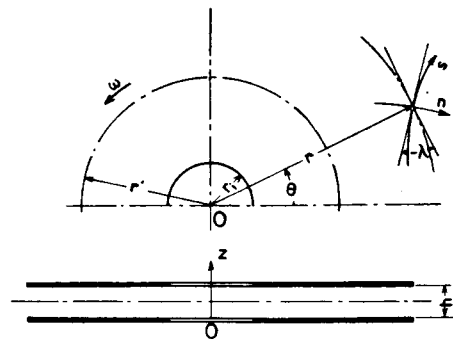


図 3.1 (b) 逆流の場合の座標系

式 (3. 1) と式 (3. 2) より次の関係がある。

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \mathbf{n}} &= \pm \mathbf{r} \sin \lambda \cos \lambda, & \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \mathbf{s}} &= -\mathbf{r} \sin \lambda \cos \lambda \\ \frac{\partial \mathbf{n}}{\partial \theta} &= \pm 1, & \frac{\partial \mathbf{n}}{\partial \mathbf{r}} &= \pm \frac{\cot \lambda}{\mathbf{r}} \\ \frac{\partial \mathbf{s}}{\partial \theta} &= 1, & \frac{\partial \mathbf{s}}{\partial \mathbf{r}} &= -\frac{\tan \lambda}{\mathbf{r}} \end{aligned} \right\} \quad (3. 3)$$

一方，円柱座標系 (\mathbf{r} , θ) とデカルト座標系 (\mathbf{x} , \mathbf{y}) の間の関係は，

$$\mathbf{x} = \mathbf{r} \cos \theta, \quad \mathbf{y} = \mathbf{r} \sin \theta$$

であるから次式を得る。

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{r}} &= \cos \theta, & \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \theta} &= -\mathbf{r} \sin \theta \\ \frac{\partial \mathbf{y}}{\partial \mathbf{r}} &= \sin \theta, & \frac{\partial \mathbf{y}}{\partial \theta} &= \mathbf{r} \cos \theta \\ \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \mathbf{x}} &= \cos \theta, & \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \mathbf{y}} &= \sin \theta \\ \frac{\partial \theta}{\partial \mathbf{x}} &= -\frac{\sin \theta}{\mathbf{r}}, & \frac{\partial \theta}{\partial \mathbf{y}} &= \frac{\cos \theta}{\mathbf{r}} \end{aligned}$$

以上の関係式より座標 (\mathbf{n} , \mathbf{s} , \mathbf{z}) が直交していることは，次式を用いて容易に確かめられる。

$$\sum_{\mathbf{x}_i=\mathbf{x},\mathbf{y},\mathbf{z}} \frac{\partial \mathbf{n}}{\partial \mathbf{x}_i} \frac{\partial \mathbf{s}}{\partial \mathbf{x}_i} = \sum_{\mathbf{x}_i=\mathbf{x},\mathbf{y},\mathbf{z}} \frac{\partial \mathbf{n}}{\partial \mathbf{x}_i} \frac{\partial \mathbf{z}}{\partial \mathbf{x}_i} = \sum_{\mathbf{x}_i=\mathbf{x},\mathbf{y},\mathbf{z}} \frac{\partial \mathbf{s}}{\partial \mathbf{x}_i} \frac{\partial \mathbf{z}}{\partial \mathbf{x}_i} = 0$$

さて、座標系 (n , s , z) の第 1 種基本量 (g_n , g_s , g_z) には、

$$\frac{1}{g_n^2} = \left(\frac{\partial n}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial n}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial n}{\partial z} \right)^2$$

$$\frac{1}{g_s^2} = \left(\frac{\partial s}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial s}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial s}{\partial z} \right)^2$$

$$\frac{1}{g_z^2} = \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial z} \right)^2$$

なる関係があるから、

$$g_n = \pm r \sin \lambda$$

$$g_s = r \cos \lambda$$

$$g_z = 1$$

である。さらに

$$g_n^2 = \left(\frac{\partial x}{\partial n} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial n} \right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial n} \right)^2$$

$$g_s^2 = \left(\frac{\partial x}{\partial s} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial s} \right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial s} \right)^2$$

なる関係があるから、

$$\frac{\partial \theta}{\partial n} = \pm \sin^2 \lambda$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial s} = \cos^2 \lambda$$

である。

また (n , s , z) 軸の (x , y , z) 軸に対する方向余弦をそれ

ぞれ (l_n, m_n, n_n) , (l_s, m_s, n_s) , (l_z, m_z, n_z)
 とすると,

$$l_n = \cos(\lambda + \theta) \quad m_n = \sin(\lambda + \theta) \quad n_n = 0$$

$$l_s = -\sin(\lambda + \theta) \quad m_s = \cos(\lambda + \theta) \quad n_s = 0$$

$$l_z = 0 \quad m_z = 0 \quad n_z = 1$$

である。

2. 3 基 礎 式

2. 3. 1 運動方程式

相対流れの運動方程式をベクトル表示すると次式である。

$$\text{grad}(I/\rho) - \vec{w} \times \text{rot } \vec{w} + 2(\vec{\omega} \times \vec{w}) = \vec{E}/\rho \quad (3.4)$$

ここに I/ρ は相対全水頭, \vec{w} は相対流速ベクトル, $\vec{\omega}$ は回転角速度ベクトル, \vec{E}/ρ は摩擦応力の効果を表わすベクトル, ρ は流体の密度である。また p を静圧とする。

(n, s, z) 軸方向の単位ベクトルを \vec{e}_n , \vec{e}_s , \vec{e}_z として,
 (n, s, z) 軸方向の成分にそれぞれ添字 n, s, z を付ける。

$$\vec{\omega} = \omega \vec{e}_z$$

$$\vec{w} = w_n \vec{e}_n + w_s \vec{e}_s + w_z \vec{e}_z$$

と表わすと

$$\text{grad}(I/\rho) = \frac{1}{g_n} \frac{\partial(I/\rho)}{\partial n} \vec{e}_n + \frac{1}{g_s} \frac{\partial(I/\rho)}{\partial s} \vec{e}_s + \frac{1}{g_z} \frac{\partial(I/\rho)}{\partial z} \vec{e}_z$$

$$\begin{aligned}
\text{rot } \vec{w} &= \frac{1}{g_s g_z} \left\{ \frac{\partial (g_z w_z)}{\partial s} - \frac{\partial (g_s w_s)}{\partial z} \right\} \vec{e}_n \\
&+ \frac{1}{g_n g_z} \left\{ \frac{\partial (g_n w_n)}{\partial z} - \frac{\partial (g_z w_z)}{\partial n} \right\} \vec{e}_s \\
&+ \frac{1}{g_n g_s} \left\{ \frac{\partial (g_s w_s)}{\partial n} - \frac{\partial (g_n w_n)}{\partial s} \right\} \vec{e}_z
\end{aligned}$$

である。

\vec{E} のデカルト座標系の各座標軸方向成分 E_x , E_y , E_z は

$$E_x = \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z}$$

$$E_y = \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x}$$

$$E_z = \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y}$$

である。応力テンソルの (x, y, z) 座標系における成分と (n, s, z) 座標系における成分の間には,

$$\begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} l_n & l_s & l_z \\ m_n & m_s & m_z \\ n_n & n_s & n_z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_n & \tau_{ns} & \tau_{nz} \\ \tau_{ns} & \sigma_s & \tau_{sz} \\ \tau_{nz} & \tau_{sz} & \sigma_z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} l_n & m_n & n_n \\ l_s & m_s & n_s \\ l_z & m_z & n_z \end{pmatrix}$$

なる関係があるから

$$\sigma_x = \sigma_n \cos^2(\lambda + \theta) - \tau_{ns} \sin 2(\lambda + \theta) + \sigma_s \sin^2(\lambda + \theta)$$

$$\sigma_y = \sigma_n \sin^2(\lambda + \theta) + \tau_{ns} \sin 2(\lambda + \theta) + \sigma_s \cos^2(\lambda + \theta)$$

$$\sigma_z = \sigma_z$$

$$\tau_{xy} = \frac{1}{2} \sigma_n \sin 2(\lambda + \theta) + \tau_{ns} \cos 2(\lambda + \theta) - \frac{1}{2} \sigma_s \sin 2(\lambda + \theta)$$

$$\tau_{xz} = \tau_{nz} \cos(\lambda + \theta) - \tau_{sz} \sin(\lambda + \theta)$$

$$\tau_{yz} = \tau_{nz} \sin(\lambda + \theta) + \tau_{sz} \cos(\lambda + \theta)$$

となる。

ここで、流体の粘性および乱れによる応力は、 τ_{sz} ， τ_{nz} のほかはこれら二つの応力に比べて小さいと考えてよいから、

$$\sigma_n = \sigma_s = \sigma_z = \tau_{ns} = 0$$

とおくことができ、

$$\sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = \tau_{xy} = 0$$

となる。

よって

$$E_x = \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z}, \quad E_y = \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z}, \quad E_z = \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y}$$

となる。

したがって

$$\begin{pmatrix} E_n \\ E_s \\ E_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} l_n & m_n & n_n \\ l_s & m_s & n_s \\ l_z & m_z & n_z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{pmatrix}$$

なる関係より

$$E_n = \frac{\partial \tau_{nz}}{\partial z}$$

$$E_s = \frac{\partial \tau_{sz}}{\partial z}$$

$$E_z = \pm \frac{1}{r \sin \lambda} \frac{\partial \tau_{nz}}{\partial n} + \frac{1}{r \cos \lambda} \frac{\partial \tau_{sz}}{\partial s} \\ + \tau_{nz} \left(\frac{\cos \lambda}{r} - \frac{d\lambda}{dr} \sin \lambda \right) + \tau_{sz} \left(-\frac{\sin \lambda}{r} - \frac{d\lambda}{dr} \cos \lambda \right)$$

である。

ゆえに、 n ， s ， z 軸各方向の運動方程式は次式で表わされる。

n 方向：

$$\pm \frac{w_n}{r \sin \lambda} \frac{\partial w_n}{\partial n} + \frac{w_s}{r \cos \lambda} \frac{\partial w_n}{\partial s} + w_z \frac{\partial w_n}{\partial z} \\ - w_n w_s \left(\frac{\sin \lambda}{r} + \frac{d\lambda}{dr} \cos \lambda \right) + w_s^2 \left(-\frac{\cos \lambda}{r} + \frac{d\lambda}{dr} \sin \lambda \right) - 2\omega w_s \\ = \mp \frac{1}{\rho} \frac{1}{r \sin \lambda} \frac{\partial p}{\partial n} + r \omega^2 \cos \lambda + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \tau_{nz}}{\partial z} \quad (3.5)$$

s 方向：

$$\pm \frac{w_n}{r \sin \lambda} \frac{\partial w_s}{\partial n} + \frac{w_s}{r \cos \lambda} \frac{\partial w_s}{\partial s} + w_z \frac{\partial w_s}{\partial z} \\ + w_n w_s \left(\frac{\cos \lambda}{r} - \frac{d\lambda}{dr} \sin \lambda \right) + w_n^2 \left(\frac{\sin \lambda}{r} + \frac{d\lambda}{dr} \cos \lambda \right) + 2\omega w_n \\ = -\frac{1}{\rho} \frac{1}{r \cos \lambda} \frac{\partial p}{\partial s} - r \omega^2 \sin \lambda + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \tau_{sz}}{\partial z} \quad (3.6)$$

z 方向 :

$$\begin{aligned}
 & \pm \frac{w_n}{r \sin \lambda} \frac{\partial w_z}{\partial n} + \frac{w_s}{r \cos \lambda} \frac{\partial w_z}{\partial s} + w_z \frac{\partial w_z}{\partial z} \\
 & = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \frac{1}{\rho} \left\{ \pm \frac{1}{r \sin \lambda} \frac{\partial \tau_{nz}}{\partial n} + \frac{1}{r \cos \lambda} \frac{\partial \tau_{sz}}{\partial s} \right. \\
 & \quad \left. + \tau_{nz} \left(\frac{\cos \lambda}{r} - \frac{d\lambda}{dr} \sin \lambda \right) - \tau_{sz} \left(\frac{\sin \lambda}{r} + \frac{d\lambda}{dr} \cos \lambda \right) \right\} \quad (3.7)
 \end{aligned}$$

式 (3.5), (3.6) の左辺第 1 項から第 5 項は流体の流れの場所的加速度による慣性力を表わし, 左辺第 6 項はコリオリの力, 右辺第 1 項は圧力勾配, 第 2 項は遠心力, 第 3 項は摩擦力を表わしている。

2. 3. 2 連 続 の 式

連続の式をベクトル表示すると次式である。

$$\operatorname{div} \vec{w} = 0 \quad (3.8)$$

これをスカラで表わすと次式となる。

$$\begin{aligned}
 & \pm \frac{1}{r \sin \lambda} \frac{\partial w_n}{\partial n} + \frac{1}{r \cos \lambda} \frac{\partial w_s}{\partial s} + \frac{\partial w_z}{\partial z} \\
 & + w_n \left(\frac{\cos \lambda}{r} - \frac{d\lambda}{dr} \sin \lambda \right) - w_s \left(\frac{\sin \lambda}{r} + \frac{d\lambda}{dr} \cos \lambda \right) = 0 \quad (3.9)
 \end{aligned}$$

2. 3. 3 境 界 層 近 似

運動方程式 (3.5), (3.6), (3.7) および連続の式 (3.9) に対して境界層近似を行なう。平板境界層に対して Prandl が行なったように境界層厚さは小さいものとして, 式 (3.5), (3.6), (3.7) および (3.9) の各項の大きさの程度を比較し, 無視しうる項を省略す

ると，式 (3. 7) は次式となる。

$$\frac{\partial p}{\partial z} = 0 \quad (3. 10)$$

式 (3. 5), (3. 6), (3. 9) には省略される項は無い。

さて，円板間中央 $z = h/2$ では $w_z = 0$ であり， $w_s = W_s$ とおく。そして s 軸を円板間中央の流線に沿って定めているので， $w_n = 0$ である。したがって，円板間中央における運動方程式は次のように表わされる。

n 方向 :

$$\begin{aligned} W_s^2 \left(-\frac{\cos \lambda}{r} + \frac{d\lambda}{dr} \sin \lambda \right) - 2\omega W_s \\ = + \frac{1}{\rho} \frac{1}{r \sin \lambda} \frac{\partial p}{\partial n} + r \omega^2 \cos \lambda + \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \tau_{nz}}{\partial z} \right)_{z=h/2} \end{aligned} \quad (3. 11)$$

s 方向 :

$$\begin{aligned} \frac{W_s}{r \cos \lambda} \frac{\partial W_s}{\partial s} = - \frac{1}{\rho} \frac{1}{r \cos \lambda} \frac{\partial p}{\partial s} - r \omega^2 \sin \lambda + \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \tau_{sz}}{\partial z} \right)_{z=h/2} \end{aligned} \quad (3. 12)$$

2. 3. 4 基 礎 式

運動方程式 (3. 5), (3. 6) を，連続の式 (3. 9) を用いて円板壁面 $z = 0$ から境界層外縁 $z = \delta$ まで積分することにより積分条件式が得られる。

n 方向の積分条件式は式 (3. 5) を積分し，次のようにして得られる。連続の式 (3. 9) および $w_{n,z=\delta} = w_{n,z=0} = 0$ を用いると，

$$\begin{aligned}
\int_0^\delta \mathbf{w}_z \frac{\partial \mathbf{w}_n}{\partial z} dz &= [\mathbf{w}_n \mathbf{w}_z]_0^\delta - \int_0^\delta \mathbf{w}_n \frac{\partial \mathbf{w}_z}{\partial z} dz \\
&= \int_0^\delta \mathbf{w}_n \left\{ \pm \frac{1}{r \sin \lambda} \frac{\partial \mathbf{w}_n}{\partial n} + \frac{1}{r \cos \lambda} \frac{\partial \mathbf{w}_s}{\partial s} \right. \\
&\quad \left. + \mathbf{w}_n \left(\frac{\cos \lambda}{r} - \frac{d\lambda}{dr} \sin \lambda \right) + \mathbf{w}_s \left(-\frac{\sin \lambda}{r} - \frac{d\lambda}{dr} \cos \lambda \right) \right\} dz
\end{aligned}$$

であり，また

$$\begin{aligned}
\int_0^\delta 2 \mathbf{w}_n \frac{\partial \mathbf{w}_n}{\partial n} dz &= \int_0^\delta \frac{\partial \mathbf{w}_n^2}{\partial n} dz = \frac{\partial}{\partial n} \int_0^\delta \mathbf{w}_n^2 dz \\
\int_0^\delta \left(\mathbf{w}_s \frac{\partial \mathbf{w}_n}{\partial s} + \mathbf{w}_n \frac{\partial \mathbf{w}_s}{\partial s} \right) dz &= \int_0^\delta \frac{\partial (\mathbf{w}_n \mathbf{w}_s)}{\partial s} dz = \frac{\partial}{\partial s} \int_0^\delta \mathbf{w}_n \mathbf{w}_s dz
\end{aligned}$$

であるから

$$\begin{aligned}
&\pm \frac{1}{r \sin \lambda} \frac{\partial}{\partial n} \int_0^\delta \mathbf{w}_n^2 dz + \frac{1}{r \cos \lambda} \frac{\partial}{\partial s} \int_0^\delta \mathbf{w}_n \mathbf{w}_s dz \\
&+ \left(\frac{\cos \lambda}{r} - \frac{d\lambda}{dr} \sin \lambda \right) \int_0^\delta (\mathbf{w}_n^2 - \mathbf{w}_s^2) dz \\
&- 2 \left(\frac{\sin \lambda}{r} + \frac{d\lambda}{dr} \cos \lambda \right) \int_0^\delta \mathbf{w}_n \mathbf{w}_s dz - 2 \omega \int_0^\delta \mathbf{w}_s dz \\
&= \mp \frac{\partial}{\partial \rho} \frac{1}{r \sin \lambda} \frac{\partial p}{\partial n} + \delta r \omega^2 \cos \lambda - \frac{1}{\rho} (\tau_{nz})_{z=0} \quad (3.13)
\end{aligned}$$

である。

s 方向の積分条件式も，同様に式 (3.6) を積分し，次のようにして得られる。式 (3.9) および $\mathbf{w}_z|_{z=\delta} = \mathbf{w}_z|_{z=0} = 0$ を用いると，

$$\begin{aligned}
\int_0^\delta w_z \frac{\partial w_s}{\partial z} dz &= [w_z w_s]_0^\delta - \int_0^\delta w_s \frac{\partial w_z}{\partial z} dz \\
&= \int_0^\delta w_s \left\{ \pm \frac{1}{r \sin \lambda} \frac{\partial w_n}{\partial n} + \frac{1}{r \cos \lambda} \frac{\partial w_s}{\partial s} \right. \\
&\quad \left. + w_n \left(\frac{\cos \lambda}{r} - \frac{d\lambda}{dr} \sin \lambda \right) + w_s \left(-\frac{\sin \lambda}{r} - \frac{d\lambda}{dr} \cos \lambda \right) \right\} dz
\end{aligned}$$

であり，また

$$\begin{aligned}
\int_0^\delta 2w_s \frac{\partial w_s}{\partial s} dz &= \int_0^\delta \frac{\partial w_s^2}{\partial s} dz = \frac{\partial}{\partial s} \int_0^\delta w_s^2 dz - W_s^2 \frac{\partial \delta}{\partial s} \\
\int_0^\delta (w_s \frac{\partial w_n}{\partial n} + w_n \frac{\partial w_s}{\partial n}) dz &= \int_0^\delta \frac{\partial (w_s w_n)}{\partial n} dz = \frac{\partial}{\partial n} \int_0^\delta w_s w_n dz
\end{aligned}$$

であるから，

$$\begin{aligned}
&\pm \frac{1}{r \sin \lambda} \frac{\partial}{\partial n} \int_0^\delta w_n w_s dz + \frac{1}{r \cos \lambda} \frac{\partial}{\partial s} \int_0^\delta w_s^2 dz - \frac{W_s^2}{r \cos \lambda} \frac{\partial \delta}{\partial s} \\
&+ \left(\frac{\sin \lambda}{r} + \frac{d\lambda}{dr} \cos \lambda \right) \int_0^\delta (w_n^2 - w_s^2) dz \\
&+ 2 \left(\frac{\cos \lambda}{r} - \frac{d\lambda}{dr} \sin \lambda \right) \int_0^\delta w_n w_s dz + 2\omega \int_0^\delta w_n dz \\
&= -\frac{\partial}{\rho} \frac{1}{r \cos \lambda} \frac{\partial p}{\partial s} - \delta r \omega^2 \sin \lambda - \frac{1}{\rho} (\tau_{sz})_{z=0} \quad (3.14)
\end{aligned}$$

である。

さて，式(3.3)の第1式と第2式および軸対称流れの仮定によって
 $(\partial/\partial\theta) = 0$ であるから， $(\partial/\partial n)$ および $(\partial/\partial s)$ はともに次式
のように半径 r に関する常微分方程式に変換される。

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}} &= \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \mathbf{n}} + \frac{\partial}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial \mathbf{n}} = \pm r \sin \lambda \cos \lambda \frac{d}{dr} \\ \frac{\partial}{\partial \mathbf{s}} &= \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \mathbf{s}} + \frac{\partial}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial \mathbf{s}} = -r \sin \lambda \cos \lambda \frac{d}{dr} \end{aligned} \right\} \quad (3.15)$$

式 (3.15) の関係を用いて積分条件式 (3.13), (3.14) を変換すると次のようになる。

$$\begin{aligned} & \cos \lambda \frac{d}{dr} \int_0^\delta w_n^2 dz - \sin \lambda \frac{d}{dr} \int_0^\delta w_n w_s dz \\ & + \left(\frac{\cos \lambda}{r} - \frac{d\lambda}{dr} \sin \lambda \right) \int_0^\delta (w_n^2 - w_s^2) dz \\ & - 2 \left(\frac{\sin \lambda}{r} + \frac{d\lambda}{dr} \cos \lambda \right) \int_0^\delta w_n w_s dz - 2\omega \int_0^\delta w_s dz \\ & = -\frac{\delta}{\rho} \cos \lambda \frac{dp}{dr} + \delta r \omega^2 \cos \lambda - \frac{1}{\rho} (\tau_{nz})_{z=0} \end{aligned} \quad (3.16)$$

$$\begin{aligned} & \cos \lambda \frac{d}{dr} \int_0^\delta w_n w_s dz - \sin \lambda \frac{d}{dr} \int_0^\delta w_s^2 dz + \sin \lambda W_s^2 \frac{d\delta}{dr} \\ & + \left(\frac{\sin \lambda}{r} + \frac{d\lambda}{dr} \cos \lambda \right) \int_0^\delta (w_n^2 - w_s^2) dz \\ & + 2 \left(\frac{\cos \lambda}{r} - \frac{d\lambda}{dr} \sin \lambda \right) \int_0^\delta w_n w_s dz + 2\omega \int_0^\delta w_n dz \\ & = \frac{\delta}{\rho} \sin \lambda \frac{dp}{dr} - \delta r \omega^2 \sin \lambda - \frac{1}{\rho} (\tau_{sz})_{z=0} \end{aligned} \quad (3.17)$$

また式 (3.15) の関係を円板間中央の流れに対して用いると，式 (3.11), (3.12) から

$$\begin{aligned}
& W_s^2 \left(-\frac{\cos \lambda}{r} + \frac{d\lambda}{dr} \sin \lambda \right) - 2\omega W_s \\
& = -\frac{1}{\rho} \frac{dp}{dr} \cos \lambda + r \omega^2 \cos \lambda + \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \tau_{rz}}{\partial z} \right)_{z=h/2} \quad (3.18)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -W_s \sin \lambda \frac{dW_s}{dr} = \frac{1}{\rho} \frac{dp}{dr} \sin \lambda - r \omega^2 \sin \lambda + \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \tau_{sz}}{\partial z} \right)_{z=h/2} \\
& \quad (3.19)
\end{aligned}$$

となる。

連続の式は，式 (3.9) の微分形式よりも次に示すような積分形式で表わす方があとの計算に便利である。半径方向の流れの量が一定の条件から，

$$u_0 h^2 = 2 \int_0^{h/2} r u dz$$

である。ただし， u_0 は半径 $r = h$ における径方向平均流速， u は径方向流速である。そして，

$$u = w_n \cos \lambda - w_s \sin \lambda$$

なる関係があるから

$$\begin{aligned}
u_0 h^2 = 2r \left[\cos \lambda \int_0^{\delta} w_n dz - \sin \lambda \left\{ \int_0^{\delta} w_s dz + W_s \left(\frac{h}{2} - \delta \right) \right\} \right] \\
\quad (3.20)
\end{aligned}$$

である。

以上により，本理論解析の基礎式として，積分条件式 (3.16)，(3.17)，円板間中央における運動方程式 (3.18)，(3.19) および連続の式 (3.20) が得られた。これらの式は順流の場合にも逆流の

場合にも同一の式で表わされる。

2. 4 境界層内の速度分布および摩擦応力

2. 4. 1 境界層内の速度分布

基礎式は積分条件式などで表わされるように積分形であるので、境界層内の速度分布をあらかじめ仮定して、おのおのの積分値を計算しなければならない。

三次元乱流境界層内の速度分布としていろいろ提案されているが、最もよく使われているうちの一つの次式と仮定する。

$$\left. \begin{aligned} w_s &= W_s \left(\frac{z}{\delta} \right)^{1/7} \\ w_n &= \varepsilon W_s \left(\frac{z}{\delta} \right)^{1/7} \left(1 - \frac{z}{\delta} \right)^2 \end{aligned} \right\} \quad (3.21)$$

ただし、 ε は円板壁面での摩擦応力の方向と円板間中央の流線の間とがなす角の正接であり、 $W_s < 0$ であるので $\varepsilon > 0$ のときには $w_n < 0$ であることを示している。

式 (3.21) の速度分布から、式 (3.16), (3.17), (3.20) の各種境界層厚さは次式で与えられる。

$$\left. \begin{aligned} \int_0^\delta w_n dz &= c_1 \delta \varepsilon W_s, \quad c_1 = 0.2598 \\ \int_0^\delta w_n^2 dz &= c_2 \delta \varepsilon^2 W_s^2, \quad c_2 = 0.1097 \\ \int_0^\delta w_s dz &= c_3 \delta W_s, \quad c_3 = 0.8750 \end{aligned} \right\} \quad (3.22)$$

$$\int_0^{\delta} w_s^2 dz = c_4 \delta W_s^2, \quad c_4 = 0.7778$$

$$\int_0^{\delta} w_n w_s dz = c_5 \delta \epsilon W_s^2, \quad c_5 = 0.2071$$

2. 4. 2 壁面摩擦応力

壁面摩擦応力 $(\tau_{nz})_{z=0}$ と $(\tau_{sz})_{z=0}$ の間には

$$\frac{(\tau_{nz})_{z=0}}{(\tau_{sz})_{z=0}} = \frac{(\frac{\partial w_n}{\partial z})_{z=0}}{(\frac{\partial w_s}{\partial z})_{z=0}} = \epsilon$$

なる関係を仮定する。したがって

$$(\tau_{nz})_{z=0} = \epsilon (\tau_{sz})_{z=0} \quad (3.23)$$

である。

円板間中央面の流線に沿う方向の壁面摩擦応力は、Blasius が与えた平板乱流境界層における壁面摩擦応力に等しいと仮定して

$$(\tau_{sz})_{z=0} = 0.0225 \operatorname{sgn}(W_s) \rho W_s^2 (W_s \delta / \nu)^{-1/4} \quad (3.24)$$

とする。ただし ν は流体の動粘性係数であり、 $\operatorname{sgn}(W_s)$ は W_s が s 座標軸と向きが反対であるために必要な係数で、本研究では $\operatorname{sgn}(W_s) = -1$ である。

2. 4. 3 円板間中央における摩擦応力の勾配

円板間中央における摩擦応力の勾配 $(\partial \tau_{nz} / \partial z)_{z=h/2}$ と $(\partial \tau_{sz} / \partial z)_{z=h/2}$ は、 $\delta < h/2$ の助走区間では円板間中央付近にポテンシャルコアが存在するため、

$$\left(\frac{\partial \tau_{nz}}{\partial z}\right)_{z=h/2} = \left(\frac{\partial \tau_{sz}}{\partial z}\right)_{z=h/2} = 0 \quad (3.25)$$

である。ポテンシャルコアの消失した $\delta = h/2$ の充満区間では、

$$\left(\frac{\partial \tau_{nz}}{\partial z}\right)_{z=h/2} = k \varepsilon \left(\frac{\partial \tau_{sz}}{\partial z}\right)_{z=h/2} \quad (3.26)$$

と仮定する。ここに、1 のオーダーであると考えられる係数 k は実験により定められるべき値であるが、第3節に示すように係数 k の値は静圧と動圧の計算値にはほとんど影響しないので、本章の目的とする半径方向の圧力分布の算定には、係数 k の厳密な評価は必要でない。

2. 5 計 算 式

計算を無次元量で行なうために次の無次元量を定める。

無次元半径	$\alpha = r/h$	}
無次元回転軸方向座標	$\beta = z/h$	
無次元境界層厚さ	$A = \delta/(h/2)$	
無次元円板間中央流速	$u_c = W_s/u_o$	
無次元静圧	$P = p/(\rho v_o^2/2)$	
円板を通り抜ける流量を代表するレイノルズ数	$R_1 = u_o h/\nu$	
円板の回転速度を代表するレイノルズ数	$R_2 = v_o h/\nu$	

(3.27)

ただし、 u_o は前述のように半径 $r = h$ における径方向平均流速、 v_o は半径 $r = h$ における円板周速で $v_o = h\omega$ である。

2. 5. 1 助走区間の計算式

基礎式 (3. 16), (3. 17), (3. 18), (3. 19) および (3. 20) に,
式 (3. 22), (3. 23), (3. 24), (3. 25) を用いると, 長い計算ののち未知量 $\varepsilon, \lambda, u_c, \Delta, P$ の α に関する助走区間に対する次の計算式が得られる。

$$\begin{aligned} & \left[2c_2 \varepsilon \cos \lambda - c_5 \sin \lambda - \frac{c_1 \varepsilon \cos \lambda (c_2 \varepsilon \cos \lambda - c_5 \sin \lambda)}{(1-c_3) \sin \lambda + c_1 \varepsilon \cos \lambda} \right] \frac{d\varepsilon}{d\alpha} \\ & + \left[(c_4 - 1 + c_2 \varepsilon^2) \sin \lambda - \frac{2c_5 \varepsilon}{\cos \lambda} \right. \\ & \quad \left. + \frac{\varepsilon (c_2 \varepsilon - c_5 \tan \lambda) (c_3 - 1 + c_1 \alpha u_c \varepsilon \cos \lambda)}{(1 + \alpha u_c \sin \lambda) \{ (1-c_3) \sin \lambda + c_1 \varepsilon \cos \lambda \}} \right] \frac{d\lambda}{d\alpha} \\ & = \frac{(c_2 \varepsilon^2 + c_4 - 1) \cos \lambda}{\alpha} + 2 \frac{R_2}{R_1} \frac{1}{u_c} \{ c_3 - 1 + 2c_2 \varepsilon^2 - 2c_5 \varepsilon \tan \lambda \\ & \quad - \frac{\varepsilon (c_2 \varepsilon - c_5 \tan \lambda)}{1 + \alpha u_c \sin \lambda} \} - 0.045 \operatorname{sgn}(u_c) \varepsilon \left(\frac{2}{R_1} \right)^{1/4} \Delta^{-5/4} |u_c|^{-1/4} \end{aligned} \quad (3. 28)$$

$$\begin{aligned} & \left[c_5 - \frac{c_1 \{ c_5 \varepsilon \cos \lambda + (1-c_4) \sin \lambda \}}{(1-c_3) \sin \lambda + c_1 \varepsilon \cos \lambda} \right] \cos \lambda \frac{d\varepsilon}{d\alpha} \\ & + \left[(c_2 \varepsilon^2 - c_4) \cos \lambda + (1 - 2c_4) \sin \lambda \tan \lambda \right. \\ & \quad \left. + \frac{\{ c_5 \varepsilon + (1-c_4) \tan \lambda \} (c_3 - 1 + c_1 \alpha u_c \varepsilon \cos \lambda)}{(1 + \alpha u_c \sin \lambda) \{ (1-c_3) \sin \lambda + c_1 \varepsilon \cos \lambda \}} \right] \frac{d\lambda}{d\alpha} \\ & = \frac{(1-c_4 - c_2 \varepsilon^2) \sin \lambda}{\alpha} + 2 \frac{R_2}{R_1} \frac{1}{u_c} \{ (2c_5 - c_1) \varepsilon + (1 - 2c_4) \tan \lambda \\ & \quad - \frac{c_5 \varepsilon + (1-c_4) \tan \lambda}{1 + \alpha u_c \sin \lambda} \} - 0.045 \operatorname{sgn}(u_c) \left(\frac{2}{R_1} \right)^{1/4} \Delta^{-5/4} |u_c|^{-1/4} \end{aligned} \quad (3. 29)$$

$$\frac{du_c}{d\alpha} = u_c \tan \lambda \frac{d\lambda}{d\alpha} - \frac{u_c}{\alpha} - 2 \frac{R_2}{R_1} \frac{1}{\cos \lambda} \quad (3.30)$$

$$A = \frac{1}{\alpha u_c} \frac{1 + \alpha u_c \sin \lambda}{(1 - c_3) \sin \lambda + c_1 \epsilon \cos \lambda} \quad (3.31)$$

$$P = \alpha^2 - \left(\frac{R_1}{R_2} \right)^2 u_c^2 + (\text{一定}) \quad (3.32)$$

2. 5. 2 円板入口の初期値

回転円板入口前方では仮定により流れは径方向にいちような分布で流れるとしているので、回転円板入口では流れは径方向を向かない。

初期値は入口半径 $\alpha_i = r_i / h$ において次のように表わされる。

$$\left. \begin{aligned} u_{ci} &= - \sqrt{\left(\frac{1}{\alpha_i} \right)^2 + \left(\frac{\alpha_i R_2}{R_1} \right)^2} \\ \lambda_i &= \tan^{-1} \left(\frac{R_1}{R_2 \alpha_i^2} \right) \\ A_i &= 0 \\ \epsilon_i &= 0 \\ P_i &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (3.33)$$

しかし、 $\alpha = \alpha_i$ は特異点であるので、この初期値をこのまま式 (3.28), (3.29) に代入して計算を始めることはできない。

そこで、 $\alpha = \alpha_i$ に非常に近いが $\alpha \neq \alpha_i$ として

$$f = -\alpha u_c \sin \lambda - 1 \quad (f > 0, f < 1) \quad (3.34)$$

とおき，さらに

$$\epsilon = k_1 f \quad ; \quad \frac{d\lambda}{d\alpha} = k_2 f^{-1/4} \quad (3.35)$$

とおいて，式(3.28)，(3.29) に代入し，十分小さい項を無視すると次式を得る。

$$\left. \begin{aligned} k_1 &= \frac{c_4 - 1}{1 - c_4 + 2c_5} \sin \lambda_i \cos \lambda_i \\ k_2 &= -0.045 \operatorname{sgn}(u_e) \left(\frac{2}{R_1}\right)^{1/4} \frac{(1 - c_3)^{5/4}}{1 - c_4} \cos \lambda_i |u_e|^{-1/4} \end{aligned} \right\} \quad (3.36)$$

しかし式(3.35)の第2式もまた解析的な積分は困難で， λ は定まらない。そこで，*を付した量を微小量として，

$$\alpha = \alpha_i + \alpha^* \quad ; \quad u_e = u_{ei} + u_e^* \quad , \quad \lambda = \lambda_i + \lambda^* \quad (3.37)$$

とおくと，式(3.35)の第2式より次式を得る。

$$\frac{d\lambda^*}{d\alpha^*} = \frac{k_2}{(-\alpha^* u_{ei} \sin \lambda_i - \alpha_i u_e^* \sin \lambda_i - \alpha_i u_{ei} \lambda^* \cos \lambda_i)^{1/4}} \quad (3.38)$$

式(3.38)と式(3.30)より u_e^* は次のように表わされる。

$$u_e^* = (u_{ei} \tan \lambda_i) \lambda^* - \left(\frac{u_{ei}}{\alpha_i} + 2 \frac{R_2}{R_1} \frac{1}{\cos \lambda_i} \right) \alpha^* \quad (3.39)$$

式(3.39)を式(3.38)に代入して，Picard の逐次近似法により積分すると， λ^* を定める次式を得る。

$$\lambda^* = \left(\frac{5}{4} k_2 \alpha^* \right)^{4/5} (\sin \lambda_i \cos \lambda_i)^{1/4} \left(1 - \frac{1}{5} \kappa + \frac{5}{48} \kappa^2 - \frac{15}{224} \kappa^3 + \dots \right) \quad (3.40)$$

ただし

$$\kappa = 2 \frac{R_2}{R_1} \alpha_i \tan \lambda_i \left(\frac{4}{5} \frac{\sin \lambda_i \cos \lambda_i}{k_2} \right)^{4/5} \alpha^{*1/5}$$

であり、この級数はすみやかに収束する。

結局、 $\alpha = \alpha_i$ 付近は式 (3. 40) より λ^* ，式 (3. 39) より u_e^* が定まる。また α_i から少し離れると式 (3. 35) より、さらに α の大きな助走区間に対しては式 (3. 28), (3. 29), (3. 30), (3. 31) および (3. 32) を用いて Punge - Kutta の方法により α の関数としての ϵ ， λ ， u_e ， A および P が得られる。

2. 5. 3 充満区間の計算式

充満区間では、境界層厚さ δ は円板間隔 h の半分に等しい。すなわち、

$$A = 1 \quad (3. 41)$$

で一定である。

基礎式 (3. 16), (3. 17), (3. 18), (3. 19) および (3. 20) に、式 (3. 22), (3. 23), (3. 24), (3. 26) および (3. 41) を用いると、未知量 ϵ ， λ ， u_e および P の α に関する次の充満区間に対する計算式が得られる。

$$\begin{aligned} & \left[2c_2 \epsilon \cos \lambda - c_5 \sin \lambda - c_1 \alpha u_e \cos \lambda (2c_2 \epsilon^2 \cos \lambda \right. \\ & \left. - 2c_5 \epsilon \sin \lambda - \frac{k \epsilon \sin \lambda \cos \lambda}{k \epsilon \sin \lambda + \cos \lambda}) \right] \frac{d\epsilon}{d\alpha} \\ & + \left[(c_4 - c_2 \epsilon^2) \sin \lambda - 2c_5 \epsilon \cos \lambda - \frac{\sin \lambda \cos \lambda}{k \epsilon \sin \lambda + \cos \lambda} \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \alpha u_c (c_1 \varepsilon \sin \lambda + c_3 \cos \lambda) (2 c_2 \varepsilon^2 \cos \lambda - 2 c_5 \varepsilon \sin \lambda \\
& - \frac{k \varepsilon \sin \lambda \cos \lambda}{k \varepsilon \sin \lambda + \cos \lambda}) \Big] \frac{d \lambda}{d \alpha} \\
& = \frac{(c_4 - 1 + c_2 \varepsilon^2) \cos \lambda}{\alpha} + 2 \frac{R_2}{R_1} \frac{1}{u_c} \left(c_3 - \frac{\cos \lambda}{k \varepsilon \sin \lambda + \cos \lambda} \right) \\
& - 0.045 \operatorname{sgn}(u_c) \varepsilon \left(\frac{2}{R_1} \right)^{1/4} |u_c|^{-1/4} \quad (3.42)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \left[c_5 - c_1 \alpha u_c (2 c_5 \varepsilon \cos \lambda - 2 c_4 \sin \lambda \right. \\
& \left. + \frac{k \varepsilon \sin^2 \lambda}{k \varepsilon \sin \lambda + \cos \lambda}) \right] \cos \lambda \frac{d \varepsilon}{d \alpha} \\
& + \left[(c_2 \varepsilon^2 - c_4) \cos \lambda - 2 c_5 \varepsilon \sin \lambda + \frac{\sin^2 \lambda}{k \varepsilon \sin \lambda + \cos \lambda} \right. \\
& \left. + \alpha u_c (c_1 \varepsilon \sin \lambda + c_3 \cos \lambda) \left\{ 2 c_5 \varepsilon \cos \lambda - 2 c_4 \sin \lambda \right. \right. \\
& \left. \left. + \frac{k \varepsilon \sin^2 \lambda}{k \varepsilon \sin \lambda + \cos \lambda} \right\} \right] \frac{d \lambda}{d \alpha} \\
& = \frac{(1 - c_4 - c_2 \varepsilon^2) \sin \lambda}{\alpha} + 2 \frac{R_2}{R_1} \frac{1}{u_c} \left(-c_1 \varepsilon + \frac{\sin \lambda}{k \varepsilon \sin \lambda + \cos \lambda} \right) \\
& - 0.045 \operatorname{sgn}(u_c) \left(\frac{2}{R_1} \right)^{1/4} |u_c|^{-1/4} \quad (3.43)
\end{aligned}$$

$$u_c = \frac{1}{\alpha (c_1 \varepsilon \cos \lambda - c_3 \sin \lambda)} \quad (3.44)$$

$$\begin{aligned}
\frac{dP}{d\alpha} = & 2\alpha + 4 \frac{R_1}{R_2} \frac{u_c}{k \varepsilon \sin \lambda + \cos \lambda} \\
& + 2 \left(\frac{R_1}{R_2} \right)^2 \frac{u_c^2}{k \varepsilon \sin \lambda + \cos \lambda} \left[\frac{k \varepsilon \sin \lambda + \cos \lambda}{\alpha} \right. \\
& + c_1 k \varepsilon \alpha u_c \sin \lambda \cos \lambda \frac{d\varepsilon}{d\alpha} \\
& \left. - \left\{ 1 + k \varepsilon \alpha u_c (c_1 \varepsilon \sin \lambda + c_3 \cos \lambda) \right\} \sin \lambda \frac{d\lambda}{d\alpha} \right]
\end{aligned} \tag{3.45}$$

式 (3.42), (3.43), (3.44) および (3.45) の初期値として, 助走区
間に対する計算式 (3.28), (3.29), (3.30), (3.31) および (3.32)
の $A = 1$ になった時の α における ε , λ , u_c および P を
用い, 助走区間に対する計算と同様に **Runge - Kutta** の方法で
計算する。

2. 5. 4 大きな半径の領域の計算式

大きな半径の領域に対しては, 式 (3.42), (3.43) および (3.44)
を数値積分することなく, λ , ε および u_c の値を得ることができ
る。

$$X = \left[\left(\frac{0.045}{R_2} \right)^4 \left(\frac{R_1}{2\alpha} \right)^3 \right]^{1/4} \tag{3.46}$$

とおくと,

$$\tan \lambda = t_0 + t_1 X + t_2 X^2 + \dots$$

$$\varepsilon = \varepsilon_0 + \varepsilon_1 X + \varepsilon_2 X^2 + \dots$$

$$u_c = \sqrt{1 + \tan^2 \lambda} \left[\alpha \left\{ (c_1 \varepsilon_1 - c_3 t_1) X + (c_1 \varepsilon_2 - c_3 t_2) X^2 + \dots \right\} \right] \quad (3.47)$$

と級数に展開できる。

式 (3.47) を式 (3.42), (3.43), および (3.44) に代入して, 係数比較することにより次式を得る。

$$\left. \begin{aligned} t_0 &= \pm \sqrt{\frac{c_1(1-c_3)}{k} \frac{1}{c_3}}, \\ \varepsilon_0 &= \frac{c_3}{c_1} t_0; \\ t_1 &= \frac{(1+t_0^2)^{3/4} (2-c_3+c_3k)}{2k^{4/7} c_3^{11/7} (1-c_3+c_3k)^{3/7}}, \\ \varepsilon_1 &= \frac{c_3^2 (1-k) t_1}{c_1 (2-c_3+c_3k)}; \\ \left\{ \varepsilon_0 + \frac{3}{4} \frac{c_3(\varepsilon_0 t_1 + \varepsilon_1 t_0)}{-c_1 \varepsilon_1 + c_3 t_1} \right\} t_2 + \left\{ t_0 - \frac{3}{4} \frac{c_1(\varepsilon_0 t_1 + \varepsilon_1 t_0)}{-c_1 \varepsilon_1 + c_3 t_1} \right\} \varepsilon_2 \\ &= -\varepsilon_1 t_1 + \frac{(1+t_0^2)^{3/8}}{c_3 k (-c_1 \varepsilon_1 + c_3 t_1)^{3/4}} \left\{ k \varepsilon_0 (2 \varepsilon_0 t_1 + \varepsilon_1 t_0) + \varepsilon_1 \right. \\ &\quad \left. + \frac{3}{4} \varepsilon_0 t_0 t_1 \frac{1+k \varepsilon_0 t_0}{1+t_0^2} \right\}, \\ \left\{ \varepsilon_0 (c_1 k \varepsilon_0^2 + c_3 k - 1) \right\} t_2 + \left\{ 3 c_1 k \varepsilon_0^2 t_0 + 2 c_1 \varepsilon_0 + (c_3 k - 1) t_0 \right\} \varepsilon_2 \\ &= \varepsilon_1 \left\{ -3 c_1 k \varepsilon_0 (\varepsilon_0 t_1 + \varepsilon_1 t_0) - (c_3 k - 1) t_1 - c_1 \varepsilon_1 \right\}; \dots \end{aligned} \right\} \quad (3.48)$$

ここで、 t_0 の値に複号が付くが、これは式 (3. 42), (3. 43) および (3. 44) の漸近値であるのであらかじめ正負を定めることはできない。

2. 5. 5 流速および動圧

以上の計算結果から回転円板間内の流速を求めることができる。
径方向流速を u , 周方向絶対流速を v とすると、

$$\left. \begin{aligned} u &= w_n \cos \lambda - w_s \sin \lambda \\ v &= w_n \sin \lambda - w_s \cos \lambda + r\omega \end{aligned} \right\} \quad (3. 49)$$

であり、それぞれを次式のように無次元量で表わす。

$$U = \frac{u\alpha}{u_0} \quad , \quad V = \frac{v}{v_0 \alpha} \quad . \quad (3. 50)$$

また、動圧 p_d は、第 2 章の式 (2. 91), (2. 92) および (2. 93) を用いて、流速の変化割合の大きな円板壁面付近の分割点を特にこまかくとり、数値的に計算することによって得られる。

無次元動圧 P_d を次のように定義する。

$$P_d = p_d / (\rho v_0^2 / 2) \quad (3. 51)$$

円板入口での無次元動圧 P_{di} は、計算に用いる仮定より容易に次式で与えられる。

$$P_{di} = \left(\frac{R_1}{\alpha_i R_2} \right)^2 \quad (3. 52)$$

第 3 節 数値計算例および考察

3. 1 計算例および考察

流量を代表するレイノルズ数 R_1 ，円板の回転速度を代表するレイノルズ数 R_2 ，無次元入口半径 α_i の三つの値によって流れは決定される。充満区間にはさらに係数 k が加わる。

3. 1. 1 流量の相違による流れの変化

図 3. 2 に， $R_2 = 10, \alpha_i = 10, k = 0.5$ の場合に， R_1 を 100, 1000, 10000 と変えたときの流れの変化を示す。

横軸の α は無次元半径で，縦軸の Δ は無次元境界層厚さで，充満区間では $\Delta = 1$ である。また縦軸の $-\varepsilon$ は円板壁面での摩擦応力の方向と円板間中央における流線方向とがなす角の正接で，二次流れを表わし， λ は円板間中央の流線の円周に対する傾き角で順流の場合は正，逆流の場合は負，逆流の場合

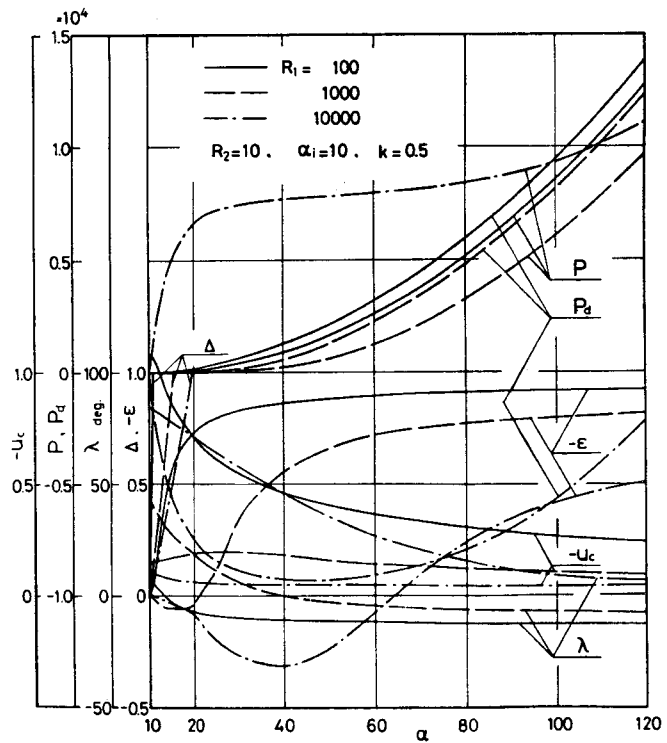


図 3. 2 乱流の場合の R_1 の相違による流れの変化

合は負の符号をとり， $-u_c$ は円板間中央の無次元相対流速， P は無次元静圧， P_d は無次元動圧で，円板入口径 α_i において $P = P_d = 0$ と表示してある。

流量が小さい場合には円板の回転の効果が小さな半径位置から表われ，円板に相対的な主流流線は周方向に傾くためポテンシャルコアの半径方向の長さは短くなる。しかし助走部の主流流線の長さは流量によって大きな差はないと考えられる。

R_1 が非常に大きいとき，円板入口からある半径位置までは，流れは静止したリングディフューザ内の流れに近くなり，流路拡大による流速減少にともなう静圧回復が静圧分布を決定する主要な因子となる。 $R_1 = 10000$ はその場合であり，その部分では静圧の上昇は回転円板の全圧上昇への寄与を意味せず，かえって円板は抵抗として作用する。 $\alpha = 45$ 付近になって全圧は上昇し始め， $\alpha = 90$ 付近で円板入口における全圧に回復する。 R_1 が小さくなるにつれて，より小さな半径位置から円板の回転による静圧上昇が生じ，その場合静圧分布曲線は α^2 に比例する形に漸近し， $\alpha \rightarrow \infty$ ではすべての場合に $(dP/d\alpha) \propto \alpha$ となる。 $R_1 = 100$ のように流量が小さい場合には， $-u_c$ は流路拡大にもかかわらず境界層の発達が急速であるため入口付近では増し，圧力は入口から上昇する。

回転軸方向に静圧の変化はないので，一般にはコリオリの力の効果は二次流れを円板の出口側に発生させるようにはたらく。しかし R_1 が大きく α が入口に近い領域では，流線の曲がりによる遠心力の効果がコリオリの力の効果より大きくなるため逆の向きに発生する。

3. 1. 2 円板の回転速度の相違による流れの変化

図 3.3 に $R_1 = 1000$ ， $\alpha_i = 10$ ， $k = 0.5$ の場合に， R_2 を 1，10，100 と変えたときの流れの変化を示す。

円板の回転速度が大きいほど、流れはより周方向に傾き、遠心効果は大きく入口の影響は小さな半径位置で消失し、半径の無限に大きな位置の流れ状態にすみやかに近づく。

円板の回転速度が大きくなる時にともなう流れの変化と、図 3.2 に示したように流量が小さくなる時にともなう流れの変化は、定性的には同じである。

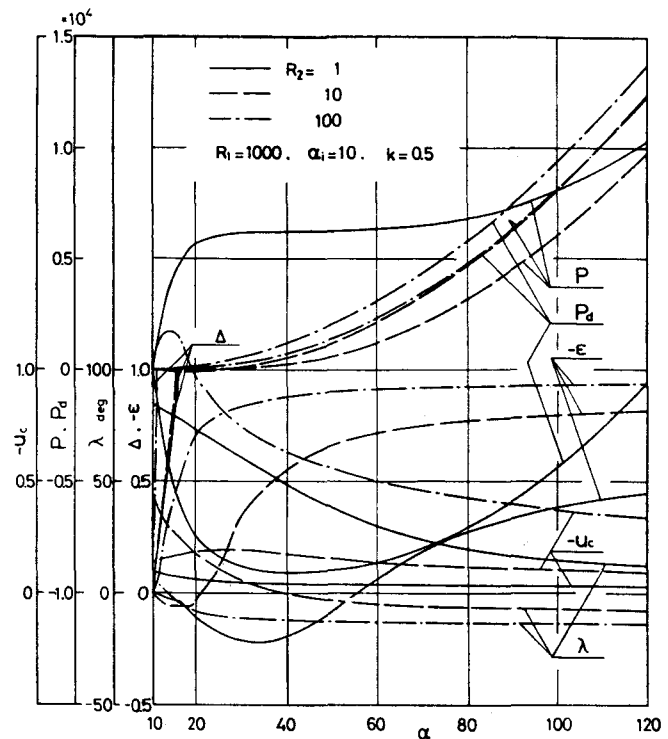


図 3.3 乱流の場合の R_2 の相違による流れの変化

3. 1. 3 入口半径の相違による流れの変化

図 3.4 に無次元入口半径 α_i のみを変えて、入口の影響がどこまで及ぶかを調べた一例を示す。

図 3.2, 図 3.3 に示したように R_1 , R_2 の値によって入口の影響の及ぶ半径位置は異なるが、図 3.4 に示すように R_1 と R_2 を固定すれば α_i に関係なく定まるある半径位置で入口の影響はほぼ消え、かつその半径は円板の遠心効果が強い場合は入口半径に近い。またその場合には、 α_i に無関係に α の大きな位置での流れが決定されることがわかる。

また、 α_i が小さくなると、 α の小さい領域では円板の回転の効果が小さく、図 3.2 の R_1 が大きい場合あるいは図 3.3 の R_2 の小さい場合と類似の傾向を示し、この領域では静止したリングディフューザ内の流れに近いことがわかる。

さて式 (3.33) の第 1 式に示したように入口における円板間中央の相対流速 $-u_{ci}$ は、

$$-u_{ci} = \frac{1}{\sqrt{(1/\alpha_i)^2 + (\alpha_i R_2/R_1)^2}}$$

である。図 3.5 に示すように $-u_{ci}$ は $\alpha_i = \sqrt{R_1/R_2}$ のとき最小値をとる。

図 3.4 の例では $\sqrt{R_1/R_2} = 10$ であり、 α_i が $\sqrt{R_1/R_2}$ よりも小さいときには流路拡大のため $\alpha_i = \sqrt{R_1/R_2}$ のときの $-u_{ci}$ に近い値に

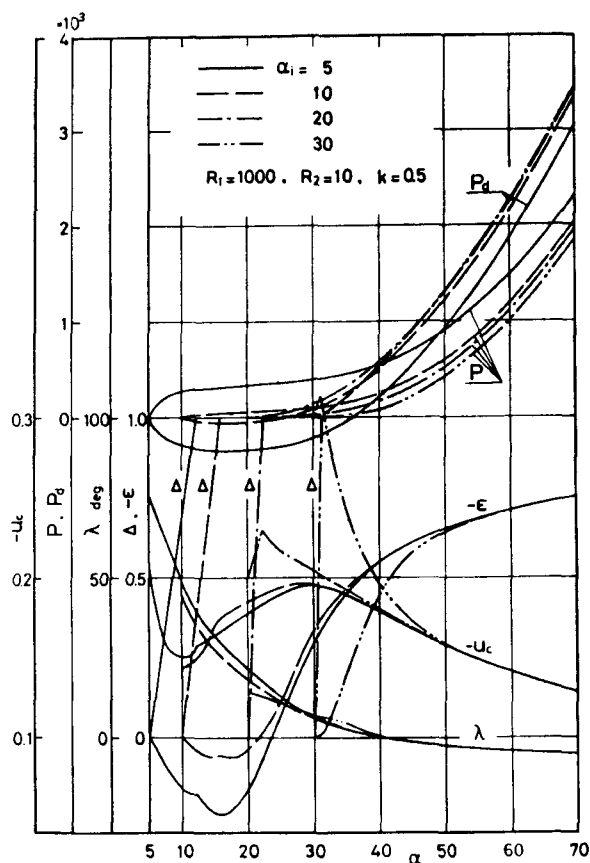


図 3.4 乱流の場合の α_i の相違による流れの変化

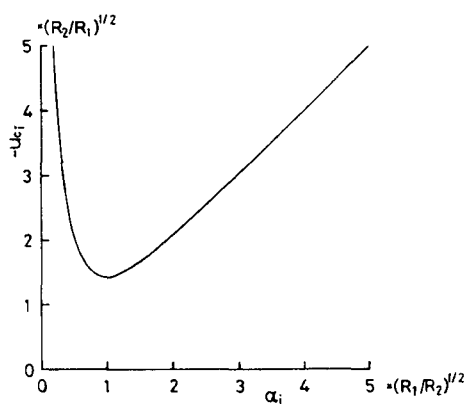


図 3.5 入口における円板間中央面の相対流速 ($-u_{ci}$) と入口半径 (α_i) の関係

まで流速は低下する。また，全圧は負となり，リングディフューザ内の流れに近く，円板はこの領域ではエネルギーを消費し，そののち流体はエネルギーを与えられる。これとは逆に α_i が $\sqrt{R_1/R_2}$ よりも大きいときには，流路の拡大よりも境界層の発達が急速で $-u_c$ は増加し，静圧は少し低下するが入口から全圧は上昇する。しかし， $\alpha_i = 30$ のように α_i が非常に大きな場合には，円板入口からの積分値である静圧はかえってより小さな α_i のときに比べて小さくなる。すなわち， R_1 と R_2 を固定すれば， α_i には最大の全圧を与える値が存在し， $\sqrt{R_1/R_2} \sim 2\sqrt{R_1/R_2}$ の値の付近にあると考えられる。

3. 1. 4 係数 k の相違による流れの変化

図 3.6 に係数 k の相違による流れの変化および無限半径位置からのせつ動解 (3.46)

(3.47), (3.48) の計算結果を示す。

係数 k は実験から求めるべき値であるが， $k = 0.5$ あるいは 1.0 と仮定して計算した。

係数 k が大きいほど円板間中央における流線に直角な方向の摩擦応力の勾配が大きく，その方向への流れ

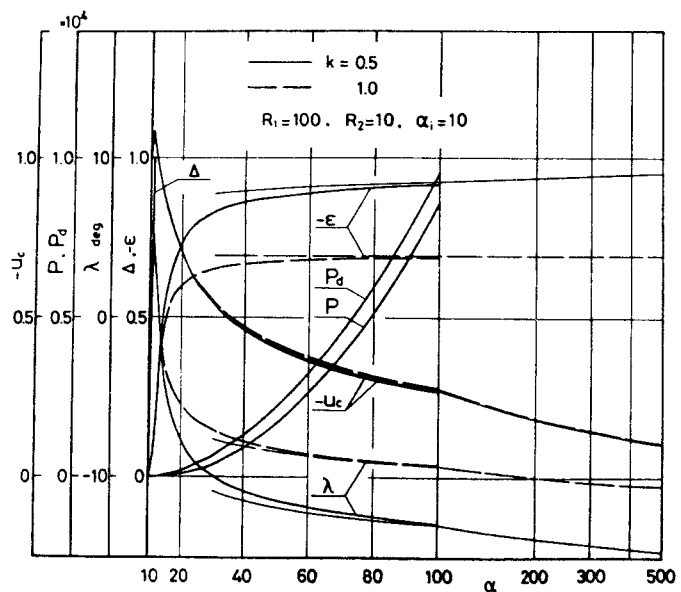


図 3.6 乱流の場合の係数 k の相違による流れの変化と無限半径位置からのせつ動解

に対する抵抗が大きくなり， $|\epsilon|$ は小さく，二次流量は小さくなる。一方，円板間中央の相対流速は係数 k の値の影響をほとんど受けて，したがって静圧分布と動圧分布は係数 k の値によって変化しない。

また，図では $\alpha > 100$ で α 軸を対数目盛で表示してあり，半径が大きな領域になりたつ計算式 (3. 46), (3. 47), (3. 48) の計算結果を示したが，図に示したように比較的小さな半径位置まで良い近似を与える。 α が比較的大きいところでのくいちがいは，コリオリ力と摩擦力のつりあいから定められた式 (3. 47) の高次の項に慣性力の項はいるためであると考えられる。

3. 2 層流の場合の計算結果との比較

前章の層流の場合の計算結果と本章の乱流の場合の計算結果を比較する。図 3. 7 に流量の大きい時の乱流の場合の流速分布，図 2. 2 に層流の場合の流速分布，図 3. 8 に流量が小さい時の乱流の場合の流速分布，図 2. 3 に層流の場合の流速分布，図 3. 9 に静圧分布，図 3. 10 に動圧分布を示す。係数 k は 0. 5 とし，静圧と動圧は円板入口における値を基準に図示してある。

流量の大きい場合，層流の場合には助走区間は $\alpha = 40.0$ まで存在したが，乱流の場合は 42. 0 まで存在する。乱流の場合は $1/7$ 乗則の成り立つ流速分布を仮定しているため，層流の場合に比べて流速分布は壁面近くでも比較的大きく，径方向流速は円板間中央でもほとんど増速されず，したがって静圧の低下も小さい。動圧は乱流の場合には円板入口よりも低下し，入口付近の全圧の低下した領域は乱流のほうが大きい。半径が大きな位置になるにつれて，円板の回転によって周方向流速は大きくなり，流体はエネルギーを与えられて圧力は上昇する。乱流の場合には周方向流速の分布は壁面近くのみで比較的大きく円板

間中央付近の大部分は小さいため、遠心力の回転軸方向の分布には大きな変化が生じ、円板壁面の強い遠心効果のため径方向流速は壁面近くで大きく、中央で小さい分布を示す。さらに半径が大きくなると円板間中央部で逆流を生じるようになり、層流の場合の円板の回転速度を代表するレイノルズ数 R_2 が大きい場合の流速分布〔7〕と同様の傾向となる。

乱流の場合の径方向無次元流速 U の回転軸方向の分布は、 α が大きくなるにしたがって急激に変化する。これは α が十分大きな領域になりたつ円板間中央の円板に対する相対流速 u_c を定める式 (3. 47) からわかるように $\alpha \rightarrow \infty$ で $-u_c \propto \alpha^{-1/2}$ であるため、 $U \propto \alpha^{3/2}$ となり、 $\alpha \rightarrow \infty$ で $U \rightarrow \infty$ となるからである。層流の場合は、 $\alpha \rightarrow \infty$ で $U =$

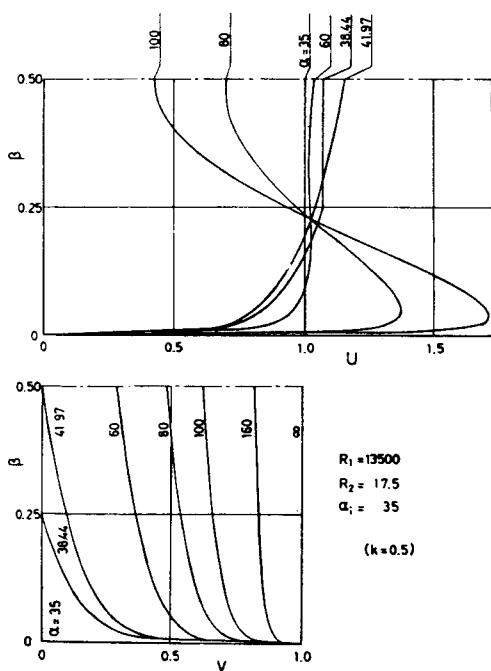


図 3. 7 乱流流速分布

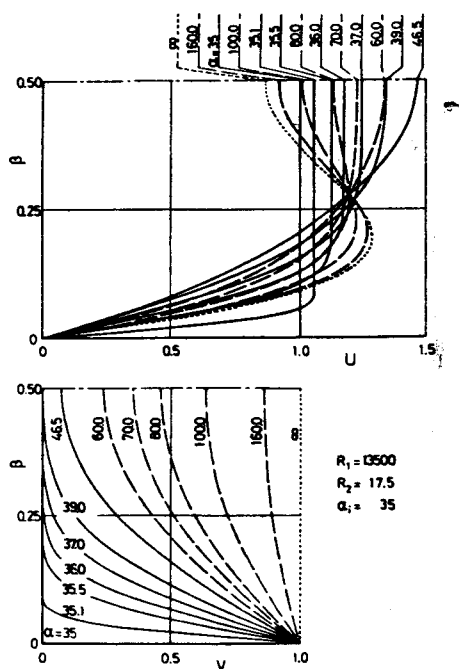


図 2. 2 層流流速分布

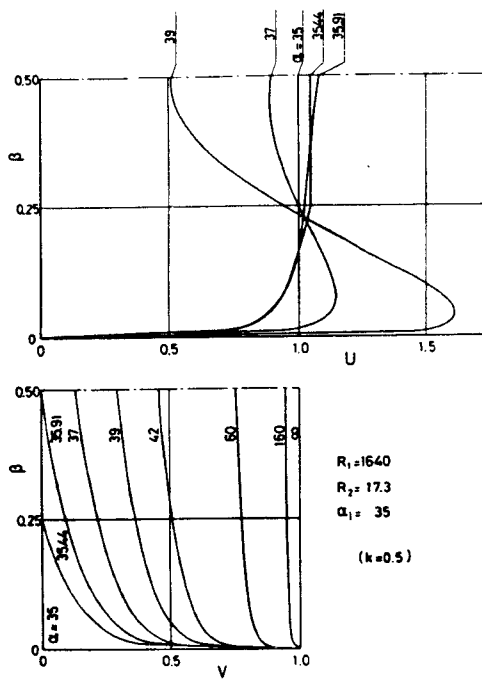


图 3.8 乱流流速分布

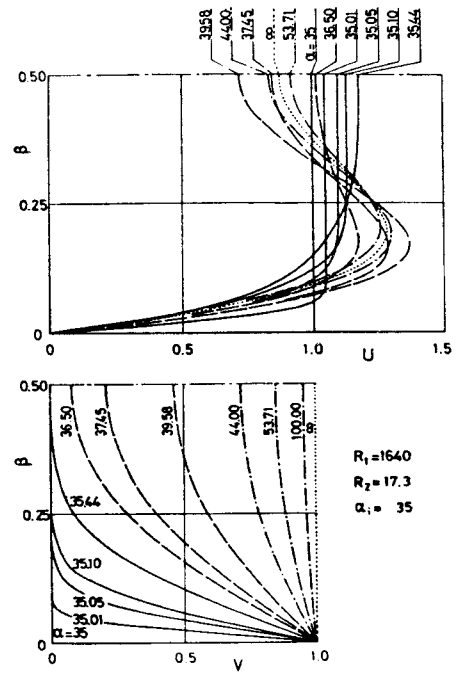


图 2.3 層流流速分布

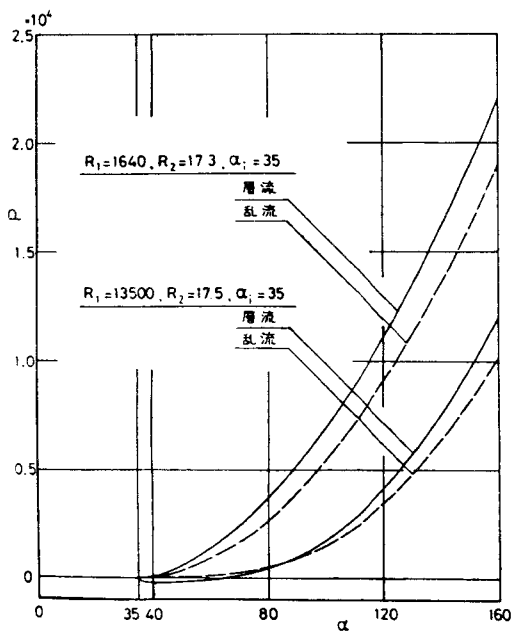


图 3.9 静压分布

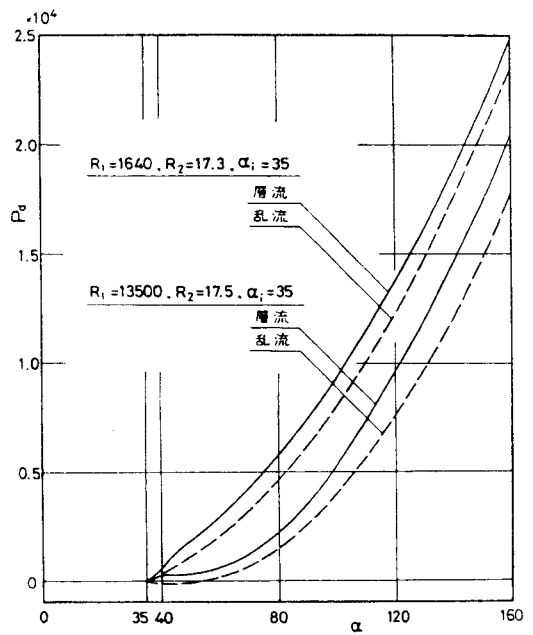


图 3.10 動压分布

(一定), $u \propto \alpha^{-1}$ (u は物理流速)である。しかしながら, 乱流の場合にも半径が大きくなるにしたがって物理流速は0に近づき, 半径の無限に大きな位置で流体が円板とともに剛体的に回転することは層流の場合と同じである。

流量が小さい場合には, 助走区間は乱流の場合は $\alpha = 36.0$ まで, 層流の場合は 35.44 までである。流量の大きい場合に比べて, 助走区間は短かく小さな半径位置から流体はエネルギーを与えられ, 圧力上昇は大きい。しかしこの場合にも, 円板間中央付近の周方向流速は, 層流の場合の同じ半径位置の周方向流速よりも小さく, 圧力上昇は層流の場合よりも小さい。

第4節 結 言

本章では, 回転軸上に吹き出しのある有限の入口径をもつ無限に大きな二枚の同じ向きに等速で回転する円板の間の流れを, すべて乱流であると仮定してその解析の方法を述べ, それを用いて種々のパラメータを変えて数値計算した結果を示し, あわせて前章の層流の場合の計算結果と比較した。

本研究の解析法は, 円板入口付近のポテンシャルコアの存在する助走区間およびポテンシャルコアの消失した充満区間に対して積分条件式による三次元境界層理論を用いたものである。従来の方法に比べて未知数の数が多く, Runge - Kutta法の計算を実行する際に助走区間では5元, 充満区間では4元の連立の非線形の常微分方程式を解かねばならない。しかし, 直交曲線座標を用いることにより仮定する速度分布の形に無理がなく, また本研究において始めて用いた円板間中央における摩擦応力の回転軸方向の勾配比を定める係数に, どのような値を仮定しても, 静圧と動圧の計算値に変化がないことが明らかとなり, 計算結果は回転円板間

内のねじれた流れをより良好に表わすことができた。

流れを決定するパラメータは、流量を代表するレイノルズ数 R_1 、円板の回転速度を代表するレイノルズ数 R_2 、無次元入口半径 α_i および充満区間のみに用いられる円板間中央における摩擦応力の回転軸方向の勾配比を定める係数 k である。

本章で得られた結果の要旨は次のとおりである。

- (1) 流量が小さい場合、円板の回転数が大きい場合、あるいは入口径が大きい場合には、入口半径の付近から円板の回転の効果が発生する。そして入口助走部の境界層の発達は一急であるため流路拡大にもかかわらず円板間中央の相対流速は増し、助走部の径方向の長さは短くなる。またこの場合、入口の影響は入口付近に限られ、円板の回転により流体にエネルギーを与える半径位置は入口に近い。そして入口の影響の消失した小さな半径位置から相対流速は減少し、圧力の分布曲線は半径の自乗に比例する形に近づく。静圧は回転軸方向に変化がないからコリオリ力の効果は二次流れを円板の出口側に発生させるように働く。
- (2) 流量が大きい場合、円板の回転数が小さい場合あるいは入口径が小さい場合には、半径の小さい領域では円板の回転の効果は小さく、流れは静止したリングデュフューザ内の流れに近くなり、流路の拡大による流速減少に伴う静圧回復が、静圧分布を決定する主要な因子となる。この領域では全圧は低下し円板はエネルギーを消費する役割しか果たさず、また流線の曲がりによる遠心力の効果がコリオリの力の効果より大きいため、二次流れは円板入口側に発生する。

半径位置が大きくなるにしたがい円板の回転の効果がしだいに表われ、流量が小さい場合、円板の回転数が大きい場合あるいは入口径が大きな場合の入口の影響が消失した領域での流れになる。すなわち、流線の曲がりによる遠心力の効果が減少し、相対的にコリオリ力が大きくなり、二次流れを円板出口側に発生させ、全圧は上昇する。

- (3) R_1 , R_2 を固定すれば, α_i に関係なく定まるある半径位置で入口の影響はほぼ消失し, かつその半径は円板の遠心効果が強い場合は入口半径に近い。また, α_i が小さい場合には半径の小さい領域では円板はエネルギーを消費する役割しか果たさない。逆に α_i が大きすぎると円板入口からの積分値である静圧の上昇は少なくなる。すなわち R_1 と R_2 を固定すれば α_i には最大の全圧を与える値が存在し, $\sqrt{R_1/R_2} \sim 2\sqrt{R_1/R_2}$ の値の付近にあると考えられる。
- (4) 係数 k を固定すれば, α_i に無関係に半径の大きな位置での流れが決定され, 半径の十分に大きな位置では $[R_1^3/(R_2^4 \alpha^3)]^{1/7}$ のべき級数により表わされる相似解となる。この相似解は, コリオリ力と摩擦力のつりあいから定められた級数解で, 遠心力を除く慣性力の減少した大きな半径位置で成り立つ。
- (5) 係数 k の値によって流速分布は変化する。しかし, 流速の絶対値に対してはほとんど影響を及ぼさず, したがって静圧と動圧は係数 k の値に左右されない。
- (6) 乱流流れと層流流れを比較すると, 層流流れのほうが全圧上昇は急で, 流量が大きい場合にも小さな半径位置から全圧は上昇する。

円板の回転の効果が大きい領域では, 乱流の場合には常に円板間中央付近に径方向内向きに逆流を生じるが, 層流の場合には R_2 が大きい場合に限られる。

円板間中央の相対流速 W_s と半径 r の関係は, 乱流の場合には $W_s \propto r^{-4/7}$, 層流の場合には $W_s \propto r^{-1}$ である。したがって乱流流れは層流流れに比べて流体が円板とともに剛体的に回転する半径位置は入口より離れるが, いづれの場合でも半径が無限に大きな領域では流体は円板とともに剛体的に回転し, 静圧 P の上昇割合は $(dP/dr) \propto r$ である。

第 4 章 回転円板間内の流れの実験的検証

第 1 節 緒 言

本章では、前二章における回転円板間内の流れを円板入口から無限半径位置にいたるまで、いたるところ層流あるいは乱流と仮定して解析した結果を実験的に検証している。そして理論解の適用範囲と理論では考慮されなかった出口端面効果の影響を明らかにしている。

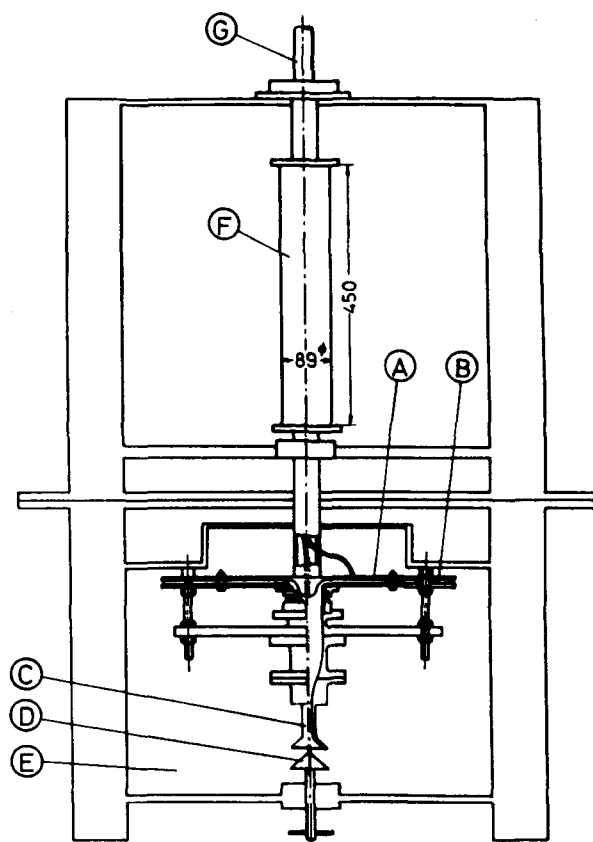
円板摩擦ポンプの実機は図 1.1 に示したように、数枚の円板から構成された回転円板を用いるが、本研究では回転円板間内の流れを測定するために二枚の円板のみによって構成された回転円板を用いている。また回転円板出口には実機ではディフューザ、渦巻きケーシングなどを設置して流れを一つにまとめ吐出管に導くが、本研究では回転円板間内の流れのみに注目し、円板間内の流れが軸対称を保ち理論解析に用いた回転円板と同じ条件となるように、リングディフューザのみを用いて水槽内に放出させた。

実験は回転円板間内の流れを測定することであるが、円板間隔が非常に狭いため、円板間内の流速を測定することには不可能である。そこで本研究では回転円板間内の静圧を回転マノメータを用いて測定している。

第 2 節 実験装置

2. 1 実験装置の構成

図 4.1 に実験装置の概略を示す。実験装置の主要構成部分は回転円板、リングディフューザ、吸込管、流量制御弁を中にもつ水槽、回転マノメータを兼ねた車軸および駆動機であり、これらは立形に組立ててある。また装置の上方約 4 m の位置に加圧水槽がある。この加圧水槽から実験装置水槽に配管してあり、加圧することができる。

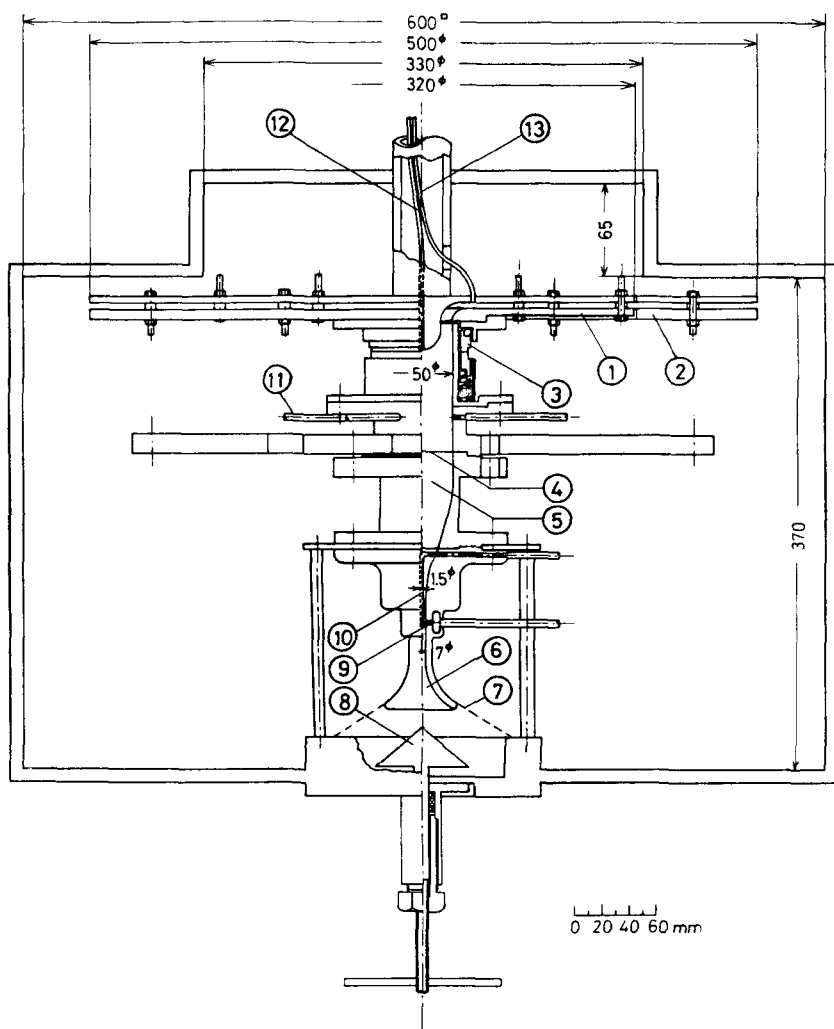


- | | |
|--------------|----------------------|
| A. 回転円板 | E. 水 槽 |
| B. リングディフューザ | F. 回転マノメータを
兼ねた車軸 |
| C. 吸込管 | G. 駆動軸 |
| D. 流量制御弁 | |

図 4.1 実験装置概略図

図 4.2 に水槽部の詳細を示す。

各部分の詳細は次のとおりである。



- | | |
|--------------|-----------------|
| 1. 回 転 円 板 | 8. 流 量 制 御 弁 |
| 2. リングディフューザ | 9. 流量測定用静圧孔 |
| 3. メカニカルシール | 10. 流量測定用全圧管 |
| 4. 整 流 金 網 | 11. 円板入口部静圧測定孔 |
| 5. 吸 込 管 | 12. 円板入口部全圧導圧管 |
| 6. ベルマウス | 13. 回転円板壁面静圧導圧管 |
| 7. 金 網 | |

図 4.2 水槽部詳細図

2. 2 回転円板

回転円板（図 4.2 部番 1）は前部円板，後部円板およびそれらを組立てるためのボルト，ナットそして円板間隔を定めるスペースリングより構成される。

回転円板の形状寸法を図 4.3 に示す。

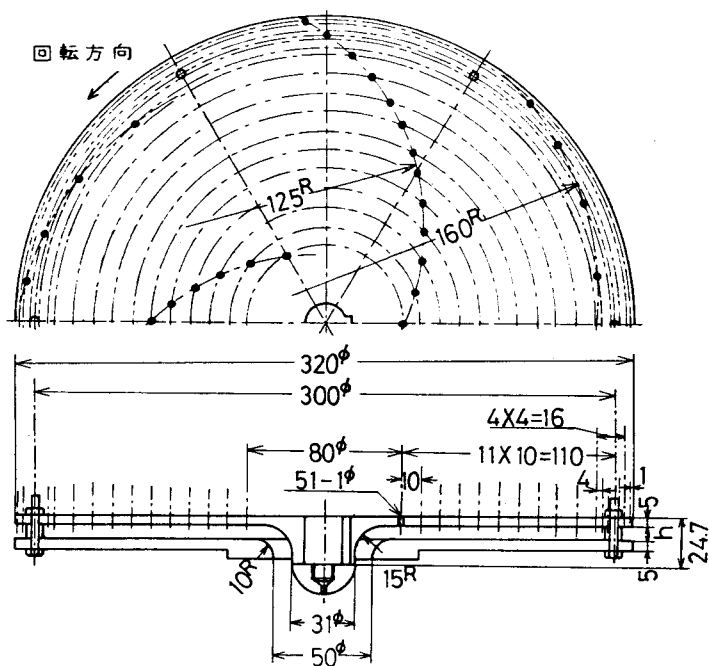


図 4.3 回転円板（ h ：円板間隔）

円板の外径は 320ϕ ，吸込口直径は 50ϕ で，円板間隔が一定となる直径は 70ϕ である。円板間隔は任意に変えることができ，本実験では 1 mm ， 2 mm ， 4 mm ， 8 mm および 16 mm とした。

前後円板は真鍮製で，その内面は滑らかに仕上げてあり，その厚さは 5 mm である。2 枚の円板は直径 300ϕ の位置に開けた 6 個の 5ϕ の穴に，ボルトと円板間に挿入するそれぞれ 1 mm ， 2 mm ， 4 mm ， 8 mm ， 16 mm の厚さのスペースリングおよびナットによって組立ててある。

回転円板と車軸の取り付けには回転円板吸込目玉中心部のキャップ

ナットを用いる。キャップナット中心軸には直径 1.6φ の孔があけてあり、この孔に差し込まれた導圧管（図 4.2 部番 12）は車軸を貫通して回転マノメータに通じる。そして、キャップ先端を回転円板入口流れの岐点位置と考えて、この点の圧力指示値を回転円板入口全圧と定義した。

回転円板間内の静圧を測定するために、後部円板の壁面に静圧測定用孔を設けてある。静圧孔は径 1φ で、半径 40 mm の位置から半径 150 mm の位置まで 10 mm 間隔に、また半径 144 mm の位置から半径 156 mm の位置まで 4 mm 間隔に、そして半径 159 mm の位置にあり、120° おき 3 列 51 個軸対称に設けてある。このように外周近くの静圧を詳しく測定する目的で、外周付近には間隔を狭めて静圧孔を設けてある。

静圧孔の指示圧力は、車軸を貫通する導圧管（図 4.2 部番 13）によって回転マノメータに導かれる。

2. 3 リングディフューザ

リングディフューザ（図 4.2 部番 2）を回転円板外周に設置してある。真鍮製のリングディフューザの内径は 321φ、外径は 500φ で、その内面は滑らかに仕上げてある。回転円板と同様にスペースリングを挟んで組立ててあり、リングディフューザの間隔は特にことわらない限りふつう円板間隔よりも 0.2 mm 広いものを用いている。

2. 4 吸 込 管

吸込管（図 4.2 部番 5）の入口部はベルマウス（図 4.2 部番 6）となっていて、その下に流量制御弁（図 4.2 部番 8）が位置し、これらは一体に組立ててある。本実験装置ではこのように流量制御弁を備えているので、連続的な流量制御が可能である。また吸い込まれる水の旋回成分を除去するために、金網（図 4.2 部番 7）を設けてある。

回転円板を通り抜ける流量を測定するために、内径 7φ の管部の壁

面に静圧孔（図 4.2 部番 9）を 4 個設け、また全圧管（図 4.2 部番 10）を挿入してあり、導圧管を通じて水槽外のマノメータに接続されている。

本実験に先きだち、流量の検定曲線を作成した。流量制御部および流量測定部（図 4.2 部番 4 ～ 10）を本実験に用いる水槽とは別の水槽に封じ込め、吸込管出口から導水管で容器に導く。そして水槽に一定の押し込みをかけ、ある時間にわたって吸込管出口から流出した水を容器に入れ、その重さを測る。このようにして得られた流量を縦軸に、また同時に測定した吸込管内の動圧と静圧の差圧を横軸にプロットすることにより流量検定曲線を得た。

吸込管の末広部分の終端部には整流金網（図 4.2 部番 4）を設置してある。管壁の 6 個の静圧孔（図 4.2 部番 11）は回転円板入口部の静圧を測定するためのもので、導圧管により水槽外のマノメータに接続してある。

吸込管の終端部にはメカニカルシール（図 4.2 部番 3）を設け、回転円板の前部円板と静止した吸込管の間からの水の流入を防止した。通常の遠心ポンプなどでは、羽根車と吸込管の間から流体が流入しても無視できるが、本実験で用いた実験用ポンプは一對の円板のみで構成されているため、その流入の影響はすべて一對の円板間内の流れに集積され、静圧分布の測定結果を大きく左右するからである。

2. 5 回転マノメータ

回転円板壁面の静圧と回転円板入口部の全圧の指示のために、車軸とともに回転するマノメータを用いる。回転マノメータは車軸を兼ねており、その内部は中空で導圧管を通してある。

回転マノメータは直径 89φ、長さ 450 mm で、その外周上にガラス管を並べて取り付けられている。ガラス管の直径は 3φ で、内径は約 1.6φ である。マノメータ内径は太すぎる場合は回転のために液面が傾斜するの

で測定 of 精度が落ち、また細すぎる場合は表面張力のために管内の水柱が切れる。

マノメータ下端は中空車軸の内部を通じる導圧管に接続してあり、マノメータはU字管ではない。

マノメータの指示値は、クセノン管ストロボライトを車軸の回転に同期発光させて読み取った。

2. 6 水 槽

水は 600[□]，高さ 370 mm の直方体タンクに封じ込んであり，水はベルマウスを入口部にもつ吸込管から流入し，回転円板，リングディフューザを通り，再び水槽内に戻る。すなわち水は水槽内を循環する。

2. 7 駆 動 機

本実験では駆動機として直流電動機を用いた。モータは立型でマノメータを兼ねる軸と直結してあり，電機子電圧および界磁電流の調節により，回転数を連続的に変えることができる。

第 3 節 実験方法および実験結果の整理方法

3. 1 実験方法

加圧タンクから装置水槽部に水圧をかけ，水槽上面の空気抜き孔を開いて水槽内部の空気を完全に抜く。またマノメータから水をあふれさせ，導圧管内の空気も完全に抜く。空気を抜いたのち水槽を密封し，加圧タンクからの導水管を閉じる。この状態でポンプを回転させ，回転マノメータの指示値が読み取り可能となるようにタンク内圧力を調節する。流量が大きい場合には，岐点全圧と回転円板壁面静圧の指示値の差が大きくなり，回転マノメータの長さを超える場合がある。こ

の場合にはマノメータ上端部に栓をして2回に分割して実験を行なった。

ポンプ運転開始後，十分に定常になるのを待って測定を開始し，水の動粘性係数は水温を測定して決定した。

円板回転数はデジタルカウンタによって測り，常に所定の回転数を保つように電機子電圧および界磁電流を調整した。

流量は，吸込管中心線上に設けた全圧管と吸込管壁面に設けた静圧孔に通じるマノメータの指示値を読み取り，その差圧から流量検定曲線を用いて定めた。

円板入口部の静圧は吸込管の管壁に設けた孔に通じるマノメータにより読み取る。また回転マノメータの指示値は，ストロボライトをマノメータの回転に同期発光させて読み取った。

実験は，主に円板回転数 150，200，300 rpm，円板間隔 1，2，4，8，16 mm について流量を種々に変えて行なった。

3. 2 回転円板壁面静圧と回転マノメータの指示値

回転マノメータの指示値は，そのまま回転円板内の静圧を示さないため，補正する必要がある。

測定点の圧力を p_j ，回転マノメータの指示値を p' ，大気圧を p_a ，測定点の回転中心からの距離を r_j ，マノメータの回転中心からの距離を r_m ，回転角速度を ω ，流体の密度を ρ とすると，マノメータ内の回転系に対する相対速度は 0 であるから，回転座標系に対するベルヌーイの定理より遠心力による圧力上昇の補正を行なえば，次の関係式が得られる。

$$p_j = p_a + p' + (\rho/2)(r_j^2 - r_m^2)\omega^2 \quad (4.1)$$

円板入口半径 r_i を円板間隔 h が一定になる半径 $r = 35 \text{ mm}$ とし，円板入口における静圧を p_i とする。また流量を Q ，キャップナット先端における全圧を p_e とし，キャップナット先端から円板入口までの間，

水のエネルギー受授はないとして次式により入口静圧を定める。

$$p_i = p_c - (\rho/2) \{ Q / (2\pi r_i h) \}^2 \quad (4.2)$$

回転円板壁面上の静圧 p は，入口静圧 p_i を基準にして次式より定める。

$$p = p_j - p_i \quad (4.3)$$

なお円板入口静圧を決定するための式 (4.2) による値と円板入口部静圧測定孔 (図 4.2 部番 11) による測定値は，ほぼ一致することが実験で確かめられたので，実験結果はすべて式 (4.2) による値を用いて整理した。

3. 3 実験結果の整理方法

実験結果は，前二章の理論計算結果を検証する意味から次のような同様の整理方法を用いた。

水の動粘性係数を ν ，円板壁面の回転中心からの半径位置を r ，円板出口半径を r_o ， $r = h$ における径方向平均流速を u_o ， $u_o = Q / (2\pi h^2)$ ， $r = h$ における円板周速を v_o ， $v_o = h\omega$ として次のように表わす。

$$\text{無次元半径} \quad \alpha = r/h, \quad r_n = r/r_o \quad (4.4)$$

$$\text{流量係数} \quad \varphi = Q / (\pi r_o^3 \omega) \quad (4.5)$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{流量を代表するレイノルズ数} \quad R_1 = u_o h / \nu \\ \text{円板の回転速度を代表するレイノルズ数} \quad R_2 = v_o h / \nu \end{array} \right\} \quad (4.6)$$

$$\text{無次元静圧} \quad P = p / (\rho v_o^2 / 2), \quad P_n = p / \{ \rho (r_o \omega)^2 / 2 \} \quad (4.7)$$

第 4 節 実験結果と計算結果および考察

4. 1 実験結果と計算結果

まず後部円板に 3 列に開けた静圧孔の指示値を同時に測定し、流れがほぼ軸対称であることを確かめたのち実験を行なった。

実験結果を図 4.4 ~ 4.8 に示し、図 4.4 ~ 4.6 には前二章の計算結果をあわせて示す。

図 4.4 に円板回転数 $n = 200 \text{ rpm}$ 、円板間隔 $h = 1 \text{ mm}$ の場合について流量を変えた時の実験結果、層流計算結果、入口効果を補正しない層流計算結果および乱流計算結果による静圧 P を縦軸に、無次元半径 α を横軸にとり示した。入口効果を補正しない層流解は無限半径位置からのせつ動解 (2.97), (2.98), (2.99) がそのまま円板入口から出口まで成り立つとして計算したもので、円板入口半径における静圧

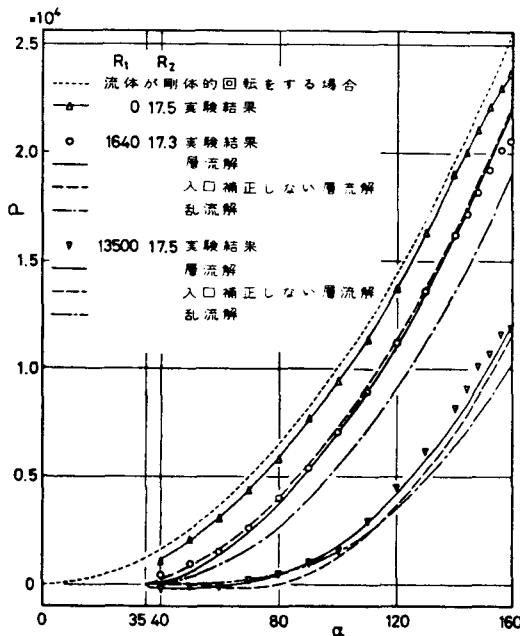


図 4.4 静圧分布 ($n = 200 \text{ rpm}$, $h = 1 \text{ mm}$ の場合)

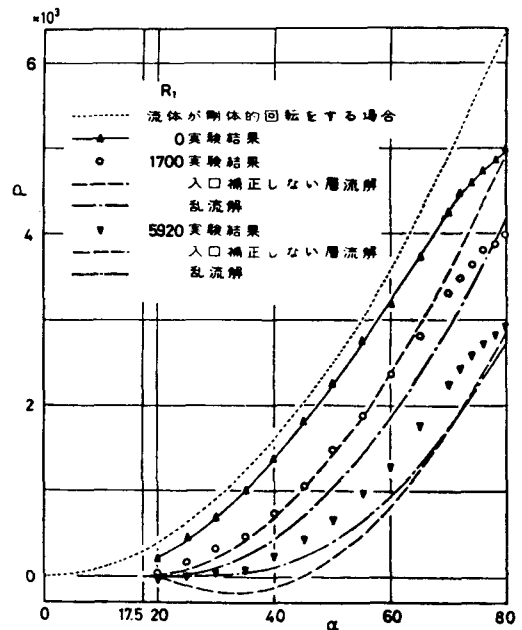


図 4.5 静圧分布 ($n = 200 \text{ rpm}$, $h = 2 \text{ mm}$, $R_2 = 68.7$ の場合)

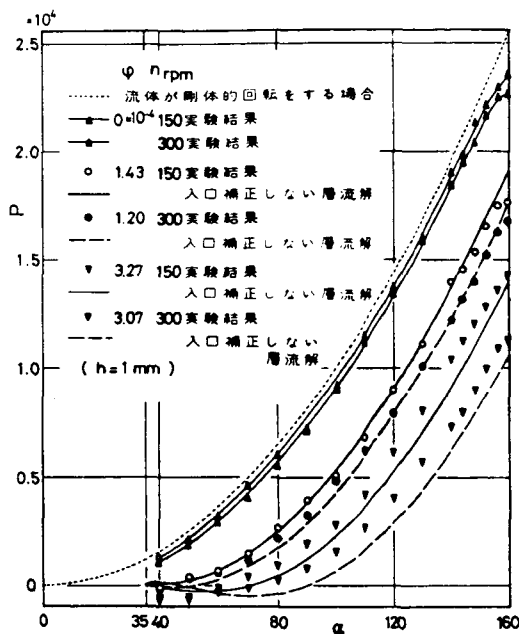


図 4.6 静圧分布（静圧の回転数に対する相似則について）

を 0 としてある。乱流解の充満区間の流れの決定に必要である係数 k は 0.5 を用いた。図中の点線は $P = \alpha^2$ であるが、これは回転中心に吹き出しをもたない二枚の無限に大きな回転円板間の流体が、円板とともに剛体的に回転する時の静圧分布である。

図 4.5 は $n = 200 \text{ rpm}$, $h = 2 \text{ mm}$ の場合の静圧分布である。

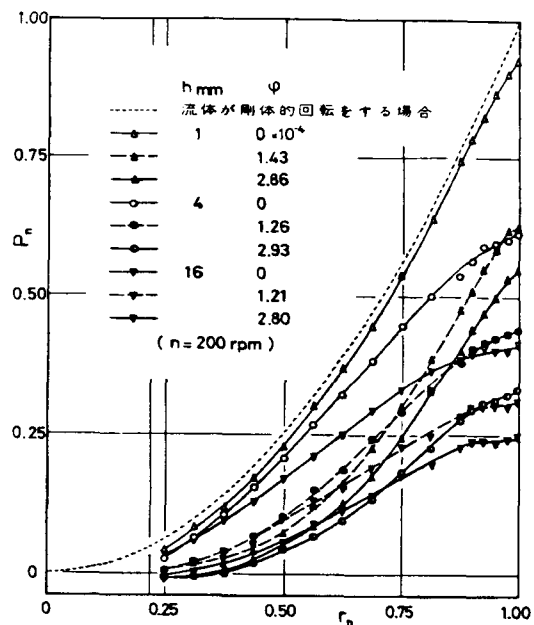


図 4.7 静圧分布（等しい流量係数で円板間隔を変えた場合）

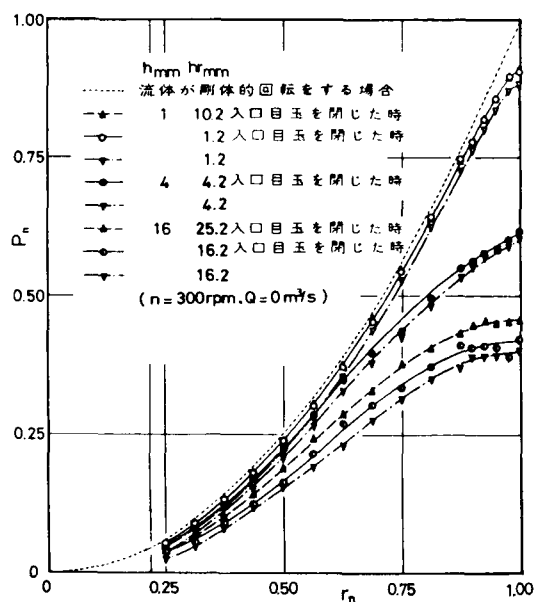


図 4.8 静圧分布（入口、出口端面効果について）

図 4. 6 は $h = 1 \text{ mm}$ の場合の $n = 150 \text{ rpm}$ と 300 rpm について流量係数 φ を等しくして比較した静圧分布で、静圧の回転数に対する相似則が成立するか否かを調べた結果である。

図 4. 7 は $n = 200 \text{ rpm}$ の時のほぼ等しい流量係数 3 種について、 $h = 1, 4, 16 \text{ mm}$ の場合の静圧の実験値を比較したものである。

図 4. 8 は $n = 300 \text{ rpm}$, $Q = 0 \text{ m}^3/\text{s}$ の場合の静圧の実験値で、円板入口部あるいは円板出口のリングディフューザの間隔 h_r を変え、また円板間隔を変えることによる回転円板間内の流れの変化を示すものである。

4. 2 考 察

4. 2. 1 端面効果

図 4. 4 ～ 4. 6 に示した実験値と計算値の相違は円板入口部と出口部、すなわち円板端面付近に生じるが、これは入口端面効果と出口端面効果によるものである。

入口端面効果について述べると、本実験に用いた後部円板は軸中心まで続いているため、流量が小さく回転数が大きい場合には、後部円板の摩擦力により円板入口に予回転が生じ、二枚の円板が等間隔になるのは $r_i = 35 \text{ mm}$ の位置であるが、 $r = 40 \text{ mm}$ ですでに静圧はかなり高くなる。しかし流量が大きく回転数が小さくなると、入口からただちに静圧は増加せず、入口付近では逆にわずかであるが静圧は低下する。このことは前章でも述べたように、この領域では円板がエネルギーを消費するために、大流量のポンプでは入口径を大きくする必要があることを示唆している。

従来ほとんど言及されていない出口端面効果は、円板外径が有限であるため回転円板出口外側の静止部分が回転円板間内の流れの回転にブレーキをかけることにより生じ、この影響の及ぶ領域では圧力上昇が低下する。流量が 0 の場合には、 $h = 1 \text{ mm}$ では $r = 150 \text{ mm}$ ($\alpha = 150^\circ$) 付近から、 $h = 2 \text{ mm}$ では $r = 120 \text{ mm}$ ($\alpha = 60^\circ$) 付近から、

静圧は剛体的回転時の圧力分布から離れる。そして $h = 16 \text{ mm}$ の時（図 4.7）には、流体が剛体的回転する領域はなくなる。すなわち円板間隔が広いほど出口端面効果は大きく、その影響は半径のより小さい領域にまで及び、圧力の低下は大きい。

また図 4.7 は円板間隔 h を 1, 4, 16 mm と大きく変えた時の流れの変化を示したものであるが、流量が増加した場合の圧力上昇の低下は、円板間隔が広いほど小さい。これは円板間隔が広い場合、流量が小さい時には出口端面効果のため圧力上昇は小さく、流量が大きい時には通り抜け流れによって出口端面効果は円板出口側に押し流され、その影響が減少するためと思われる。流量により静圧分布は異なるが、静圧分布の相違は円板間隔が大きいほど出口端面効果の影響の少ない小さな半径位置での圧力上昇の差により生じている。

以上より円板間隔が広く流量が小さい場合には、出口端面効果が円板間内の流れに大きな影響を与えることがわかる。

図 4.8 は、流量が 0 の場合に円板間隔を 3 種に変え、また円板入口および出口条件を変えて入口出口端面効果の影響を調べた実験結果である。

▽, ▼, ▼印は吸込管入口部の流量制御弁を閉じて流量を 0 にした場合、○, ●, ●印は吸込管を取り去り、円板入口部をカバーで密封し、円板とカバーを一体に回転させた場合である。△, ▲印はリングディフューザの間隔 h_r を広くした場合である。 $h = 1 \text{ mm}$ の場合のように円板間隔が小さい場合には、リングディフューザの間隔の相違による出口端面効果の影響の変化は表われないが、円板間隔が大きくなると顕著に表われ、リングディフューザの間隔が小さいほうが圧力の低下は大きい。また入口にカバーを取り付けて入口条件を変えると、円板間内の圧力分布は平行移動する。すなわち入口条件変化の影響は円板入口付近で消え、回転円板間内の流れに影

響を及ぼさないことがわかる。

Welsh & Hartnett [18] は、直径が 18 inch の 2 枚の円板を間隔 4, 6, 8 inch に組み立て、回転数 710, 1310, 2040 rpm で大気中で回転させ、回転中心に吹き出しの無い場合の実験を行なっている。本研究に用いた実験装置に比べると円板直径に比し間隔が広い場合であるが、この実験結果によれば、流体が円板とともに剛体的に回転する半径 r_R は次式で表わされる。

$$\frac{r_R}{r_o} = 0.2 \left(\frac{r_o}{h} \right)^{0.4} \quad (4.8)$$

本実験におけるパラメータを式 (4.8) に代入すると、

$$h = 1 \text{ mm} \quad : \quad \frac{r_R}{r_o} = 1.53 \quad (> 1)$$

$$h = 4 \text{ mm} \quad : \quad \frac{r_R}{r_o} = 0.875$$

$$h = 16 \text{ mm} \quad : \quad \frac{r_R}{r_o} = 0.501$$

となり、本実験結果のほうが、リングディフューザがあるにしても、出口端面効果の影響はより円板中心部まで及んでいる。ただし、上記の $h = 1 \text{ mm}$, $r_o = 160 \text{ mm}$ の場合のように $(r_R / r_o) > 1$ となり、式 (4.8) は不合理な場合も含んでいる。

4. 2. 2 理論値と実験値の比較

理論値と実験値を比較すると、円板間隔が小さい場合 (図 4.4, $h = 1 \text{ mm}$)、流量が小さい時には層流解および入口効果を補正しない層流解は、ともに出口端面効果の及ぶ $\alpha > 150$ を除いて実験値と非常によく一致する。流量が大きい時にも入口補正した層流解は実験値と良く一致し、入口効果を補正しない層流解でも比較的一致している。乱流解はいずれの場合にも実験値よりも低い値を示す。

円板間隔が広くなると（図 4.5， $h = 2\text{ mm}$ ），出口端面効果のため理論値と実験値が一致しない領域は増加するが， $h = 2\text{ mm}$ で流量が小さい時は， $\alpha < 60$ の範囲で入口補正をしない層流解は，実験値と非常によく一致する。流量が大きくなると，入口補正をしない層流解は級数の収束が悪くなり，実験値から離れるようになる。

図 4.6 に $h = 1\text{ mm}$ で流量係数が等しい場合の $n = 150\text{ rpm}$ と 300 rpm について比較した圧力分布を示したが，この回転数の時にも $n = 200\text{ rpm}$ の場合（図 4.4）と同様，流量が小さい時には入口補正をしない層流解は実験値と良く一致し，流量が大きくなると実験値より少し低い値を示す。

本実験の目的の一つは前二章の層流解と乱流解を実験的に検証することであるが，以上に示したように円板間隔が小さい場合には，入口補正しない簡易層流解で流れを精度よく表現できることが明らかとなった。

4. 2. 3 円板摩擦ポンプの回転数に対する相似則

図 4.6 に示したように，実験値，理論値ともに，回転数が小さいほど無次元静圧は高く，円板摩擦ポンプでは回転数に対する相似則は成立しない。

第 5 節 結 言

本章では，回転円板間内の流れを円板入口から無限半径位置にいたるまで，いたるところ層流あるいはいたるところ乱流と仮定して理論解析した結果を実験的に検証した。

実験に用いた回転円板は二枚の円板のみで構成され，その出口外側にはリングディフューザを設けた。通常の円板摩擦ポンプとは異なり，渦巻きケーシングを取り除き，流れが軸対称となり理論解析に用いた回転

円板となるべく同じ条件になるようにした。

理論計算は層流解，乱流解および入口補正を施さずに無限半径位置からのせつ動解が入口から出口まで成立するとする簡易層流解について行なった。

得られた結果の要旨は次のとおりである。

- (1) 入口端面効果について述べると，流量が小さく回転数が大きい場合には，円板入口に予回転が生じ流体はエネルギーを与えられることがあり，流れは円板入口部の形状により変化する。これとは逆に流量が大きく回転数が小さい場合には入口からただちに静圧は上昇するのではなく，入口付近では逆に静圧は低下する。この実験結果は理論解析結果と一致し，この領域の円板はエネルギーを消費する役割しか果たさず，大流量のポンプでは入口径を大きくする必要がある。
- (2) 従来ほとんど言及されていない円板摩擦ポンプの回転円板の出口端面効果は，円板外径が有限であるために回転円板出口外側の静止部分が，回転円板間内の流れの回転にブレーキをかけることにより生じ，この影響の及ぶ領域では圧力上昇が低下する，出口端面効果は円板間隔が広い場合ほど著るしく，圧力上昇の低下は大きく，またその影響の及ぶ領域も円板内のより小さな半径位置にまで達する。そして円板間隔が広い場合には，出口端面効果が円板間内の流れを決定する最大の因子となる。しかし，この出口端面効果は流量の増加とともに減少し，流量が大きいほど，圧力上昇の低下は小さく，影響の及ぶ領域も円板出口付近に限られてくる。
- (3) 円板間隔が狭い場合には，実験値と入口補正を施さない層流解はよく一致し，入口補正を施した層流解はさらによく一致する。円板間隔が広くなると出口端面効果のために，実験値と層流解が一致しない領域は増加する。

乱流解は層流解あるいは実験値に比べて少し小さい圧力分布を示す。

- (4) 円板摩擦ポンプでは，回転数に対する相似則は実験結果からも理論解析結果からも成り立たず，回転数が大きいほど無次元静圧は低い。

第 5 章 円板摩擦ポンプの性能

第 1 節 緒 言

本章では円板摩擦ポンプの性能について述べる。前章における理論解析結果と実験結果の比較から、円板間隔が狭い場合には流れは入口補正を行なわない簡易層流式(2.97)，(2.98)および(2.99)で十分に精度よく近似できることがわかった。そこでポンプ性能を算出するための基礎式として簡易層流解を用いることにする。

第 2 節 ポンプ性能の計算式

一对の円板からなる流路に注目してポンプ性能の計算式を導く。

2. 1 入 力

入力回転円板壁面上の周方向剪断応力からトルクを求め、これに円板回転角速度を乗ずることにより得られる。流体の粘性係数を μ ，密度を ρ ，円板の回転軸からの半径位置を r ，入口半径を r_i ，出口半径を r_o ，回転軸方向の座標を z とする。 $z = 0$ は円板壁面である。また流量を Q ，円板の回転角速度を ω ，周方向流速を v とすると，入力 L_i は次式で表わされる。

$$\begin{aligned} L_i &= \left[-2 \int_{r_i}^{r_o} \mu \left(\frac{\partial v}{\partial z} \right)_{z=0} (2\pi r dr) \right] r \omega \\ &= \rho Q \omega^2 (r_o^2 - r_i^2) \end{aligned} \quad (5.1)$$

入力回転円板間隔 h と粘性係数に関係しないことは興味深いことである。

2. 2 損 失

流体が回転円板間内を通り抜ける時に失なうエネルギーは消散関数を用いて求められる。半径方向流速を u ，回転軸方向流速を w とすると，流れが軸対称の場合の消散関数 E_L は，

$$E_L = \mu \left[2 \left(\frac{\partial u}{\partial r} \right)^2 + 2 \left(\frac{u}{r} \right)^2 + 2 \left(\frac{\partial w}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial r} \right)^2 \right]$$

によって表わされるから，回転円板間内における損失 L_1 は次のようになる。

$$\begin{aligned} L_1 &= \int_0^h \int_{r_1}^{r_0} E_L (2\pi r dr) dz \\ &= \frac{\rho Q^2 \omega}{\pi h} \frac{\cosh \sqrt{R_2} + \cos \sqrt{R_2}}{\sinh \sqrt{R_2} - \sin \sqrt{R_2}} \left[\sqrt{R_2} \log_e \frac{\alpha_0}{\alpha_i} \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{\sinh \sqrt{R_2} - \sin \sqrt{R_2}} (\cosh \sqrt{R_2} + \cos \sqrt{R_2} - \frac{\sinh \sqrt{R_2} + \sin \sqrt{R_2}}{\sqrt{R_2}}) \right] \\ &\quad \times \left(\frac{1}{\alpha_i^2} - \frac{1}{\alpha_0^2} \right) \end{aligned} \quad (5.2)$$

ただし， $R_2 = h^2 \omega / \nu$ ， $\alpha_i = r_i / h$ ， $\alpha_0 = r_0 / h$ で， ν は動粘性係数である。

2. 3 出 力

出力 L_0 は，入力 L_i と損失 L_1 を用いると次のようになる。

$$L_0 = L_i - L_1$$

$$\begin{aligned}
&= \rho Q \omega \left[\omega (r_o^2 - r_i^2) - \frac{Q}{\pi h} \frac{\cosh \sqrt{R_2} + \cos \sqrt{R_2}}{\sinh \sqrt{R_2} - \sin \sqrt{R_2}} \left\{ \sqrt{R_2} \log_e \frac{\alpha_o}{\alpha_i} \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \frac{1}{\sinh \sqrt{R_2} - \sin \sqrt{R_2}} \left(\cosh \sqrt{R_2} + \cos \sqrt{R_2} - \frac{\sinh \sqrt{R_2} + \sin \sqrt{R_2}}{\sqrt{R_2}} \right) \right. \right. \\
&\quad \left. \left. \times \left(\frac{1}{\alpha_i^2} - \frac{1}{\alpha_o^2} \right) \right\} \right] \quad (5.3)
\end{aligned}$$

2. 4 揚 程

揚程 H_t は，流体の比重量を r ，重力の加速度を g とすると，次式で表わされる。

$$\begin{aligned}
H_t &= \frac{L_o}{r Q} \\
&= \frac{\omega}{g} \left[\omega (r_o^2 - r_i^2) - \frac{Q}{\pi h} \frac{\cosh \sqrt{R_2} + \cos \sqrt{R_2}}{\sinh \sqrt{R_2} - \sin \sqrt{R_2}} \left\{ \sqrt{R_2} \log_e \frac{\alpha_o}{\alpha_i} \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \frac{1}{\sinh \sqrt{R_2} - \sin \sqrt{R_2}} \left(\cosh \sqrt{R_2} + \cos \sqrt{R_2} - \frac{\sinh \sqrt{R_2} + \sin \sqrt{R_2}}{\sqrt{R_2}} \right) \right. \right. \\
&\quad \left. \left. \times \left(\frac{1}{\alpha_i^2} - \frac{1}{\alpha_o^2} \right) \right\} \right] \quad (5.4)
\end{aligned}$$

2. 5 内部効率

内部効率を η とすると，

$$\begin{aligned}
\eta &= 1 - \frac{L_1}{L_i} \\
&= 1 - \frac{Q}{\pi \omega} \frac{\cosh \sqrt{R_2} + \cos \sqrt{R_2}}{\sinh \sqrt{R_2} - \sin \sqrt{R_2}} \left[\sqrt{\frac{\omega}{\nu}} \log_e \frac{\alpha_o}{\alpha_i} \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{h} \frac{1}{\sinh \sqrt{R_2} - \sin \sqrt{R_2}} (\cosh \sqrt{R_2} + \cos \sqrt{R_2} - \frac{\sinh \sqrt{R_2} + \sin \sqrt{R_2}}{\sqrt{R_2}}) \\
& \times \left(\frac{1}{\alpha_i^2} - \frac{1}{\alpha_o^2} \right) \Big] \frac{1}{r_o^2 - r_i^2} \quad (5.5)
\end{aligned}$$

である。

2. 6 静圧揚程

静圧揚程 H_s は，円板出口静圧を p_o とすると次式で与えられる。

$$\begin{aligned}
H_s &= \frac{p_o}{r} \\
&= \frac{v_o^2}{2g} \left[(\alpha_o^2 - \alpha_i^2) - 4 \frac{R_1}{\sqrt{R_2}} \frac{\cosh \sqrt{R_2} + \cos \sqrt{R_2}}{\sinh \sqrt{R_2} - \sin \sqrt{R_2}} \log_e \frac{\alpha_o}{\alpha_i} \right. \\
&\quad + \frac{R_1^2}{R_2} \frac{\cosh \sqrt{R_2} + \cos \sqrt{R_2}}{(\sinh \sqrt{R_2} - \sin \sqrt{R_2})^3} \left\{ \frac{1}{10} (-7 \sinh \sqrt{R_2} \cosh \sqrt{R_2} \right. \\
&\quad + \sinh \sqrt{R_2} \cos \sqrt{R_2} - \cosh \sqrt{R_2} \sin \sqrt{R_2} \\
&\quad + 7 \sin \sqrt{R_2} \cos \sqrt{R_2}) + \sqrt{R_2} \sinh \sqrt{R_2} \sin \sqrt{R_2} \Big\} \\
&\quad \times \left(\frac{1}{\alpha_o^2} - \frac{1}{\alpha_i^2} \right) \Big] \quad (5.6)
\end{aligned}$$

ただし， $v_o = h\omega$ である。

第 3 節 計算式に対する検討

本節では前節の計算式を検討する。

3. 1 内部効率について

内部効率 η は流量 Q ，円板回転角速度 ω ，円板間隔 h ，流体の動粘性係数 ν ，円板入口半径 r_i および円板出口半径 r_o の関数である。

(1) η を Q のみの関数とみたとき，

η は Q の増加とともに直線的に減少する〔図 5.1 (a)〕。

(2) η を ω のみの関数とみたとき，

ω が大きいほど η は大となる〔図 5.1 (b)〕。

(3) η を r_i のみの関数とみたとき，

r_i が r_o に近いほど η は高い〔図 5.1 (c)〕。

(4) η を r_o のみの関数とみたとき，

r_o が大きいほど η は大となる〔図 5.1 (d)〕。

(5) η を h のみの関数とみたとき，

通常、円板摩擦ポンプのように α_i が十分に大きい場合には式 (5.5) の級数の第 2 項以降は無視でき，

$$F \equiv \frac{\cosh \sqrt{R_2} + \cos \sqrt{R_2}}{\sinh \sqrt{R_2} - \sin \sqrt{R_2}}$$

を最小にする h を求めれば，このとき η は最大になる。

図 5.1 (e) に示すように

$\sqrt{R_2} \equiv \sqrt{\omega/\nu} h = \pi$ のとき F は最も小さく， $h = \pi/\sqrt{\omega/\nu}$ とすべきである。

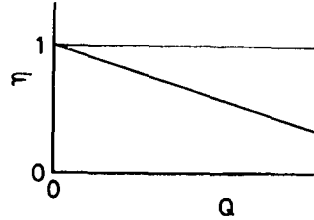


図 5.1 (a) 内部効率 η と流量 Q の関係

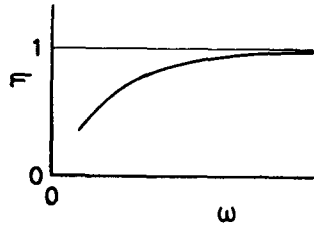


図 5.1 (b) 内部効率 η と円板回転角速度 ω の関係

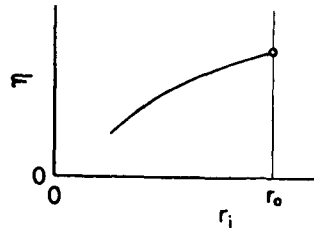


図 5.1 (c) 内部効率 η と入口半径 r_i の関係

$h < \pi / \sqrt{\omega / \nu}$ のときには円板は抵抗となり， F は大で η はきわめて低い。 $h > \pi \sqrt{\omega / \nu}$ のときには η はあまり低下しない。これは h が大きくなるにつれて一枚の回転円板のときと同じ流れになり抵抗が一定になるからであるが，前章で述べたように出口端面効果が大きくなり，性能は低下する。

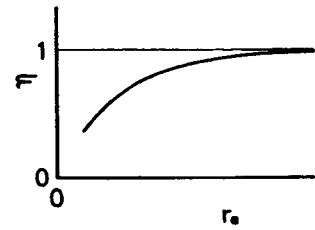


図 5.1 (d) 内部効率 η と出口半径 r_o の関係

- (6) η を ν のみの関数とみたときは，(5)と同様に $\sqrt{\omega / \nu} h = \pi$ となる ν のときに η は最も高くなる。

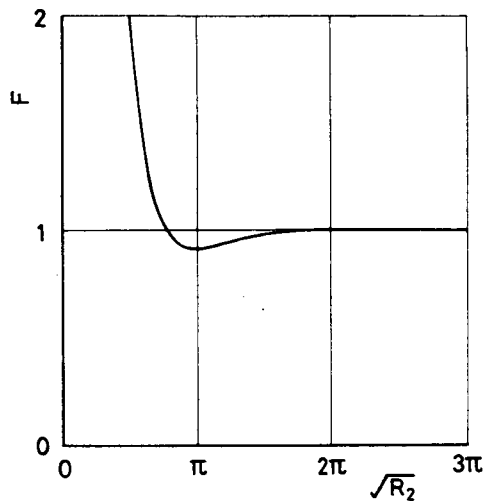


図 5.1 (e) F と $\sqrt{R_2}$ の関係

3. 2 出力について

出力は流量に対して図 5.2 に示すように 2 次曲線となるから，

$$Q = \omega (r_o^2 - r_i^2) / \left[\frac{2}{\pi h} \frac{\cosh \sqrt{R_2} + \cos \sqrt{R_2}}{\sinh \sqrt{R_2} - \sin \sqrt{R_2}} \left\{ \sqrt{R_2} \log_e \frac{\alpha_o}{\alpha_i} \right. \right.$$

$$+ \frac{1}{\sinh \sqrt{R_2} - \sin \sqrt{R_2}} (\cosh \sqrt{R_2} + \cos \sqrt{R_2} - \frac{\sinh \sqrt{R_2} + \sin \sqrt{R_2}}{\sqrt{R_2}}) \left(\frac{1}{\alpha_i^2} - \frac{1}{\alpha_o^2} \right) \}]$$

のとき，出力は最大値

$$L_{\max} = \frac{1}{2} \rho Q \omega^2 (r_o^2 - r_i^2)$$

を示し，この時の内部効率

$$\eta = 0.5$$

である。

なお上式の Q が最大になるのは，

$$h = \pi / \sqrt{\omega / \nu} \text{ のときである。}$$

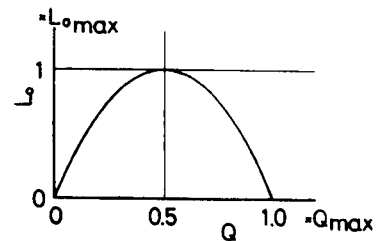


図 5.2 出力 L と流量 Q の関係

3. 3 揚程について

揚程 H_t は Q ， ω ， h ， ν ， r_i ， r_o の関数であるが，ここではそれぞれ Q ， h ， r_i のみ関数と考える。

(1) H_t を Q のみの関数とみたとき，

H_t は Q の増加とともに直線的に減少する〔図 5.3 (a)〕。

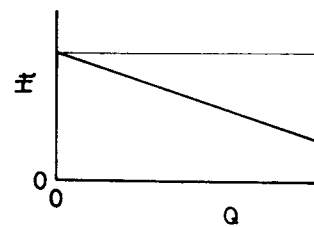


図 5.3 (a) 揚程 H_t と流量 Q の関係

(2) H_t を h のみの関数とみると，

入力は円板間隔 h に無関係であるから損失 L_1 が最小のとき，すなわち第 1 近似として

$$h = \pi / \sqrt{\omega / \nu} \text{ のとき揚程は最大になる〔図 5.3 (b)〕。}$$

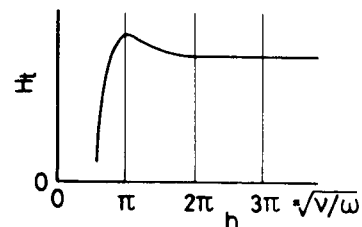


図 5.3 (b) 揚程 H_t と円板間隔 h の関係

(3) H_t を r_i のみの関数とみたとき，

2次曲線に近い〔図 5.3 (c)〕。

r_i が大きい時には円板の内外径比が大きくなり流体にエネルギーを与える効果は低下する。 r_i が小さい時にはエネルギーの消散は著るしくなる。すなわち H_t の最大値を与える r_i は、損失の第2項以降を無視すると、

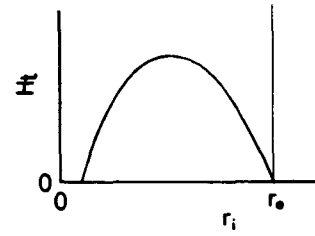


図 5.3(c) 揚程 H_t と入口半径 r_i の関係

$$r_i = h \left(\frac{R_1}{\sqrt{R_2}} \frac{\cosh \sqrt{R_2} + \cos \sqrt{R_2}}{\sinh \sqrt{R_2} - \sin \sqrt{R_2}} \right)^{1/2}$$

である。ただし、 $R_1 = Q / (2\pi h \nu)$ である。

3. 4 回転数に対する相似則について

円板摩擦ポンプの回転数に対する相似則について検討する。まず、揚程 H_t について考える。式 (5.4) より

$$\begin{aligned} \frac{H_t}{\omega^2} = & \frac{1}{g} \left[(r_o^2 - r_i^2) - \frac{Q}{\omega} \frac{1}{h} \frac{\cosh \sqrt{R_2} + \cos \sqrt{R_2}}{\sinh \sqrt{R_2} - \sin \sqrt{R_2}} \left\{ \sqrt{\omega} \frac{h}{\nu} \log_e \frac{\alpha_o}{\alpha_i} \right. \right. \\ & + \frac{1}{\sinh \sqrt{R_2} - \sin \sqrt{R_2}} (\cosh \sqrt{R_2} + \cos \sqrt{R_2}) \\ & \left. \left. - \frac{\sinh \sqrt{R_2} + \sin \sqrt{R_2}}{\sqrt{R_2}} \right) \left(\frac{1}{\alpha_i^2} - \frac{1}{\alpha_o^2} \right) \right] \end{aligned} \quad (5.7)$$

となる。すなわち (Q / ω) が同じ時には、 ω が大きいほど (H_t / ω^2) は小さくなる。

また静圧揚程 H_s については、式 (5.6), (2.96)₃, (2.99) より

$$\frac{H_s}{\omega^2} = \frac{1}{2g} \left[(r_o^2 - r_i^2) - \frac{Q}{\omega} \frac{2}{\pi} \sqrt{\frac{\omega}{\nu}} \frac{\cosh \sqrt{R_2} + \cos \sqrt{R_2}}{\sinh \sqrt{R_2} - \sin \sqrt{R_2}} \log_e \frac{\alpha_o}{\alpha_i} \right]$$

$$\begin{aligned}
& + \left(\frac{Q}{\omega} \right)^2 \frac{1}{4\pi^2 h^2} \frac{\omega}{\nu} \frac{\cosh \sqrt{R_2} + \cos \sqrt{R_2}}{(\sinh \sqrt{R_2} - \sin \sqrt{R_2})^3} \\
& \times \left\{ \frac{1}{10} (-7 \sinh \sqrt{R_2} \cosh \sqrt{R_2} + \sinh \sqrt{R_2} \cos \sqrt{R_2} \right. \\
& \left. - \cosh \sqrt{R_2} \sin \sqrt{R_2} + 7 \sin \sqrt{R_2} \cos \sqrt{R_2}) \right. \\
& \left. + \sqrt{R_2} \sinh \sqrt{R_2} \sin \sqrt{R_2} \right\} \left(\frac{1}{\alpha_0^2} - \frac{1}{\alpha_1^2} \right) \quad (5.8)
\end{aligned}$$

となる。すなわち (Q/ω) が同じ時には ω が大きいほど (H_s/ω^2) は小さくなる。

以上より、円板摩擦ポンプでは回転数に対する相似則は成立しないことがわかる。

3. 5 解析法について

本章の円板摩擦ポンプの性能の計算式には、前章の層流あるいは乱流の場合の理論解析結果と実験結果を比較検討した結果に基づいて、無限半径位置からのせつ動解である簡易層流解を用いた。しかしながら実際の流れは本計算に用いたような理想的な条件にはない。したがってポンプ性能に関する本解析法には次のような限界が考えられる。

- (1) 回転円板間内の流れを層流であると仮定しているが、実際の流れはすべて層流状態にあるとは限らない。しかし前章の結果から流れは層流状態に近いと考えられる。
- (2) 層流の場合の無限半径位置からのせつ動解を、そのまま円板入口から出口まで成り立つとしており、入口端面効果あるいは出口端面効果を見逃している。また $R_1/(\sqrt{R_2} \alpha^2)$ が大きくなると本計算式の収束が悪くなる。しかし、円板入口半径が大きく円板間隔が小さ

く流体に作用する円板の回転の効果が大きければ，流れは円板入口流入直後に無限半径位置からのせつ動解の成り立つ流れになり，またこの級数解も収束する。また円板間隔が小さく流量が大きい場合には，円板の出口端面効果は円板出口近傍に限られ，出口端面効果は無視できる。

(3) 回転円板間内の粘性によるエネルギーの消散のほかに，ポンプとしては次の損失がある。

i) 円板入口で軸方向から半径方向に流れの向きを変えるための曲がり損失がある。

ii) 回転円板とケーシングの間での損失がある。

iii) ディフューザ部，渦巻きケーシング内で損失がある。

これらの損失は，いずれも円板摩擦ポンプ特有の損失ではなく，遠心ポンプなどにも見られるものである。本研究は回転円板間の流れを対象にしており，本章でも回転円板の性能についてのみ考察しているのので，これらは研究の対象外とし触れないことにした。

第 4 節 計算結果と実験結果の比較および考察

第 3 節に述べた事情を考慮しつつ，第 2 節の計算式による計算結果と第 4 章の実験結果あるいは従来発表されている渦巻きケーシングをもつ円板摩擦ポンプの実験結果と比較する。

図 5.4 の実験値は第 4 章に示した実験装置によるもので，静圧揚程係数 $\psi_s = p_o / \{(\rho/2)(r_o \omega)^2\}$ と流量係数 $\varphi = Q / (\pi r_o^3 \omega)$ の関係を， $h = 1, 4, 16 \text{ mm}$ ；回転数 $n = 150, 200, 300 \text{ rpm}$ について示す。ただし，円板出口静圧 p_o の実験値は，静圧孔の位置の関係から円板出口より 1 mm 円板内に入った位置での静圧を用いている。

前章に示した静圧分布曲線から予測されたように，実験値は h が小さいほど大きな ψ_s を示す。なお $h = 1 \text{ mm}$ ， $n = 150 \text{ rpm}$ のときには，

$\sqrt{R_2} = 3.61$ となり，実験パラメータの中では $\sqrt{R_2}$ は最も π に近い。

h が大きくなるにしたがい出口端面効果のため計算値と実験値は一致しなくなるので，計算値は $h = 1 \text{ mm}$ の場合についてのみ示した。

h が大きいほど $\Psi_s - \varphi$ 曲線の勾配はゆるやかになる。 φ が小さい時には出口端面効果が大きく Ψ_s は小さくなり， φ が大きい時には出口端面効果が比較的小さく Ψ_s は比較的大きくなるためである。

また回転数 n が小さいほど静圧揚程係数 Ψ_s は大きく，回転数に対する相似則が成り立たないことがわかる。

図 5.5 に Мисюра & Дронов [6] の実験結果との比較を示す。この実験は $r_o = 84 \text{ mm}$ ， $r_i = 32 \text{ mm}$ ，円板の厚さ $t = 0.33 \text{ mm}$ ， $h = 0.5 \text{ mm}$ ，円板間隔数 $m = 10$ で行なわれた。実験に用いられた水の動粘性係数の値は明らかではないが，計算は 10°C と 20°C の水に対して行なっ

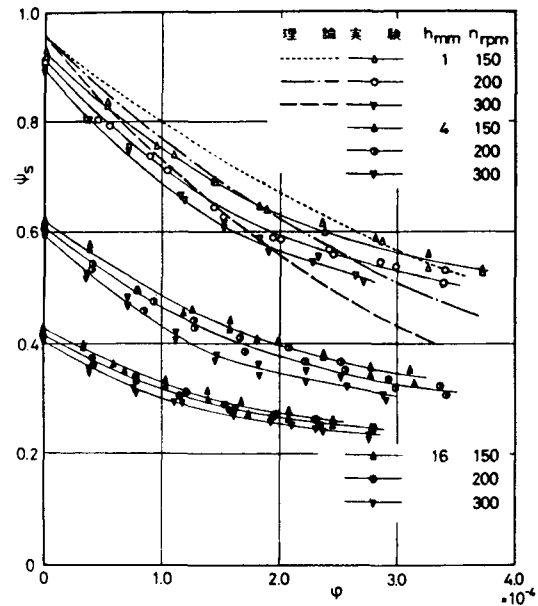


図 5.4 ポンプ性能曲線（第 4 章の実験結果との比較）

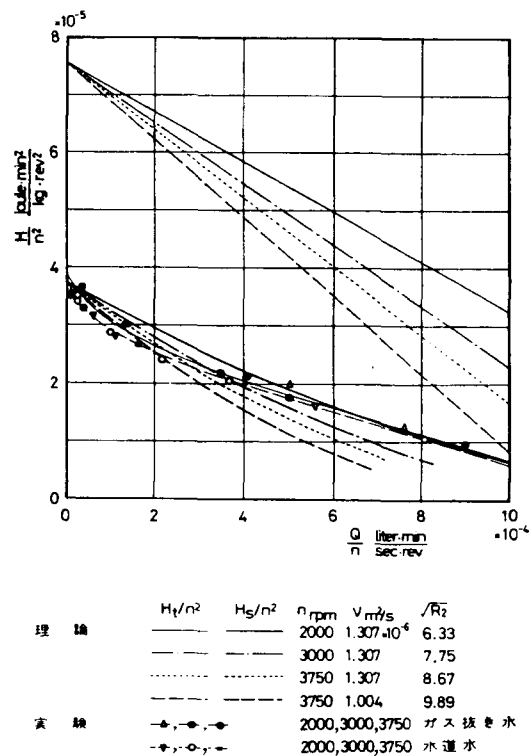


図 5.5 ポンプ性能曲線（Мисюраらの実験結果との比較）

た。実験による揚程 H_t は計算による静圧揚程 H_s と一致している。

図 5.6 に Hasinger & Kehrt [7] の実験結果との比較を示す。この実験は平らな円板でなくわずかに円錐形をした円板で行なわれ, $r_o = 2 \text{ inch}$, $r_i = 0.5 \text{ inch}$, $t = 0.005 \text{ inch}$, $h = 0.0053 \text{ inch}$, $m = 173$ である。流量係数 ϕ は $\phi = Q / (2 \pi r_o^2 h \omega \cdot m)$ により定義してある。この実験結果は計算による H_t と H_s の中間に位置している。

以上に述べた Мисюра らの結果と Hasinger らの結果の差, すなわち実験により得られたヘッドが計算による H_s に近いのか H_t に近いかは, 渦巻きケーシングの差によるものと思われる。

第 5 節 結 言

本章では円板摩擦ポンプの性能の計算式を求め, その計算結果と実験結果と比較した。

円板摩擦ポンプの性能を理論解析する基礎式として, 第 2 章で述べた円板入口の補正を施こさない簡易層流解 (2. 97), (2. 98), (2. 99) を用い, ポンプ入力は円板壁面上の周方向剪断応力から, また損失は消散関数を用いて算出した。

この結果次のことが明らかになった。

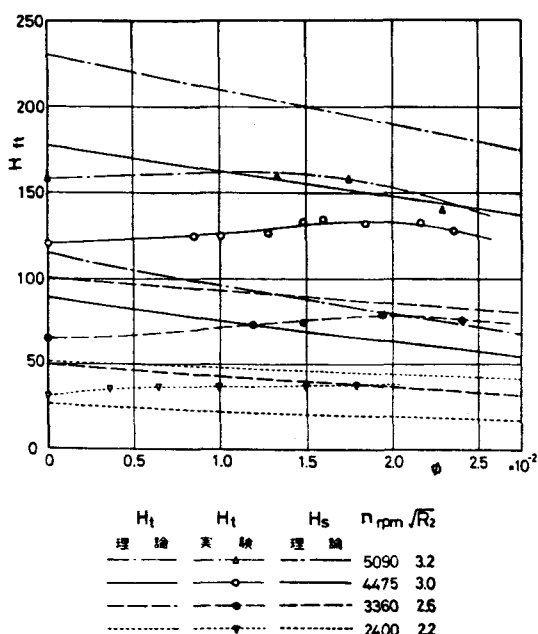


図 5.6 ポンプ性能曲線
(Hasinger らの実験結果との比較)

- (1) 内部効率は流量が増すと直線的に減少し，円板入口径，出口径，円板回転速度が大きいほど高い。また円板間隔 h が第 1 近似として

$h = \pi / \sqrt{\omega / \nu}$ のとき，内部効率は最も高くなる。

- (2) 揚程は，流量の増加とともに直線的に減少し，円板間隔が

$h = \pi / \sqrt{\omega / \nu}$ のとき最も大きい。円板入口径は大きすぎると入力が小さくなり揚程は低下する。また小さすぎると損失が増し，揚程は減少する。この中間に揚程の最大となる円板入口半径の大きさが存在し，その値は

$$r_i = h \left(\frac{R_1}{\sqrt{R_2}} \frac{\cosh \sqrt{R_2} + \cos \sqrt{R_2}}{\sinh \sqrt{R_2} - \sin \sqrt{R_2}} \right)^{1/2}$$

である。

また実験結果との比較から次のことが明らかになった。

- (1) 円板間隔が広くなると出口端面効果の影響は顕著になり，吐出圧力は低下する。出口端面効果の影響を減少させるために，円板間隔を狭くするほうがポンプ性能は高くなる。
- (2) 円板摩擦ポンプでは回転数に対する相似則は成り立たず，回転数が大きいほど静圧揚程係数は低くなる。
- (3) 渦巻きケーシングの形状により，ポンプ性能は大きく左右されると考えられる。

第 6 章 回転円板間内の流れの状態

第 1 節 緒 言

本章では，回転円板間内の流れが層流であるのか乱流であるのかそれとも遷移域にあるのかという流れの状態に関する実験を行なった結果について述べる。

このことについて若干の研究結果が発表されている。 \bar{u}_i を円板入口における径方向平均流速， v_i を円板入口における円板周速， ω を円板回転角速度， h を円板間隔， r_i を円板入口半径， r を回転中心からの距離， ν を流体の動粘性係数とする。Hasinger & Kehrt [7] は $Re = 2\bar{u}_i h / \nu$ で定義したレイノルズ数が大きくなると円板間内の流れは乱流になることを示唆し，小型あるいは中型のポンプでは層流状態ないし遷移状態にあると結論している。Васильцов & Невелич [1] の引用文献は， $Re = 2\sqrt{\bar{u}_i^2 + v_i^2} h / \nu$ で定義したレイノルズ数と円板間隔による層流限界を与え，通常回転円板間内の流れは，本質的に乱流であると述べている。

また Köhler [15] は半径の大きい領域を注目し， $Re = r\omega h / \nu$ で定義したレイノルズ数が 1200 になると層流から乱流への遷移が始まり，らせん渦が観測され，2300 で乱流状態になると述べている。さらに渦の数は円板間隔が広がると少なくなり，半径が小さい位置では渦の数が急激に増加することを明らかにし，これらの渦は Stuart 渦 [34] に類似の渦であると述べている。

Pater, Crowther & Rice [17] は，円板入口部が乱流であっても， $Re = h^2\omega / \nu$ で定義したレイノルズ数と $\phi = \bar{u}_i / (r_i \omega)$ で定義した流量係数によって，流れ状態は決定され，流れが層流の場合には，半径の増加とともにより安定になると結論している。

これらの実験結果はいずれも一面的であるように思われる。すなわち Hasinger らの結果は流量が大きい時に乱流になることであるが，円板

回転数にも大きく依存すると考えられる。Васильцовらの結果は妥当ではあるが、円板入口付近で乱流であっても、半径が大きくなるとそのままの状態を保つことはなく、逆遷移すると考えられる。

Köhlerの結果は半径が大きいところから乱流になることである。円板出口端面の周速は大きく流速も大きくなるために、このことは直感的にも理解できる。しかしながら、第4章に示した実験結果から流量によっても乱流になる半径位置は変化すると考えられる。これとは逆にPaterらの結果は出口端面効果を考慮しておらず、したがって流量が小さく円板間隔が広い場合には、円板外周付近で成り立たないと考えられる。

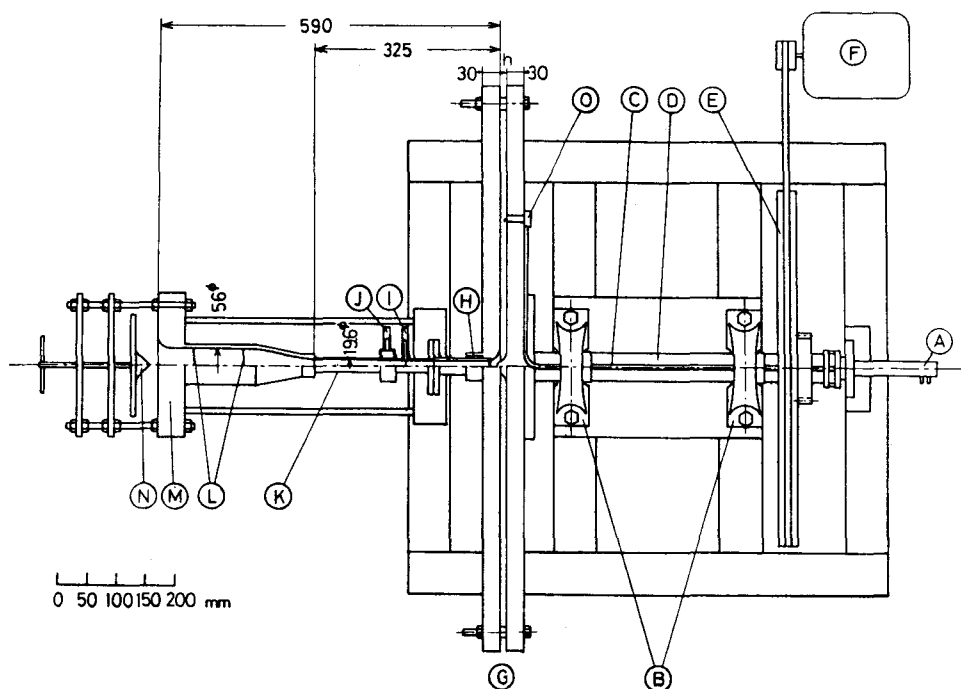
第4章において、円板間隔が狭い場合には、回転円板間内の流れは層流解とよく一致する結果を得たが、本章では流れ状態をさらに詳しく調べるため、回転円板間内に熱線風速計のセンサーを挿入したりあるいはトレーサを注入して実験を行なった。

第2節 熱線風速計による実験

2. 1 実験装置

2. 1. 1 実験装置の構成

図6.1に実験装置の概略を示す。実験装置の主要構成部分は、吸込管K，回転円板G，車軸D，プーリE，駆動機Fである。第4章で用いた実験装置とは異なり，できるだけ出口端面効果が円板内に入らないようにリングディフューザを設置せず，空気を大気中に放出している。



- | | | |
|----------|-------------|----------|
| A. 水銀接点 | F. 駆動機 | K. 吸込管 |
| B. 軸受 | G. 回転円板 | L. 整流金網 |
| C. 熱線用導線 | H. オイルシール | M. ペルマウス |
| D. 車軸 | I. 流量測定用全圧管 | N. 流量制御弁 |
| E. プーリ | J. 流量測定用静圧孔 | O. 熱線 |

図 6.1 実験装置概略図 (h : 円板間隔)

各部分の詳細は次のとおりである。

2. 1. 2 回転円板

回転円板 G は前部円板，後部円板およびそれらを組立てるためのボルト，ナットそして円板間隔を定めるスペースリングより構成される。

円板の外径は 1000φ，吸込口直径は 19.6φ，円板間隔が一定と

なる直径は 50φ である。図 6.2 に円板入口部の詳細を示す。

前後円板はシルミン製でその内面は滑らかに仕上げてあり、その厚さは 30 mm である。図 6.3 に車軸側からみた後部円板を示す。二枚の円板は直径 930 φ の円周上にある 16 個の 10 φ の穴にボルト、スペースリングおよびナットによって組立ててある。

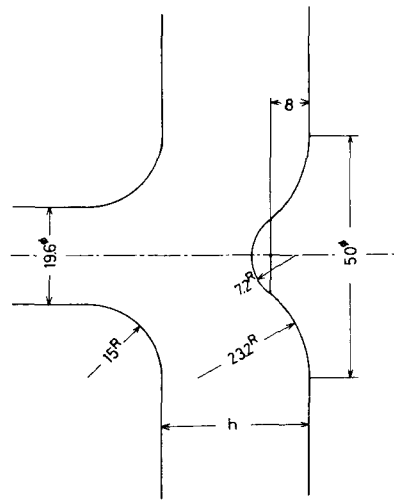


図 6.2 円板入口部詳細図

図 6.3 に示したように後部円板には、ほぼ円弧状にならぶ径 10φ の穴が熱線を挿入するために開けてあり、熱線を挿入しない場合はふたをしてある。

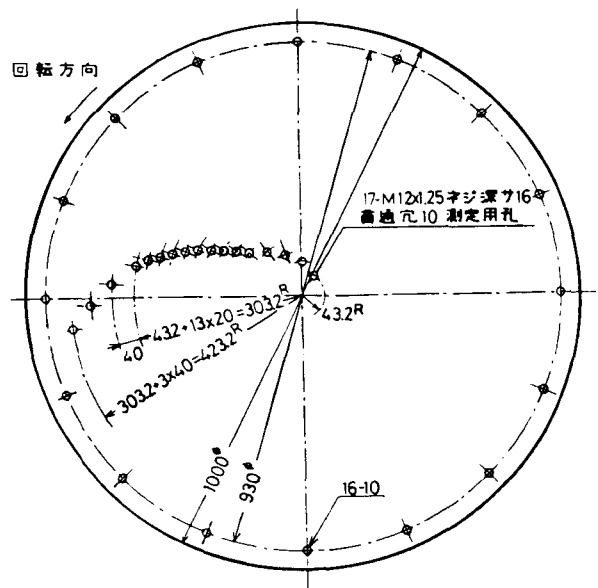


図 6.3 後部円板（測定用孔のピッチは、中心から外周に向って、第 1 番目から第 5 番目までは 33 mm，第 5 番目から第 14 番目までは 28 mm，第 14 番目から第 17 番目までは 55 mm である。）

さて、本研究に用いた円板の内外径比は 0.025 であり，非常に小さな値である。これは，半径の小さな領域の流れを特に詳しく調べるためであり，また出口端面効果が円板内に入らないように大きな外径を用いたからである。

2. 1. 3 吸 込 管

図 6.1 に示したように，吸込管 K の入口部はベルマウス M となっていて，その前方に流量制御弁 N が位置し，これらは一体に組み立ててある。ベルマウスから吸い込まれた空気は，整流金網 L と一段の絞りをの中にもつ整流管を通して流量測定管を偏流なしに流れ，回転円板に流入する。流量測定管の管壁に静圧孔 J を設け，測定管内に測定管直径上をトラバースできる全圧管 I を挿入し，その差圧を動圧として流量を求めた。また吸込管の終端部には，静止した吸込管と回転する前部円板の間から空気を吸わないようにオイルシール H を設けてある。

2. 1. 4 駆 動 機

種々の円板回転数に対して実験を行なうために，駆動機として三相分巻電動機を用いた。モータから円板回転軸への伝導にはプーリとベルトを用いた。

2. 1. 5 熱線風速計

図 6.4 に熱線風速計のセンサーを後部円板側から円板間内に挿入した図を示す。このプローブは流れの向き 180° 以上にわたってその感度を変えない。センサーとして長さ 1.5 mm，直径 1.5μ のタングステン線を用い，円板に垂直な方向に熱線を張ってある。プローブの電気信号を水銀接点（図 6.1 部番 A）から増幅器，リニアライザに導き，ボルトメータ，r. m. s. メータ，シンクロスコープなどを

用いて記録した。実験を行なった円板間隔が狭いために，センサーの長さは円板間隔に比し無視できず，熱線の出力は円板間中央付近において平均した相対流速に比例する電圧を示す。

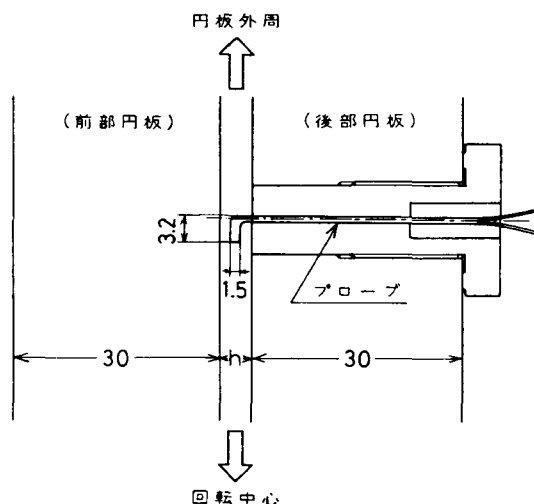


図 6.4 センサーを挿入した図

2. 2 実験方法および実験結果の整理方法

2. 2. 1 実験方法

熱線風速計，リニアライザ，ボルトメータ， $r.m.s.$ メータ，シンクロスコープなどの実験機器に実験に先き立って電源を入れ，十分に定常待ちし，熱線挿入穴をすべてふたでふさぎ，モータを所定の速度で回転させる。流量調節弁を所定の開度にし，吸込管測定部における静圧孔と全圧管の差圧をマノメータで読み，逐次全圧管を吸込管直径上をトラバースさせる。また，常時，気温と気圧を測定し，空気の動粘性係数と比重量を得る。いったん円板の回転を止め，プローブを測定半径位置に挿入し，再び円板を回転させ，熱線風速計のスイッチを測定側にたおし，ボルトメータ， $r.m.s.$ メータの指示値を読み，またシンクロスコープに表われた像を撮影記録した。この操作を各半径位置に対して繰り返した。円板回転数は電磁ピックアップを用いてデジタルカウンタによって読み取った。実験は，主に，円板間隔 2.5 mm ，円板回転数 $n = 150, 200, 300\text{ rpm}$ とし，流量を種々に変えて行なった。

2. 2. 2 実験結果の整理方法

流量は流量測定管の静圧と動圧の差から測定管の各半径位置における流速を求め、それを積分することにより求めた。

実験結果は、円板間隔 h ，流量 Q ，円板回転角速度 ω ，動粘性係数 ν ，回転中心からの円板の半径位置 r ，円板外半径 r_0 を用いて、

流量を代表するレイノルズ数 $R_1 = Q / (2\pi h \nu)$

円板の回転速度を代表するレイノルズ数 $R_2 = h^2 \omega / \nu$

流量係数 $\varphi = Q / (\pi r_0^3 \omega)$

無次元半径 $\alpha = r / h$

で整理した。

また、熱線の出力の時間平均値を \bar{V}_c ボルト， $r, m, s.$ を V'_c ボルトとすると， \bar{V}_c は円板間中央付近の相対流速の時間平均値に比例し， V'_c は流速の $r, m, s.$ に比例する。そして流速変動の強さ I は， $I = V'_c / \bar{V}_c$ である。

第 3 節 トレーサ法による実験

3. 1 実験装置

実験装置は第 4 章の実験に用いた装置を改造し、後部円板の壁面静圧孔から白色水彩絵具の水溶液を注入し、その軌跡をカメラで撮影できるようにした。

改造点は次のとおりである。

3. 1. 1 回転円板

前部円板の内面に黒色のラッカーを吹き付けて白色のトレーサを見やすくし、また後部円板を真鍮製から無色透明なアクリル製に替え、後部円板上方から円板間内を観測できるように改造した。

3. 1. 2 回転マノメータ

回転マノメータに色素液のタンクを取り付け，円板壁面静圧孔に通じる導圧管を色素液の注入管として用いた。

3. 1. 3 水槽

水面は後部円板の上部に保つため，水は水槽に完全に密封されているのではない。また円板間内を水槽の上方から観察できるように，図 4.2 の回転円板上部の 330φ のふたに扇形の窓を開けた。

3. 2 実験方法および実験結果の整理方法

3. 2. 1 実験方法

加圧タンクから装置水槽に水を入れ，後部円板上部まで水で満たし，回転円板間，吸込管，導圧管などから空気を完全に除去する。

この状態でポンプを回転させ，色素液を回転円板間内に注入し，円板の回転に同期してストロボライトを発光させ，その軌跡を水槽上部に設置したカメラで撮影した。

回転数が大きく流量が大きい場合には回転マノメータに取り付けた小形ポンプを作動させ，円板間内に色素液を圧入し，回転数が小さく流量が小さい場合には重力落下により注入した。

流量，円板回転数，水の動粘性係数などの測定は，第 4 章の実験と全く同様に行なった。

3. 2. 2 実験結果の整理方法

実験結果の整理方法も，第 4 章あるいは前節の実験結果の整理方法と全く同様に，円板間隔を h ，円板の回転中心からの半径位置を r ，円板半径を r_0 ，流量を Q ，円板の回転角速度を ω ，動粘性係数を ν として，

流量を代表するレイノルズ数 $R_l = Q / (2\pi h \nu)$

円板の回転速度を代表するレイノルズ数 $R_2 = h^2 \omega / \nu$

流量係数 $\varphi = Q / (\pi r_o^3 \omega)$

無次元半径 $\alpha = r / h$

で整理した。

第 4 節 実験結果および考察

回転円板間内の流れ状態は，実験範囲では円板回転数 n にほとんど関係せず，流量および円板間隔によって大きく変化する。

4. 1 流量の大きい場合

流量が大きく，円板間隔が狭い場合の実験結果を図 6.5 (a), (b) と図 6.6 (a), (b) に示す。

図 6.5 (a), (b) は $R_1 = 8780$,
 $\varphi = 1.62 \times 10^{-4}$, $R_2 = 13.5$,
 $h = 2.5 \text{ mm}$, $n = 300 \text{ rpm}$ の場合
 の熱線風速計による実験結果で，
 図 6.5 (a) の縦軸は平均相対流速
 \bar{V}_r (ボルト) と流速変動の強
 さ I であり，横軸 α は無次元
 半径で，Photo. No. は図 6.5 (b) の
 Photo. No. の半径位置を示して
 いる。図 6.5 (b) は各半径位置
 における流速の時間変動である。

平均相対流速 \bar{V}_r は，円板間内
 に流入直後，流路拡大のため減
 速し，それから回転円板により
 流体はエネルギーを与えられて流

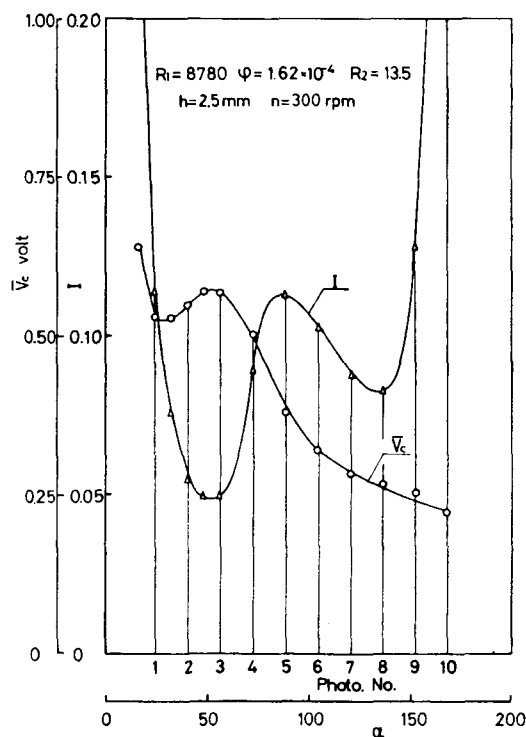


図 6.5 (a) 平均相対流速 \bar{V}_r と流速
 変動の強さ I の分布

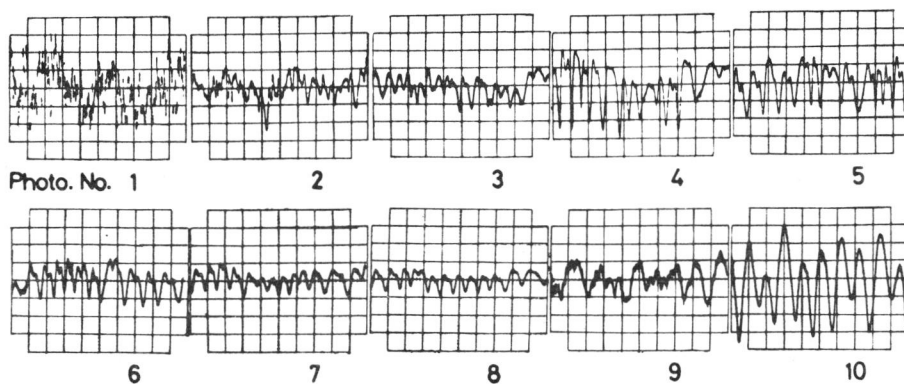


図 6.5 (b) 流速の時間変動（縦軸は 0.05volt/div ，横軸は Photo. No. 1, 9, 10 では 50ms/div ，ほかでは 20ms/div である。）

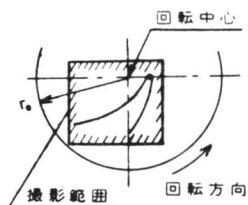
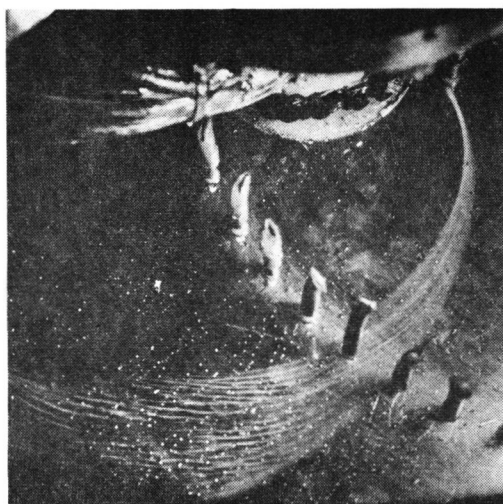


図 6.6 (a) トレーサの軌跡
 $[R_1 = 15200, \varphi = 3.07 \times 10^{-4}, R_2 = 24.2, h = 1\text{ mm}, n = 300\text{ rpm}$
 で, $r = 40\text{ mm}$ ($\alpha = 40^\circ$) より注入
 した場合]

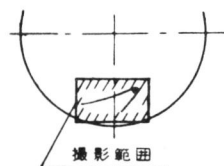
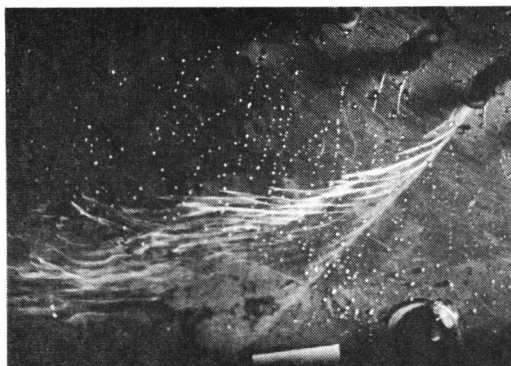


図 6.6 (b) トレーサの軌跡
 $[R_1 = 15200, \varphi = 3.07 \times 10^{-4}, R_2 = 24.2, h = 1\text{ mm}, n = 300\text{ rpm}$
 で, $r = 110\text{ mm}$ ($\alpha = 110^\circ$) より注入した場
 合]

速は増大し、そののち流速は徐々に減速する。このような相対流速の半径に対する変化は流量が大きい場合、円板回転数が小さい場合あるいは入口径が小さい場合の第3章の計算結果と一致する（図3.2，図3.3，図3.4，特に図3.4に明確に示されている。）。

流速変動の強さ I は円板入口では非常に大きく流れは典型的な乱流である（Photo. No. 1）が、半径が大きな領域になるにしたがい減少し（Photo. No. 3），高い周波数の流速変動は消えて層流状態に逆遷移し、そののち周期的な流速変動のある層流流れになる（Photo. No. 4，5）。そして半径の増加による平均流速の減少にともない、この流速変動の強さも減少する（Photo. No. 6～8）。さらに半径が大きな位置では、円板の出口端面効果のため流速変動の強さは増大する。この位置での流速変動は周期的ではあるが、その周波数は低く、円板中心部とは異なる種類の周期変動である（Photo. No. 10）。

図6.6(a)，(b)は流量の大きい場合のトレーサ法による実験結果の例で、 $R_1 = 15200$ ， $\varphi = 3.07 \times 10^{-4}$ ， $R_2 = 24.2$ ， $h = 1 \text{ mm}$ ， $n = 300 \text{ rpm}$ の場合である。図6.6(a)は半径 $r = 40 \text{ mm}$ の静圧孔からトレーサを注入した場合で、色素液は単純に拡散しながら流れるのではなく、渦と考えられる縞模様となって表われる。写真撮影の露出時間は約 $1/1000$ 秒であるため、渦は円板に対して静止しているように見えるが、図6.5(b)に示したように流速変動が観測されるから、渦は移動していると解される。

図6.6(b)は $r = 110 \text{ mm}$ の静圧孔からトレーサを注入した場合で、円板の外周付近では、出口端面効果のため渦糸は切れ、流れは乱れることがわかる。

渦軸の方向は半径の大きい領域ではより円周方向を向くことが認められる。

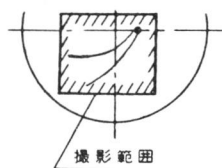
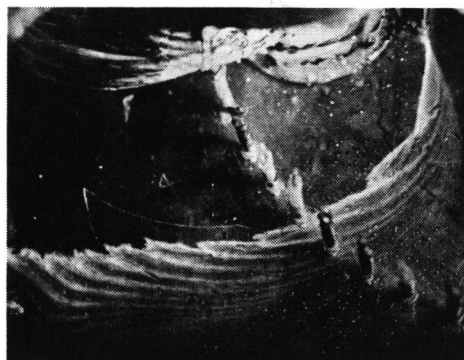
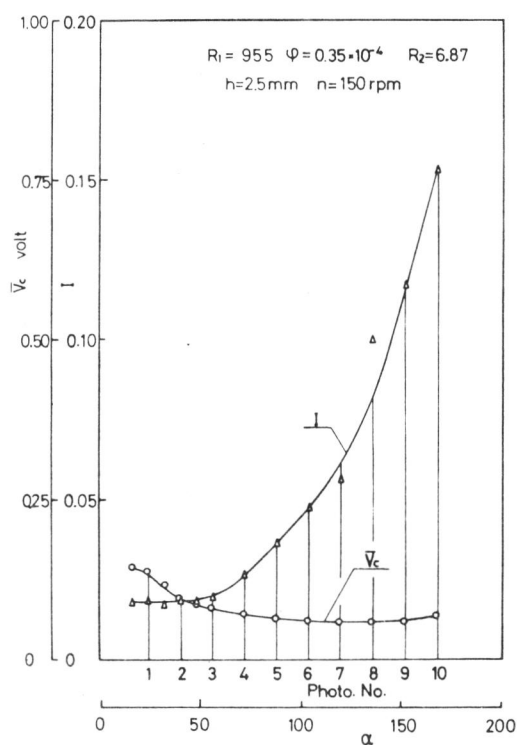


図 6.7 (a) 平均相対流速 \bar{V}_c と
流速変動の強さ I
の分布

図 6.8 トレーサの軌跡〔 $R_1 = 1030$,
 $\varphi = 0.297 \times 10^{-4}$, $R_2 = 17.0$,
 $h = 1 \text{ mm}$, $n = 200 \text{ rpm}$ で, $r = 40 \text{ mm}$
($\alpha = 40$) より注入した場合〕

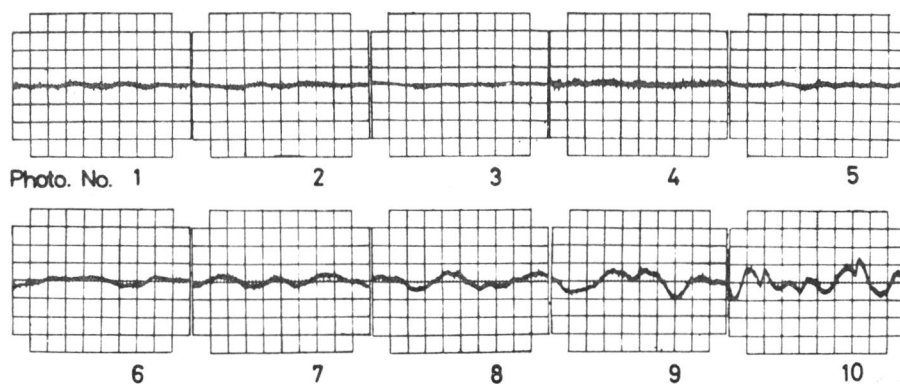


図 6.7 (b) 流速の時間変動 (縦軸は 0.02 volt/div , 横軸は
 50 ms/div である。)

4. 2 流量の小さい場合

流量が小さく、円板間隔が狭い場合の実験結果を図 6.7 (a), (b) と図 6.8 に示す。

図 6.7 (a), (b) は $R_1 = 955$, $\varphi = 0.35 \times 10^{-4}$, $R_2 = 6.87$, $h = 2.5$ mm , $n = 150$ rpm の場合の熱線風速計による実験結果である。

この場合には、平均相対流速は半径が大きな $\alpha \geq 150$ では減速するのではなく反対に増速し、出口端面効果の影響が見られる。

流速変動の強さの変化から、出口端面効果の影響は流量の大きな場合に比較して半径のより小さな位置まで及ぶことがわかる。またこの場合、入口付近で乱れは無く、乱れは出口端面効果のみによって生じる。このことは図 6.7 (b) から明らかなである。

図 6.8 は流量の小さい場合のトレーサ法による実験結果の例で、 $R_1 = 1030$, $\varphi = 0.297 \times 10^{-4}$, $R_2 = 17.0$, $h = 1$ mm , $n = 200$ rpm で、 $r = 40$ mm の静圧孔からトレーサを注入した場合である。流量の大きい場合に表われる渦よりピッチの大きいこの縞模様は、流量の比較的小さい場合の広い流量範囲で観測された。この縞模様も渦であるが、この渦はよりピッチの小さい渦に重なった渦で、大きい流量の場合の渦とは別の機構によるものと考えられる。また、渦軸の方向は流量の大きい場合に比べてより円周方向を向くことがわかる。

4. 3 種々の流量について

図 6.9 (a), (b) に $h = 2.5$ mm , $n = 200$ rpm の場合の平均相対流速と流速変動の強さを種々の流量に対して示す。

回転円板間内の流れの状態を半径により大別すると、入口端面効果の及ぶ領域、入口出口端面効果の及ばない回転円板に固有な流れの存在する領域、出口端面効果の及ぶ領域の三つになることがわかる。

入口端面効果の及ぶ領域は、回転数にかかわらず、流量が大きくなると半径の大きな位置にまで及び、入口付近では乱流になり、流速の

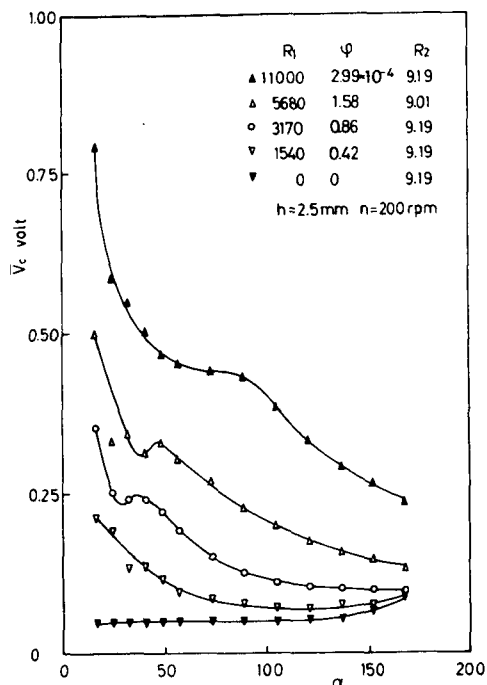


図 6.9 (a) 平均相対流速 \bar{V}_c の分布

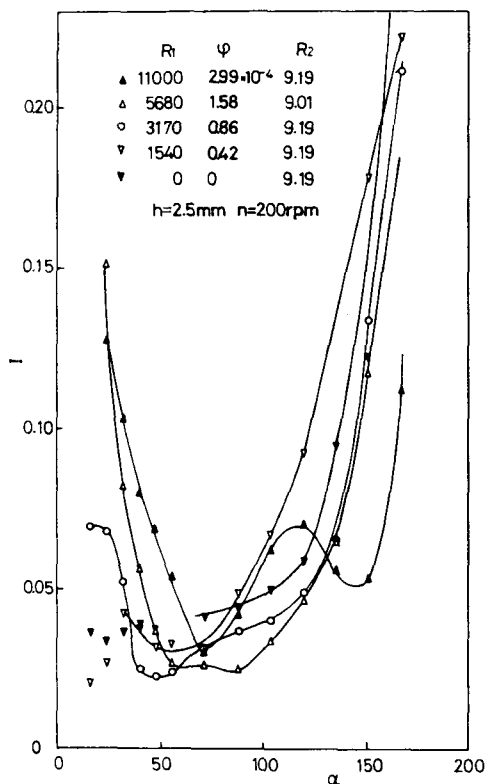


図 6.9 (b) 流速変動の強さ I の分布

変動周波数は高くまで伸びる。出口端面効果による流速の変動周波数は回転数の増加とともに高くなる。出口端面効果は流量が減少すると円板の半径のより小さな位置にまで及び、通り抜け流れによって出口端面効果は押し流されることがわかる。そして出口端面効果の影響は平均流速に対してよりも流速変動に対するほうが強く、より小さな半径位置から出口端面効果による流速変動が大きくなる。入口出口端面効果の及ばない領域では、流速変動はほとんど認められないか、あるいは認められる場合にはほとんど周期的変動で、この周期はより端面に近い領域に生じるものよりも高い。いずれの場合にも流れは層流的であり、円板入口部で乱流であっても、この領域では乱流に特徴的な高い周波数の変動はみられない。

なお、図 6. 10 に示すように流量が 0 の場合のトレーサ写真 ($n = 300 \text{ rpm}$, $h = 1 \text{ mm}$ で $r = 90 \text{ mm}$ の静圧孔より注入した場合)によれば、出口端面効果の及ばない領域の流体は円板とともにほぼ剛体的に回転し、トレーサは円板の製作誤差によってわずかに偏流するだけである。出口端面効果の及ぶ領域では流れは乱れる。

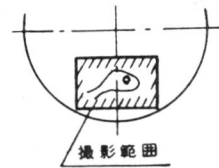
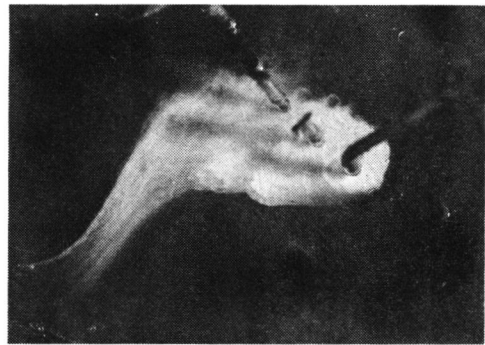


図 6. 10 トレーサの軌跡 [$Q=0 \text{ m}^3/\text{s}$, $h = 1 \text{ mm}$, $n = 300 \text{ rpm}$ で, $r = 90 \text{ mm}$ ($\alpha=90^\circ$)より注入した場合]

4. 4 円板間隔の広い場合

流量が大きく、円板間隔が広い場合の実験結果を図 6. 11 (a), (b)と図 6. 12 に示す。

図 6. 11 (a), (b)は $R_1 = 3320$, $\varphi = 2.41 \times 10^{-4}$, $R_2 = 221$, $h = 10 \text{ mm}$, $n = 300 \text{ rpm}$ の場合の熱線風速計による実験結果である。

平均相対流速は円板間隔の狭い場合と異なり入口から半径の増加とともに増すが、これは円板間隔が広いために円板間中央付近のポテンシャルコアが大きな半径位置まで存在することによるものである。半径が十分に大きくなると円板間中央付近の流体も円板とともに回転し、平均相対流速は減少する。

図 6. 11 (b)からもわかるように、入口部から半径が大きくなるにしたがって流速変動は減少しかつ周期的になる (Photo. No. 1 ~ 5)。中間領域では周期的な流速変動であるが、円板間隔が狭い場合に比べてその変動周波数は低い (Photo. No. 6, 7)。半径がさらに大きくなると出口端面効果により乱れ、流速変動の周波数は高く、振幅も大きくなる (Photo. No. 9, 10)。

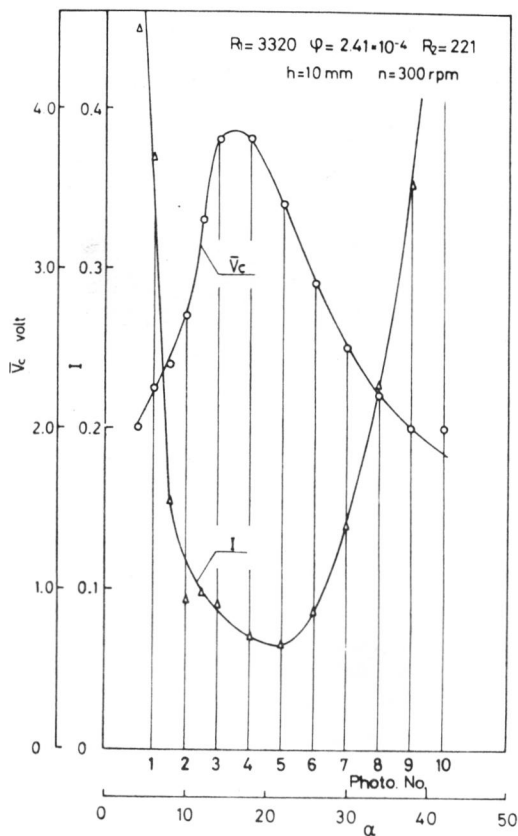


図 6.11 (a) 平均相対流速 \bar{V}_c と
流速変動の強さ I
の分布

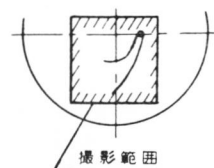


図 6.12 トレーサの軌跡〔 $R_1=6110$,
 $\varphi=3.79 \times 10^{-4}$, $R_2=63.0$,
 $h=2$ mm, $n=200$ rpm で, $r=40$
mm ($\alpha=20$) より注入した場合〕

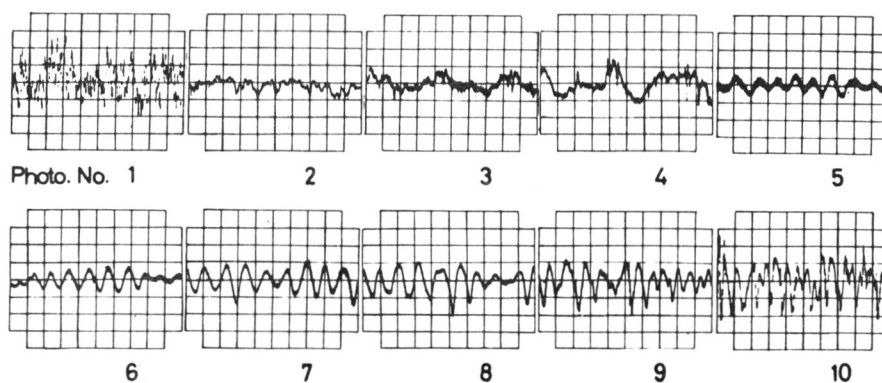


図 6.11 (b) 流速の時間変動 (縦軸は 1 volt/div, 横軸は Photo.
No. 1, 2 では 20ms/div, Photo. No. 3, 4 では
50ms/div, Photo. No. 5 ~ 10 では 100ms/div である。)

図 6.12 は円板間隔の広い場合のトレーサ法による実験結果の例で、 $R_1 = 6110$ ， $\varphi = 3.79 \times 10^{-4}$ ， $R_2 = 63.0$ ， $h = 2 \text{ mm}$ ， $n = 200 \text{ rpm}$ で、 $r = 40 \text{ mm}$ の静圧孔からトレーサを注入した場合である。出口端面効果は円板の内部にまで及び、渦は乱れ、半径の大きい領域は乱流である。また渦軸の方向は、円板間隔が狭い場合に比べて、より円周方向を向くことがわかる。

4. 5 渦についての一考察

Ekman 層の層流安定性に関する実験と理論によると、Ekman 層では 2 種類の層流不安定の生成機構がある [35]。

その一つはコリオリ力と粘性力によるいわゆる viscous-type の不安定で、一つは非粘性理論に基づく流速分布中の変曲点の存在によるいわゆる inviscid type の不安定で回転円板に相対的にほぼ静止した渦を形成する。前者の不安定を第 1 種の不安定、後者の不安定を第 2 種の不安定と名付ける。

Tatro & Mollö-Christensen の熱線風速計による実験結果によると、レイノルズ数が小さい場合は層流で流速変動はないが、レイノルズ数が大きくなると別の形の層流になり、第 1 種の不安定による流速の時間変動は正弦曲線に類似の曲線になり、第 2 種の不安定による流速の時間変動は、大きな周期の流速変動に小さな周期の流速変動が重なった変動となっている。Faller & Kaylor のトレーサ法による実験結果によると、第 1 種の不安定の渦はらせん状の細い縞となって観測され、第 2 種の不安定は第 1 種の不安定の縞模様重なって、ほぼ円周方向に波うつようなピッチの大きな縞模様となって観測されている。

また Lilly の理論解析結果によれば、第 1 種の不安定は小さな臨界レイノルズ数をもち、微小攪乱の円板に相対的な位相速度は大きく、第 2 種の不安定は第 1 種の不安定の臨界レイノルズ数よりも大きい。

微小攪乱の円板に相対的な位相速度はほぼ 0 で円板に相対的にほぼ静止する。そして、この二つの不安定による微小攪乱は共存している。

円板摩擦ポンプの回転円板間内の流れでも第 1 種の不安定は存在し、また第 2 章で述べた層流流れは半径が十分に大きい位置である方向に変曲点のある流速分布をもつことがあるため、第 2 種の不安定も存在すると考えられる。

円板入口付近の乱流は円板が回転するために生じる性質のものではないが、流量が大きい場合に得られた図 6.6 (a)と流量が小さい場合に得られた図 6.8 は、それぞれ Ekman 層のトレーサ法による実験結果の第 1 種の不安定による渦と第 1 種と第 2 種の不安定による渦の共存した状態に酷似している。

出口端面効果の影響が支配的である円板外周付近は Ekman 層のものになっていると考えられる。円板間隔の広い場合に得られた図 6.12 では、出口端面効果のため渦は乱れ、かなりレイノルズ数の大きな流れに相当すると考えられる。

また、入口部を除くと、流量が大きい場合に得られた図 6.5 (b)、流量が小さい場合に得られた図 6.7 (b)、および円板間隔の広い場合に得られた図 6.11 (b)の流速変動は、Ekman 層の熱線風速計による実験結果と同様の傾向を示している。

以上より、回転円板間内に観測された 2 種類の渦は、Ekman 層で生じる 2 種類の渦と同じようなものであると思われる。

第 5 節 結 言

本章では回転円板間内の流れの状態に関する実験を行なった結果を示した。

この実験は、熱線風速計による方法とトレーサを注入する方法により行なったもので、次のことが明らかとなった。

- (1) 流量が大きい場合には入口部で典型的な乱流であるが、半径の大きな領域になるにしたがい高い周波数の変動は消え、流速変動は減少して層流状態に逆遷移する。しかし、流速変動は完全に消えずに周期的な変動のある層流となる。そして半径が大きな位置では出口端面効果のため、さらに違った形の層流になり、そののち流速変動は増し、乱流になる。

流量が小さい場合には入口付近は層流であるが、半径の大きな領域では出口端面効果によって乱れ、この乱れは流量の大きな場合に比較してより小さな半径位置にまで及ぶ。

すなわち入口出口付近の狭い領域を除いて、流れは常に層流的である。

- (2) 回転円板間内に流量の相違により二つの異なった形の渦が観測されたが、この2種類の渦はEkman層で観測された粘性による不安定による渦と非粘性による不安定による渦と考えられる。
- (3) 渦軸の方向は、流量が小さいほど、円板間隔が広いほどまた半径位置が大きいほど、より円周方向を向く。
- (4) 円板間中央付近の時間平均の相対流速は、流量が大きい場合には、円板入口付近の流路拡大のため急激に減少し、そののち半径の増加とともにエネルギーを与えられ、徐々に減速する。これとは逆に流量が小さい場合には、出口端面効果のため円板外周付近で増速する。円板間隔が広い場合には入口部のポテンシャルコアは円板の大きな半径位置まで存在し、平均相対流速は半径の増加とともに増し、そののち減速を始める。

この結果は第3章の理論解析結果と一致する。

- (5) 本実験によっても、出口端面効果は流量が小さいほど、円板間隔が広いほど、より小さな半径位置まで影響を及ぼす。また、出口端面効果の影響は平均流速に対するよりも流速変動に対するほうが強く、より小さな半径位置から出口端面効果による流速変動の増加が表われる。

流量が 0 の場合には出口端面効果の及ばない領域では，流体は円板とともに剛体的回転する。

第 7 章 結 論

本研究は、円板摩擦ポンプの性能を精度よく推定し、設計パラメータの最適値を求める目的で行なわれたものである。

円板摩擦ポンプに関する研究が初められてまだ日は浅く、回転円板間内の流れについても十分把握されているとはいいがたい。

そこで本研究では、まず有限の入口径をもつ無限に大きな径の回転円板間の流れを、いたるところ層流あるいはいたるところ乱流と仮定して解析した。

この層流解は入口付近をゲルトラー級数で展開し、半径の十分大きな領域に対して無限半径位置からのせつ動解を用い、その中間域を差分法で接続したもので、このような厳密な解はほかに例がない。

また乱流解は積分条件式を用いるが、回転円板間内の流れは本質的にねじれ境界層であることを考慮に入れたもので、直交曲線座標を用いたほかに例のない方法で、仮定する速度分布の形も物理的に無理がない。

次にこれらの理論を実験により検証した。この結果かなり広い範囲にわたって層流の場合の無限半径位置からのせつ動解は実験とよく一致し、層流の場合の厳密解は実験とさらに良く一致することがわかった。これを根拠にポンプ性能の計算式を導いた。

そして、層流解が回転円板間内流れを良好に表わすことが明らかとなったが、回転円板間内の流れの状態をさらに詳しく調べる実験を行なった。

以上の解析の結果、次の結論が得られた。

- (1) 流量が小さい場合、円板の回転数が大きい場合あるいは入口径が大きい場合には、小さな半径位置から円板の回転の効果が表われ、助走部の径方向の長さは短かく、入口端面効果は入口に限られ、流体は入口付近からエネルギーを与えられる。
- (2) 流量が大きい場合、円板の回転数が小さい場合あるいは入口径が小

さい場合には、半径の小さな領域では円板の回転の効果は小さく、流れは静止したリングディフューザ内の流れに近くなり、流路拡大による流速減少にともなう静圧回復が静圧分布を決定する主要な因子となる。この領域では全圧は低下し、半径位置が大きくなって始めて流体はエネルギーを与えられる。

- (3) 流量と円板回転数を固定すれば、入口径に関係なく定まるある半径位置で入口の影響は消え、かつその半径位置は円板の遠心効果が強い場合は入口半径に近い。
- (4) 層流解と乱流解を比較すると、層流解のほうが全圧上昇は急で、流量が大きい場合にもより小さな半径位置から全圧は上昇する。半径の十分大きな領域では、流速は層流の場合には半径に反比例し、乱流の場合には半径の $(-4/7)$ 乗に比例する。いずれの場合にも半径が無限に大きな領域では流体は円板とともに剛体的に回転し、静圧の半径に対する上昇割合はその半径の値に比例する。
- (5) 回転円板径が有限であるために、回転円板間内の流れは無限に大きな回転円板間内の流れと異なる。従来ほとんど言及されていないこの効果を出口端面効果と呼ぶことにする。出口端面効果は円板間隔が広い場合ほど著るしく、圧力の半径に対する上昇割合は低下し、またその影響の及ぶ領域も円板内の小さな半径位置にまで達する。出口端面効果により円板間中央における円板に相対的な流速は、出口端面効果の影響の及ばない領域の流速よりも大きくなる。しかし、出口端面効果は流量の増加とともに低下し、圧力の上昇割合は大きくなり、その影響の及ぶ領域も円板出口付近に限られる。流量が0の場合には端面効果の影響の及ばない領域の流体は円板とともに剛体的に回転する。
- (6) 円板間隔が狭い場合には、実験値と入口効果を補正しない層流解でもよく一致し、入口補正を施こした層流解はさらによく一致する。円板間隔が広がると出口端面効果のため、実験値と層流解の一致しない領域は大きくなる。

- (7) 乱流解は層流解あるいは実験値に比べて少し小さな圧力分布を示す。
- (8) 円板の入口径が大きいほど円板摩擦ポンプの内部効率は高いが、入口からの積分値である静圧の上昇は小さくなる。逆に小さすぎると、入口付近の損失は大きく、圧力は低下する。

吐出全圧を最大にする入口半径 r_i は流量が大きいほど大きく、層流の場合には入口出口端面効果を見捨ると、

$$r_i = h \left[(R_1 / \sqrt{R_2}) \{ (\cosh \sqrt{R_2} + \cos \sqrt{R_2}) / (\sinh \sqrt{R_2} - \sin \sqrt{R_2}) \} \right]^{1/2}$$

である。乱流の場合には出口端面効果を見捨ると、

$$r_i = h \sqrt{R_1 / R_2} \sim 2 h \sqrt{R_1 / R_2}$$

の値の付近にあると考えられる。ただし、 h は円板間隔、 R_1 は流量を代表するレイノルズ数で $R_1 = Q / (2\pi h\nu)$ 、 R_2 は円板の回転を代表するレイノルズ数で、 $R_2 = h^2 \omega / \nu$ であり、 Q は流量、 ω は円板の回転角速度、 ν は流体の動粘性係数である。

- (9) 円板間隔が第1近似として $h = \pi / \sqrt{\omega / \nu}$ のとき、揚程と内部効率は最大になる。一方、出口端面効果を考慮に入れると、円板間隔は狭いことが望ましい。
- (10) 円板摩擦ポンプでは回転数に対する相似則は成り立たず、静圧揚程は回転数が大きいほど小さい。
- (11) 渦巻きケーシングの形状によりポンプ性能は大きく左右されるように考えられる。
- (12) 円板入口付近では流量が小さい場合には完全に層流である。流量が大きい場合には乱流になるが、半径位置が大きくなるにつれて、この乱れは減少し乱流に特徴的な高い周波数の変動は消え、渦の存在する流れになる。半径の大きな領域では、出口端面効果のため別の形の渦が観測され、円板外周付近では乱流になる。すなわち入口出口付近の狭い領域を除いて、流れは常に層流的である。

- (13) 流量などの相違により，回転円板間内に２種類の渦が生じる。
- (14) 渦軸の方向は，流量が小さいほど，円板間隔が広いほど，また半径位置が大きいほど，より円周方向を向く。
- (15) 出口端面効果の影響は，平均流速に対するよりも流速変動に対するほうが強く，より小さな半径位置から出口端面効果による流速変動の増加が表われる。

謝 辞

本研究は，大阪大学工学部機械工学教室において行なわれたものである。

研究頭初から今日まで，村田暹教授，三宅裕助教授からは終始懇切，丁寧な御指導と御激励を賜わった。

また本論文は本年4月から著者の勤務先である福井大学工学部繊維工学教室において執筆されたものである。

その間，木村里雄教授からは終始あたたかい御支援と御激励を賜わった。

ここに謹しんで諸先生に深甚の謝意を表します。

また大阪大学工学部水力実験室の諸氏からは実験と数値計算の際に多大のご援助をいただいた。とくに赤沢秀一，佐川渉一，藤田秀雄，山地千博の諸氏からは格別のご協力を賜わった。あわせて厚く謝意を表します。

昭和49年10月

家 元 良 幸

付 録 回 転 円 板 の 出 口 端 面 効 果 の 理 論 解 析

第 1 節 緒 言

回 転 円 板 の 円 板 間 隔 が 広 く 流 量 が 小 さ い 場 合 に は，第 4 章 で 述 べ た よ う に 円 板 の 出 口 端 面 効 果 が 回 転 円 板 間 内 の 流 れ を 決 定 す る 最 大 の 因 子 と な る。

Nend1〔3〕は 出 口 端 面 効 果 の 影 響 の 及 ぶ 領 域 で は 流 体 の も つ 角 運 動 量 は 保 存 さ れ る と 考 え た が，こ の 近 似 は あ ら い と 考 え ら れ る。ま た 円 板 間 内 を 通 り 抜 け る 流 れ が な い 場 合 に 対 し て，Bennetts & Hocking〔20〕は 端 面 近 く の 円 板 壁 面 に Ekman 層 が 形 成 さ れ 円 板 間 中 央 付 近 は 一 様 流 で あ る 場 合 の 流 れ を 解 い て い る。

本 付 録 で は 流 れ は 層 流 で あ る と 仮 定 し て，出 口 端 面 効 果 を 理 論 解 析 し た 結 果 を 述 べ る。

第 2 節 理 論 式

2. 1 基 礎 式

図 8.1 に 示 す よ う に h だけ 隔 た っ た 半 径 r の 二 枚 の 円 板 が 同 じ 方 向 に 角 速 度 ω で z 軸 の ま わ り に 回 転 し， z 軸 上 に い ち よ う な 線 吹 き 出 し の あ る 場 合 を 考 え る。ま た 円 板 の 外 周 に は 回 転 円 板 と 同 じ 間 隔 の 無 限 に 広 が る 静 止 し た リ ン グ デ ィ フ ゥ ザ ー が あ る も の と し て，円 板 と リ ン グ デ ィ フ ゥ ザ ー の 境 界 付 近 の 流 れ に 着 目 す る。

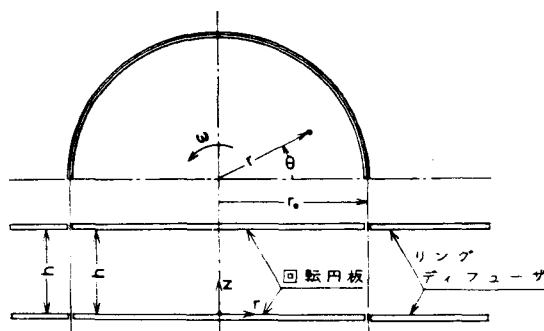


図 8.1 座 標 系

円柱座標系 (r, θ, z) を考え、各方向の流速を (u, v, w) とする。軸対称の流れを考え、流れ関数 ψ^* 、周速関数 ϱ^* を

$$u = -\frac{1}{r} \frac{\partial \psi^*}{\partial z}, \quad v = \frac{\varrho^*}{r}, \quad w = \frac{1}{r} \frac{\partial \psi^*}{\partial r} \quad (8.1)$$

と定義すると連続の式は満足される。

定常非圧縮のナビア・ストークスの式から静圧項を消去すると、 ϱ^* 、 ψ^* の満たすべき方程式は次のようになる。

$$\frac{1}{r} \frac{\partial (\psi^*, \varrho^*)}{\partial (r, z)} = \nu \nabla^{*2} \varrho^* \quad (8.2)$$

$$\frac{2\varrho^*}{r^2} \frac{\partial \varrho^*}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial (\psi^*, \nabla^{*2} \psi^*)}{\partial (r, z)} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial \psi^*}{\partial r} \nabla^{*2} \psi^* = \nu \nabla^{*4} \psi^* \quad (8.3)$$

ただし $\nabla^{*2} = (\partial^2/\partial r^2) - (1/r)(\partial/\partial r) + (\partial^2/\partial z^2)$ で、 ν は動粘性係数である。

計算を無次元量で行なうために、

$$\varrho = \varrho^*/(h^2 \omega), \quad \psi = -\psi^*/(h^3 \omega) \quad (8.4)$$

$$\alpha = r/h, \quad \beta = z/h \quad (8.5)$$

と無次元量を定義する。また中心からの吹き出し量を Q とし、半径 $r = h$ における径方向平均流速 u_0 、 $u_0 = Q/(2\pi h^2)$ 、半径 $r = h$ における円板周速 v_0 、 $v_0 = h\omega$ を用いて次の二つのレイノルズ数を定義する。

$$\left. \begin{aligned} R_1 &= \frac{u_0 h}{\nu} && (\text{流量を代表するレイノルズ数}) \\ R_2 &= \frac{v_0 h}{\nu} && (\text{円板の回転速度を代表するレイノルズ数}) \end{aligned} \right\} (8.6)$$

式(8.4)，(8.5)，(8.6)を用いると、式(8.2)，(8.3)はそれぞれ

れ次のようになる。

$$\frac{1}{\alpha} \frac{\partial(\Psi, \varrho)}{\partial(\alpha, \beta)} = -\frac{1}{R_2} \nabla^2 \varrho \quad (8.7)$$

$$\frac{2\Omega}{\alpha^2} \frac{\partial \Omega}{\partial \beta} + \frac{1}{\alpha} \frac{\partial(\Psi, \nabla^2 \Psi)}{\partial(\alpha, \beta)} + \frac{2}{\alpha^2} \frac{\partial \Psi}{\partial \beta} \nabla^2 \Psi = -\frac{1}{R_2} \nabla^4 \Psi \quad (8.8)$$

ただし, $\nabla^2 = (\partial^2/\partial\alpha^2) - (1/\alpha)(\partial/\partial\alpha) + (\partial^2/\partial\beta^2)$ である。

式(8.7)，(8.8)に対する境界条件は， $\alpha_0 = r_0/h$ とし， $\alpha < \alpha_0$ ， $\alpha > \alpha_0$ に対する量の右肩にそれぞれ **I**，**O** を付けることにすれば次のようになる。

$$\left. \begin{aligned}
 & \alpha < \alpha_0 \text{ では,} \\
 & \beta = 0 \text{ で} \quad \varrho^I = \alpha^2, \quad \psi^I = 0, \quad \frac{\partial \psi^I}{\partial \beta} = 0 \\
 & \beta = 1 \text{ で} \quad \varrho^I = \alpha^2, \quad \psi^I = \frac{R_1}{R_2}, \quad \frac{\partial \psi^I}{\partial \beta} = 0 \\
 & \alpha > \alpha_0 \text{ では,} \\
 & \beta = 0 \text{ で} \quad \varrho^0 = 0, \quad \psi^0 = 0, \quad \frac{\partial \psi^0}{\partial \beta} = 0 \\
 & \beta = 1 \text{ で} \quad \varrho^0 = 0, \quad \psi^0 = \frac{R_1}{R_2}, \quad \frac{\partial \psi^0}{\partial \beta} = 0 \\
 & \alpha = \alpha_0 \text{ では,} \\
 & \beta \neq 0, \quad \beta \neq 1 \text{ で} \quad \varrho^I = \varrho^0, \quad \frac{\partial \varrho^I}{\partial \alpha} = \frac{\partial \varrho^0}{\partial \alpha} \\
 & \psi^I = \psi^0, \quad \frac{\partial \psi^I}{\partial \alpha} = \frac{\partial \psi^0}{\partial \alpha}
 \end{aligned} \right\} \quad (8.9)$$

2. 2 級数展開

運動方程式 (8. 7), (8. 8) は非線形であるので, このまま解析的に解くことができない。そこで級数に展開して解くことを試みる。

慣性力が無視できるような遅い流れを考えるものとするとき, 式 (8. 7) の左辺は無視できる。このためには, ϱ が境界条件より α_0^2 の程度の大きさであるから, $O(\psi) \ll \alpha_0 / R_2$ でなければならない。また ψ の決定に対しても慣性力が無視できる程度であるとするとき, $\varepsilon = R_1 / \alpha_0 \ll 1$ でなければならない。さらに式 (8. 8) から ψ の大きさは高々左辺第 1 項の大きさの程度に等しくなければならない。したがって $R_2^2 \alpha_0 \ll 1$ の条件が課される。

このとき式 (8. 7), (8. 8) の解を ε で展開して

$$\left. \begin{aligned} \varrho &= \varrho_0 + \varepsilon \varrho_1 + \varepsilon^2 \varrho_2 + \cdots \\ \psi &= \psi_0 + \varepsilon \psi_1 + \varepsilon^2 \psi_2 + \cdots \end{aligned} \right\} \quad (8. 10)$$

とおき, ε^0 の項を比較すると, ϱ_0, ψ_0 が満たすべき方程式は次のようになる。

$$\nabla^2 \varrho_0 = 0 \quad (8. 11)$$

$$\nabla^4 \psi_0 = -2 R_2 \frac{\varrho_0}{\alpha^2} \frac{\partial \varrho_0}{\partial \beta} \quad (8. 12)$$

ϱ_0, ψ_0 に対する境界条件は, 式 (8. 9) と全く同じである。

2. 3 解

まず式 (8. 11) の解として変数分離形を考えると, 一般解は次のようになる。

$$\varrho_0 = (c_1 \alpha^2 + c_2)(c_3 \beta + c_4)$$

$$+ \{ c_5 \alpha I_1(\lambda \alpha) + c_6 \alpha K_1(\lambda \alpha) \} (c_7 \cos \lambda \beta + c_8 \sin \lambda \beta) \quad (8.13)$$

ここに $c_1, c_2, c_3, \dots, c_8$ は定数係数であり, λ は固有値で 0 をとらない。また I_n, K_n は n 次変形ベッセル関数である。

境界条件 (8.9) のうち円板壁面 $\beta = 0$ と $\beta = 1$ の条件を満足する解 $\varrho_0^I(\alpha < \alpha_0)$, $\varrho_0^O(\alpha > \alpha_0)$ は, それぞれ未定定数 c_k^I, c_k^O を残して次のようになる。

$$\varrho_0^I = \alpha^2 + \sum_{k=1}^{\infty} c_k^I I_1(\lambda_k \alpha) \alpha \sin \lambda_k \beta \quad (8.14)$$

$$\varrho_0^O = \sum_{k=1}^{\infty} c_k^O K_1(\lambda_k \alpha) \alpha \sin \lambda_k \beta \quad (8.15)$$

ただし, 固有値 λ_k は $\lambda_k = (2k-1)\pi$ ($k=1, 2, 3, \dots$) をとる。さらに $\alpha = \alpha_0$ における境界条件と三角関数の直交性を用いると, 未定定数 c_k^I, c_k^O は次式で表わされる。

$$c_k^I = -4\alpha_0 \{ \alpha_0 K_0(\lambda_k \alpha_0) + (2/\lambda_k) K_1(\lambda_k \alpha_0) \} \quad (8.16)$$

$$c_k^O = 4\alpha_0 \{ \alpha_0 I_0(\lambda_k \alpha_0) - (2/\lambda_k) I_1(\lambda_k \alpha_0) \} \quad (8.17)$$

以上で周速関数の第 1 近似解 ϱ_0 が求まった。

次に同様の方法で流れ関数の第 1 近似解 ψ_0 を解くことを試みる。しかし, ψ_0 に対する微分方程式 (8.12) の一般解を求めることは可能であるが, 境界条件 (8.9) を満たすことはできない。また数値計算により ψ_0 を解く方法も考えられるが, 式 (8.12) の右辺は $\alpha = \alpha_0$ の $\beta = 0$ と $\beta = 1$ に不連続を生じ, 容易には解くことができない。

第3節 数値計算例および考察

計算結果の例として、図 8.2 に無次元円板半径 α_0 が 0.1, 0.5, 1, 2, 4, 8 および 16 の場合の周方向流速分布を示す。縦軸 β は回転軸方向の無次元座標で $\beta = 0$ は円板壁面を, $\beta = 0.5$ は円板間中央を示し, 流れは円板間中央の面に関して対称となるので半分のみを表示してある。横軸 V は無次元周方向流速で, $V = v/(r\omega)$ である。回転円板壁面 ($\alpha < \alpha_0$, $\beta = 0$) では $V = 1$, リングディフューザ壁面 ($\alpha > \alpha_0$, $\beta = 0$) では $V = 0$ となる。パラメータ α は無次元半径を表わしている。

円板間隔に比べて円板径が小さい場合 ($\alpha_0 = 0.1$) には, 回転軸付近の円板間中央付近では周方向流れは生じない。 α_0 が大きくなるにつれて円板端面 $\alpha = \alpha_0$ における周方向流速は大きくなり, 円板周速の $1/2$ に近づく。また, α が α_0 から 1 はなれると, $\alpha < \alpha_0$ で $V = 1$ に, $\alpha > \alpha_0$ で $V = 0$ になり, 出口端面効果の影響はなくなる。すなわち慣性

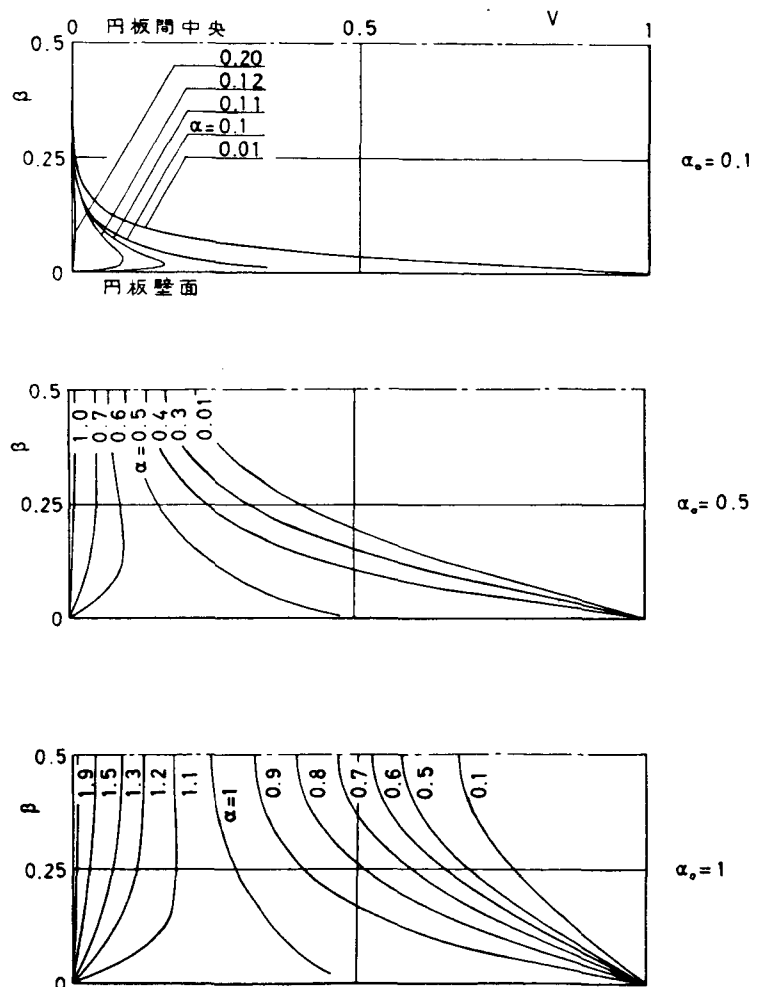


図 8.2 周方向流速分布

力が無視できるような遅い流れでは、出口端面効果は円板端面から円板間隔に等しい距離の付近で減衰する。

なお、級数解 (8.14), (8.15) の $\alpha = \alpha_0$ での収束は非常に悪く 10^{-6} の精度を与えるためには1000項程度計算する必要がある。しかし、 α が α_0 から離れるにしたがい、収束は良好になり、 $\alpha = \alpha_0 \pm 0.025$ では60項、 $\alpha = \alpha_0 \pm 0.2$ では10項程度で収束する。そして $\alpha = \alpha_0 \pm 1$ 付近では級数の第2項以降は無視できる。

径方向流れと回転軸方向流れについては、前節の

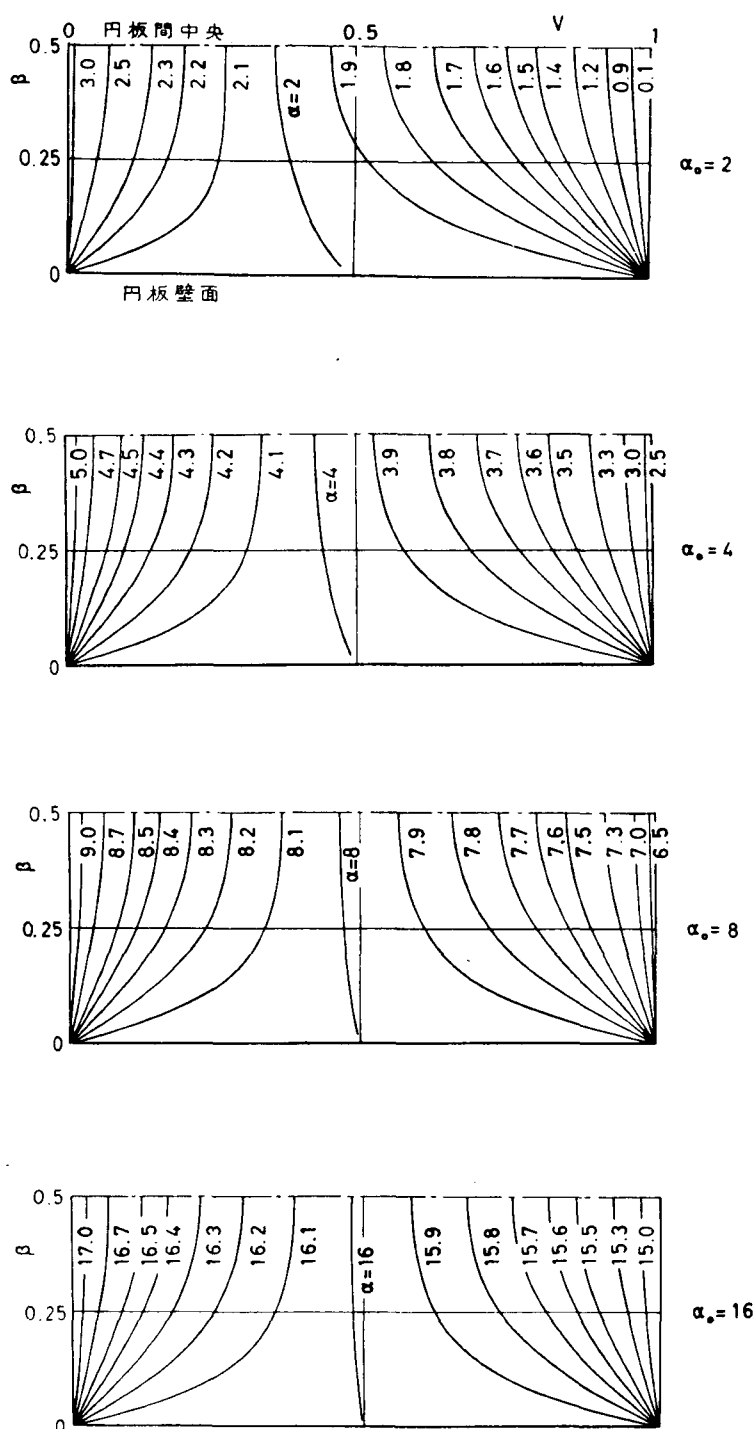


図 8.2 (続き) 周方向流速分布

2.3 に述べたように式 (8.12) の解を得ることは困難である。しかしながら遠心力が非常に小さければ式 (8.12) は次式となる。

$$\nabla^4 \psi_0 = 0 \quad (8.18)$$

式 (8.18) の一般解は

$$\begin{aligned} \psi_0 = & (c_1 \alpha^2 + c_2) (c_3 \beta^3 + c_4 \beta^2 + c_5 \beta + c_6) \\ & + (c_7 \alpha^4 + c_8 \alpha^2 \log \alpha + c_9 \alpha^2 + c_{10}) (c_{11} \beta + c_{12}) \\ & + \{ c_{13} \alpha I_1(\lambda \alpha) + c_{14} \alpha K_1(\lambda \alpha) \} \{ c_{15} \sin \lambda \beta + c_{16} \cos \lambda \beta \\ & + \beta (c_{17} \sin \lambda \beta + c_{18} \cos \lambda \beta) \} + \{ c_{19} \alpha I_1(\lambda' \alpha) + c_{20} \alpha^2 I_0(\lambda' \alpha) \\ & + c_{21} \alpha K_1(\lambda' \alpha) + c_{22} \alpha^2 K_0(\lambda' \alpha) \} (c_{23} \sin \lambda' \beta + c_{24} \cos \lambda' \beta) \quad (8.19) \end{aligned}$$

である。ただし、 $c_1, c_2, c_3, \dots, c_{24}$ は定数係数で、 λ と λ' は固有値で 0 をとらない。

境界条件 (8.9) を満たす解は、

$$\psi_0^I = \psi_0^O = \frac{R_1}{R_2} (-2 \beta^3 + 3 \beta^2) \quad (8.20)$$

である。これはポアズイユ流れを示している。

本研究で考えているような遅い流れの場合には、径方向と回転軸方向の流れは、式 (8.18) の解 (8.20) のポアズイユ流れに、式 (8.12) の右辺の遠心力による流れが線形的に加えあわされた流れになることがわかる。

第 4 節 結 言

円板間隔が広く流量が小さい場合には、円板の出口端面効果が円板間内の流れを決定する最大の因子となる。そこで本付録では、出口端面効果

を理論的に解析することを試みた。この解析は遅い流れを対象としたものであるが、次のことが明らかになった。

- (1) 円板出口径の円板間隔に対する比が大きいほど、円板出口における周方向流速は大きくなり、円板周速の $1/2$ に近づく。
- (2) 円板端面から円板間隔に等しい距離だけ円板間内に入ると、周方向流速は円板周速に等しくなり、出口端面効果は消失する。
- (3) 径方向と回転軸方向の流れは、ポアズイユ流れに流体の回転にともなう遠心力による流れが線形的に加えあわされた流れになる。したがって、円板を通り抜ける流量が大きくなると、遠心力による流れすなわち出口端面効果による流れは回転円板出口側に押し流され、出口端面効果は減少する。この結果は、第 4 章あるいは第 6 章の実験結果と一致する。

文 献

- [1] Васильцов З. А. • Невелич В. В. : Герметические электронасосы,
(1968) p 176, Машиностроение.
- [2] Scientific American (Sept. 30, 1911) p296.
- [3] Nendl D. : Diss. Dr.-Ing. v. T. H. Aachen, (1966),
- [4] Куликов Г. С. : Гидравлические машины No. 1 (1967)p109.
- [5] Barske U. M. : Proc. Inst. Mech. Engr.,
Vol. 174 No. 11 (1960) p437.
- [6] Мисюра В. И. • Дронов Ю. В. : Изв. вуз. Авиац. техн.,
15-1 (1972) p146.
- [7] Hasinger S. H. • Kehrt L. G. : Trans. ASME, Ser. A,
Vol. 85 (1963-7) p201.
- [8] Vannérus T. : Allg. Wärmetech., Heft 12 (1955) p257.
- [9] Rice W. : Trans. ASME, Ser. A, Vol. 85
(1963-7) p191.
- [10] Batchelor G. K. : Quart. J. Mech. Appl. Math., Vol. 4
(1951) p29.
- [11] Stewartson K. : Proc. Camb. Phil. Soc., Vol. 49
(1953) p333.
- [12] 村 田 暹 : 日本機械学会論文集 18 卷 73 号 (昭 27)
p25.
- [13] Peube J. L. • Kreith F. : Jour. Mecanique, Vol. 5 No. 2
(1966-6) p261.
- [14] Breiter M. C. • Pohlhausen K. : ARL, USAF, Dayton,
Ohio, Rep. No. ARL 62-318 (1962-3)
- [15] Köhler M. : Diss. Dr.-Ing. v. T. H. Karlsruhe,
(1969-7).

- [16] Bakke E. • Kreider J. F. • Kreith F. : J. Fluid
Mech., Vol. 58 (1973) p209.
- [17] Pater L. L. • Crowther E. • Rice W. : Trans. ASME,
Ser. I, Vol. 96 (1974-3) p29.
- [18] Welsh W. • Hartnett J. : Proc. 3rd. U. S. Nat. Cong.
Appl. Mech., (1958) p847.
- [19] Picha K. G. • Eckert E. R. G.: Proc. 3rd. U. S. Nat.
Cong. Appl. Mech., (1958) p791.
- [20] Bennetts D. A. • Hocking L. M. : Proc. Roy. Soc.
Lond., Ser. A, 333 (1973) p469.
- [21] Matsch L. • Rice W. : Trans. ASME, Ser. E, Vol. 90
(1968-3) p155.
- [22] Мисюра В. И. : Изв. АН СССР, Механика жидкости и газа,
No. 5 (1972) p178.
- [23] Boyd K. E. • Rice W. : Trans. ASME, Ser. E, Vol. 90
(1968-6) p229.
- [24] Byalyi B. N.ほか : Russian Engr. Jour., Vol. 51
No. 9 (1971) p56.
- [25] Boyack B. E. • Rice W. : Trans. ASME, Ser. D,
Vol. 93 (1971-9) p350.
- [26] 石 沢 進 午 : 日本機械学会論文集 30 卷 219 号
(昭 39-11) p1301.
- [27] Görtler H. : J. Math. u. Mech., 6-1 (1957) p1.
- [28] Görtler H. : Ing.-Arch., Bd. 16 (1948) p173.
- [29] Witting H. : Z. Angew. Math. u. Phys., Vol. 4
(1953) p376.
- [30] Kármán T. v. : Z. AMM, Bd. 1 Heft 4 (1921) p21.

- [31] Gruschwitz E. : Ing. -Arch., Bd. 6 (1935) p355.
- [32] Mager A. : NACA Rep. No. 1067 (1952).
- [33] 三 宅 裕 : 大阪大学学位論文 (昭 41-10).
- [34] Gregory N. · Stuart J. T. · Walker W. S. : Phil.
Trans. Roy. Soc. London, A 248
(1955) p155.
- [35] Greenspan H. D. : The Theory of Rotating Fluid,
(1968) p275, p281, Cambridge Univ.
Press.