Osaka University Knowledge Archive

Title	プラズマ中のサイクロトン波により励起されるエコー波に関する研究
Author(s)	上村, 鉄雄
Citation	大阪大学, 1970, 博士論文
Version Type	VoR
URL	https://hdl.handle.net/11094/2546
rights	
Note	

Osaka University Knowledge Archive : OUKA

https://ir.library.osaka-u.ac.jp/

Osaka University

参考論文

Longitudinal Plasma Wave Echo Excited by Two Cyclotron Waves

by

Tetsuo KAMIMURA*

Faculty of Engineering Science, Osaka University
Toyonaka, Osaka

---

* Present address: Institute of Plasma Physics, Nagoya Unversity, Nagoya

Abstract

It is shown that successive excitation of two cyclotron waves with a time interval longer than their cyclotron damping periods lead to a spontaneous appearance of a longitudinal plasma wave in a collisionless plasma. The longitudinal plasma wave (i.e., the echo), has the frequency shifted by the cyclotron frequency and appears at the same time as in the case of the excitation by two plasma waves. The lineshapes of temporal echoes, together with the phase mixing processes of the second order distribution functions, are studied numerically.

§ 1. Introduction

The phenomenon of plasma wave echo was predicted by Gould, O'Neil and Malmberg[1] and observed by several experiments.[2,3,4] If a plasma wave is excited in a collisionless plasma and Landau-damps away, and later a second wave is excited and also damps away, then a third wave will appear spontaneously in the plasma. The last wave is called the plasma wave echo.

According to Gould et al, the plasma wave echo appears under the conditions that the memory of the first wave is remembered by the velocity distribution function of the particles and the direction of the phase evolution of the perturbed distribution function is reversed by the second wave. Further work on the line shape of the ion wave echo shows an excellent agreement between theory and experiments.[5] In a previous paper[6] we have outlined a longitudinal plasma wave echo excited by two cyclotron waves, and formulated the echo problem as an initial-value problem for the linearized Vlasov equation*. If a transverse cyclotron wave with wave-number $-k_1$ parallel to the static magnetic field is excited in a plasma at a time zero and damps away collisionlessly,

---

* It is shown by K. Nishikawa that for certain class of initial fluctuations of the velocity distribution function, Landau's solution of the linearized Vlasov equation leads to a plasma wave echo.

and if the second transverse magnetic pulse with wave number k_2 is applied at a time τ, then the direction of the phase evolution of the distribution function is reversed by the force $\underset{\sim}{v} \times \underset{\sim}{B}$ pulse and a longitudinal plasma wave echo with wave number ($k_2 - k_1$) appears at the time $\tau' = \tau k_2/(k_2 - k_1)$ In this paper we investigate this echo including the field excited by the second pulse and calculate the line shapes of the echoes numerically.

In §2, the behavior of a cyclotron wave excited by an external field is studied in the linear theory. The dispersion curves of electron cyclotron waves are given. The second-order plasma wave echo excited by cyclotron waves is treated in §3, based on the Vlasov equation. In §4, we show the line shapes of the echoes obtained by numerical calculation with the aid of computer. Section 5 is devoted to the discussion of the possible excitation of the echoes.

§ 2. On Linearized Theory for Waves Propagating along a Magnetic Field

For simplicity we restrict ourselves to a uniform, infinite collisionless plasma in a uniform magnetic field $B_0 \underset{\sim}{e}_z$ and consider disturbances with wave vectors $\underset{\sim}{K}$ along the magnetic field.

If the initial perturbation is small, the deviation of the distribution function of plasma particles from the un-

perturbed function $F_0(\underset{\sim}{v})$ will also be small, so the Vlasov equation can be linearized with respect to this deviation. Then the equation for the perturbation $f_j(\underset{\sim}{v}, z, t)$ is

$$\frac{\partial f_j(\underset{\sim}{v}, z, t)}{\partial t} + v_z \frac{\partial f_j(\underset{\sim}{v}, z, t)}{\partial z} + \frac{q_j B_0}{m_j c} (\underset{\sim}{v} \times \underset{\sim}{e}_z) \cdot \frac{\partial f_j(\underset{\sim}{v}, z, t)}{\partial \underset{\sim}{v}}$$

$$+ \frac{q_j}{m_j} \left[\underset{\sim}{E}(z,t) + \frac{1}{c} (\underset{\sim}{v} \times \underset{\sim}{B}(z,t)) \right] \cdot \frac{\partial F_0(\underset{\sim}{v})}{\partial \underset{\sim}{v}} = 0 \quad , \tag{2.1}$$

where suffix j denotes the species of particles and q_j and m_j are the charge and mass of particle of the kind j.
To solve equation (2.1), we use cylindrical coordinates in velocity space with polar axis along the external magnetic field B_0, $(v_\perp, \varphi, u)$[7]. It is also convenient to use the rotating coordinates

$$\sqrt{2}\, \underset{\sim}{e}_\pm = \underset{\sim}{e}_x \pm i\, \underset{\sim}{e}_y \quad , \tag{2.2}$$

where $\underset{\sim}{e}_x$, $\underset{\sim}{e}_y$ and $\underset{\sim}{e}_z$ are unit vectors along the x, y and z axes. With this choice of coordinates, a vector $\underset{\sim}{A}$ can be written as

$$\underset{\sim}{A} = A^+ \underset{\sim}{e}_+ + A^- \underset{\sim}{e}_- + A_z \underset{\sim}{e}_z \quad , \tag{2.3}$$

where

$$A^{\pm} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(A_x \mp i A_y \right) \tag{2.4}$$

Expanding $f_j(\underset{\sim}{v}, z, t)$, $\underset{\sim}{E}(z, t)$ and $\underset{\sim}{B}(z, t)$ in Fourier Series in space and applying the Laplace transformation to the time-dependent quantities*, we obtain from Eq.(2.1) a first-order linear equation for $f_{jk}(\underset{\sim}{v}, \omega)$. The equation has the solution

$$f_k(\underset{\sim}{v}, \omega) = \frac{q}{\sqrt{2}\, m} \left[\frac{E_k^{+}(\omega)\, e^{i\varphi}}{i(\omega - ku + \omega_c)} + \frac{E_k^{-}(\omega)\, e^{-i\varphi}}{i(\omega - ku \underset{-}{+} \omega_c)} \right]$$

$$\cdot \Gamma(k, \omega, u, v_\perp) + \frac{q}{m} \frac{\partial F_0(\underset{\sim}{v}) / \partial u}{i(\omega - ku)} E_{kz}(\omega) + I_f \,, \tag{2.5}$$

where

$$\Gamma(k, \omega, u, v_\perp) = \left(1 - \frac{ku}{\omega}\right) \frac{\partial}{\partial v_\perp} F_0(\underset{\sim}{v}) + \frac{k v_\perp}{\omega} \frac{\partial}{\partial u} F_0(\underset{\sim}{v}) \,, \tag{2.6}$$

$\omega_c (= q B_0 / mc)$ is the cyclotron frequency and I_f is the

---

* the Laplace transformation of $Y(t)$ is defined by

$$Y(\omega) = \int_0^{\infty} Y(t)\, e^{i\omega t}\, dt \,; \quad \mathrm{Im}\,\omega > 0 \,.$$

The inverse transformation is then given by

$$Y(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty + i\sigma}^{\infty + i\sigma} Y(\omega)\, e^{-i\omega t}\, dt \,, \quad \sigma > 0 \,.$$

term which comes from the initial values of $f_k(\underset{\sim}{v}, t)$ and $\underset{\sim}{B}_k(t)$**. From Eq.(2.5) together with Maxwell's equations, we obtain

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_r(k,\omega) & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_\ell(k,\omega) & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_p(k,\omega) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_k^+(\omega) \\ E_k^-(\omega) \\ E_{kz}(\omega) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\omega^2+c^2k^2 & 0 & 0 \\ 0 & -\omega^2+c^2k^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_k^{+\,ext}(\omega) \\ E_k^{-\,ext}(\omega) \\ E_{kz}^{ext}(\omega) \end{pmatrix} + \underset{\sim}{I}_E \,, \tag{2.7}$$

where***

$$\varepsilon_{r,\ell}(k,\omega) = c^2k^2 - \omega^2 + \pi\omega \sum_j \frac{\omega_p^2}{k} \int_{-\infty}^{\infty} du \int_0^{\infty} v_\perp^2 dv_\perp \frac{\Gamma(k,\omega,u,v_\perp)}{u - \left(\frac{\omega \pm \omega_c}{k}\right)} \,, \tag{2.8}$$

$$\varepsilon_p(k,\omega) = 1 - \sum_j \frac{\omega_p^2}{k^2} \int_{-\infty}^{\infty} du \, \frac{\partial F_{0z}(u)/\partial u}{u - \frac{\omega}{k}} \,, \tag{2.9}$$

the subscript ext refers to the external field and the initial values of $\underset{\sim}{E}_k(t)$, $\underset{\sim}{B}_k(t)$ and $f_k(\underset{\sim}{v}, t)$ have been gathered in the vector $\underset{\sim}{I}_E$. Here,

---

** The index indicating the species of the particles will henceforth be omitted for brevity.

*** Following Landau[8], integration of Eqs.(2.8) and (2.9) are carried out along the real u axis from $-\infty$ to $+\infty$ (if $\mathrm{Im}\,\omega > 0$) and along the contour C running from $-\infty$ to $+\infty$ below the poles $u = (\omega \pm \omega_c)/k$ and $u = \omega/k$ when $k > 0$ and above them when $k < 0$ (if $\mathrm{Im}\,\omega < 0$).

$$F_{0z}(u) = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\infty} v_\perp \, dv_\perp \, F_0(\underset{\sim}{v}) \tag{2.10}$$

and when $k > 0$ and $\omega > 0$, the subscripts r, ℓ refer to the right-hand left-handed polarizations corresponding to the + and − signs in the denominator on the right-hand side of Eq.(2.8), respectively. Since $F_0(\underset{\sim}{v})$ is real for real arguments, one arrives at the following symmetry relation

$$\varepsilon_{\substack{\ell \\ r}}(-k, \omega) = \varepsilon_{\substack{r \\ \ell}}(k^*, -\omega^*)^* \quad . \tag{2.11}$$

If $\omega^{\ell,r}(-k)$ is a solution of dispersion relation $\varepsilon_{\substack{\ell \\ r}}(-k, \omega) = 0$, then

$$\omega^{\ell,r}(-k) = -\omega^{r,\ell\,*}(k) \tag{2.12}$$

We are particularly interested in the case where $E_k^{\pm\,ext}(\omega)$, $E_{kz}^{ext}(\omega)$ and $\underset{\sim}{I}_E$ are entire functions. In this case the only singularities of $E_k^{\pm}(\omega)$ and $E_{kz}(\omega)$ will be the zeros of the denominator, i.e. the roots of the dispersion equation

$$\varepsilon_{\substack{r \\ \ell}}(k, \omega) = 0 \, , \qquad \varepsilon_p(k, \omega) = 0 \quad , \tag{2.13}$$

respectively. We denote the roots of these equations by

$$\omega = \omega(k)^{r,l} = \omega_k^{r,l} + i\gamma_k^{r,l} \quad ,$$
$$\omega = \omega(k)^{p} = \omega_k^{p} + i\gamma_k^{p} \quad . \tag{2.14}$$

Then for large t the functions $E_k^{\pm}(t)$ and $E_{kz}(t)$ behave asymptotically as

$$E_k^{\pm}(t) \sim \sum A_k^{\pm} e^{-i\omega(k)^{r,l}t}$$

and (2.15)

$$E_{kz}(t) \sim \sum A_k^{p} e^{-i\omega(k)^{p}t} \quad ,$$

where $A_k^{\pm}$ and A_k^{p} are the residues of $E_k^{\pm}(\omega)$ and $E_{kz}(\omega)$ at $\omega = \omega(k)^{r,l}$ and $\omega = \omega(k)^{p}$, respectively and the summations are taken over the various roots of Eq.(2.13). When the distribution function $F_0(\underset{\sim}{v})$ is a Maxwell distribution, $\gamma_k^{r,l}$ and γ_k^{p} are always negative. Then $E_k^{\pm}(t)$ and $E_{kz}(t)$ damp for large t with the least decrements γ, i.e. Landau-damp away. The expression (2.5) for $f_k(\underset{\sim}{v},\omega)$ shows that the function $f_k(\underset{\sim}{v},\omega)$ has besides the same singularities as the functions $E_k^{\pm}(\omega)$ and $E_{kz}(\omega)$, three additional poles at the points $\omega = ku \pm \omega_c$ and $\omega = ku$. It is clear from what has been said above that the behavior of the function $f_k(\underset{\sim}{v},t)$ at large t is governed by these additional singular points. Then we can obtain

from Eq.(2.5) the time asymptotic behavior of the perturbed distribution function $f_k(\underset{\sim}{v}, t)$ in the form:

$$f_k(\underset{\sim}{v},t) \simeq \frac{-q}{\sqrt{2}m}\Big\{\exp\left[-i(ku-\omega_c)t\right]\cdot e^{i\varphi}E_k^{+}(ku-\omega_c)$$

$$\cdot\left[(k,ku-\omega_c,u,v_\perp)+\exp\left[-i(ku+\omega_c)t\right]\cdot e^{-i\varphi}E_k^{-}(ku+\omega_c)\right. \qquad (2.16)$$

$$\cdot\left[(k,ku+\omega_c,u,v_\perp)\right]\Big\}-\frac{q}{m}\exp\left[-iklt\right]E_{kz}(ku)\frac{\partial F_0(\underset{\sim}{v})}{\partial u}+I\ ,$$

where I is the term arising from the initial value of the distribution function $f_k(\underset{\sim}{v}, t)$ et al. Thus, the behavior of the distribution function $f_k(\underset{\sim}{v}, t)$ for large value of t is governed by the exponential factors $e^{-i(ku\pm\omega_c)t}$ and e^{-iklt}, i.e. a sum of undamped periodic function of time, the frequencies of which depend on the velocity. When a wave with wave number k_1 is excited in a plasma and then Landau-damps away, it leaves a perturbation on the distribution function $f_k(\underset{\sim}{v}, t)$ of the form proportional to the factors $\exp\left[-i(k_1u\pm\omega_c)t\right]$(or $\exp(-ik_1ut)$). Therefore these factors can be called the memories of the initial excitation remembered by a distribution function. But for large t there are no charge and current associated with this perturbation, since a velocity integral over it will phase mix to zero. It should be noted that the function $f_k(\underset{\sim}{v}, t)$ is not entire function at later times, even if $f_k(\underset{\sim}{v}, t=0)$ is entire, as shown by K. Nishikawa, since $E_k^{\pm}(ku\mp\omega_c)$

and $E_{kz}(ku)$ have singularities $ku \mp \omega_c = \omega^{r,\ell}(k)$ and $ku = \omega^{p}(k)$, respectively. The plasma wave echo essentially relates to these singularities.

Let us examine the dispersion relation for an isotropic distribution,

$$F_0(\underset{\sim}{v}) = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{3/2} \frac{1}{v_T^3}\, e^{-\frac{v_\perp^2}{2v_T^2} - \frac{u^2}{2v_T^2}} \tag{2.17}$$

In this case Eqs.(2.13) are written as the following forms,

$$\varepsilon_p(k,\omega) = 1 - \sum_j \frac{k_D^2}{2k^2} Z'\left(\frac{\omega}{\sqrt{2}\,k v_T}\right) , \tag{2.18}$$

$$\varepsilon_{r\,\ell}(k,\omega) = c^2k^2 - \omega^2 - \sum_j \left(\frac{\omega}{\sqrt{2}\,k v_T}\right) \omega_p^2\, Z\left(\frac{\omega \pm \omega_c}{\sqrt{2}\,k v_T}\right) , \tag{2.19}$$

where

$$Z'(\zeta) = d\,Z(\zeta) / d\zeta$$

$$Z(\zeta) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-x^2}}{x - \zeta}\, dx , \quad \mathrm{Im}\,\zeta > 0 \tag{2.20}$$

is the plasma dispersion function and $k_D = \omega_p / v_T$. When k is negative, the function $Z(\zeta)$ should be replaced by $\tilde{Z}(\zeta)$ in Eqs.(2.18) and (2.19) where $\tilde{Z}(\zeta)$ is given by

$$\tilde{Z}(\zeta) = Z(\zeta) - 2i\pi^{1/2} \exp(-\zeta^2) \tag{2.21}$$

In Figs. 1-(a), (b) and (c) are shown curves of ω_k^r / ω_{ce}

and γ_k^r / ω_{ce} vs kc / ω_{ce} for the roots of the dispersion equation:

$$c^2k^2-\omega^2-\left(\frac{\omega}{\sqrt{2}\,k v_{Te}}\right)\omega_{pe}^2 Z\left(\frac{\omega-\omega_{ce}}{\sqrt{2}\,k v_{Te}}\right)=0 \quad , \tag{2.22}$$

where $\omega_{ce}=eB_0/mc>0$. These curves are used in §4.

§ 3. Plasma Wave Echo Excited by Two Cyclotron Waves

In this section we shall describe the formation of the second-order temporal plasma wave echo. We assume that the electron and ion distributions are spatially homogeneous initially, i.e., $f(\underset{\sim}{v}, z, t=0) = F_0(\underset{\sim}{v})$, and that a pulse with wave number k_1 is applied externally to the plasma:

$$\underset{\sim}{E}^{ext}(z,t)=E_\perp^e\left[\cos k_1 z\,\underset{\sim}{e}_x-\sin k_1 z\,\underset{\sim}{e}_y\right]\delta(t) \quad , \tag{3.1}$$

where $E_\perp^e$ is the amplitude of the pulse. The Fourier-Laplace transform of the pulse is written as

$$\underset{\sim}{E}_k^{ext}(\omega)=\frac{E_\perp^e}{\sqrt{2}}\left[\delta_{k,k_1}\underset{\sim}{e}_+ + \delta_{k,-k_1}\underset{\sim}{e}_-\right] \quad . \tag{3.2}$$

By this pulse a wave is excited in the plasma and from Eq.(2.7) its Fourier-Laplace transform is given by

$$\underset{\sim}{E}_k(\omega) = E_{k_1}^+(\omega)\,\underset{\sim}{e}_+ + E_{-k_1}^-(\omega)\,\underset{\sim}{e}_- \tag{3.3}$$

where

$$E_{k_1}^{+}(\omega) = \frac{E_{\perp}^{e}}{\sqrt{2}} \frac{-\omega^2 + c^2 k^2}{\varepsilon_r(k,\omega)} \delta_{k,k_1} , \tag{3.4}$$

$$E_{-k_1}^{-}(\omega) = \frac{E_{\perp}^{e}}{\sqrt{2}} \frac{-\omega^2 + c^2 k^2}{\varepsilon_l(k,\omega)} \delta_{k,-k_1} . \tag{3.5}$$

The reality condition requires

$$E_{-k_1}^{-}(\omega) = E_{k_1}^{+}(-\omega^*)^* . \tag{3.6}$$

Taking the inverse Laplace transform of Eq.(3.3), we can obtain the time asymptotic solution of $\underset{\sim}{E}_{k_1}(t)$ in the form of Eq.(2.15):

$$E_{k_1}(t) \sim \left[\cos\omega_{k_1}^{r} t \, \underset{\sim}{e}_x + \sin\omega_{k_1}^{r} t \, \underset{\sim}{e}_y\right] e^{\gamma_{k_1}^{r} t} \tag{3.7}$$

where we have retained only the most upper pole. Thus the wave excited by the pulse cyclotron-damps away in a time, $t \gg 1/\gamma_{k_1}^{r}$ but it modulates the distribution function $f_{k_1}(\underset{\sim}{v}, t)$ leaving a perturbation of the form

$$f_{k_1}(\underset{\sim}{v},t) \sim \frac{\partial F_0(\mathcal{E})/\partial v_{\perp} \; e^{i\varphi}}{\varepsilon_r(k_1, k_1 u - \omega_c)} \cdot \exp\left[-i(k_1 u - \omega_c)t\right] . \tag{3.8}$$

After a time $\tau (\gg 1/\gamma_{k_1}^{r})$ the second magnetic pulse with wave number k_2 ($k_2 > k_1 > 0$) is applied externally to the

plasma:

$$\underset{\sim}{B}^{ext}(z,t) = B_{\perp}^{e}\left[\sin k_z z\, \underset{\sim}{e}_x + \cos k_z z\, \underset{\sim}{e}_y\right]\delta(t-\tau), \quad (3.9)$$

where $B_{\perp}^{e}$ is the amplitude of the pulse.

The Fourier-Laplace transform of the pulse is written as

$$\underset{\sim}{B}_k^{ext}(\omega) = i\frac{B_{\perp}^{e}}{\sqrt{2}}\left[-\delta_{k,k_z}\underset{\sim}{e}_+ + \delta_{k,-k_z}\underset{\sim}{e}_-\right]e^{i\omega\tau} \quad (3.10)$$

The second pulse produces a similar response,

$$B_k(\omega) = B_{k_z}^{+}(\omega)\,\underset{\sim}{e}_+ + B_{-k_z}^{-}(\omega)\,\underset{\sim}{e}_- \quad (3.11)$$

where

$$B_{k_z}^{+}(\omega) = -\frac{iB_{\perp}^{e}}{\sqrt{2}}\,\frac{-\omega^2+c^2k^2}{\varepsilon_r(k,\omega)}\,\delta_{k,k_z}e^{i\omega\tau}, \quad (3.12)$$

$$B_{-k_z}^{-}(\omega) = \frac{iB_{\perp}^{e}}{\sqrt{2}}\,\frac{-\omega^2+c^2k^2}{\varepsilon_l(k,\omega)}\,\delta_{k,-k_z}e^{i\omega\tau} \quad (3.13)$$

and from the reality condition we have

$$B_{-k_z}^{-}(\omega) = B_{k_z}^{+}(-\omega^*)^* \quad (3.14)$$

After a time $t \gg 1/\gamma_{k_z}^{r}$ the magnetic field $\underset{\sim}{B}_k(t)$ also

cyclotron damps away.

It modulates not only the distribution function $f_{k_2}(\underset{\sim}{v}\, t)$ but also $f_{k_1}(\underset{\sim}{v}, t)$ leaving the second-order distribution function $f_{k_3}(\underset{\sim}{v}, t)$, where $k_3 = (k_2 - k_1) > 0$.

Let us examine the form of the second order distribution function $f_{k_3}(\underset{\sim}{v}, t)$. The Vlasov equation for the distribution function $f_{k_3}(\underset{\sim}{v}, t)$ is to lowest order.

$$i\,(k_3 u - \omega)\, f_{k_3}(\underset{\sim}{v}, \omega) - \omega_c \frac{\partial}{\partial \varphi} f_{k_3}(\underset{\sim}{v}, \omega)$$

$$+ \frac{q}{m}\left(\underset{\sim}{E}_{k_3}(\omega) + \frac{1}{c}\,\underset{\sim}{v} \times \underset{\sim}{B}_{k_3}(\omega)\right) \cdot \frac{\partial}{\partial \underset{\sim}{v}} F_0(\underset{\sim}{v}) \qquad (3.15)$$

$$= -\frac{q}{m} \int_{-\infty + i\sigma'}^{\infty + i\sigma'} \frac{d\omega'}{2\pi} \Big[\Big(\underset{\sim}{E}_{k_2}(\omega - \omega') + \frac{1}{c}\,\underset{\sim}{v} \times B_{k_2}(\omega - \omega') \Big) \cdot \frac{\partial}{\partial \underset{\sim}{v}} f_{-k_1}(\underset{\sim}{v}, \omega')$$

$$+ \Big(E_{-k_1}(\omega - \omega') + \frac{1}{c}\,\underset{\sim}{v} \times B_{-k_1}(\omega - \omega') \Big) \cdot \frac{\partial}{\partial \underset{\sim}{v}} f_{k_2}(\underset{\sim}{v}, \omega') \Big] ,$$

where the convolution theorm has been used twice in expressing the nonlinear term, and the functions E_{k_1}, B_{k_2}, f_{k_1} and f_{k_2} are the first-order quantities.

Since we are interested in the longitudinal plasma wave, we integrate Eq.(3.15) over $v_\perp$ and φ and obtain

$$i(k_3 u-\omega) f_{k_3}(u,\omega)+\frac{q}{m} E_{k_3 z}(\omega)\frac{\partial F_{0z}(u)}{\partial u}$$

$$= -\frac{q}{m}\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\infty} v_\perp\, dv_\perp \int_{-\infty+i\sigma'}^{\infty+i\sigma'} \frac{d\omega'}{2\pi}\Big[\Big(E_{k_2}(\omega-\omega')$$

$$+\frac{1}{c}\underset{\sim}{v}\times \underset{\sim}{B}_{k_2}(\omega-\omega')\Big)\cdot\frac{\partial}{\partial \underset{\sim}{v}} f_{-k_1}(\underset{\sim}{v},\omega') \tag{3.16}$$

$$+\Big(E_{-k_1}(\omega-\omega')+\frac{1}{c}\underset{\sim}{v}\times \underset{\sim}{B}_{-k_1}(\omega-\omega')\Big)\cdot\frac{\partial}{\partial \underset{\sim}{v}} f_{k_2}(\underset{\sim}{v},\omega')\Big] .$$

The second term on the right-hand side can be neglected since $\underset{\sim}{E}_{-k_1}(t)$ and $\underset{\sim}{B}_{-k_1}(t)$ will have damped away at $t=\tau$. The important term for the formation of the echo is the first term on the right-hand side of Eq.(3.16). We now use Eq.(2.5) for $f_{-k_1}(\underset{\sim}{v},\omega)$ in the Eq. (3.16):

$$f_{-k_1}(\underset{\sim}{v},\omega')=\frac{q}{\sqrt{2}m}\Big[\frac{E^{+}_{-k_1}(\omega')\,e^{i\varphi}}{i(\omega'+k_1 u+\omega_c)}$$

$$+\frac{E^{-}_{-k_1}(\omega')\,e^{-i\varphi}}{i(\omega'+k_1 u-\omega_c)}\Big]\cdot\frac{\partial F_0(\underset{\sim}{v})}{\partial v_\perp}+\frac{q}{m}\,\frac{\partial F_0(\underset{\sim}{v})/\partial u}{i(\omega+k_1 u)}\,E_{-k_1 z}(\omega'). \tag{3.17}$$

Substituting this into the right-hand side of the Eq.(3.16) and using the relations

$$\int_0^{2\pi} d\varphi\int_0^{\infty} v_\perp\, dv_\perp\left(\frac{\partial^2 F_0(\underset{\sim}{v})}{\partial v_\perp^2}+\frac{1}{v_\perp}\cdot\frac{\partial F_0(\underset{\sim}{v})}{\partial v_\perp}\right)=0$$

and $$\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\infty} v_\perp^2 \frac{\partial F_0(\underset{\sim}{v})}{\partial v_\perp} dv_\perp = -2F_{0z}(u)$$

We obtain

$$i(k_3 u - \omega) f_{k_3}(u,\omega) + \frac{q}{m} E_{k_3 z}(\omega) \frac{\partial F_{0z}(u)}{\partial u}$$

$$= \left(\frac{q}{m}\right)^2 \frac{i}{c} \int_{-\infty+i\sigma'}^{\infty+i\sigma'} \frac{d\omega'}{2\pi} \frac{\partial}{\partial u} \left\{ \frac{B_{k_2}^{+}(\omega-\omega') E_{-k_1}^{-}(\omega')}{i(\omega'+k_1 u-\omega_c)} F_{0z}(u) \right.$$

$$\left. - \frac{B_{k_2}^{-}(\omega-\omega') E_{-k_1}^{+}(\omega')}{i(\omega'+k_1 u+\omega_c)} F_{0z}(u) \right\} \tag{3.18}$$

$$- \left(\frac{q}{m}\right)^2 \int_{-\infty+i\sigma'}^{\infty+i\sigma'} \frac{d\omega'}{2\pi} \frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{\partial F_{0z}(u)/\partial u}{i(\omega'+k_1 u)} \right) \cdot E_{k_2 z}(\omega-\omega') E_{-k_1 z}(\omega'),$$

where the terms on the right-hand side can be considerd as sources that make the charges when $f_{k_3}(u,\omega)$ is integrated over u. When two pulses are the right-handed circular polarized waves, left-handed waves and longitudinal waves, the first, the second and the third term on the right-hand side of the Eq.(3.18) contributes to the function $f_{k_3}(u,\omega)$, respectively. The echo arising from the third term was studied by Gould et al.

We shall now limit ourselves to the discussion of the

case of the excitation by right-handed circular polarized wave.

In this case the Eq.(3.18) can be simplified and we find

$$f_{k_3}(u,\omega)=\frac{1}{i(k_3u-\omega)}\left[\left(\frac{q}{m}\right)^2\frac{i}{c}\int\frac{d\omega'}{2\pi}\frac{\partial}{\partial u}\left\{\frac{F_{0z}(u)}{i(\omega'+k_1u-\omega_c)}\right\}\right.$$

$$\left.\cdot B_{k_2}^{+}(\omega-\omega')\,E_{-k_1}^{-}(\omega')-\left(\frac{q}{m}\right)\frac{\partial F_{0z}(u)}{\partial u}\,E_{k_3z}(\omega)\right] \tag{3.19}$$

The electric field $E_{k_3z}(\omega)$ satisfies Poisson's Equation:

$$ik_3\,E_{k_3z}(\omega)=4\pi\sum_j q n_0\int_{-\infty}^{\infty}du\;f_{k_3}(u,\omega) \tag{3.20}$$

which must be solved in combination with Eq.(3.19). Substituting Eq.(3.19) into Eq.(3.20), we obtain the Fourier-Laplace transform of the echo field

$$E_{k_3z}(\omega)=-\frac{B_\perp^e E_\perp^e/2}{\varepsilon_p(k_3,\omega)}\sum_j\left(\frac{q}{m}\right)\frac{\omega_p^2}{c}\int_{-\infty}^{\infty}du\int_{-\infty+i\sigma'}^{\infty+i\sigma'}\frac{d\omega'}{2\pi}$$

$$\frac{1}{i(\omega'+k_1u-\omega_c)}\cdot\frac{F_{0z}(u)}{(k_3u-\omega)^2}\cdot\frac{\left[-(\omega-\omega')^2+c^2k_2^2\right]e^{i(\omega-\omega')\tau}}{\varepsilon_r(k_2,\omega-\omega')}\,\frac{(-\omega'^2+c^2k_1^2)}{\varepsilon_l(-k_1,\omega')}, \tag{3.21}$$

knowing $E_{k_3z}(\omega)$ and using the inverse Laplace transform, we can find $E_{k_3z}(t)$:

$$E_{k_3 z}(t) = \int_{-\infty+i\sigma}^{\infty+i\sigma} \frac{d\omega}{2\pi} e^{-i\omega t} E_{k_3 z}(\omega) \tag{3.22}$$

where integration is carried out along the straight line $\mathrm{Im}\,\omega = \sigma$ ($\sigma > \sigma' > 0$) lying to upside of all the singularities of the function $E_{k_3 z}(\omega)$. According to Gould et al,[9] we can carry out the ω and ω' integrations by the use of the Canchy residue theorem closing the contours on the side where the exponential in the numerator is vanishingly small. We carry out the ω' integration by closing the contour in the lower half ω' plane because of the exponential factor $e^{-i\omega'\tau}$ and take the residue at the pole $\omega' = -k_1 u + \omega_c$. The residues at the poles arising from the roots of the equation $\varepsilon_\ell(-k_1, \omega') = 0$ will be exponentially small for enough large τ (i.e. $|\gamma_{k_1}^{r}\tau| >> 1$) and we may neglect them.

Similarly, we can carry out the ω integration for a time $t > \tau$, closing the contour in the lower half plane by considering the exponential factor $e^{-i\omega(t-\tau)}$ and take the residue at the double pole $\omega = k_3 u$. The residues at the poles arising from the roots of the equations $\varepsilon_r(k_2, \omega + k_1 u - \omega_c) = 0$ and $\varepsilon_p(k_3, \omega) = 0$ will all be exponentially small for large $(t-\tau)$ (i.e. $|\gamma_{k_2}^{r}(t-\tau)| >> 1$, $|\gamma_{k_3}^{p}(t-\tau)| >> 1$) and we may also neglect them.

As the results, we obtain

$$E_{k_3 z}(t) \simeq \sum_j \frac{B_\perp^e E_\perp^e}{2}\left(\frac{e}{m}\right)\frac{\omega_p^2}{c}\, e^{-i\omega_c \tau}$$

$$\cdot \int_{-\infty}^{\infty} du\, \frac{F_{0z}(u)\left[c^2k_1^2-(k_1u-\omega_c)^2\right]\left[c^2k_2^2-(k_2u-\omega_c)^2\right]}{\varepsilon_l(-k_1,-k_1u+\omega_c)\,\varepsilon_r(k_2,k_2u-\omega_c)\,\varepsilon_p(k_3,k_3u)} \cdot e^{-ik_3u(t-\tau')} \cdot K, \tag{3.23}$$

where

$$K=\left\{(t-\tau)-\frac{2i(k_2u-\omega_c)}{\left[c^2k_2^2-(k_2u-\omega_c)^2\right]}-\left[\frac{i\,\frac{\partial\varepsilon_p(k_3,\omega)}{\partial\omega}}{\varepsilon_p(k_3,\omega)}+\frac{i\,\frac{\partial\varepsilon_r(k_2,\omega+k_1u-\omega_c)}{\partial\omega}}{\varepsilon_r(k_2,\omega+k_1u-\omega_c)}\right]_{\omega=k_3u}\right\} \tag{3.24}$$

$$\tau' = \tau\,\frac{k_2}{k_3} \tag{3.25}$$

This expression is similar to that obtained by Gould et al, except that $\varepsilon_p(-k_1, -k_1u)$ and $\varepsilon_p(k_2, k_2u)$ in their expression are replaced here by $\varepsilon_l(-k_1, -k_1u+\omega_c)$ and $\varepsilon_r(k_2, k_2u-\omega_c)$, respectively.

The integral of the right hand side of the Eq.(3.23) does not phase-mix to zero when $t \simeq \tau'$ and this results in the echo.

In deriving Eq.(3.23), we have assumed the conditions $|\gamma_{k_1}^r \tau| \gg 1$, $|\gamma_{k_2}^r(t-\tau)| \gg 1$ and $|\gamma_{k_3}^p(t-\tau)| \gg 1$. Let us examine these conditions again. The first condition, $|\gamma_{k_1}^r \tau| \gg 1$, is easily satisfied by taking the time τ

enough large. The second and the third conditions are satisfied by taking the ratio $k_1 / k_3 \simeq 1$ (i.e. $t-\tau \simeq \tau(k_3/k_1) \simeq \tau$) But it is difficult to choose this ratio k_1 / k_3 as 1, since the ratio ω_{pe}/ω_{ce} is larger than unity in a usual electron plasma and therefore k(cyclotron wave)/k(plasma wave), which depends on the thermal velocity of electron, is smaller than unity. In such cases Eq.(3.23) should be replaced by an expression which includes the contribution of the residue arising from the roots of the equation $\varepsilon_p(k_3, \omega) = 0$. But these are not essential for the echo formation. If we take the ratio $\omega_{pe}/\omega_{ce} \lesssim 1$, then it is possible to make the ratio k_1 / k_3 unity. At the time $t \simeq \tau'$ the largest of the four terms in the Eq.(3.24) is the first term. By neglecting the other three terms and setting $(t-\tau)$ equal to $\tau(k_1/k_3)$, we find

$$E_{k_3 z}(t) \simeq \frac{B_\perp^e E_\perp^e}{2}\left(\frac{e}{m}\right)\frac{\omega_{pe}^2}{c}\cdot\frac{k_1\tau}{k_3}\cdot e^{i\omega_{ce}\tau}$$

$$\cdot\int_{-\infty}^{\infty} du\, \frac{F_{0z}^e(u)\left[c^2k_1^2-(k_1u+\omega_{ce})^2\right]\left[c^2k_2^2-(k_2u+\omega_{ce})^2\right]e^{-ik_3u(t-\tau')}}{\varepsilon_l(-k_1,-k_1u-\omega_{ce})\,\varepsilon_r(k_2,k_2u+\omega_{ce})\,\varepsilon_p(k_3,k_3u)} \tag{3.26}$$

where $\omega_{ce} = eB_0/mc > 0, \quad \omega_{pe}^2 = 4\pi e^2 n_0/m$

and we have neglected the contribution of the ions, since we have restricted ourselves to electron cyclotron waves. When $t<\tau'$, considering the factor $e^{-ik_3u(t-\tau')}$,

we can evaluate the integral in Eq.(3.26) by closing the contour in the upper half u plane*. Using the relation Eqs. (2.11) and (2.12), the root of the equation $\varepsilon_\ell(-k_1, -k_1 u - \omega_{ce}) = 0$ with the least damping rate is

$$u = (\omega_{k_1}^r - \omega_{ce} - i\gamma_{k_1}^r)/k_1 \quad (\gamma_{k_1}^r < 0).$$

So we obtain contribution from this pole in the upper plane:

$$E_{k_3 z}(t) \simeq i\pi B_\perp^e E_\perp^e \frac{\omega_{pe}^2}{c}\cdot\left(\frac{e}{m}\right)\cdot\frac{k_1\tau}{k_3}\cdot e^{i\omega_{ce}\tau} \cdot J_1 \cdot \exp\left[i\frac{k_3}{k_1}(\omega_{ce} - \omega_{k_1}^r)t'\right]\cdot\exp\left[-\frac{k_3}{k_1}\gamma_{k_1}^r t'\right] \tag{3.27}$$

where

$$J_1 = \frac{F_{0z}^e\left(\frac{\omega_{k_1}^r - \omega_{ce}}{k_1}\right)\left[c^2k_1^2 - (\omega_{k_1}^r - i\gamma_{k_1}^r)^2\right]\left[c^2k_2^2 - \left\{\frac{k_2}{k_1}(\omega_{k_1}^r - i\gamma_{k_1}^r) - \frac{k_3}{k_1}\omega_{ce}\right\}^2\right]}{\varepsilon_r\left[k_2, \frac{k_2}{k_1}(\omega_{k_1}^r - i\gamma_{k_1}^r) - \frac{k_3}{k_1}\omega_{ce}\right]\varepsilon_p\left[k_3, \frac{k_3}{k_1}(\omega_{k_1}^r - i\gamma_{k_1}^r) - \frac{k_3}{k_1}\omega_{ce}\right]\frac{\partial}{\partial u}\varepsilon_\ell(-k_1, -k_1 u - \omega_{ce})\Big|_{u = \frac{\omega_{k_1}^r - \omega_{ce}}{k_1}}}, \tag{3.28}$$

and

$$t' \equiv t - \tau'$$

Similarly, when $t > \tau'$, closing the contour in the lower half u plane. We obtain the contribution from the poles of the functions $\varepsilon_r(k_2, k_2 u + \omega_{ce})^{-1}$ and $\varepsilon_p(k_3, k_3 u)^{-1}$:

---

* As pointed by Gould et al, the term $F_{0z}^e(u)$ ($F_{0z}^e \propto e^{-u^2}$) in Eq.(3.26) appears to make the integrand diverge for large imaginary u, but this factor is actually cancelled by the similar behavior of the function $\varepsilon_\ell(-k_1, -k_1 u - \omega_{ce})$.

$$E_{k_3 z}(t) \simeq -i\pi B_\perp^e E_\perp^e \cdot \frac{\omega_{pe}^2}{c} \cdot \left(\frac{e}{m}\right) \cdot \frac{k_1 \tau}{k_3} \cdot e^{i\omega_{ce}\tau}$$

$$\cdot \left\{ J_2 \exp\left[i\frac{k_3}{k_2}(\omega_{ce} - \omega_{k_2}^r)t'\right] \exp\left[\frac{k_3}{k_2}\gamma_{k_2}^r t'\right] + \sum_{\pm} J_3^{\pm} \exp\left[\mp i\omega_{k_3}^p t'\right] \exp\left[\gamma_{k_3}^p t'\right] \right\} \tag{3.29}$$

where

$$J_2 = \frac{F_{0z}^e\left(\frac{\omega_{k_2}^r - \omega_{ce}}{k_2}\right)\left[c^2k_1^2 - \left\{\frac{k_1}{k_2}(\omega_{k_2}^r + i\gamma_{k_2}^r) + \frac{k_3}{k_2}\omega_{ce}\right\}^2\right]\left[c^2k_2^2 - (\omega_{k_2}^r + i\gamma_{k_2}^r)^2\right]}{\varepsilon_\ell\left[-k_1, -\frac{k_1}{k_2}(\omega_{k_2}^r + i\gamma_{k_2}^r) - \frac{k_3}{k_2}\omega_{ce}\right]\varepsilon_p\left[k_3, \frac{k_3}{k_2}(\omega_{k_2}^r + i\gamma_{k_2}^r) - \frac{k_3}{k_2}\omega_{ce}\right]\frac{\partial}{\partial u}\varepsilon_r(k_2, k_2 u + \omega_{ce})\Big|_{u = \frac{\omega_{k_2}^r - \omega_{ce}}{k_2}}}, \tag{3.30}$$

$$J_3^{\pm} = \frac{F_{0z}^e\left(\frac{\pm\omega_{k_3}^p}{k_3}\right)\left[c^2k_1^2 - \left\{\frac{k_1}{k_3}(\pm\omega_{k_1}^p + i\gamma_{k_3}^p) + \omega_{ce}\right\}^2\right]\left[c^2k_2^2 - \left\{\frac{k_2}{k_3}(\pm\omega_{k_3}^p + i\gamma_{k_3}^p) + \omega_{ce}\right\}^2\right]}{\varepsilon_\ell\left[-k_1, -\frac{k_1}{k_3}(\pm\omega_{k_3}^p + i\gamma_{k_3}^p) - \omega_{ce}\right]\varepsilon_r\left[k_2, \frac{k_2}{k_3}(\pm\omega_{k_3}^p + i\gamma_{k_3}^p) + \omega_{ce}\right]\frac{\partial}{\partial u}\varepsilon_p(k_3, k_3 u)\Big|_{u = \pm\frac{\omega_{k_3}^p}{k_3}}} \tag{3.31}$$

and the sum is over the two Landau roots ($\pm\omega_{k_3}^p + i\gamma_{k_3}^p$) of $\varepsilon_p(k_3, \omega) = 0$. The echo builds up by the factor $\exp\left[-(k_3/k_1)\gamma_{k_1}^r(t - \tau')\right]$ and decays by the factors $\exp\left[(k_3/k_2)\gamma_{k_2}^r(t - \tau')\right]$ and $\exp\left[\gamma_{k_3}^p(t - \tau')\right]$. This result is similar to that of Gould et al. except the frequency shift.

§ 4. Numerical Calculation

To obtain the line shape of the echo, the integral in

Eq.(3.26) was evaluated numerically.

Introducing the dimensionless quantities

$$X = u/\sqrt{2}\, v_{Te}\ , \quad \eta = c/\sqrt{2}\, v_{Te}\ , \quad Q = \omega_{pe}/\omega_{ce}$$

$$K = \sqrt{2}\, k/k_D \qquad \text{and} \qquad T = \omega_{pe}(t-\tau'),$$

we rewrite Eq. (3.26) as

$$E_{k_3 z}(t) \simeq \frac{B_\perp^e E_\perp^e}{2\sqrt{2}} \cdot \left(\frac{e}{m}\right) \cdot \frac{k_D}{\eta} \cdot \frac{K_1}{K_3} \cdot (\omega_{pe}\tau) \cdot e^{i\frac{\omega_{pe}\tau}{Q}} \cdot G \qquad (4.1)$$

where

$$G = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dX \frac{e^{-X^2} \cdot \exp\left[-iK_3 X T\right]}{\left[1 - \frac{(X+\frac{1}{K_1 Q})}{K_1^2\{\eta^2 - (X+\frac{1}{K_1 Q})^2\}} \tilde{Z}(X)\right]\left[1 - \frac{(X+\frac{1}{K_2 Q})}{K_2^2\{\eta^2 - (X+\frac{1}{K_2 Q})^2\}} Z(X)\right]\left[1 - \frac{1}{K_3^2} Z'(X)\right]} \qquad (4.2)$$

The functions $Z(X)$ and $\tilde{Z}(X)$ are the plasma dispersion function defined by the Eqs.(2.20) and (2.21), respectively. Figure 2 is a typical example which shows the behavior of the integrand of G. The abscissa is the normalized velocity. Figure 2-(a) shows the behavior of the denominator of integrand vs velocity, where the solid line and the broken line show the real and imaginary part of the denominator, respectively. The behavior of the integrand vs velocity except the factor exp $(-iK_3XT)$ are shown in Fig. 2-(b).

As is evident from the figure, the solid line (real part) has humps. In this example there are three humps. These three humps are associated with the roots of the dispersion relation:

$$1 - \frac{(X + \frac{1}{K_1 Q})}{K_1^2\{\eta^2 - (X + \frac{1}{K_1 Q})^2\}} \tilde{Z}(X) = 0 \tag{4.3}$$

and

$$1 - \frac{1}{K_3^2} Z'(X) = 0 \tag{4.4}$$

The least damped roots of these equations are

$$X = -\left(1 - \frac{\omega_{k_1}^r}{\omega_{ce}} + i\frac{\gamma_{k_1}^r}{\omega_{ce}}\right)\Big/K_1 Q \quad \text{and} \quad X = \left(\pm\frac{\omega_{k_3}^p}{\omega_{pe}} + i\frac{\gamma_{k_3}^p}{\omega_{pe}}\right)\Big/K_3,$$

respectively. As shown by arrows the positions of the humps are nearly equal to the real parts of these roots. The factor exp $(-iK_3XT)$ raise the phase mixing. These facts are seen in Fig. 2-(c), (d) and (e). These figures show the phase mixing processes of the integrand clearly. The arrows show the periods of oscillation $(2\pi/|K_3T|)$. It is clearly seen from these figures that the line shape of an echo depends deeply on the shape of Fig. 2-(b). Summing up them, we obtain the integral G. This results in the echo. Fig. 4-(a) shows the echo for the same parameters as the example in Fig. 2 and its exponential build-up and decay are shown in Fig. 3.

The straight lines show the build-up by the factor exp $\left[-(K_3/K_1)\cdot(\gamma_{k_1}^{\gamma}/\omega_{pe})\cdot T\right]$ and decay by the factor exp $\left[(\gamma_{k_3}^{P}/\omega_{pe})\cdot T\right]$ due to the least damped poles. The numerical values of these factor are obtained by using the values in Fig. 1. Both agree well except near the point $T \simeq 0$. In the case of Fig. 4-(a) the value of K_2 is so large that the wave excited by the second pulse damps in a very short time. So the hump associated with the wave number K_2 almost can not be seen on the curve in Fig. 2-(b) and

$$1 - \frac{\left(X + \frac{1}{K_2 Q}\right)}{K_2^2\left\{\eta^2 - \left(X + \frac{1}{K_2 Q}\right)^2\right\}} Z(X) \simeq 1 \quad .$$

As shown in our previous paper[6], the second pulse is important for the appearance of the echo but the wave excited by the pulse is not so important. The shape and intensity of the echo depend on this wave.

The shapes of echoes are shown for various parameter in Fig. 4-(b), (c), (d) and (e). Figures 4-(b) and (c) are the examples for the same parameters except the value of η. The behaviors of the echoes for $T > 0$ are the same with the factor $\exp\left[-i(\omega_{k_3}^{P}/\omega_{pe})T\right]\cdot\exp\left[(\gamma_{k_3}^{P}/\omega_{pe})T\right]$ ($\simeq \exp\left[-(0.3 + i\ 1.6)T\right]$). For $T < 0$ both show the different behaviors due to the different value of η. Using the value in Fig. 1, these echoes build-up by the factors $e^{0.51T}$ and $e^{0.054T}$, and oscillate with the periods

6.9 and 3.4, respectively. Figure 4-(d) shows the line shape of the echo with the same wave number K_3 as the echo shown in Fig. 4-(a). In this case the waves with wave number K_1 and K_2 both damp away in a very short time. So the line shape for $T < 0$ is different from that in Fig. 4-(a), but the same form for $T > 0$. Finally, the example for small value of K_3 is shown in Fig. 4-(e). The period of oscillation is very long. But in this case the intensity of the echo is reduced by about one-hundredth as compared with that of above examples.

§ 5. Discussion and Conclusions

In §3, we have considered the excitation by the right-hand polarized wave pulse. In a similar way, it is also possible to get a longitudinal plasma wave echo by means of two left-hand polarized wave pulses. In this case the source term for echo is the second term in Eq.(3.18). The combination of the right and left-hand polarized wave pulses does not make the echo with wave number $k_3 = |k_2| - |k_1|$. There is no temporal plasma wave echo associated with the wave number $k_3 = |k_2| + |k_1|$, since in this case the echo time $\tau' = \tau k_2 / k_3$ is smaller than τ.

So far we have only discussed a longitudinal plasma wave echo due to two cyclotron waves. A cyclotron wave echo is also possible. For example, if a cyclotron wave is excited

in a plasma and damps away, and a second plasma wave is excited, a cyclotron wave echo can be shown to appear at a later time[10].

The present work is briefly summarized as follows. We have derived Eq.(2.16) as the form of the time asymptotic behavior of the perturbed distribution function (i.e., memory) for the waves propagating along the external magnetic field, and obtained the general expression of charge sourses for the longitudinal plasma wave echo. As the example, we studied a plasma wave echo excited by two cyclotron waves analytically and numerically. The line shapes of temporal echoes, together with the phase mixing processes, were illustrated. It was shown that the echo appears at the same time as in the case of the excitation by two plasma waves. It was also shown that in the present case the behavior of the echo depends on the factor $\exp\left[i(k_3 / k_1)(\omega_{ce} - \omega_{k_1}^{r})(t - \tau') \right] \cdot \exp\left[-(k_3 / k_1) \cdot \gamma_{k_1}^{r} (t - \tau') \right]$ for $t < \tau'$ and mostly on the factor $\exp\left[\mp i \omega_{k_3}^{p} (t - \tau') \right] \cdot \exp\left[\gamma_{k_3}^{p} (t - \tau') \right]$ for $t > \tau'$, i.e. the frequency is shifted by a cyclotron frequency.

Observation of these echoes is quite interesting, since they are related to the coupling between transverse and longitudinal waves.

Acknowledgements

The author would like acknowledge the continual guidance and encouragement of Dr. A. Hasegawa of Bell Telephone Laboratories. The author wishes to thank Dr. K. Nishikawa of Kyoto University for his stimulating discussions and Dr. Y. Midzuno and Dr. T. Watanabe of Nagoya University for helpful suggestions and a critical reading of the manuscript.

References

1) R. W. Gould, T. M. O'Neil, and J. H. Malmberg: Phys. Rev. Letters 19 (1967) 219.

2) J. H. Malmberg, C. B. Wharton, R. W. Gould, and T. M. O'Neil: Phys. Rev. Letters 20 (1968) 95.

3) H. Ikezi and N. Takahashi: Phys. Rev. Letters 20 (1968) 140.

4) D. R. Baker, N. R. Ahern, and A. Y. Wong: Phys. Rev. Letters 20 (1968) 318.

5) H. Ikezi, N. Takahashi, and K. Nishikawa: Phys. Fluids 12 (1969) 853.

6) T. Kamimura and A. Hasegawa: Phys. Fluids 12 (1969) 1480.

7) I. B. Bernstein: Phys. Rev. 109 (1958) 10.

8) L. Landau: J. Phys. (USSR) 10 (1946) 45.

9) T. M. O'Neil, and R. W. Gould: Phys. Fluids 11 (1968) 134.

10) B. D. Fried, and Craig Olson: Phys. Rev. 180 (1969) 241.

Figure Captions

Fig. 1. Real (solid line) and imaginary parts (line) of the frequency ω / ω_{ce} vs real wave number $k c / \omega_{ce}$ for the numerical solutions of Eq.(2.22) for the electron cyclotron wave:

(a) $c / \sqrt{2}\, v_{Te} = 125$; (b) $c / \sqrt{2}\, v_{Te} = 250$;

(c) $c / \sqrt{2}\, v_{Te} = 500$. The frequencies for the cold plasma line) are also shown.

Fig. 2. The behaviors of the integrand of G vs X with parameters $K_1 = 0.01$, $K_2 = 0.91$, $Q = 16$ and $\eta = 250$. The abscissa is the normalized velocity. The scale of the ordinate is normalized by the maximum value. Solid lines are real parts and imaginary parts. (a) the behavior of the denominator of the integrand vs X; (b) the integrand of G vs X when $T = 0$; (c) when $T = -8.5$; (d) $T = 3.5$; (e) $T = 15.5$.

Fig. 3. The exponential build-up and decay of the echo line shape: $K_1 = 0.01$, $K_2 = 0.91$, $Q = 16$ and $\eta = 250$. Straight lines show the build-up and decay due to the least damped poles.

Fig. 4. The line shapes of the temporal echoes;

(a) $K_1 = 0.01$, $K_2 = 0.91$, $Q = 16$ and $\eta = 250$;

(b) $K_1 = 0.02$, $K_2 = 0.92$, $Q = 4$ and $\eta = 250$;

(c) $K_1 = 0.02$, $K_2 = 0.92$, $Q = 4$ and $\eta = 125$;

(d) $K_1 = 0.2$, $K_2 = 1.1$, $Q = 16$ and $\eta = 250$;

(e) $K_1 = 0.008$, $K_2 = 0.1008$, $Q = 20$ and $\eta = 250$.

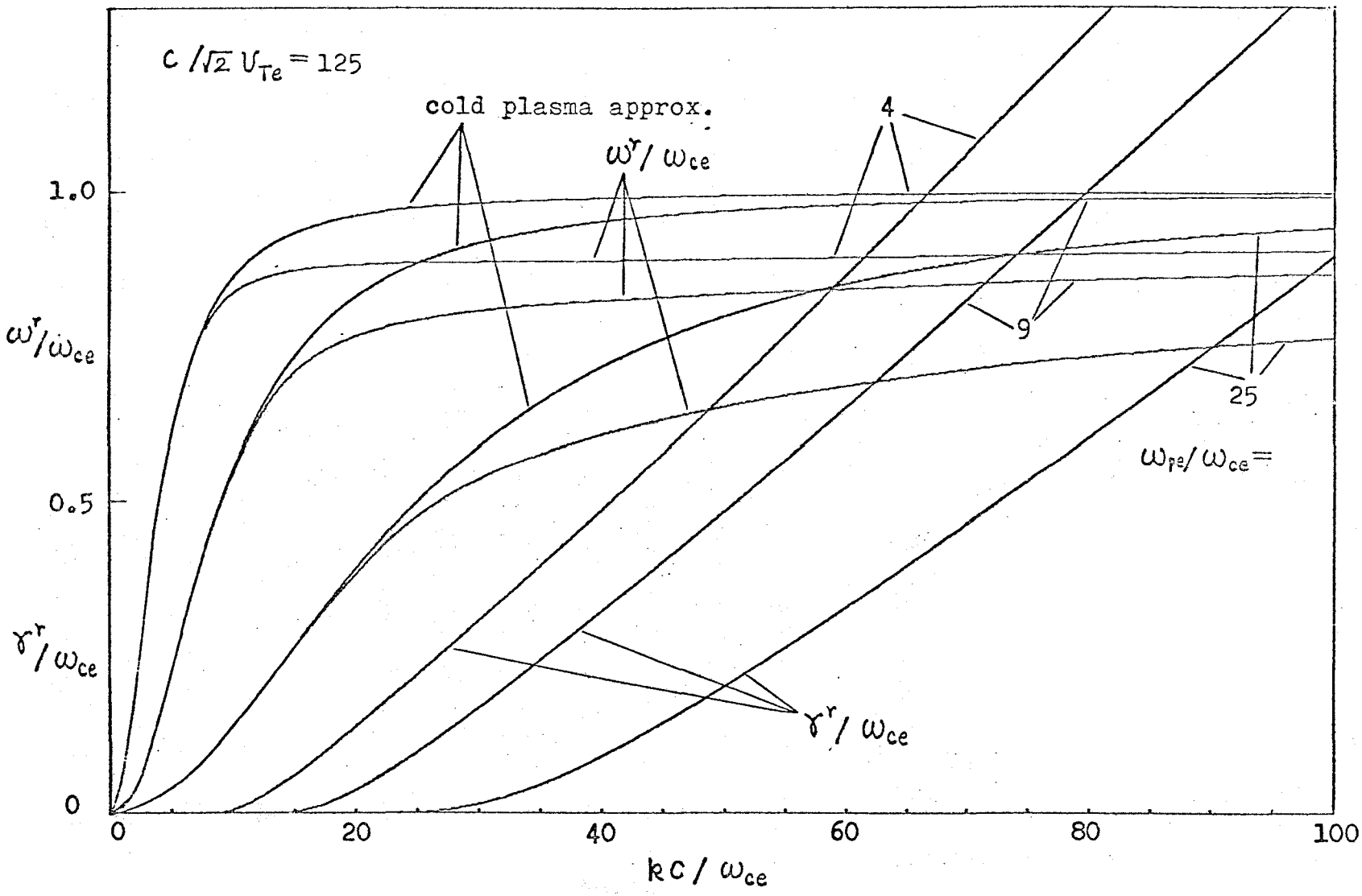

$c/\sqrt{2}\,v_{Te} = 125$
cold plasma approx.
ω^r/ω_{ce}
4
9
25
$\omega_{pe}/\omega_{ce} =$
γ^r/ω_{ce}
1.0
0.5
0
0
20
40
60
80
100
kc/ω_{ce}

Fig. 1-(a)

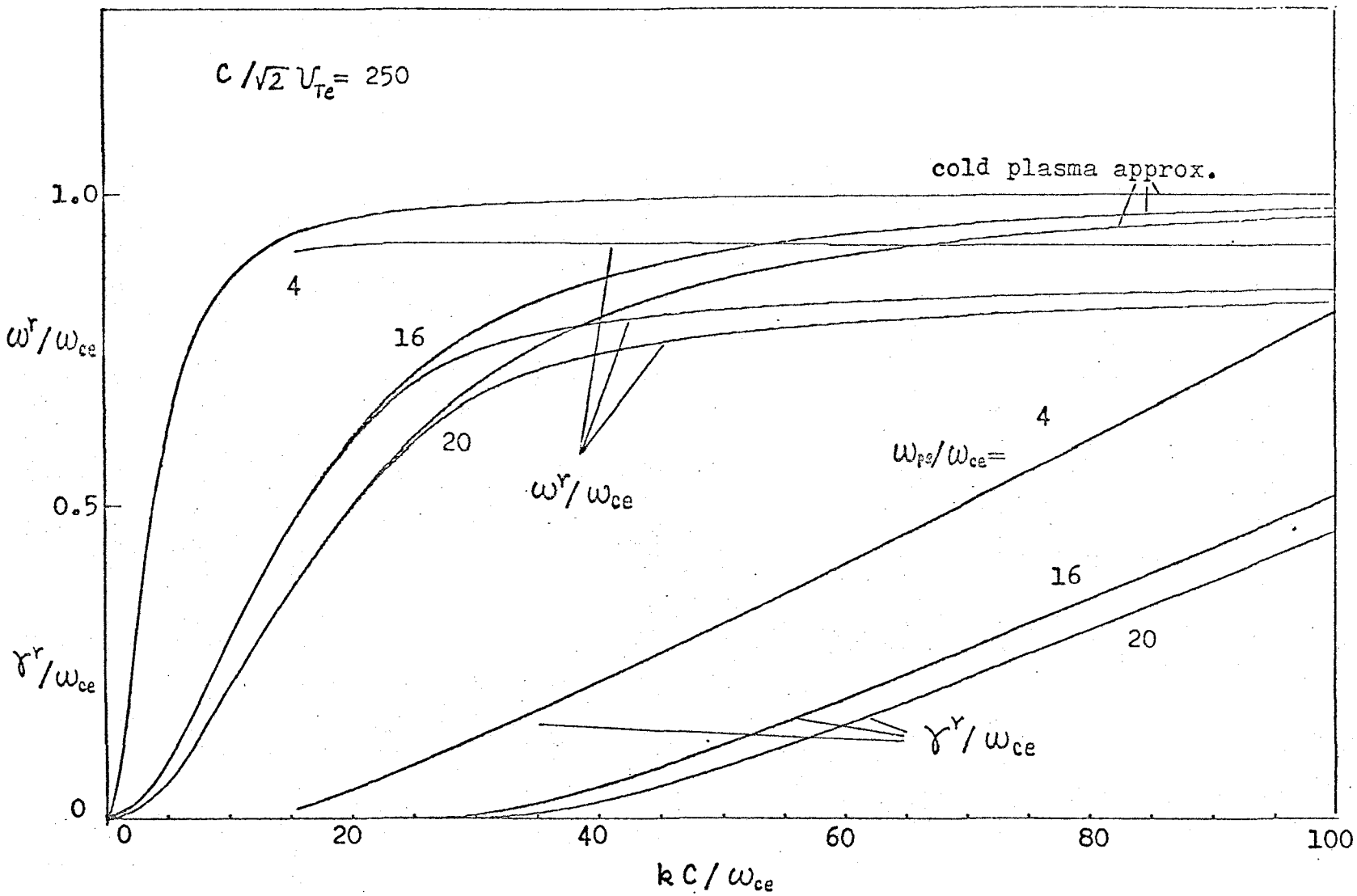

C /√2 V_Te = 250
cold plasma approx.
1.0
0.5
0
ω^r/ω_ce
γ^r/ω_ce
4
16
20
ω^r/ω_ce
ω_pe/ω_ce =
4
16
20
γ^r/ω_ce
0
20
40
60
80
100
kC/ω_ce

Fig. 1-(b)

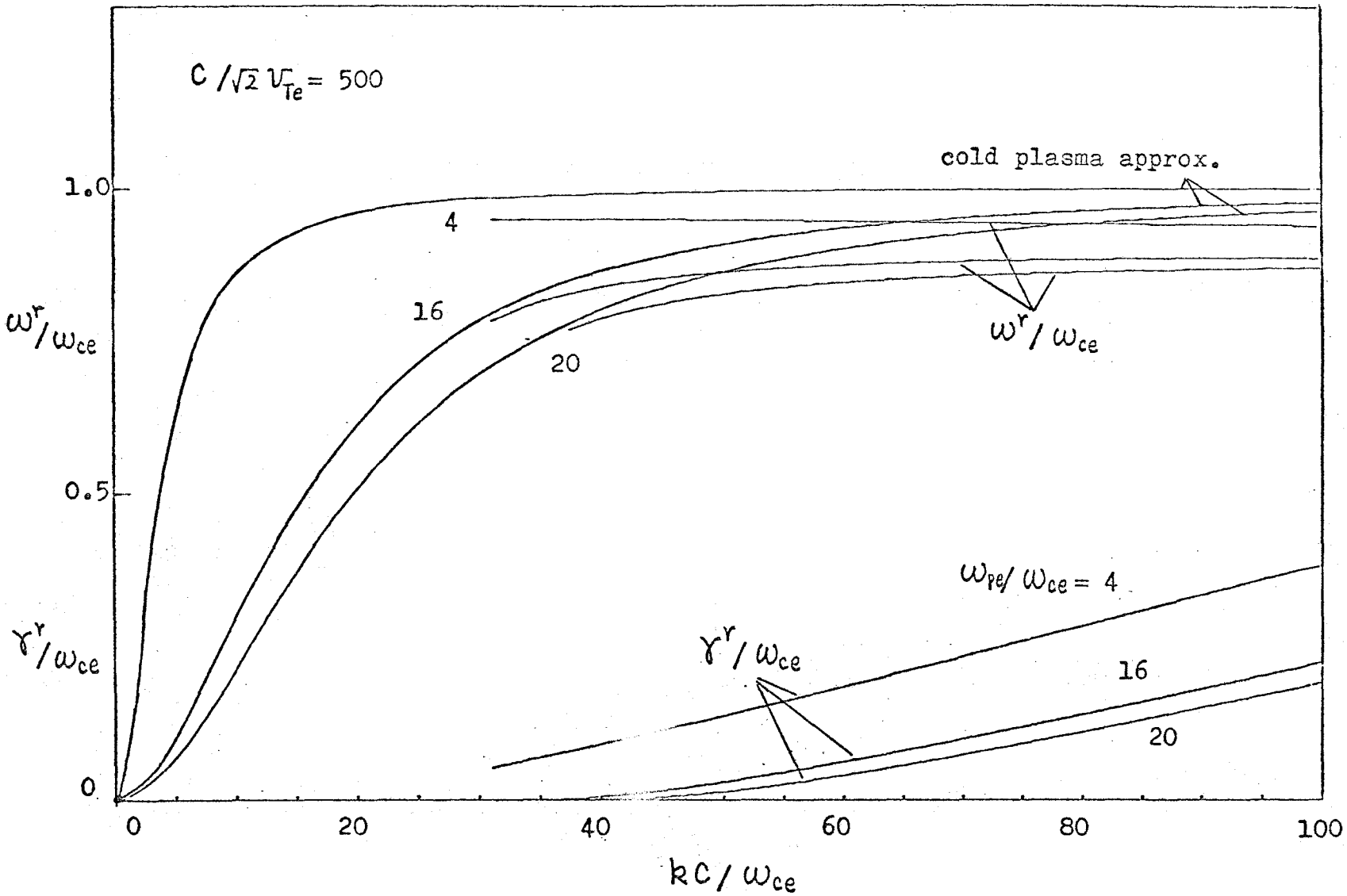

C /√2 V_Te = 500
cold plasma approx.
1.0
0.5
0
4
16
20
ω^r/ω_ce
ω^r/ ω_ce
ω_pe/ ω_ce = 4
γ^r/ω_ce
γ^r/ ω_ce
16
20
0
20
40
60
80
100
kC/ ω_ce

Fig. 1-(c)

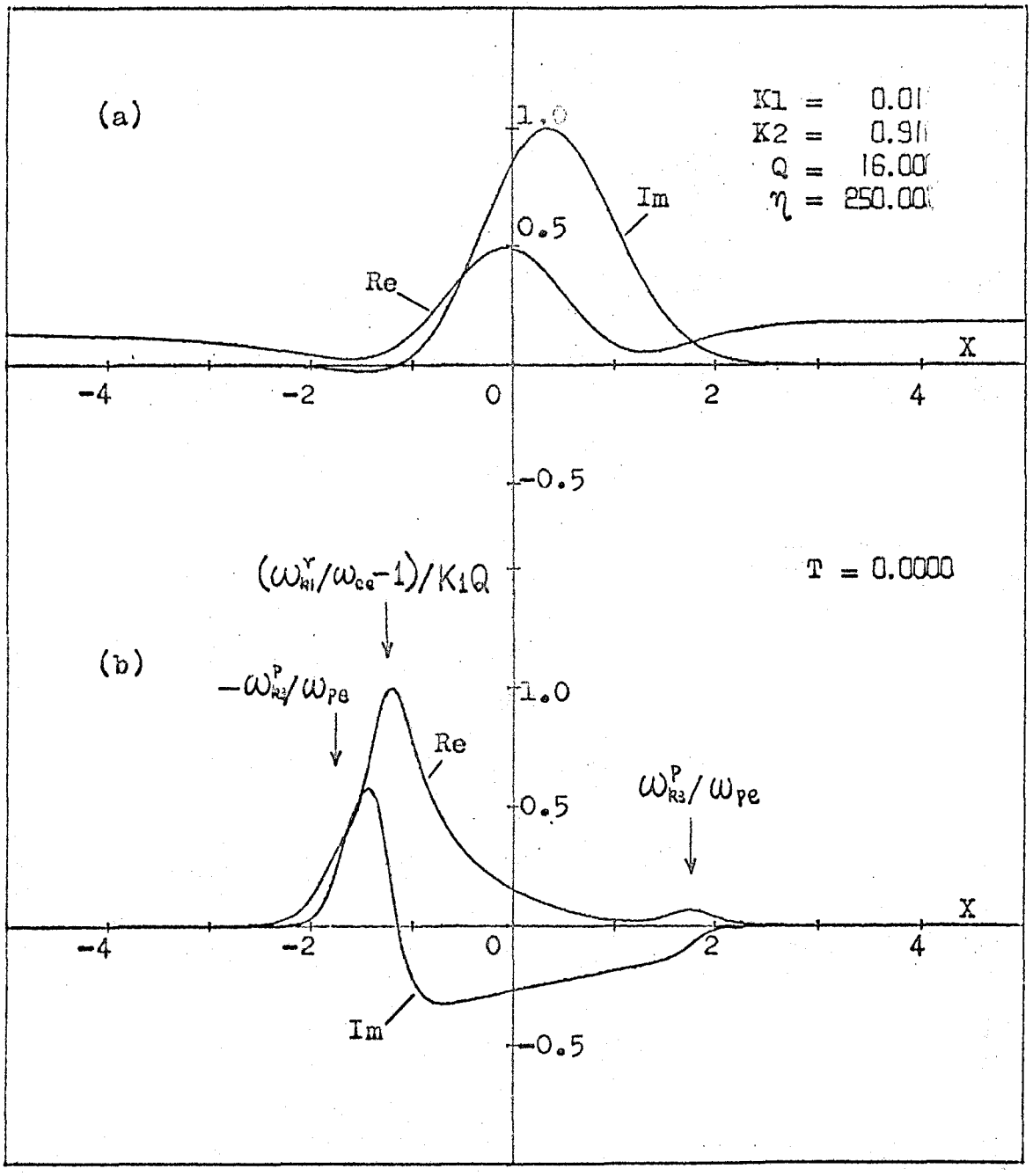

(a)
K1 = 0.01
K2 = 0.91
Q = 16.00
η = 250.00
1.0
0.5
Im
Re
X
-4
-2
0
2
4
-0.5
(b)
T = 0.0000
$(\omega^{r}_{k1}/\omega_{ce}-1)/K_1Q$
$-\omega^{p}_{k2}/\omega_{pe}$
$\omega^{p}_{k3}/\omega_{pe}$
1.0
0.5
Re
Im
X
-4
-2
0
2
4
-0.5

Fig. 2

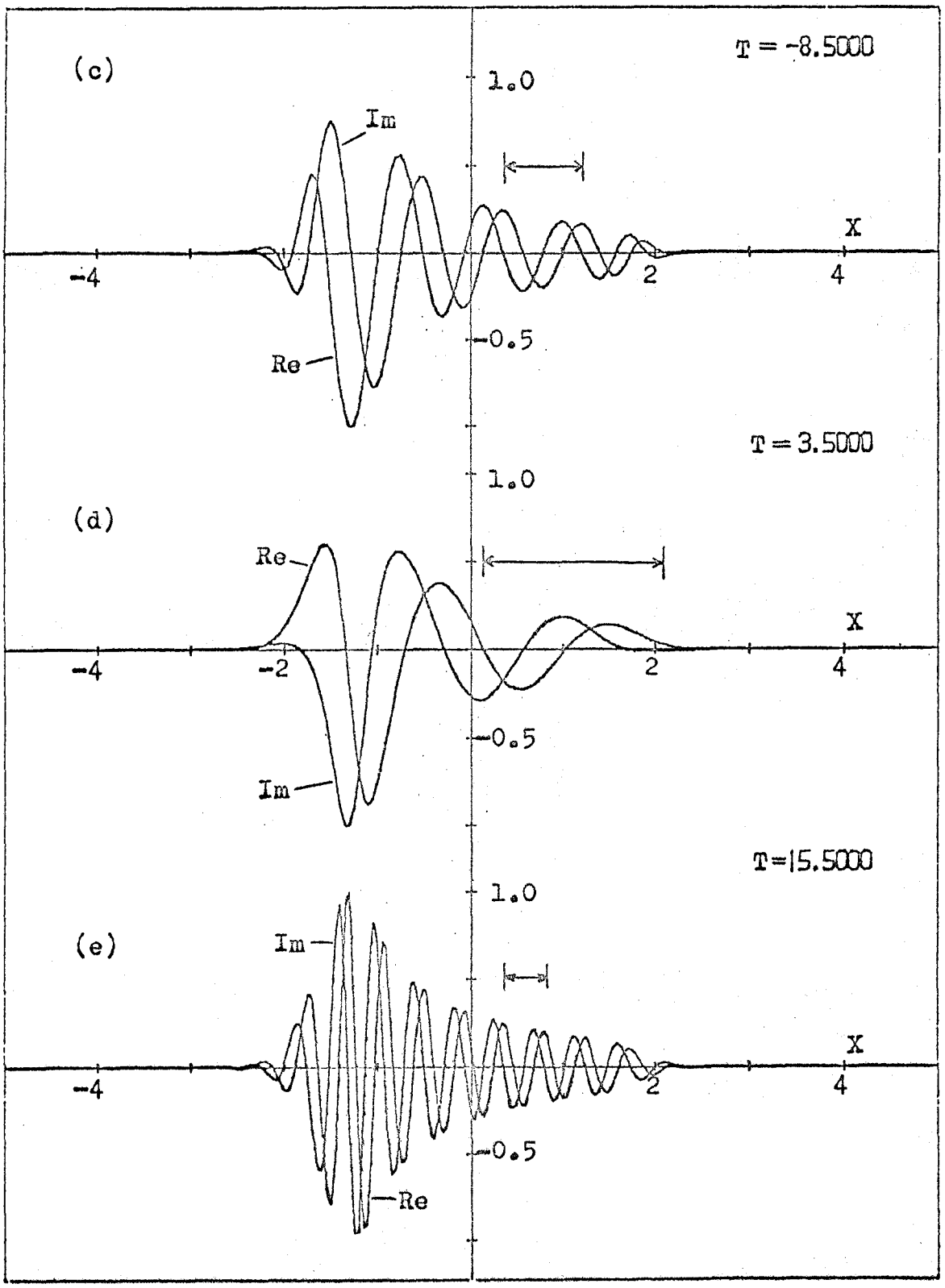

(c)
T = -8.5000
1.0
Im
X
-4
2
4
-0.5
Re
T = 3.5000
1.0
(d)
Re
X
-4
-2
2
4
-0.5
Im
T=15.5000
1.0
(e)
Im
X
-4
2
4
-0.5
Re

Fig. .2

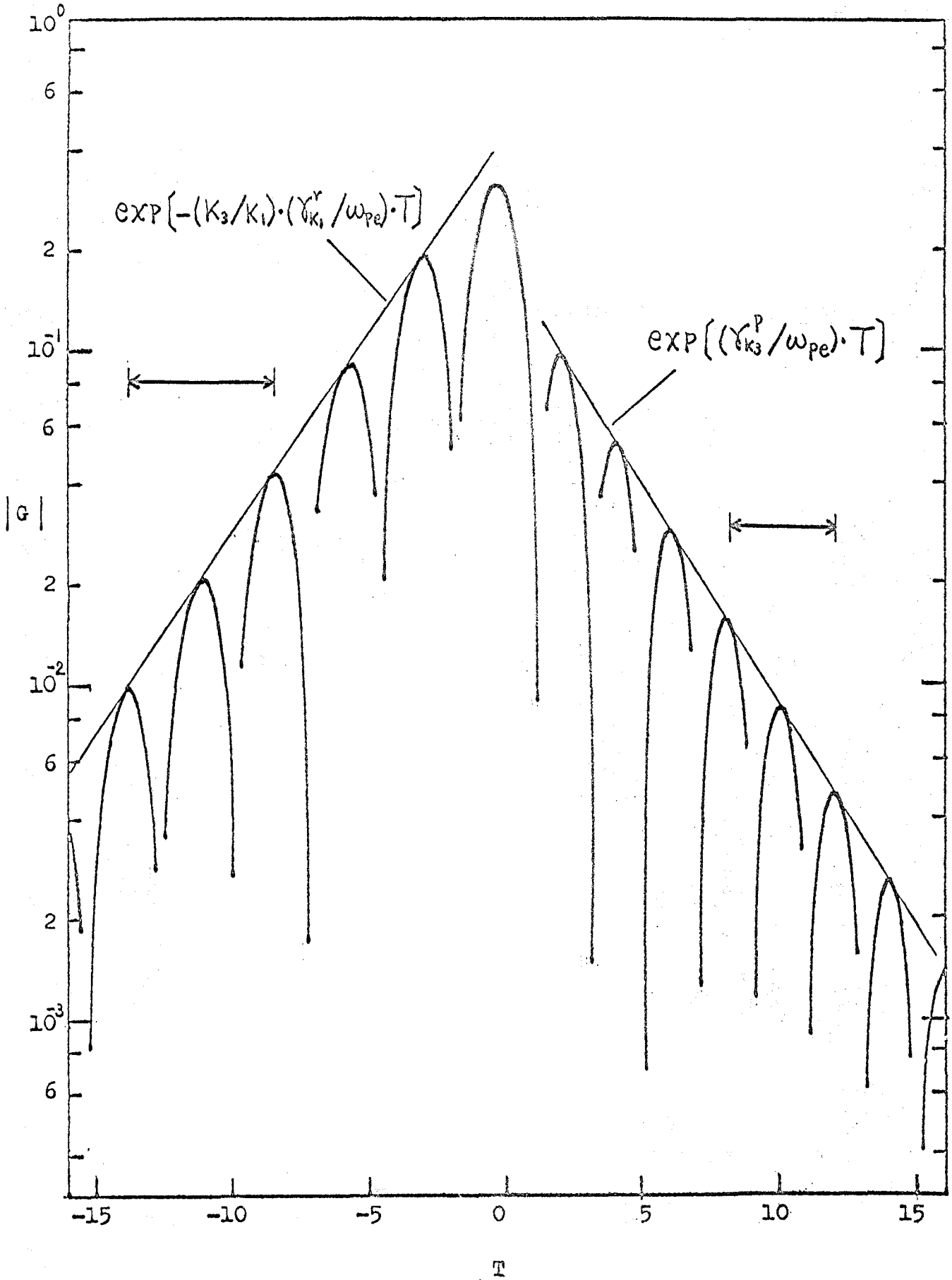

10^0
6
2
10^{-1}
6
$|G|$
2
10^{-2}
6
2
10^{-3}
6
$\exp[-(K_3/K_1)\cdot(\gamma^r_{K_1}/\omega_{pe})\cdot T]$
$\exp[(\gamma^p_{K_3}/\omega_{pe})\cdot T]$
-15
-10
-5
0
5
10
15
T

Fig. 3

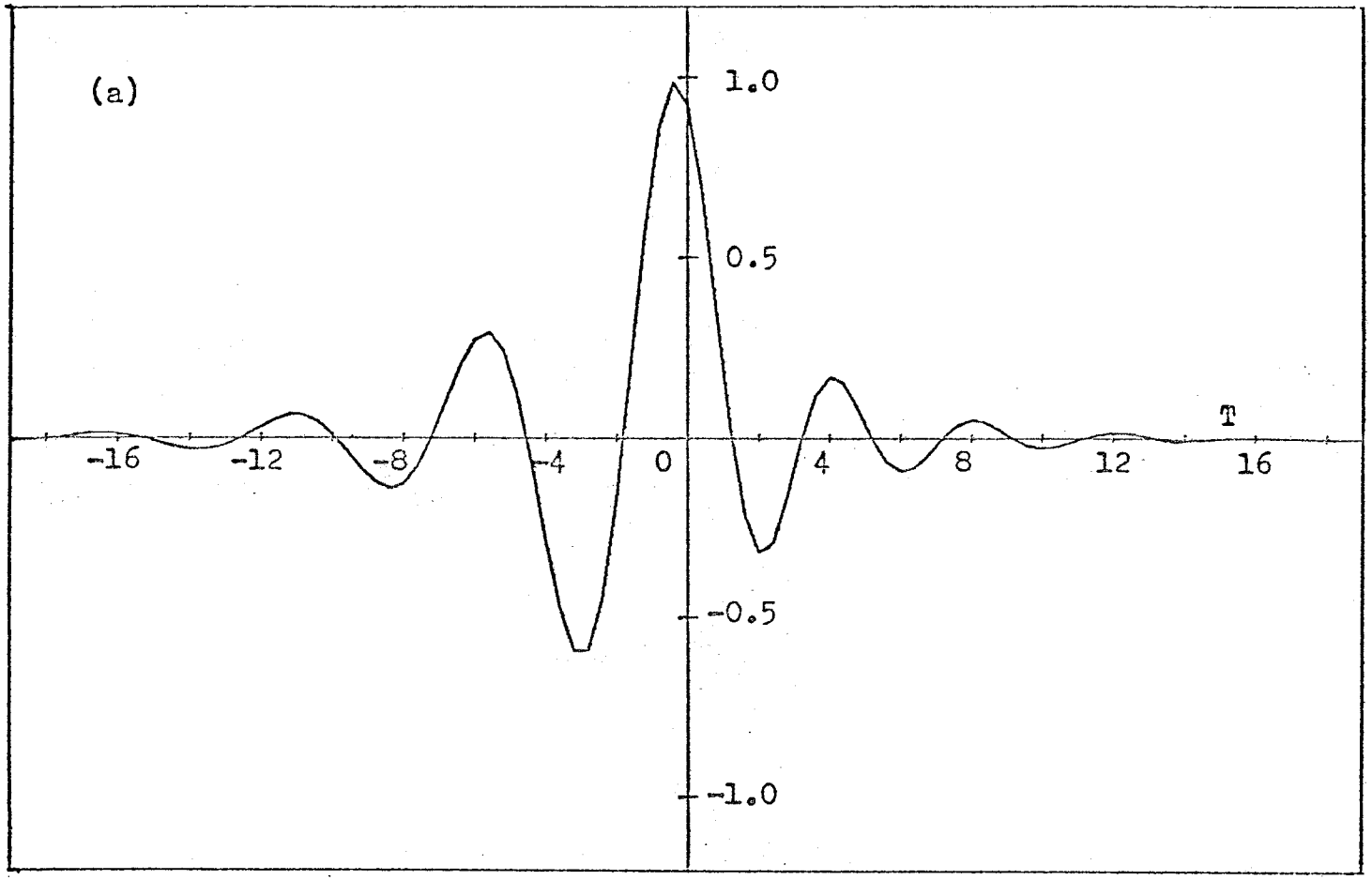


Fig. 4

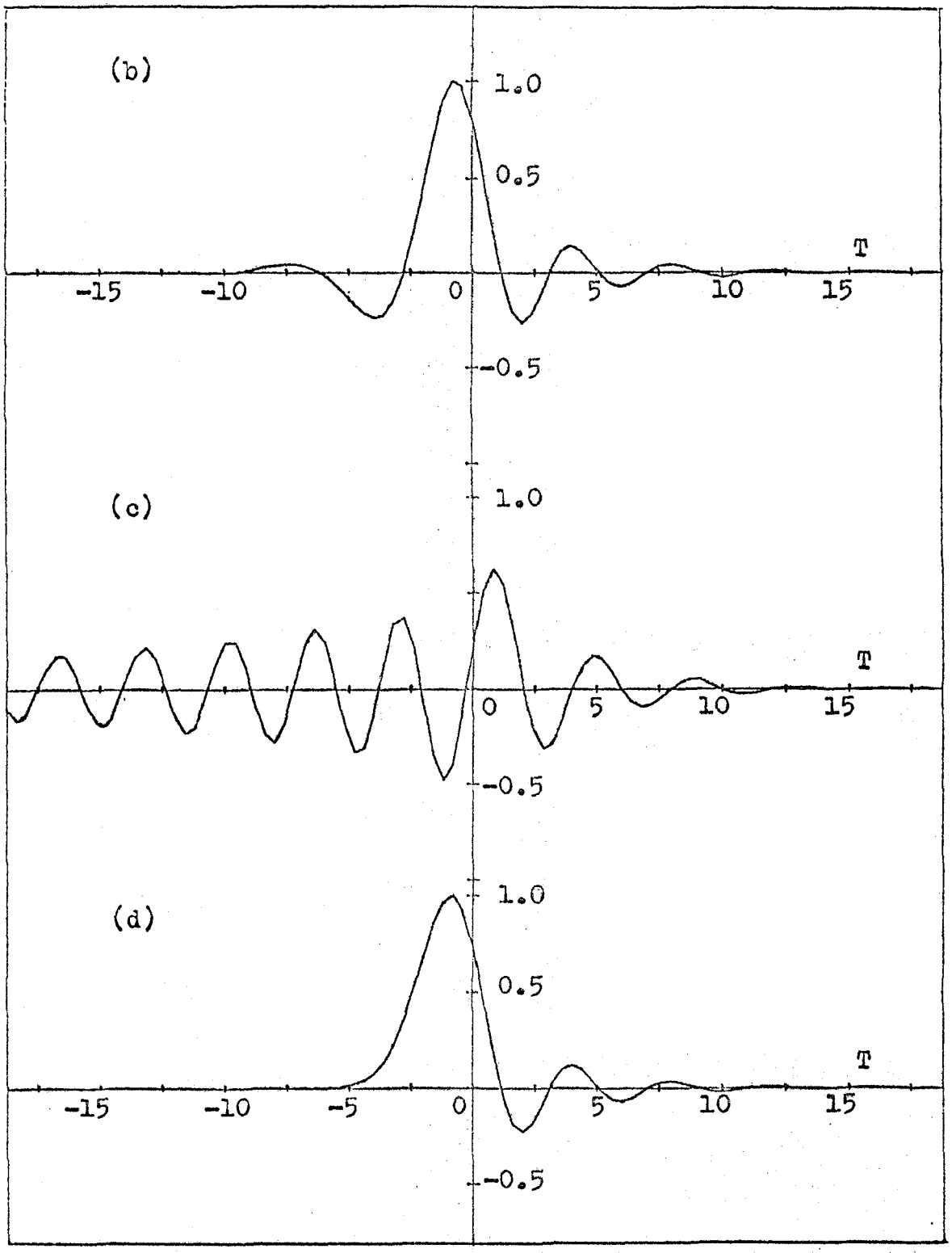


Fig. 4

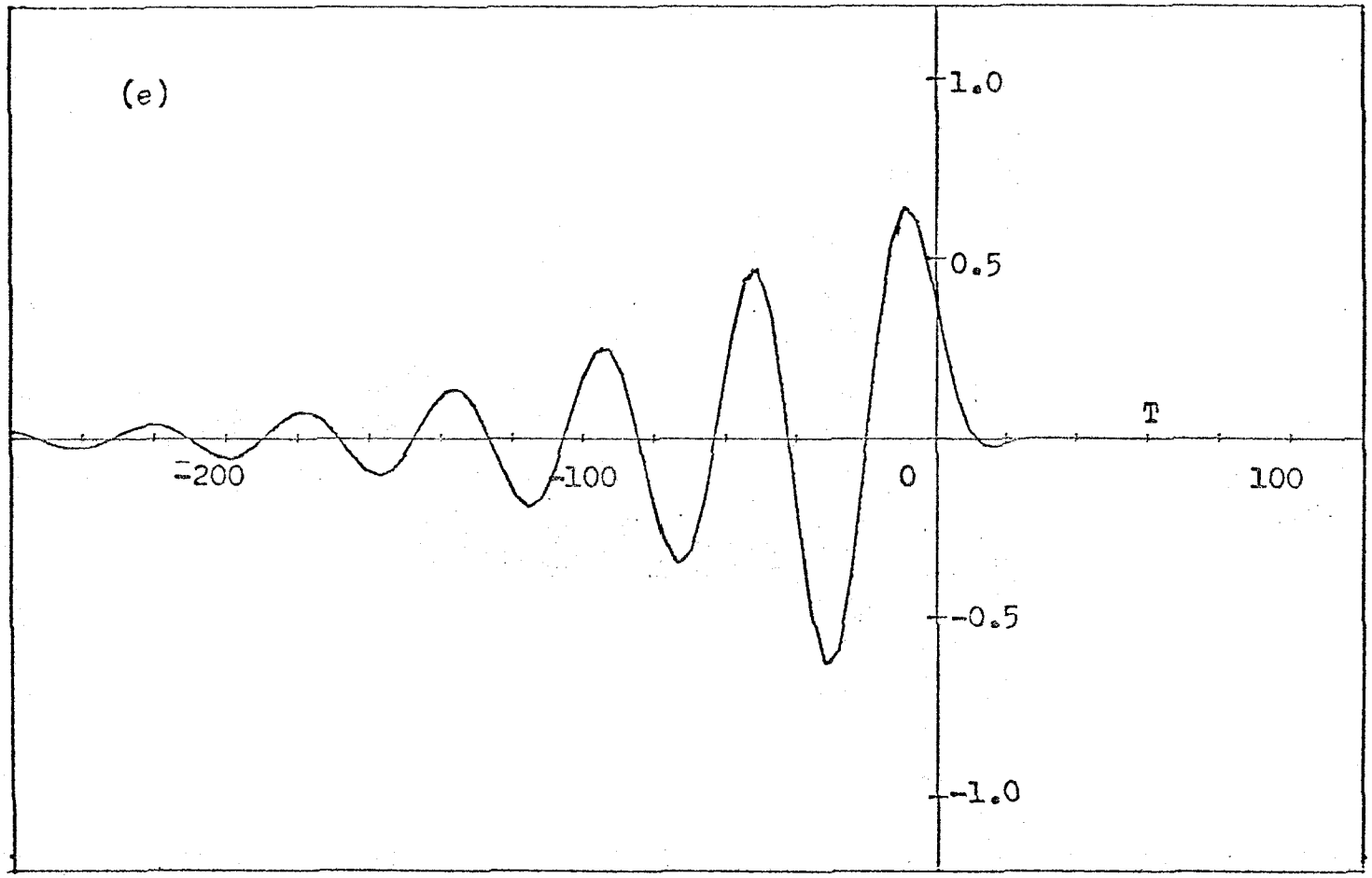


Fig. 4

プラズマ中のサイクロトロン波により励起されるエコー波に関する研究

上村 鉄雄

昭和45年1月

目　次

主要記号表 ---------- 1

内容概概 ---------- 3

第1章　緒論 ---------- 5
1·1　プラズマ中の波に関するエコー現象 ------ 5
1·2　本研究の目的，意義及びその結果 -------- 9

第2章　プラズマ波及びサイクロトロン波 -------- 11
2·1　緒言 ---------- 11
2·2　基礎方程式 ---------- 12
2·3　プラズマ波及びサイクロトロン波に対する線形化したVlasov方程式の解 ------- 16
2·4　プラズマ波及びサイクロトロン波の時間についての漸近的なふるまい ---------- 19
2·4·1　プラズマ波 ---------- 19
2·4·2　サイクロトロン波 ---------- 22
2·5　電子サイクロトロン波に対する分散関係式及びその数値計算 ---------- 23
2·6　結言 ---------- 24

第3章　二つのサイクロトロン波によって励起されるプラズマ波エコー ---------- 26
3·1　緒言 ---------- 26

3·2　外部磁場中のプラズマにおける縦波のエコー ---------- 26
3·2·1　パルス電磁界による波の励起 ---------- 26
3·2·2　エコー波の励起 ---------- 29
3·3　電子サイクロトロン波によるプラズマ波エコー ---------- 35
3·4　数値解析 ---------- 38
3·5　結　言 ---------- 42

第4章　Landau の理論の初期値から考察したサイクロトロン波によるプラズマ波エコー --- 43
4·1　緒　言 ---------- 43
4·2　Landau の理論に関する考察 ---------- 43
4·3　二つのサイクロトロン波によって励起されるエコー波と Landau の理論における分布関数の初期値の形との関係 ---------- 44
4·4　結　言 ---------- 46

第5章　サイクロトロン波とプラズマ波によって励起されるサイクロトロン波エコー ------ 47
5·1　緒　言 ---------- 47
5·2　外部磁場中のプラズマにおける横波のエコー ---------- 47
5·3　結　言 ---------- 52

第6章　結　論 ---------- 53

謝辞 ---------- 55

文献 ---------- 56

付録 ---------- 60

グラフ ---------- 66

主要記号表

c : 真空中の光速

i : 虚数単位

j : j 種粒子を表わす添字（イオン: $j \to i$, 電子: $j \to e$）

m_j : 質量（イオン: m_i, 電子: m_e）

q_j : 電荷（イオン: $q_i > 0$, 電子: $q_e = -e < 0$）

$\underset{\sim}{v}$: 速度ベクトル

$\underset{\sim}{r}$: 位置ベクトル

$\underset{\sim}{e}_x, \underset{\sim}{e}_y, \underset{\sim}{e}_z$: x, y 及び z 方向の単位ベクトル

$\underset{\sim}{e}_\pm$: 回転座標ベクトル $[= \frac{1}{\sqrt{2}}(\underset{\sim}{e}_x \pm i\,\underset{\sim}{e}_y)]$

(A_x, A_y, A_z) : ベクトル $\underset{\sim}{A}$ の x, y, z 方向成分

$A^\pm$: $\underset{\sim}{A}$ の回転座標表示成分 $[A^\pm = \frac{1}{\sqrt{2}}(A_x \mp i A_y)$,

$\underset{\sim}{A} = A^+ \underset{\sim}{e}_+ + A^- \underset{\sim}{e}_- + A_z \underset{\sim}{e}_z$]

$(v_\perp, \varphi, u)$: 速度ベクトル $\underset{\sim}{v}$ の円柱座標表示成分

t, τ : 時間

$\mathcal{F}, F, f$: 粒子の分布関数 $\mathcal{F}_j(\underset{\sim}{v}, \underset{\sim}{r}, t)$, $F(\underset{\sim}{v}, t)$, $f(\underset{\sim}{v}, \underset{\sim}{r}, t)$

$F_0(\underset{\sim}{v})$: 熱平衡分布関数 : $F_0(\underset{\sim}{v}) = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{3/2} \frac{1}{v_T^3} e^{-\frac{1}{2v_T^2}(u^2 + v_\perp^2)}$

$\underset{\sim}{E}(\underset{\sim}{r}, t)$: 電界ベクトル

$\underset{\sim}{B}(\underset{\sim}{r}, t)$: 磁場ベクトル

k : 波数 k_1, k_2, k_3

ω : 角周波数 $\omega_1, \omega_2, \omega_3$

ω_{pj} : プラズマ角周波数 $[= (4\pi q_j^2 n_0 / m_j)^{1/2}]$

（イオン: ω_{pi}, 電子: ω_{pe}）

ω_c : サイクロトロン角周波数 $[= q_j B_0 / m_j c]$

（イオン: $\omega_{ci} = q_i B_0 / m_i c > 0$, 電子: $\omega_{ce} = e B_0 / m_e c > 0$）

r, l, p : 右, 左廻りのサイクロトロン波及びプラズマ波に関

する量を表わす添字

$\varepsilon(k,\omega)$: 誘電率

$E_{\perp}^{e}, E_{\parallel}^{e}, B_{\perp}^{e}$: パルス電界及び磁界の強度

v_{Tj} : 粒子の熱速度の r.m.s.値

D : $(= kc/\omega_{ce})$

Ω : $(= \omega/\omega_{ce})$

V : $(= \sqrt{2}\, v_{Te}/c)$

Q : $(= \omega_{pe}/\omega_{ce})$

K : $(= \sqrt{2}\, k\, v_{Te}/\omega_{pe})$

η : $(= 1/V)$

X : $(= u/\sqrt{2}\, v_{Te})$

δ_{k,k_1} : クロネッカーデルタ

$\delta(t)$: デルタ関数

$Z(\zeta), \tilde{Z}(\zeta)$: Plasma dispersion function

内容概概

本論文は著者が大阪大学大学院基礎工学研究科（物理系専攻）において行った、プラズマ中のサイクロトロン波によって励起されるエコー波に関する研究をまとめたものである。尚数値計算は名古屋大学プラズマ研究所のOKITAC-5090D電子計算機を使用して行ったものである。本文は次の6章からなっている。

第1章は本論文に関する緒論であって、まずプラズマ中の縦波（プラズマ波）に関するエコー現象についてその概要及び物理的意味を説明し、さらにプラズマ波のエコー現象に関連するGould等の最初の研究及びその後の研究を概説し、次に著者の研究したサイクロトロン波（横波）に関するエコー現象について述べ、プラズマの中の波に関する研究を行う上で、このエコー現象に関する研究の重要性を論じ、本研究の目的と意義を明らかにし、その結果を概説したものである。

第2章では、第3章のサイクロトロン波に関するエコー現象の解析及びその物理的意味の解明に必要と思われるサイクロトロン波及びプラズマ波を線形理論の範囲で概説し、エコー波を形成する上で重要な分布関数の時間についての漸近的なふるまいを示している。さらに電子サイクロトロン波に対しては第3章におけるエコー波の波形の計算に必要である分散式の数値計算を示している。

第3章では、ある時間間隔をおいて外部からプラズマに加えた二つのパルス電磁界によってプラズマ中にサイクロトロン波を励起し、これらの波がサイクロトロン減衰を受けて減衰してしまった後にプ

ラズマ波エコー（縦波）が励起されることをパルスの振幅に関して2次のオーダーまで入れた非線形な Collisionless Boltzmann方程式を解くことにより理論的に示している。さらに電子サイクロトロン波に関するエコー波に対して詳細な数値解析を行い、phase mixing の過程及び代表的なエコー波の波形を示している。

オ4章では、オ3章で理論的に示されたエコー波の励起を、Landau のプラズマ波に対する線形理論における分布関数の初期値の形に着目した立場から考察し、エコー波現象に対する理論的解析の本質をよりいっそう明らかにしている。

オ5章では、オ1のパルス電界によりプラズマ中にサイクロトロン波を励起し、この波が充分にサイクロトロン減衰を受けた後のある時刻にオ2のパルス電界を加えてプラズマ波を励起すると、この波が Landau 減衰してしまった後に横波のエコー波が現われることを理論的に示している。

オ6章は本論文に関する結論で、本研究の成果を総括して述べ、さらに今後に残された問題について言及している。

以上の各章を構成する研究内容は The Physics of Fluids にすでに発表され、Journal of Physical Society of Japan に掲載予定のものである。

本論文では、全章を通じて C.G.S 単位系が用いられている。

第1章　緒論

1.1　プラズマ中の波に関するエコー現象

最近のプラズマ物理の分野において、大きな興味を集め、かつ粒子間衝突のないプラズマ中における波の減衰、すなわちLandau減衰の持つ特性と、プラズマを構成している各々の粒子の独立した粒子としてのふるまいを特徴的にとらえた現象にプラズマ波エコー現象がある。

このプラズマ波エコー現象は最初1967年にR.W.Gould等によって理論的に導かれ[1][2]、その後実験的に検証され理論とのみごとな一致を見た。彼等は最初時間エコーについて議論を行った。すなわち、衝突のないプラズマ中に波数k_1を持ったある一つの縦波が励起されたとすると、この波はある時間後にはLandau減衰を受けて消えてしまう。しかしこの波が減衰してしまった後のある時刻$t=\tau$に波数k_2（$k_2>k_1$）を持った縦波を再び励起してやると、この波も同じくLandau減衰を受けて消えてしまうが、$\tau'=\tau k_2/(k_2-k_1)>\tau$という時間のあたりで波数（$k_2-k_1$）を持つ縦波が現われる。時間的な遅れがあるということも考慮して、この現象はプラズマ中の縦波のエコー現象と呼ばれている。Gould等はこの現象の機構を次のように説明した。簡単に言えば、プラズマ中に波数（$-k_1$）の縦波が励起されるとこの波はある時間内にLandau減衰を受けて消えてしまうが、その後の時刻においてもプラズマ粒子の分布関数は

$$f_1^{(1)} \propto \exp[ik_1ut]$$

という形で振動しており、最初の波の励起を記憶している。但し、この分布関数を速度uに関して積分してみれば分かるように、この分

布関数は電界を作らない。さらに時間 τ 後に再び波数 k_2 を持つ縦波を励起すると、その波もやはり分布関数に

$$f_2^{(1)} \propto \exp[-ik_2u(t-\tau)]$$

なる摂動を残して Landau 減衰してしまうが、しかしこの第2の縦波の励起によって第1の波が残した分布関数 $f_1^{(1)}$ の振動もやはり励起された波に対して2次の量の変調を受けるであろう。すなわち

$$f_3^{(2)} \propto \exp[ik_2u\tau - i(k_2-k_1)ut]$$

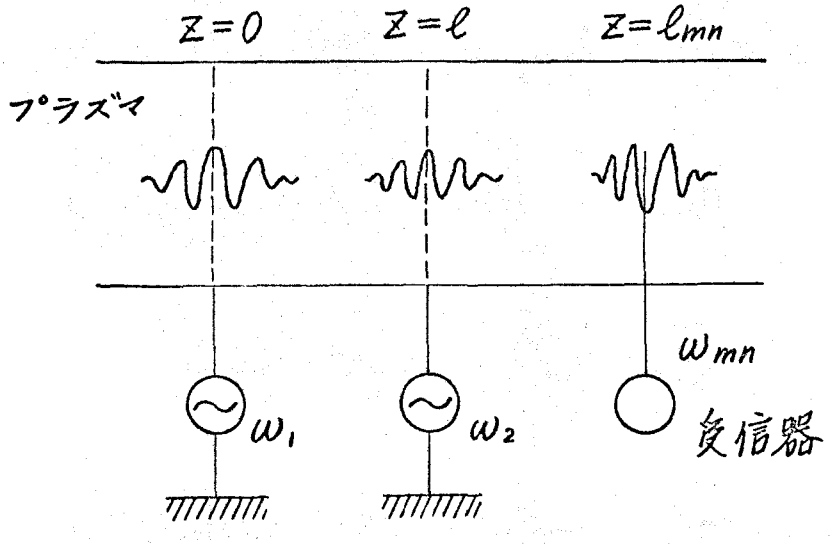
なる波数 $k_3(=k_2-k_1)$ の摂動が分布関数に残る。普通はこの $f_3^{(2)}$ を u について積分したものは一種の phase mixing を起して零になり電界は現われない。しかし $t=\tau'(\equiv \tau k_2/k_3)$ という時刻には $f_3^{(2)}$ の位相は零となり u によらなくなる。そのため u について積分した結果は零にはならない。このようにしてプラズマ中に波数 k_3 を持った2次の量の電界が現われる。もし時間 τ が波の Landau 減衰の周期にくらべて充分に長く、$k_1/k_3 \simeq 1$ くらいであれば第3の電界は最初の二つの波が充分に減衰してしまった後に現われることになる。すなわちこれはエコーと呼ばれるものである。

以上は時間エコーの立場からの説明であるが、空間的な Landau 減衰（すなわちプラズマ中のある場所で励起された波は伝播するに従って減衰する）現象を利用することにより、空間エコーも可能である。

実験をする立場からすれば空間エコーの方が観測し易く、又今までのエコー波の実験はすべて空間エコーについて行われた。しかし理論的には時間エコーの方が扱い易く、両者に本質的な違いがなく、ある量は簡単に交換可能なため多くの理論は時間エコーの立場から解析されている。本論文における理論解析も後者で行われている。

空間エコーの簡単な説明は上述の時間エコーに類似して行うことが出来る[3]。

衝突のない（粒子間の衝突周波数 ν_c が扱っている波の周波数に比べて充分に小さい）プラズマ中に図に示すように、l なる距離だけ離しておかれた二つのグリッドにそれぞれ ω_1, ω_2 なる角周波数



の振動電界を加える。これによってプラズマ中に分散関係を満たすような縦波が励起され、波はグリッドからプラズマ中を伝播して行くが、ある距離進めば Landau 減衰して消えてしまう。しかし ω_1 のグリッドから $l_{mn} = l n \omega_2 / \omega_{mn}$ だけ離れた付近に振動数が $\omega_{mn} = n\omega_2 - m\omega_1$ なる（m, n は正の整数で $\omega_{mn} > 0$）波動が現われる。この現象はグリッド間隔 l を ω_1 の波の Landau 減衰距離に比べて充分に長くとり、ω_1 と ω_2 の直接の混成波が生じないようにした状態でも現われる。この現象を空間的なプラズマ波エコー（Spatial Plasma Wave echo）と呼んでいる。一般にエコーはグリッドの両側に現われるが対称ではなく、周波数もエコーが観測される位置も、エコーの強度も $\omega_1 = \omega_2$ の場合を除いては異なる。このプラズマ波エコーを実験的に最初に観測したのは J. H. Malmberg 等[4],[5] である。彼等は $m=1$, $n=2$ の場合の電

子プラズマ波のエコーを観測した。少し遅れて沈地等[6]及び D. R. Baker 等[7]により $m=1, n=1$ の場合のイオン波エコーが観測された。その後沈地等[8]はこのエコーの波形について詳しい実験的研究を行い多くの点で理論とのみごとな一致を得た。又これらのエコーの実験の基礎にプラズマ波の Landau 減衰の実験的検証[9]-[12]があったことも重要である。その後このプラズマ波エコーに対するプラズマの粒子間衝突の効果について多くの研究[13]-[17]がなされ、プラズマ系を記述する Boltzmann 方程式の衝突項の形について詳しい研究にまでエコー現象が利用されている[18],[19]。又 M. Porkolab 等[20]により磁場のある場合 Bernstein モード（Quasi-electrostatic wave）を使用して cyclotron-harmonic Plasma Wave echo が観測され解析された。

以上は縦波に関するエコーであったが横波に関するエコーについては著者らがサイクロトロン波を使用して理論的研究[21],[22]を行い、Olson and Fried[23]も同時に互いに相補う解析を行った。その結果は横波と縦波との間の結合を明確にする上で非常に興味深いものであり、このエコーに対する実験が待望されている。

Gould 等のエコーの説明から分かるようにエコーの励起にはプラズマの波としての性質、すなわち粒子間相互作用の効果は重要ではない。R. W. Gould[24]や M. Porkolab[25]はこの粒子間相互作用を無視して独立粒子の作る高次のオーダーのエコーの解析を行った。

以上の説明のようにプラズマ中でのエコー現象はそれが Gould 等により理論的に予言されて以来、非常に短期間に横波に関する実験を除けば、非常に詳しく研究された訳である。そしてプラズマ中の波動現象の研究に大きな寄与をした。そして又このエコーの実験以

来プラズマの波動に関する実験は大きく飛躍したように思われる。

プラズマ中の波のエコー現象が大きな興味を持たれた理由はこの現象に対する実験が理論ときれいな一致を見せたからというだけでなく、以下の章で明らかにされるようにある意味ではプラズマ中のいろいろな現象の中で最も重要な現象であり、又長い間理論家の間で議論されてきたLandau減衰という現象の持つ物理的構造を特徴的に表わした現象であるからである。

1・2　本研究の目的，意義及びその結果

本節においては本研究が対象とする問題を明らかにすると共に、その意義について論じ、さらに本研究によって得られた結果について概説する。ここ数年の間のプラズマの波に関する種々の現象に対する理論、及び実験的研究は実験に対する測定装置・技術及び電子計算機の進歩発達と相俟って、その研究対象が主に非線形現象に移って来ている。その中でも重要なものとしてエコー現象や振幅振動現象[(26)-(28)]があるわけである。特にその中にあって縦波（プラズマ波及びイオン音波）に関するエコー現象は前節に於ても述べたように、プラズマ物理に於ける現象のうちでも最も重要なものの一つであるLandau減衰という現象を充分に理解するのに役立った。この意味では縦波に関するエコーは非線形効果をうまく利用して非線形効果ではなく、むしろ線形理論で解析された現象の持つ物理的意味を余すところなく浮き彫りにした現象であるということも出来る。これに対応して横波（サイクロトロン波）に関するエコー現象はやはりもう一つの重要な現象（線形現象）である波のサイクロトロン減衰のもつ物理的意味の本質を理解させ、又波に関する研究を発展させると思われる。　又2次のオーダーの横波の関する

エコーは必らず縦波との結合を伴っている。従って横波に関するエコー現象の研究は縦波と横波とのモード結合を研究する上で非常に有効な手段となり得る。こういった意味では横波に関するエコー現象は非線形現象的性格を縦波に関するエコー現象よりも強く持っていると言える。このように見ると横波に関するエコー波に対する研究は非線形現象を研究する上で非常に重要で、又最近のプラズマ物理の分野における"実験と理論の定量的な一致"の傾向をさらに推し進めることにもなると思われる。著者が本研究を始めた動機もここにあり、プラズマの波に関する研究分野に多少とも貢献しようとするのが研究の目的である。

本研究は以上に述べたような重要な意味のある横波に関するエコー現象を理論的に解析し、その現象の持つ物理的な意味を明らかにしようとするものである。理論解析は無限の広がりを持った一様なプラズマを対象とし、そこに一様な外部磁場がかけられていて粒子間衝突は扱っている現象の振動数に比べて充分に小さいとして無視し、Vlasov 方程式を基礎式として行なわれた。その結果、横波（サイクロトロン波）と横波の結合から縦波のエコー波が励起され、横波と縦波との結合によって横波のエコー波が励起されることが定量的に導かれ、近い将来必らず行われるであろう横波のエコーに関する実験[29]に対してかなりはっきりした予測を与え得る結果が得られた。

以上、横波（サイクロトロン波）によるエコー現象に関する研究の重要性を論じ本研究の対象とする問題の所在を明らかにした。

第2章　プラズマ波及びサイクロトロン波

2·1　緒言

プラズマ波及びサイクロトロン波は共にプラズマ粒子の特徴的な集団運動に起因する波であって、いわばプラズマ中の波を代表するものである。従ってこの両者の波の性質を充分に理解することはプラズマ中で起こる種々の現象を解明する上で欠くことの出来ない重要な問題である。

プラズマ波やサイクロトロン波については、線形領域においてはLandauの理論[30]をはじめとする種々の研究[31],[32]がなされ、理論的にも実験的にも充分に理解されているが、これらの波に関する線形理論解析が本論文においてプラズマ中の波のエコー現象を解析し、理解する上において必要欠くべからざるものであり、又エコー現象がこれらの波について線形理論で解析された現象、例えばLandau減衰やサイクロトロン減衰等の現象を浮き彫りにしていると言っても過言ではない現象であることを考え、特にここに一章をもうけ、プラズマ波及びサイクロトロン波についての線形理論解析を行うことにする。従ってここに述べる理論は後章の記述の理解に重点がおかれる。

2·2節では無限に広がった一様外部磁場中での無衝突プラズマ（Vlasov plasma）を記述するVlasov方程式から本章も含めて後章の解析に必要な基礎方程式を導出する。2·3節では前節の基礎方程式を使用し、プラズマ波及びサイクロトロン波に対する線形Vlasov方程式の解を求める。2·4節においては前節の解の漸近的なふるまいをプラズマ波及びサイクロトロン波に分けて解析する。特にこの項はエコー現象を解析する上で重要である。2·5節においては第3章の3·4節で示されるエコーの数値解析に必要な電子サイクロトロン波

に対する分散関係式についてその数値計算を示す。

2·2　基礎方程式

プラズマの理論的研究における一般的な研究方法は粒子の分布関数の変化を記述する kinetic equation に基づく方法である。

$\mathcal{F}_j(\underset{\sim}{v}, \underset{\sim}{r}, t)$ を j 種のプラズマ粒子の分布関数とすると $\mathcal{F}_j$ を支配する kinetic equation は以下のような一般形で書くことが出来る。

$$\left\{\frac{\partial}{\partial t}+\underset{\sim}{v}\cdot\frac{\partial}{\partial \underset{\sim}{r}}+\frac{q_j}{m_j}\left[\underset{\sim}{E}(\underset{\sim}{r},t)+\frac{1}{c}\underset{\sim}{v}\times\underset{\sim}{B}(\underset{\sim}{r},t)\right]\cdot\frac{\partial}{\partial \underset{\sim}{v}}\right\}\mathcal{F}_j(\underset{\sim}{v},\underset{\sim}{r},t)$$

$$=\left(\frac{\delta \mathcal{F}_j}{\delta t}\right)_c \qquad (2\cdot1)$$

ここで右辺の項は粒子間の直接の衝突の効果を表わす項で、この項は考えている現象の変化する時間的スケールが粒子間の衝突時間より短い場合には無視してもよい。一般にプラズマ中の波に関する非常に多くの問題が衝突を無視した近似で扱うことが出来る。以下の解析ではこの項を無視して零とする。左辺の $\underset{\sim}{E}(\underset{\sim}{r}, t)$ と $\underset{\sim}{B}(\underset{\sim}{r}, t)$ は外部電場及び外部磁場と粒子の作る自己無撞着な電場及び磁場に分けて書くと Maxwell 方程式により、

$$\underset{\sim}{E}(\underset{\sim}{r}, t) = \underset{\sim}{E}^{ext}(\underset{\sim}{r}, t) + \underset{\sim}{E}^{in}(\underset{\sim}{r}, t) \qquad (2\cdot2)$$

$$\underset{\sim}{B}(\underset{\sim}{r}, t) = \underset{\sim}{B}^{ext}(\underset{\sim}{r}, t) + \underset{\sim}{B}^{in}(\underset{\sim}{r}, t) \qquad (2\cdot3)$$

$$\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\underset{\sim}{B}^{in}(\underset{\sim}{r}, t) = -\frac{\partial}{\partial \underset{\sim}{r}}\times\underset{\sim}{E}^{in}(\underset{\sim}{r}, t) \qquad (2\cdot4)$$

$$\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\underset{\sim}{E}^{in}(\underset{\sim}{r}, t) = \frac{\partial}{\partial \underset{\sim}{r}}\times\underset{\sim}{B}^{in}(\underset{\sim}{r}, t) - \frac{4\pi}{c}\sum_j n_0 q_j\int d^3\underset{\sim}{v}\,\underset{\sim}{v}\,\mathcal{F}_j \qquad (2\cdot5)$$

と書ける。ここで $\sum_j$ は j 種の粒子に対して和をとる。

ここで分布関数 $\mathcal{F}_j(\underset{\sim}{v}, \underset{\sim}{r}, t)$ を空間的にも時間的にも一定な

部分とそうでない部分に分ける。

$$\mathcal{F}_j(\underset{\sim}{v}, \underset{\sim}{r}, t) = F_{j0}(\underset{\sim}{v}) + f_j(\underset{\sim}{v}, \underset{\sim}{r}, t) \qquad (2\cdot6)$$

さらに空間的に変化する量はある境界を考えてFourier級数に展開する。

$$\begin{aligned} f_j(\underset{\sim}{v}, \underset{\sim}{r}, t) &= \sum_{\underset{\sim}{k}} f_{j\underset{\sim}{k}}(\underset{\sim}{v}, t)\, e^{i\underset{\sim}{k}\cdot\underset{\sim}{r}} \\ \underset{\sim}{E}(\underset{\sim}{r}, t) &= \sum_{\underset{\sim}{k}} \underset{\sim}{E}_{\underset{\sim}{k}}(t)\, e^{i\underset{\sim}{k}\cdot\underset{\sim}{r}} \qquad (2\cdot7) \\ \underset{\sim}{B}(\underset{\sim}{r}, t) &= \sum_{\underset{\sim}{k}} \underset{\sim}{B}_{\underset{\sim}{k}}(t)\, e^{i\underset{\sim}{k}\cdot\underset{\sim}{r}} \end{aligned}$$

従って（2・1）式より空間的に一様な部分（$\underset{\sim}{k}=0$）に対しては、

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}F_j(\underset{\sim}{v}, t) = &-\frac{q_j}{m_j}\left[\underset{\sim}{E}_0(t) + \frac{1}{c}\underset{\sim}{v}\times\underset{\sim}{B}_0(t)\right]\cdot\frac{\partial}{\partial \underset{\sim}{v}}F_j(\underset{\sim}{v}, t) \\ &-\frac{q_j}{m_j}\sum_{\underset{\sim}{k}'\neq 0}{}'\left[\underset{\sim}{E}_{-\underset{\sim}{k}'}(t) + \frac{1}{c}\underset{\sim}{v}\times\underset{\sim}{B}_{-\underset{\sim}{k}'}(t)\right]\cdot\frac{\partial}{\partial \underset{\sim}{v}}f_{j\underset{\sim}{k}'}(\underset{\sim}{v}, t) \qquad (2\cdot8\cdot a) \end{aligned}$$

又、$\underset{\sim}{k}\neq 0$ 成分については次式が導かれる。

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}f_{j\underset{\sim}{k}}(\underset{\sim}{v}, t) + i\underset{\sim}{k}\cdot\underset{\sim}{v}f_{j\underset{\sim}{k}}(\underset{\sim}{v}, t) = &-\frac{q_j}{m_j}\left[\underset{\sim}{E}_{\underset{\sim}{k}}(t) + \frac{1}{c}\underset{\sim}{v}\times\underset{\sim}{B}_{\underset{\sim}{k}}(t)\right] \\ &\cdot\frac{\partial F_j(\underset{\sim}{v}, t)}{\partial \underset{\sim}{v}} - \frac{q_j}{m_j}\sum_{\underset{\sim}{k}'\neq 0}{}'\left[\underset{\sim}{E}_{\underset{\sim}{k}-\underset{\sim}{k}'}(t) + \frac{1}{c}\underset{\sim}{v}\times\underset{\sim}{B}_{\underset{\sim}{k}-\underset{\sim}{k}'}(t)\right]\cdot\frac{\partial}{\partial \underset{\sim}{v}}f_{j\underset{\sim}{k}'}(\underset{\sim}{v}, t) \qquad (2\cdot8\cdot b) \end{aligned}$$

ここで $F_j(\underset{\sim}{v}, t)$ は次式で定義される。

$$F_j(\underset{\sim}{v}, t) = F_{j0}(\underset{\sim}{v}) + f_{j0}(\underset{\sim}{v}, t) \qquad (2\cdot8\cdot c)$$

（2・8・b）は第4章において使用される。ここで簡単のために $\underset{\sim}{B}_0(t)=\underset{\sim}{B}_0$ すなわち一定な一様磁場を仮定し、さらに $\underset{\sim}{E}_0(t)=0$, $\int d^3\underset{\sim}{v}\,\underset{\sim}{v}\cdot F(\underset{\sim}{v}, t)=0$ と仮定する。時間についてはLaplace変換を導入する。

$$f_{j\underset{\sim}{k}}(\underset{\sim}{v}, \omega) = \int_0^\infty dt\, e^{i\omega t} f_{j\underset{\sim}{k}}(\underset{\sim}{v}, t), \qquad \mathrm{Im}\,\omega > 0 \qquad (2\cdot9\cdot a)$$

その逆変換は次式で表わせる。

$$f_{j\underset{\sim}{k}}(\underset{\sim}{v},t)=\int_{-\infty+i\alpha}^{\infty+i\alpha}\frac{d\omega}{2\pi}\,e^{-i\omega t}f_{j\underset{\sim}{k}}(\underset{\sim}{v},\omega) \qquad (2\cdot9\cdot b)$$

(2·9·a) 式を使用して (2·8·a), (2·8·b) 式を変換する。 $\underset{\sim}{k}=0$ 成分に対しては (2·8·a) 式から

$$-i\omega F_j(\underset{\sim}{v},\omega)=F_j(\underset{\sim}{v},t=0)-\frac{q_j}{m_j}\frac{1}{c}(\underset{\sim}{v}\times\underset{\sim}{B}_0)\cdot\frac{\partial}{\partial\underset{\sim}{v}}F_j(\underset{\sim}{v},\omega)$$
$$-\frac{q_j}{m_j}\sum_{k'\neq0}{}'\int_{-\infty+i\alpha'}^{\infty+i\alpha'}\frac{d\omega'}{2\pi}\left[\underset{\sim}{E}_{-\underset{\sim}{k}'}(\omega-\omega')+\frac{1}{c}\underset{\sim}{v}\times\underset{\sim}{B}_{-\underset{\sim}{k}'}(\omega-\omega')\right]$$
$$\cdot\frac{\partial}{\partial\underset{\sim}{v}}f_{j\underset{\sim}{k}'}(\underset{\sim}{v},\omega') \qquad (2\cdot10\cdot a)$$

又、$\underset{\sim}{k}\neq0$ 成分に対しては (2·8·b) 式より

$$(-i\omega+i\underset{\sim}{k}\cdot\underset{\sim}{v})f_{j\underset{\sim}{k}}(\underset{\sim}{v},\omega)+\frac{q_j}{m_j}\frac{1}{c}(\underset{\sim}{v}\times\underset{\sim}{B}_0)\cdot\frac{\partial}{\partial\underset{\sim}{v}}f_{j\underset{\sim}{k}}(\underset{\sim}{v},\omega)$$
$$=-\frac{q_j}{m_j}\int_{-\infty+i\alpha'}^{\infty+i\alpha'}\frac{d\omega'}{2\pi}\left[\underset{\sim}{E}_{\underset{\sim}{k}}(\omega-\omega')+\frac{1}{c}\underset{\sim}{v}\times\underset{\sim}{B}_{\underset{\sim}{k}}(\omega-\omega')\right]\cdot\frac{\partial}{\partial\underset{\sim}{v}}F_j(\underset{\sim}{v},\omega')$$
$$-\frac{q_j}{m_j}\sum_{\substack{\underset{\sim}{k}'\neq0\\ \underset{\sim}{k}'\neq\underset{\sim}{k}}}{}'\int_{-\infty+i\alpha'}^{\infty+i\alpha'}\frac{d\omega'}{2\pi}\left[\underset{\sim}{E}_{\underset{\sim}{k}-\underset{\sim}{k}'}(\omega-\omega')+\frac{1}{c}\underset{\sim}{v}\times\underset{\sim}{B}_{\underset{\sim}{k}-\underset{\sim}{k}'}(\omega-\omega')\right]\cdot\frac{\partial}{\partial\underset{\sim}{v}}f_{j\underset{\sim}{k}'}(\underset{\sim}{v},\omega')$$
$$+f_{j\underset{\sim}{k}}(\underset{\sim}{v},t=0) \qquad (2\cdot10\cdot b)$$

が得られる。

同様にして Maxwell の式 (2·4) に Fourier-Laplace 変換を行って

$$\underset{\sim}{B}^{in}_{\underset{\sim}{k}}(\omega)=\frac{c}{\omega}\underset{\sim}{k}\times\underset{\sim}{E}^{in}_{\underset{\sim}{k}}(\omega)+\frac{1}{-i\omega}\underset{\sim}{B}^{in}_{\underset{\sim}{k}}(t=0) \qquad (2\cdot11)$$

この式と (2·5) 式の Fourier-Laplace 変換したものから次式が得られる。

$$(-\omega^2+c^2k^2)\underset{\sim}{E}^{in}_{\underset{\sim}{k}}(\omega)-c^2\underset{\sim}{k}\left[\underset{\sim}{k}\cdot\underset{\sim}{E}^{in}_{\underset{\sim}{k}}(\omega)\right]$$
$$=4\pi i\omega\sum_j q_j n_0\int d^3\underset{\sim}{v}\,\underset{\sim}{v}f_{j\underset{\sim}{k}}(\underset{\sim}{v},\omega)+\left[-i\omega\underset{\sim}{E}^{in}_{\underset{\sim}{k}}(t=0)+ic\underset{\sim}{k}\times\underset{\sim}{B}^{in}_{\underset{\sim}{k}}(t=0)\right] \qquad (2\cdot12)$$

(2·10·a), (2·10·b), (2·11) 式、そして (2·12) 式はプラズマ中の波

を解析する場合に連立して解かれるべき基本式である。しかし一般にはこれを解くことは出来ない。そこでいろいろな仮定を設けることにより、これを解くことが出来る。

まず(2·10·a)式の右辺第3項及び(2·10·b)式における右辺第2項、すなわち波のモード間の結合を無視して、$F_j(\underset{\sim}{v}, t) = F_{j0}(v_\perp, u)$ と仮定すれば、この $F_{j0}(v_\perp, u)$ は(2·10·a)式の解である。

ここで添字⊥は磁場 $\underset{\sim}{B}_0$ に対して垂直方向成分を表わす。従って $f_{jk}(\underset{\sim}{v}, t)$ を平衡分布関数 $F_{j0}(v_\perp, u)$ からの摂動とみなせば(2·10·b)から線形化したVlasov方程式が得られる。又(2·10·a)式においてはモード間の結合を表わす項は小さいと仮定して無視し、$F_j(\underset{\sim}{v}, t) = F_{j0}(\underset{\sim}{v})$ を0次のオーダーの量と考えて $f_{\underset{\sim}{k}}, \underset{\sim}{E}_{j\underset{\sim}{k}}$ 及び $\underset{\sim}{B}_{j\underset{\sim}{k}}$ を摂動展開する。すなわち

$$f_{j\underset{\sim}{k}} = f_{j\underset{\sim}{k}}^{(1)} + f_{j\underset{\sim}{k}}^{(2)} + f_{j\underset{\sim}{k}}^{(3)} \quad \text{------}$$

$$\underset{\sim}{E}_{j\underset{\sim}{k}} = \underset{\sim}{E}_{j\underset{\sim}{k}}^{(1)} + \underset{\sim}{E}_{j\underset{\sim}{k}}^{(2)} + \underset{\sim}{E}_{j\underset{\sim}{k}}^{(3)} \quad \text{------}$$

$$\underset{\sim}{B}_{j\underset{\sim}{k}} = \underset{\sim}{B}_{j\underset{\sim}{k}}^{(1)} + \underset{\sim}{B}_{j\underset{\sim}{k}}^{(2)} + \underset{\sim}{B}_{j\underset{\sim}{k}}^{(3)} \quad \text{------}$$

において(2·10·b)とMaxwellの式を解けば高次の項までの摂動解を得ることが出来る。本論文における2次のオーダーのエコー波の解析もこの方法に依っている。

(2·8·a)及び(2·8·b)式において右辺の第2項、すなわちモード間結合の項を摂動項と考えて、これを無視すればW.E.Drummond and D.Pines[33]によって導出された準線形近似方程式を得る。

又上述の摂動理論をさらに発展させた理論も得ることが出来る[26]。プラズマ波に関する振幅振動現象はこの理論を使用して解析されている。

2·3　プラズマ波及びサイクロトロン波に対する線形化したVlasov方程式の解

緒論でも述べたように、プラズマに与えられた擾動が小さい場合には、その現象は線形化されたVlasov方程式を使用して解析されている。本節では後章の解析に必要になる分布関数の時間についての漸近形及びその他必要な表現式を得るために線形化されたVlasov方程式を解く。すなわち分布関数 $f(\underset{\sim}{v}, \underset{\sim}{r}, t)$ を平衡状態の速度分布関数 $F_0(\underset{\sim}{v})$ からのずれ $(=F_0(v_\perp, u))$ とすると、そのFourier-Laplace変換形に対する方程式は(2·10·b)式からモード間結合の項を小さいとして無視することによって得られる。(但し以下粒子を区別する j は必要時以外は省略する)

$$(-i\omega + i\underset{\sim}{k}\cdot\underset{\sim}{v})f_{\underset{\sim}{k}}(\underset{\sim}{v},\omega) + \frac{q}{m}\frac{1}{c}(\underset{\sim}{v}\times\underset{\sim}{B}_0)\cdot\frac{\partial}{\partial\underset{\sim}{v}}f_{\underset{\sim}{k}}(\underset{\sim}{v},\omega)$$

$$= -\frac{q}{m}\left[\underset{\sim}{E}_{\underset{\sim}{k}}(\omega) + \frac{1}{c}\underset{\sim}{v}\times\underset{\sim}{B}_{\underset{\sim}{k}}(\omega)\right]\cdot\frac{\partial}{\partial\underset{\sim}{v}}F_0(\underset{\sim}{v}) + f_{\underset{\sim}{k}}(\underset{\sim}{v}, t=0) \qquad (2\cdot13)$$

今、磁場 $\underset{\sim}{B}_0$ の方向をz方向にとり、磁場の方向に伝わる波を考える。さらに、速度空間に対しては極軸をz方向とする円柱座標系を用いると、(2·13)式は次式のように整理される。

$$\frac{\partial f_k(\underset{\sim}{v},\omega)}{\partial\varphi} - \frac{i(ku-\omega)}{\omega_c}f_k(\underset{\sim}{v},\omega) = \frac{\Phi(\varphi)}{\omega_c} \qquad (2\cdot14)$$

但し、$\underset{\sim}{v} = (v_\perp\cos\varphi, v_\perp\sin\varphi, u)$, $\underset{\sim}{B}_0 = B_0\underset{\sim}{e}_z$, $\underset{\sim}{k} = k\underset{\sim}{e}_z$ で、$\omega_c\left(=\frac{qB_0}{mc}\right)$ はサイクロトロン角周波数である。又 $\Phi(\varphi)$ は次式で定義される。

$$\Phi(\varphi) = \frac{q}{m}\left[\underset{\sim}{E}_k(\omega) + \frac{1}{c}\underset{\sim}{v}\times\underset{\sim}{B}_k(\omega)\right]\cdot\frac{\partial F_0(\underset{\sim}{v})}{\partial\underset{\sim}{v}} - f_k(\underset{\sim}{v}, t=0) \qquad (2\cdot15)$$

(2·14)式の解は周期条件 $f_k(\varphi) = f_k(\varphi+2\pi)$ を考慮して次の式で与えられる。

$$f_k(\underset{\sim}{v},\omega)=\frac{1/\omega_c}{e^{-i\psi(2\pi)}-1}\int_0^{2\pi}e^{-i\psi(\gamma)}\Phi(\varphi+\gamma)d\gamma \qquad (2\cdot16)$$

ここで

$$\psi(\varphi)=\left(\frac{ku-\omega}{\omega_c}\right)\varphi$$

(2·16)式を計算するために回転座標系を導入すると便利である。すなわち

$$\underset{\sim}{e}_\pm=\frac{1}{\sqrt{2}}(\underset{\sim}{e}_x\pm i\underset{\sim}{e}_y) \qquad (2\cdot17)$$

を用いると、あるベクトル$\underset{\sim}{A}$は次式で表わされる。

$$\underset{\sim}{A}=A_x\underset{\sim}{e}_x+A_y\underset{\sim}{e}_y+A_z\underset{\sim}{e}_z$$
$$=A^+\underset{\sim}{e}_++A^-\underset{\sim}{e}_-+A_z\underset{\sim}{e}_z$$

ここで $A^\pm$ は

$$A^\pm=\frac{1}{\sqrt{2}}(A_x\mp iA_y) \qquad (2\cdot18)$$

である。

(2·17)及び(2·18)式を使用して(2·16)式の右辺を計算すると、$f_k(\underset{\sim}{v},\omega)$に対して次の解が得られる。(付録I参照)

$$f_k(\underset{\sim}{v},\omega)=\frac{q}{\sqrt{2}m}\left[\frac{E_k^+(\omega)e^{i\varphi}}{i(\omega-ku+\omega_c)}+\frac{E_k^-(\omega)e^{-i\varphi}}{i(\omega-ku-\omega_c)}\right]\Gamma(k,\omega,u,v_\perp)$$
$$+\frac{q}{m}\frac{\partial F_0(\underset{\sim}{v})/\partial u}{i(\omega-ku)}E_{kz}(\omega)+I_f \qquad (2\cdot19)$$

ここで I_f は $B_k(t)$, 及び $f_k(\underset{\sim}{v},t)$ の初期値に起因する項である。(付録I(A·I·14)式参照)

又$\Gamma(k,\omega,u,v_\perp)$は次式で定義される。

$$\Gamma(k,\omega,u,v_\perp)=\left(1-\frac{ku}{\omega}\right)\frac{\partial F_0(\underset{\sim}{v})}{\partial v_\perp}+\frac{kv_\perp}{\omega}\frac{\partial F_0(\underset{\sim}{v})}{\partial u} \qquad (2\cdot20)$$

(2·19)の第1項は右回りの波、すなわち電子サイクロトロン波に関係した項で第2項は左回りのイオンサイクロトロン波に関係した項で、共に$e^{i\varphi}$, $e^{-i\varphi}$なる因子の故に電流には寄与するが、電荷には寄与しない。又第3項は縦波すなわちプラズマ波に関係した項で、電荷に寄与する項である。(2·19)式を(2·12)式に代入することによって電界 $E_k(\omega)$ に対する次式が得られる。

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_r(k,\omega) & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_\ell(k,\omega) & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_p(k,\omega) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_k^+(\omega) \\ E_k^-(\omega) \\ E_{kz}(\omega) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -\omega^2+c^2k^2 & 0 & 0 \\ 0 & -\omega^2+c^2k^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_k^{+ext}(\omega) \\ E_k^{-ext}(\omega) \\ E_{kz}^{ext}(\omega) \end{bmatrix} + [I_E] \qquad (2\cdot21)$$

ここで、$\varepsilon_r, \varepsilon_\ell, \varepsilon_p$ は次式で与えられ、$[I_E]$ は $\underset{\sim}{E}_k(t)$, $\underset{\sim}{B}_k(t)$ 及び $j_k(\underset{\sim}{v}, t)$ の $t=0$ における値に関係する量を集めた項である。(付録 I (A·I·16) 及び (A·I·17) 式参照)

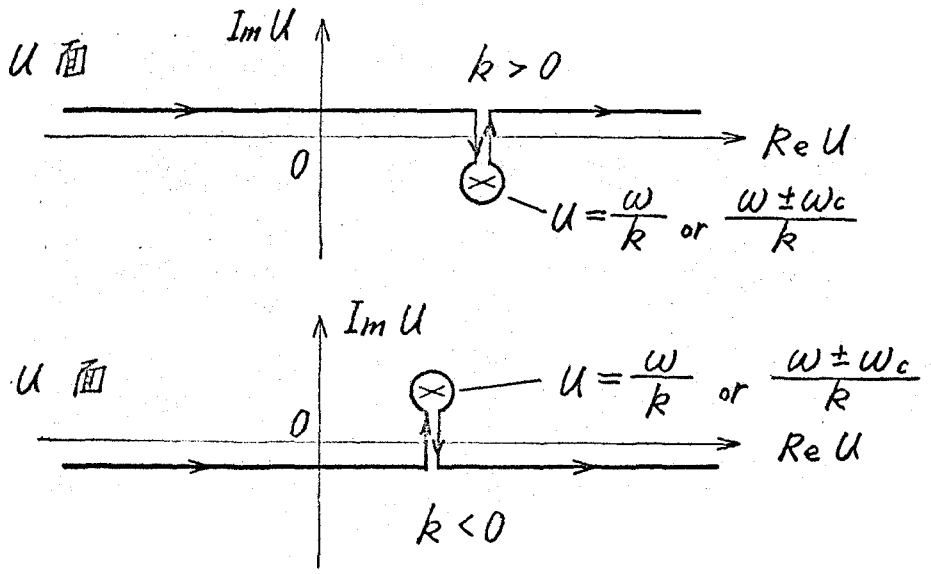
$$\varepsilon_{r,\ell}(k,\omega) = c^2k^2 - \omega^2 + \pi\omega \sum_j \frac{\omega_p^2}{k} \int_{-\infty}^{\infty} du \int_0^{\infty} v_\perp^2 \, dv_\perp \frac{\Gamma(k,\omega,u,v_\perp)}{u - \left(\frac{\omega \pm \omega_c}{k}\right)} \qquad (2\cdot22)$$

$$\varepsilon_p(k,\omega) = 1 - \sum_j \frac{\omega_p^2}{k^2} \int_{-\infty}^{\infty} du \, \frac{\partial F_{0z}(u)/\partial u}{u - \omega/k} \qquad (2\cdot23)$$

$$F_{0z}(u) = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\infty} v_\perp \, dv_\perp \, F_0(\underset{\sim}{v}) \qquad (2\cdot24)$$

$\omega_p = (4\pi q^2 n_0/m)^{1/2}$ はプラズマ振動周波数である。添字 r, ℓ はそれぞれ積分中の +, − に対応し、$k>0, \omega>0$ の場合にはそれぞれ、右及び左回りの波に関係する量を表わす。

(2·22),(2·23) 式は最初 $\mathrm{Im}\,\omega > 0$ の領域で定義されたものであるが Landau の理論に従って図のように u に関する積分路を



変形することにより、$Im\,\omega \leq 0$ の領域にも解析接続することが出来る。

又、関数 $\varepsilon_r, \varepsilon_l, \varepsilon_p$ に関しては次のような有用な関係が成立する。すなわち $F_0(\underset{\sim}{v})$ が実数であることから、kが実数でωを複素数と考えると次の関係がある。

$$\varepsilon_{r,l}(-k,\omega) = \varepsilon_{l,r}^{*}(k,-\omega^{*}) \tag{2·25}$$

$$\varepsilon_p(-k,\omega) = \varepsilon_p^{*}(k,-\omega^{*}) \tag{2·26}$$

又、さらに $F_0(v)$ がuに関して対称であるならば

$$\varepsilon_p(k,\omega) = \varepsilon_p^{*}(k,-\omega^{*}) \tag{2·27}$$

が成立する。[37] ここで＊印は共役複素数量を表わす。

$E_k(t)$は(2·21)式をLaplace逆変換することにより求められる。すなわち

$$E_k^{\pm}(t) = \int_{-\infty+ia}^{\infty+ia} \frac{d\omega}{2\pi} e^{-i\omega t} E_k^{\pm}(\omega) \tag{2·28}$$

$$= \int_{-\infty+ia}^{\infty+ia} \frac{d\omega}{2\pi} e^{-i\omega t} \frac{(-\omega^2+c^2k^2)E_k^{\pm ext}(\omega)+I_E^{\pm}}{\varepsilon_{r,l}(k,\omega)}$$

$$E_{kz}(t) = \int_{-\infty+ia}^{\infty+ia} \frac{d\omega}{2\pi} e^{-i\omega t} E_{kz}(\omega)$$

$$= \int_{-\infty+ia}^{\infty+ia} \frac{d\omega}{2\pi} e^{-i\omega t} \frac{E_{kz}^{ext}(\omega)+I_{Ez}}{\varepsilon_p(k,\omega)} \tag{2·29}$$

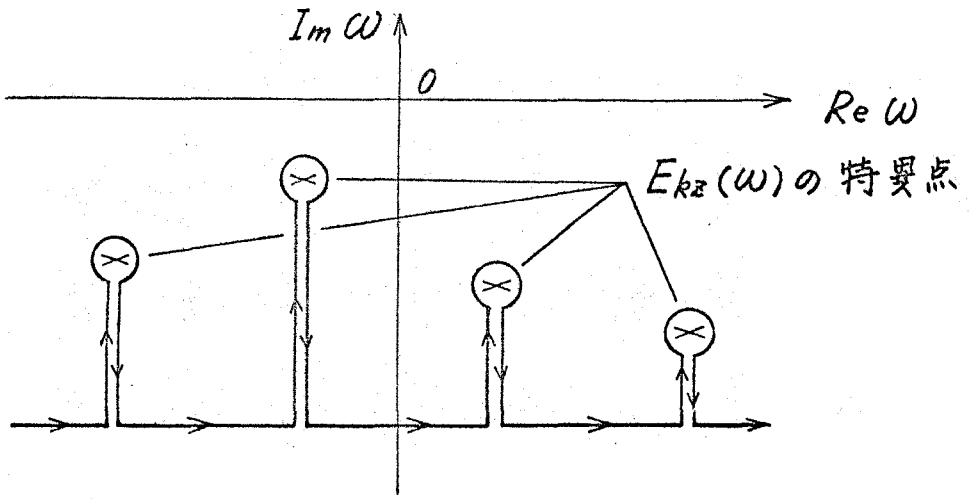
但し、ここで $\underset{\sim}{I}_E = I_E^{+}\underset{\sim}{e}_{+} + I_E^{-}\underset{\sim}{e}_{-} + I_{Ez}\underset{\sim}{e}_z$ であり、積分路は$E_k^{\pm}(\omega)$及び$E_{kz}(\omega)$のすべての特異点の上側を通るようにとる。(2·28), (2·29)式の評価は次節において述べられる。又 $f_k(\underset{\sim}{v},t)$ は(2·21)式を(2·19)式に代入しLaplace逆変換を行うことにより得られる。

2·4 プラズマ波及びサイクロトロン波の時間についての漸近的なふるまい

2·4·1 プラズマ波

$E_{kz}(t)$を求めるため(2·29)式を評価する。上述した如くε_p及び

I_{EZ} を ω の全平面に解析持続出来るから ω に関する積分路を図に示



すように ω 平面の下方に移動する。その際、$E_{kz}(\omega)$ の極が途中にあれば避けて通る。従って（2·29）式は $E_{kz}(\omega)$ の極からの寄与と変形された積分路の実軸に平行な直線部分からの寄与との和になり次のように書くことが出来る。

$$E_{kz}(t)=-i\sum_{n}A_n^{p}e^{-i\omega_n t}+\int_{-\infty+i\alpha'}^{\infty+i\alpha'}\frac{d\omega}{2\pi}e^{-i\omega t}E_{kz}(\omega) \qquad (2\cdot30)$$

ここで α' はある負の大きな数で ω_n は $I_m\,\omega_n>\alpha'$ を満足する $E_{kz}(\omega)$ の極であり A_n^p は $E_{kz}(\omega)$ の $\omega=\omega_n$ 点での留数である。従って t の充分大きな値に対しては右辺第2項は無視することが出来、さらに $E_{kz}(t)$ の漸近的なふるまいは（2·30）の第1項のうちで、$I_m\omega_n$ が最大なものによる寄与が支配的になる。もし $E_{kz}^{ext}(\omega)$ 及び I_{EZ} が整関数であるならば $E_{kz}(\omega)$ の極は分散式

$$\varepsilon_p(k,\omega)=0 \qquad (2\cdot31)$$

の根だけであるから、t の充分大きいときの $E_{kz}(t)$ の漸近的なふ

るまいは分散式（2・31）の根で虚数部が最大のものによりきめられることになる。しかも$F_{0z}(u)$がuに関してただ一つのピークしか持たない関数であるときにはいつも$I_m\,\omega_n<0$であることが証明出来る[34]　から、このプラズマ波はすべて時間がたつにつれて減衰する。すなわち、Landau減衰である[30]。

次に分布関数$f_k(\underset{\sim}{v},t)$のふるまいを調べる。(2・19)式より縦波に関係する項だけを取り出すと、

$$f_k(\underset{\sim}{v},\omega)=\frac{1}{i(\omega-ku)}\left[\frac{q}{m}\frac{\partial F_0(\underset{\sim}{v})}{\partial u}E_{kz}(\omega)-f_k(\underset{\sim}{v},t=0)\right] \qquad (2\cdot32)$$

これより$f_k(\underset{\sim}{v},t)$を求めるためには（2・21）から求められる$E_{kz}(\omega)$を代入してLaplace逆変換を行うことにより得られる。積分路は$E_{kz}(t)$の場合と同じように変形出来る。$f_k(\underset{\sim}{v},t=0)$が整関数であるならば$f_k(\underset{\sim}{v},\omega)$は$E_{kz}(\omega)$の特異点、すなわち$\varepsilon_p(k,\omega)=0$の根の他に$\omega=ku$なる特異点をもっている。前者の特異点は$E_{kz}(t)$のときと同様に$f_k(\underset{\sim}{v},t)$を減衰させる。しかし後者は実数であるから$t$が充分大きいところでは$f_k(\underset{\sim}{v},t)$のふるまいはこの極によって支配されることになる。すなわち

$$f_k(\underset{\sim}{v},t)\sim\left[\frac{-q}{m}\frac{\partial F_0(\underset{\sim}{v})}{\partial u}E_{kz}(ku)+f_k(\underset{\sim}{v},t=0)\right]e^{-ikut} \qquad (2\cdot33)$$

すなわち電場を形成する$f_k(\underset{\sim}{v},t)$の振動がすべて減衰してしまった後でも、$f_k(\underset{\sim}{v},t)$は$e^{-iku t}$なる因子を通じて振動を記憶している。したがって、この項を分布関数のメモリーと呼ぶ。しかしながら、このメモリーの振動数はuに依存しているため一般には分布関数をuについて積分して得られるところの電荷密度は零になり

(Phase mixing), 電場を生じることはない。しかしこのメモリーが後章で述べるようにエコーに重要な意味をもつのである。(2·33) 式以降の事柄は Landau の論文[30] の最後 2～3 行にわたって述べられている。しかしこのことはエコー現象が解析されるまでは、あまり問題点とはならないで、むしろそれまでは Landau 減衰に関する議論は主として $f_k(u, t=0)$ の解析性と $E_{kz}(\omega)$ の $\alpha' \to -\infty$ のときのふるまいに向けられて来た。

2·4·2　サイクロトロン波

$E_k^{\pm}(t)$ を求めるために (2·28) 式を評価する。この場合にもプラズマ波の場合と全く同様にして電場 $E_k^{\pm}(t)$ の漸近形は次のように書き表わすことが出来る。

$$E_k^{\pm}(t) \sim -i \sum_n A_n^{\pm} e^{-i\omega_n^{r,l} t} \tag{2·34}$$

ここで $\omega_n^{r,l}$ は分散式

$$\varepsilon_{r,l}(k, \omega) = 0 \tag{2·35}$$

の根で、$A_n^{\pm}$ は $\omega = \omega_n^{r,l}$ 点における $E_k^{\pm}(\omega)$ の留数である。もし $F_0(v)$ が等方分布であるならばプラズマ波同様 $\mathrm{Im}\,\omega_n^{r,l} < 0$ であり、波は減衰する。すなわちサイクロトロン減衰である。又 $f_k(v, t)$ の漸近的ふるまいは (2·19) 式から

$$f_k(v, t) \simeq \frac{-8}{\sqrt{2}m} \Big\{ \exp[-i(ku - \omega_c)t] \cdot e^{i\varphi} E_k^{+}(ku - \omega_c)$$

$$\cdot P(k, ku - \omega_c, u, v_z)$$

$$+\exp[-i(ku+\omega_c)t]\, e^{-i\varphi} E_k^-(ku+\omega_c)$$
$$\cdot F(k, ku+\omega, u, v_\perp)\} + I^\pm \qquad (2\cdot36)$$

と書くことが出来る。[21]　$I^\pm$は$f_k(\mathbf{v},t)$, $B_k(t)$, $E_k(t)$の初期値に起因した項で、整関数であると仮定した。このメモリーは(2・33)式と同様に電流も電荷も生じない。しかしながら(2・36)式に示されるサイクロトロン波に関係する分布関数のメモリーはサイクロトロン波エコー形成に重要な役割をもつのである。さらに(2・36)式から重要な項を抜き出して考えると、

$$f_k(\mathbf{v},t) \propto \exp[-i(ku-\omega_c)t]\cdot e^{i\varphi}\frac{1}{\varepsilon_r(k, ku-\omega_c)} \qquad (2\cdot37)$$

従って$f_k(\mathbf{v},t)$は因子$1/\varepsilon_r(k, ku-\omega_c)$の故にたとえ$f_k(\mathbf{v}, t=0)$が整関数であったとしても$f_k(\mathbf{v},t)$はもはや整関数ではないことは注目に値する。[3],[36]　これについては第4章で詳しく扱われる。

2・5　電子サイクロトロン波に対する分散関係式及び数値計算

本節においては$F_0(\mathbf{v})$がMaxwell分布をしている場合の$\varepsilon_r(k, \omega)$の形をより具体的に表わし、その分散関係式を数値計算する。

まず$F_0(\mathbf{v})$は次式で与えられる。

$$F_0(\mathbf{v}) = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{3/2}\frac{1}{v_T^3}\, e^{-\frac{1}{2v_T^2}(u^2+v_\perp^2)} \qquad (2\cdot38)$$

従って(2・22)式はPlasma Dispersion function[35]を使用して次のように変形することが出来る。

$$\varepsilon_{r,l}(k,\omega) = c^2k^2-\omega^2-\sum_j\left(\frac{\omega}{\sqrt{2}kv_T}\right)\omega_p^2 Z\left(\frac{\omega\pm\omega_c}{\sqrt{2}kv_T}\right) \qquad (2\cdot39)$$

ここで Plasma Dispersion function は次式で定義される。

$$\begin{cases} Z(\zeta) = \dfrac{1}{\sqrt{\pi}}\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \dfrac{e^{-x^2}}{x-\zeta}dx \quad , & I_m \zeta > 0 \\ \text{上式の解析接続} & I_m \zeta \leq 0 \end{cases} \tag{2·40}$$

もし $k<0$ のときには $Z(\zeta)$ のかわりに $\tilde{Z}(\zeta)$ を用いなければならない。$\tilde{Z}(\zeta)$ は次式で定義される。

$$\tilde{Z}(\zeta) = Z(\zeta) - 2i\pi^{1/2}\exp(-\zeta^2) \tag{2·41}$$

電子サイクロトロン波に対する分散関係式は

$$\frac{D^2}{Q^2} - \frac{\Omega}{D}\frac{1}{V}Z\left(\frac{\Omega-1}{VD}\right) - \frac{\Omega^2}{Q^2} = 0 \tag{2·42}$$

但し $D = kc/\omega_{ce}$, $\Omega = \omega/\omega_{ce}$, $V = \sqrt{2}v_{Te}/c$, $Q = \omega_{pe}/\omega_{ce}$

ここでイオンの寄与は周波数が高いため無視した。数値計算は3つの $\sqrt{2}v_{Te}/c$ の値に対して ω_{pe}/ω_{ce} の値を変えて行った。その結果が図1-(a),(b),(c)に示されている。

図1-(a)は $\sqrt{2}v_{Te}/c = 0.008$ で $\omega_{pe}/\omega_{ce} = 4, 9, 25$ について実数 (kc/ω_{ce}) に対する (ω/ω_{ce}) の実数部分と虚数部分を図示したものである。

図1-(b),(c)はそれぞれ $\sqrt{2}v_{Te}/c = 0.004$ と 0.002 について同様に数値計算を行った結果を示している。ここで同時に示してある低温近似による曲線は式 $D^2 = \Omega Q^2/(1-\Omega)$ によって計算された。

2·6 結言

一様外部磁場中にある無限に広がった無衝突プラズマを記述する基礎方程式を示し、線形理論の範囲でプラズマ波の Landau 減衰及

びサイクロトロン減衰現象を概論した。さらにサイクロトロン波に関するエコー現象の解析、及びその物理的意味を明らかにする上で最も重要であると思われるサイクロトロン波に関する粒子の分布関数の時間についての漸近的なふるまいを解析し、その表現式を導いた。又プラズマが等方Maxwell分布をしている場合の電子サイクロトロン波に対する分散式をイオンの寄与を無視して、電子計算機を使用して数値計算し、ある温度及びω_{pe}/ω_{ce}の値に対してその結果を図に示した。この計算値は第3章における電子サイクロトロン波によるエコー波の波形の計算に使用出来る。

第3章　二つのサイクロトロン波によって励起されるプラズマ波エコー

3·1　緒言

第2章においてはプラズマ中にサイクロトロン波が励起されたとすると、その波はサイクロトロン減衰を受け、ある時間の間に消えてしまうことを述べた。しかしながら、波が減衰してしまった後でも粒子の分布関数には減衰しない振動が残っていることが明らかにされ、さらにその形が因子 $\exp[-i(ku\pm\omega_c)t]\cdot e^{\pm i\varphi}$ に比例していて、振動の位相は t と共に進んでいくことが示された。本章3·2節においてはこの位相の進んで行く方向を第2のサイクロトロン波を励起することにより、ある時間の間、逆転することが出来ることを示し、従ってその分布関数を速度に関して積分しても phase mixing が起らず、縦波のエコー波が形成されることを理論的に示す。3·2·1節ではパルス電磁界によってプラズマ中にサイクロトロン波を励起することを論じ、3·2·2節において Vlasov 方程式を摂動法により2次のオーダーまで解き、エコーの形成過程を解析する。3·3節においては電子サイクロトロン波によるプラズマ波エコーを扱い、その波形を解析的に求める。3·4節では電子計算機を使用して、phase mixing の過程及びエコーの波形を詳細に数値解析する。

3·2　外部磁場中のプラズマにおける縦波のエコー

本節では一様な外部磁場がかけられた無限大のプラズマ中を磁場方向に伝わる2次のオーダーの縦波のエコー波に対する一般式を示す。

3·2·1　パルス電磁界による波の励起

プラズマは一様であり、粒子間衝突は扱う現象の振動周波数に比べて無視出来、一様外部磁場がかけられているとする。従ってイオン又は電子の分布関数 $\mathcal{F}(\underset{\sim}{v}, \underset{\sim}{r}, t)$ は時間 $t=0$ では

$$\mathcal{F}(\underset{\sim}{v}, \underset{\sim}{r}, t) = F_0(\underset{\sim}{v}) = F_0(v_\perp, u)$$

と書くことが出来る。このような状態にあるプラズマに外部から波数 k_1 を持ったパルス電界が加えられたとする。すなわち

$$\underset{\sim}{E}^{ext}(z,t) = E_\perp^e \left[\cos k_1 z \cdot \underset{\sim}{e}_x - \sin k_1 z \cdot \underset{\sim}{e}_y\right] \delta(t) \qquad (3\cdot1)$$

ここで $E_\perp^e$ はパルス電界の振幅である。このパルス電界の Fourier-Laplace 変換形は次式で与えられる。

$$\underset{\sim}{E}_k^{ext}(\omega) = \frac{E_\perp^e}{\sqrt{2}} \left[\delta_{k,k_1} \underset{\sim}{e}_+ + \delta_{k,-k_1} \underset{\sim}{e}_-\right] \qquad (3\cdot2)$$

このパルスがプラズマに加えられたことにより、プラズマ中には波が励起される。この励起された波は前節の線形理論から求めることが出来る。すなわち

$$\underset{\sim}{E}_k(\omega) = E_{k_1}^+(\omega)\, \underset{\sim}{e}_+ + E_{-k_1}^-(\omega)\, \underset{\sim}{e}_- \qquad (3\cdot3)$$

ここで $E_{k_1}^+(\omega)$ 及び $E_{-k_1}^-$ は (2·21) 式より、次式で与えられる。

$$E_{k_1}^+(\omega) = \frac{E_\perp^e}{\sqrt{2}} \frac{-\omega^2 + c^2k^2}{\varepsilon_r(k,\omega)} \delta_{k,k_1} \qquad (3\cdot4)$$

$$E_{-k_1}^-(\omega) = \frac{E_\perp^e}{\sqrt{2}} \frac{-\omega^2 + c^2k^2}{\varepsilon_l(k,\omega)} \delta_{k,-k_1} \qquad (3\cdot5)$$

従って (3·3) 式を Laplace 逆変換することにより $\underset{\sim}{E}_k(t)$ の漸近形が (2·34) 式の形のように求められる。

$$\underset{\sim}{E}_k(t) \propto \left[\cos(\omega_{k_1}^r t + \phi) \cdot \underset{\sim}{e}_x + \sin(\omega_{k_1}^r t + \phi) \cdot \underset{\sim}{e}_y\right] e^{\gamma_{k_1}^r t} \qquad (3\cdot6)$$

但し、ここで ϕ は位相定数であり、$\omega_{k_1}^r + i\gamma_{k_1}^r$ は $\varepsilon_r(k_1,\omega)=0$ の根のうち最も虚数部の大きい根を表わしている。$\varepsilon_l(-k_1,\omega)=0$ の対応する根は(2·25)式により $-\omega_{k_1}^r + i\gamma_{k_1}^r$ である。

(3·6)から分るように、もし $F_0(\underset{\sim}{v})$ がMaxwell分布しているならば $\gamma_{k_1}^r$ は負であるから波は時間と共に減衰してしまう。しかしこの波は分布関数を変調し減衰した後も分布関数にはその振動が次式の形で残る。

$$f_{k_1}(\underset{\sim}{v},t) \propto \frac{\partial F_0(\underset{\sim}{v})/\partial v_\perp e^{i\varphi}}{\varepsilon_r(k_1, k_1 u - \omega_c)} \exp[-i(k_1 u - \omega_c)t] \qquad (3\cdot7)$$

すなわち、分布関数 $f_{k_1}(\underset{\sim}{v},t)$ は $\exp[-i(k_1 u-\omega_c)t]$ なる因子で振動している。

最初のパルス磁界によってプラズマ中に励起された横波がサイクロトロン減衰をうけ充分に減衰してしまった後最初のパルスを加えた時間から τ 時間たったとき($\tau \gg 1/\gamma_{k_1}^r$)再びプラズマに外部から波数が k_2 の次式で与えられるパルス磁界が加えられたと考える。すなわち

$$(k_2 > k_1 > 0)$$

$$\underset{\sim}{B}^{ext}(z,t) = B_\perp^e[\sin k_2 z\cdot \underset{\sim}{e}_x + \cos k_2 z\cdot \underset{\sim}{e}_y]\delta(t-\tau) \qquad (3\cdot8)$$

ここで $B_\perp^e$ はパルス磁界の振幅である。このパルス磁界のFourier-Laplace変換形は次式で与えられる。

$$\underset{\sim}{B}_k^{ext}(\omega) = i\frac{B_\perp^e}{\sqrt{2}}[-\delta_{k,k_2}\underset{\sim}{e}_+ + \delta_{k,-k_2}\underset{\sim}{e}_-]e^{i\omega\tau} \qquad (3\cdot9)$$

このパルスによってプラズマ中にはやはり波が励起される。その波のFourier-Laplace変換形は(3·3)と同様に

$$\underset{\sim}{B}_k(\omega) = B_{k_2}^+(\omega)\underset{\sim}{e}_+ + B_{-k_2}^-(\omega)\underset{\sim}{e}_- \qquad (3\cdot10)$$

で与えられる。ここで $B_{k_2}^+$, $B_{-k_2}^-$ は

$$B_{k_2}^{+}(\omega) = -\frac{iB_{\perp}^{e}}{\sqrt{2}} \frac{-\omega^2 + c^2k^2}{\varepsilon_r(k,\omega)} \delta_{k,k_2} e^{i\omega\tau} \tag{3・11}$$

$$B_{-k_2}^{-}(\omega) = \frac{iB_{\perp}^{e}}{\sqrt{2}} \frac{-\omega^2 + c^2k^2}{\varepsilon_\ell(k,\omega)} \delta_{k,-k_2} e^{i\omega\tau} \tag{3・12}$$

である。

(3・4),(3・5)及び(3・11),(3・12)式には(2・25)の関係を使えば次のような関係がある。

$$\begin{aligned} E_{-k_1}^{-}(\omega) &= E_{k_1}^{+}(-\omega^*)^* \\ B_{-k_2}^{-}(\omega) &= B_{k_2}^{+}(-\omega^*)^* \end{aligned} \tag{3・13}$$

(3・10)式をLaplace逆変換することによって得られる$\underset{\sim}{B}_k(t)$も最初のパルス同様サイクロトロン減衰をうけ、分布関数に(3・7)式と類似な振動を残して消えてしまう。従ってプラズマ中にある時間間隔τで二つのパルスを加えて波を励起してやっても、1次のオーダーでは何も変わった現象は見られない。しかし、ここで2次のオーダーの摂動に注目してみると、才2のパルス磁界が加えられたときには(3・7)式で与えられる才1次パルスによって変調された分布関数は振動しながらその記憶を保っているから、才2次のパルス磁界及びそれによって励起される波によってさらに変調され分布関数は$f_{k_3}(\underset{\sim}{v},t)$ $(k_3 = k_2 - k_1 > 0)$なる2次のオーダーの摂動を受けることになる。この2次のオーダーの分布関数に与えられた摂動の形を次節において求めている。

3・2・2　エコー波の励起

ここでは前節に述べたようにてなる時間間隔($\tau \gg 1/\gamma_{k_1}^{r}$)をおいてプラズマにパルスを加えて波を励起することによって粒子の分布関数に与えられる2次のオーダーの摂動を前章で与えられた基礎方程式(2・10・b)式を2次のオーダーまでの摂動法で解くことによ

って求める。すなわち2次のオーダーの摂動 $f_{k3}(\underset{\sim}{v},\omega)$ に対する一般式は、

$$
\begin{aligned}
&i(k_3u-\omega)f_{k3}(\underset{\sim}{v},\omega)-\omega_c\frac{\partial}{\partial\varphi}f_{k3}(\underset{\sim}{v},\omega)\\
&+\frac{q}{m}\left[\underset{\sim}{E}_{k3}(\omega)+\frac{1}{c}\underset{\sim}{v}\times\underset{\sim}{B}_{k3}(\omega)\right]\cdot\frac{\partial}{\partial\underset{\sim}{v}}F_0(\underset{\sim}{v})\\
&=-\frac{q}{m}\int_{-\infty+i\alpha'}^{\infty+i\alpha'}\frac{d\omega'}{2\pi}\left\{\left[\underset{\sim}{E}_{k2}(\omega-\omega')+\frac{1}{c}\underset{\sim}{v}\times\underset{\sim}{B}_{k2}(\omega-\omega')\right]\cdot\frac{\partial}{\partial\underset{\sim}{v}}f_{k1}(\underset{\sim}{v},\omega')\right.\\
&\left.+\left[\underset{\sim}{E}_{-k1}(\omega-\omega')+\frac{1}{c}\underset{\sim}{v}\times\underset{\sim}{B}_{-k1}(\omega-\omega')\right]\cdot\frac{\partial}{\partial\underset{\sim}{v}}f_{k2}(\underset{\sim}{v},\omega')\right\}
\end{aligned}
\tag{3·14}
$$

ここで $\underset{\sim}{E}_{-k1}$, $\underset{\sim}{B}_{k2}$, f_{k1}, f_{k2}…は加えたパルスに対して1次のオーダーの量であり f_{k3}, $\underset{\sim}{E}_{k3}$, $\underset{\sim}{B}_{k3}$ は2次のオーダーの量である。（この式は才4章においても使用される。）

本章においては磁場方向に伝わる縦波のエコーを扱うため(3·14)式の両辺を速度空間の磁場に垂直な方向、すなわち、$v_\perp$ と φ について積分してしまってよい。

$$
\begin{aligned}
&i(k_3u-\omega)f_{k3}(u,\omega)+\frac{q}{m}E_{k3z}(\omega)\frac{\partial F_{0z}(u)}{\partial u}\\
&=-\frac{q}{m}\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^{\infty}v_\perp dv_\perp\int_{-\infty+i\alpha'}^{\infty+i\alpha'}\frac{d\omega'}{2\pi}\left\{\left[\underset{\sim}{E}_{k2}(\omega-\omega')\right.\right.\\
&\left.+\frac{1}{c}\underset{\sim}{v}\times\underset{\sim}{B}_{k2}(\omega-\omega')\right]\cdot\frac{\partial}{\partial\underset{\sim}{v}}f_{-k1}(\underset{\sim}{v},\omega')+\left[\underset{\sim}{E}_{-k1}(\omega-\omega')\right.\\
&\left.\left.+\frac{1}{c}\underset{\sim}{v}\times\underset{\sim}{B}_{-k1}(\omega-\omega')\right]\cdot\frac{\partial}{\partial\underset{\sim}{v}}f_{k2}(\underset{\sim}{v},\omega')\right\}
\end{aligned}
\tag{3·15}
$$

さらに才1パルスによって励起された波が充分にLandau減衰してしまった後に才2のパルスを加え、その後の $f_{k3}(\underset{\sim}{v},\omega)$ のふるまいを調べる目的であるため(3·15)式の右辺才2項は $\underset{\sim}{E}_{-k1}(t)\cong 0$, $\underset{\sim}{B}_{-k1}(t)\cong 0$ であることを考えれば無視出来る。才1項の $f_{-k1}(\underset{\sim}{v},\omega')$ は(2·19)式より1次オーダーに対して（I_fは無視する）

$$f_{-k_1}(\underset{\sim}{v},\omega')=\frac{q}{\sqrt{2}\,m}\left[\frac{E^{+}_{-k_1}(\omega')\,e^{i\varphi}}{i(\omega'+k_1u+\omega_c)}+\frac{E^{-}_{-k_1}(\omega')\,e^{-i\varphi}}{i(\omega'+k_1u-\omega_c)}\right]\frac{\partial F_0(\underset{\sim}{v})}{\partial v_\perp}$$

$$+\frac{q}{m}\frac{\partial F_0(\underset{\sim}{v})/\partial u}{i(\omega'+k_1u)}E_{-k_1z}(\omega') \qquad (3\cdot16)$$

で与えられる。これを(3·15)式の右辺に代入し、次の関係式を使用し

$$\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^{\infty}v_\perp dv_\perp\left(\frac{\partial^2F_0(\underset{\sim}{v})}{\partial v_\perp^2}+\frac{1}{v_\perp}\frac{\partial F_0(\underset{\sim}{v})}{\partial v_\perp}\right)=0$$

$$\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^{\infty}v_\perp^2\frac{\partial F_0(\underset{\sim}{v})}{\partial v_\perp}dv_\perp=-2F_{0z}(u)$$

$v_\perp,\varphi$について積分を行うと、

磁場方向に伝わる2次のオーダーの波の分布関数に対する一般式が得られる。

$$i(k_3u-\omega)f_{k_3}(u,\omega)+\frac{q}{m}E_{k_3z}(\omega)\frac{\partial F_{0z}(u)}{\partial u}$$

$$=\left(\frac{q}{m}\right)^2\frac{i}{c}\int_{-\infty+i\alpha'}^{\infty+i\alpha'}\frac{d\omega'}{2\pi}\frac{\partial}{\partial u}\left[\frac{B^{+}_{k_2}(\omega-\omega')E^{-}_{-k_1}(\omega')}{i(\omega'+k_1u-\omega_c)}F_{0z}(u)\right. \qquad (3\cdot17)$$

$$\left.-\frac{B^{-}_{k_2}(\omega-\omega')E^{+}_{-k_1}(\omega')}{i(\omega'+k_1u+\omega_c)}F_{0z}(u)\right]+\left(\frac{q}{m}\right)^2\int_{-\infty+i\alpha'}^{\infty+i\alpha'}\frac{d\omega'}{2\pi}\frac{\partial}{\partial u}\left[\frac{\partial F_{0z}(u)/\partial u}{i(\omega'+k_1u)}\right]$$

$$\cdot E_{k_3z}(\omega-\omega')E_{-k_1z}(\omega')$$

ここで右辺の第1項は第1のパルス電界及び第2のパルス磁場によって励起された波が右回りのサイクロトロン波の場合に$f_{k_3}(u,\omega)$を通じて2次オーダーの電荷を作る項で、第2項は第1及び第2のパルスによって励起された波が左回りの波の場合に寄与する項で、最後の第3項は第1,第2のパルスによって励起された波が磁場方向に伝わる縦波の場合に電荷に寄与する項である。従ってこのような波を励起しない限り、2次のオーダーの電荷、すなわち磁場方向に伝わる縦波を励起することは出来ない。

以下は、3·2·1節に述べたパルスで励起された波、すなわち右回りのサイクロトロン波による $f_{k_3}(u,\omega)$ に限定して議論を進める。（しかし左回り、及び縦波のみの場合も同様にして扱える）。従って（3·17）式は簡単化され、

$$f_{k_3}(u,\omega)=\frac{1}{i(k_3u-\omega)}\left\{\left(\frac{e}{m}\right)^2\frac{i}{c}\int_{-\infty+i\alpha'}^{\infty+i\alpha'}\frac{d\omega'}{2\pi}\frac{\partial}{\partial u}\left[\frac{F_{0z}(u)}{i(\omega'+k_1u-\omega_c)}\right]\right.$$

$$\left.\cdot B_{k_2}^{+}(\omega-\omega')E_{-k_1}^{-}(\omega')-\left(\frac{e}{m}\right)\frac{\partial F_{0z}(u)}{\partial u}E_{k_3z}(\omega)\right\} \qquad (3\cdot18)$$

で与えられる。この式を poisson 方程式と連立させることによって、2次のオーダーの電界を求めることが出来る。すなわち poisson 方程式は

$$i\,k_3E_{k_3z}(\omega)=4\pi\sum_j en_0\int_{-\infty}^{\infty}du\,f_{k_3}(u,\omega) \qquad (3\cdot19)$$

（3·18）式を（3·19）式に代入して、2次のオーダーの電界の Fourier-Laplace 変換形を得る。

$$E_{k_3z}(\omega)=-\frac{B_\perp^e E_\perp^e/2}{\varepsilon_p(k_3,\omega)}\sum_j\left(\frac{e}{m}\right)\frac{\omega_p^2}{c}\int_{-\infty}^{\infty}du\int_{-\infty+i\alpha'}^{\infty+i\alpha'}\frac{d\omega'}{2\pi} \qquad (3\cdot20)$$

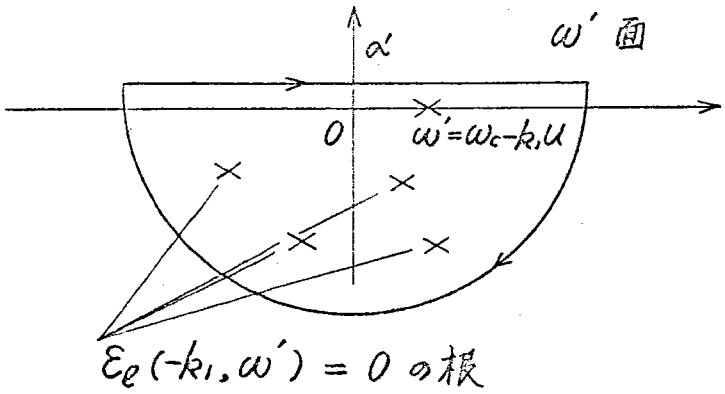
$$\cdot\frac{1}{i(\omega'+k_1u-\omega_c)}\,\frac{F_{0z}(u)}{(k_3u-\omega)^2}\,\frac{[-(\omega-\omega')^2+c^2k_2^2]e^{i(\omega-\omega')\tau}}{\varepsilon_r(k_2,\omega-\omega')}\,\frac{(-\omega'^2+c^2k_1^2)}{\varepsilon_\ell(-k_1,\omega')}$$

さらにこの式に Laplace 逆変換を行って $E_{k_3z}(t)$ を得る。

$$E_{k_3z}(t)=\int_{-\infty+i\alpha}^{\infty+i\alpha}\frac{d\omega}{2\pi}e^{-i\omega t}E_{k_3z}(\omega) \qquad (3\cdot21)$$

但し、積分は $\mathrm{Im}\,\omega=\alpha$ $(\alpha>\alpha'>0)$ の線にそって被積分関数のすべての特異点の上側を $-\infty$ から $+\infty$ まで積分する。

（3·21）式の ω' 及び ω についての積分は Cauchy の定理を使用して計算出来る。まず ω' については因子 $e^{-i\omega'\tau}$ を考えて、次のページの図のように積分路を ω' 面の下半面でとじ $\omega'=-k_1u+\omega_c$ における留数の寄与を取る。ここで、$\varepsilon_\ell(-k_1,\omega')=0$ の根も積分路の



中に留数を有するが前述のように $F_0(\underset{\sim}{v})$ が Maxwell 分布をしている場合には $Im\,\omega' < 0$ の根を持つから τ が充分に大きい場合にはこれによる寄与は小さくなるので $\varepsilon_l(-k_1, \omega') = 0$ の根による積分への寄与は無視出来る。すなわち $|\gamma^r_{k_1}\tau| \gg 1$、従って $\omega' = -k_1u + \omega_c$ のみの留数で ω' の積分を評価する。次に ω についても同様に $t > \tau$ の場合には因子 $e^{-i\omega(t-\tau)}$ を考えて、積分路を下半面で閉じ $\omega = k_3u$ なる二重極からの留数をとる。ここでも ω' についての積分の場合と同様に $\varepsilon_r(k_2, \omega + k_1u - \omega_c) = 0$ 及び $\varepsilon_p(k_3, \omega) = 0$ は積分路の中に極を有するが $(t-\tau)$ が充分に大きい場合には（すなわち $|\gamma^r_{k_2}(t-\tau)| \gg 1$ 及び $|\gamma^p_{k_3}(t-\tau)| \gg 1$）これらの寄与は無視することが出来て、$\omega$ の積分は $\omega = k_3u$ における二重極による留数で評価出来、結局として次の式を得ることが出来る。

$$E_{k_3z}(t) \simeq -\sum_j \frac{B_\perp^e E_\perp^e}{2}\left(\frac{q}{m}\right)\frac{\omega_p^2}{c}\, e^{-i\omega_c\tau}$$

$$\cdot\int_{-\infty}^{\infty} du\, \frac{F_{0z}(u)\{c^2k_1^2-(k_1u-\omega_c)^2\}\{c^2k_2^2-(k_2u-\omega_c)^2\}}{\varepsilon_l(-k_1,-k_1u+\omega_c)\,\varepsilon_r(k_2,k_2u-\omega_c)\,\varepsilon_p(k_3,k_3u)}\, e^{-ik_3u(t-\tau')}\, K \tag{3-22}$$

ここで

$$K \equiv \left\{ (t-\tau) - \frac{2i(k_2 u - \omega_c)}{[c^2 k_2^2 - (k_2 u - \omega_c)^2]} - \left[\frac{i\,\partial \varepsilon_p(k_3,\omega)/\partial\omega}{\varepsilon_p(k_3,\omega)} + \frac{i\,\partial \varepsilon_r(k_2,\omega+k_1 u-\omega_c)/\partial\omega}{\varepsilon_r(k_2,\omega+k_1 u-\omega_c)} \right] \Bigg|_{\omega=k_3 u} \right\} \tag{3·23}$$

$$\tau' \equiv \tau \frac{k_2}{k_3} \tag{3·24}$$

(3·22)式のuについての積分は $e^{-ik_3 u(t-\tau')}$ という因子のため $|t-\tau'|$ が大きいところでは phase mixing を起し零になるが、$|t| \simeq \tau'$ の近傍においての積分は phase mixing を起さなくなる。すなわち、2次のオーダーの $E_{k_3 z}(t)$ なる電界が現われることになる。(すなわちエコーである。)

ここで(3·22)を導びいたときに使用した条件を吟味してみる。まず $|\gamma_{k_1}^r \tau| \gg 1$ なる条件は二つのパルス間隔τを充分に大きく取れば満足出来る。次に $|\gamma_{k_2}^r (t-\tau)| \gg 1$ 及び $|\gamma_{k_3}^p (t-\tau)| \gg 1$ なる条件を考えてみる。(3·22)式によると、エコーが現われるのは $t \simeq \tau'$ の近傍であるから、このときに(3·22)式が充分に成立するためには $(t-\tau) \simeq \tau(k_1/k_3)$ が充分に大きければよいであろう。そのためには $k_3/k_1 \simeq 1$ のオーダーであることが望まれる。しかし普通プラズマでは $\omega_{pe}/\omega_{ce} > 1$ であるので温度にもよるが一般に $k_{\text{cyclotron wave}}/k_{\text{plasma wave}} > 1$ である。従って $k_3/k_1 \simeq 1$ の条件が満たされにくい。そのため τ が大きいことが必要である。しかしこのことはエコー形成にとって本質的なことではない。もし $\omega_{pe}/\omega_{ce} \lesssim 1$ の場合にはこれらの条件は満足される。(3·23)の項の中で、第1項は $t \simeq \tau'$ の近傍では一番大きい。従って $(t-\tau) \simeq (k_1/k_3)\tau$ とおいて第1項だけを残すと(3·22)式は次式のようになる。

$$E_{k_3 z}(t) \simeq -\sum_j \frac{B_\perp^e E_\perp^e}{2}\left(\frac{e}{m}\right)\frac{\omega_p^2}{c}\, e^{-i\omega_c \tau}\left(\frac{k_1 \tau}{k_3}\right)$$

$$\cdot\int_{-\infty}^{\infty} du\, \frac{F_{0z}(u)[c^2k_1^2-(k_1u-\omega_c)^2][c^2k_2^2-(k_2u-\omega_c)^2]}{\varepsilon_\ell(-k_1,-k_1u+\omega_c)\,\varepsilon_r(k_2,k_2u-\omega_c)\,\varepsilon_p(k_3,k_3u)}\, e^{-ik_3u(t-\tau)} \qquad (3\cdot25)$$

次節ではこの積分を　　電子プラズマについてもう少し詳しく評価する。

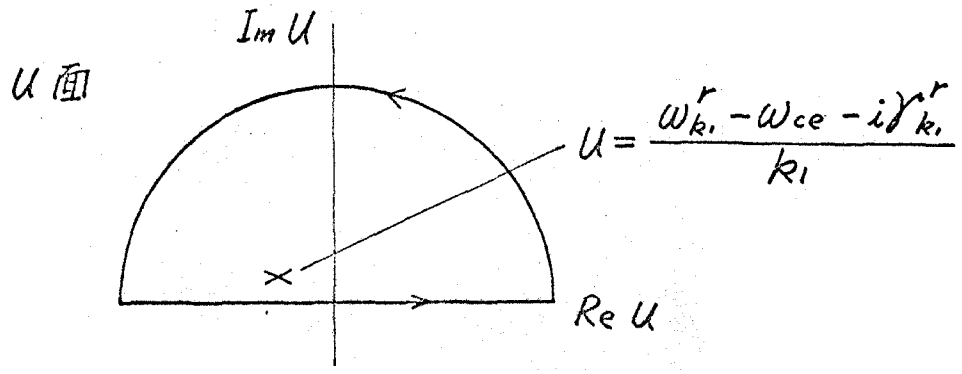
3·3　電子サイクロトロン波によるプラズマ波エコー

$\omega \simeq \omega_{ce}$ 及び $\omega \simeq \omega_{pe}$ の近傍ではイオンの寄与を無視出来るから (3·25) 式は次式のように書くことが出来る。

$$E_{k_3 z}(t) \simeq \frac{B_\perp^e E_\perp^e}{2}\left(\frac{e}{m}\right)\frac{k_1 \tau}{k_3}\, e^{i\omega_{ce}\tau}\left(\frac{\omega_{pe}^2}{c}\right)$$

$$\cdot\int_{-\infty}^{\infty} du\, \frac{F_{0z}^e(u)[c^2k_1^2-(k_1u+\omega_{ce})^2][c^2k_2^2-(k_2u+\omega_{ce})^2]\, e^{-ik_3u(t-\tau)}}{\varepsilon_\ell(-k_1,-k_1u-\omega_{ce})\,\varepsilon_r(k_2,k_2u+\omega_{ce})\,\varepsilon_p(k_3,k_3u)} \qquad (3\cdot26)$$

ここで $\omega_{ce} = eB_0/mc > 0$，$\omega_{pe}^2 = 4\pi e^2 n_0/m$ である。(3·26)式の積分はやはり Cauchy の留数定理を使用して評価出来る。まず u 面における極の位置を調べる。今、$F_{0z}^e(u)$ は Maxwell 分布を仮定する。$\varepsilon_\ell(-k_1,-k_1u-\omega_{ce})=0$ からくる極は (2·25) 式の関係式を利用し、最も減衰の小さい根をとると、$u=(\omega_{k_1}^r-\omega_{ce}-i\gamma_{k_1}^r)/k_1$ $(\gamma_{k_1}^r<0)$ となり、この極は u 面の上半面にある。同様に $\varepsilon_r(k_2,k_2u$



$+\omega_{ce})=0$, $\varepsilon_p(k_3, k_3 u)=0$ から来る極はそれぞれ、$u=(\omega^r_{k_2}-\omega_{ce}+i\gamma^r_{k_1})/k_2$, $u=(\pm\omega^p_{k_3}+i\gamma^p_{k_3})/k_3$ $(\gamma^r_{k_2}, \gamma^p_{k_3}<0)$ となり、u面の下半面に存在する。従って(3・26)式はこれらの留数を使用して次のように評価される。まず $t<\tau'$ のときには因子 $e^{-ik_3u(t-\tau')}$ を考慮して、積分路を上半面で閉じる。(この場合 $F^e_{0z}(u)\propto e^{-u^2/(2v_{Te}^2)}$ であるから、$I_m u$ の大きな値に対して発散する。しかし、$u\to i\infty$ のとき、(2・39), (2・40), (2・41) 式を考えると、$\varepsilon_\ell(-k_1, -k_1u-\omega_{ce})\propto e^{-u^2/(2v_{Te}^2)}$ であるから、互いに打消し合ってしまう)[2]。従って、$u=(\omega^r_{k_1}-\omega_{ce}-i\gamma^r_{k_1})/k_1$ の留数をとり次式を得る。

$$E_{k_3z}(t)\simeq i\pi B^e_\perp E^e_\perp \frac{\omega^2_{pe}}{c}\left(\frac{e}{m}\right)\frac{k_1\tau}{k_3}\, e^{i\omega_{ce}\tau}\, J_1$$

$$\cdot\exp\left[i\frac{k_3}{k_1}(\omega_{ce}-\omega^r_{k_1})t'\right]\exp\left[-\frac{k_3}{k_1}\gamma^r_{k_1}t'\right] \qquad (3\cdot27)$$

ここで

$$J_1=\frac{F^e_{0z}\left(\frac{\omega^r_{k_1}-\omega_{ce}-i\gamma^r_{k_1}}{k_1}\right)\left[c^2k_1^2-(\omega^r_{k_1}-i\gamma^r_{k_1})^2\right]}{\varepsilon_r\left[k_2, \frac{k_2}{k_1}(\omega^r_{k_1}-i\gamma^r_{k_1})-\frac{k_3}{k_1}\omega_{ce}\right]\varepsilon_p\left[k_3, \frac{k_3}{k_1}(\omega^r_{k_1}-i\gamma^r_{k_1})-\frac{k_3}{k_1}\omega_{ce}\right]}$$

$$\cdot\frac{\left[c^2k_2^2-\left\{\frac{k_2}{k_1}(\omega^r_{k_1}-i\gamma^r_{k_1})-\frac{k_3}{k_1}\omega_{ce}\right\}^2\right]}{\frac{\partial}{\partial u}\varepsilon_\ell(-k_1, -k_1u-\omega_{ce})\Big|_{u=(\omega^r_{k_1}-\omega_{ce}-i\gamma^r_{k_1})/k_1}} \qquad (3\cdot28)$$

及び

$$t'=t-\tau' \qquad (3\cdot29)$$

である。同様にして、$t>\tau'$ に対する $E_{k_3z}(t)$ のふるまいは u 面の下半面で積分路を閉じて、$u=(\omega^r_{k_2}-\omega_{ce}+i\gamma^r_{k_1})/k_2$ 及び $u=(\pm\omega^p_{k_3}+i\gamma^p_{k_3})/k_3$ による留数をとり、次式で与えられる。

$$E_{k_3z}(t) \simeq -i\pi B_\perp^e E_\perp^e \frac{\omega_{pe}^2}{c}\left(\frac{e}{m}\right)\frac{k_1\tau}{k_3}\, e^{i\omega_{ce}\tau}$$

$$\cdot\Big\{ J_2 \exp\left[i\frac{k_3}{k_2}(\omega_{ce}-\omega_{k_2}^r)t'\right] \exp\left[\frac{k_3}{k_2}\gamma_{k_2}^r t'\right]$$

$$+\sum_{\pm} J_3^{\pm} \exp\left[\mp i\omega_{k_3}^p t'\right] \exp\left[\gamma_{k_3}^p t'\right]\Big\} \qquad (3\cdot30)$$

ここで

$$J_2=\frac{F_{0z}^e\left(\frac{\omega^r(k_2)-\omega_{ce}}{k_2}\right)\left[c^2k_1^2-\left\{\frac{k_1}{k_2}\omega^r(k_2)+\frac{k_3}{k_2}\omega_{ce}\right\}^2\right]}{\varepsilon_\ell\left[-k_1,-\frac{k_1}{k_2}\omega^r(k_2)-\frac{k_3}{k_2}\omega_{ce}\right]\varepsilon_p\left[k_3,\frac{k_3}{k_2}\omega^r(k_2)-\frac{k_3}{k_2}\omega_{ce}\right]}$$

$$\cdot\frac{\left[c^2k_2^2-\omega^r(k_2)^2\right]}{\frac{\partial}{\partial u}\varepsilon_r(k_2,k_2u+\omega_{ce})\Big|_{u=[\omega^r(k_2)-\omega_{ce}]/k_2}} \qquad (3\cdot31)$$

$$J_3^{\pm}=\frac{F_{0z}^e\left(\frac{\omega^p(k_3)}{k_3}\right)\left[c^2k_1^2-\left\{\frac{k_1}{k_3}\omega^p(k_3)+\omega_{ce}\right\}^2\right]}{\varepsilon_\ell\left[-k_1,-\frac{k_1}{k_3}\omega^p(k_3)-\omega_{ce}\right]\varepsilon_r\left[k_2,\frac{k_2}{k_3}\omega^p(k_3)+\omega_{ce}\right]}$$

$$\cdot\frac{\left[c^2k_2^2-\left\{\frac{k_2}{k_3}\omega^p(k_3)+\omega_{ce}\right\}^2\right]}{\frac{\partial}{\partial u}\varepsilon_p(k_3,k_3u)\Big|_{u=\omega^p(k_3)/k_3}} \qquad (3\cdot32)$$

及び　$\omega^r(k_2)=\omega_{k_2}^r+i\gamma_{k_2}^r$,　$\omega^p(k_3)=\pm\omega_{k_3}^p+i\gamma_{k_3}^p$

すなわちエコーの形は $t=\tau'$ について対称ではなく、エコーは因子 $\exp[-(k_3/k_1)\gamma_{k_1}^r(t-\tau')]\exp[i(k_3/k_1)(\omega_{ce}-\omega_{k_1}^r)(t-\tau')]$ で立ち上がり、因子 $\exp[(k_3/k_2)\gamma_{k_2}^r(t-\tau')]\exp[i(k_3/k_2)(\omega_{ce}-\omega_{k_2}^r)\cdot(t-\tau')]$ と因子 $\exp[\gamma_{k_3}^p(t-\tau')]\exp[\pm i\omega_{k_3}^p(t-\tau')]$ で減衰してゆく。このことをもう少し物理的に次のように理解することが出来る。すなわち、才1パルスにより変調を受けた粒子によるエコーは、τ時間後に加えられた才2のパルスによって $t=\tau'(=\tau k_2/k_3)$ 時間後に現われる。つまり、時間τに比例する時間に現われる。才1のパルスによってプラズマ中には、これと自己無撞着な分散式を満足するような波が励起され、その波のふるまいは前節でも述べたよ

うに、$e^{(i\omega^r_{k_1}+\gamma^r_{k_1})t}$ である。この波によって粒子はやはり変調を受け、これと第2のパルスで作るエコーは $t=\tau'$ よりも早く現われる。このことはエコーが $\exp[-(k_3/k_1)\gamma^r_{k_1}(t-\tau')]$ で立ち上がることを説明している。このときの粒子が受けた変調周波数は $(\omega^r_{k_1}-\omega_{ce})$ である。又第1のパルスによって変調された粒子のメモリーが第2のパルスの自己無撞着な電場により逆転されて出来るエコーは $t=\tau'$ よりも後に現われる。このことはエコーが因子 $\exp[(k_3/k_2)\gamma^r_{k_2}(t-\tau')]$ で消えてゆくことを説明する。因子 $\exp[\gamma^p_{k_3}(t-\tau')]$ はこのようにして $t=\tau'$ に励起されたプラズマ振動が分散式を満足しながら減衰してゆくことを示している。定性的には以上のように理解出来るであろう。

3·4　数値解析

前節で求められたようにエコーの波形は大体 (3·27), (3·30) 式で与えられることが分った。しかしこの式は最も減衰率のふさい分散式の根による極の寄与のみを取り出しているので、$t\simeq\tau'$ の近傍では正確ではない。そこで本節では (3·26) 式を直接数値計算し、その結果を前節で求められた波形と比較するとともに、種々のパラメーターに対するエコー波のふるまいを吟味する。まず数値計算のために次のような無次元の量を定義して (3·26) 式を書き直す。すなわち

$$x=u/\sqrt{2}\,v_{Te}\ ,\quad \eta=c/\sqrt{2}\,v_{Te}\ ,\quad Q=\omega_{pe}/\omega_{ce}$$
$$K=\sqrt{2}\,k/k_D\ ,\quad T=\omega_{pe}(t-\tau') \qquad (3\cdot33)$$

を導入すると (3·26) 式は次式のように書き直すことが出来る。

$$E_{k_3z}(t)\simeq\frac{B^e_\perp E^e_\perp}{2\sqrt{2}}\left(\frac{e}{m}\right)\frac{k_D}{\eta}\frac{K_1}{K_3}(\omega_{pe}\tau)\,e^{i\frac{\omega_{pe}\tau}{Q}}\,G \qquad (3\cdot34)$$

$$G \equiv \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} dX\, e^{-X^2} \exp[-iK_3XT] \Big/ \Big\{ \Big[1 - \frac{(X+\frac{1}{K_1Q})}{K_1^2\{\eta^2-(X+\frac{1}{K_1Q})^2\}}\tilde{Z}(X)\Big]$$

$$\cdot\Big[1 - \frac{(X+\frac{1}{K_2Q})}{K_2^2\{\eta^2-(X+\frac{1}{K_2Q})^2\}}Z(X)\Big]\Big[1-\frac{1}{K_3^2}Z'(X)\Big]\Big\} \qquad (3\cdot35)$$

ここで Z 及び $\tilde{Z}$ は (2・40) 及び (2・41) 式で与えられる Plasma dispersion function である。

以下 G に関して行なった数値計算の結果を示す。図 2 は $K_1=0.01$, $K_2=0.91$, $Q=16.0$ 及び $\eta=250.0$ のときの X に対する G の被積分関数のふるまいを示すものである。ここで縦軸はすべて 1 に規格化されている。まず図 2-(a) は X に対する被積分関数の分母の実部及び虚部を示したもので、横軸は X である。図 2-(b) は G の被積分関数のうちで phase mixing に関係する項 $\exp(-ik_3XT)$ を除いた

$$F(X) \equiv e^{-X^2} \Big/ \Big\{ \Big[1 - \frac{X+\frac{1}{K_1Q}}{K_1^2\{\eta^2-(X+\frac{1}{K_1Q})^2\}}\tilde{Z}(X)\Big]$$

$$\cdot\Big[1 - \frac{X+\frac{1}{K_2Q}}{K_2^2\{\eta^2-(X+\frac{1}{K_2Q})^2\}}Z(X)\Big]\Big[1-\frac{1}{K_3^2}Z'(X)\Big]\Big\} \qquad (3\cdot36)$$

の X に対する変化を示している。

$F(X)$ は X の大きい値に対しては零になるが分母の小さい値に対してはピークを示す。図 2-(b) の例では三つのピークを示し、それぞれ次の分散式を満たす根の実部に対応している。

$$1-(X+\frac{1}{K_1Q})\tilde{Z}(X)\Big/\Big[K_1^2\{\eta^2-(X+\frac{1}{K_1Q})^2\}\Big] = 0 \qquad (3\cdot37)$$

すなわち

$$X = -\Big(1-\frac{\omega^r_{k_1}}{\omega_{ce}} + i\frac{\gamma^r_{k_1}}{\omega_{ce}}\Big)\Big/K_1Q \qquad (3\cdot38)$$

及び

$$1-\frac{1}{K_3^2}Z'(X)=0 \tag{3-39}$$

$$X=\left(\pm\frac{\omega_{k_3}^{p}}{\omega_{pe}}+i\frac{\gamma_{k_3}^{p}}{\omega_{pe}}\right)\Big/K_3 \tag{3-40}$$

K_2に対応するピークはK_2に対する分散式を満たす根の虚部が大きい（減衰が大きい）ため図にははっきり現われていない。この$F(X)$にphase mixingを起こす項 $\exp[-iK_3XT]$ を乗じた結果を種々の時刻Tに対して 図2-(c),(d),(e) に示してある。すなわち$F(X)\cdot\exp(-iK_3XT)$ はXに関して$2\pi/K_3T$の周期をもって振動する。$|T|$が大きい所では振動が激しくなる様子がよく理解出来る。これらを加え合わせた結果がGになるわけである。すなわちエコーの波形を得ることが出来る。他の種々のパラメーターに対するGの被積分関数のXに対するふるまいは 図2′ 及び 図2″ に示されており、エコー波の波形は$F(X)$の形に大きく依存する。図4-(a)はこの図2に対応するエコー波を示したものである。但し横軸は時間である。このエコー波の時間に対する指数的立ち上がり及び立ち下がりを示したのが 図3 であり、縦軸はGの絶対値を示している。図中の直線は前節で求めた最も減衰の小さい分散式の根による波形 $\exp[-(K_3/K_1)(\gamma_{k_1}^{r}/\omega_{pe})T]$ 及び $\exp[(\gamma_{k_3}^{p}/\omega_{pe})T]$ を示し、矢印は振動周期

$$2\pi\Big/\left|\frac{K_3}{K_1}\left(\frac{\omega_{ce}-\omega_{k_1}^{r}}{\omega_{pe}}\right)\right| \quad 及び \quad 2\pi\Big/\left|\omega_{k_3}^{p}/\omega_{pe}\right|$$

を示している。その値は 図1 から求めた値を代入した結果と$T\simeq 0'$の近傍を除けばよく一致している。

これらの例においてはK_2の値は大きく、オ2のパルスによって励起された波は短い時間の間に減衰してしまい、K_2に関する分母は

$$1-\left(X+\frac{1}{K_2Q}\right)Z(X)\Big/\left[K_2^2\left\{\eta^2-\left(X+\frac{1}{K_2Q}\right)^2\right\}\right]\simeq 1$$

である。

しかしながら、次章でも述べるように才2のパルスによって励起される自己無撞着な場はエコー形成には本質的なものではなく、エコーの波形に影響を与えるのみである。

図4-(b, c, d, e)は種々のパラメーターに対するエコー波Gの波形を示している。

図4-(b)と(c)は異なったηの値に対する例であって、$T>0$のふるまいは $\exp[-i(\omega^p_{k_3}/\omega_{pe})T]\exp[(\gamma^p_{k_3}/\omega_{pe})T]$ $(\simeq \exp[(-0.3+i1.6)T]$ に比例し、同じであるが $T<0$ におけるふるまいはηが異なるため 図1から求めた値によれば、それぞれ周期$T=6.9$及び3.4で振動しながら、$e^{0.51T}$ 及び $e^{0.054T}$ と違った立ち上がりを示している。

図4-(d)に示されたエコー波は図2′に対応するもので図4-(a)に示した例と同じK_3を持つ場合である。しかしながら、この場合にはK_1とK_2は共に大きい値であるため、パルスによって励起された波は早く減衰するので $T<0$ のときの波形は図4-(a)のものとは異なっている。しかし $T>0$での波形は両方の例では、殆んどK_3の値できまるので同じふるまいを示している。最後に図4-(e)で示したものはK_3の比較的小さい値に対する例であって、$T<0$に対する振動周期が他の例に比べて非常に長く、エコーとしてはおもしろい例であるが、このエコーの振幅は他の四つの例に比べて小さく、他の例の約1%くらいである。このことはこの例で示したエコー波が縦波の分散式を満足しない波であるためと思われる。

3·5　結　言

時間間隔τをおいて、外部からプラズマに加えた二つのパルス電磁界によってプラズマ中に励起された波数k_1及びk_2の二つのサイクロトロン波により、第1のパルスを加えた時間から$t=\tau k_2/(k_2-k_1)$ $(\equiv \tau')$時間後に波数k_2-k_1を持った2次のオーダーのエコー波(縦波)が励起されることを理論的に示し、さらに電子サイクロトロン波に対するエコー波の波形を数値計算した結果を示した。エコー波は時間$t<\tau'$に対しては大体因子$\exp[i(k_3/k_1)(\omega_{ce}-\omega^r_{k_1})(t-\tau')]\cdot\exp[-(k_3/k_1)\gamma^r_{k_1}(t-\tau')]$に比例した時間的ふるまいを示す。すなわちエコー波の立ち上がりの周波数は縦波に関するエコー波に比べてω_{ce}だけドップラーシフトする。本節での解析は第1及び第2パルスによって共に右回りの波を励起した場合の例について行ったが同様な方法で左回りの波(イオンサイクロトロン波)に対してもエコー波が励起される。この場合には(3·17)式の第2項がエコーに寄与する。しかし右回りと左回りの前波の組によっては$k_3=|k_2|-|k_1|$の波数を持つエコーは励起されない。又$k_3=|k_2|+|k_1|$なる波数を持つ時間エコーは$\tau'=\tau k_2/k_3<\tau$なる故に現われない。

第4章　Landauの理論の初期値から考察したサイクロトロン波によるプラズマ波エコー

4·1　緒言

前章では二つのサイクロトロン波により縦波のエコーが励起される過程を詳しく論じたが、本章ではこの問題をプラズマ波に対するLandauの線形理論の立場から論じ、エコーの物理的意味及びエコー現象に対する理論的解析の本質を明らかにする。

4·2　Landauの理論に関する考察

1946年Landauによって導かれた線形理論[30]にもとづく電子プラズマ振動及びそのLandau減衰の現象とエコー現象の間の関係をよりはっきりさせるため、本節ではLandauの導いた理論を簡単に述べ、使用された仮定について考察する。

Landauは無限の一様で衝突のないプラズマを考え、その中における電子のプラズマ振動に関する現象を扱った。振動数がイオンのプラズマ振動周波数に比べて非常に高い現象を扱うため、イオンは一様な背景と考え（$\omega \gg \omega_{pi}$）、ある時刻 $t=0$ に電子の分布関数に平衡状態 $F_{0z}(u)$ からのずれ $f(z,u,t=0)$ なる摂動が与えられたとし、その後にどのような振動が起こるかを線形化されたVlasov方程式を基礎式として初期値問題として扱った。Landauは方程式を解くにあたりFourier-Laplace変換を用い、その結果電界のFourier成分として次式を導いた。

$$E_{kz}(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty+i\alpha}^{\infty+i\alpha}d\omega\, e^{-i\omega t}\frac{4\pi e n_0 i}{k}$$

$$\cdot\left\{\int_{-\infty}^{\infty}\frac{g(u)}{-i\omega+iku}du\Big/\left[1-\frac{4\pi i e^2 n_0}{km}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\partial F_{0z}(u)}{\partial u}\frac{du}{(-i\omega+iku)}\right]\right\}\quad(4\cdot1)$$

但し、$g(u)=f_k(u,t=0)$ で分布関数の初期値の Fourier 成分である。2·4·1節でも述べたように Landau は (4·1) 式の積分を次のような仮定のもとに評価した。まず第1に $g(u)$ は u に関する整関数であると仮定した。従って (4·1) 式の積分の分子 $\int_{-\infty}^{\infty} g(u)/(-i\omega+iku)du$ は ω 面に特異点を持たない。第2の仮定として ω に関する積分路を下半面に下げ、分母の 0 点からくる極の寄与をひろった。従って (2·30) 式の右辺の第2項を無視した。後者の仮定は多くの理論家によって議論されてきたが、数学的な厳密さを除いては、もし被積分関数の $Im\,\omega \to -\infty$ におけるふるまいが、$\frac{1}{\omega}e^{i\omega t}$ に比べてゆっくり増大するものであれば無視出来ると考えられる[3]。しかし第1の仮定はある場合には問題がある。すなわち 2·4·1節に述べたように $f_k(u,t=0)$ がもし整関数であっても、ある時間たった後の分布関数 $f_k(u,t)$ は整関数ではなくなるから初期時間を $t>0$ にえらび、そのときの分布を初期分布にして現象を扱う場合、特にエコーのような場合にはこのことが重要な意味を持ってくる。

4·3　二つのサイクロトロン波によって励起されるエコー波と Landau の理論における分布関数の初期値 $f_k(u,t=0)$ の形との関係

本節においてはサイクロトロン波によるプラズマ波エコーの現象を Landau の線形理論における分布関数の初期値に関連づけてみる。

波数 k_3 に対する方程式は Laplace 変換を使用しない形で考えると (3·15) に対応する方程式として次式がえられる。

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+ik_3u\right)f_{k_3}(u,t)+\frac{e}{m}E_{k_3z}(t)\frac{\partial F_{0z}(u)}{\partial u}$$

$$= -\frac{q}{m}\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\infty} v_\perp dv_\perp \Big\{ \Big[\underset{\sim}{E}_{k_2}(t) + \frac{1}{c}\underset{\sim}{v}\times \underset{\sim}{B}_{k_2}(t) \Big] \cdot \frac{\partial}{\partial \underset{\sim}{v}} f_{-k_1}(\underset{\sim}{v}, t)$$

$$+ \Big[\underset{\sim}{E}_{-k_1}(t) + \frac{1}{c}\underset{\sim}{v}\times \underset{\sim}{B}_{-k_1}(t) \Big] \cdot \frac{\partial}{\partial \underset{\sim}{v}} f_{k_2}(\underset{\sim}{v}, t) \Big\} \qquad (4\cdot 2)$$

前章におけるように、オ1のパルス(3・1)が加えられた後、時刻 $t=\tau$ にオ2のパルス(3・8)が加えられたとして $t=\tau$ における分布関数 $f_{k_3}(u, \tau+0)$ の形を求めてみる。このために(4・2)を $t=\tau-0$ から $t=\tau+0$ にわたり、t に関して積分を行うと次式が得られる。

$$f_{k_3}(u, \tau+0) = -\frac{q}{m}\frac{B_\perp^e}{2c}\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\infty} v_\perp^2 dv_\perp e^{i\varphi}\frac{\partial}{\partial u} f_{-k_1}(\underset{\sim}{v}, \tau) \qquad (4\cdot 3)$$

ここで(4・2)式におけるエコーには関係のない右辺のオ2項及び縦波によって励起されるエコー波を扱うときに関係する項、すなわち $\underset{\sim}{E}_{k_2}(t)\cdot\frac{\partial}{\partial \underset{\sim}{v}} f_{-k_1}(\underset{\sim}{v}, t)$ の項は省略し、$\frac{1}{c}\underset{\sim}{v}\times \underset{\sim}{B}_{k_2}(t)$ を(3・8)で近似し、積分を行った。(4・3)式において $f_{-k_1}(\underset{\sim}{v}, \tau)$ は(3・7)式より計算出来、次式で与えられる。

$$f_{-k_1}(\underset{\sim}{v}, \tau) = -\frac{q}{\sqrt{2}\,m} e^{-i\varphi} E_{-k_1}^{-}(-k_1 u + \omega_c) \exp[-i(-k_1 u + \omega_c)\tau] \frac{\partial F_0(\underset{\sim}{v})}{\partial v_\perp} \qquad (4\cdot 4)$$

$$E_{-k_1}^{-}(\omega) = \frac{E_\perp^e}{\sqrt{2}} \frac{-\omega^2 + c^2 k_1^2}{\varepsilon_\ell(-k_1, \omega)} \qquad (4\cdot 5)$$

(4・4),(4・5)式を(4・3)式に代入することにより、分布関数 $f_{k_3}(u, t)$ の初期値を得ることが出来る。すなわち

$$f_{k_3}(u, \tau+0) = \frac{-E_\perp^e B_\perp^e}{2c}\left(\frac{q}{m}\right)^2 \frac{\partial}{\partial u}\left[e^{-i(-k_1 u + \omega_c)\tau} \frac{c^2 k_1^2 - (k_1 u - \omega_c)^2}{\varepsilon_\ell(-k_1, -k_1 u + \omega_c)} F_{0z}(u) \right] \qquad (4\cdot 6)$$

電界 $E_{k_3 z}(t)$ は線形化 Vlasov 方程式に対する Landau の解を使用することによって得ることが出来る。

$$E_{k_3 z}(t) \begin{cases} = \displaystyle\int_{-\infty+i\alpha}^{\infty+i\alpha} \frac{d\omega}{2\pi} \frac{e^{-i\omega(t-\tau)}}{\varepsilon_p(k_3, \omega)} \sum_j \frac{4\pi q_j n_0}{i k_3} \int_{-\infty}^{\infty} du \frac{f_{k_3}(u, \tau+0)}{(-i\omega + i k_3 u)} & \text{for } t > \tau \end{cases}$$

$$\Big|_{=0} \qquad \text{for } t<\tau \tag{4·7}$$

ここで $\alpha>0$

(4·7)式に(4·6)式を代入して、次式を得る。

$$E_{k_3z}(t)\simeq-\sum_j \frac{B_\perp^e E_\perp^e}{2}\left(\frac{q}{m}\right)\frac{\omega_p^2}{c}\, e^{-i\omega_c\tau}\,\frac{k_1\tau}{k_3}$$

$$\cdot\int_{-\infty}^{\infty} du\,\frac{F_{0z}(u)\left(c^2k_1^2-(k_1u-\omega_c)^2\right)}{\varepsilon_\ell(-k_1,-k_1u+\omega_c)\,\varepsilon_p(k_3,k_3u)}\, e^{-ik_3u(t-\tau')} \tag{4·8}$$

$$\tau'=k_2\tau/(k_2-k_1)$$

(4·8)式は(3·25)式において、才2のパルスによってプラズマ中に励起された波の寄与を無視した形にほかならない。(4·8)式は前章で行った方法で計算することが出来、次のような波形を持つ。すなわち

$$E_{k_3z}(t)\propto\begin{cases} e^{-\frac{k_3}{k_1}(i\omega_{k_1}^r+\gamma_{k_1}^r)(t-\tau')}\cdot e^{-i\omega_c\frac{k_3}{k_1}(t-\tau)} & (t<\tau') \\ e^{(-i\omega_{k_3}^p+\gamma_{k_3}^p)(t-\tau')}\cdot e^{-i\omega_c\tau} & (t>\tau') \end{cases}$$

以上の解析から分かるように才2のパルスによって、プラズマ中に励起された自己無撞着な場はエコーに本質的ではない。

4·4　結　言

二つのサイクロトロン波によって励起されるプラズマ波エコー(縦波)は初期時間を適当に選ぶことによって、Landau の縦波に対する線形理論から導けることを示した。つまり才2のパルス電磁界を加えることにより、モード結合の項を通して $f_{k_3}(u,t)$ に対する初期値が形成され、その $f_{k_3}(u,\tau)$ は整関数ではないため、Landau の解(4·1)式において分子の特異点がエコー形成に寄与する。従ってエコー現象の解析は才2パルスによって、エコー波に対する分布関数の初期値が形成されるところ以外は線形理論で取り扱える。

第5章　サイクロトロン波とプラズマ波によって励起されるサイクロトロン波エコー

5·1　緒言

本章ではサイクロトロン波とプラズマ波による2次のオーダーの横波のエコー波励起を試論する。すなわち、第1のパルス電界により、プラズマ中に波数 k_1 を持ったサイクロトロン波を励起し、この波がサイクロトロン減衰を受けて消えてしまうような充分に長い時間後に第2のパルス電界により、プラズマ中に波数 k_2 を持った縦波を励起すると、この波が Landau 減衰してしまった後に波数 k_3 $(=k_2-k_1)$ を持つ2次のオーダーの横波のエコーが現われることを理論的解析により示す。

5·2　外部磁場中のプラズマにおける横波のエコー

本節では一様な外部磁場がかけられた無限大のプラズマ中において磁場方向に伝わる2次のオーダーの横波のエコーを取扱う。

時刻 $t=0$ で平衡状態にあるプラズマに外部から波数 k_1 を持ったパルス電界が加えられたとする。すなわち

$$\underset{\sim}{E}^{ext}(z,t)=E_1^e\{\cos k_1 z\cdot \underset{\sim}{e}_x \mp \sin k_1 z\cdot \underset{\sim}{e}_y\}\delta(t) \qquad (5\cdot1)$$

なるパルスが加えられた後のプラズマのふるまいは、3·2·節で述べた如くで、プラズマ中には波が励起され、その波はサイクロトロン減衰を受けて消えてしまう[(3·6)式参照]。しかし分布関数には(3·7)式で示されたような振動が残っている。このように第1のパルスによって励起された横波がサイクロトロン減衰を受けて、充分に減衰してしまった後のある時刻 $t=\tau$ $(\tau \gg 1/\gamma_{k_1})$ に再びプラ

ズマに外部より波数 k_2 なる次式で与えられるような縦波のパルスが加えられたとする。すなわち　$(k_2 > k_1 > 0)$

$$E_z^{ext}(z,t) = E_{\parallel}^{e} \cos k_2 z \cdot \delta(t-\tau) \qquad (5\cdot 2)$$

ここで $E_{\parallel}^{e}$ はパルス電界の振幅である。このパルス電界の Fourier-Laplace 変換形は次式で与えられる。

$$E_{kz}^{ext}(\omega) = \frac{E_{\parallel}^{e}}{2}\left[\delta_{k,k_2} + \delta_{k,-k_2}\right] e^{i\omega\tau} \qquad (5\cdot 3)$$

このパルス電界によりプラズマ中にはやはり波が励起され、その Fourier-Laplace 変換形は

$$E_{kz}(\omega) = \frac{E_{\parallel}^{e}}{2}\frac{1}{\varepsilon_p(k,\omega)}\left[\delta_{k,k_2} + \delta_{k,-k_2}\right] e^{i\omega\tau} \qquad (5\cdot 4)$$

で与えられる。この電界は Landau 減衰を受けて、消えてしまうが、この場合も才3章に示した場合と同じように才1のパルスによって変調を受けた分布関数が才2のパルスにより、2次のオーダーの変調を受ける。そしてこの場合には才3章の場合と異なって横波のエコーを励起する。以下この横波のエコーを解析する。この場合も2次のオーダーの分布関数 $f_{k_3}(\underset{\sim}{v},\omega)$ に対する方程式は (3·14) で与えられる。すなわち

$$\frac{\partial}{\partial\varphi} f_{k_3}(\underset{\sim}{v},\omega) + \frac{i(\omega - k_3 u)}{\omega_c} f_{k_3}(\underset{\sim}{v},\omega) = \frac{G_1(\varphi)}{\omega_c} + \frac{G_2(\varphi)}{\omega_c} \qquad (5\cdot 5)$$

ここで

$$G_1(\varphi) = \frac{q}{m}\left[\underset{\sim}{E}_{k_3}(\omega) + \frac{1}{c}\underset{\sim}{v}\times\underset{\sim}{B}_{k_3}(\omega)\right]\cdot\frac{\partial}{\partial\underset{\sim}{v}} F_0(\underset{\sim}{v}) \qquad (5\cdot 6)$$

$$G_2(\varphi) = \frac{q}{m}\int_{-\infty+i\alpha'}^{\infty+i\alpha'}\frac{d\omega'}{2\pi}\left\{\left[\underset{\sim}{E}_{k_2}(\omega-\omega') + \frac{1}{c}\underset{\sim}{v}\times\underset{\sim}{B}_{k_2}(\omega-\omega')\right]\cdot\frac{\partial}{\partial\underset{\sim}{v}} f_{k_1}(\underset{\sim}{v},\omega')\right.$$
$$\left. + \left[\underset{\sim}{E}_{-k_1}(\omega-\omega') + \frac{1}{c}\underset{\sim}{v}\times\underset{\sim}{B}_{-k_1}(\omega-\omega')\right]\cdot\frac{\partial}{\partial\underset{\sim}{v}} f_{k_2}(\underset{\sim}{v},\omega')\right\} \qquad (5\cdot 7)$$

ここで $G_2(\varphi)$ 中の $\underset{\sim}{E}, \underset{\sim}{B}, f$ は加えたパルスに対して1次のオーダーの量であり、$f_{k3}, \underset{\sim}{E}_{k3}, \underset{\sim}{B}_{k3}$ は2次のオーダーの量である。ここでは才1のパルスにより励起された場が充分サイクロトロン減衰を受けて消えてしまった後の現象を扱うため(5·7)において $G_2(\varphi)$ の才2項は省略し、さらに才1項のうち $\underset{\sim}{v}\times\underset{\sim}{B}_{k2}$ の項は才1のパルスで横波を励起し、才2のパルスで縦波を励起する限りにおいてエコーには関係しない項であるから これも省略すると $G_2(\varphi)$ は次式で与えられる。

$$G_2(\varphi) \simeq \frac{q}{m}\int_{-\infty+i\alpha'}^{\infty+i\alpha'} \frac{d\omega'}{2\pi}\, \underset{\sim}{E}_{k2}(\omega-\omega')\cdot\frac{\partial}{\partial \underset{\sim}{v}} f_{-k_1}(\underset{\sim}{v},\omega') \qquad (5\cdot 8)$$

(5·5)式は(2·14)式と同様に解くことが出来、解は(2·16)式で与えられる。すなわち(付録II参照)

$$f_{k3}(\underset{\sim}{v},\omega)=\frac{q}{\sqrt{2}m}\left[\frac{E^{+}_{k3}(\omega)e^{i\varphi}}{i(\omega-k_3u+\omega_c)}+\frac{E^{-}_{k3}(\omega)\,e^{-i\varphi}}{i(\omega-k_3u-\omega_c)}\right]\frac{\partial F_0(\underset{\sim}{v})}{\partial v_\perp}$$

$$+\frac{q}{m}\frac{\partial F_0(\underset{\sim}{v})/\partial u}{i(\omega-k_3u)}E_{k3z}(\omega) \qquad (5\cdot 9)$$

$$+\frac{q}{m}\int_{-\infty+i\alpha'}^{\infty+i\alpha'}\frac{d\omega'}{2\pi}E_{k2z}(\omega-\omega')\left\{\frac{q}{\sqrt{2}m}\frac{E^{+}_{-k_1}(\omega')e^{i\varphi}}{i(\omega-k_3u+\omega_c)}\frac{\partial}{\partial u}\left[\frac{\partial F_0(\underset{\sim}{v})/\partial v_\perp}{i(\omega'+k_1u+\omega_c)}\right]\right.$$

$$\left.+\frac{q}{\sqrt{2}m}\frac{E^{-}_{-k_1}(\omega')e^{-i\varphi}}{i(\omega-k_3u-\omega_c)}\frac{\partial}{\partial u}\left[\frac{\partial F_0(\underset{\sim}{v})/\partial v_\perp}{i(\omega'+k_1u-\omega_c)}\right]\right\}$$

(5·9)式を Maxwell 方程式(2·12)に代入して次式を得る。

$$E^{\mp}_{k3}(\omega)=\frac{1}{\varepsilon_{l,t}(k_3,\omega)}\sum_j\left(\frac{q}{m}\right)\omega_p^2\int_{-\infty+i\alpha'}^{\infty+i\alpha'}\frac{d\omega'}{2\pi}$$

$$\cdot\int_{-\infty}^{\infty}\frac{du\,k_3\omega}{(\omega-k_3u\mp\omega_c)^2}\,E^{\mp}_{-k_1}(\omega')\,E_{k2z}(\omega-\omega')\,\frac{F_{0z}(u)}{i(\omega'+k_1u\mp\omega_c)} \qquad (5\cdot 10)$$

ここで $E^{-}_{-k_1}(\omega')$ 及び $E_{k2z}(\omega-\omega')$ は(3·5)及び(5·4)で与えられる。従ってエコー波の電界 $E^{\mp}_{k3}(t)$ は次式で与えられる。

$$E^{\mp}_{k_3}(t)=\frac{E^e_{\parallel}E^e_{\perp}}{2\sqrt{2}}\int_{-\infty+i\alpha}^{\infty+i\alpha}\frac{d\omega}{2\pi}\frac{e^{-i\omega(t-\tau)}}{\varepsilon_{\ell,r}(k_3,\omega)}\sum_j\left(\frac{q}{m}\right)\omega_p^2\int_{-\infty}^{\infty}du\frac{\omega k_3}{(\omega-k_3u\mp\omega_c)^2}$$

$$\cdot\int_{-\infty+i\alpha'}^{\infty+i\alpha'}\frac{d\omega'}{2\pi}\frac{F_{0z}(u)}{i(\omega'+k_1u\mp\omega_c)}\frac{e^{-i\omega'\tau}}{\varepsilon_p(k_2,\omega-\omega')}\frac{(-\omega'^2+c^2k_1^2)}{\varepsilon_{\ell,r}(-k_1,\omega')}\qquad(5\cdot11)$$

(5·11)式において ω' 及び ω に関する積分は第3章において(3·22)を導いたと同様にして評価出来る。すなわち $\omega'=-k_1u\pm\omega_c$、及び $\omega=k_3u\pm\omega_c$ からくる極の寄与のみをひろい $\varepsilon_{\ell,r}(-k_1,\omega')=0$, $\varepsilon_p(k_2,\omega-\omega')=0$, $\varepsilon_{\ell,r}(k_3,\omega)=0$ からくる極の寄与は無視して

$$(|\gamma^{r,\ell}_{k_1}\tau|\gg1,\ |\gamma^{p}_{k_2}(t-\tau)|\gg1,\ |\gamma^{\ell,r}_{k_3}(t-\tau)|\gg1)$$

$$E^{\mp}_{k_3}(t)\simeq\sum_j\frac{E^e_{\parallel}E^e_{\perp}}{2\sqrt{2}}\left(\frac{q}{m}\right)\omega_p^2k_3\,e^{\mp i\omega_c t}$$

$$\cdot\int_{-\infty}^{\infty}du\frac{F_{0z}(u)e^{ik_3u(\tau'-t)}[c^2k_1^2-(k_1u\mp\omega_c)^2](k_3u\pm\omega_c)K}{\varepsilon_{\ell,r}(-k_1,-k_1u\pm\omega_c)\varepsilon_p(k_2,k_2u)\varepsilon_{\ell,r}(k_3,k_3u\pm\omega_c)}\qquad(5\cdot12)$$

$$K\equiv\left\{(t-\tau)-\frac{1}{i(k_3u\pm\omega_c)}-\left[\frac{i\partial\varepsilon_{\ell,r}(k_3,\omega)/\partial\omega}{\varepsilon_{\ell,r}(k_3,\omega)}+\frac{i\partial\varepsilon_p(k_2,\omega+k_1u\mp\omega_c)/\partial\omega}{\varepsilon_p(k_2,\omega+k_1u\mp\omega_c)}\right]_{\omega=k_3u\pm\omega_c}\right\}$$

及び (5·13)

$$\tau'=\frac{k_2}{k_3}\tau$$

(5·12)式は $t\simeq\tau'$ の付近では phase mixing を起こさず、電界 $E^{\mp}_{k_3}(t)$ が現われる。すなわち横波のエコーが現われる。

(5·13)式からエコーの波形を得るために第3章で行ったと同様に $K\simeq(t-\tau)\simeq\tau(k_1/k_3)$ とし、最も $|\mathrm{Im}\,\omega|$ のふさい極の寄与のみで積分を評価する。すなわち $t<\tau'$ のとき

$$E^{\mp}_{k_3}(t)\simeq\frac{\pi E^e_{\perp}E^e_{\parallel}}{\sqrt{2}}\sum_j ik_3\tau\left(\frac{k_1}{k_3}\right)\omega_p^2\left(\frac{q}{m}\right)$$

$$\cdot\exp\left[\frac{k_3}{k_1}(i\omega^{r,\ell}_{k_1}+\gamma^{r,\ell}_{k_1})(\tau'-t)\right]\exp\left[\pm i\frac{k_2}{k_1}\omega_c(\tau-t)\right]J_1\qquad(5\cdot14)$$

$$J_1 \equiv \frac{F_{0z}[(\omega_{k_1}^{r,\ell} \pm \omega_c - i\gamma_{k_1}^{r,\ell})/k_1][c^2k_1^2 - (\omega_{k_1}^{r,\ell} - i\gamma_{k_1}^{r,\ell})^2]}{\varepsilon_p[k_2, \frac{k_2}{k_1}(\omega_{k_1}^{r,\ell} - i\gamma_{k_1}^{r,\ell}) \pm \frac{k_2}{k_1}\omega_c]}$$

$$\cdot \frac{[\frac{k_3}{k_1}(\omega_{k_1}^{r,\ell} - i\gamma_{k_1}^{r,\ell}) \pm \frac{k_2}{k_1}\omega_c]}{\varepsilon_{\ell,r}[k_3, \frac{k_3}{k_1}(\omega_{k_1}^{r,\ell} - i\gamma_{k_1}^{r,\ell}) \pm \frac{k_2}{k_1}\omega_c]\frac{\partial}{\partial u}\varepsilon_{\ell,r}(-k_1, -k_1 u \pm \omega_c)\Big|_{u=\frac{\omega_{k_1}^{r,\ell} \pm \omega_c - i\gamma_{k_1}^{r,\ell}}{k_1}}} \qquad (5\cdot15)$$

又　$t > \tau'$ のときには

$$E_{k_3}^{\mp}(t) \simeq -\frac{\pi E_\perp^e E_\parallel^e}{\sqrt{2}} \sum_j i k_3 \tau\left(\frac{k_1}{k_3}\right) \omega_p^2 \left(\frac{e}{m}\right)$$

$$\cdot\Big\{\exp\left[\frac{k_3}{k_2}(i\omega_{k_2}^p - \gamma_{k_2}^p)(\tau' - t)\right] \cdot \exp[\mp i\omega_c t]\, J_2$$

$$+ \exp[(i\omega_{k_3}^{\ell,r} - \gamma_{k_3}^{\ell,r})(\tau' - t)] \cdot \exp[\mp i\omega_c \tau']\, J_3\Big\} \qquad (5\cdot16)$$

$$J_3 \equiv \frac{F_{0z}[(\omega_{k_3}^{\ell,r} \mp \omega_c + i\gamma_{k_3}^{\ell,r})/k_3][c^2k_1^2 - \{-\frac{k_1}{k_3}(\omega_{k_3}^{\ell,r} + i\gamma_{k_3}^{\ell,r}) \pm \frac{k_2}{k_3}\omega_c\}^2]}{\varepsilon_{\ell,r}[-k_1, -\frac{k_1}{k_3}(\omega_{k_3}^{\ell,r} + i\gamma_{k_3}^{\ell,r}) \pm \frac{k_2}{k_3}\omega_c]}$$

$$\cdot \frac{(\omega_{k_3}^{\ell,r} + i\gamma_{k_3}^{\ell,r})}{\varepsilon_p[k_2, \frac{k_2}{k_3}(\omega_{k_3}^{\ell,r} + i\gamma_{k_3}^{\ell,r}) \mp \frac{k_2}{k_3}\omega_c]\frac{\partial}{\partial u}\varepsilon_{\ell,r}(k_3, k_3 u \pm \omega_c)\Big|_{u=\frac{\omega_{k_3}^{\ell,r} \mp \omega_c + i\gamma_{k_3}^{\ell,r}}{k_3}}} \qquad (5\cdot17)$$

$$J_2 \equiv \frac{F_{0z}\left(\frac{\omega_{k_2}^p + i\gamma_{k_2}^p}{k_2}\right)}{\varepsilon_{\ell,r}[-k_1, \frac{-k_1}{k_2}(\omega_{k_2}^p + i\gamma_{k_2}^p) \pm \omega_c]}$$

$$\cdot \frac{[c^2k_1^2 - \{-\frac{k_1}{k_2}(\omega_{k_2}^p + i\gamma_{k_2}^p) \pm \omega_c\}^2][\frac{k_3}{k_2}(\omega_{k_2}^p + i\gamma_{k_2}^p) \pm \omega_c]}{\varepsilon_{\ell,r}[k_3, \frac{k_3}{k_2}(\omega_{k_2}^p + i\gamma_{k_2}^p) \pm \omega_c]\frac{\partial}{\partial u}\varepsilon_p(k_2, k_2 u)\Big|_{u=\frac{\omega_{k_2}^p + i\gamma_{k_2}^p}{k_2}}} \qquad (5\cdot18)$$

$$t' \equiv t - \tau'$$

すなわち、エコー波は因子 $\exp[-(k_3/k_1)\gamma_{k_1}^{r,\ell} t']\exp[-i\frac{k_3}{k_1}(\omega_{k_1}^{r,\ell} \pm \omega_c) \cdot t']\exp[\mp i\omega_c t]$ で成長し、因子 $\exp[(k_3/k_2)\gamma_{k_2}^p t']\exp[-i(k_3/k_2) \cdot \omega_{k_2}^p t']\exp[\mp i\omega_c t]$ と $\exp[\gamma_{k_3}^{\ell,r} t']\exp[-i\omega_{k_3}^{\ell,r} t']\exp[\mp i\omega_c \tau']$ で減衰する。

5·3　結　言

サイクロトロン波と縦波によって横波のエコー波が励起されることを理論的に示し、そのエコー波の波形が求められた。エコーが出現する時間は第3章における二つのサイクロトロン波による縦波のエコー波の励起の場合と同じであって、この場合には第2のパルス電界によってプラズマ中に励起される自己無撞着な電場はエコー波の励起に関しては本質的なものではなく、第1のパルスによって励起されたサイクロトロン波に関する分布関数に残る振動の位相の進む方向を逆転するに必要なだけである。従ってエコー波の減衰は殆んど $\exp[\gamma_{k_3}^{\ell,r} t'] \cdot \exp[-i\omega_{k_3}^{\ell,r} t']$ なる因子のみに比例する。

第6章　結論

本章はこの論文に関する結論で、本研究の成果を総括して述べ、さらに今後に残された問題について言及する。

第1章ではプラズマ中における縦波のエコー現象について、その概要及び物理的意味について述べ、さらにプラズマ波のエコー現象に関連するGould等の研究を概説した。次にサイクロトロン波に関するエコー現象を説明し、プラズマ中の波に関する研究を行う上でこの横波に関連したエコー現象の重要性について述べ、本研究の目的及び意義を明らかにした。

第2章ではエコー現象に関連して、サイクロトロン波及びプラズマ波の性質を線形理論の範囲で概論し、後章の解析に必要な表式及びサイクロトロン波に関する分布関数の時間についての漸近的なふるまいを示した。さらに電子サイクロトロン波に対する分散式の数値計算の結果を図に示した

第3章では著者の研究したサイクロトロン波のエコー現象の解析を示した。すなわちある時間間隔 τ をおいて外部からプラズマに加えた波数 k_1 及び k_2 のパルス電磁界によってプラズマ中にサイクロトロン波を励起し、これらの波がサイクロトロン減衰を受けて減衰してしまった後、$t=\tau'(=\tau k_2/(k_2-k_1))$ の近くで波数 $k_3(=k_2-k_1)$ を持った、パルス電磁界に対して2次のオーダーのプラズマ波エコー（縦波）が励起されることを理論的に導出した。さらに電子サイクロトロン波に関するエコー波に対しては詳細な数値解析を行い、種々のパラメーターについてエコー波の波形を図示した。

第4章では第3章で理論的に示されたエコー波の励起をLandauの線形理論に関連づけて考察し、その分布関数に対する初期値の形を

求めることによって、才3章で得られたエコー波と同じエコー波を得ることが出来、エコー現象に対する理論的な解析の本質をより一層明らかにした。

才5章においてはサイクロトロン波とプラズマ波（縦波）によって横波のエコー波が形成されることを理論的に示し、その波形を求めた。

才3章及び才5章でのエコーに関する理論解析から分かるように、エコーの形成がその各々の粒子の自由運動に大きく依存する現象であることから考えて、もし電界による加速、減速に対する粒子のもつ記憶が（粒子間衝突のような）何か不規則なカによって失われたとすると、エコーの形成に大きな影響を与えるであろう。従って粒子間衝突によるサイクロトロン波エコーの減衰は今後に残された問題である。又本論文ではプラズマが等才速度分布しているときのみを扱ったが、非等才な速度分布をしている場合サイクロトロン波により励起されるエコー波と非等才分布によるプラズマの不安定性とを関連づけてみる問題も今後に残された興味深い問題である。従って、今後プラズマ中でのサイクロトロン波に関するエコー現象に対する充分な研究（空間エコーも含めて）はプラズマの診断のための非常に有力な手段になるものと思われる。

以上総括的に述べた本研究の成果によってプラズマ中の波に関する研究分野に多少とも貢献することが出来たとすれば、著者の最も幸いとするところである。

謝　辞

本研究を行うに際し、終始御懇篤なる御指導、御鞭撻を賜わった元大阪大学基礎工学部助教授（現 Bell Telephone Laboratories 勤務）長谷川晃博士に深甚なる謝恩の意を表わす。

更に大阪大学基礎工学部森沢和男教授には、大学院在学中、及び現在に至るまで研究に対する態度を含む、幅広く深甚な御指導、御教示と御援助をいただき、ここに改めて心から感謝の意を表わす。

また本研究遂行にあたって有益な御助言と御激励をいただいた京都大学理学部西川恭治博士、名古屋大学プラズマ研究所水野幸雄博士、ならびに渡辺二太博士に深く感謝する。

また大学院在学中、学問全般にわたって御指導、御教示をいただいた大阪大学基礎工学部牧本利夫教授、金田助教授を始めとする物理系電気分野の諸教官の方々に深く感謝する。

また大阪大学基礎工学部村崎寿満教授には本研究の全般にわたり興味をお寄せいただき、御助言を賜わり深く感謝する。

また在学中有益な御討論をいただいた八井浄助手ならびに春名定助手、大学院学生橋本正弘氏他森沢研究室の諸氏に厚く御礼申し上げる。

更に研究の数値計算遂行にあたって、御助力いただいた名古屋大学プラズマ研究所計算機室の諸氏に厚く御礼申し上げる。

文　献

1) R.W. Gould, T.M. O'Neil, and J.H. Malmberg: "The Plasma Wave Echo", Phys. Rev. Letters 19 (1967) 219.

2) T.M. O'Neil and R.W. Gould: "Temporal and Spatial Plasma Wave Echoes", Phys. Fluids 11 (1968) 134.

3) K. Nishikawa: 第7回 プラズマ若手グループ夏の学校テキスト (1968) 74.

4) J.H. Malmberg, C.B. Wharton, R.W. Gould and T.M. O'Neil: "Plasma Wave Echo Experiment", Phys. Rev. Letters 20 (1968) 95.

5) J.H. Malmberg, C.B. Wharton, R.W. Gould, and T.M. O'Neil: "Observation of Plasma Wave Echoes", Phys. Fluids 11 (1968) 1147.

6) H. Ikezi and N. Takahashi: "Observation of Spatial Ion-Wave Echoes", Phys. Rev. Letters 20 (1968) 140.

7) D.R. Baker, N.R. Ahern, and A.Y. Wong: "Ion-Wave Echoes", Phys. Rev. Letters 20 (1968) 318.

8) H. Ikezi, N. Takahashi, and K. Nishikawa: "Spatial Ion-Wave Echoes", Phys. Fluids 12 (1969) 853.

9) A.Y. Wong, N. D'Angelo and R.W. Motley: "Propagation and Damping of Ion Acoustic Waves in Highly Ionized Plasmas", Phys. Rev. Letters 9 (1962) 415; "Landau Damping of Ion Acoustic Waves in Highly Ionized Plasmas", Phys. Rev. 133 (1964) A436.

10) J.H. Malmberg and C.B. Wharton: "Collisionless Damping of Electrostatic Plasma Waves", Phys. Rev. Letters 13 (1964) 184; "Dispersion of Electron Plasma Waves", Phys. Rev. Letters 17 (1966) 175.

11) H. Derfler and F.C. Simonen: "Landau Waves: An Experimental Fact", Phys. Rev. Letters 17 (1966) 172.

12) G. Van Hoven: "Observation of Plasma Oscillations", Phys. Rev. Letters 17 (1966) 169.

13) C.H. Su and C. Oberman: "Collisional Damping of a Plasma Echo", Phys. Rev. Letters 20 (1968) 427.

14) T.M. O'Neil: "Effect of Coulomb Collisions and Microturbulence on the Plasma Wave Echo", Phys. Fluids 11 (1968) 2420.

15) F.L. Hinton and C. Oberman: "Test Particle Propagator and Its Application to the Decay of Plasma Wave Echoes", Phys. Fluids 11 (1968) 1982.

16) Y.H. Ichikawa and T. Suzuki: "Effects of Collisions on Temporal Plasma Wave Echoes", Prog. Theor. Phys. 41 (1969) 313.

17) K. Nishikawa and R.W. Gould: "Numerical Study of Collisional Effects on Spatial Ion-Wave Echoes", (Preprint, to be published).

18) T.H. Jenson, J.H. Malmberg, and T.M. O'Neil: "Measurement of Velocity Space Diffusion Using the Plasma Wave Echo", GA-9007, August (1968) (To be published).

19) A.Y. Wong and D.R. Baker: "Measurements of Diffusion in Velocity Space from Ion-Ion Collisions", UCLA R-43, March (1969) (To be published).

20) M. Porkolab and J. Sinnis: "Cyclotron Harmonic Plasma-Wave Echoes", Phys. Rev. Letters 21 (1968) 1227.

21) T. Kamimura and A. Hasegawa: "Plasma Wave Echo Excited by Two Cyclotron Waves", Phys. Fluids 12 (1969) 1480.

22) T. Kamimura: "Longitudinal Plasma Wave Echo Excited by Two Cyclotron Waves", J. Phys. Soc. Japan (1970) (Vol. 28, No. 2 to be published).

23) B.D. Fried and C. Olson: "Transverse Plasma-Wave Echoes", Phys. Rev. 180 (1969) 241.

24) R.W. Gould: "Echoes in Collision-Free Plasmas", Phys. Letters 25A (1967) 559.

25) M. Porkolab: "Temporal Echoes in Collision-Free Plasmas in a Magnetic Field", Phys. Fluids 12 (1969) 1330.

26) L.M. Al'tshul' and V.I. Karpman: "Theory of Nonlinear Oscillations in a Collisionless Plasma", Soviet Phys. JETP 22 (1966) 361.

27) T. O'Neil: "Collisionless Damping of Nonlinear Plasma Oscillations", Phys. Fluids 8 (1965) 2255.

28) J.H. Malmberg and C.B. Wharton: "Collisionless Damping of Large-Amplitude Plasma Waves", Phys. Rev. Letters 19 (1967) 775.

29) S. Tanaka and K. Okubo: Private Communication.

30) L. Landau: "Oscillations of an Electron Plasma", J. Exptl.-Theoret. Phys.(USSR) 10 (1946) 49.

31) I.B. Bernstein: "Waves in a Plasma in a Magnetic Field", Phys. Rev. 109 (1958) 10.

32) A.G. Sitenko and K.N. Stepanov: "On the Oscillations of an Electron Plasma in a Magnetic Field", Soviet Phys. JETP 4 (1957) 512.

33) W.E. Drummond and Pines: "Nonlinear Plasma Oscillations", Ann. Phys.(N.Y.) 28 (1964) 478.

34) J.D. Jackson: "Longitudinal Plasma Oscillations", J. Nucl. Energy, Part C 1 (1960) 171.

35) B.D. Fried and S.D. Conte: The Plasma Dispersion Function (Academic Press Inc., New York, 1961).

36) K. Nishikawa: "Formulation of Plasma Wave Echoes as an Initial-Value Problem", Phys. Fluids 12 (1969) 730.

37) H. Derfler and T.C. Simonen: "Higher-Order Landau Modes", Phys. Fluids 12 (1969) 269.

付録(I)　式(2·19),(2·21)の導出

まず(2·17)式でよえられた回転座標表示を使用して(2·15)式の $\Phi(\varphi)$ を書き表わす。そのためにこの回転座標表示及び速度空間に対する円柱座標系を使用して表示したベクトルの演算，演算子及びその他必要な諸公式をあげると

$$\underset{\sim}{e}_{\pm}\cdot\underset{\sim}{e}_{\mp}=1\ ,\quad \underset{\sim}{e}_{\pm}\cdot\underset{\sim}{e}_{\pm}=0\ ,\quad \underset{\sim}{e}_{\pm}\cdot\underset{\sim}{e}_{z}=0 \tag{A·I·1}$$

任意のベクトルを $\underset{\sim}{A}$ とすると

$$\underset{\sim}{A}=A^{+}\underset{\sim}{e}_{+}+A^{-}\underset{\sim}{e}_{-}+A_{z}\underset{\sim}{e}_{z} \tag{A·I·2}$$

但し $A^{\pm}$ は(2·18)式でよえられる。

特に速度ベクトル $\underset{\sim}{v}$ に対しては円柱座標表示と結びつけると

$$\underset{\sim}{v}=v^{+}\underset{\sim}{e}_{+}+v^{-}\underset{\sim}{e}_{-}+u\,\underset{\sim}{e}_{z} \tag{A·I·3}$$

但し
$$v^{\pm}=\frac{1}{\sqrt{2}}v_{\perp}\,e^{\mp i\varphi} \tag{A·I·4}$$

又微分演算子 $\partial/\partial\underset{\sim}{v}$ は

$$\frac{\partial}{\partial\underset{\sim}{v}}=\underset{\sim}{e}_{+}\frac{\partial}{\partial v^{-}}+\underset{\sim}{e}_{-}\frac{\partial}{\partial v^{+}}+\underset{\sim}{e}_{z}\frac{\partial}{\partial u} \tag{A·I·5}$$

但し
$$\frac{\partial}{\partial v^{\pm}}=\frac{e^{\pm i\varphi}}{\sqrt{2}}\left(\frac{\partial}{\partial v_{\perp}}\pm i\frac{1}{v_{\perp}}\frac{\partial}{\partial\varphi}\right) \tag{A·I·6}$$

で表わせるから(A·I·2),(A·I·3)及び(A·I·5)を使用するとベクトル演算は

$$\underset{\sim}{A}\cdot\underset{\sim}{v}=A^{+}v^{-}+A^{-}v^{+}+A_{z}u \tag{A·I·7}$$

$$\underset{\sim}{v}\times\underset{\sim}{A}=i\left[(v^{+}A_{z}-uA^{+})\underset{\sim}{e}_{+}+(uA^{-}-v^{-}A_{z})\underset{\sim}{e}_{-}\right. \tag{A·I·8}$$

$$+(v^- A^+ - v^+ A^-)\,\underset{\sim}{e}_z\Big]$$

$$\underset{\sim}{A}\cdot\frac{\partial}{\partial \underset{\sim}{v}} = A^+\frac{\partial}{\partial v^+} + A^-\frac{\partial}{\partial v^-} + A_z\frac{\partial}{\partial u} \qquad (A\cdot I\cdot 9)$$

$\underset{\sim}{k} = k\,\underset{\sim}{e}_z$, $F_0(\underset{\sim}{v}) = F_0(v_\perp, u)$ であることを考慮し，以上の公式を使用して $\Phi(\varphi)$ を書き表わすと

$$\Phi(\varphi) = \frac{q}{m}\left[\underset{\sim}{E}_k(\omega) + \frac{1}{c}\,\underset{\sim}{v}\times\underset{\sim}{B}_k(\omega)\right]\cdot\frac{\partial F_0(\underset{\sim}{v})}{\partial \underset{\sim}{v}} - f_k(\underset{\sim}{v}, t=0)$$

$$= \frac{q}{m}\left\{\underset{\sim}{E}_k(\omega) + \frac{k}{\omega}\,\underset{\sim}{v}\times\left[\underset{\sim}{e}_z\times\underset{\sim}{E}_k(\omega)\right]\right\}\cdot\frac{\partial F_0(\underset{\sim}{v})}{\partial \underset{\sim}{v}}$$

$$- f_k(\underset{\sim}{v}, t=0) - \frac{1}{i\omega}\,\frac{q}{mc}\left[\underset{\sim}{v}\times\underset{\sim}{B}_k(t=0)\right]\cdot\frac{\partial F_0(\underset{\sim}{v})}{\partial \underset{\sim}{v}}$$

$$= \frac{q}{m}\left\{\frac{1}{\sqrt{2}}\left[E_k^+(\omega)\,e^{i\varphi} + E_k^-(\omega)\,e^{-i\varphi}\right]\Gamma(k,\omega,u,v_\perp)\right.$$

$$\left. + E_{kz}(\omega)\,\frac{\partial F_0(\underset{\sim}{v})}{\partial u}\right\} - f_k(\underset{\sim}{v}, t=0) \qquad (A\cdot I\cdot 10)$$

$$-\frac{1}{\omega c}\,\frac{q}{m}\,\frac{1}{\sqrt{2}}\left[B_k^-(t=0)\,e^{-i\varphi} - B_k^+(t=0)\,e^{i\varphi}\right]\Gamma'(u, v_\perp)$$

ここで $\Gamma(k,\omega,u,v_\perp)$ は (2·20) 式で与えられ $\Gamma'(u,v_\perp)$ は次式で定義される。

$$\Gamma'(u, v_\perp) = \left(u\,\frac{\partial F_0(\underset{\sim}{v})}{\partial v_\perp} - v_\perp\,\frac{\partial F_0(\underset{\sim}{v})}{\partial u}\right) \qquad (A\cdot I\cdot 11)$$

(A·I·10) 式を (2·16) 式に代入し

$$\int_0^{2\pi} d\gamma\, e^{-ia\gamma}\begin{bmatrix} e^{\pm i(\varphi+\gamma)} \\ 1 \end{bmatrix} = \left(e^{-i2\pi a} - 1\right)\begin{bmatrix} \dfrac{e^{\pm i\varphi}}{-i(a\mp 1)} \\ \dfrac{1}{-ia} \end{bmatrix} \qquad (A\cdot I\cdot 12)$$

但し $\quad a \equiv (ku - \omega)/\omega_c \qquad (A\cdot I\cdot 13)$

であることを使用すると (2·19) 式を得ることが出来る。

(2·19)式におけるI_fは次式で与えられるものである。

$$I_f=\frac{-1}{\omega C}\frac{q}{m}\frac{1}{\sqrt{2}}\left[\frac{B_k^-(t=0)e^{-i\varphi}}{i(\omega-ku-\omega_c)}-\frac{B_k^+(t=0)e^{i\varphi}}{i(\omega-ku+\omega_c)}\right]\Gamma'(u,v_\perp)$$

$$-\frac{1/\omega_c}{e^{-i2\pi a}-1}\int_0^{2\pi}e^{-ia\gamma}f_k(\underset{\sim}{v},t=0)\,d\gamma \qquad (A\cdot I\cdot 14)$$

次に電界$\underset{\sim}{E}_k(\omega)$に対する(2·21)式を得るために(2·19)式を(2·12)式に代入する。すなわち(2·12)式は

$$(-\omega^2+c^2k^2)\left[\underset{\sim}{E}_k(\omega)-\underset{\sim}{E}_k^{ext}(\omega)\right]-c^2k^2\left[E_{kz}(\omega)-E_{kz}^{ext}(\omega)\right]\underset{\sim}{e}_z \qquad (A\cdot I\cdot 15)$$

$$=4\pi i\omega\sum_j qn_0\int_{-\infty}^{\infty}du\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^{\infty}v_\perp dv_\perp\left(\frac{1}{\sqrt{2}}v_\perp e^{-i\varphi}\underset{\sim}{e}_+ +\frac{1}{\sqrt{2}}v_\perp e^{i\varphi}\underset{\sim}{e}_- +u\underset{\sim}{e}_z\right)f_k(\underset{\sim}{v},\omega)$$

$$+\left\{-i\omega\,\underset{\sim}{E}_k^{in}(t=0)+kC\left[B_k^{+in}(t=0)\underset{\sim}{e}_+ - B_k^{-in}(t=0)\underset{\sim}{e}_-\right]\right\}$$

と書き直せるからこの式に(2·19)式を代入し整理すれば(2·21)式を得ることが出来る。ここで$\underset{\sim}{I}_E$は次式で与えられる。

$$I_E^{\pm}=-i\omega E_k^{\pm in}(t=0)\pm kC\,B_k^{\pm in}(t=0)$$

$$\pm B_k^{\pm}(t=0)\sum_j\frac{\pi\omega_p^2}{C}\int_{-\infty}^{\infty}du\int_0^{\infty}v_\perp^2dv_\perp\frac{\Gamma'(u,v_\perp)}{\omega-ku\pm\omega_c} \qquad (A\cdot I\cdot 16)$$

$$-i\,4\pi\omega\sum_j qn_0\int d^3\underset{\sim}{v}\frac{1/\omega_c}{e^{-i2\pi a}-1}\frac{v_\perp}{\sqrt{2}}e^{\mp i\varphi}\int_0^{2\pi}e^{-ia\gamma}f_k(\underset{\sim}{v},t=0)\,d\gamma$$

$$I_{Ez}=\frac{i}{\omega}E_{kz}^{in}(t=0)+\frac{i4\pi}{\omega}\sum_j qn_0\int d^3\underset{\sim}{v}\frac{1/\omega_c}{e^{-i2\pi a}-1}u\int_0^{2\pi}e^{-ia\gamma}f_k(\underset{\sim}{v},t=0)\,d\gamma \qquad (A\cdot I\cdot 17)$$

但し、本文における$\varepsilon_{r,\ell}$及びε_pの表現式中の積分路と同じように上式のuに関する積分路を変形することにより$I_E^{\pm}$, I_{Ez}はωの全複素平面で定義出来る。

付録(II)　式(5·9),(5·10)の導出

最初に(5·6)及び(5·7)式を回転座標を使用して書き直す。(5·6)式は付録(I)における(A·I·10)式と同様であるから

$$G_1(\varphi)=\frac{q}{m}\left\{\frac{1}{\sqrt{2}}\left[E_{k_3}^{+}(\omega)e^{i\varphi}+E_{k_3}^{-}(\omega)e^{-i\varphi}\right]\Gamma(k_3,\omega,u,v_I)\right.$$

$$\left.+E_{k_3z}(\omega)\frac{\partial F_0(\underset{\sim}{v})}{\partial u}\right\} \qquad (A\cdot II\cdot 1)$$

と書くことが出来る。今ここでは第1のパルスにより励起された波が充分に減衰を受けて消えてしまった後の現象を扱うのであるから $\underset{\sim}{E}_{-k_1}(t)\simeq 0$, $\underset{\sim}{B}_{-k_1}(t)\simeq 0$ であることを考えて(5·7)式で与えられる $G_2(\varphi)$ の第2項は消略し,さらにこの章で扱っているのは第1のパルスで磁場方向に伝播する横波(波数 $-k_1$)を励起し,第2のパルスで磁場方向に伝播する縦波(波数 k_2)を励起する場合であるから $G_2(\varphi)$ の中でエコーの励起に寄与する項だけを残すと

$$G_2(\varphi)\simeq\frac{q}{m}\int_{-\infty+i\sigma'}^{\infty+i\sigma'}\frac{d\omega'}{2\pi}E_{k_2z}(\omega-\omega')\frac{\partial}{\partial u}f_{-k_1}(\underset{\sim}{v},\omega') \qquad (A\cdot II\cdot 2)$$

ここで $f_{-k_1}(\underset{\sim}{v},\omega')$ は(2·19)式より

$$f_{-k_1}(\underset{\sim}{v},\omega')=\frac{q}{\sqrt{2}\,m}\left[\frac{E_{-k_1}^{+}(\omega')e^{i\varphi}}{i(\omega'+k_1u+\omega_c)}+\frac{E_{-k_1}^{-}(\omega')e^{-i\varphi}}{i(\omega'+k_1u-\omega_c)}\right]\Gamma(-k_1,\omega',u,v_I) \qquad (A\cdot II\cdot 3)$$

で与えられるから $G_2(\varphi)$ は

$$G_2(\varphi)=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{q}{m}\right)^2\int_{-\infty+i\sigma'}^{\infty+i\sigma'}\frac{d\omega'}{2\pi}E_{k_2z}(\omega-\omega')\frac{\partial}{\partial u}\left\{\left[\frac{E_{-k_1}^{+}(\omega')e^{i\varphi}}{i(\omega'+k_1u+\omega_c)}\right.\right. \qquad (A\cdot II\cdot 4)$$

$$\left.\left.+\frac{E_{-k_1}^{-}(\omega')e^{-i\varphi}}{i(\omega'+k_1u-\omega_c)}\right]\Gamma(-k_1,\omega',u,v_I)\right\}$$

(5.5)式の解は(2.16)式と同様にして次式で与えられる。

$$f_{k_3}(\underset{\sim}{v},\omega)=\frac{1/\omega_c}{e^{-i2\pi a}-1}\int_0^{2\pi}e^{-ia\gamma}\left[G_1(\varphi+\gamma)+G_2(\varphi+\gamma)\right]d\gamma \qquad (A\cdot II\cdot 5)$$

但し、ここでは a は(A・I・13)式で k を k_3 とおきかえたものである。(A・II・5)式に(A・II・1)及び(A・II・4)を代入し(A・I・12)式を使用して計算を行えば

$$f_{k_3}(\underset{\sim}{v},\omega)=\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{q}{m}\left[\frac{E_{k_3}^{+}(\omega)e^{i\varphi}}{i(\omega-k_3u+\omega_c)}+\frac{E_{k_3}^{-}(\omega)e^{-i\varphi}}{i(\omega-k_3u-\omega_c)}\right]\Gamma(k_3,\omega,u,v_\perp)+\frac{q}{m}\frac{\partial F_0(\underset{\sim}{v})/\partial u}{i(\omega-k_3u)}E_{k_3z}(\omega)$$

$$+\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{q}{m}\right)^2\int_{-\infty+i\sigma'}^{\infty+i\sigma'}\frac{d\omega'}{2\pi}E_{k_3z}(\omega-\omega')\left\{\frac{E_{-k_1}^{+}(\omega')e^{i\varphi}}{i(\omega-k_3u+\omega_c)}\frac{\partial}{\partial u}\left[\frac{\Gamma(-k_1,\omega',u,v_\perp)}{i(\omega'+k_1u+\omega_c)}\right]\right. \qquad (A\cdot II\cdot 6)$$

$$\left.+\frac{E_{-k_1}^{-}(\omega')e^{-i\varphi}}{i(\omega-k_3u-\omega_c)}\frac{\partial}{\partial u}\left[\frac{\Gamma(-k_1,\omega',u,v_\perp)}{i(\omega'+k_1u-\omega_c)}\right]\right\}$$

ここで $F_0(v_\perp,u)=F_0(|\underset{\sim}{v}|)$，すなわち粒子の速度分布関数が等方分布をしているとすると $\Gamma(-k_1,\omega',u,v_\perp)=\dfrac{\partial F_0(\underset{\sim}{v})}{\partial v_\perp}$ となり

(A・II・6)式から(5.9)式を得ることが出来る。

又、(A・II・6)式とMaxwellの方程式より $\underset{\sim}{E}_{k_3}(\omega)$ を得ることが出来る。すなわち(2.12)式より

$$(-\omega^2+c^2k_3^2)\underset{\sim}{E}_{k_3}(\omega)-c^2k_3^2E_{k_3z}(\omega)\underset{\sim}{e}_z \qquad (A\cdot II\cdot 7)$$

$$=i4\pi\omega\sum_j qn_0\int_{-\infty}^{\infty}du\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^{\infty}v_\perp dv_\perp\left[\frac{1}{\sqrt{2}}v_\perp e^{-i\varphi}\underset{\sim}{e}_+ +\frac{1}{\sqrt{2}}v_\perp e^{i\varphi}\underset{\sim}{e}_- +u\underset{\sim}{e}_z\right]f_{k_3}(\underset{\sim}{v},\omega)$$

(A・II・6)式の右辺の第3項は因子 $e^{\pm i\varphi}$ があるため $E_{k_3z}(\omega)$ には寄与しないので $E_{k_3}^{\pm}(\omega)$ のみを考え，(A・II・7)式に(A・II・6)式を代入すれば

$$(-\omega^2+c^2k_3^2)E_{k_3}^{\pm}(\omega)=i4\pi\omega\sum_j qn_0\int_{-\infty}^{\infty}du\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^{\infty}v_\perp^2dv_\perp\frac{1}{\sqrt{2}}e^{\mp i\varphi}f_{k_3}(\underset{\sim}{v},\omega)$$

$$= i4\pi\omega \sum_j q n_0 \int_{-\infty}^{\infty} du \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\infty} v_\perp^2 dv_\perp \frac{1}{\sqrt{2}} \left\{ \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{q}{m} \frac{E_{k_3}^{\pm}(\omega)}{i(\omega - k_3 u \pm \omega_c)} \Gamma(k_3, \omega, u, v_\perp) \right.$$

$$\left. + \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{q}{m}\right)^2 \int_{-\infty+i\sigma'}^{\infty+i\sigma'} \frac{d\omega'}{2\pi} E_{k_2 z}(\omega - \omega') \frac{E_{-k_1}^{\pm}(\omega')}{i(\omega - k_3 u \pm \omega_c)} \frac{\partial}{\partial u} \left[\frac{\Gamma(-k_1, \omega', u, v_\perp)}{i(\omega' + k_1 u \pm \omega_c)} \right] \right\}$$

uについて部分積分を行って整理すれば

$$E_{k_3}^{\pm}(\omega) = \frac{1}{\varepsilon_{r,\ell}(k_3, \omega)} \sum_j \left(\frac{q}{m}\right) \omega_p^2 \int_{-\infty+i\sigma'}^{\infty+i\sigma'} \frac{d\omega'}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} du \frac{-k_3 \omega/2}{(\omega - k_3 u \pm \omega_c)^2}$$

$$\cdot E_{-k_1}^{\pm}(\omega') E_{k_2 z}(\omega - \omega') \frac{\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\infty} v_\perp^2 dv_\perp \Gamma(-k_1, \omega', u, v_\perp)}{i(\omega' + k_1 u \pm \omega_c)} \qquad (A\cdot II\cdot 8)$$

ここで $F_0(\underline{v}) = F_0(|\underline{v}|)$，すなわち粒子の速度分布関数が等方分布であるとすると（A・II・8）式より（5・10）式を得ることが出来る。

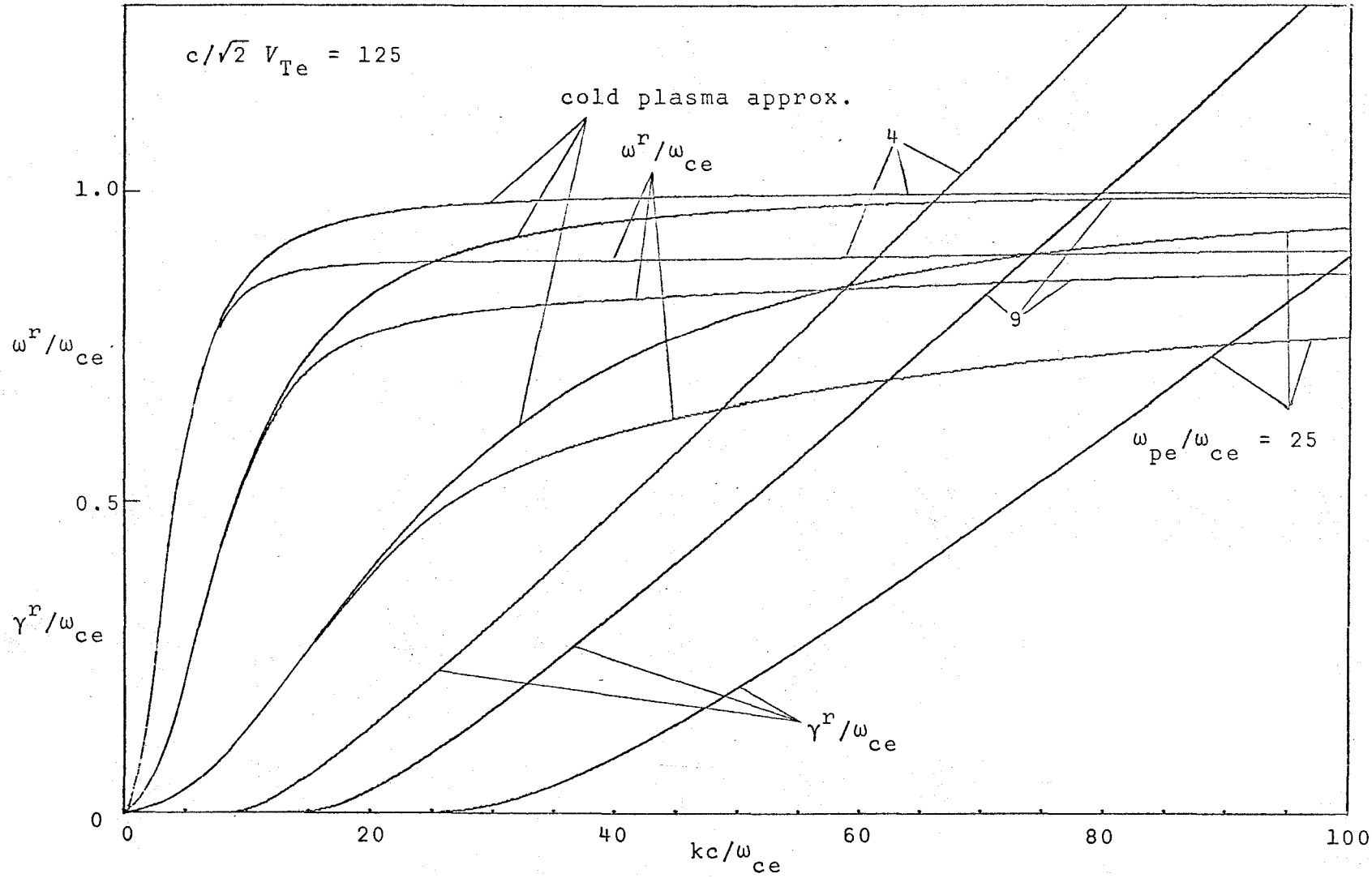


図1(a) 電子サイクロトロン波に対する分散関係

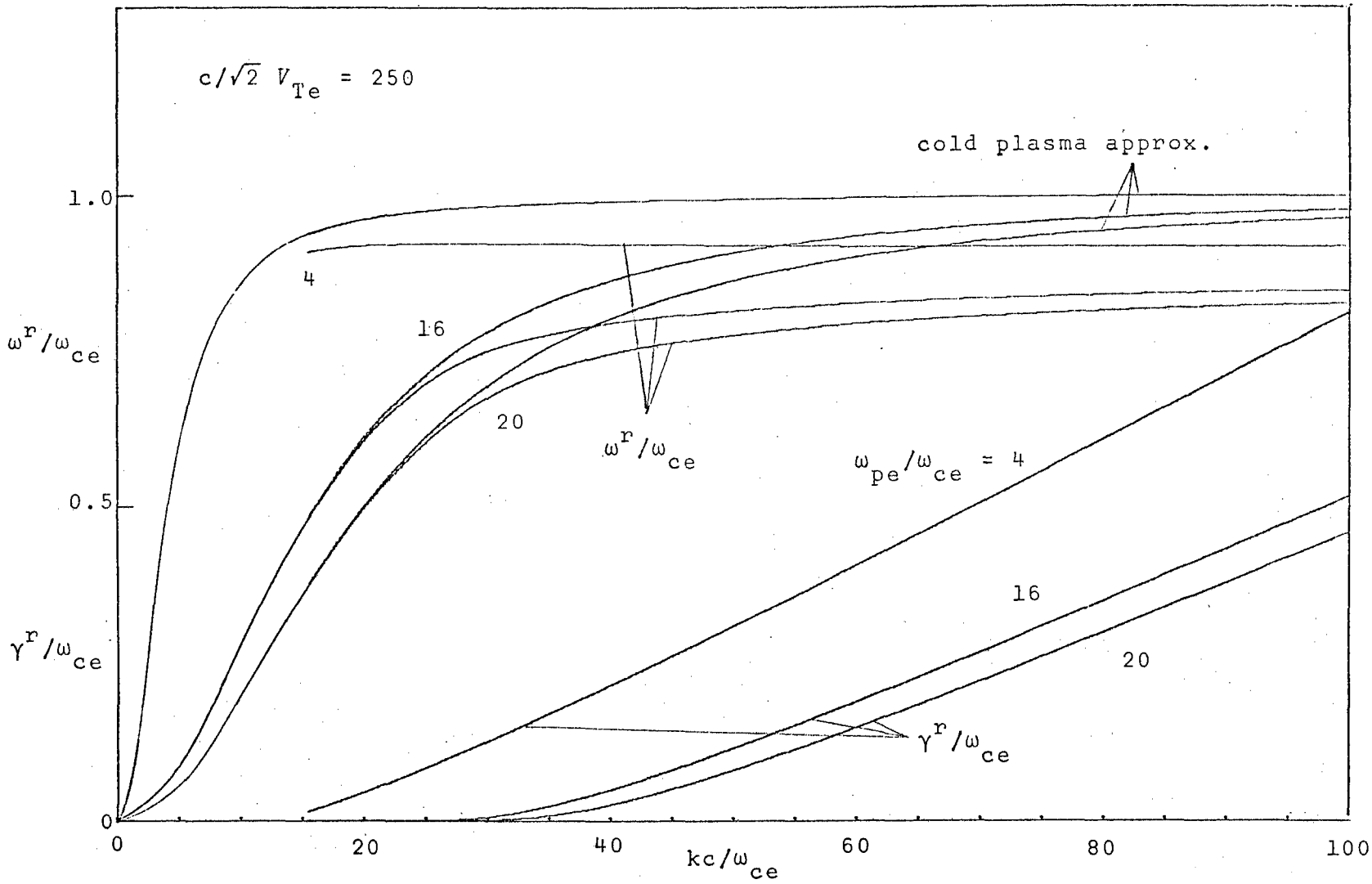


図1(8) 電子サイクロトロン波に対する分散関係

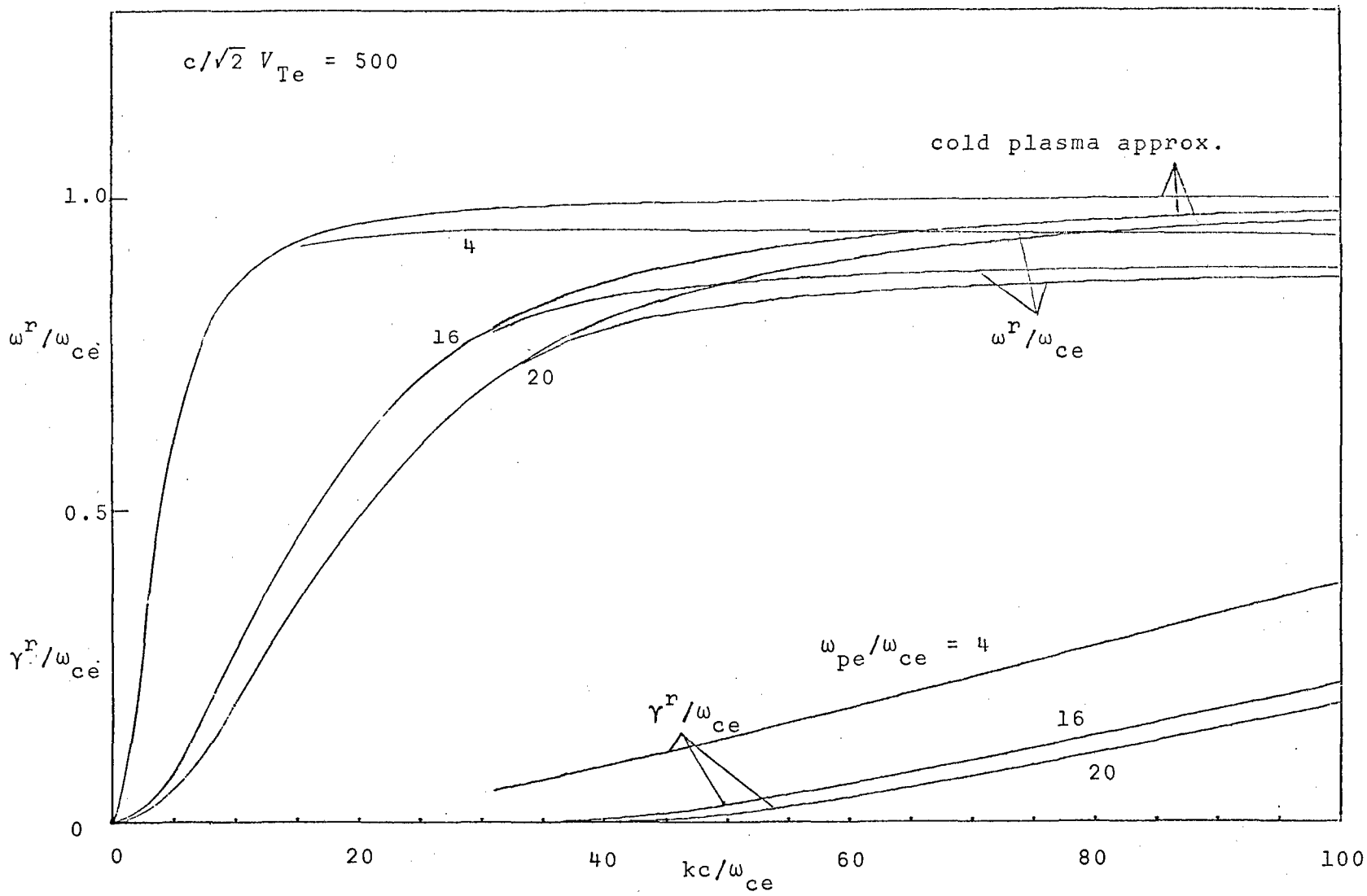


図1(C) 電子サイクロトロン波に対する分散関係

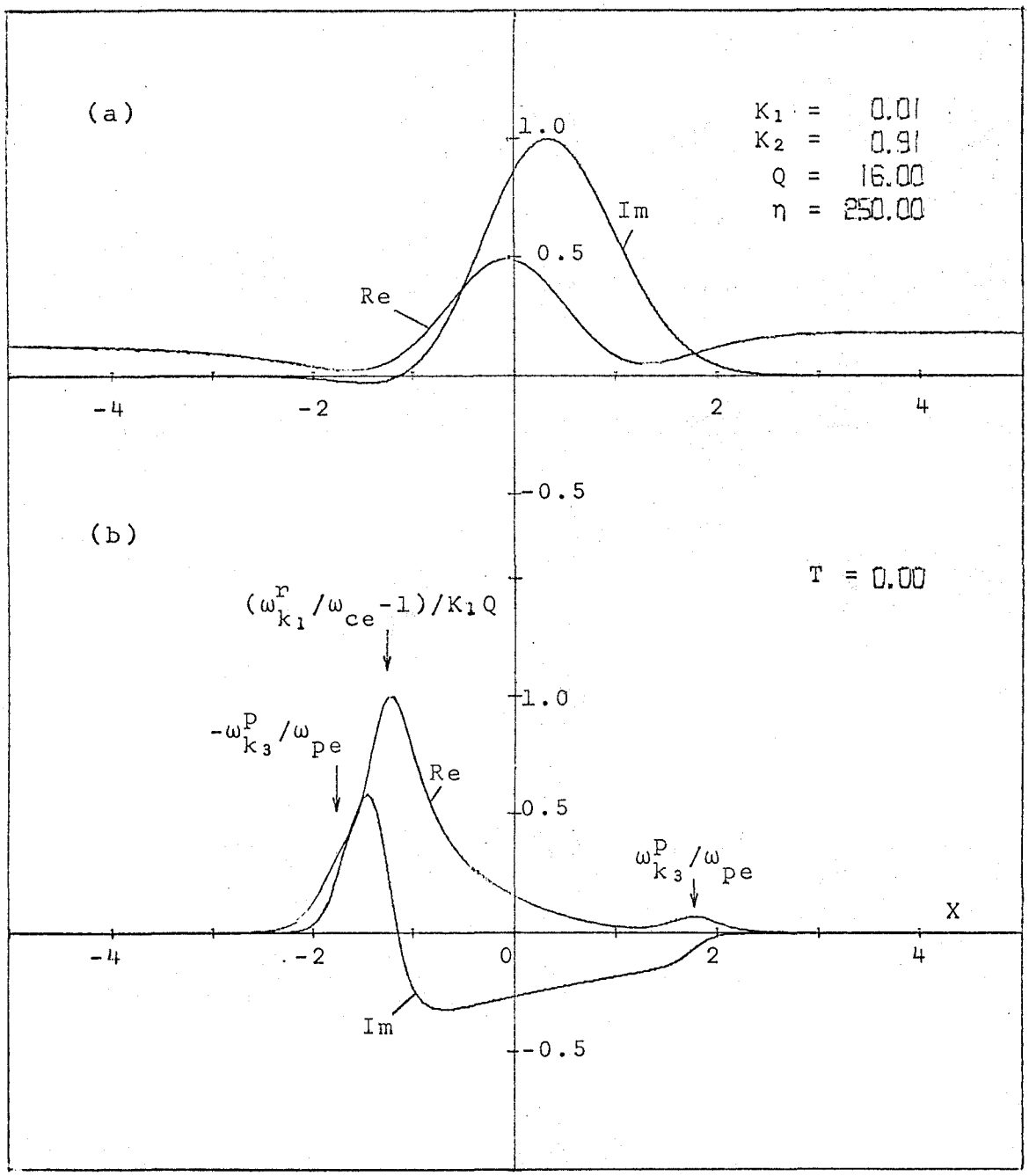
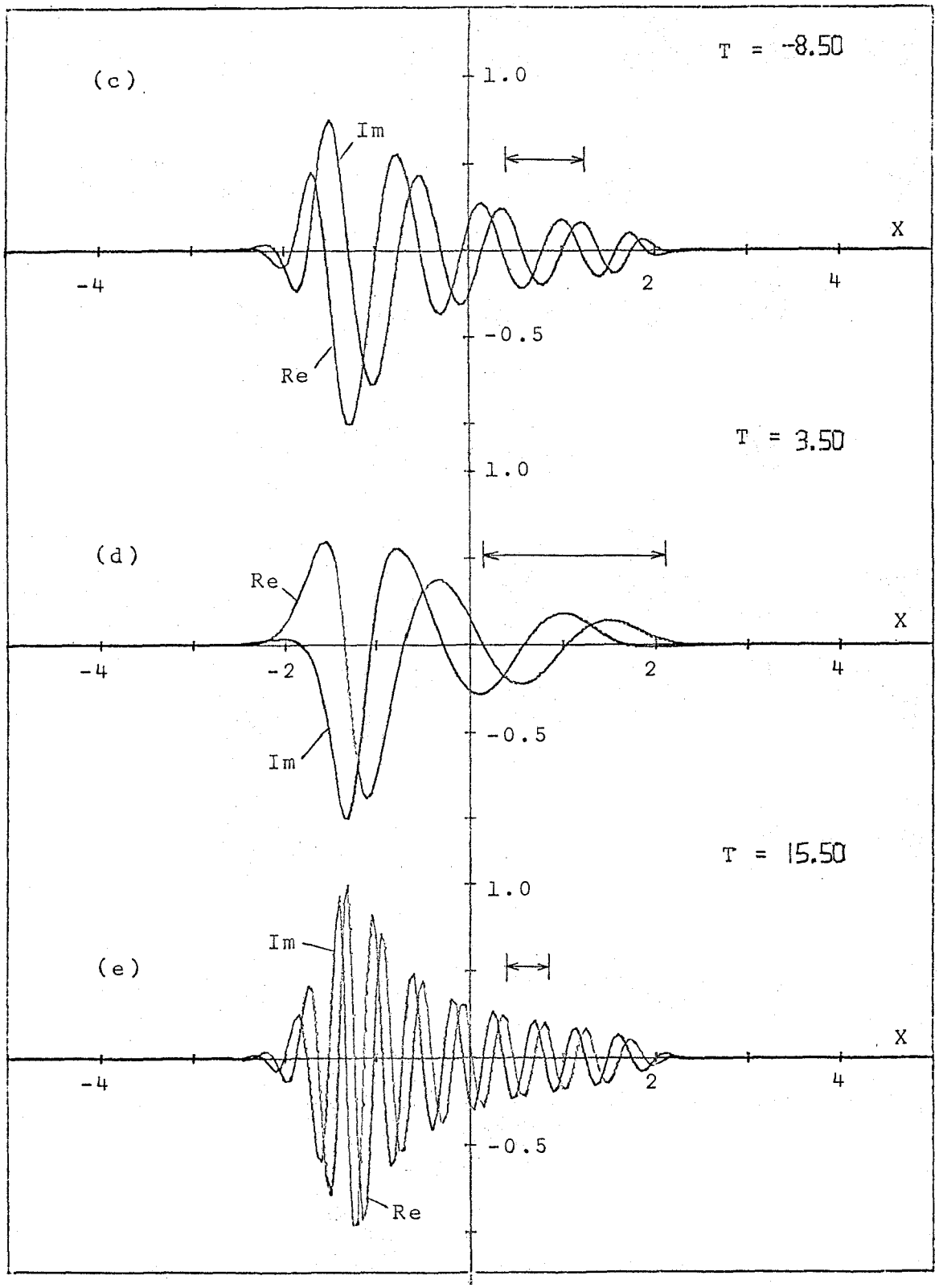


図2　Gの被積分関数の速度Xに対する変化


(c)
T = -8.50
1.0
Im
X
-4
2
4
-0.5
Re
T = 3.50
1.0
(d)
Re
X
-4
-2
2
4
-0.5
Im
T = 15.50
1.0
Im
(e)
X
-4
2
4
-0.5
Re

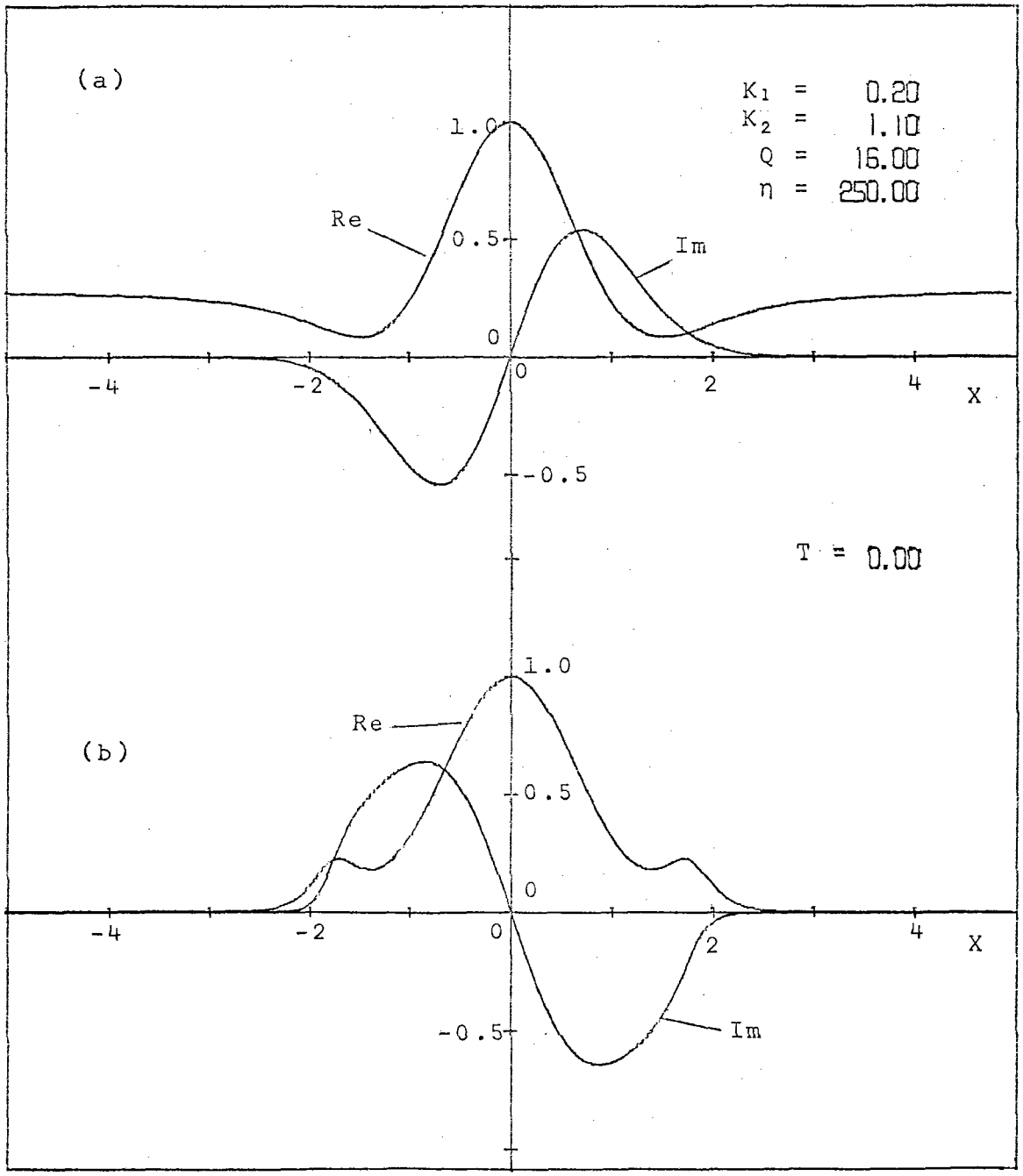
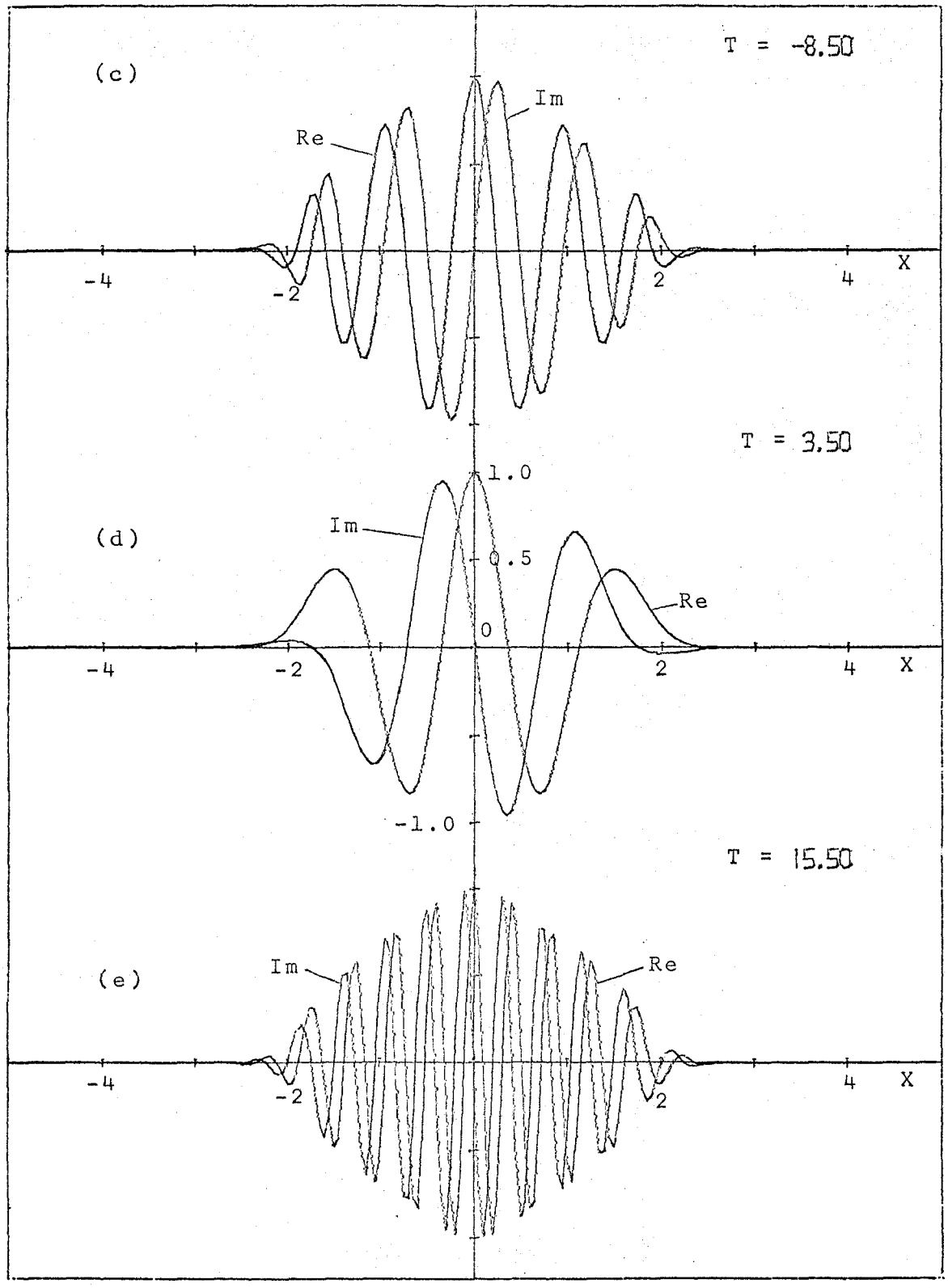


図2′　Gの被積分関数の遠度Xに対する変化


(c)
T = -8.50
Im
Re
-4
-2
2
4
X
T = 3.50
1.0
(d)
Im
0.5
Re
0
-4
-2
2
4
X
-1.0
T = 15.50
(e)
Im
Re
-4
-2
2
4
X

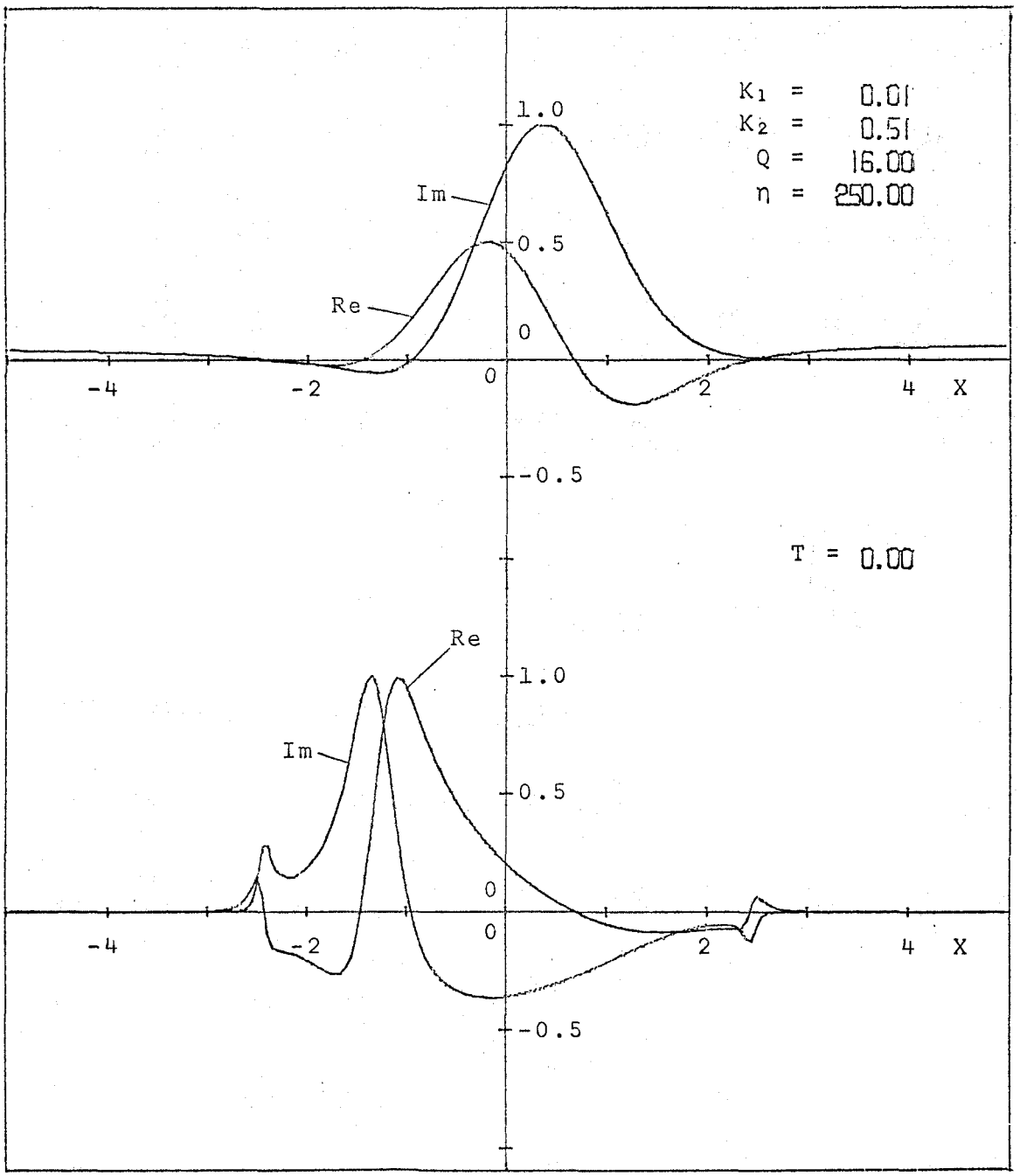
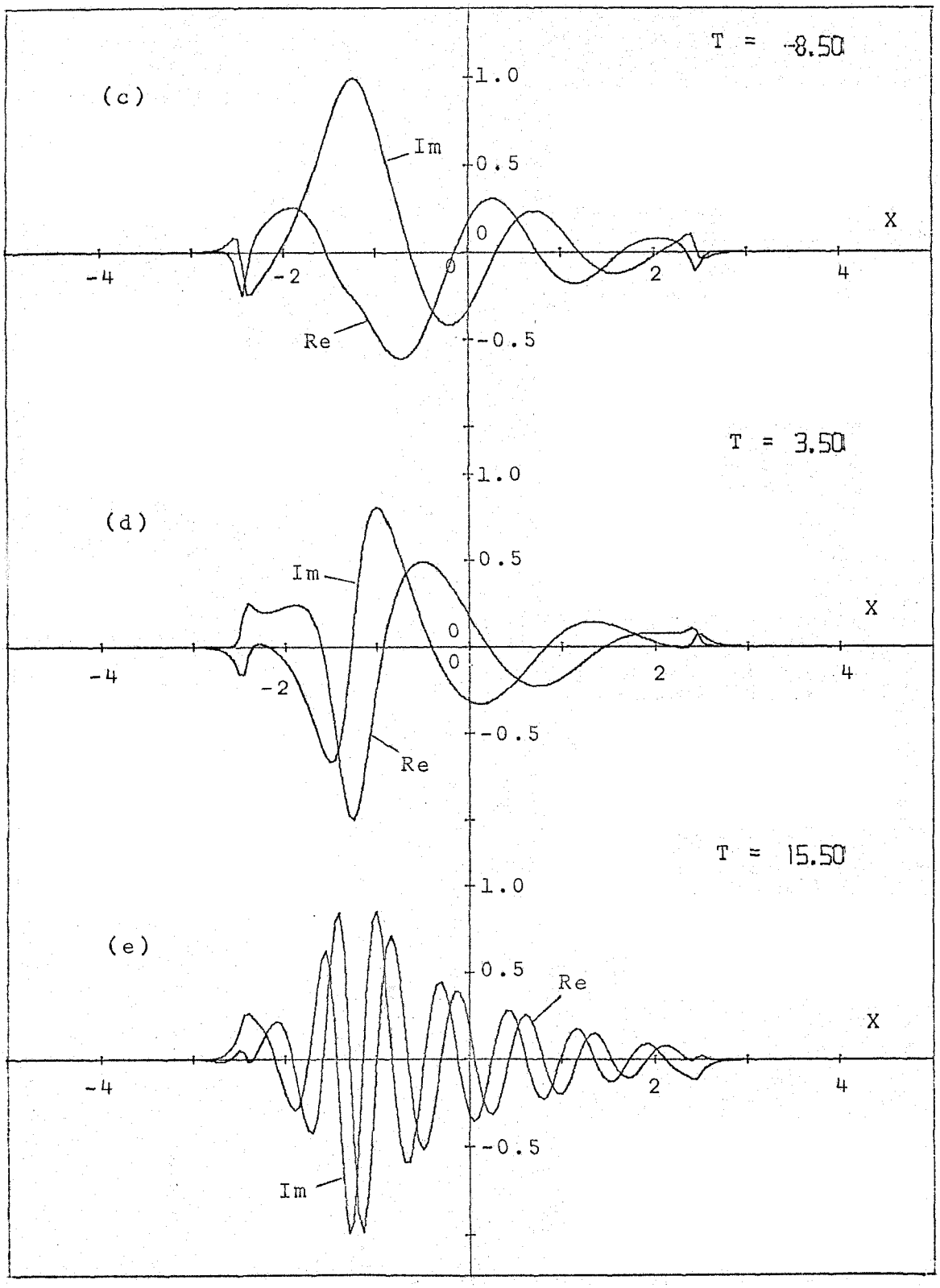


図 2″　Gの被積分関数の速度 X に対する変化


T = -8.50
(c)
1.0
0.5
0
-0.5
Im
Re
X
-4
-2
0
2
4
T = 3.50
(d)
1.0
0.5
0
-0.5
Im
Re
X
-4
-2
0
2
4
T = 15.50
(e)
1.0
0.5
-0.5
Re
Im
X
-4
2
4

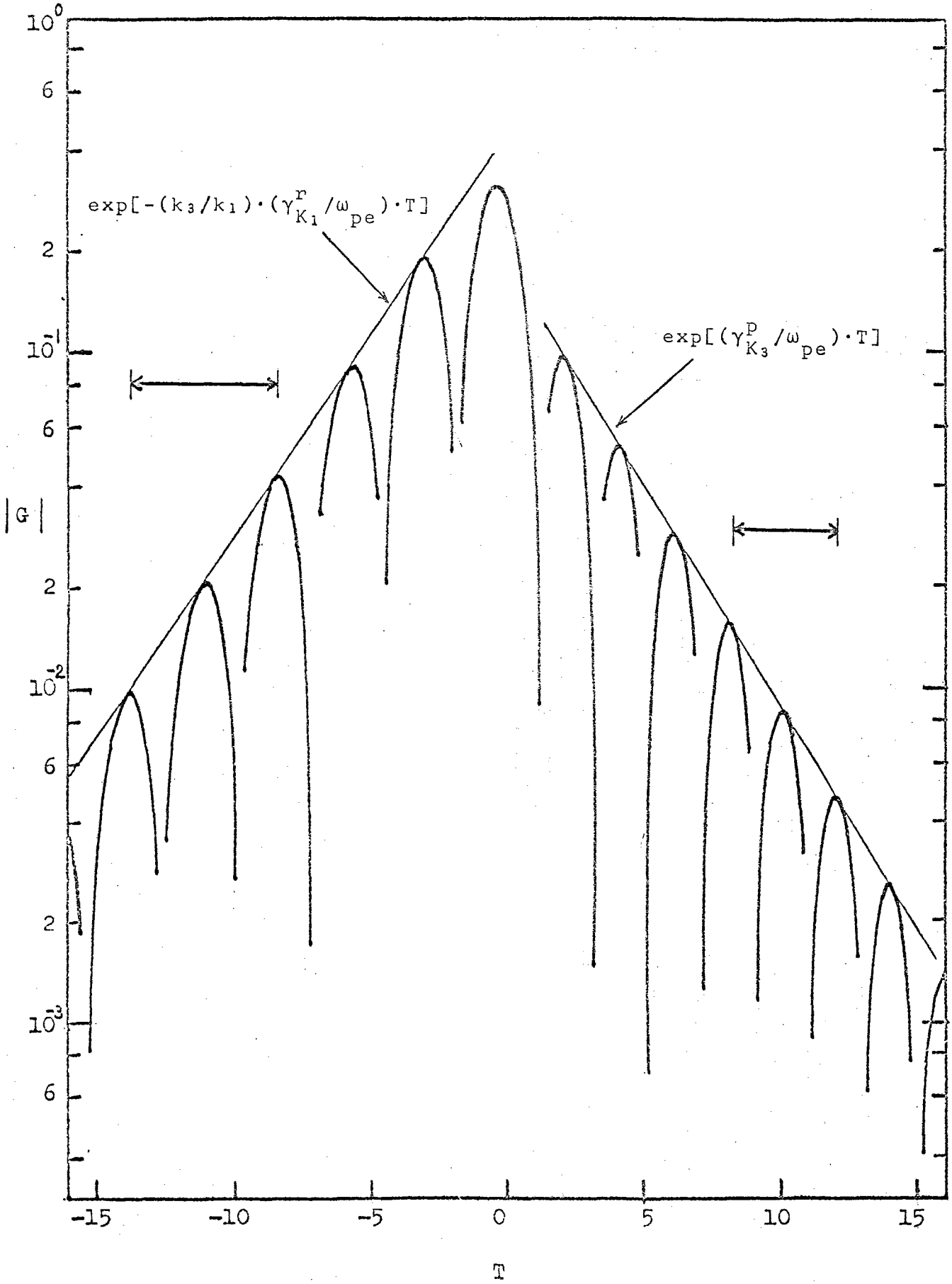
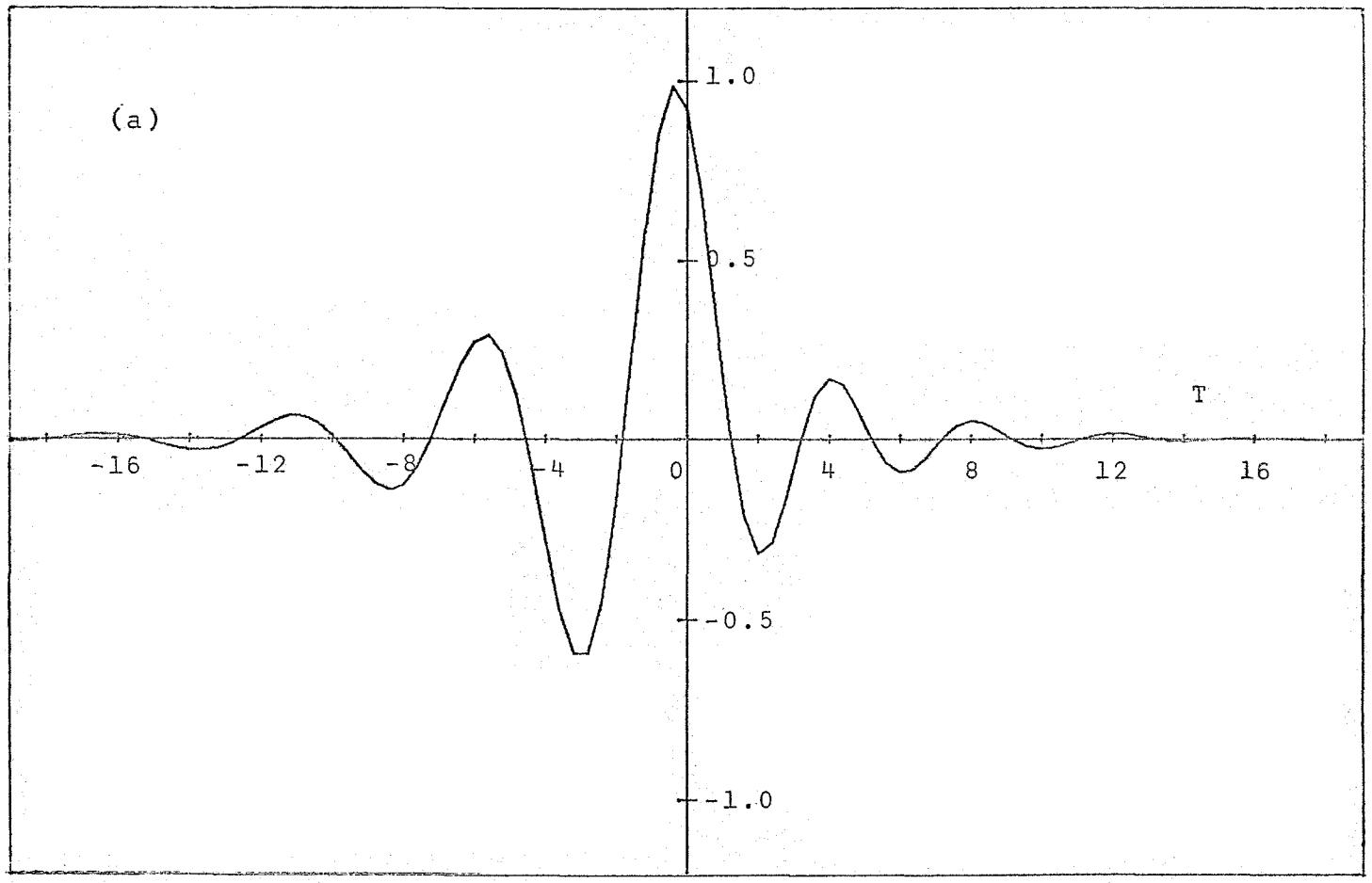
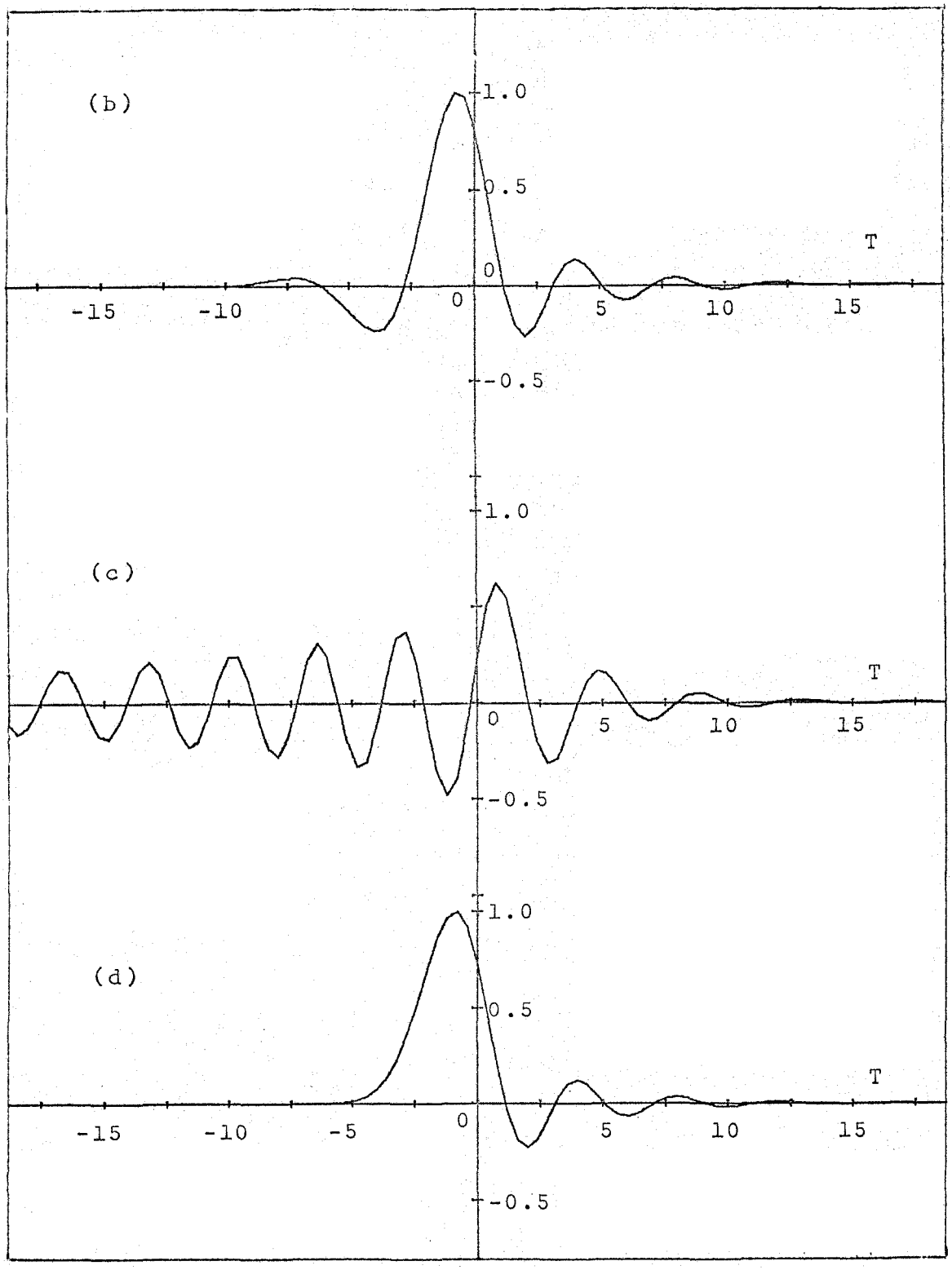


図3　エコーの波形 |G| の時間 T に対する変化



$K_1 = 0.01$, $K_2 = 0.91$; $Q = 16$; $\eta = 250$;

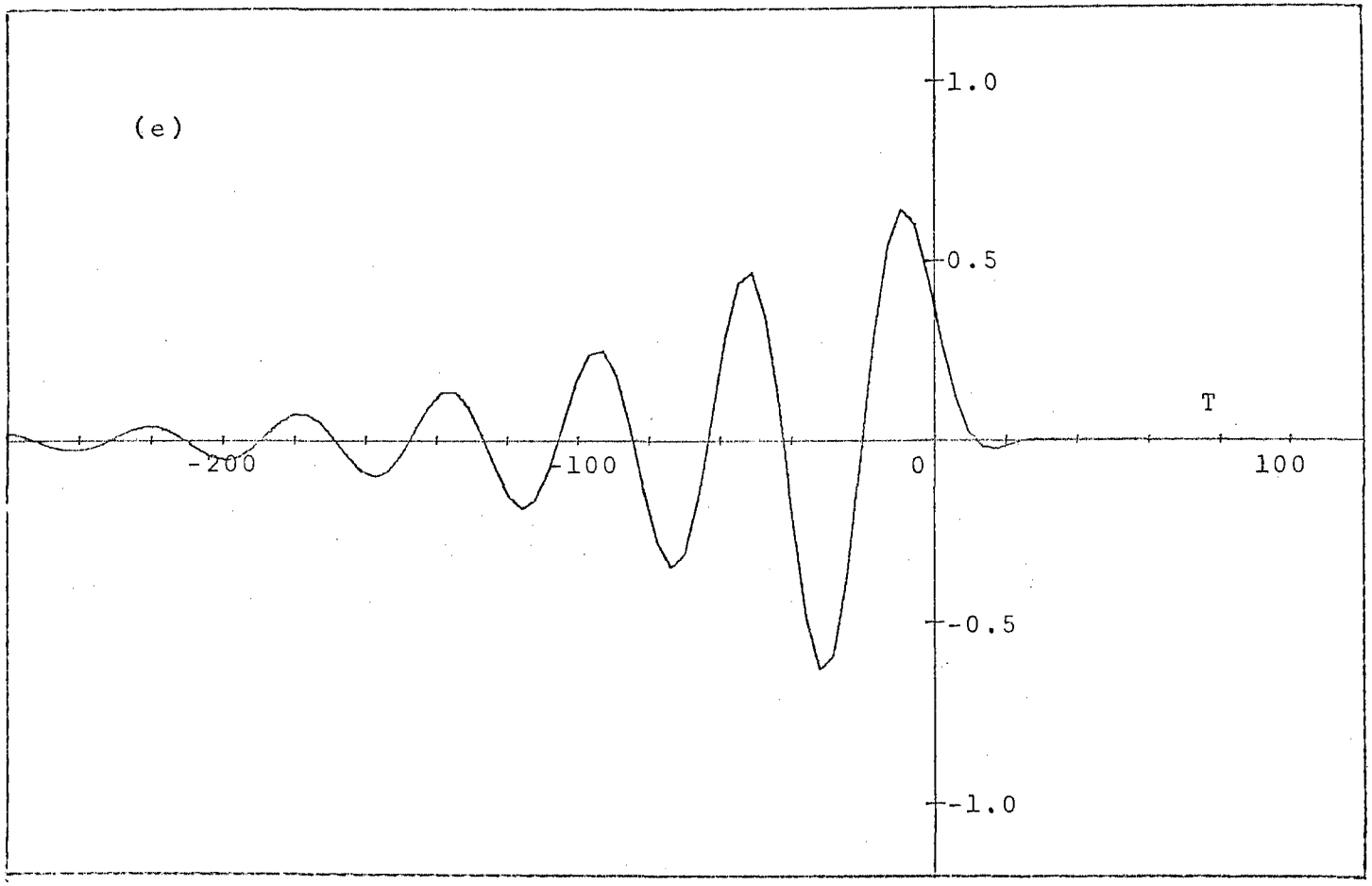
図4　エコー波の時間的なふるまい



(b) $K_1 = 0.02$, $K_2 = 0.92$; $Q = 4$; $\eta = 250$;

(c) $K_1 = 0.02$, $K_2 = 0.92$; $Q = 4$; $\eta = 125$;

(d) $K_1 = 0.2$, $K_2 = 1.1$; $Q = 16$; $\eta = 250$;



$K_1 = 0.008$, $K_2 = 0.1008$; $Q = 20$; $\eta = 250$;