

Title	繊維集合体の構造と力学
Author(s)	山田, 國廣
Citation	大阪大学, 1986, 博士論文
Version Type	VoR
URL	https://hdl.handle.net/11094/2549
rights	
Note	

Osaka University Knowledge Archive : OUKA

<https://ir.library.osaka-u.ac.jp/>

Osaka University

纖維集合体の構造と力学

山田國廣

纖維集合体の構造と力学

昭和60年12月

山田國廣

目 次

1章 緒 論	1
2章 2次元繊維集合体の構造	9
2.1 平面内のランダム直線によって生成される多角形の幾何学特性	9
2.1.1 モンテカルロ・シミュレーションによるランダム配向繊維集合体の生成	9
2.1.2 第Ⅰ種分割過程によって生成される多角形の辺の数の分布および平均面積	9
2.1.3 第Ⅰ種分割過程の位相特性	16
2.1.4 第Ⅱ種分割過程によって生成される多角形の辺の数の分布	19
2.1.5 第Ⅱ種分割過程によって生成される多角形の平均面積と占有面積分率	22
2.1.6 第Ⅱ種分割過程の位相特性	24
2.1.7 有限直線集合体の位相特性と多角形の辺の数の分布	26
2.2 平面内のランダム直線によって生成される多角形の周長, 正多角形からの 変形度および面積の分布	28
2.2.1 多角形の周長分布	28
2.2.2 多角形の面積分布および変形度分布	30
2.2.3 多角形の辺の数 n , 周長 l , 面積 a にかんする (k, m) 次モーメント $E(n^k l^m)$, $E(n^k a^m)$, $E(l^k a^m)$ について	34
2.3 2次元繊維集合体の変形による配向と構造の変化	39
2.3.1 繊維集合体の配向モデル	39
2.3.2 配向角分布の配向係数による表現	41
2.3.3 交点数の配向係数による表現	44
2.3.4 配向主軸に対して θ' 方向の走査線に交わる直線本数の配向係数による 表現	46
2.3.5 配向を有する直線要素によって生成される多角形の辺の数, 周長, 面積 の1次, 2次モーメント	48

2.3.6	集合体変形による多角形の辺の数の分布の変化	51
2.3.7	配向を有する繊維集合体組織のモンテカルロ・シミュレーション	54
2.4	結果と考察	57
3章	繊維集合体の粒子および流体通過特性	65
3.1	繊維フィルターの粒子通過特性	65
3.1.1	ランダム配向繊維集合体の粒子通過率	65
3.1.2	繊維フィルターを通過した粒子の周長分布の変化	66
3.1.3	3次元繊維フィルターにおける粒子捕そく率の厚さ方向の変化	68
3.1.4	捕そく粒子による繊維フィルターの目づまり効果	69
3.1.5	繊維集合体および粒子集合体が異方性を有する場合の粒子通過特性	71
3.2	ランダム配向繊維集合体の流体半径の分布と流体通過特性	76
3.2.1	流体半径の分布およびk次モーメント	76
3.2.2	流体半径, 周長, 面積の対数の分布	79
3.2.3	n角形の流体通過寄与率	82
3.2.4	流体半径, 周長, 面積に及ぼす繊維太さの影響	83
3.3	結果と考察	85
4章	繊維集合体の力学モデル	91
4.1	繊維集合体の配向角分布のフーリエ交換による表現	91
4.1.1	繊維集合体の力学モデル	91
4.1.2	配向角分布のフーリエ変換	94
4.1.3	応力および弾性常数のフーリエ変換による表現	96
4.1.4	繊維集合体の対称性と応力弾性常数	98
4.1.5	応力および弾性常数の座標変換	102
4.1.6	応力および弾性常数の配向係数による表現	108
4.1.7	配向係数による応力および弾性常数の表現	114

5章 繊維集合体の構造と異方弾性特性	119
5.1 3次元直交異方性繊維集合体の異方弾性特性	119
5.1.1 3次元繊維集合体の単純変形による繊維配向	119
5.1.2 走査平面に交わる繊維本数による配向角分布の推定	123
5.1.3 有効要素の集合体変形による変化	125
5.1.4 3次元直交異方性繊維集合体の構成方程式	127
5.1.5 3次元直交異方性繊維集合体の弾性常数および工学常数	128
5.2 横断等方性繊維集合体の異方弾性特性	136
5.2.1 弾性常数の異方性	136
5.2.2 工学常数の異方性	140
5.2.3 弾性常数および工学常数の配向係数による表現	141
5.3 2次元繊維集合体の異方弾性特性	143
5.3.1 2次元繊維集合体の単純変形による繊維配向	143
5.3.2 直交異方性繊維集合体の弾性常数	146
5.3.3 直交異方性繊維集合体の工学常数	147
5.3.4 弾性常数および工学常数の配向係数による表現	149
5.3.5 2軸配向繊維集合体の弾性常数および工学常数	151
5.3.6 任意方向の弾性常数および工学常数	153
5.4 結果と考察	158
6章 結 論	167
文 献	168
謝 辞	171

1章 緒 論

繊維とは一般に細長い糸状物質の総称である。繊維は動植物などの生体内に多く存在する。動物を機械的に支えているのはコラーゲンという蛋白質繊維である。コラーゲンは皮膚、腱、骨、歯だけでなく、眼の角膜や内臓や血管にも存在している。そして骨や歯は繊維にリン酸カルシウムが沈着した複合構造を有している。植物もセルロースなどの繊維によって構成されており、人間はその歴史のなかでも羊毛などの動物繊維とともに綿花、麻、コウゾ、ミツマタ、イなどの植物繊維を衣服、紙、敷物などに利用してきた。

一方、石油からもナイロン、テトロン、ビニロンなど多くの繊維が合成され衣服や工業用材料として使用されている。さらに最近では金属、炭素、ケイ素などの無機物を原料とした繊維もつくられ種々の構造物の強化材料として利用されている。

繊維集合体とは生物、無生物を問わず、多くの繊維が集合して一定の働きをする構造物の総称であり筋肉、皮膚、草、植物組織、織物、紙、不織布、繊維フィルター、連続気泡発泡体、そして多くのプラスチック類は広い意味で繊維集合体といえる。繊維集合体のなかで、単一種類の繊維で構成されている単一繊維集合体と、繊維と他の物質が複合して構成されている複合構造繊維集合体に区別して呼ぶことにすると、現実に存在する多くの構造物が複合構造繊維集合体であることがわかる。

繊維集合体の力学特性や、粒子や流体が通過するときの特性は、単繊維の物性と集合体構造に依存している。その関係を図 1.1 に示す。図において下向きの矢印は集合体を表わし、右向きの矢印

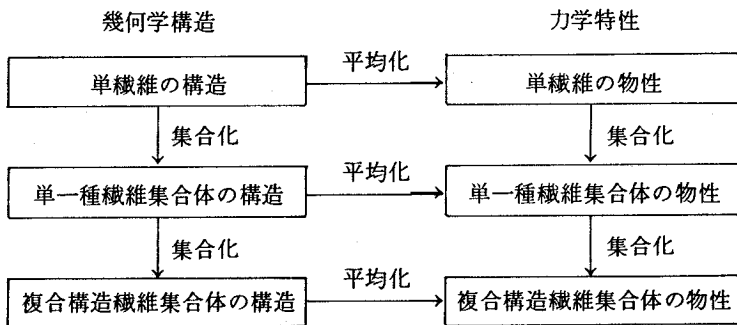


図 1.1 繊維集合体の幾何学構造と力学特性

は平均化を意味している。

繊維集合体の構造と物性の関係を解明するための基礎として2章では、2次元繊維集合体の幾何学構造解析を行う。

紙、不織布、繊維状フィルターなどの2次元繊維集合体の幾何学構造をモデル化して考えると、平面の直線によるランダム分割と見ることができる。単繊維の幾何学構造としては繊維長 l 、繊維巾 ω 、配向角 θ が考えられ、集合体幾何学構造としては繊維本数 N 、単位面積内の交点数 C 、単位長さあたりの交点数 τ 、繊維配向角分布 $q(\theta)$ などがある。さらにランダム配向直線によって生成される多角形の幾何学構造としては辺の数 n 、周長 l 、面積 a 、変形度 c が考えられ、多角形集合体としての特性はそれらの分布 $p(n)$ 、 $Q(l)$ 、 $R(a)$ 、 $T(c)$ とモーメント $E(n^k l^m)$ 、 $E(n^k a^m)$ 、 $E(l^k a^m)$ 、 $E(c^k)$ などで表わされる。

このような幾何学構造については、これまでも多くの研究がなされてきた。Kallmes ら⁽¹⁾ は、面積 a 内に繊維長 l の繊維が N 本存在し配向角分布が一様ランダムである場合の交点数 C は

$$C = (Nl)^2 / \pi a \quad (1.1)$$

であることを示した。小森⁽²⁾ らは任意の配向角分布を有する2次元繊維集合体の交点数 C を

$$C = \frac{(Nl)^2}{2a} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} q(\theta) q(\theta') |\sin(\theta - \theta')| d\theta d\theta' \quad (1.2)$$

で表わしている。

Hearle⁽³⁾ は不織布やカード、ウェブなどの配向角分布 $q(\theta)$ が

$$q(\theta) = a \pm b \cos^k \theta \quad (1.3)$$

で表わされることを実験的に確かめている。Stein ら⁽⁴⁾ は高分子フィルムの配向状態を評価する方法として配向係数 J を

$$J = 2 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^2 \theta q(\theta) d\theta - 1 \quad (1.4)$$

として定義している。配向が等方性であるときは $J = 0$ 、X軸方向に完全配列のときは $J = 1$ 、Y軸方向に完全配列のときは $J = -1$ であり、 J は2次元繊維集合体の配列度を示すパラメータになっている。

平面内ランダムの直線系の幾何学確率問題は従来、積分幾何⁽⁵⁾ の一分野として研究されてきた。

たとえば E. F. Harding, D. G. Kendall⁽⁶⁾らの確率幾何学はその代表的なものといえよう。S. Goudsmit⁽⁷⁾はランダム直線によって生成される多角形の幾何学特性の平均値について研究を行ない

$$\left. \begin{aligned} E(n) &= 4 \\ E(l) &= 2\pi / \tau \\ E(a) &= \pi / \tau^2 \\ E(a^2) &= \pi^4 / 2\tau^4 \end{aligned} \right\} \quad (1.5)$$

の関係を理論的に求めている。ここで $E(x)$ は変数 x の平均値のことである。

R. E. Miles⁽⁸⁾, P. I. Richards, D. G. Kendallらは S. Goudsmit の研究を進展させ、多角形の辺の数 n , 周長 l , 面積 a に関する 1 次, 2 次, 3 次モーメントをつぎのように理論的に求めている。

$$\left. \begin{aligned} E(l | n) &= (n-2)\pi / \tau \\ E(n^2) &= (\pi^2 + 24) / 2 \\ E(l^2) &= \pi^2 (\pi^2 + 4) / 2\tau^2 \\ E(nl) &= \pi (\pi^2 + 8) / 2\tau \\ E(na) &= \pi^3 / 2\tau^2 \\ E(la) &= \pi^4 / 2\tau^3 \\ E(na^2) &= \pi^4 (8\pi^2 - 21) / 21\tau^4 \\ E(la^2) &= 8\pi^7 / 21\tau^5 \\ E(a^3) &= 4\pi^7 / 7\tau^6 \end{aligned} \right\} \quad (1.6)$$

さらに R. E. Miles⁽⁸⁾は任意の配向を有するときのモーメントについても 1 次, 2 次の場合を求め、つぎのような理論式を誘導している。

$$\left. \begin{aligned} E(n) &= 4 \\ E(l) &= 4 / \tau \\ E(a) &= 2 / \tau^2 \end{aligned} \right\}$$

$$\begin{aligned}
 E(n^2) &= IG + 12 \\
 E(nl) &= 2(IG + 4) / I\tau \\
 E(na) &= 2G / \tau^2 \\
 E(la) &= 4G / I\tau^3 \\
 E(a^2) &= 4G / I\tau^4
 \end{aligned}
 \tag{1.7}$$

ここで

$$I = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} q(\theta)q(\theta') |\sin(\theta - \theta')| d\theta d\theta' \tag{1.8}$$

$$G = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left\{ \int_{-\pi/2}^{\pi/2} q(\theta) |\sin(\theta - \theta')| d\theta \right\}^{-2} d\theta' \tag{1.9}$$

であり、 τ は単位長さあたりの交点数である。

多角形の辺の数の分布 $P(n)$ については3角形の存在率 $P(3)$ だけがMilesによって

$$\begin{aligned}
 P(3) &= 2 - \pi^2 / 6 \\
 &= 0.3551
 \end{aligned}
 \tag{1.10}$$

と求められている。また彼は n 角形の周長の分布 $Q(l | n)$ が自由度 $2(n-2)$ の x^2 分布であることを証明している。

このように2次元繊維集合体の幾何学構造について多くの解析がなされてきたのであるが、まだ解明されていないところも多く残っている。多角形の辺の数の分布 $P(n)$ については4角形以上の確率はわかっていないし、配向を有する場合の $P(n)$ についても求められていない。また、多角形の周長 l 、面積 a 、変形度 c の分布 $Q(l)$ 、 $R(a)$ 、 $T(c)$ についてもその理論式はまだわかっていない。さらにモーメントについても、一様ランダム配向の場合は4次以上が、そして任意の配向を有する場合は3次以上のものがまだわかっていない。

本論文の2章第1節では、まず多角形の辺の数の分布 $P(n)$ をマルコフ過程の定常分布として求め、合せて $E(n^k)$ についても10次モーメントまでを計算する。第2節では多角形の周長、面積、変形度の分布 $Q(l)$ 、 $R(a)$ 、 $T(c)$ の理論式を求め、任意の (k, m) 次モーメント $E(n^k l^m)$ 、 $E(n^k a^m)$ 、 $E(l^k k^m)$ の理論式を誘導する。そして第3節では、2次元

繊維集合体が単純変形を受けたときの配向角分布 $q(\theta)$ を理論的に求め、交点数 C 、 θ' 方向の走査線に交わる繊維本数 $D(\theta')$ 、多角形の辺の数の分布 $P(n)$ を配向係数 J の関数として表わす。

3章では繊維集合体のなかを粒子や流体が通過していくときの特性について理論解析を行なっている。

紙、不織布、繊維フィルターなどは流体中の粒子を分離する目的でよく使用される。粒子や流体が繊維集合体を通過するときの特性は繊維の太さ ω 、単位長さあたりの交点数 τ 、多角形の面積や流体半径、粒子の形状や大きさに依存していると考えられる。

H. W. Piekaar⁽⁹⁾らは、有限長繊維によって構成されるランダム配向集合体の多角形の面積および流体半径の分布をモンテカルロ・シミュレーションによって求め、それらが対数正規分布で近似できると述べている。M. S. Abdel-Ghani⁽¹⁰⁾らは2次元繊維フィルターを層状に重ね合せた集合体の粒子通過特性をモンテカルロ・シミュレーションによって求めている。粒子通過率 f は、フィルター内に落下した粒子の数 m_i とフィルターを通過して出てくる粒子数 m_o の比によって $f = m_o / m_i$ として定義され、彼らは実験的に

$$f = e^{-\xi N_L} \quad (1.11)$$

という関係式を表わしている。ここで N_L は2次元繊維フィルターの層の数であり、 ξ は繊維直径に関連した定数である。

3次元繊維フィルターの粒子通過特性について D. F. Sherony⁽¹¹⁾らは

$$f = e^{-\lambda_c L} \quad (1.12)$$

$$\lambda_c = \frac{3(1-\varepsilon)h(1+d_p/d_f)\eta}{4d_f(1-h)} \quad (1.13)$$

という関係式を半理論的に誘導している。 ε は空げき率、 h は粒子の飽和度、 d_p は粒子の平均直径、 d_f は流体のレイノルズ数によって0~1まで変化する定数で、粒子の繊維による接着され易さを表わしている。

3章の第1節では、落下粒子の繊維およびすでに捕そくされている粒子と少しでも衝突すれば、新たに捕そくされるというモデルを用いて粒子通過率 f の理論解析を行っている。そして、粒子径に分布がある場合のフィルターを通過した粒子の周長分布の変化、捕そく粒子によるフィルターの見づまり効果、3次元フィルターにおける上面と下面での捕そく率のちがいが、繊維や粒子系が異方

性を有する場合の粒子通過率などについて理論式を求め、モンテカルロ・シミュレーション結果との比較検討を行う。

第2節では、多角形流体半径 r の分布 $H(r)$ とその k 次モーメント $E(r^k)$ の理論式を求め、 n 角形のみを通過する流体流量の全通過流量に占める分率 $K(n)$ を計算している。

4章では、繊維集合体構造と弾性常数、工学常数などの力学的異方性について理論解析を進める。繊維集合体には繊維塊(スライバー、ウェブなど)、織物、編物、高分子固体のように繊維や分子鎖のみで構成されているものと、紙、不織布、FRP、生物組織のように繊維と母体が複合しているものがある。これらの繊維集合体構造の力学特性を評価する方法として従来から応力が均一に分布すると仮定する Reuss モデルと、歪が均一に分布すると仮定する Voight モデルが用いられてきた。いずれのモデルにおいても繊維集合体の力学的、物理的異方性は配向角分布の n 次モーメントに依存している。例えば平均的な応力や歪は2次モーメントで、工学常数や弾性常数は4次モーメントで、そして高分子固体の光学的特性の多くは2次モーメントで表わされる。

配向を実験的に評価⁽¹²⁾する方法は、高分子の分子構造解析の分野でよく研究がなされている。赤外吸収二色性、可視および紫外吸収二色性、染色二色性、複屈折法では配向角分布の2次モーメントが評価できる。偏光けい光法、レーザーラマン分光法では2次および4次モーメントを評価することができる。広角X線回折法では n 次モーメントが評価でき、それゆえ配向角分布関数を完全に求めることができる。

配向を評価する理論⁽¹³⁾⁽¹⁴⁾としては、配向角分布関数を球面調和関数によって無限級数展開する方法がある。これらの級数展開の係数が配向係数に相当する。その結果、配向角分布関数は n 次の配向係数によって表現されることになる。Cox⁽¹⁵⁾らは直交異方性紙状物体の弾性常数および工学常数の理論解析において2次元配向角分布をフーリエ級数に展開する方法を用いている。

本論文の4章では、一般的異方性を有する繊維集合体の配向角分布 n 次モーメントをフーリエ変換によって表現する。重畳積分のフーリエ変換はそれぞれの項のフーリエ変換の積として表わされるため応力、弾性常数およびそれらの座標変換形は簡単な形式で、統一的に与えられることを示す。

D. R. Petterson⁽¹⁶⁾, S. Backer⁽¹⁷⁾, J. W. S. Haarle⁽¹⁸⁾, P. J. Stevenson⁽¹⁹⁾は不織布の力学特性に関する一連の研究を行ない、応力、歪曲線の予測、ヤング率、ポアソン比、強度の異方性などについて理論解析をし、実験値との比較を行っている。高分子固体に関しては C. C. Hsiao⁽²⁰⁾, S. R. Kao⁽²¹⁾らが1方向に配向した場合について弾性常数、工学常数強度の異方性を配向伸縮率の関数として求めている。しかし、彼らの解析には配向時の体積変化や伸張による有効要素率の減少効果は考慮されていない。

5章では、初期状態において一様ランダム配向を有する3次元および2次元繊維集合体が単軸引

張，純ずり変形などの単純変形を受けるときの繊維配向角分布を理論的に求める。そして，C. C. Hsiao⁽²⁰⁾らが用いた力学モデルを使用して，3次元直交異方性，横断等方性，2次元直交異方性集合体の弾性常数および工学常数を求める。その際，集合体変形による体積変化や有効要素率の減少効果についても検討を行っている。また，3次元横断等方性および2次元直交異方性集合体の弾性常数および工学常数については配向係数によって表現する。最後に，ヤング率の異方性については理論と実験値がよく合うことを確かめる。

2章 2次元繊維集合体の構造

2.1 平面内のランダム直線によって生成される多角形の幾何学特性

2.1.1 モンテカルロ・シミュレーションによる2次元ランダム配向繊維集合体の生成

平面上のランダム直線をつぎのように与える。

$$X \cos \theta + Y \sin \theta = Z \quad (2.1)$$

ここで θ は原点から直線に引いた垂線とX軸のなす角、 Z はこの垂線の長さである。 θ 、 Z は $0 \leq \theta \leq \pi$ 、 $0 \leq Z \leq M$ の範囲で分布する。ただし M は適当な正の常数である。

直線の測度 dG は

$$dG = dZ \wedge d\theta \quad (2.2)$$

与えられる。ここで \wedge は微分形式間の外積演算を表わしている。 Z 、 θ を一様乱数で置き換えると位置と方向がランダムな直線群になることが積分幾何によって証明されている。(2.1)によって、つぎつぎに新しいランダム直線を生成し、その過程で形成される多角形の辺の数、周長、面積などを計算した。実験はコンピューターと線描画によるものとの2種類で行い、初期形状は半径10 cmの円に内接する正三角形とした。直線本数は初期3角形内に100本入るまで続けた。線描画による実験の様子を図2.1に示す。

2.1.2 第I種分割過程によって生成される多角形の辺の数の分布および平均面積

1つの多角形が直線分の新たな導入により2つになり、さらに直線分を導入して、分割されたまえの2つの多角形が両方とも分割されて4つになる。このように進む分割過程を第1種分割過程と呼ぶことにする。この種の分割を i 段階進め

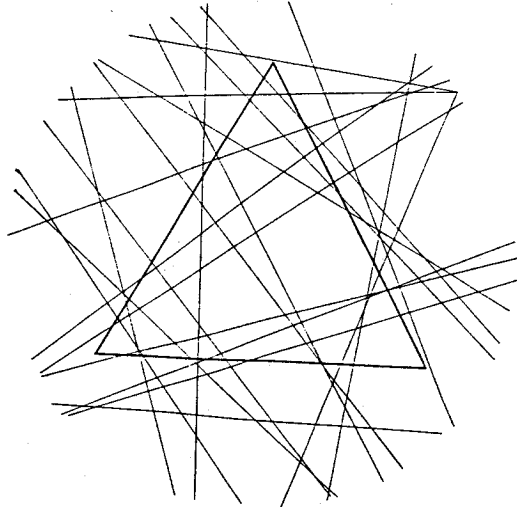


図2.1 線描画によるモンテカルロ・シミュレーション

ると生成される多角形の数は 2^i となる。初期多角形の辺の数を $n_0 = 3$ として第1種分割過程の進行の様子を図2.2に示す。図からわかるように第1種分割過程を理想化された割れ目の進行過程である。

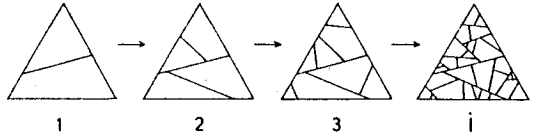


図2.2 第I種分割過程の進行

いま3角形が1本の直線分によって分割されるとき、直線分が3角形の頂点に交わる確率を0とすると、元の3

角形は必ず3角形と4角形に分割される。この場合、3角形から3角形になる推移確率 $T(3 | 3)$ と3角から4角形になる推移確率 $T(4 | 3)$ はそれぞれ $T(3 | 3) = 0.5$, $T(4 | 3) = 0.5$ となる。同様の推移確率を4角形以上の場合についても考える。任意の形の m 角形が直線分によって分割されるとき n 角形と $m - n + 4$ 角形になる。ここで $3 \leq n \leq m + 1$ である。 m 角形の形が固定されていると m 角形から n 角形になる推移確率 $T(n | m)$ が決定できる。ところで、実際の分割過程から生じる多角形は一義的に形が決まらず、まったく確率的なものである。そのため $m \geq 4$ においてこの確率 $T(n | m)$ を幾何学的に計算することができない。そこでつぎのような理想化を行う。つまり、各分割段階で着目する多角形を同じ辺数を持つ正多角形であるとみなして $T(n | m)$ を計算する。

m 角形が分割されて n 角形になる場合、分割された辺と辺の間には $n - 3$ 本の分割されない辺が存在する。例として $m = 8$, $n = 5$ の場合を図2.3に示す。このような状態の起こる確率 t は図2.

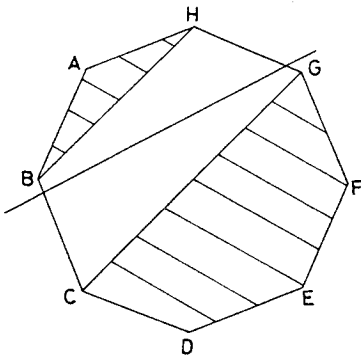


図2.3 八角形の分割

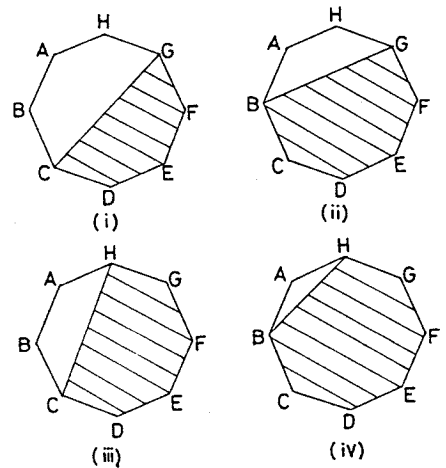


図2.4 分割過程の分類

4の(i)~(iv)において斜線部に交わずに白い部分のみに交わる確率を t_1, t_2, t_3, t_4 とすると

$$\begin{aligned} t &= t_1 - (t_2 - t_4) - (t_3 - t_4) - t_4 \\ &= t_1 + t_4 - t_2 - t_3 \end{aligned} \quad (2.3)$$

ところで積分幾何学の知識から凸閉領域 Γ_1 に交わるランダム直線がその内部の凸閉領域 Γ_2 にも交わる確率は Γ_1, Γ_2 の周長の比に等しいことがわかっているので、

$$\left. \begin{aligned} t_1 &= 1 - \frac{\text{多角形CDEFGの周長}}{\text{正8角形の周長}} \\ t_2 &= 1 - \frac{\text{多角形BCDEFGの周長}}{\text{正8角形の周長}} \\ t_3 &= 1 - \frac{\text{多角形CDEFGHの周長}}{\text{正8角形の周長}} \\ t_4 &= 1 - \frac{\text{多角形BCDEFGHの周長}}{\text{正8角形の周長}} \end{aligned} \right\} \quad (2.4)$$

正 m 角形において注目する2つの頂点の間に K 本と $m-K$ 本の辺が存在するとき、それら頂点間の距離を $L(m, K)$ で表わせば、簡単な幾何学誘導より

$$L(m, K) = D \sin(K\pi/m) \quad (2.5)$$

ここで D は正 m 角形の外接円の直径である。(2.4)の各表現は正8角形が5角形になる場合の確率を与えているが、これを正 m 角形から n 角形になる場合に一般化すると(2.4)(2.5)より

$$\left. t_1 = 1 - \frac{(m-n+1)D \sin(\pi/m) + D \sin\{(n-1)\pi/m\}}{D \cdot m \sin(\pi/m)} \right\}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{n-1}{m} - \frac{\sin\{(n-1)\pi/m\}}{m \sin(\pi/m)} \\
 t_2 = t_3 &= \frac{n}{m} - \frac{\sin\{(n-2)\pi/m\}}{m \sin(\pi/m)} \\
 t_4 &= \frac{n-1}{m} - \frac{\sin\{(n-3)\pi/m\}}{m \sin(\pi/m)}
 \end{aligned}
 \tag{2.6}$$

m が奇数の場合、図2.3で直線の通らない領域(斜線部)のとり方は m 種類存在する。さらに(2.6)の $t_1 \sim t_4$ は m 角形が分割されて n 角形と $m-n+4$ 角形ができる確率になっているので m 角形から n 角形になる推移確率としてはその半分であることを考慮すると $T(n|m)$ は

$$T(n|m) = m(t_1 + t_4 - t_2 - t_3) / 2 \tag{2.7}$$

m が偶数の場合、分割された多角形の両方が $(m+4)/2$ 角形になる場合があるが、直線の通らない領域のとり方が $m/2$ 種類となるので、このときも $T(n|m)$ は結局(2.7)で与えられる。(2.7)へ(2.6)を代入して整理すると

$$T(n|m) = \frac{-\sin\{(n-3)\pi/m\} + 2\sin\{(n-2)\pi/m\} - \sin\{(n-1)\pi/m\}}{2 \sin(\pi/m)}
 \tag{2.8}$$

(2.8)より明らかに

$$T(n|m) = T(m-n+4|m) \tag{2.9}$$

である。

このような分割過程での多角形の辺の数の推移は1段階前の状態のみに依存して順次進行していくのでマルコフ連鎖⁽²²⁾とみなすことができる。このとき(2.8)はこのマルコフ過程の推移確率行列の要素であると考えることができる。そこで推移確率行列を $\{T(n|m)\}$ で表わし、その計算値を第1表に示す。分割された多角形の辺の数は $m+1$ 以上はとりえないので $n > m+1$ では

$T(n|m) = 0$ である。表 2.1 より、任意の辺の数の多角形から任意の数の多角形が生成される

表 2.1 第 1 種分割過程において m 角形から n 角形になる推移確率行列 $[T(n|m)]$
(実際には無限行列であるがその一部を示す)

$m \setminus n$	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
3	0.5000	0.5000											
4	0.2929	0.4142	0.2929										
5	0.1910	0.3090	0.3090	0.1910									
6	0.1340	0.2321	0.2660	0.2321	0.1340								
7	0.9903×10^{-1}	0.1784	0.2225	0.2225	0.1784	0.9903×10^{-1}							
8	0.7612×10^{-1}	0.1407	0.1838	0.1989	0.1838	0.1407	0.7612×10^{-1}						
9	0.6031×10^{-1}	0.1133	0.1527	0.1736	0.1736	0.1527	0.1133	0.6031×10^{-1}					
10	0.4894×10^{-1}	0.9310×10^{-1}	0.1281	0.1506	0.1584	0.1506	0.1281	0.9310×10^{-1}	0.4894×10^{-1}				
11	0.4051×10^{-1}	0.7773×10^{-1}	0.1087	0.1308	0.1423	0.1423	0.1308	0.1087	0.7773×10^{-1}	0.4051×10^{-1}			
12	0.3407×10^{-1}	0.6583×10^{-1}	0.9309×10^{-1}	0.1140	0.1271	0.1316	0.1271	0.1140	0.9309×10^{-1}	0.6583×10^{-1}	0.3407×10^{-1}		
13	0.2906×10^{-1}	0.5643×10^{-1}	0.8052×10^{-1}	0.9993×10^{-1}	0.1135	0.1205	0.1205	0.1135	0.9993×10^{-1}	0.8052×10^{-1}	0.5643×10^{-1}	0.2906×10^{-1}	
14	0.2507×10^{-1}	0.4889×10^{-1}	0.7025×10^{-1}	0.8809×10^{-1}	0.1015	0.1098	0.1126	0.1098	0.1015	0.8809×10^{-1}	0.7025×10^{-1}	0.4889×10^{-1}	0.2507×10^{-1}

ことがわかる。すなわち、推移確率行列 $[T(n|m)]$ は既約でありエルゴディクである。その結果、任意の初期状態に対して唯一の定常分布を持つことが証明できる。

表 2.1 に示された各推移確率は、さまざまに変形した多角形を同じ辺数を持つ正多角形として理想化した場合の理論値である。この理論値が実際の多角形の推移確率に対して、どのような近似になっているかを検討する。図 2.2 のような第 1 種分割過程において、 $i = 8$ までの直線分によるすべての分割について分割される多角形の状態を分類し推移確率の実測値を求めた。5 回の実測値の最大、最小、平均値と (2.8) による理論値との比較を図 2.5 に示す。理論値と実測値の平均値は、ほぼ合っていることがわかる。このことは正多角形で理想化した場合の推移確率が、さまざまに変形した多角形の推移確率の平均値になっていることを示唆している。

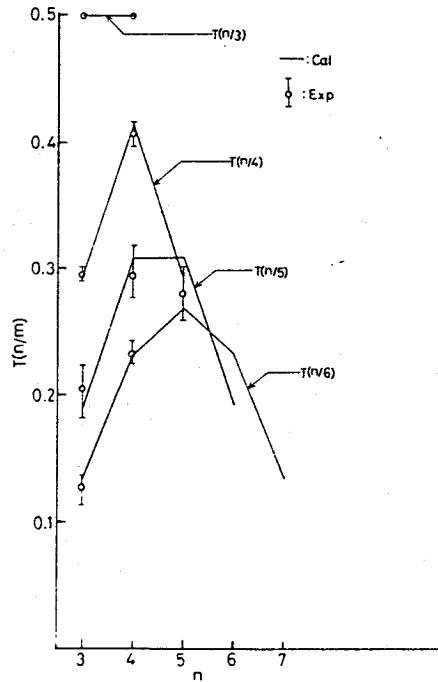


図 2.5 m 角形が分割されて n 角形が生成される推移確率 $T(n|m)$ の理論値と実験値の比較

第1種分割過程の段階 i において n 角形の存在確率を $P_i(n)$ ，その確率行列を $\{P_i(n)\}$ と表わすとマルコフ性より

$$\begin{aligned} \{P_i(n)\} &= \{P_{i-1}(m)\} \{T(n|m)\} \\ &= \{P_0(m)\} \{T(n|m)\}^i \end{aligned} \quad (2.10)$$

で与えられる。

初期状態を $P_0(3)=1$ ， $P_0(13)=1$ の2種類の場合について $i=100$ まで(10)の計算を行なった。その結果を図2.6，2.7に示す。いずれの場合も $i=10$ でほぼ収束していることがわかる。

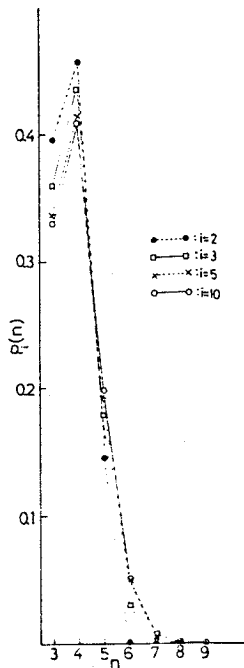


図2.6 初期多角形が三角形である場合の第I種分割過程における多角形の辺の数の分布 $P_i(n)$ の推移

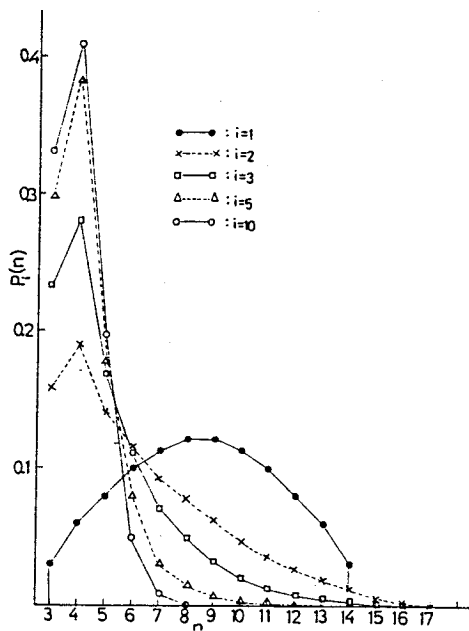


図2.7 初期多角形が十三角形である場合の第I種分割過程における多角形の辺の数の分布 $P_i(n)$ の推移

つぎに面積について考える。m角形が分割されてn角形になるときの辺の長さ、面積、角度などの記号を図2.8に示す。m角形とランダム直線との交点が $B_1 B_2$ と $B_{j-1} B_j$ の間に一様に分布していると近似すると $\triangle A_1 A_2 A_3$ の平均面積 $E(a' + a'')$ は

$$E(a' + a'') = \left\{ 1 / (b_1 - b_2) \right\} \cdot \left\{ 1 / (b_j - b_{j-1}) \right\} \cdot \int_{b_2}^{b_1} \int_{b_{j-1}}^{b_j} (1/2) x y \cdot \sin \theta dx dy$$

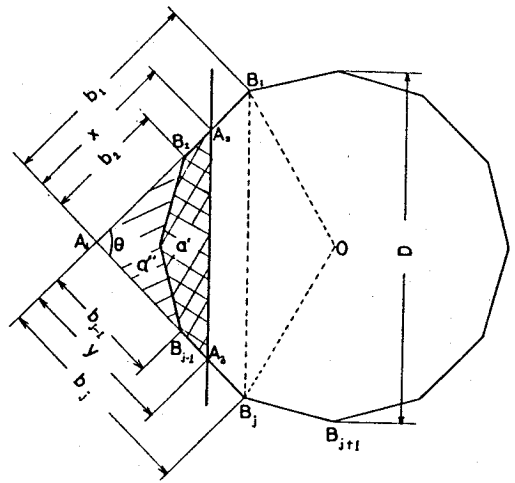


図2.8 辺長、面積、角度などの記号

$$= (1/2) \left\{ (b_1 + b_2) / 2 \right\} \cdot \left\{ (b_{j-1} + b_j) / 2 \right\} \sin \theta \tag{2.11}$$

この式は $B_1 B_2$ と $B_{j-1} B_j$ の中点を通る直線で分割したと考えたときの $\triangle A_1 A_2 A_3$ の面積と同じである。このことは $B_1 B_2$ と $B_{j-1} B_j$ が平行であるときにも適用できる。 a' の面積を $E(a' | n)$ とすると

$$E(a' | n) = \text{多角形 } OB_1 B_2 \cdots B_{j-1} B_j \text{ の面積} - 3 \text{ 角形 } OB_1 B_j \text{ の面積} - \text{台形 } B_1 A_2 A_3 B_j \text{ の面積} \tag{2.12}$$

右辺の各面積は簡単な幾何学的誘導より

$$E(a' | n) = \left\{ (n-1) / 2 \right\} (D/2)^2 \sin(2\pi/m) - (1/2) (D/2)^2 \sin \left\{ 2(n-1)\pi/m \right\} - (1/2) \left\{ (3/2) D \sin \left\{ (n-1)\pi/m \right\} + (1/2) D \sin \left\{ (n-3)\pi/m \right\} \right\}$$

$$\cdot (D/2) \sin(\pi/m) \sin\{(n-1)\pi/m\} \quad (2.13)$$

$E(a' | m)$ は正 m 角形の面積であるので

$$E(a' | m) = (m/2) (D/2)^2 \sin(2\pi/m) \quad (2.14)$$

(2.13)(2.14) の比を $G(n | m)$ とすると

$$\begin{aligned} G(n | m) &= E(a' | n) / E(a' | m) \\ &= \frac{n-1}{m} \frac{\sin\{2(n-1)\pi/m\}}{m \sin(2\pi/m)} \\ &= \frac{[3 \sin\{(n-1)\pi/m\} + \sin\{(n-3)\pi/m\}] \sin(\pi/m) \sin\{(n-3)\pi/m\}}{m \sin(2\pi/m)} \end{aligned} \quad (2.15)$$

となる。 $G(n | m)$ は正 m 角形が分割されて n 角形になるときの面積比を与えている。

段階 $i-1$ から i に進む過程において、あらゆる多角形にこのような面積変化が生じるので、そのことを考慮して平均化すると段階 i における n 角形の平均面積 $E_i(a | n)$ は (2.10)(2.15) より

$$E_i(a | m) = \frac{\sum_{m=3}^{\infty} P_{i-1}(m) T(n | m) E_{i-1}(a | m) G(n | m)}{\sum_{m=3}^{\infty} P_{i-1}(m) T(n | m)} \quad (2.16)$$

となる。

2.1.3 第 I 種分割過程の位相特性

点の数、辺の数、多角形の数、多角形の辺の数の平均値、1 点に接している辺の数の平均値などは連続変形に対して不変な性質を有しているため位相特性であると考えられる。そこで本節では第 I 種分割過程の段階 i の関数として、それらがどのように変化するかを検討する。

第 I 種分割過程によって生成される点の数を A 、辺の数を B 、多角形の数 C とするとオイラー

の定理より

$$A - B + C = 1 \quad (2.17)$$

点の近傍が位相的に異っているものを分類すると以下のように3種類に分けることができる。初期多角形の頂点になっているものには1点に2本の辺が接している。その数を A_1 とする。1点で3本の辺が接し、そのうちの2本が初期多角形の辺の1部となっている場合がある。このような点の数を A_2 とする。また1点に3本の辺が接し、それらのすべてが初期多角形の辺でない場合がある。そのような点の数を A_3 とすると

$$A = A_1 + A_2 + A_3 \quad (2.18)$$

各点に接している辺の数 h の平均値を $E(h)$ とすると

$$E(h) = \{2A_1 + 3(A_2 + A_3)\} / A \quad (2.19)$$

1つの辺の両端には必ず1つずつの点が接しているので

$$2B = AE(h) \quad (2.20)$$

すべての多角形の辺の数 n の合計は

$$\sum_{j=1}^C n_j = 2B - A_1 - A_2 \quad (2.21)$$

ここで j は、すべての多角形に番号をつけた場合の添字である。

(2.20)(2.21)を(2.17)へ代入して整理すると

$$\begin{aligned} E(n) &= \sum_{j=1}^C n_j / C \\ &= \frac{2E(h)}{E(h)-2} - \frac{2E(h)}{C\{E(h)-2\}} - \frac{A_1 + A_2}{C} \end{aligned} \quad (2.22)$$

つぎに $A, B, C, E(h), E(n)$ を段階 i の関数として考える。 A_1 は初期多角形の辺の数であるので

$$A_1 = n_0 \quad (2.23)$$

$A_2 + A_3$ は分割が段階 $i - 1$ から i に進むと 2^i 個増加するので

$$A_2 + A_3 = \sum_{j=1}^i 2^j = 2^{i+1} - 2 \quad (2.24)$$

(2.18) (2.23) (2.24) より

$$A = n_0 + 2^{i+1} - 2 \quad (2.25)$$

(2.19) (2.20) (2.25) より

$$B = n_0 + 3(2^i - 1) \quad (2.26)$$

(2.17) (2.24) (2.25) より

$$C = 2^i \quad (2.27)$$

(2.19) (2.23) (2.24) より

$$E(h) = \frac{2n_0 + 6(2^i - 1)}{n_0 + 2(2^i - 1)} \quad (2.28)$$

(2.22) (2.24) (2.27) (2.28) より

$$E(n) = \frac{2n_0 + 6(2^i - 1)}{2^i - 1} - \frac{2n_0 + 6(2^i - 1)}{2^i(2^i - 1)} - \frac{n_0 + A_2}{2^i} \quad (2.29)$$

ところで A_2 の変化は確率的であって一意的に決定されないが $A_2 \leq 2i$ である。分割段階 i を大きくすると (2.28) (2.29) より

$$\left. \begin{aligned} \lim_{i \rightarrow \infty} E(h) &= 3 \\ \lim_{i \rightarrow \infty} E(n) &= 6 \end{aligned} \right\} \quad (2.30)$$

となる。

第Ⅰ種分割過程において連結している多角形をバラバラにした後に点、辺、多角形の数などを計算する場合がある。このときは A_3 の点1個につき辺1本が数え過ぎになっているので辺の合計から A_3 を引いておく必要がある。すると(2.21)は

$$\sum_{j=1}^C n_j = 2B - A_1 - A_2 - A_3 = 2B - A \quad (2.31)$$

これより

$$E(n) = \sum_{j=1}^C n_j / C = 2B/C - A/C \quad (2.32)$$

(2.25)(2.26)(2.27)を(2.32)へ代入すると

$$\begin{aligned} E(n) &= \{2n_0 + 6(2^i - 1)\} / 2^i - (n_0 + 2^{i+1} + 2) / 2^i \\ &= 4 + (n_0 - 4) / 2^i \end{aligned} \quad (2.33)$$

図2.6に示すように $n_0 = 3$ で $i = 10$ のとき(2.33)より $E(n) = 3.999$ となる。また図2.7に示すように $n_0 = 13$ で $i = 10$ のとき $E(n) = 4.009$ であり、初期値 n_0 にかかわらず段階10で $E(n) \approx 4$ となっている。(2.33)において i を大きくしていくと

$$\lim_{i \rightarrow \infty} E(n) = 4$$

となる。

2.1.4 第Ⅱ種分割過程によって生成される多角形の辺の数の分布

第Ⅰ種分割過程では段階 $i-1$ から i に進む間にすべての多角形が例外なく分割されていくことを意味していた。しかし繊維集合体において繊維が1本ずつ増加していくような場合、すべての多角形のなかで周長の大きな多角形の方が小さなものより分割されやすい。そこで多角形の周長の大きさに応じて分割される確率を考慮に入れる必要がでてくる。このような場合を第Ⅱ種分割過程と呼ぶ。繊維集合体の例を図2.9に、割れ目の進行過程を図2.10に示す。理想化したわれ目の進行過程としてつぎのようなものとする。各段階でランダム走査線(図2.10の点線)を引き、それに交わった多角形を改めてランダム直線分で分割することによって段階を進めていく。このように

すれば周長の大きな多角形ほど大きな確率で分割されることになる。

ある凸領域 Γ の面積を a ，周の長さを l ， Γ と同じ面積をもつ円の周長を l' とするとき形状係数 F をつぎのように定義する。

$$F = l/l' = l/(4\pi a)^{\frac{1}{2}} \quad (2.35)$$

Γ が円の場合は当然 $F = 1$ であり，正 n 角形の場合は

$$F(n) = (n/\pi)^{\frac{1}{2}} \{ \tan(\pi/n) \}^{\frac{1}{2}} \quad (2.36)$$

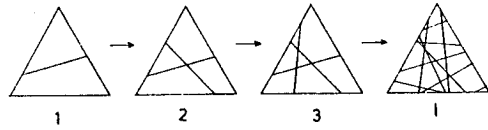


図2.9 第Ⅱ種分割過程の進行(繊維集合体の場合)

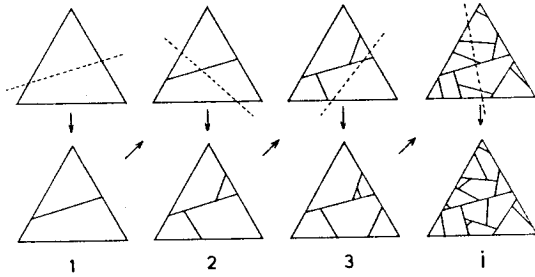


図2.10 第Ⅱ種分割過程の進行(割れ目の場合)
上段の点線は走査線を表わしている。

となる。

第Ⅱ種分割過程において初期多角形の辺の数を n_0 ，面積を a_0 ，形状係数を $F(n_0)$ とする。この初期多角形にランダム直線が1本交わるとに段階が1つつ増加していくと考える。段階 i で生成されている n 角形の平均面積を $E_i(a|n)$ ，形状係数を $F(n)$ とすると n_0 角形と n 角形の周長の比 $K_i(n|n_0)$ は(2.36)より

$$K_i(n|n_0) = \{ E_i(a|n) \}^{\frac{1}{2}} F(n) / (a_0)^{\frac{1}{2}} F(n_0) \quad (2.37)$$

前述のように凸領域 Γ_1 に交わるランダム直線がその内部にある凸領域 Γ_2 にも交わる確率は Γ_1, Γ_2 の周長の比によって与えられることを考えると(2.37)は段階 i において n 角形が分割される確率を与えていることになる。そこで段階 $i-1$ で n 角形であったものが段階 i でもそのまま残っている確率 q_1 は

$$q_1 = \{ 1 - K_{i-1}(n|n_0) \} P_{i-1}(n) \quad (2.38)$$

そして段階 $i-1$ で m 角形であったものが段階 i で n 角形になる確率 q_2 は

$$q_2 = 2 \sum_{m=3}^{\infty} K_{i-1}(m|n_0) P_{i-1}(m) T(n|m) \quad (2.39)$$

段階 $i-1$ でのすべての多角形の数を C_{i-1} , 段階 $i-1$ から i に進む間に増加した多角形の数を $C_i - C_{i-1}$ で与えると (2.38) (2.39) より

$$P_i(n) = \frac{C_{i-1} q_1 + C_{i-1} q_2}{C_{i-1} + (C_i - C_{i-1})} = \frac{q_1 + q_2}{1 + (C_i - C_{i-1})/C_{i-1}}$$

$$= \frac{\{1 - K_{i-1}(n|n_0)\} P_{i-1}(n) + 2 \sum_{m=3}^{\infty} K_{i-1}(m|n_0) P_{i-1}(m) T(n|m)}{1 + \sum_{m=3}^{\infty} K_{i-1}(m|n_0) P_{i-1}(m)} \quad (2.40)$$

となる。

(2.40) において $K_{i-1}(m|n_0) = 1$ とおけば第 I 種分割過程となるので当然 (2.10) と一致する。

第 II 種分割過程で $n_0 = 3, i = 100$

までの $P_i(n)$ の推移を (2.40) より計算した。その様子を図 2.11 に示す。

$i = 10$ で分布はすでに定常値に近くなっている。そこで $i = 100$ の場合を定常値と考え $P_{100}(n)$ の数値を表 2.2 に示す。

定常値分布 $P_{100}(n)$ の k 次モーメント $E(n^k)$ は

$$E(n^k) = \sum_{n=3}^{\infty} n^k P_{100}(n) \quad (2.41)$$

で与えられる。 $k = 10$ までの $E(n^k)$ の計算値を表 2.3 に示す。

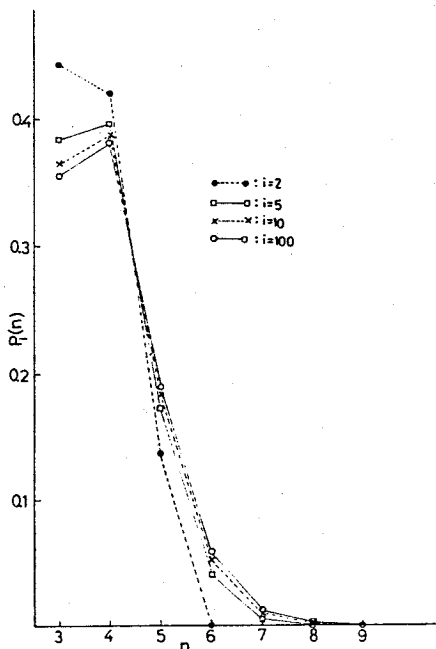


図 2.11 初期多角形が三角形である場合の第 II 種分割過程における多角形の辺の数の分布 $P_i(n)$ の推移

表 2.2 多角形の辺の数の定常分布 $P(n)$ の数値

n	$P(n)$
3	0.3554
4	0.3809
5	0.1901
6	0.5873×10^{-1}
7	0.1258×10^{-1}
8	0.1997×10^{-2}
9	0.2451×10^{-3}
10	0.2404×10^{-4}
11	0.1930×10^{-5}
11	0.1293×10^{-6}
13	0.7345×10^{-8}
14	0.3584×10^{-9}
15	0.1520×10^{-10}

表 2.3 多角形の辺の数の分布 $P(n)$ の k 次モーメント $E(n^k)$ の数値

k	$E(n^k)$
1	4.000
2	1.693×10
3	7.596×10
4	3.615×10^2
5	1.821×10^3
6	9.691×10^3
7	5.431×10^4
8	3.196×10^5
9	1.970×10^6
10	1.268×10^7

2.1.5 第Ⅱ種分割過程によって生成される多角形の平均面積と占有面積分率

段階 i における n 角形の平均面積 $E_i(a|n)$ について考える。それは段階 $i-1$ で n 角形であったものがそのまま残った場合の平均面積 $E_{i-1}(a|n)$ と、段階 $i-1$ で m 角形であったものが段階 i で n 角形になったときの平均面積 $E_{i-1}(a|m)G(n|m)$ とをそれぞれの生起確率 q_1 , q_2 で加重平均したものであるので

$$E_i(a|n) = \frac{q_1 E_{i-1}(a|n) + q_2 E_{i-1}(a|m)G(n|m)}{q_1 + q_2}$$

$$= \frac{\{1 - K_{i-1}(n|n_0)\} P_{i-1}(n) E_{i-1}(a|n) + 2 \sum_{m=3}^{\infty} K_{i-1}(m|n_0) P_{i-1}(m) T(n|m) E_{i-1}(a|m) G(n|m)}{\{1 - K_{i-1}(n|n_0)\} P_{i-1}(n) + 2 \sum_{m=3}^{\infty} K_{i-1}(m|n_0) P_{i-1}(m) T(n|m)} \quad (2.42)$$

(2.42)において $K_{i-1}(m|n_0) = 1$ とおくと第I種分割過程となるので(2.16)と一致する。(2.42)において $E_0(a_*|n_0=3) = 1$ として $i = 100$ まで計算を行なった。段階 i における3角形の平均面積を $E_i(a_*|3) = 1$ と規格して4角形以上の面積 $E_i(a|n)$ の推移を図2.12に示す。ここで添字 $*$ は上記規格化の下での面積の値であることを意味する多角形の辺の数が増加するにしたがって面積は指数関数的に増加する。また段階 i とともに増加率が大きくなっているが $i = 100$ ではほぼ定常値になっている。

R. E. Miles⁽⁸⁾は、すべての多角形の平均面積 $E(a)$ を交点密度 τ (単位長あたりの交点数)の関数として

$$E(a) = \pi / \tau^2 \quad (2.43)$$

で与えている。そこで $E_i(a|n)$ を τ の関数として求める。 $i = 100$ で図2.12に示すように n 角形の相対面積は定常値になっているので添字を省略して $E(a_*|n)$ と書く。すべての多角形の面積の平均値 $E(a_*)$ は

$$E(a_*) = \sum_{n=3}^{\infty} P(n) E(a_*|n) = 4.038 \quad (2.44)$$

$E(a)$ と $E(a_*)$ はある定数 J によって

$$E(a) = J \cdot E(a_*) = \pi / \tau^2 \quad (2.45)$$

とおける。(2.44)(2.45)より

$$J = \pi / 4.038 \tau^2 \quad (2.46)$$

とすると

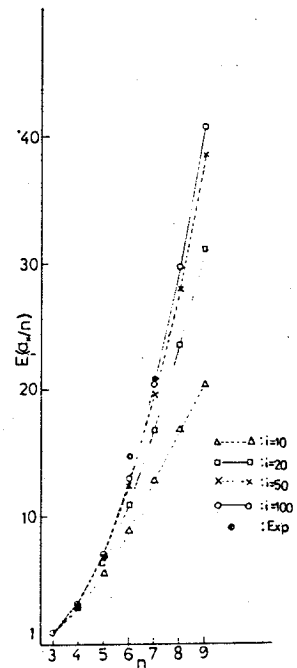


図2.12 n 角形の相対面積の推移
(三角形の平均面積を1とする)

$$E(a|n) = JE(a_*|n) = \pi E(a_*|n) / 4.038\tau^2 \quad (2.47)$$

となる。

n 角形の辺の数の分布 $P_i(n)$ と $E_i(a_*|n)$ がわかると、すべての n 角形が平面内を占める占有面積率 $S_i(n)$ は

$$S_i(n) = \frac{P_i(n) E_i(a_*|n)}{\sum_{n=3}^{\infty} P_i(n) E_i(a_*|n)} \quad (2.48)$$

で与えられる。

$i = 100$ までの $S_i(n)$ の推移の様子を図 2.13 に示す。 $i = 100$ では $P_i(n)$, $E_i(a_*|n)$ も定常値を持つので当然 (2.48) から決まる $S_i(n)$ も定常値を持つ。 $E(a|n)$, $S(n)$ の値を表 2.4 に示す。

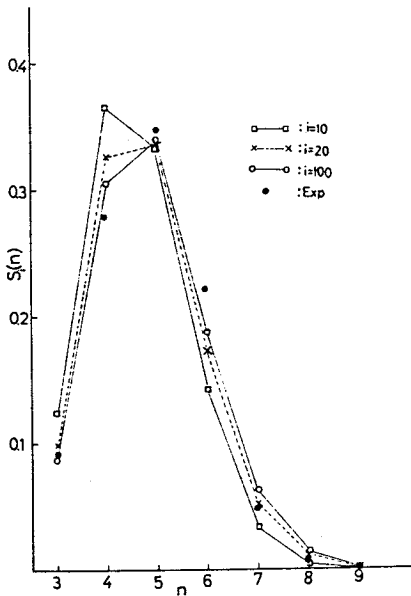


図 2.13 n 角形の占有面積率 $S_i(n)$ の推移

表 2.4 n 角形の面積の平均値 $E(a/n)$ と占有面積率 $S(n)$ の数値 (τ は単位長当りの交点数を表わしている)

n	$E(a/n)$	$S(n)$
3	$0.7780/\tau^2$	0.8704×10^{-1}
4	$2.554/\tau^2$	0.3064
5	$5.653/\tau^2$	0.3384
6	$10.13/\tau^2$	0.1874
7	$15.99/\tau^2$	0.6338×10^{-1}
8	$23.24/\tau^2$	0.1461×10^{-1}
9	$31.87/\tau^2$	0.2460×10^{-2}
10	$41.84/\tau^2$	0.3169×10^{-3}
11	$53.22/\tau^2$	0.3234×10^{-4}
12	$65.96/\tau^2$	0.2685×10^{-5}
13	$80.05/\tau^2$	0.1852×10^{-6}
14	$95.53/\tau^2$	0.1078×10^{-7}
15	$112.3/\tau^2$	0.5371×10^{-9}

2.1.6 第Ⅱ種分割過程での位相特性

第Ⅱ種分割過程のなかで図 2.9 に示すような繊維集合体の場合についての位相特性を検討する。

点の近傍において位相の異なるものを分類して、初期多角形の頂点の数を A_1 、初期多角形の辺とランダム直線が交わってできる交点の数を A_2 、ランダム直線同士が交わってできる交点の数を A_3 とすると

$$A = A_1 + A_2 + A_3 \quad (2.49)$$

1 点に接している辺の数の平均値は

$$E(h) = (2A_1 + 3A_2 + 4A_3) / A \quad (2.50)$$

A_1 は初期多角形の頂点であるので $A_1 = n_0$ で与えられ、 A_2 は 1 本の直線が増加すると必ず 2 個増えるので段階 i では

$$A_2 = 2i \quad (2.51)$$

A_3 は確率的にさまざまな値をとるが、その平均値は次式で与えられる。

$$A_3 = (i)^2 \bar{l}^2 / \pi a_0 \quad (2.52)$$

ここで \bar{l} は平均長さ、 a_0 は初期多角形の面積である。多角形に交わるランダム直線が切り取られる部分の長さの平均長さ \bar{l} は

$$\bar{l} = \pi a_0 / l_0 \quad (2.53)$$

で与えられる。ここで l_0 は初期多角形の周長である。

(2.52)(2.53)より

$$A_3 = \pi a_0 i^2 / (l_0)^2$$

(2.49)(2.51)(2.54)より

$$A = n_0 + 2i + \pi a_0 i^2 / (l_0)^2 \quad (2.55)$$

(2.50)は

$$E(h) = \frac{2n_0 + 6i + 4\pi a_0 i^2 / (l_0)^2}{n_0 + 2i + \pi a_0 i^2 / (l_0)^2} \quad (2.56)$$

(2.20)(2.56)より

$$B = n_0 + 3i + 2\pi a_0 i^2 / (l_0)^2 \quad (2.57)$$

(2.17)(2.55)(2.57)より

$$C = 1 + i + \pi a_0 i^2 / (l_0)^2 \quad (2.58)$$

多角形の辺の数の合計は

$$\sum_{j=1}^C n_j = 2B - A_1 - A_2 \quad (2.59)$$

多角形の辺の数の平均値は

$$E(n) = \frac{\sum_{j=1}^C n_j}{C} = \frac{n_0 + 4i + 4\pi a_0 i^2 / (l_0)^2}{1 + i + \pi a_0 i^2 / (l_0)^2} \quad (2.60)$$

(2.60)より初期多角形が $n_0 = 3$, $a_0 = 1$ のとき $i = 10$ では $E(n) = 3.962$, $i = 100$ では $E(n) = 3.988$ となり段階10でほぼ定常値に近くなっている。

(2.56)(2.60)において i を大きくすると

$$\left. \begin{aligned} \lim_{i \rightarrow \infty} E(h) &= 4 \\ \lim_{i \rightarrow \infty} E(n) &= 4 \end{aligned} \right\} \quad (2.61)$$

となる。

2.1.7 有限直線長の場合の位相特性と多角形の辺の数の分布

第Ⅱ種分割過程でランダム直線の長さが有限である場合について考える。初期多角形の周辺効果の影響を無視して、すべての直線分が初期多角形内に入るものとする。また、直線本数も十分多いものとする。

点の近傍の位相をつぎのように分類する。まずランダム直線分の末端の点は1本の辺と接している。その数を A_1 とすると

$$A_1 = 2i \quad (2.62)$$

直線分同志の交点には各4本の辺が接している。その種の交点の数を A_2 とすると (2.62) より

$$A_2 = i^2 (\bar{l})^2 / \pi a_0 \quad (2.63)$$

ここで \bar{l} は直線分の平均長さである。すると

$$A = A_1 + A_2 = 2i + i^2 (\bar{l})^2 / \pi a_0 \quad (2.64)$$

1 点に接している辺の数の平均値は

$$E(h) = \frac{A_1 + 4A_2}{A} = \frac{2i + 4i^2 (\bar{l})^2 / \pi a_0}{2i + i^2 (\bar{l})^2 / \pi a_0} \quad (2.65)$$

(2.20) (2.64) (2.65) より

$$B = i + 2i^2 (\bar{l})^2 / \pi a_0 \quad (2.66)$$

(2.17) (2.64) (2.66) より

$$C = 1 - i + i^2 (\bar{l})^2 / \pi a_0 \quad (2.67)$$

辺のうち多角形の周の構成要素になっているものの数を B' とすると

$$B' = B - 2i = -i + 2i^2 (\bar{l})^2 / \pi a_0 \quad (2.68)$$

多角形の辺の数の合計は

$$\sum_{j=1}^C n_j = 2B' - B'' \quad (2.69)$$

ここで B'' は多角形集合体の最外周辺部を構成している辺の数である。 B'' は確率的にさまざまな値をとりうるが $B'' < 2i$ である。多角形の辺の数の平均値は (2.67) (2.68) (2.69) より

$$E(n) = \frac{\sum_{j=1}^C n_j}{C} = \frac{4i^2 (\bar{l})^2 / \pi a_0 - 2i - B''}{i^2 (\bar{l})^2 / \pi a_0 - i + 1} \quad (2.70)$$

直線本数を多くすると (2.65) (2.70) より

$$\lim_{i \rightarrow \infty} E(h) = 4$$

$$\lim_{i \rightarrow \infty} E(n) = 4$$

となって無限長の場合の(2.61)と一致する。

有限長の場合、多角形の辺の数の分布はランダム直線分の末端を含んでいる辺の存在を無視すれば、第Ⅱ種分割過程の繊維集合体の場合(図2.9)と割れ目の進行過程の場合(図2.10)の混合過程であると考えられる。どちらも同じ定常分布を持つことがわかっているので、有限長の場合も同分布となる。ただし、末端効果すなわち(2.70)における*i*に比例する項の存在のため収束速度はおそくなる。

2.2 平面内のランダム直線によって生成される多角形の周長，正多角形からの変形度，

および面積の分布

2.2.1 多角形の周長分布

*n*角形の周長分布 $Q(l | n)$ については

$$l^* = 2\tau l / \pi \quad (2.71)$$

と変数変換すると、自由度が $2(n-2)$ の x^2 分布になることが知られている。すなわち l^* の確率密度は

$$Q(l^* | n) = 2^{-(n-2)} \{ \Gamma(n-2) \}^{-1} (l^*)^{n-3} e^{-\frac{l^*}{2}} \quad (2.72)$$

である。したがって、*l*の分布になおすと

$$Q(l | n) = (\pi/\tau)^{-(n-2)} \{ \Gamma(n-2) \}^{-1} l^{n-3} e^{-(\tau/\pi)l} \quad (2.73)$$

となる。するとすべての多角形の周長分布 $Q(l)$ は

$$\begin{aligned} Q(l) &= \sum_{n=3}^{\infty} P(n) Q(l | n) \\ &= \sum_{n=3}^{\infty} P(n) \{ \Gamma(n-2) \}^{-1} l^{n-3} e^{-(\tau/\pi)l} (\tau/\pi)^{n-2} \end{aligned} \quad (2.74)$$

となる。

$Q(l | n)$ の*k*次モーメント $E(l^k | n)$ は(2.73)式より

$$E(l^k | n) = \int_0^{\infty} l^k Q(l | n) dl$$

$$= \prod_{i=0}^{k-1} (n+i-2) (\pi/\tau)^k \quad (2.75)$$

で与えられる。

(2.75)式より $E(l)$ は

$$\begin{aligned} E(l) &= \sum_{n=3}^{\infty} P(n) (n-2) (\pi/\tau) \\ &= \{E(n) - 2\} (\pi/\tau) \end{aligned} \quad (2.76)$$

前節より $E(n) = 4$ であるので (2.76) 式は

$$E(l) = 2\pi/\tau \quad (2.77)$$

これは G. S. Goudsmit⁽⁷⁾ の結果と一致する。

同様に $E(l^2)$ は

$$\begin{aligned} E(l^2) &= \sum_{n=3}^{\infty} P(n) (n-1) (n-2) (\pi/\tau)^2 \\ &= \{E(n^2) - 3E(n) + 2\} (\pi/\tau)^2 \end{aligned} \quad (2.78)$$

$E(n^2) = (\pi^2 + 24)/2$ であるので (2.78) 式は

$$E(l^2) = \{(\pi^2 + 4)/2\} (\pi/\tau)^2 \quad (2.79)$$

これは R. E. Miles⁽⁸⁾ の結果と一致する。

$E(l) = 1$, すなわち交点密度 $\tau = 2\pi$ の場合の $Q(l|n)$ の変化の様子と $Q(l)$ を図 2.14 に示す。そして $E(l) = 0.1, 0.2, 0.5, 1.0, 2.0, 5.0$ と変化させた場合の $Q(l)$ の変化の様子を図 2.15 に示す。

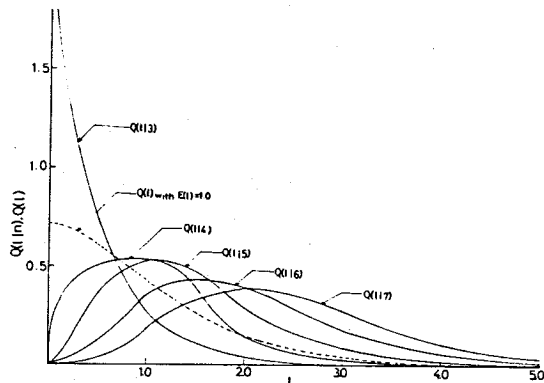


図 2.14 すべての多角形の周長の平均値が $E(l) = 1.0$ の場合の周長分布 $Q(l)$ と n 角形の周長分布 $Q(l|n)$ の変化の様子

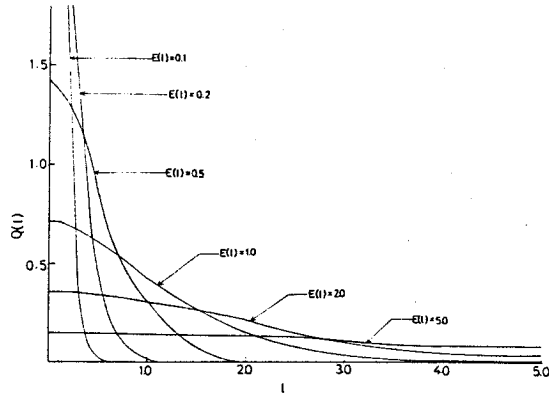


図 2.15 すべての多角形の周長の平均値が $E(l)=1.0 \sim 5.0$ の場合の周長分布 $Q(l)$ の変化の様子

2.2.2 多角形の面積分布および変形度分布

周長 l の正 n 角形の面積 a^* は簡単な幾何学誘導により

$$a^* = (l^2 / 4n) \tan \{ (n-2)\pi / 2n \} \quad (2.80)$$

で与えられる。

与えられた辺数および与えられた周長を持つすべての多角形の中で正多角形が最大面積を持つことがわかっているので、同じ辺数、周長でも実際の多角形の面積 a は a^* より小さくなる。そこで任意の多角形が正多角形形状からずれている程度を表わす量として変形度（面積修正係数） c を

$$c = \frac{\text{周長 } l \text{ の変形した } n \text{ 角形の面積}}{\text{周長 } l \text{ の正 } n \text{ 角形の面積}} \quad (2.81)$$

と定義する。

明らかに c は $0 \leq c \leq 1$ で変化する。また (2.81) 式より相似な多角形の c は同値であるので、 c は多角形の大きさとは無関係であることがわかる。

すると周長 l 、変形度 c の n 角形の面積 a は

$$a = (c l^2 / 4n) \tan \{ (n-2)\pi / 2n \} \quad (2.82)$$

となる。

(2.82) 式を l について解いて (2.71) 式へ代入すると

$$l^* = J(\tau/\pi) a^{-\frac{1}{2}} c^{-\frac{1}{2}} \quad (2.83)$$

ここで

$$J = 4n^{\frac{1}{2}} \left\{ \tan \left\{ (n-2)\pi/2n \right\} \right\}^{-\frac{1}{2}} \quad (2.84)$$

である。

(2.83)式より

$$\frac{dl^*}{da} = 2^{-1} J a^{-\frac{1}{2}} c^{-\frac{1}{2}} (\tau/\pi) \quad (2.85)$$

cを定数と考えた場合のn角形の面積分布を $R_c(a|n)$ とすると(2.72)式の変数変換は

$$R_c(a|n) = Q(l^*|n) \left| dl^*/da \right| \quad (2.86)$$

で与えられるので

$$R_c(a|n) = \left\{ \Gamma(n-2) \right\}^{-1} 2^{-(n-1)} J^{n-2} a^{(n-4)/2} (\tau/\pi)^{n-2} c^{-(n-2)/2} \\ \cdot e^{-\frac{1}{2}(\tau/\pi) J c^{-\frac{1}{2}} a^{\frac{1}{2}}} \quad (2.87)$$

となる。

(2.87)式はcを定数と仮定した場合であるが実際にはcは分布している。そこでcの確率密度関数を $T(c)$ とすると、 $T(c)$ はaと独立に与えられるので $R(a|n)$ は結局

$$R(a|n) = \left\{ \Gamma(n-2) \right\}^{-1} 2^{-(n-1)} J^{n-2} a^{(n-4)/2} (\tau/\pi)^{n-2} \\ \cdot \int_0^1 c^{-(n-2)/2} e^{-\frac{1}{2}(\tau/\pi) J c^{-\frac{1}{2}} a^{\frac{1}{2}}} T(c) dc \quad (2.88)$$

となる。

(2.88)式より $R(a)$ は

$$R(a) = \sum_{n=3}^{\infty} P(n) R(a|n) \quad (2.89)$$

によって求めることができる。

$R(a|n)$ の m 次モーメント $E(a^m|n)$ は

$$\begin{aligned} E(a^m|n) &= \int_0^{\infty} a^m R(a|n) da \\ &= n^{-m} 2^{-2m} \left\{ \tan \left\{ (n-2)\pi/2n \right\} \right\}^m E(c^m) \prod_{i=0}^{2m-1} (n+i-2) (\pi/\tau)^{2m} \end{aligned} \quad (2.90)$$

と計算される。

すると $R(a)$ の m 次モーメント $E(a^m)$ は

$$E(a^m) = \sum_{n=3}^{\infty} P(n) E(a^m|n) \quad (2.91)$$

によって計算できる。

これまでの研究⁽⁸⁾によって

$$\left. \begin{aligned} E(a) &= (1/\pi) (\pi/\tau)^2 \\ E(a^2) &= (1/2) (\pi/\tau)^4 \end{aligned} \right\} \quad (2.92)$$

であることがわかっている。そこで(2.91)式の1次、2次モーメントを計算して(2.92)式と比較すると

$$\left. \begin{aligned} E(c) &= 0.7008 \\ E(c^2) &= 0.5329 \end{aligned} \right\} \quad (2.93)$$

を得る。

この段階ではまだ $T(c)$ の詳細は不明であるが(2.93)式によって1次、2次モーメントが理論的に求められたことになる。そこで $0 \leq c \leq 1$ で(2.93)式を満す分布として経験的にベータ分布⁽²³⁾を考える。ベータ分布は

$$T(c) = \{B(p, q)\}^{-1} c^{p-1} (1-c)^{q-1} \quad (2.94)$$

で与えられる。ここで $B(p, q)$ はベータ関数である。ベータ分布の m 次モーメント $E(c^m)$ は

$$\begin{aligned} E(c^m) &= B(p+m, q) / B(p, q) \\ &= \frac{(p+m-1)(p+m-2)\cdots(p+1)p}{(p+q+m-1)(p+q+m-2)\cdots(p+q+1)(p+q)} \end{aligned} \quad (2.95)$$

である。

(2.93)(2.95) 式より 1 次, 2 次モーメントは

$$\begin{aligned} E(c) &= p / (p+q) \\ &= 0.7008 \\ E(c^2) &= (p+1)p / (p+q+1)(p+q) \\ &= 0.5329 \end{aligned} \quad (2.96)$$

となる。(2.96) 式より

$$\left. \begin{aligned} p &= 2.816 \\ q &= 1.202 \end{aligned} \right\} \quad (2.97)$$

となり, $T(c)$ が完全にわかる。そしてこの段階で (2.88)(2.89) 式の $R(a|n)$, $R(a)$ もすべてわかったことになる。

$E(a) = 1$, すなわち $\tau = \pi^{\frac{1}{2}}$ のときの $R(a|n)$ の変化の様子と $R(a)$ を図 2.16 に示す。 $E(a) = 0.1$,

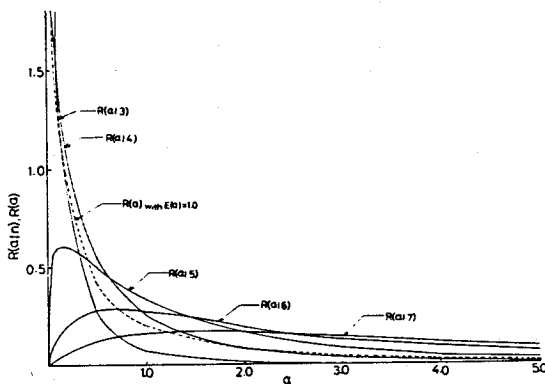


図 2.16 すべての多角形の面積の平均値が $E(a) = 1.0$ の場合の面積分布 $R(a)$ と n 角形の面積分布 $R(a|n)$ の変化の様子

0.5, 1.0, 2.0, 5.0のときの $R(a)$ の変化の様子を図2.17に示す。

2.2.3 多角形の辺の数 n , 周長 l ,
面積 a に関する (k, m) 次モーメント $E(n^k l^m)$, $E(n^k a^m)$,
 $E(l^k a^m)$ について

$P(n)$, $Q(l)$, $R(a)$ が求められたので, それらに関する (k, m) 次モーメント $E(n^k l^m)$, $E(n^k a^m)$, $E(l^k a^m)$ を計算する。

$E(n^k l^m)$ は

$$\begin{aligned} E(n^k l^m) &= \sum_{n=3}^{\infty} P(n) \int_0^{\infty} n^k l^m Q(l|n) dl \\ &= \sum_{n=3}^{\infty} n^k P(n) E(l^m | n) \end{aligned} \quad (2.98)$$

で表わされる。(2.75)(2.98)式より

$$E(n^k l^m) = \sum_{n=3}^{\infty} P(n) n^k \prod_{i=0}^{m-1} (n+i-2) (\pi/\tau)^m \quad (2.99)$$

となる。

$k+m=1$, $k+m=2$ のモーメントはすでに(2.77)(2.79)式によって与えられているので $k+m=3$ のモーメントは(2.99)式より

$$\left. \begin{aligned} E(n^2 l) &= 4.210 (\pi/\tau) \\ E(n l^2) &= 3.317 (\pi/\tau)^2 \\ E(l^3) &= 3.317 (\pi/\tau)^3 \end{aligned} \right\} \quad (2.100)$$

同様に $k+m=4$ のモーメントは

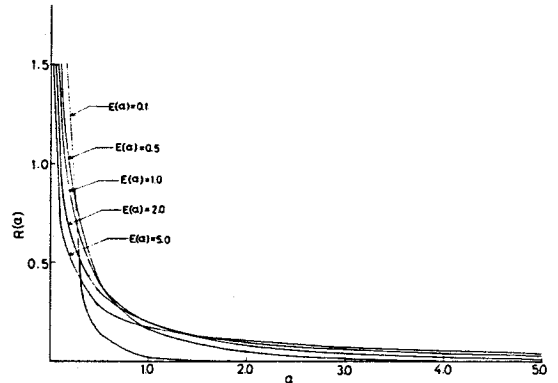


図2.17 すべての多角形の面積の平均値が $E(a)=0.1 \sim 5.0$ の場合の面積分布 $R(a)$ の変化の様子

$$\begin{aligned}
 E(n^3 l) &= 209.6 (\pi / \tau) \\
 E(n^2 l^2) &= 167.5 (\pi / \tau)^2 \\
 E(n l^3) &= 167.5 (\pi / \tau)^3 \\
 E(l^4) &= 200.7 (\pi / \tau)^4
 \end{aligned}
 \tag{2.101}$$

と計算できる。

つぎに $E(n^k a^m)$ は

$$\begin{aligned}
 E(n^k a^m) &= \sum_{n=3}^{\infty} \int_0^{\infty} n^k a^m P(n) R(a|n) da \\
 &= \sum_{n=3}^{\infty} n^k P(n) E(a^m | n)
 \end{aligned}
 \tag{2.102}$$

(2.90)(2.102)式より

$$\begin{aligned}
 E(n^k a^m) &= \sum_{n=3}^{\infty} P(n) n^{k-m} 2^{-2m} [\tan\{(n-2)\pi/2n\}]^m \\
 &\quad \cdot E(c^m) \prod_{i=0}^{2m-1} (n+i-2) (\pi / \tau)^{2m}
 \end{aligned}
 \tag{2.103}$$

と計算される。これより $k+m=3$ のモーメントは

$$\begin{aligned}
 E(n^2 a) &= 8.019 (\pi / \tau)^2 \\
 E(n a^2) &= 2.747 (\pi / \tau)^4 \\
 E(a^3) &= 1.803 (\pi / \tau)^6
 \end{aligned}
 \tag{2.104}$$

同様に $k+m=4$ のモーメントは

$$\begin{aligned}
 E(n^3 a) &= 43.26 (\pi / \tau)^2 \\
 E(n^2 a^2) &= 15.44 (\pi / \tau)^4 \\
 E(n a^3) &= 10.54 (\pi / \tau)^6
 \end{aligned}
 \tag{2.105}$$

となる。

さらに $E(l^k a^m)$ を求める。 a と l の間には (2.82) 式の関係があるので

$$\begin{aligned}
E(l^k a^m | n) &= \int_0^\infty \int_0^1 l^k a^m T(c) Q(l | n) dc dl \\
&= \int_0^\infty \int_0^1 l^{k+2m} n^{-m} 4^{-m} \left[\tan\left\{ (n-2)\pi / 2n \right\} \right]^m \\
&\quad \cdot c^m T(c) Q(l | n) dc dl \\
&= n^{-m} 4^{-m} \left[\tan\left\{ (n-2)\pi / 2n \right\} \right]^m E(c^m) \\
&\quad \cdot \prod_{i=0}^{k+2m-1} (n+i-2) (\pi/\tau)^{k+2m} \tag{2.106}
\end{aligned}$$

となる。

これより $E(l^k a^m)$ は

$$E(l^k a^m) = \sum_{n=3}^{\infty} P(n) E(l^k a^m | n) \tag{2.107}$$

によって計算できる。(2.107)式より $k+m=3$ のモーメントは

$$\left. \begin{aligned}
E(l^2 a) &= 9.568 (\pi/\tau)^4 \\
E(l a^2) &= 3.741 (\pi/\tau)^5
\end{aligned} \right\} \tag{2.108}$$

同様に $k+m=4$ のモーメントは

$$\left. \begin{aligned}
E(l^3 a) &= 70.45 (\pi/\tau)^5 \\
E(l^2 a^2) &= 32.03 (\pi/\tau)^6 \\
E(l a^3) &= 17.75 (\pi/\tau)^7 \\
E(a^4) &= 1.56 (\pi/\tau)^8
\end{aligned} \right\} \tag{2.109}$$

となる。

$k+m=3$ のモーメントの一部については D.G.Kendall, R.E.Miles⁽⁸⁾ によって

$$E(n a^2) = 2.760 (\pi/\tau)^4 \quad]$$

$$\begin{aligned}
 E(la^2) &= 3.760(\pi/\tau)^5 \\
 E(la^2) &= 3.760(\pi/\tau)^6
 \end{aligned}
 \quad \left. \vphantom{\begin{aligned} E(la^2) &= 3.760(\pi/\tau)^5 \\ E(la^2) &= 3.760(\pi/\tau)^6 \end{aligned}} \right\} (2.110)$$

と計算されている。これらの値と本節で計算した数値を比較すると、その差は1%以内である。

$E(n^k l^m)$, $E(n^k a^m)$, $E(l^k a^m)$ を計算する際に生じる誤差としては $E(n^k l^m)$ については①有効数字(4ケタ)による丸め誤差② $\sum_{n=3}^{\infty} P(n) \dots$ を計算する際の n の打ち切りによる誤差③辺の数の分布 $P(n)$ を得る際に用いた近似による誤差が考えられる。 $E(n^k a^m)$, $E(l^k a^m)$ のように面積 a の入ったモーメントについては①~③以外に④ $T(c)$ をベータ分布で近似することによって生じる誤差がある。

$k+m=3$ のモーメントの計算において①②はどのモーメントの計算においても同程度の誤差が入ってくる。③についても、どのモーメントにおいても $E(n^k)$ の項が表われるため同程度の誤差が考えられる。④については $E(a^3)$ の計算において $E(c^3)$ の項が現われる。その他のモーメントについては $E(c^2)$ より低次の項が現われる。誤差は $E(c^m)$ において高次のものが表われる程、大きくなると考えられる。そこで $k+m=3$ の各モーメントの誤差は $E(a^3)$ の誤差と同程度かより小さいものとみなされる。

表2.5~表2.7に $k+m$ が1~4のモーメントの数値のまとめを示す。

表 2.5 多角形の辺の数 n , 周長 l , 面積 a に関する
1次, 2次モーメントの数値
(τ は単位長当りの交点数)

$k+m$	記号	数 値	研究者名
1 次 モ ー メント	$E(n)$	4.000	S. Govdsmit
	$E(l)$	$2.000(\pi/\tau)$	S. Govdsmit
	$E(a)$	$0.383(\pi/\tau)^2$	S. Govdsmit
2 次 モ ー メント	$E(n^2)$	16.93	R. E. Miles
	$E(nl)$	$8.935(\pi/\tau)$	R. E. Miles
	$E(l^2)$	$6.934(\pi/\tau)^2$	R. E. Miles
	$E(na)$	$1.571(\pi/\tau)^2$	R. E. Miles
	$E(a^2)$	$0.500(\pi/\tau)^4$	S. Govdsmit
	$E(la)$	$1.571(\pi/\tau)^3$	R. E. Miles

表 2.6 多角形の辺の数 n , 周長 l , 面積 a に関する
3次モーメントの数値
(τ は単位長当りの交点数)

$k+m$	記号	数 値	研究者名
3 次 モ ー メ ン ト	$E(n^3)$	75.96	K. Yamada, A. Horikawa
	$E(n^2l)$	42.10 (π/τ)	〃
	$E(n^2P)$	33.17 $(\pi/\tau)^2$	〃
	$E(P^3)$	33.17 $(\pi/\tau)^3$	〃
	$E(n^2a)$	8.019 $(\pi/\tau)^2$	〃
	$E(na^2)$	2.760 $(\pi/\tau)^4$	R. E. Miles
	$E(a^3)$	1.795 $(\pi/\tau)^6$	D. G. Kendall
	$E(Pa)$	9.568 $(\pi/\tau)^4$	K. Yamada, A. Horikawa
	$E(la^2)$	3.760 $(\pi/\tau)^5$	R. E. Miles

表 2.7 多角形の辺の数 n , 周長 l , 面積 a に関する
4次モーメントの数値
(τ は単位長当りの交点数)

$k+m$	記 号	数 値
4 次 モ ー メ ン ト	$E(n^4)$	361.5
	$E(n^3l)$	209.6 (π/τ)
	$E(n^2P^2)$	167.5 $(\pi/\tau)^2$
	$E(n^2P)$	167.5 $(\pi/\tau)^3$
	$E(P^4)$	200.7 $(\pi/\tau)^4$
	$E(n^3a)$	43.26 $(\pi/\tau)^2$
	$E(n^2a^2)$	15.44 $(\pi/\tau)^4$
	$E(na^3)$	10.54 $(\pi/\tau)^6$
	$E(P^3a)$	70.45 $(\pi/\tau)^5$
	$E(P^2a^2)$	32.03 $(\pi/\tau)^6$
	$E(la^3)$	17.75 $(\pi/\tau)^7$
	$E(a^4)$	11.56 $(\pi/\tau)^8$

2.3 2次元繊維集合体の変形による配向と構造の変化

2.3.1 繊維集合体の配向モデル

積分幾何において直線の方程式は(2.1)式で与えられる。 θ と Z がきまれば直線は一意的にきまる。繊維集合体が等方、等質性を有するときは θ と Z は独立で、それぞれ一様分布で与えられる。

初期状態において等方、等質性である集合体上に XY 座標を考え、集合体が X 軸方向に α 倍、 Y 軸方向に β 倍伸張されたときの θ と Z の変化を考える。

集合体の変形過程に対してつぎのような仮定を設定する。

- (1), 集合体の変形によって繊維長は変化しない。
- (2), 初期状態において任意の1本の繊維が対角線となるような($a_0 \times b_0$)を仮想領域と考えた場合、集合体変形後その領域は($\alpha a_0 \times \beta b_0$)の長方形になり、繊維は変形した長方形の対角線上にくる。
- (3), 初期状態における任意の1本の繊維の midpoint の座標(x_0, y_0)は、集合体変形後は($\alpha x_0, \beta y_0$)となる。

このような変形過程での繊維の移動の様子を図2.18に示す。

集合体の変形前の配向角 θ_0 と変形後の配向角 θ は図2.18よりそれぞれ

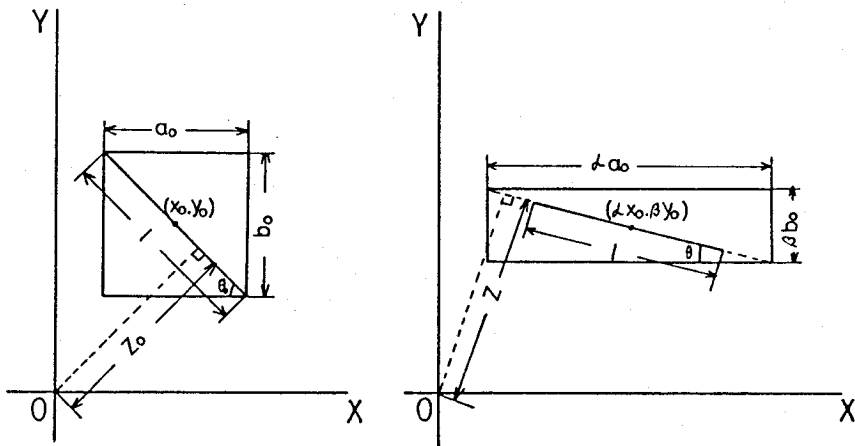


図2.18 繊維長一定配向モデルによる任意の1本の繊維の平均移動と回転。 θ は配向角、 l は繊維長、 Z は原点から繊維に直角に引いた垂線の長さを表わしている。

$$\tan \theta_0 = b_0 / a_0 \quad (2.111)$$

$$\tan \theta = \beta b_0 / \alpha a_0 \quad (2.112)$$

で与えられる。

(2.111)式を(2.112)式へ代入して θ について解くと

$$\theta = \tan^{-1}(\beta \tan \theta_0 / \alpha) \quad (2.113)$$

(2.113)式を微分すると

$$\frac{d\theta_0}{d\theta} = \frac{\alpha \beta}{\beta^2 \cos^2 \theta + \alpha^2 \sin^2 \theta} \quad (2.114)$$

となる。初期状態における配向角分布 $q(\theta_0)$ は $-\pi/2 \leq \theta \leq \pi/2$ の一様分布であるので

$$q(\theta_0) = 1/\pi \quad (2.115)$$

(2.114)(2.115)式より変形後の配向角分布 $q(\theta)$ は

$$q(\theta) = \frac{\alpha \beta}{\pi} \frac{1}{\beta^2 \cos^2 \theta + \alpha^2 \sin^2 \theta} \quad (2.116)$$

となる。

つぎに配向により繊維の位置 Z がどのように変化するかについて考える。図2.18より初期状態における任意の1本の繊維の位置 Z_0 は

$$Z_0 = |x_0 \sin \theta_0 + y_0 \cos \theta_0| \quad (2.117)$$

変形後の位置 Z は

$$Z = |\alpha x_0 \sin \theta + \beta y_0 \cos \theta| \quad (2.118)$$

θ_0 と θ の間には

$$\sin \theta = \frac{\beta \sin \theta_0}{\sqrt{\alpha^2 \cos^2 \theta_0 + \beta^2 \sin^2 \theta_0}} \quad (2.119)$$

$$\cos \theta = \frac{\alpha \cos \theta_0}{\sqrt{\alpha^2 \cos^2 \theta_0 + \beta^2 \sin^2 \theta_0}} \quad (2.120)$$

の関係があるので(2.117)～(2.120)式より Z_0 と Z の関係は

$$Z = \frac{\alpha \beta}{\sqrt{\alpha^2 \cos^2 \theta_0 + \beta^2 \sin^2 \theta_0}} \quad (2.121)$$

となる。

このように集合体の変形によって繊維の位置の変化は初期配向角 θ_0 と伸張率 α, β によって異ってくる。

このモデルの幾何学的変化の特徴は、初期状態において接触していた繊維同士もX軸方向の伸張率 α が大きくなる、すなわち配列度が良くなるにしたがって離れてしまい、交点数 C が減少し、多角形の辺の数の分布 $P(n)$ も変化することである。

2.3.2 配向角分布の配向関数による表現

PL型集合体の配向角分布(2.116)式を(1.4)式で与えられる配向係数 J で表現する。

いま $A(2k)$ を

$$A(2k) = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos 2k\theta q(\theta) d\theta \quad (2.122)$$

とおく。(2.122)式へ(2.116)式を代入して計算すると

$$A(2k) = \left(\frac{\alpha - \beta}{\alpha + \beta} \right)^k \quad (2.123)$$

となる(証明は付録に示す)。

(2)式を変形すると

$$I = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos 2\theta q(\theta) d\theta \quad (2.124)$$

であるので(2.122), (2.123)式より

$$\begin{aligned}
 J &= A(2) \\
 &= \frac{\alpha - \beta}{\alpha + \beta}
 \end{aligned}
 \tag{2.125}$$

となる。(2.125)式を変形すると

$$\frac{\beta}{\alpha} = \frac{1 - J}{1 + J}
 \tag{2.126}$$

(2.126)式を(2.116)式へ代入すると

$$q(\theta) = \pi^{-1} \left\{ \left(\frac{1 - J}{1 + J} \right) \cos^2 \theta + \left(\frac{1 + J}{1 - J} \right) \sin^2 \theta \right\}^{-1}
 \tag{2.127}$$

と表わされる。

2次元繊維集合体のなかには、同種の2枚のPL型集合体の主軸を互に 90° をなすように重ね合せてできる配向状態をもつものがしばしば見られる。このような場合はCL型集合体と考えられる。PL型集合体の配向主軸を 90° 回転すると配向係数は J から $-J$ に変わるのでCL型集合体の配向角分布は

$$\begin{aligned}
 q(\theta) &= (2\pi)^{-1} \left[\left\{ \left(\frac{1 - J}{1 + J} \right) \cos^2 \theta + \left(\frac{1 + J}{1 - J} \right) \sin^2 \theta \right\}^{-1} \right. \\
 &\quad \left. + \left\{ \left(\frac{1 + J}{1 - J} \right) \cos^2 \theta + \left(\frac{1 - J}{1 + J} \right) \sin^2 \theta \right\}^{-1} \right]
 \end{aligned}$$

となる。

PL型集合体の場合は(2.127)式、CL型集合体の場合は(2.128)式において $J = 0, 0.25, 0.5, 0.75, 1.0$ と変化させたときの配向角分布の変化の様子をそれぞれ図2.19, 2.20に示す。

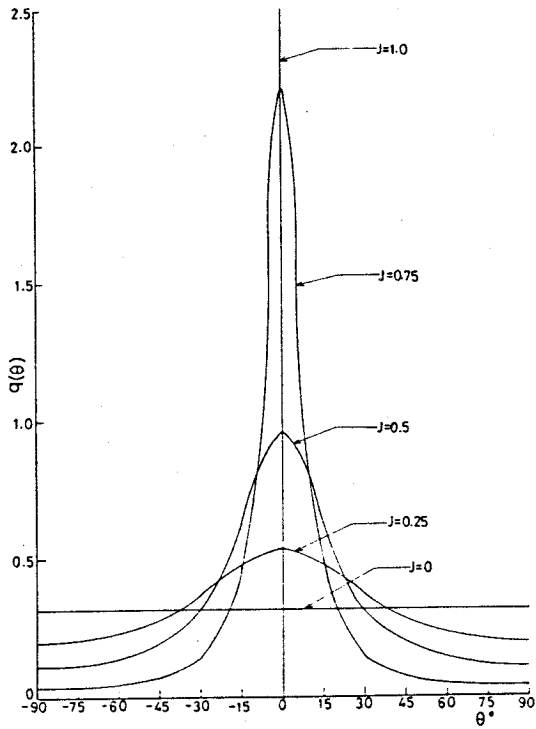


図 2.19

配向係数を $J=0, 0.25, 0.5, 0.75, 1.0$ と変化させた場合の PL 型集合体の配向角分布 $Q(\theta)$ の推移

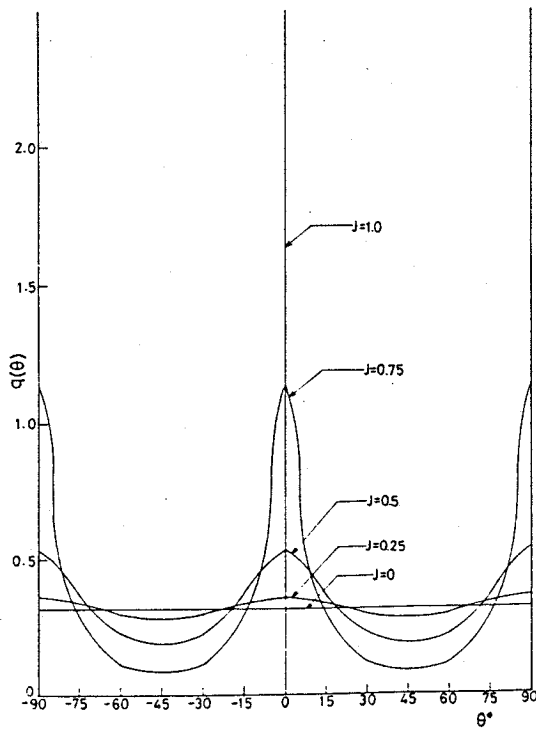


図 2.20

配向係数を $J=0, 0.25, 0.5, 0.75, 1.0$ と変化させた場合の CL 型集合体の配向角分布 $Q(\theta)$ の推移

2.3.3 交点数の配向関数による表現

面積 a の凸領域内に長さ l の直線が N 本存在するとき、繊維集合体の交点数 C は (1.2), (1.8) 式より

$$C = (Nl)^2 I / 2a \quad (2.129)$$

とおける。ここで I を配向係数 J によって表わす。(1.8) 式の右辺の $|\sin(\theta - \theta')|$ を $-\pi \leq \theta - \theta' \leq \pi$ の範囲においてフーリエ級数に展開すると

$$\begin{aligned} |\sin(\theta - \theta')| &= 2/\pi - (4/\pi) \sum_{k=1}^{\infty} \cos 2k(\theta - \theta') / (4k^2 - 1) \\ &= 2/\pi - (4/\pi) \sum_{k=1}^{\infty} (\cos 2k\theta \cos 2k\theta' + \sin 2k\theta \sin 2k\theta') / (4k^2 - 1) \end{aligned} \quad (2.130)$$

で与えられる。(2.130) 式を (1.8) 式へ代入すると

$$I = 2/\pi - (4/\pi) \sum_{k=1}^{\infty}$$

$$\frac{\left(\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos 2k\theta \cos 2k\theta' q(\theta) q(\theta') d\theta d\theta' + \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sin 2k\theta \sin 2k\theta' q(\theta) q(\theta') d\theta d\theta' \right)}{4k^2 - 1}$$

$$(2.131)$$

$q(\theta)$ は偶関数であるので (2.131) 式の右辺の $\sin \theta$ の入った 2 重積分は

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sin 2k\theta \sin 2k\theta' q(\theta) q(\theta') d\theta d\theta' = 0 \quad (2.132)$$

とおける。さらに (2.122) (2.131) 式より

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos 2k\theta \cos 2k\theta' q(\theta) q(\theta') d\theta d\theta' = \{A(2k)\}^2 \quad (2.133)$$

とおけるので結局 (2.131) 式は

$$I = 2/\pi - (4/\pi) \sum_{k=1}^{\infty} \{A(2k)\}^2 / (4k^2 - 1) \quad (2.134)$$

となる。

(2.125)式を(2.123)式へ代入すると

$$A(2k) = J^k \quad (2.135)$$

したがって

$$I = 2/k - (4/\pi) \sum_{k=1}^{\infty} J^{2k} / (4k^2 - 1) \quad (2.136)$$

となり、PL型集合体のIが配向係数Jによって表現されたことになる。

つぎにPL型集合体の配向主軸を90°回転すると(2.122)式は添字をつけて $A_{\pi/2}(2k)$ とすると

$$\begin{aligned} A_{\pi/2}(2k) &= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos 2k \left(\theta - \frac{\pi}{2} \right) q(\theta) d\theta \\ &= \cos k\pi \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos 2k\theta q(\theta) d\theta \\ &= \cos(k\pi) J^k \end{aligned} \quad (2.137)$$

CL型集合体の場合は(2.134)式に対応する式として

$$I = 2/\pi - (4/\pi) \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ \frac{1}{2} A(2k) + \frac{1}{2} A_{\pi/2}(2k) \right\}^2 / (4k^2 - 1) \quad (2.138)$$

となるので(2.135)、(2.137)、(2.138)式より

$$I = 2/\pi - (1/\pi) \sum_{k=1}^{\infty} \{ J^k + \cos k\pi J^k \}^2 / (4k^2 - 1) \quad (2.139)$$

と表わせる。

(2.136)(2.139)式によってPL型、CL型集合体のJの変化に対するIの変化が計算できる。その様子を図2.21に示す。

2.3.4 配向主軸に対して θ' 方向の走査線に交わる直線本数の配向関数による表現

面積 a の凸領域内に長さ l の直線が N 本存在するとき、PL型集合体の配向主軸に対して θ' 方向の単位長走査線に交わる直線本数 $D(\theta')$ は

$$D(\theta') = N l H(\theta') / a \quad (2.140)$$

とおける。ここで $H(\theta')$ は

$$H(\theta') = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} q(\theta) |\sin(\theta - \theta')| d\theta \quad (2.141)$$

である。(2.141)式の右辺の $|\sin(\theta - \theta')|$ を(2.130)式のようにフーリエ級数に展開して整理すると

$$H(\theta') = 2/\pi - (4/\pi) \sum_{k=1}^{\infty} \cos(2k\theta') J^k / (4k^2 - 1) \quad (2.142)$$

となる。

CL型集合体の場合にも(2.137)(2.138)式と同様の誘導により

$$H(\theta') = 2/\pi - (2/\pi) \sum_{k=1}^{\infty} \cos 2k\theta' \{ J^k + \cos(k\pi) J^k \} / (4k^2 - 1) \quad (2.143)$$

となる。(2.142),(2.143)式を計算することによって、配向係数 J と走査線の方向 θ' を変化させたときの $H(\theta')$ の変化を知ることができる。その様子を図2.22, 2.23に示す。

PL型集合体の配向角分布が(2.116)式で近似できることがあらかじめわかっているとき、 $D(\theta')$ の測定によって簡単に配向係数を求めることができる。配向主軸に対して 0° 方向と 90° 方向の走査線に交わる直線本数の比をとると

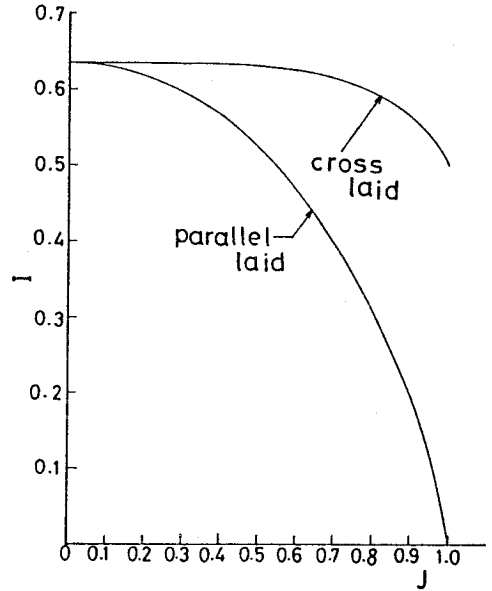


図2.21 PL型, CL型集合体における H と配向係数 J の関係

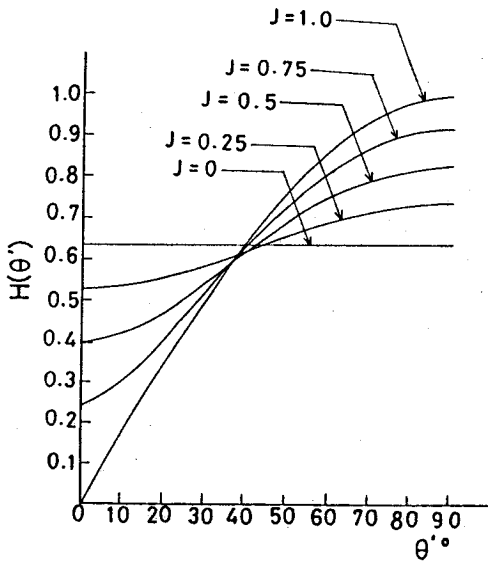


図 2.22 配向係数を $J=0, 0.25, 0.5, 0.75, 1.0$ と変化させた場合、PL型集合体の座標主軸に対して θ' の傾きを持つ走査線についての $H(\theta')$ と θ' の関係

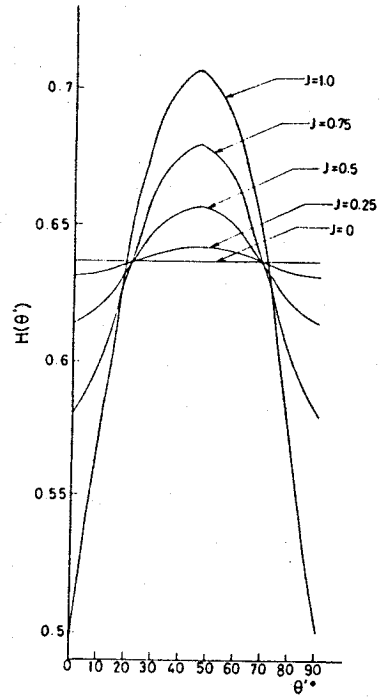


図 2.23 配向係数を $J=0, 0.25, 0.5, 0.75, 1.0$ と変化させた場合、CL型集合体の座標主軸に対して θ' の傾きを持つ走査線についての $H(\theta')$ と θ' の関係

$$\frac{D(0)}{D(\pi/2)} = \frac{H(0)}{H(\pi/2)}$$

$$= \frac{1 - 2 \sum_{k=1}^{\infty} J^k / (4k^2 - 1)}{1 - 2 \sum_{k=1}^{\infty} \cos(k\pi) J^k / (4k^2 - 1)} \quad (2.144)$$

となる。

CL集合体の場合は 0° 方向と 45° 方向の走査線に交わる直線本数の比をとると

$$\frac{D(0)}{D(\pi/4)} = \frac{H(0)}{H(\pi/4)}$$

$$= \frac{1 - \sum_{k=1}^{\infty} \{J^k + \cos(k\pi) \cdot J^k\} / (4k^2 - 1)}{1 - \sum_{k=1}^{\infty} \cos(k\pi/2) \{J^k + \cos(k\pi) \cdot J^k\} / (4k^2 - 1)} \quad (2.145)$$

となる。

Jを変化させたときの $D(0)/D(\pi/2)$, $D(0)/D(\pi/4)$ の変化の様子を図2.24に示す。この結果よりPL型, CL型集合体において 0° , 45° , 90° 方向の走査線に交わる直線本数の測定により簡単に配向係数を求めることができる。

2.3.5 配向を有する直線要素によって形成される多角形の周長, 面積分布の1次, 2次モーメント

位置がランダムでかつ任意の配向を有する無限長直線群によって生成される多角形

の辺の数 n , 周長 l , 面積 a の分布に関する1次, 2次モーメントはMiles⁽⁸⁾によってそれぞれ(1.7)式で与えられている。(1.7)式において, 単位長あたりの交点数 τ はIによって

$$\tau = N l I / a \quad (2.147)$$

として与えられる。

ところで直線長が有限であるときは(1.7)(2.147)式で与えられているモーメントおよび τ は補正をする必要がある。1本の有限長直線には必ず2個の末端がある。そこで, 交点間の直線の部分を要素と呼ぶことにすると, 1本の直線には末端を含む要素が必ず2本あることになる。末端を含む要素は他の直線上の要素と連結していないため, 多角形形成に寄与しない非有効要素と考えられる。

1本の直線の平均的要素 ν は

$$\nu = l \tau + 1 \quad (2.148)$$

で与えられる。

(2.147)式を(2.148)式へ代入すると

$$\nu = N l^2 I / a + 1 \quad (2.149)$$

そこで1本の要素の平均長を λ とすると

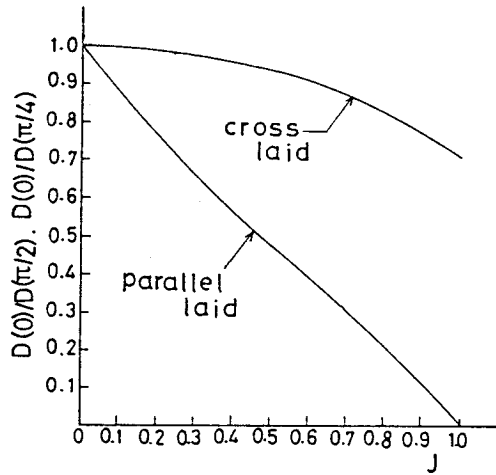


図2.24 PL型, CL型集合体における配向係数Jと $D(0)/D(\pi/2)$, $D(0)/D(\pi/4)$ の関係

$$\lambda = l / \nu$$

$$= \frac{l}{Nl^2 I/a+1} \quad (2.150)$$

で表わされる。

1本の直線上で末端を有していない要素(有効要素)の合計を有効長 l_{eff} と呼ぶことにすると

$$\begin{aligned} l_{\text{eff}} &= l - 2\lambda \\ &= l \left(1 - \frac{2}{Nl^2 I/a+1} \right) \end{aligned} \quad (2.151)$$

となる。

(2.147)式の l へ(2.151)式を代入すると補正された単位長あたりの交点数 τ^* が

$$\begin{aligned} \tau^* &= Nl_{\text{eff}} I/a \\ &= \lambda \left(1 - \frac{2}{Nl^2 I/a+1} \right) \end{aligned} \quad (2.152)$$

と表わされる。

(1.7)式の τ の代りに(2.152)式の τ^* を代入すれば、補正された1次、2次モーメントを求めることができる。

ところで(2.152)式は $Nl^2 I/a$ がある程度大きいという条件において使用できる。もし $Nl^2 I/a$ が小さく、その結果 τ^* も小さくなってくると、直線上に交点が1つしかできず、したがって1つの交点を2つの末端要素が共有するというような特殊なケースも確率的に無視できなくなってくる。Piekaar⁽⁹⁾らはこのような場合についても検討しているが、ここでは $Nl^2 I/a$ がある程度大きな場合に限ることにして、そのような特殊なケースは無視する。

さて、これら末端要素は、閉じた多角形の辺にはなり得ないわけであるが、多角形の形成と分布を確率的に扱う際、それらを完全に除外してしまうことは好ましくない。なぜなら、末端を無視すれば、系内の全直線長が実質的に減少し、そのため交点数 τ ((2.147)式)など、全直線長 (Nl) で決まる量に関する公式を、そのまま用いる正当性があやぶまれるからである。そこで、本研究では、次のような処理によって、もとの系と同じ全直線長をもち、しかも末端要素を含まないような修正系を導入することにした。

末端要素AEを、末端Eの方向に延長してゆき、はじめて他の直線と交差したとき、その交点をE'とする。そこで

(i)もし、 $\overline{AE} < \overline{AE'}/2$ であれば、系から末端AEを除去する。

(ii)もし、 $\overline{AE} \geq \overline{AE'}/2$ なら、要素AEをAE'で置き換える。

もちろん以上の修正により、直線の長さの分布が変化する。しかし、系の密度が十分大きければほとんどの末端要素は直線長 l より十分短かく、修正(i)(ii)によって生じる直線長の変化は無視できる。また、(i),(ii)の場合は明らかに等確率で起るから、系の総直線長も不変に保たれる。したがって、(2.147)~(2.152)式は修正系においても近似的に有効であろう。

(1.7)式のなかでIは(2.136)(2.139)式で与えられている。そしてGは(2.142)

(2.143)式で与えられている $H(\theta')$ によって $G = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \{H(\theta')\}^{-2} d\theta$ で表わされるので

も結局、配向関数Jで表現できることになる。Jを変化させた場合のG, IGの変化の様子を図2.5, 2.26に示す。

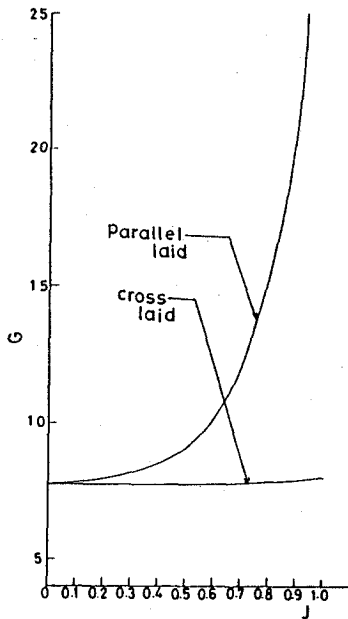


図2.25 PL型, CL型集合体における配向係数JとGの関係

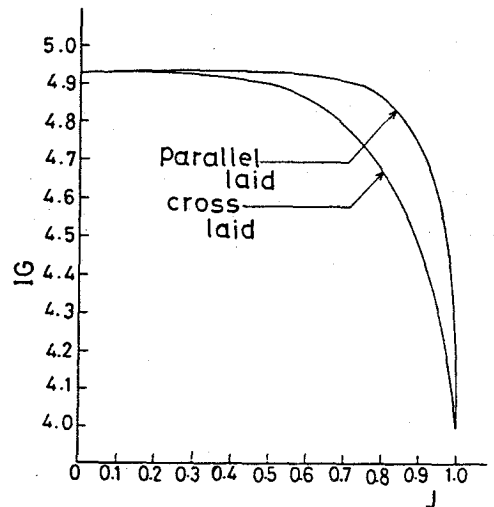


図2.26 PL型, CL型集合体における配向係数JとIGの関係

2.3.6 集合体変形による多角形の辺の数の分布の変化

PL型, CL型集合体において配向係数 I を 0 すなわち一様ランダムの場合から $J = 1$ の場合へ連続的に変化させると, 多角形の辺の数の分布 $P(n)$ も連続的に変化すると考えられる。

初期状態において配向角分布がランダムである場合, そのときの多角形の辺の数の分布を $P(n | 0)$, その k 次モーメントを $E(n^k | 0)$ と書くことにする。それらの数値は表 2.2 に示されている。

集合体の変形によって $P(n)$ が変化するとき, 4 角形の存在確率の増減を考える。いま 4 角形が増えると仮定すると $\sum_{n=3}^{\infty} P(n) = 1$ をみたすためには 4 角形以外の存在確率の総和が減少する必要がある。さらにその減少の仕方は, $E(n) = 4$ の条件をみたさなくてはならないので, 3 角形の減少の仕方と 5 角形以上の減少の仕方がバランスがとれている必要がある。4 角形が減少するときはその逆で 3 角形と 5 角形以上の多角形は $E(n) = 4$ をみたすように増加する必要がある。そこで 4 角形の増減にともなう 3 角形と 5 角形以上の多角形の減(増)が同率 K で変化すると仮定する。すなわち

$$P(n) = (1-K)P(n | 0), \quad n = 3 \text{ または } n \geq 5 \quad (2.153)$$

とする。 $\sum_{n=3}^{\infty} P(n) = 1$ より

$$\begin{aligned} P(4) &= 1 - P(3) - \sum_{n=5}^{\infty} P(n) \\ &= 1 - (1-K)P(3 | 0) - (1-K) \sum_{n=5}^{\infty} P(n | 0) \\ &= (1-K)P(4 | 0) + K \end{aligned} \quad (2.154)$$

となる。(2.153)(2.154)式より

$$\begin{aligned} E(n) &= \sum_{n=3}^{\infty} n P(n) \\ &= 3(1-K)P(3 | 0) + 4(1-K)P(4 | 0) + 4K + (1-K) \sum_{n=5}^{\infty} n P(n | 0) \\ &= 4 \end{aligned} \quad (2.155)$$

と計算される。これより(2.153)(2.154)式は確かに $E(n) = 4$ をみたしていることがわかる。

つぎに $E(n^2)$ は(2.153)(2.154)式より

$$\begin{aligned}
E(n^2) &= \sum_{n=3}^{\infty} n^2 P(n) \\
&= 9(1-K)P(3|0) + 16(1-K)P(4|0) + 16K + (1-K) \sum_{n=5}^{\infty} n^2 P(n) \\
&= E(n^2|0) + K(\pi^2/2 - 4) \tag{2.156}
\end{aligned}$$

と計算される。ところでR. E. Milesによって

$$\left. \begin{aligned}
E(n^2|0) &= \pi^2/2 + 12 \\
E(n^2) &= IG + 12
\end{aligned} \right\} \tag{2.157}$$

と与えられているので(2.157)式を(2.156)式へ代入して計算すると

$$K = \frac{\pi^2 - 2GI}{\pi^2 - 8} \tag{2.158}$$

となる。(2.158)式を(2.153)(2.154)式へ代入すると

$$P(n) = \left(\frac{2GI - 8}{\pi^2 - 8} \right) P(n|0), \quad n=3 \text{ または } n \geq 5 \tag{2.159}$$

$$P(4) = \left(\frac{2GI - 8}{\pi^2 - 8} \right) P(4|0) + \left(\frac{\pi^2 - 2GI}{\pi^2 - 8} \right) \tag{2.160}$$

となる。

配向角分布が一様ランダムの場合は

$$\left. \begin{aligned}
I &= 2/\pi \\
G &= \pi^3/4 \\
IG &= \pi^2/2
\end{aligned} \right\} \tag{2.161}$$

より(2.159)(2.160)式は当然

$$\left. \begin{aligned} P(n) &= P(n | 0), \quad n=3 \text{ または } n \geq 5 \\ P(4) &= P(4 | 0) \end{aligned} \right\} \quad (2.162)$$

となる。

PL型, CL型集合体の場合, I, Gは配向関数Jによって表わされるので(2.158)(2.159)式よりP(n)も結局, Jで表わされることになる。J=0, 0.65, 0.75, 0.85, 0.95, 1.0と変化させた場合のPL型, CL型集合体のP(n)の変化の様子を図2.27, 2.28に示す。PL

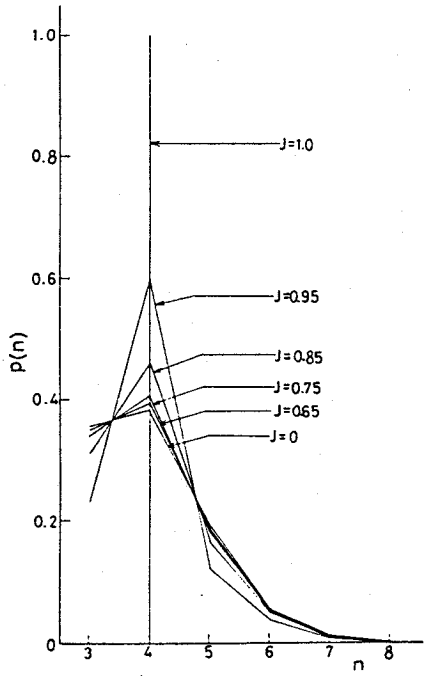


図2.27 配向係数をJ=0, 0.65, 0.75, 0.85, 0.95, 1.0と変化させた場合のPL型集合体における多角形の辺の数の分布P(n)の推移

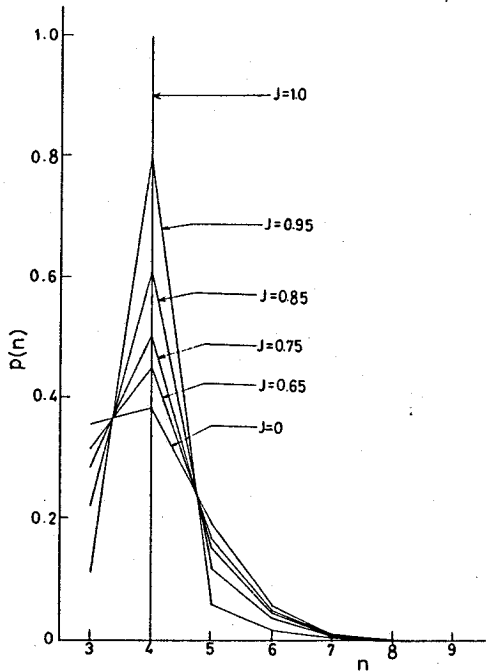


図2.28 配向係数をJ=0, 0.65, 0.75, 0.85, 0.95, 1.0と変化させた場合, CL型集合体における多角形の辺の数の分布P(n)の推移

型集合体のときはJ=0.65までは変化が少なく等方性の場合のP(n|0)で近似できる。CL型集合体の場合はPL型集合体の場合より4角形のみ分布へ早く移行して行くことがわかる。

P(n)のk次モーメントE(n^k)は(2.159)(2.160)式より

$$E(n^k) = \sum_{n=3}^{\infty} n^k P(n)$$

$$= \left(\frac{2GI-8}{\pi^2-8} \right) E(n^k | 0) + \left(\frac{\pi^2-2GI}{\pi^2-8} \right) 4^k \quad (2.163)$$

となる。(2.163)式において $k=2$ とおくと(2.157)式と一致する。

このように(2.159)(2.160)式で与えられる分布 $P(n)$ は、4角形の増(減)にともなう3角形、5角形以上の多角形の減(増)が同率 K で変化するという特別の条件を満し、しかもMilesが求めた1次、2次モーメントをもつ分布になっていることがわかる。

2.3.7 配向を有する繊維集合体組織のモンテカルロ、シミュレーション

初期状態として等方性集合体を考え、その場合のモンテカルロ、シミュレーションはPiekaarらの方法にしたがった。集合体領域として1辺の長さが10cmの正方形をとり、その外側に1辺の長さが20cmの正方形を考える。つぎに任意の1本の繊維の位置と方向を決めるために3桁の3つの一様乱数を発生させる。3つの乱数のうち最初の2つは長さが10cmの繊維の midpointの座標 (x_0, y_0) を決めるものであり、残りの1つは配向角 θ_0 を決めるものであり、それぞれは $0 \leq x_0 \leq 30 \text{ cm}$, $0 \leq y_0 \leq 20 \text{ cm}$, $-\pi/2 \leq \theta_0 \leq \pi/2$ の範囲に変換する。このような操作を1000回くり返すと1辺が20cmの正方形の中に長さが10cmの繊維が100本存在する等方性集合体が形成される。その様子を図

2.29に示す。

次に、この直線系に2.3.5節の末端要素に関する修正をした。

ところで、Piekaar⁽⁹⁾らのように、繊維交差を問題にする限りは、内側の小正方形領域内部を偏りのない標本として利用できる。しかし、多角形の分布の推定の場合、小正方形の境界に交差する多角形をどのように扱うかについて注意がある。多角形と直線の交差確率は多角形の周長に比例するから、境界に交差する多角形をすべて除外してしまうと、周長の大きいものの標本存在率が母

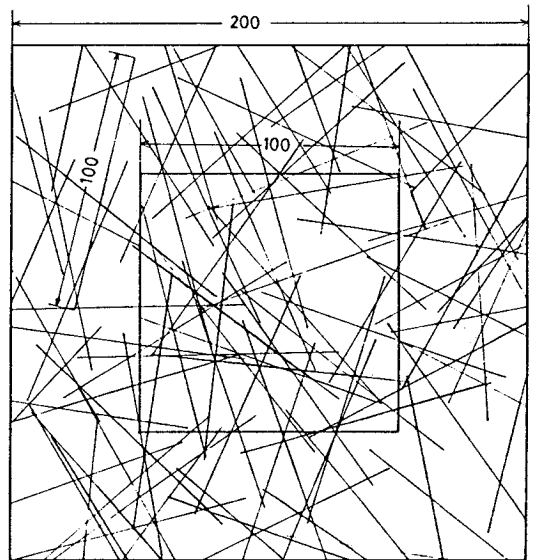


図2.29 一様ランダム配向繊維集合体のモンテカルロ、シミュレーション図。外側は1辺が200mmの正方形、内側は1辺が100mmの正方形の領域内に長さ100mmの直線が100本存在している。

集団存在率より小さくなり、逆にすべてを含めれば大きくなる。第1節で明らかにした、辺数の多い多角形は長い周長を持つ傾向が大きいという事実を考え合せると、境界での不用意な処理は辺の数の分布 $P(n)$ の推定に偏りをもたらすと予想される。そこで本研究では次のような処理により、できる限り偏りが入ることを避けることにした。

すなわち、境界線で分割される多角形で、標本領域（小正方形）に入る部分の周長が、その周長の半分より大きいものは、標本多角形として残し、そうでないものはすべて除外した。このようにして得られた図 2.30 のような多角形集合体を用いて、多角形の分布を調べた。

つぎに等方性集合体が X, Y 軸方向に α, β 倍の伸張を受けるとき、すなわち PL 型集合体について考える。直線の中点の座標はそれぞれ $x = \alpha x_0, y = \beta y_0$ に変換される。そして配向角 θ は (2.113) 式へ (2.126) 式を代入することによって

$$\theta = \tan^{-1} \left\{ \left(\frac{1-J}{1+J} \right) \tan \theta_0 \right\} \quad (2.164)$$

と表わされる。

集合体の変形については特に面積一定、すなわち $\alpha\beta = 1$ という条件を与えた。 $\alpha = 2.171, \beta = 0.4606$ すなわち $J = 0.65$ のときの PL 集合体のシミュレーション図を 2.31 に、そのときの試料多角形集合体を図 2.32 に示す。

さらに $\alpha = 3.512, \beta = 0.2847$ すなわち $J = 0.85$ のときの PL 型集合体のシミュレーションの図と試料多角形集合体を図 2.33, 2.34 に示す。そして $J = 0.65, 0.85$ の場合の CL 型集合体のシミュレーション図とそ

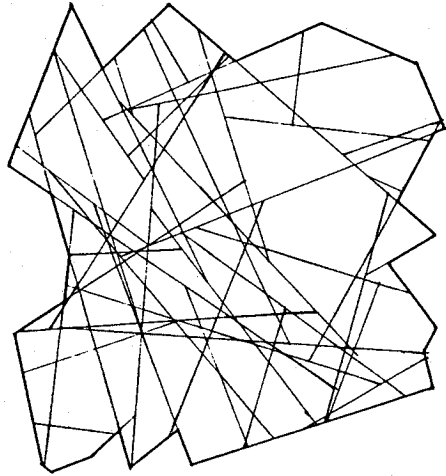
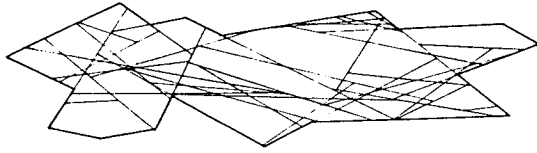


図 2.30 一様ランダム配向の場合の試料多角形集合体（多角形の数 197 個）

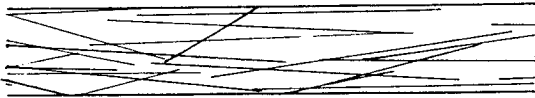
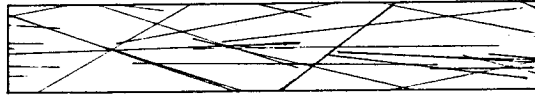


図 2.31 PL 集合体のモンテカルロ、シミュレーション



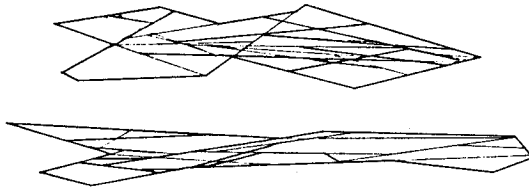
J=0.65

図2.32 PL型の試料多角形集合体(多角形の数133個)



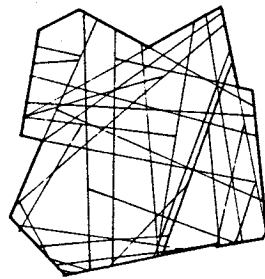
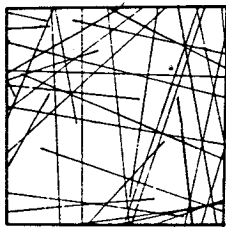
J=0.85

図2.33 PL型集合体のモンテカルロ、シミュレーション



J=0.85

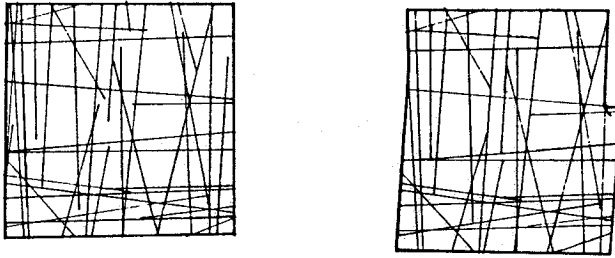
図2.34 PL型の試料多角形集合体(多角形の数66個)



J=0.65

図2.35 CL型集合体のモンテカルロ、シミュレーション図
CL型の試料多角形集合体(多角形の数170個)

の試料多角形集合体をそれぞれ図 2.35 , 2.36 に示す。



$J=0.85$

図 2.36 CL型集合体のモンテカルロ、
シミュレーション図

CL型の試料多角形集合体
(多角形の数は193個)

2.4 結果と考察

XY平面上のランダム直線の方程式は(2.1)式で与えられている。(2.1)式においても θ と Z を $0 \leq \theta \leq \pi$, $0 \leq Z \leq M$ の範囲で分布する一様乱数で与えると位置と方向がランダムな直線群を得ることができる。

初期形状として面積 π の正3角形を用い、 M にはその外接円直径の $5/4$ を与えた。実験ではコンピュータによってランダム直線を発生させ、初期3角形に100本の直線が交差するまで続けた。

ランダム直線によって生成される多角形の辺の数の分布 $P(n)$ について5回の実験を行った。段階100における実験値の最大、最小、平均値と第II種分割過程の理論値の比較を図2.37に示す。5回の平均値と理論値がよく合っていることがわかる。またR.E.Milesが求めた理論値 $P(3)=0.3551$, $E(n^2)=16.93$ に対して表2.2, 2.3に示したように第II種分割過程の理論値は $P(3)=0.3554$, $E(n^2)=16.93$ となっておりMilesの結

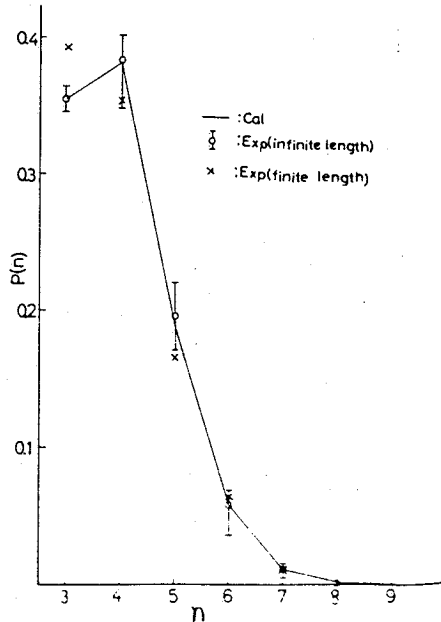


図 2.37

多角形の辺の数の分布 $P(n)$ の理論値と実測値の比較
 ϕ は無限長直線による5回の実測値の最大、平均、最小を示す。 \times 印はPiekarrrらが行った有限直線による3回の実測値の平均

果とよく合っている。これらの結果は辺の数の推移確率 $T(n|m)$ を求める際にさまざまな形をした多角形を同じ辺の数を持つ正多角形で近似した方法が妥当なものであったことを示している。

n 角形の平均面積比, 占有面積分率については線描画による実験結果と第Ⅱ種分割過程によって求められた理論値との比較を図 2.12, 2.13 に示してある。両方ともほぼ合っている。

つぎに交点数密度 $\tau = 2.935$ のときの周長分布 $Q(l)$ と面積分布 $R(a)$

(a) の理論分布と実験値との比較を図 2.38, 2.39 に示す。いずれもよく合っている。正多角形からの変形度 $T(c)$ については図 2.40 に示す。

$T(c)$ は経験的に導入されたものであるので分布に関する適合度の検定を行なった。理論度数と実験度数による χ^2 値は $\chi^2 = 5.194$ となった。有意水準を 5% とすれば棄却域は $\chi^2 >$

15.51 となり, 実験より得られた変形度 c の分布が $T(c) = \{B(p, q)\}^{-1} c^{p-1} (1-c)^{q-1}$, $p=2.816$,

$q=1.202$ のベータ分布で近似できることがわかった。

2次元繊維集合体が PL 型 (パラレル・レイド) であるときの配向角分布を (2.116) 式で与えた。そこで実験の 2次元繊維集合体の配向角分布と理

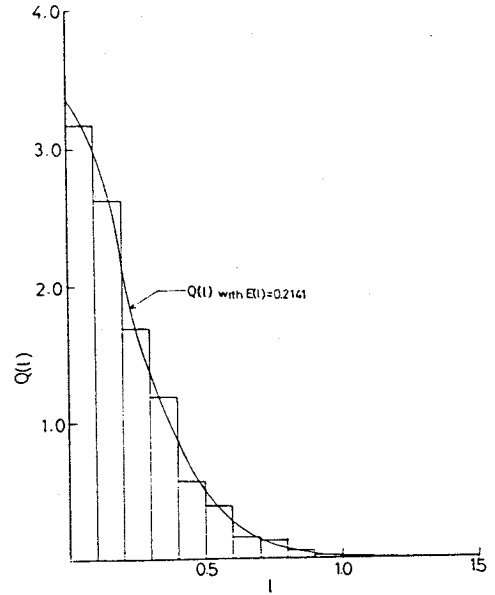


図 2.38 すべての多角形の周長の平均値が $E(l) = 0.2141$ の場合の周長分布 $Q(l)$ の理論値と実験値の比較

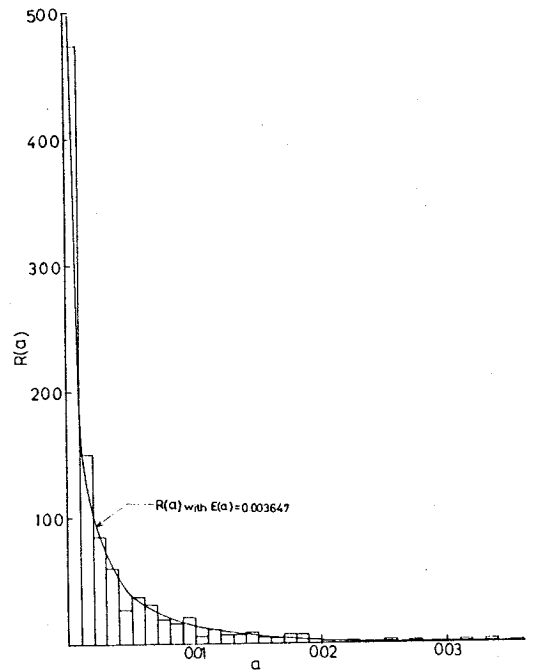


図 2.39 すべての多角形の面積の平均値が $E(a) = 0.003647$ の場合の面積分布 $R(a)$ の理論値と実験値の比較

論分布の比較検討を行なう。(2.116)式
において $\theta = 0$ とおくと

$$q(0) = \alpha / \pi \beta \quad (2.165)$$

となる。(2.165)式を(2.125)式へ代
入すると

$$J = \frac{\pi q(0) - 1}{\pi q(0) + 1} \quad (2.166)$$

となる。実測値の $q(0)$ より配向係数 J を
求め(2.127)式の理論分布を計算し実測
値と比較する。Hearleは不織布、カード、
ウェブなどの配向角分布を測定している。

その実測値と、そこで計測された J の値を
(2.127)式に代入して得られた計算値と

(1.3)式で与えられている経験式に
よる計算値の比較を累積分布関数

$F(\theta)$ の形で図2.41, 2.42に示
す。両方の分布ともほぼ合っている。

さらに図2.29~2.36に表わされ
ている多角形集合体の辺の数の分布 P
(n)を測定し,(2.159)(2.160)
式で求められる理論値と比較する。等
方性集合体すなわち $J=0$ の場合を図
2.43に, PL集合体で $J=0.65$,
0.85の場合をそれぞれ図2.44, 2.
45に, CL型集合体で $J=0.65$,
0.85の場合をそれぞれ図2.46, 2.
47に示す。いずれの場合もよく合っ
ていることがわかる。

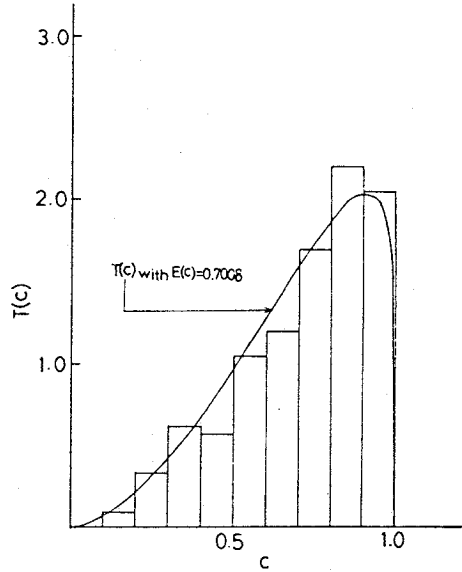


図2.40 多角形の変形度 c の平均値が $E(c)=0.7008$
の場合の変形度の分布 $T(c)$ の理論値と実測
値の比較

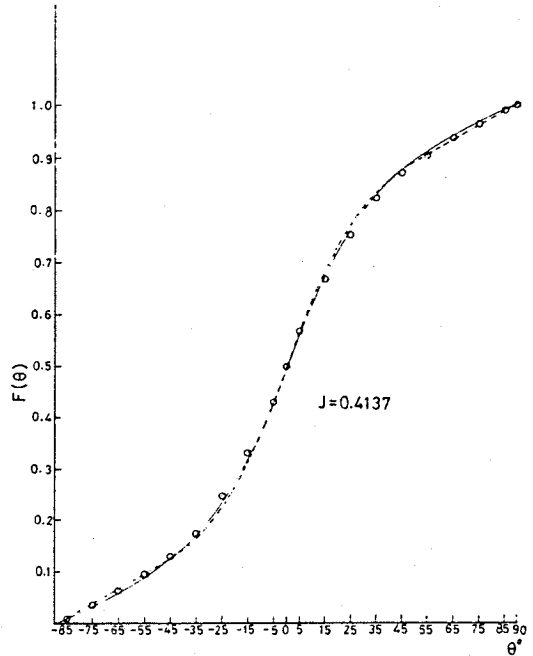


図2.41 J. W. S. Hearle が求めた配向角分布の実測値
(○印)と理論値の比較

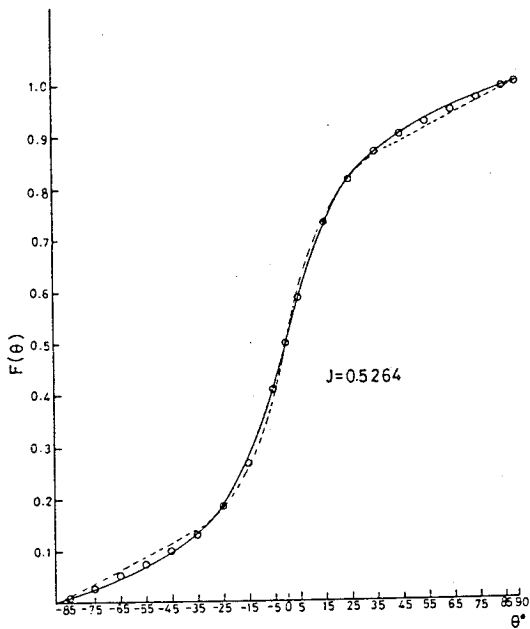


図 2.42 J. W. S. Hearle が求めた配向角分布の実測値 (○印) と理論値の比較

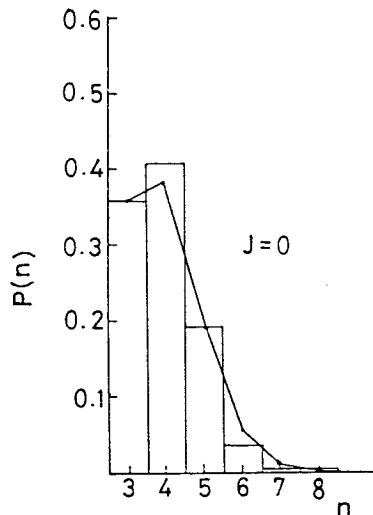


図 2.43 一様ランダム配向の場合の多角形の辺の数の分布 $P(n)$ の理論値と実測値の比較

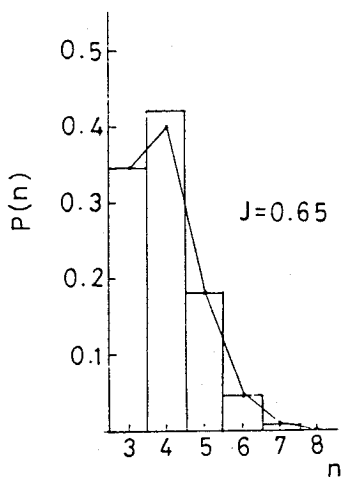


図 2.44 PL型集合体の多角形の辺の数の分布 $P(n)$ の理論値と実測値の比較

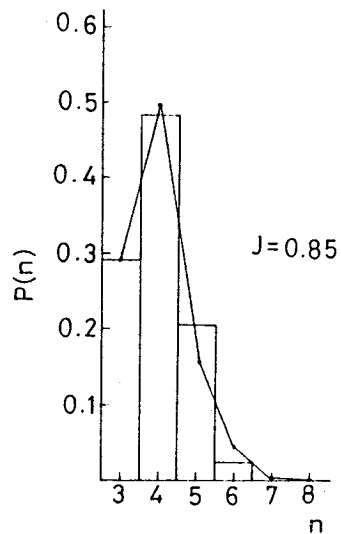


図 2.45 PL型集合体の多角形の辺の数の分布 $P(n)$ の理論値と実測値の比較

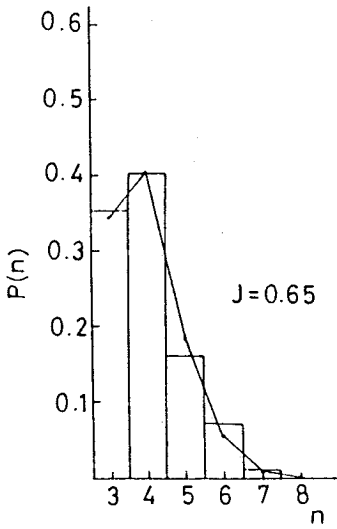


図 2.46 C L 型集合体の多角形の辺の数の分布 $P(n)$ の理論値と実測値の比較

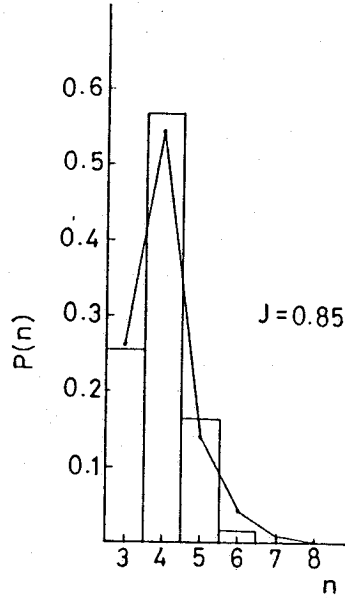


図 2.47 C L 型集合体の多角形の辺の数の分布 $P(n)$ の理論値と実測値の比較

付 録

本文中 (2.1 2 3) 式で与えられている

$$A(2k) = \left(\frac{\alpha - \beta}{\alpha + \beta} \right)^k \quad (1)$$

を証明する。

数学公式集⁽²⁴⁾によると

$$\int_0^\pi \frac{\cos k \theta}{A + B \cos \theta} d\theta = \frac{\pi}{\sqrt{A^2 - B^2}} \left(\frac{\sqrt{A^2 - B^2} - A}{B} \right)^k \quad (2)$$

という定積分の解が与えられている。

本研究における PL 型集合体の配向角分布 $q(\theta)$ は

$$q(\theta) = \frac{\alpha\beta}{\pi} \frac{1}{\beta^2 \cos^2 \theta + \alpha^2 \sin^2 \theta} \quad (3)$$

で表わされている。

そこで

$$A(2k) = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} q(\theta) \cos 2k\theta d\theta \quad (4)$$

を考えると $q(\theta) \cos 2k\theta$ は偶関数であるので

$$A(2k) = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} q(\theta) \cos 2k\theta d\theta \quad (5)$$

(5)式を変形すると

$$A(2k) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos 2k\theta d\theta}{(\beta/\alpha - \alpha/\beta) \cos^2 \theta + \alpha/\beta} \quad (6)$$

となる。ここで

$$\left. \begin{aligned} \theta &= x/2 \\ d\theta &= dx/2 \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

とおいて変換すると(6)式は

$$A(2k) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{\cos kx dx}{(\beta/\alpha - \alpha/\beta) \cos x + (\beta/\alpha + \alpha/\beta)} \quad (8)$$

で表わされる。

(8)式と(2)式を比較すると

$$\left. \begin{aligned} A &= \beta/\alpha + \alpha/\beta \\ B &= \beta/\alpha - \alpha/\beta \\ \sqrt{A^2 - B^2} &= 2 \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

となっており、これより(8)式は

$$A(2k) = \left(\frac{\alpha - \beta}{\alpha + \beta} \right)^k \quad (10)$$

となる。

3章 繊維集合体の粒子および流体通過特性

3・1 繊維フィルターの粒子通過特性

3・1・1 ランダム配向繊維集合体の粒子通過特性

特性

3次元一様ランダム配向を有する繊維フィルターの上面から、平均直径 d の凸状3次元粒子を落下させ、粒子が繊維と衝突する確率について考える。3次元フィルターを上面から投影すると2次元ランダム配向構造をもつ投影図ができる。3次元粒子と繊維の衝突する確率は、2次元投影図において繊維と2次元粒子が重なり合う確率と同じである。このように投影変換を考えると3次元フィルターの粒子通過特性は2次元フィルターの粒子通過問題として解くことができる。

R. E. Miles⁽⁸⁾ は2次元ランダム配向繊維集合体の上面から、周長 s の任意の凸形状粒子を落下させるとき、その粒子と交わる繊維本数 x の平均値 $E(x)$ は

$$E(x) = \tau(\omega + s/\pi) \quad (3.1)$$

で与えられ、 x の分布 $F(x)$ はポアソン分布として

$$F(x) = \frac{e^{-E(x)} \{E(x)\}^x}{x!} \quad (3.2)$$

で与えられることを証明している。ここで τ は単位長あたりの交点数、 ω は繊維の中である。

積分幾何学によると、 XY 座標系において任意の凸形状粒子の θ 方向の直線への投影直径を $D(\theta)$ とすると

$$s = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} D(\theta) d\theta \quad (3.3)$$

で与えられる。

したがって円のように $D(\theta) = d$ である場合は (3.3) 式より

$$s = \pi d \quad (3.4)$$

となる。これより円の場合は (3.1) (3.4) 式より

$$E(x) = \tau(\omega + d) \quad (3.5)$$

となる。粒子形状が任意の凸形状である場合平均直径を \bar{d} とすると

$$\bar{d} = s / \pi \quad (3.6)$$

であるので(3.5)式は

$$E(x) = \tau(\omega + \bar{d}) \quad (3.7)$$

と表わされる。

ここで落下粒子が繊維とし度も衝突せずにフィルターを通過する確率 f を考える。 f は(3.2)式で与えられるポアソン分布において粒子内に1本も繊維が入らない確率、すなわち $F(0)$ に等しいので

$$\left. \begin{aligned} f &= e^{-E(x)} \\ &= e^{-\tau(\omega + s/\pi)} \\ &= e^{-\tau(\omega + \bar{d})} \end{aligned} \right\} \quad (3.8)$$

となる。逆に粒子がフィルターによって捕そくされる確率 g は

$$\begin{aligned} g &= 1 - f \\ &= 1 - e^{-\tau(\omega + s/\pi)} \end{aligned} \quad (3.9)$$

で与えられることになる。

3・1・2 繊維フィルターを通過した粒子の周長分布の変化

粒子の周長に分布がある場合、大きな周長粒子はフィルターによって捕そくされ易く、小さなものは通過しやすいため、通過粒子の周長分布は変化する。いま粒子の初期周長分布を $Q(s)$ 、通過後の粒子周長分布を $Q_x(s)$ とすると(3.9)式より

$$\begin{aligned} Q_x(s) &= \frac{e^{-\tau(\omega + s/\pi)} Q(s)}{\int_0^{s_m} e^{-\tau(\omega + s/\pi)} Q(s) ds} \\ &= \frac{e^{-\tau s/\pi} Q(s)}{\int_0^{s_m} e^{-\tau s/\pi} Q(s) ds} \end{aligned} \quad (3.10)$$

となる。ここで s_m は最大粒子の周長である。(3.10)式より通過粒子の平均周長 $E_x(s)$ は

$$E_x(s) = \int_0^{s_m} s Q_x(s) ds \quad (3.11)$$

で表わされる。さらに、粒子周長に分布がある場合の粒子通過率 f の平均値 $E(f)$ は

$$E(f) = \int_0^{s_m} e^{-\tau(\omega+s/\pi)} Q(s) ds \quad (3.12)$$

となる。

代表的な粒子周長分布として $0 \leq s \leq s_m$ の一様分布で与えられる場合

$$Q(s) = 1/s_m \quad (3.13)$$

とおけるので(3.10)式より

$$Q_x(s) = \frac{(\tau/\pi) e^{-\tau s/\pi}}{1 - e^{-\tau s_m/\pi}} \quad (3.14)$$

となる。粒子が円形の場合は(3.4)(3.14)式より

$$Q_x(d) = \frac{\tau e^{-\tau d}}{1 - e^{-\tau d_m}} \quad (3.15)$$

と変換される。

τ を 0.05, 0.1, 0.15, 0.2 と変化させたときの $Q_x(d)$ の変化の様子を図 3.1 に示す。

さらに(3.12)式へ(3.13)式を代入すると

$$\begin{aligned} E(f) &= (1/s_m) \int_0^{s_m} e^{-\tau(\omega+s/\pi)} ds \\ &= (e^{-\tau\omega/s_m})(\pi/\tau)(1 - e^{-\tau s_m/\pi}) \end{aligned} \quad (3.16)$$

となる。

いま粒子の平均周長 $E(s)$ は

$$E(s) = s_m/2 \quad (3.17)$$

であるので、平均周長の粒子通過率 f は

$$f = e^{-\tau(\omega + s_m/2\pi)} \quad (3.18)$$

で表わされる。(3.16)式で与えられる $E(f)$ と(3.18)式の f を比較するため、例えば $s_m = 10$, $\tau = 1$ とおくと $E(f) = 0.3011 e^{-\omega}$, $f = 0.2036 e^{-\omega}$ となり、(3.16)式で与えられる $E(f)$ の方が大きくなる。すなわち、粒子の周長に分布がある場合、その平均周長で粒子通過率 f を評価すると、実際の通過率に対して誤差を生じるので、粒子周長分布がわかっている場合は(3.16)式で評価する必要がある。

3・1・3 3次元繊維フィルターにおける粒子捕そく率の厚さ方向の変化

3次元繊維フィルター上から粒子を落下させる場合、上面で捕そくされた粒子は下方へ落下しないので、上面ほど捕そく率が大きく下面ほど小さいことが考えられる。

そこで3次元繊維フィルターを厚さ方向において k 層に分割する。すなわち分割されたフィルターの厚さは $1/k$ になる。このとき交点数密度 τ も $1/k$ になるので、分割された1枚目のフィルターにおける粒子通過率 f と捕そく率 g は

$$f = e^{-(\tau/k)(\omega + s/\pi)} \quad (3.19)$$

$$g = 1 - e^{-(\tau/k)(\omega + s/\pi)} \quad (3.20)$$

となる。

2枚目のフィルターにおける粒子通過率 f_2 と捕そく率 g_2 は

$$\left. \begin{aligned} f_2 &= f^2 \\ g_2 &= f(1-f) \end{aligned} \right\} \quad (3.21)$$

となる。

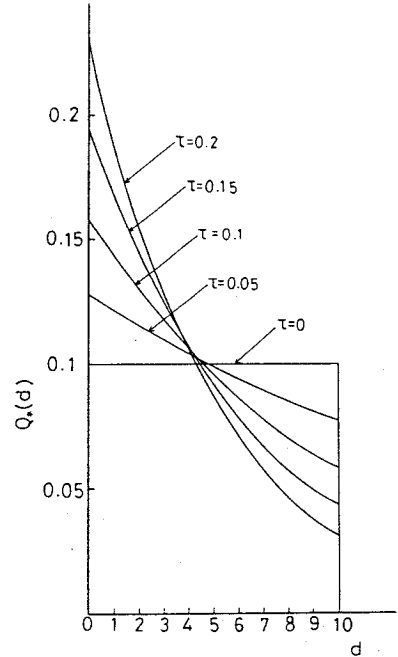


図3.1 繊維交点数密度を $\tau=0, 0.05, 0.1, 0.15, 0.2$ と変化させたときのフィルター通過後の粒子径分布 $Q^*(d)$ の変化。

そこで上から j 枚目のフィルターの通過率 f_j と捕そく率 g_j は

$$\left. \begin{aligned} f_j &= f^j \\ g_j &= f^{j-1} (1-f) \end{aligned} \right\} \quad (3.22)$$

で与えられる。

(3.22)式へ(3.19)式を代入すると

$$\left. \begin{aligned} f_j &= e^{-(\tau j/k)(\omega+s/\pi)} \\ g_j &= e^{-\{\tau(j-1)/k\}(\omega+s/\pi)} \{1 - e^{-(\tau/k)(\omega+s/\pi)}\} \end{aligned} \right\} \quad (3.23)$$

となる。

$\tau = 1.0, 0.5, 0.25, 0.1$ で $d=10$ の場合、厚さを10層に分割して $k=10$ としたときの粒子捕そく率 g_j の変化の様子を図3.2に示す。

3・1・4 捕そく粒子によるフィルターの目づまり効果

これまでの理論では、粒子が捕そくされるのは粒子が繊維に衝突したときだけであると考えてきた。このような仮定は、粒子周長が小さい、粒子数が少ない、繊維交点数密度が小さいとき、すなわち $E(x)$ が小なるとき近似的に適要できるものである。しかし、 $E(x)$ が大きく粒子が連続的に落下するような場合では、先に捕そくされた粒子に後から落下してきた粒子が捕そくされるような確率も考える必要がある。このような、目づまり効果は実際のフィルターにおいて通常に見られる現象であり、その評価は実用上重要である。

粒子の個数を N_p 、周長を S_p 、最大径を l_p 、平均巾を ω_p とし、繊維の本数を N_f 、長さを l_f 、巾を ω_f とする。いま N_p 個の粒子が捕そくされ、つ

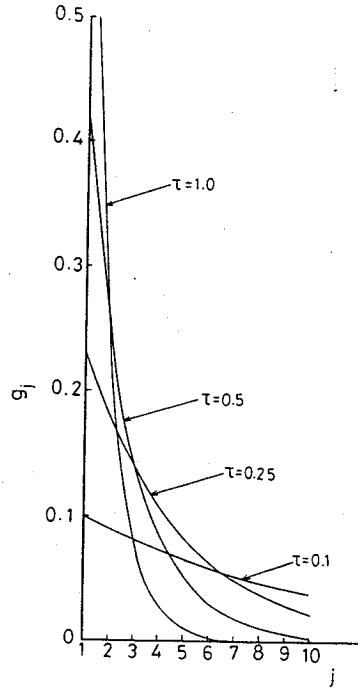


図3.2 フィルターの厚さを10層に分割したときの上から j 番目のフィルターにおける粒子捕そく率 g_j の変化。

ぎの1個の粒子が落下するときの粒子通過率 f を考える。繊維フィルターと粒子群の複合系において全個数 N 、平均長 \bar{l} 、平均巾 $\bar{\omega}$ はそれぞれ

$$\left. \begin{aligned} N &= N_f + N_p \\ \bar{l} &= \frac{N_f l_f + N_p l_p}{N_f + N_p} \\ \bar{\omega} &= \frac{N_f l_f \omega_f + N_p l_p \omega_p}{N_f l_f + N_p l_p} \end{aligned} \right\} \quad (3.24)$$

と表わされる。

ところで一様ランダム配向集合体の交点数密度 τ は

$$\tau = 2Nl/\pi A \quad (3.25)$$

で与えられる。ここで A は粒子が落下する範囲の面積である。すると繊維と粒子の複合系における粒子通過率 f は (3.8), (3.24), (3.25) 式より

$$\begin{aligned} f &= e^{-(2N_f l_f / \pi A)(\omega_f + s_p / \pi)} e^{-(2N_p l_p / \pi A)(\omega_p + s_p / \pi)} \\ &= e^{-\tau l_f (\omega_f + s_p / \pi)} e^{-(2N_p l_p / \pi A)(\omega_p + s_p / \pi)} \end{aligned} \quad (3.26)$$

となる。(3.26) 式の右辺の $e^{-\tau l_f (\omega_f + s_p / \pi)}$ は、はじめての粒子が落下するときの初期通過率で $e^{-(2N_p l_p / \pi A)(\omega_p + s_p / \pi)}$ は N_p 個の粒子が捕そくされた後、つぎの1個が通過するときの目づまり率を与えている。

ここで粒子が1個づつ落下し、粒子が捕そくされるごとに目づまり率が増加していくような過程を考える。

1個目の粒子が落下するときの通過率 f_1 と捕そく率 g_1 は

$$\left. \begin{aligned} f_1 &= e^{-\tau l_f (\omega_f + s_p / \pi)} \\ g_1 &= 1 - e^{-\tau l_f (\omega_f + s_p / \pi)} \end{aligned} \right\} \quad (3.27)$$

である。つぎに1個目の粒子が捕そくされたときの目づまり率 Δf_1 は (3.26) 式の右辺第2項で $N_p = 1$ とした場合であるので

$$\Delta f_1 = e^{-(2l_p/\pi A)(\omega_p + s_p/\pi)} \quad (3.28)$$

故に2個目の粒子が落下するときの通過率 f_2 は (3.27), (3.28) 式より

$$f_2 = f_1 e^{-(2l_p/\pi A)(\omega_p + s_p/\pi)g_1} \quad (3.29)$$

となる。

一般に $k+1$ 番目の粒子の通過率 f_{k+1} は

$$f_{k+1} = f_k e^{-(2l_p/\pi A)(\omega_p + s_p/\pi)g_k} \quad (3.30)$$

で与えられ, (3.30) 式を f_j で表わすと

$$f_{k+1} = f_1 e^{-(2l_p/\pi A)(\omega_p + s_p/\pi) \sum_{j=1}^k (1-f_j)} \quad (3.31)$$

となる。

初期粒子通過率を $f_1 = 0.3878$ とし, 粒子形状を円形で, 周長を $s_p = 5\pi, 10\pi, 15\pi, 20\pi$ と変化させたときの目づまり効果の様子を図3.3に示す。粒子周長が 20π の場合, 通過率は急激に低下していくが, 5π の場合は比較的ゆるやかである様子がよくわかる。

3・1・5 繊維集合体および粒子集合体が異方性を有する場合の粒子通過特性

粒子の形状が円やルーロの3角形のようにどの方向においても同じ直径を有する定巾曲線であるときは, 繊維集合体が異方性であっても, 粒子通過率 f は (3.8) 式を適要できる。ところが粒子形状が楕円や矩形のように方向によって直径が異なる場合で, しかも粒

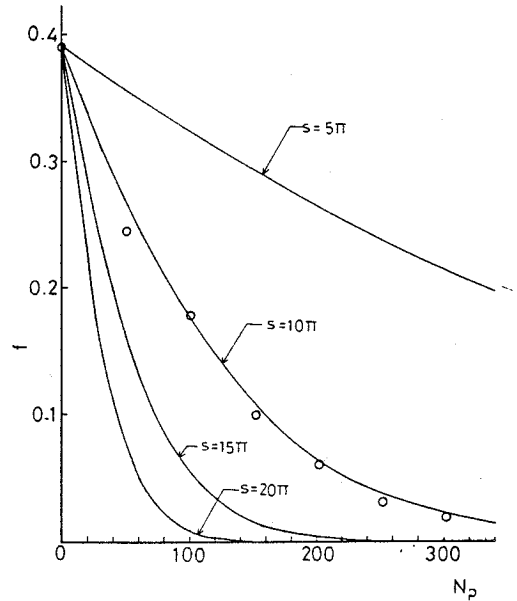


図3.3 粒子周長を $s=5\pi, 10\pi, 15\pi, 20\pi$ と変化させたときの粒子数 N_p の増加に対する粒子通過率 f の低下(目づまり)の様子。(図中の○印はシミュレーション結果である)

子の主軸方向がX軸に対して異方性を有するときは(3.3)式の $D(\theta)$ を配向角分布で平均化する必要がでてくる。

R. E. Milesは、繊維集合体がXY座標系において $q_1(\theta)$ の配向角分布を有するとき、配向主軸が 0° 方向の1個の粒子に交わる繊維本数の平均値 $E(x)$ が

$$E(x) = \tau (\omega + s_{\mathbf{x}} / \pi) \quad (3.32)$$

で与えられ、その分布は(3.2)式のポアソン分布であることを証明している。ここで $s_{\mathbf{x}}$ は

$$s_{\mathbf{x}} = \pi \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} D(\theta) q_1(\theta) d\theta \quad (3.33)$$

で与えられ、 $D(\theta)$ を配向角分布で平均化した場合の平均周長を与えている。

(3.33)式で与えられる $s_{\mathbf{x}}$ は、配向主軸が 0° 方向の1個の粒子に対する周長であったが、粒子の数が多く、しかもそれぞれの粒子の配向主軸がXY座標系において $q_2(\varphi)$ の配向角分布を有するときは(3.33)式に対応する粒子平均周長としては

$$s_{\mathbf{x}} = \pi \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} D(\theta - \varphi) q_1(\theta) q_2(\varphi) d\theta d\varphi \quad (3.34)$$

となる。

いま粒子形状が長径 a 、短径 b の矩形であるときは図3.4に示すように

$$D(\theta - \varphi) = a |\cos(\theta - \varphi)| + b |\sin(\theta - \varphi)| \quad (3.35)$$

と表わされる。(3.35)式を(3.34)式へ代入すると

$$s_{\mathbf{x}} = \pi a \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} |\cos(\theta - \varphi)| q_1(\theta) q_2(\varphi) d\theta d\varphi + \pi b \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} |\sin(\theta - \varphi)| q_1(\theta) q_2(\varphi) d\theta d\varphi \quad (3.36)$$

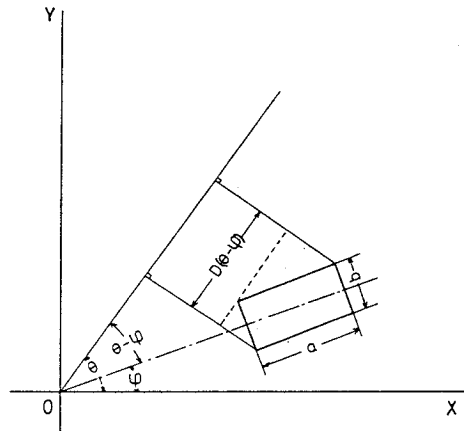


図3.4 φ 方向の矩形粒子の θ 方向の繊維への投影直径 $D(\theta - \varphi)$ 。

ここで $q_1(\theta)$, $q_2(\varphi)$ として 2 章第 3 節で求めた配向角分布を導入すると

$$\left. \begin{aligned} q_1(\theta) &= \frac{\alpha_1 \beta_1}{\pi} \frac{1}{\beta_1^2 \cos^2 \theta + \alpha_1^2 \sin^2 \theta} \\ q_2(\varphi) &= \frac{\alpha_2 \beta_2}{\pi} \frac{1}{\beta_2^2 \cos^2 \varphi + \alpha_2^2 \sin^2 \varphi} \end{aligned} \right\} \quad (3.37)$$

で表わされ、 α , β は XY 軸方向の伸縮率である。

(3.36) 式において $|\cos(\theta - \varphi)|$, $|\sin(\theta - \varphi)|$ をフーリエ係数に展開すると

$$\left. \begin{aligned} |\cos(\theta - \varphi)| &= (2/\pi) - (4/\pi) \sum_{k=1}^{\infty} \cos k\pi (\cos 2k\theta \cos 2k\varphi \\ &\quad + \sin 2k\theta \sin 2k\varphi) / (4k^2 - 1) \\ |\sin(\theta - \varphi)| &= (2/\pi) - (4/\pi) \sum_{k=1}^{\infty} (\cos 2k\theta \cos 2k\varphi \\ &\quad + \sin 2k\theta \sin 2k\varphi) / (4k^2 - 1) \end{aligned} \right\} \quad (3.38)$$

となる。

$q_1(\theta)$, $q_2(\varphi)$ は偶関数であるので

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin 2k\theta \sin 2k\varphi q_1(\theta) q_2(\varphi) d\theta d\varphi = 0 \quad (3.39)$$

とおける。そこで (3.38) 式を (3.36) 式へ代入して整理すると

$$\left. \begin{aligned} s_x &= \pi a \left[(2/\pi) - (4/\pi) \sum_{k=1}^{\infty} \cos k\pi A_1(2k) A_2(2k) / (4k^2 - 1) \right] \\ &\quad + \pi b \left[(2/\pi) - (4/\pi) \sum_{k=1}^{\infty} A_1(2k) A_2(2k) / (4k^2 - 1) \right] \end{aligned} \right\} \quad (3.40)$$

と表わされる。ここで

$$A_1(2k) = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos 2k\theta q_1(\theta) d\theta \quad \left. \right\}$$

$$A_2(2k) = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos 2k\varphi q_2(\varphi) d\varphi \quad (3.41)$$

である。

$q_1(\theta)$, $q_2(\varphi)$ の配向係数 J は

$$\left. \begin{aligned} J_1 &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos 2\theta q_1(\theta) d\theta \\ J_2 &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos 2\varphi q_2(\varphi) d\varphi \end{aligned} \right\} (3.42)$$

で定義されている。

(3.41)(3.42)式へ(3.37)式で与えられている配向角分布を代入して計算すると

$$\left. \begin{aligned} J_1 &= \frac{\alpha_1 - \beta_1}{\alpha_1 + \beta_1} \\ J_2 &= \frac{\alpha_2 - \beta_2}{\alpha_2 + \beta_2} \end{aligned} \right\} (3.43)$$

$$\left. \begin{aligned} A_1(2k) &= \left(\frac{\alpha_1 - \beta_1}{\alpha_1 + \beta_1} \right) \\ A_2(2k) &= \left(\frac{\alpha_2 - \beta_2}{\alpha_2 + \beta_2} \right) \end{aligned} \right\} (3.44)$$

となる。これより(3.40)式は

$$\begin{aligned} s_{\mathbf{x}} &= 2a \left[1 - 2 \sum_{k=1}^{\infty} \cos k\pi J_1^k J_2^k / (4k^2 - 1) \right] \\ &\quad + 2a \left[1 - 2 \sum_{k=1}^{\infty} J_1^k J_2^k / (4k^2 - 1) \right] \end{aligned} \quad (3.45)$$

で与えられる。(3.45)式より $q_1(\theta)$, $q_2(\varphi)$ の配向係数 J_1 , J_2 が与えられると簡単に $s_{\mathbf{x}}$ を求めることができる。そして $q_1(\theta)$, $q_2(\varphi)$ のどちらかが一様分布, すなわち J_1 か J_2 のどち

らかがゼロであれば(3.45)式は

$$s_{\mathbf{x}} = 2(a + b) \quad (3.46)$$

となる。これは矩形の周長であり、この場合は等方性と同様に(3.7)式によって粒子通過率 f が計算できる。

つぎに、繊維集合体と粒子集合体が異方性を有する場合の目づまり効果を考える。(3.32)式の τ を繊維集合体の τ_f と粒子集合体の τ_p に分けて考えると

$$\left. \begin{aligned} \tau_f &= N_f l_f I_f / A \\ \tau_p &= N_p l_p I_p / A \end{aligned} \right\} \quad (3.47)$$

と与えられる。ここで I_f , I_p は

$$\left. \begin{aligned} I_f &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} |\sin(\theta - \theta')| q_1(\theta) q_1(\theta') d\theta d\theta' \\ &= (2/\pi) - (4/\pi) \sum_{k=1}^{\infty} J_1^{2k} / (4k^2 - 1) \\ I_p &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} |\sin(\varphi - \varphi')| q_2(\varphi) q_2(\varphi') d\varphi d\varphi' \\ &= (2/\pi) - (4/\pi) \sum_{k=1}^{\infty} J_2^{2k} / (4k^2 - 1) \end{aligned} \right\} \quad (3.48)$$

である。すると(3.26)式に対応する目づまり効果を考えた粒子通過率 f は

$$f = e^{-\tau_f(\omega_f + s_{\mathbf{x}}/\pi)} e^{-\tau_p(\omega_p + s_{\mathbf{x}}/\pi)} \quad (3.49)$$

となる。

繊維集合体と粒子集合体の配向係数 J_1 , J_2 が与えられるとき、(3.49)式に(3.45)(3.47), (3.48)式を代入して計算すると異方性を有する場合の目づまり効果が評価できる。

3・2 ランダム配向繊維集合体の流体半径の分布と流体通過特性

3・2・1 流体半径の分布およびそのk次モーメント

任意の多角形の流体半径 r は面積と周長の比として

$$r = a / l \quad (3.50)$$

で定義される。半径が r_c の円の場合、流体半径は

$$\begin{aligned} r &= \pi (r_c)^2 / 2 \pi r_c \\ &= r_c / 2 \end{aligned} \quad (3.51)$$

となって円の半径の $1/2$ になっていることがわかる。

周長 l の正 n 角形の面積 a_x は簡単な幾何学誘導より

$$a_x = u l^2 \quad (3.52)$$

ここで

$$u = \tan \left\{ (n-2) \pi / 2n \right\} / 4n \quad (3.53)$$

である。

2章の第2節で定義したように、多角形の変形度（面積修正係数） c はつぎのように表わされる。

$$c = \frac{\text{周長 } l \text{ の変形した } n \text{ 角形の面積}}{\text{周長 } l \text{ の正 } n \text{ 角形の面積}} \quad (3.54)$$

変形度は $0 \leq c \leq 1$ で与えられ、配向角分布が一様ランダムである場合、その分布 $T(c)$ は

$$T(c) = \left\{ B(2.816, 1.202) \right\}^{-1} c^{1.816} (1-c)^{0.202} \quad (3.55)$$

のベータ分布で表わされる。ここで $B(x, y)$ はベータ関数である。すると任意の多角形の面積 a は (3.52), (3.54) 式より

$$\begin{aligned} a &= c a_x \\ &= u c l^2 \end{aligned} \quad (3.56)$$

となる。

つぎに n 角形の周長分布 $Q(l | n)$ は R. E. Miles によって自由度が $n-2$ の x^2 分布として

$$Q(l | n) = (\tau/\pi)^{n-2} \left\{ \Gamma(n-2) \right\}^{-1} l^{n-3} e^{-(\tau/\pi)l} \quad (3.57)$$

として与えられている。ここで $\Gamma(n)$ はガンマ関数である。

流体半径と周長の関係は (3.50), (3.56) 式より

$$r = u c l \quad (3.58)$$

となり (3.58) 式より

$$l = r / u c \quad (3.59)$$

となる。(3.59) 式の関係より $Q(l | n)$ を変数変換して、 n 角形の流体半径の分布 $H(r | n)$ を求めると

$$\begin{aligned} H(r | n) &= Q(l = r / u c | n) | dl / dr | \\ &= (\tau / \pi)^{n-2} \{ \Gamma(n-2) \}^{-1} (u c)^{-(n-2)} r^{n-3} e^{-(\tau / \pi) r u^{-1} c^{-1}} \end{aligned} \quad (3.60)$$

となる。

ところで (3.55) 式で与えられているように c は実際には分布しているので、 c の分布を考慮して $H(r | n)$ を求めると (3.60) 式は

$$\begin{aligned} H(r | n) &= (\tau / \pi)^{n-2} \{ \Gamma(n-2) \}^{-1} u^{-(n-2)} r^{n-3} \\ &\int_0^1 c^{-(n-2)} e^{-(\tau / \pi) r c^{-1} u^{-1}} T(c) dc \end{aligned} \quad (3.61)$$

と表わされる。(3.61) 式よりすべての多角形の流体半径の分布 $H(r)$ は

$$H(r) = \sum_{n=3}^{\infty} P(n) H(r | n) \quad (3.62)$$

で与えられる。

$H(r | n)$ の k 次モーメント $E(r^k | n)$ は (3.61) 式より

$$\begin{aligned} E(r^k | n) &= (\tau / \pi)^{n-2} \{ \Gamma(n-2) \}^{-1} u^{-(n-2)} \\ &\int_0^{\infty} \int_0^1 r^{k+n-3} c^{-(n-2)} e^{-(\tau / \pi) r u^{-1} c^{-1}} T(c) dc dr \\ &= (\pi / \tau)^k u^k E(c^k) \prod_{i=0}^{k-1} (n+i-2) \end{aligned} \quad (3.63)$$

となる。ここで $E(c^k)$ は (3.55) 式で与えられている $T(c)$ の k 次モーメントであり

$$E(c^k) = B(2.816 + k, 1.202) / B(2.816, 1.202) \quad (3.64)$$

である。

(3.63)式よりすべての多角形の流体半径の分布についてのk次モーメント $E(r^k)$ は

$$E(r^k) = \sum_{n=3}^{\infty} P(n) E(r^k | n) \quad (3.65)$$

で与えられる。(3.65)式より第5次モーメントまでを計算すると

$$\left. \begin{aligned} E(r) &= 0.8874 \times 10^{-1} (\pi/\tau) \\ E(r^2) &= 0.1600 \times 10^{-1} (\pi/\tau)^2 \\ E(r^3) &= 0.4377 \times 10^{-2} (\pi/\tau)^3 \\ E(r^4) &= 0.1591 \times 10^{-2} (\pi/\tau)^4 \\ E(r^5) &= 0.7212 \times 10^{-3} (\pi/\tau)^5 \end{aligned} \right\} \quad (3.66)$$

となる。

$E(r) = 1.0$ のときの $H(r|3) \sim H(r|7)$ の変化の様子を図3.5に示す。さらに $E(r) = 0.5, 1.0, 2.0, 4.0$ のときの $H(r)$ の変化の様子を図3.6に示す。

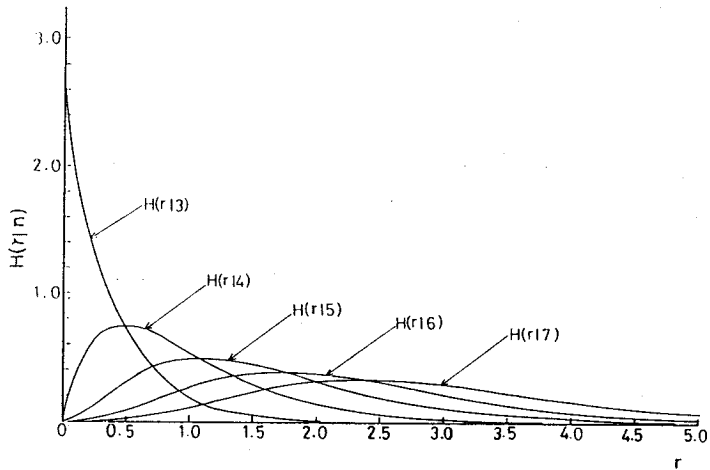


図3.5 流体半径の平均値が $E(r) = 1.0$ であるときの、 n 角形の流体半径の分布 $H(r|n)$ の変化。

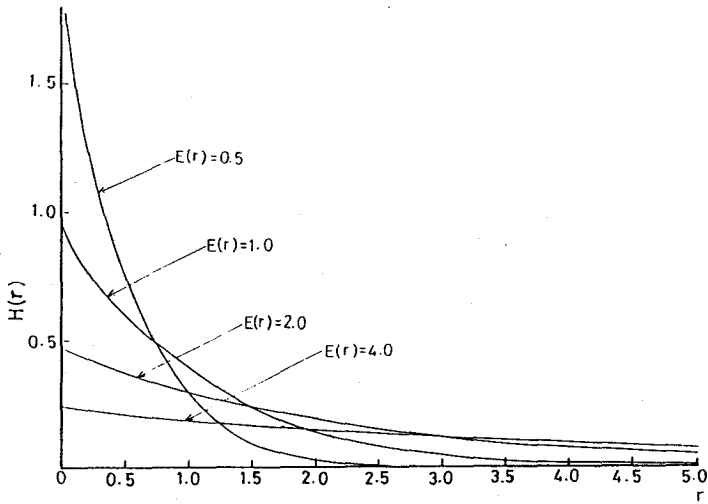


図 3.6 流体半径の平均値が $E(r)=0.5, 1.0, 2.0, 4.0$ と変化したときの、流体半径の分布 $H(r)$ の変化。

3・2・2 流体半径，周長，面積の対数の分布

n 角形の周長，流体半径の分布についてはそれぞれ (3.57)，(3.61) 式で与えられている。
 n 角形の面積 a の分布は 2 章の第 2 節において

$$R(a) = \left\{ \Gamma(n-2) \right\}^{-1} 2^{-(n-1)} J^{n-2} a^{(n-4)/2} (\tau/\pi)^{n-2} \int_0^1 c^{-(n-2)/2} e^{-\frac{1}{2}(\tau/\pi) J c^{-\frac{1}{2}} a^{-\frac{1}{2}}} T(c) dc \quad (3.67)$$

で与えられている。ここで

$$J = 4 n^{1/2} \left[\tan \left\{ (n-2) \pi / 2n \right\} \right]^{-\frac{1}{2}} \quad (3.68)$$

である。

流体半径，周長，面積の対数を

$$\left. \begin{aligned} x &= l n r \\ y &= l n l \\ z &= l n a \end{aligned} \right\} \quad (3.69)$$

とおく。(3.69) 式を変形すると

$$\left. \begin{aligned} r &= e^x \\ l &= e^y \\ a &= e^z \end{aligned} \right\} \quad (3.70)$$

(3.70)式のそれぞれを微分すると

$$\left. \begin{aligned} \frac{dr}{dx} &= e^x \\ \frac{dl}{dy} &= e^y \\ \frac{da}{dz} &= e^z \end{aligned} \right\} \quad (3.71)$$

n角形の流体半径の対数の分布 $H(x|n)$ は(3.61)式の変数変換より

$$H(x|n) = H(r = e^x | n) | dr/dx | \quad (3.72)$$

で与えられるので

$$H(x|n) = (\tau/\pi)^{n-2} \{ \Gamma(n-2) \}^{-1} u^{-(n-2)} e^{(n-2)x} \int_0^1 c^{-(n-2)} e^{-(\tau/\pi) e^x c^{-1} u^{-1}} T(c) dc \quad (3.73)$$

となる。

同様にn角形の周長, 面積の対数の分布 $Q(y|n)$, $R(z|n)$ についても(3.57),(3.67)式の対数変換よりそれぞれ

$$Q(l|n) = (\tau/\pi)^{n-2} \{ \Gamma(n-2) \}^{-1} e^{(n-2)y} e^{-(\tau/\pi) e^y} \quad (3.74)$$

$$R(z|n) = \{ \Gamma(n-2) \}^{-1} 2^{-(n-1)} J^{n-2} e^{(n-2)z/2} (\tau/\pi)^{n-2} \int_0^1 c^{-(n-2)/2} e^{\frac{1}{2}(\tau/\pi) J c^{1/2} e^{z/2}} T(c) dc \quad (3.75)$$

となる。

すべての多角形の対数の分布は(3.73), (3.74), (3.75)式より

$$\left. \begin{aligned} H(x) &= \sum_{n=3}^{\infty} P(n) H(x|n) \\ Q(y) &= \sum_{n=3}^{\infty} P(n) Q(y|n) \\ R(z) &= \sum_{n=3}^{\infty} P(n) R(x|n) \end{aligned} \right\} \quad (3.76)$$

で与えられる。

(3.76)式の数値計算よりそれぞれの分布の平均値 $E(x)$, $E(y)$, $E(z)$ と標準偏差 σ_x , σ_y , σ_z は

$$\left. \begin{aligned} E(x) &= -0.5398 + l n E(r) \\ E(y) &= -0.1394 + l n E(l) \\ E(z) &= -1.406 + l n E(a) \end{aligned} \right\} \quad (3.77)$$

であり、

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= 1.251 \\ \sigma_y &= 1.415 \\ \sigma_z &= 2.037 \end{aligned} \right\} \quad (3.78)$$

であることがわかる。

(3.77)式において $E(r)$ は(3.78)式で与えられている。そして $E(l)$, $E(a)$ については S. Goudsmit⁽⁷⁾によって

$$\left. \begin{aligned} E(l) &= 2\pi/\tau \\ E(a) &= \pi/\tau^2 \end{aligned} \right\} \quad (3.79)$$

として与えられているので交点数密度 τ より簡単に求めることができる。一方、標準偏差は交点数密度に無関係で一定となる。すなわち、流体半径、周長、面積の対数の分布の形は繊維本数に関係なく一定であることがわかる。

$E(r) = 1.0, 2.0, 4.0$ のときの $H(x)$ の理論分布を図3.7に、 $E(l) = 1.0, 2.0, 4.0$ のときの $Q(y)$ の理論分布を図3.8に、そして $E(a) = 1.0, 2.0, 4.0$ のときの $R(z)$ の理論分布を図3.9に示す。いずれの場合も左右非対称で、とくに右側で早く減衰し有限の値で終わってしまうので正規分布の特徴とかなり離れていることがわかる。

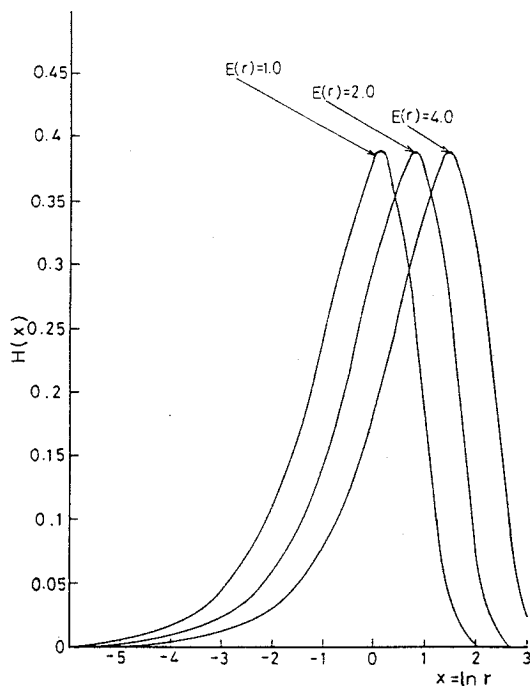


図 3.7 流体半径の平均値が $E(r)=1.0, 2.0, 4.0$ と変化したときの流体半径の対数の分布の変化。

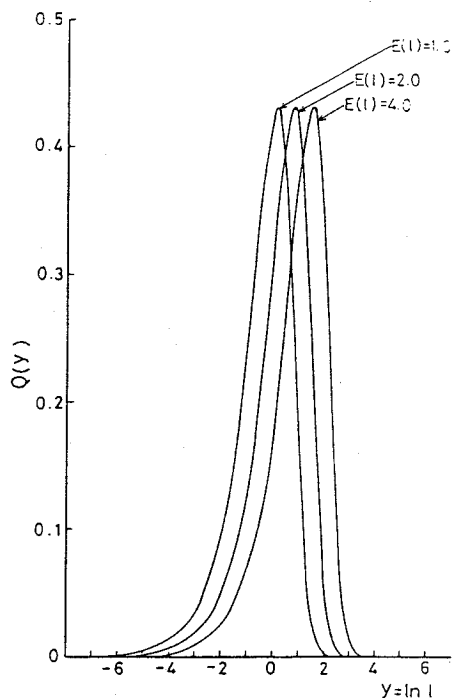


図 3.8 周長の平均値が $E(l)=1.0, 2.0, 4.0$ と変化したときの周長の対数の分布 $Q(y)$ の変化。

3・2・3 n 角形の流体通過寄与率

2次元ランダム配向繊維フィルターにおいて、フィルター面に対して直角方向に通過する流体のうち n 角形のみを通過する流体量寄与率 $K(n)$ を考える。

円管内を層流状態で通過する流体の流量は流体半径の 4 乗に比例することがわかっている。いま粗い近似として、任意の一つの多角形をそれと同等の流体半径を持つ円管で置き換えられるとすると、フィルターを通過した全流量のうち、n 角形を通過する流量の分率 $K(n)$ は

$$K(n) = \frac{P(n)E(r^4|n)}{\sum_{n=3}^{\infty} P(n)E(r^4|n)} \quad (3.80)$$

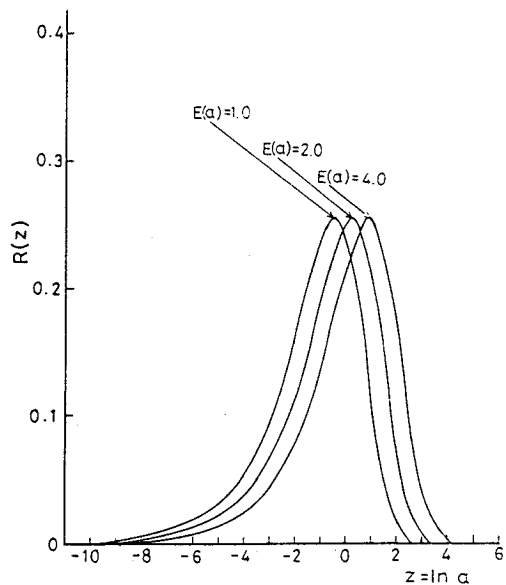


図 3.9 面積の平均値が $E(a)=1.0, 2.0, 4.0$ と変化したときの面積の対数の分布 $R(z)$ の変化。

となる。(3.80)式の計算を実行すると

$$\left. \begin{aligned} K(3) &= 0.1015 \times 10^{-1} \\ K(4) &= 0.1550 \\ K(5) &= 0.3410 \\ K(6) &= 0.2973 \\ K(7) &= 0.1420 \\ K(8) &= 0.4347 \times 10^{-1} \\ K(9) &= 0.9311 \times 10^{-2} \\ K(10) &= 0.1486 \times 10^{-2} \end{aligned} \right\} \quad (3.81)$$

となる。

2章の第1節で求めた多角形の辺の数の分布 $P(n)$ と n 角形の占有面積率 $S(n)$ と $K(n)$ の比較を図3.10に示す。3角形は存在率が35.54%であるにもかかわらず、流体通過量寄与率では1.015%と少なく、一方5角形以上の存在率は26.37%であるのに対して流体通過量寄与率は83.49%となっている。

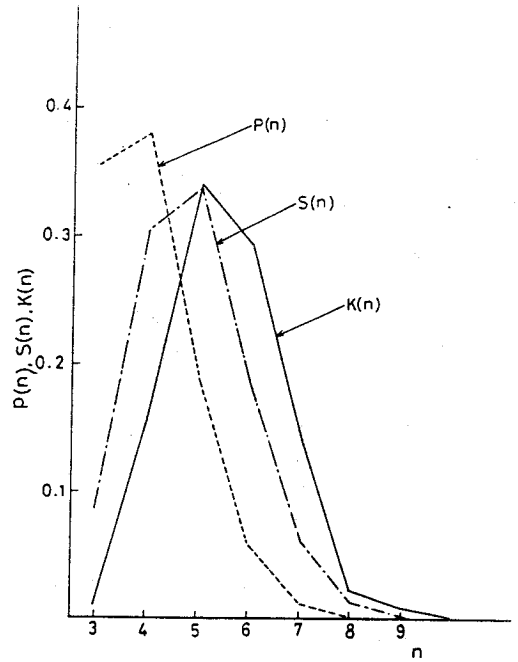


図3.10 多角形の辺の数の分布 $P(n)$ 、 n 角形の占有面積率 $S(n)$ 、 n 角形の流体通過量寄与率分布 $K(n)$ の比較。

3・2・4 流体半径，周長，面積に及ぼす繊維太さの影響

周長，面積，流体半径に関するこれまでの理論誘導については，繊維の太さ，すなわち直線巾をゼロとしてきた。しかし実際にはいかなる繊維にも太さがあり，いかなる直線にも巾がある。そして直線の巾は図3.11に示すように1本1本で異っている場合もあるし，図3.12に示すように1本の直線の部分によって異っている場合もある。

そこで，すべての直線の巾の平均値を ω とし，直線の方角と ω は無関係（ある方向の直線だけが太いというような偏りがない）とする。R. E. Miles⁽⁸⁾ は，このような条件下において，直線巾を考慮した場合の幾何学確率について理論解析を行い，例えば多角形の辺の数の分布 $P(n)$ は，直線に巾がある場合でも方向が一樣ランダムでありさえすれば，不変に保たれることを証明している。さらに彼は，有限巾の直線集合体によってカバーされない領域の分率 f が

$$f = e^{-\tau \omega} \quad (3.82)$$

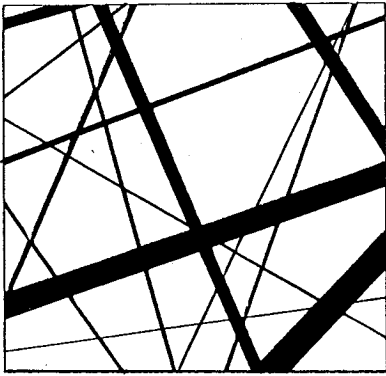


図 3.1.1 巾の異っている直線群によって生成される多角形集合体。

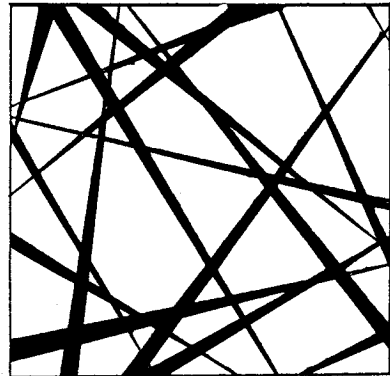


図 3.1.2 1本の直線の部分によって巾が異っている直線群によって生成される多角形集合体。

で与えられることを示している。ここで τ は直線巾をゼロとした場合の交点数密度である。

いま、面積 A の領域内に長さ l の直線が N 本ある場合、交点数密度 τ は2章第1節より

$$\tau = 2Nl / \pi A \quad (3.83)$$

で表わされる。

直線に巾がある場合、領域 A において直線群によってカバーされない領域 A_x は(3.82)式より

$$A_x = A e^{-\tau \omega} \quad (3.84)$$

となる。直線に ω という平均巾がある場合、実際に多角形の内部を占める面積は A ではなくて(3.84)式で与えられる A_x である。

そこで(3.83)式における A の代りに(3.84)式の A_x を代入すると、直線巾を有する場合に対応する修正交点数密度 τ_x が与えられ

$$\begin{aligned} \tau_x &= 2Nl / \pi A_x \\ &= \tau e^{\tau \omega} \end{aligned} \quad (3.85)$$

となる。

τ_x は直線に巾がある場合に、多角形の流体半径、周長、面積を考慮するときの交点数密度を与え、これまで論じてきた理論式の中のすべての τ を τ_x に置き代る必要がある。

例えば直線の巾がゼロである場合の流体半径の平均値は(3.66)式で周長と面積の平均値は(3.79)式で与えられるが、直線に ω という巾があるときはそれぞれ

$$\left. \begin{aligned}
 E(r) &= 0.8874 \times 10^{-1} (\pi/\tau) e^{-\tau\omega} \\
 E(l) &= 2(\pi/\tau) e^{-\tau\omega} \\
 E(a) &= (1/\pi)(\pi/\tau)^2 e^{-2\tau\omega}
 \end{aligned} \right\} \quad (3.86)$$

となる。 $\omega=0$ のときは当然(3.86)式は(3.66)(3.79)式と一致する。

3・3 結果と考察

1辺が200mmの正方形の中に位置と方向がランダムな無限長直線を25, 50, 75, 100本と発生させ、直線巾は0.5mmとした。そして粒子形状を直径 $d=10$ mmの円とし、その中心位置を2つの一様乱数で定め、500個の粒子を正方形内に落下させた。図3.13, 3.14に繊維交点数密度が $\tau=0.09119, 0.1375$ のときの繊維と粒子の複合系を示す。

任意の円粒子に交わる繊維本数は(3.2)式のポアソン分布で与えられている。 $\tau=0.05850, 0.09119, 0.1375$ のときのシミュレーション結果と理論値の比較を図3.15~3.17に示す。いずれもほぼ合っていることがわかる。

粒子通過率 f は(3.8)式で与えられているが、繊維交点数密度 τ と粒子径 d を変化させたときの f の変化の様子を図3.18, 3.19に示す。理論値とシミュレーション結果はよく合っている。

粒子周長分布が一様分布であるときのフィルター通過後の粒子分布は(3.15)式で与えられている。粒子の最大径を $d_m=10$ mmとしたときの $Q_x(d)$ の理論値とシミュレーション結果の比較を図3.20に示す。両者はほぼ一致している。

フィルター内に捕そくされる粒子数が増えてくると、目づまりを起こし、新しい粒子がフィルターに捕そくされる確率が高くなっていく。そのような目づまり効果は(3.31)式で表わされている。初期粒子通過率を $f_1=0.3878$ で与えたとき、 $d=10$ mmの粒子の目づまり効果については図3.3の○印でシミュレーション結果が示されており、理論曲線とほぼ一致している。

以上の結果、3・1節で誘導された粒子通過特性に関する理論式は妥当なものであることがわかる。

つぎに、面積 π の3角形領域内で100本のランダム直線を発生させ、そこで生成される多角形の流体半径、周長、面積をコンピュータによって計算した。交点数密度は $\tau=29.35$ で、このとき(3.66)式で与えられる流体半径の平均値は $E(r)=0.009499$ となり、シミュレーションによる結果では $E(r)=0.009593$ となり、かなり近い値になっている。そこで(3.62)式で与えられている流体半径の分布の理論結果とシミュレーション結果の比較を図3.21に示す。2

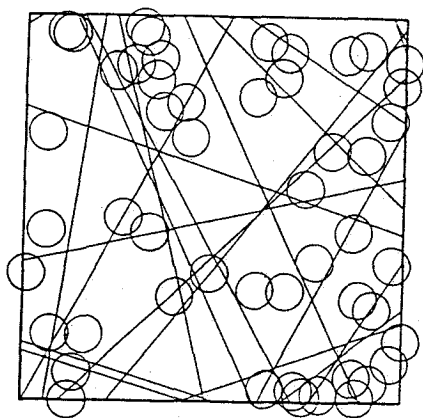


図 3.1.3 繊維交点数密度 $\tau=0.09119$,
円の直径 $d=10$ の条件における
粒子落下のシミュレーション図。

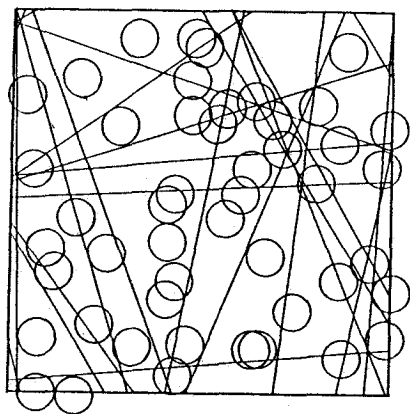


図 3.1.4 繊維交点数密度 $\tau=0.1375$,
円の直径 $d=10$ の条件における
粒子落下のシミュレーション図。

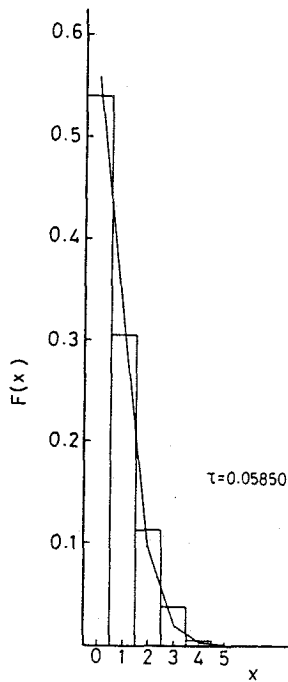


図 3.1.5 直径 $d=10$ の円形粒子に交わる
繊維本数 x の分布 $F(x)$ の理論
値とシミュレーション結果の比
較。

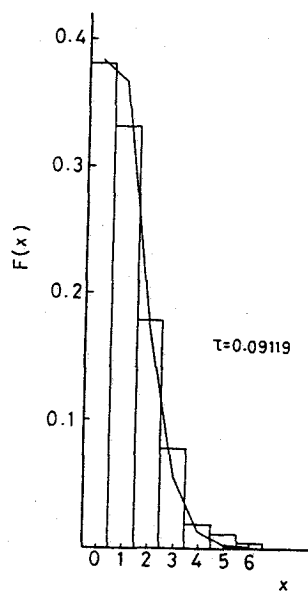


図 3.1.6 直径 $d=10$ の円形粒子に交わる
繊維本数 x の分布 $F(x)$ の理論
値とシミュレーション結果の比
較。

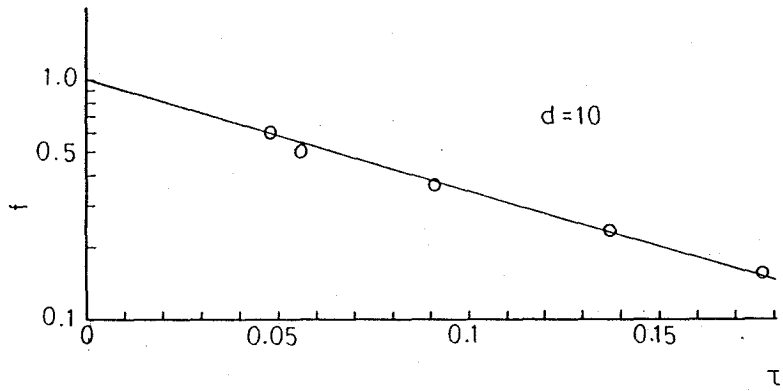


図 3.18 粒子直径 $d=10$ の条件で繊維交点密度 τ を変化させたときの粒子通過率 f の変化。

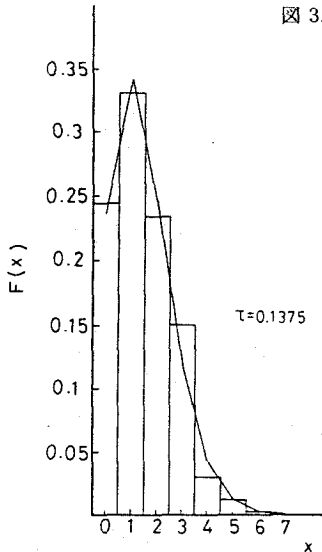


図 3.17 直径 $d=10$ の円形粒子に交わる繊維本数 x の分布 $F(x)$ の理論値とシミュレーション結果の比較。

つの分布はよく合っている。さらに、流体半径、周長、面積の対数の分布については(3.76)式で与えられる理論分布とシミュレーション結果の比較を図 3.22~3.24 のように正規確率紙に示す。いずれの場合も両者はよく合っている。

H. W. Piekarr⁽⁹⁾ らは多角形の流体半径および面積の分布を対数正規分布で近似し、それぞれの分布の標準偏差を $\sigma_x = 1.9$, $\sigma_z = 4.6$ としている。一方、本研究で求めた標準偏差は(3.78)式で与えられているように $\sigma_x = 1.251$, $\sigma_z = 2.037$ と Piekarr らの結果より小さくなっている。この差は Piekarr らが分布を対数正規確率紙上で直線近似し、標準偏差を求めたために生じたものと考えられる。しかし、実際には図 3.22, 3.24 に示されているように理論分布もシミュレーション結果も直線ではなく右上りの曲線となっており、正確には対数正規分布ではないことがわかる。

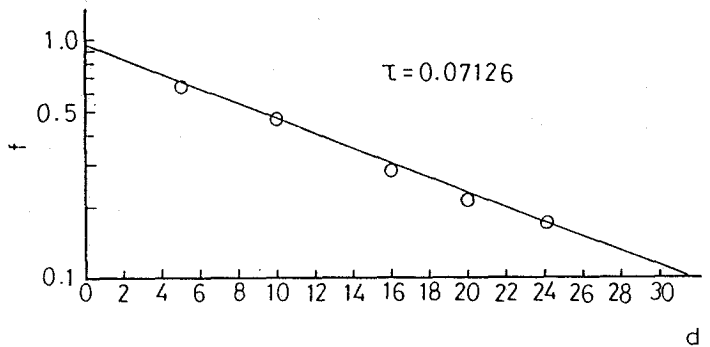


図 3.19 繊維交点密度が $\tau=0.07126$ の条件で粒子径 d を変化させたときの粒子通過率 f の変化。

(3.8 1)式で表わされているn角形の流体通過寄与率の計算結果は、前提として任意の多角形をそれと同等の流体半径を持つ円管で置き換えるという仮定のもとに成り立つものであり、さらに表面張力による毛細管現象などの影響は考慮されていないことについても注意する必要がある。

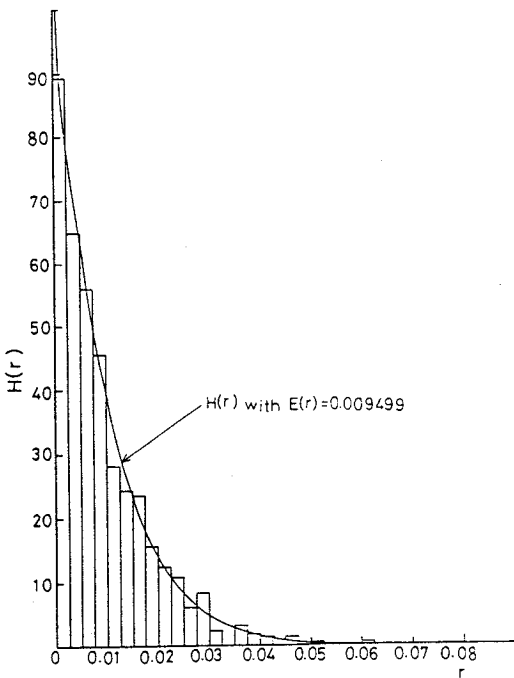


図 3.2.1 平均値が $E(r)=0.009499$ のときの流体半径の分布 $H(r)$ の理論値とシミュレーション結果の比較。

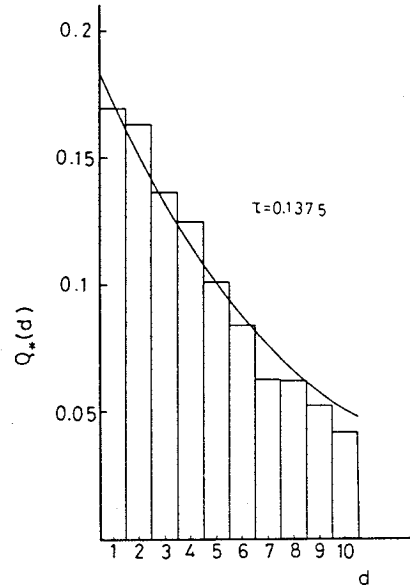


図 3.2.0 初期粒子径 d の分布が 1~10 の一様分布であるときのフィルター通過後の粒子径分布 $Q_*(d)$ の理論値とシミュレーション結果の比較。

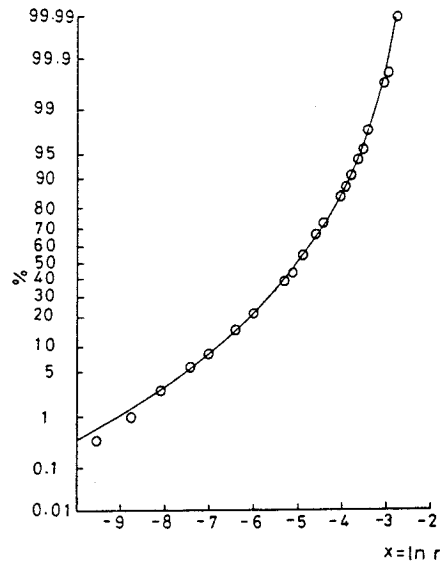


図 3.2.2 流体半径の対数の累積分布関数の理論値とシミュレーション結果との比較。

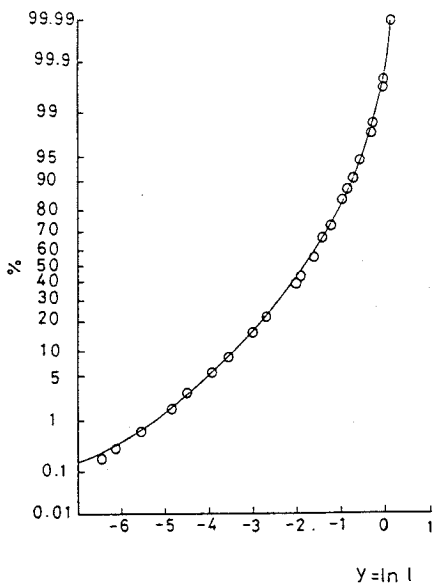


図 3.2.3 周長の対数の累積分布関数の理論値とシミュレーション結果との比較。

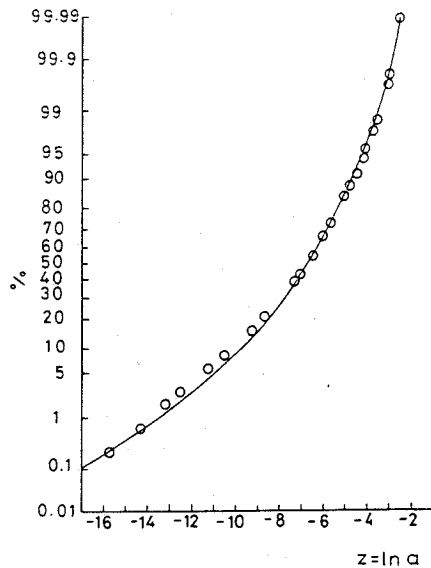


図 3.2.4 面積の対数の累積分布関数の理論値とシミュレーション結果との比較。

4 章 繊維集合体の力学モデル

4・1 弾性常数のフーリエ変換による表現

4・1・1 繊維配向角分布の重畳積分

曲がりを有する繊維によって構成されている集合体に関して、その構造や力学を考える場合、種々の配向角分布の定義が必要となる。繊維同志の接触点を考える場合には無限小要素の配向角が問題となる。集合体に外力が作用したときの力学について考える場合は接触点間の有効要素（繊維末端を含まない要素）を直線で置き換えたものの配向角分布が問題となる。ウレタンフォームのように末端で他の繊維要素と連結しているような網目構造の力学を考える場合は末端を結ぶ直線要素の配向角分布が問題となる。以下の理論を簡単にするために、単繊維の曲がり方は、末端同志を結ぶ直線のまわりで回転対称性を有しているものとする。

このような種々の直線要素を分類するため n 分割直線をつぎのように定義する。

定義(i), 繊維集合体を構成する任意の 1 本の繊維（繊維長は等しいとする）を n 等分してできる要素を n 分割要素とし、 n 分割要素を直線で置き換えたものを n 分割直線とする。

繊維集合体内の任意の 1 点に直角座標系を固定し、任意の 1 本の n 分割直線の配向角が図 4.1 に示すように (θ, φ) で表わされるものとする。このとき、つぎのような配向角分布関数が定義できる。

定義(ii), 1 分割直線（繊維の末端同志を結んでできる直線）の配向角分布を $\mathcal{Q}_{01}(\theta, \varphi)$ とする。

定義(iii), n 分割直線の配向角分布を $\mathcal{Q}_{0n}(\theta, \varphi)$ とする。

定義(iv), 無限小分割要素を無限小分割直線で置き換えたときの配向角分布を $\mathcal{Q}_{0\infty}(\theta, \varphi)$ とする。

ここで添字の $0n$ のうち、 0 は座標系を規準にすることを意味し、 n は n 分割直線を意味している。

つぎに 1 分割直線を規準とした場合の n 分割直線の配向角分布 $\mathcal{Q}_{1n}(\theta,$

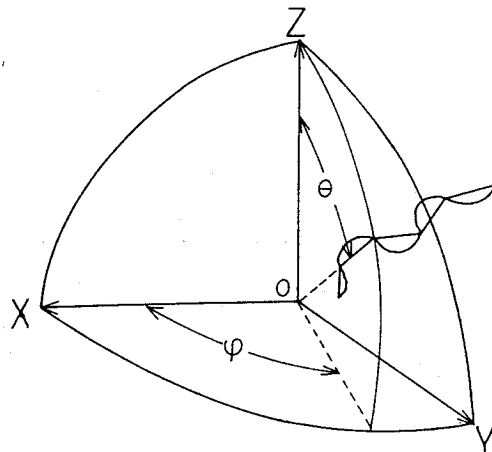


図 4.1 繊維集合体内に固定した直交座標系 $O-XYZ$ に関する n 分割直線の配向角 (θ, φ) 。

φ) を考える。任意の 1 分割直線を座標系の Z 軸に一致させる座標変換を行う。その様子を図 4.2 に示す。座標変換はオイラーの変換行列によって表わされるが、回転対称性を有する曲線の変換であるためオイラー角において ($\theta = \theta, \varphi = \varphi, \psi = 0$) とおける。そして直交座標系 $O-X'Y'Z'$ に関する n 分割直線の配向角分布を $\mathcal{Q}_{1n}(\theta, \varphi)$ とし、その様子を図 4.3 に示す。

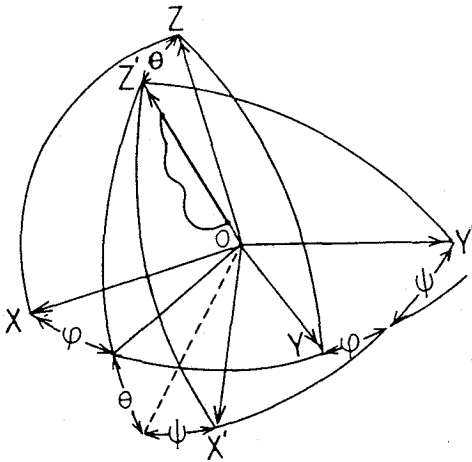


図 4.2 繊維集合体内に固定した直交座標系 $O-XYZ$ に関する 1 分割直線の配向。

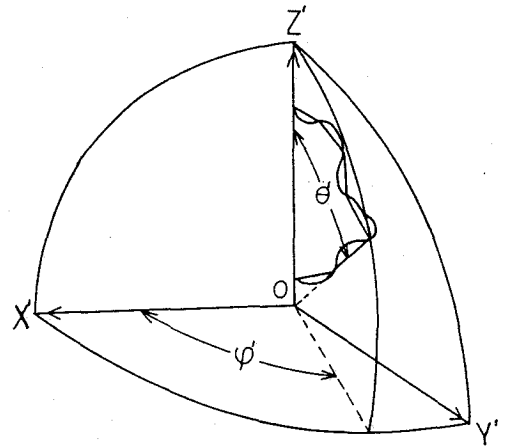


図 4.3 1 分割直線を OZ' 軸に一致させた後の直交座標系 $O-X'Y'Z'$ に関する n 分割直線の配向角 (θ', φ')。

以上のように種々の配向角分布の定義がなされると $\mathcal{Q}_{0n}(\theta, \varphi)$ は $\mathcal{Q}_{01}(\theta, \varphi)$ と $\mathcal{Q}_{1n}(\theta, \varphi)$ の重畳積分としてつぎのように与えられる。

$$\left. \begin{aligned} \mathcal{Q}_{0n}(\theta, \varphi) &= \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \mathcal{Q}_{01}(\theta - \theta', \varphi - \varphi') \mathcal{Q}_{1n}(\theta', \varphi') d\omega' \\ &\equiv \mathcal{Q}_{01} * \mathcal{Q}_{1n} \end{aligned} \right\} \quad (4.1)$$

ここで $d\omega' = \sin \theta' d\theta' d\varphi'$ である。

同様に他の配向角分布についてもつぎのような関係で表わされる。

$$\mathcal{Q}_{0n}(\theta, \varphi) = \mathcal{Q}_{0m} * \mathcal{Q}_{mn} \quad 1 \leq m \leq n \quad (4.2)$$

$$\mathcal{Q}_{0\infty}(\theta, \varphi) = \mathcal{Q}_{01} * \mathcal{Q}_{1\infty} = \mathcal{Q}_{01} * \mathcal{Q}_{1n} * \mathcal{Q}_{n\infty} = \mathcal{Q}_{0m} * \mathcal{Q}_{mn} * \mathcal{Q}_{n\infty} \quad (4.3)$$

$$\mathcal{Q}_{mn}(\theta, \varphi) = \mathcal{Q}_{m, m+1} * \mathcal{Q}_{m+1, m+2} * \dots * \mathcal{Q}_{n-2, n-1} * \mathcal{Q}_{n-1, n} \quad (4.4)$$

繊維が曲がり有する場合、一般的には $\mathcal{Q}_{01}(\theta, \varphi)$, $\mathcal{Q}_{0n}(\theta, \varphi)$, $\mathcal{Q}_{0\infty}(\theta, \varphi)$ は異った分布を示す。しかし特別の場合として繊維が直線である場合は

$$\mathcal{Q}_{mn}(\theta, \varphi) = \delta(\theta) \delta(\varphi) \quad (4.5)$$

とおくことができる。ここで $\delta(\theta)$, $\delta(\varphi)$ はデルタ関数である。超関数理論よりデルタ関数は関数 ϕ に対して

$$\left. \begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) \phi(t) dt &= \phi(0) \\ \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-t_0) \phi(t) dt &= \phi(t_0) \end{aligned} \right\} \quad (4.6)$$

で定義されている。デルタ関数の重畳積分は

$$\left. \begin{aligned} \delta(t) * \delta(t) &= \delta(t) \\ \delta(t-t_1) * \delta(t-t_2) &= \delta[t-(t_1+t_2)] \end{aligned} \right\} \quad (4.7)$$

で与えられる。デルタ関数のフーリエ変換は

$$\left. \begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) e^{-i\omega t} dt &= 1 \\ \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-t_0) e^{-i\omega t} dt &= e^{-i\omega t_0} \end{aligned} \right\} \quad (4.8)$$

で与えられる。(4.5)を(4.2)(4.3)(4.4)に代入して(4.7)の性質より

$$\left. \begin{aligned} \mathcal{Q}_{01}(\theta, \varphi) &= \mathcal{Q}_{01} * \delta(\theta) \delta(\varphi) = \mathcal{Q}_{0m} * \delta(\theta) \delta(\varphi) \\ \mathcal{Q}_{0\infty}(\theta, \varphi) &= \mathcal{Q}_{01} * \delta(\theta) \delta(\varphi) = \mathcal{Q}_{0m} * \delta(\theta) \delta(\varphi) \\ \mathcal{Q}_{mn}(\theta, \varphi) &= \delta(\theta) \delta(\varphi) * \delta(\theta) \delta(\varphi) * \dots * \delta(\theta) \delta(\varphi) \end{aligned} \right\} \quad (4.9)$$

これより

$$\mathcal{Q}_{01}(\theta, \varphi) = \mathcal{Q}_{1m}(\theta, \varphi) = \mathcal{Q}_{0n}(\theta, \varphi) = \mathcal{Q}_{0\infty}(\theta, \varphi) = \mathcal{Q}_{mn}(\theta, \varphi) \quad (4.10)$$

となる。

4・1・2 配向角分布のフーリエ変換

n分割直線の配向角分布 $\Omega_{0n}(\theta, \varphi)$ のフーリエ変換を $F_{0n}(\omega_1, \omega_2)$ とすると

$$F_{0n}(\omega_1, \omega_2) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \Omega_{0n}(\theta, \varphi) e^{-i(\omega_1\theta + \omega_2\varphi)} d\omega \quad (4.11)$$

で与えられる。ここで $d\omega = \sin\theta d\theta d\varphi$ である。

$$A_{0n}(\omega_1, \omega_2) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \Omega_{0n}(\theta, \varphi) \cos\omega_1\theta, \cos\omega_2\varphi d\omega \quad (4.12)$$

$$B_{0n}(\omega_1, \omega_2) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \Omega_{0n}(\theta, \varphi) \cos\omega_1\theta, \sin\omega_2\varphi d\omega \quad (4.13)$$

$$C_{0n}(\omega_1, \omega_2) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \Omega_{0n}(\theta, \varphi) \sin\omega_1\theta, \cos\omega_2\varphi d\omega \quad (4.14)$$

$$D_{0n}(\omega_1, \omega_2) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \Omega_{0n}(\theta, \varphi) \sin\omega_1\theta, \sin\omega_2\varphi d\omega \quad (4.15)$$

とおくと(4.11)は

$$F_{0n}(\omega_1, \omega_2) = A_{0n}(\omega_1, \omega_2) - D_{0n}(\omega_1, \omega_2) - i\{B_{0n}(\omega_1, \omega_2) + C_{0n}(\omega_1, \omega_2)\} \quad (4.16)$$

となる。

つぎに、重畳積分のフーリエ変換はそれぞれのフーリエ変換の積として与えられるので(4.1)

～(4.4)の両辺のフーリエ変換は

$$F_{0n}(\omega_1, \omega_2) = F_{01}(\omega_1, \omega_2) F_{1n}(\omega_1, \omega_2) \quad (4.17)$$

$$F_{0n}(\omega_1, \omega_2) = F_{0n}(\omega_1, \omega_2) F_{mn}(\omega_1, \omega_2) \quad (4.18)$$

$$\begin{aligned} F_{0\infty}(\omega_1, \omega_2) &= F_{01}(\omega_1, \omega_2) F_{1\infty}(\omega_1, \omega_2) = F_{01}(\omega_1, \omega_2) F_{1n}(\omega_1, \omega_2) F_{n\infty}(\omega_1, \omega_2) \\ &= F_{0m}(\omega_1, \omega_2) F_{mn}(\omega_1, \omega_2) F_{n\infty}(\omega_1, \omega_2) \end{aligned} \quad (4.19)$$

$$\begin{aligned} F_{mn}(\omega_1, \omega_2) &= F_{m, m+1}(\omega_1, \omega_2) F_{m+1, m+2}(\omega_1, \omega_2) \cdots \cdots \\ &\cdots \cdots F_{n-2, n-1}(\omega_1, \omega_2) F_{n-1, n}(\omega_1, \omega_2) \end{aligned} \quad (4.20)$$

となる。

(4.12) ~ (4.15) ~ (4.1) を代入すると

$$A_{0n}(\omega_1, \omega_2) = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \mathcal{Q}_{01}(\theta - \theta', \varphi - \varphi') \mathcal{Q}_{1n}(\theta', \varphi') \cos \omega_1 \theta, \cos \omega_2 \varphi \, d\omega \, d\omega' \quad (4.21)$$

$$B_{0n}(\omega_1, \omega_2) = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \mathcal{Q}_{01}(\theta - \theta', \varphi - \varphi') \mathcal{Q}_{1n}(\theta', \varphi') \cos \omega_1 \theta, \sin \omega_2 \varphi \, d\omega \, d\omega' \quad (4.22)$$

$$C_{0n}(\omega_1, \omega_2) = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \mathcal{Q}_{01}(\theta - \theta', \varphi - \varphi') \mathcal{Q}_{1n}(\theta', \varphi') \sin \omega_1 \theta, \cos \omega_2 \varphi \, d\omega \, d\omega' \quad (4.23)$$

$$D_{0n}(\omega_1, \omega_2) = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \mathcal{Q}_{01}(\theta - \theta', \varphi - \varphi') \mathcal{Q}_{1n}(\theta', \varphi') \sin \omega_1 \theta, \sin \omega_2 \varphi \, d\omega \, d\omega' \quad (4.24)$$

(4.21) を変数変換すると

$$A_{0n}(\omega_1, \omega_2) = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \mathcal{Q}_{01}(\theta, \varphi) \mathcal{Q}_{1n}(\theta', \varphi') \cos(\omega_1 \theta + \omega_1 \theta') \cos(\omega_2 \varphi + \omega_2 \varphi') \, d\omega \, d\omega' \quad (4.25)$$

(4.25) を分解すると

$$A_{0n}(\omega_1, \omega_2) = A_{01}(\omega_1, \omega_2) A_{1n}(\omega_1, \omega_2) - B_{01}(\omega_1, \omega_2) B_{1n}(\omega_1, \omega_2) - C_{01}(\omega_1, \omega_2) C_{1n}(\omega_1, \omega_2) + D_{01}(\omega_1, \omega_2) D_{1n}(\omega_1, \omega_2) \quad (4.26)$$

(4.22) ~ (4.24) についても同様に

$$B_{0n}(\omega_1, \omega_2) = B_{01}(\omega_1, \omega_2) A_{1n}(\omega_1, \omega_2) + A_{01}(\omega_1, \omega_2) B_{1n}(\omega_1, \omega_2) - D_{01}(\omega_1, \omega_2) C_{1n}(\omega_1, \omega_2) - C_{01}(\omega_1, \omega_2) D_{1n}(\omega_1, \omega_2) \quad (4.27)$$

$$C_{0n}(\omega_1, \omega_2) = C_{01}(\omega_1, \omega_2) A_{1n}(\omega_1, \omega_2) - D_{01}(\omega_1, \omega_2) B_{1n}(\omega_1, \omega_2) + A_{01}(\omega_1, \omega_2) C_{1n}(\omega_1, \omega_2) - B_{01}(\omega_1, \omega_2) D_{1n}(\omega_1, \omega_2) \quad (4.28)$$

$$D_{0n}(\omega_1, \omega_2) = D_{01}(\omega_1, \omega_2) A_{1n}(\omega_1, \omega_2) + C_{01}(\omega_1, \omega_2) B_{1n}(\omega_1, \omega_2) \\ + B_{01}(\omega_1, \omega_2) C_{12}(\omega_1, \omega_2) + A_{01}(\omega_1, \omega_2) D_{1n}(\omega_1, \omega_2) \quad (4.29)$$

(4.26)～(4.27)を ω_1, ω_2 を略してマトリックスで表わすと

$$\begin{bmatrix} A_{0n} \\ B_{0n} \\ C_{0n} \\ D_{0n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{01} & -B_{01} & -C_{01} & D_{01} \\ B_{01} & A_{01} & -D_{01} & -C_{01} \\ C_{01} & -D_{01} & A_{01} & -B_{01} \\ D_{01} & C_{01} & B_{01} & A_{01} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_{1n} \\ B_{1n} \\ C_{1n} \\ D_{1n} \end{bmatrix} \quad (4.30)$$

となる。

$$\mathcal{Q}_{0n}(\theta, \varphi) = \mathcal{Q}_{01} * \mathcal{Q}_{1m} * \mathcal{Q}_{mn} \quad (4.31)$$

のように配向角分布が3項の重畳積分で与えられる場合も同様の手続で求めることができる。

4・1・3 繊維集合体の力学モデル

繊維集合体が2種類以上の物質によって構成された複合材料となっている場合、それらの弾性特性を評価する方法としてVoigtモデル、Reussモデル、二つの混合モデルが提出されている。2種類の物質によって構成されている複合材料において、歪が均一であると仮定したVoigtモデルの弾性常数は

$$C_{ijkl} = V_1 (C_{ijkl})_1 + V_2 (C_{ijkl})_2 \quad (4.32)$$

応力が均一であると仮定したReussモデルのコンプライアンス常数は

$$S_{ijkl} = V_1 (S_{ijkl})_1 + V_2 (S_{ijkl})_2 \quad (4.33)$$

で与えられる。ここで V_1, V_2 は2種類の構成物質の体積分率である。

構成物質の一つが繊維である場合、一般的には繊維軸方向と応力、歪の方向が異なるため繊維配向に関しての空間平均をとる必要がある。構造単位の弾性常数およびコンプライアンス常数の座標変換は

$$\left. \begin{aligned} \bar{C}_{ijkl} &= a_{im} a_{jn} a_{kp} a_{lq} C_{mnpq} \\ \bar{S}_{ijkl} &= a_{im} a_{jn} a_{kp} a_{lq} S_{mnpq} \end{aligned} \right\} \quad (4.34)$$

で表わされる。ここで $a_{\alpha\beta}$ はオイラーの回転行列の要素である。繊維を含む構造単位の配向角分布を $\Omega(\theta, \varphi, \psi)$ とすると (4.34) の空間平均は

$$\left. \begin{aligned} \langle C_{ijkl} \rangle &= \langle a_{im} a_{jn} a_{kl} a_{lq} \rangle C_{mnpq} \\ \langle S_{ijkl} \rangle &= \langle a_{im} a_{jn} a_{kl} a_{lq} \rangle S_{mnpq} \end{aligned} \right\} \quad (4.35)$$

で与えられる。ここで

$$\langle a_{im} a_{jn} a_{kl} a_{lq} \rangle = \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} a_{im} a_{jn} a_{kp} a_{lq} \Omega(\theta, \varphi, \psi) \sin\theta d\theta d\varphi d\psi \quad (4.36)$$

である。構造単位が繊維軸に対して回転対称性を有する場合 $\psi=0$ とおけるので (4.36) は

$$\langle a_{im} a_{jn} a_{kp} a_{lq} \rangle = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \cos^a \theta, \sin^b \theta, \cos^c \varphi, \sin^d \varphi \Omega(\theta, \varphi) d\omega \quad (4.37)$$

となる。ここで a, b, c, d は正の整数である。

Voigt モデルであれ、Reuss モデルであれ力学モデルの構造単位ができあがってしまうとは空間平均だけが問題となる。本研究では構造単位として繊維要素のみで構成されているモデルを考える。Hsiao ら⁽²⁰⁾ は高分子を分子鎖の集合体としてそのようなモデルを使用して力学特性の理論解析を行った。このモデルはそのまま紙、不織布、織物、編物などの繊維集合体に適用できると考えられる。

任意の n 分割直線の張力を F とし s_i ($s_1 = \sin\theta \cos\varphi$, $s_2 = \sin\theta \sin\varphi$, $s_3 = \cos\theta$) 方向の張力成分を F_i とすると

$$F_i = F s_i \quad (4.38)$$

すると集合体としての応力は

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{ij} &= \frac{N l \Gamma}{V} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} F_i s_j \Omega(\theta, \varphi) d\omega \\ &= \frac{N l \Gamma}{V} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} F s_i s_j \Omega(\theta, \varphi) d\omega \end{aligned} \right\} \quad (4.39)$$

ここで σ_{ij} は応力テンソル、 N は n 分割直線の数、 l は n 分割直線の長さ、 Γ は力を伝達することのできる n 分割直線の分率 (有効要素率)、 V は集合体の体積である。 $\Omega(\theta, \varphi)$ は n 分割直線の配向角分布であるので $\Omega_{0n}(\theta, \varphi)$ と書くべきであるが、誤解を招かない限りにおいて今後

は添字を省略する。

n 分割直線が弾性要素 (バネ) で置き換えられるとき

$$F = E l \varepsilon_{kl} s_k s_l \quad (4.40)$$

となる。ここで E はバネ常数, ε_{mn} は歪テンソルである。

(4.40) を (4.39) へ代入すると

$$\sigma_{ij} = \frac{N l^2 \Gamma E}{V} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \varepsilon_{kl} s_i s_j s_k s_l \Omega(\theta, \varphi) d\omega \quad (4.41)$$

となる。

$$N l^2 \Gamma / V = K \quad (4.42)$$

とおいて

$$C_{ijkl} = K E \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} s_i s_j s_k s_l \Omega(\theta, \varphi) d\omega \quad (4.43)$$

とすると (4.41) は

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl} \varepsilon_{kl} \quad (4.44)$$

となり一般化フックの法則を表わしている。

4・1・4 応力および弾性常数のフーリエ変換による表現

繊維集合体の応力および歪は 2 次モーメントに、弾性常数およびコンプライアンス常数は 4 次モーメントに依存している。そこで 2 次の場合として応力, 4 次の場合として弾性常数を配向角分布のフーリエ変換の形式で表現する。

(4.39) において

$$N l \Gamma / V = U \quad (4.45)$$

とおくと

$$\sigma_{11} = U F \langle \sin^2 \theta \cos^2 \varphi \rangle$$

$$\sigma_{22} = U F \langle \sin^2 \theta \sin^2 \varphi \rangle$$

$$\sigma_{33} = U F \langle \cos^2 \theta \rangle$$

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{12} = \sigma_{21} &= U F \langle \sin^2 \theta \sin \varphi \cos \varphi \rangle \\ \sigma_{13} = \sigma_{31} &= U F \langle \sin \theta \cos \theta \cos \varphi \rangle \\ \sigma_{23} = \sigma_{32} &= U F \langle \sin \theta \cos \theta \sin \varphi \rangle \end{aligned} \right\} \quad (4.46)$$

となる。

$$\left. \begin{aligned} \cos^2 \theta &= \frac{1}{2} (\cos 2\theta + 1) \\ \sin^2 \theta &= \frac{1}{2} (-\cos 2\theta + 1) \\ \sin \theta \cos \theta &= \frac{1}{2} \sin 2\theta \end{aligned} \right\} \quad (4.47)$$

の関係を(4.46)へ代入して(4.12)～(4.15)の形式で表現すると

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{11} &= \frac{UF}{4} \{ 1 + A(0,2) - A(2,0) - A(2,2) \} \\ \sigma_{22} &= \frac{UF}{4} \{ 1 - A(0,2) - A(2,0) + A(2,2) \} \\ \sigma_{33} &= \frac{UF}{2} \{ 1 + A(2,0) \} \\ \sigma_{12} &= \frac{UF}{4} \{ B(0,2) - B(2,2) \} \\ \sigma_{13} &= \frac{UF}{2} C(2,1) \\ \sigma_{23} &= \frac{UF}{2} D(2,1) \end{aligned} \right\} \quad (4.48)$$

となる。

つぎに弾性常数については(4.43)を展開すると

$$\left. \begin{aligned} C_{1111} &= KE \langle \sin^4 \theta \cos^4 \varphi \rangle \\ C_{2222} &= KE \langle \sin^4 \theta \sin^4 \varphi \rangle \\ C_{3333} &= KE \langle \cos^4 \theta \rangle \\ C_{1122} = C_{2211} = C_{1212} &= KE \langle \sin^4 \theta \cos^2 \varphi \sin^2 \varphi \rangle \end{aligned} \right\}$$

$$\begin{aligned}
C_{1133} &= C_{3311} = C_{3131} = KE \langle \sin^2 \theta \cos^2 \theta \cos^2 \varphi \rangle \\
C_{2233} &= C_{3322} = C_{2323} = KE \langle \sin^2 \theta \cos^2 \theta \sin^2 \varphi \rangle \\
C_{1123} &= C_{2311} = C_{3112} = C_{1231} = KE \langle \sin^3 \theta \cos \theta \cos^3 \varphi \sin \varphi \rangle \\
C_{2231} &= C_{3122} = C_{2312} = C_{1223} = KE \langle \sin^3 \theta \cos \theta \sin^2 \varphi \cos \varphi \rangle \\
C_{3312} &= C_{1233} = C_{2331} = C_{3123} = KE \langle \sin^2 \theta \cos^2 \theta \sin \varphi \cos \varphi \rangle \\
C_{1131} &= C_{3111} = KE \langle \sin^3 \theta \cos \theta \cos^3 \varphi \rangle \\
C_{1112} &= C_{1211} = KE \langle \sin^4 \theta \cos^3 \varphi \sin \varphi \rangle \\
C_{2223} &= C_{2322} = KE \langle \sin^3 \theta \cos \theta \sin^3 \varphi \rangle \\
C_{2212} &= C_{1222} = KE \langle \sin^4 \theta \cos \varphi \sin^3 \varphi \rangle \\
C_{3323} &= C_{2333} = KE \langle \sin \theta \cos^3 \theta \sin \varphi \rangle \\
C_{3331} &= C_{3133} = KE \langle \sin \theta \cos^3 \theta \cos \varphi \rangle
\end{aligned}$$

(4.49)

となる。

$$\begin{aligned}
\cos^3 \theta &= \frac{1}{4} (\cos 3 \theta + 3 \cos \theta) \\
\sin^3 \theta &= \frac{1}{4} (-\sin 3 \theta + 3 \sin \theta) \\
\cos^2 \theta \sin \theta &= \frac{1}{4} (\sin 3 \theta + \sin \theta) \\
\sin^2 \theta \cos \theta &= \frac{1}{4} (-\cos 3 \theta + \cos \theta) \\
\cos^4 \theta &= \frac{1}{8} (3 + 4 \cos 2 \theta + \cos 4 \theta) \\
\sin^4 \theta &= \frac{1}{8} (3 - 4 \cos 2 \theta + \cos 4 \theta) \\
\cos^2 \theta \sin^2 \theta &= \frac{1}{8} (1 - \cos 4 \theta) \\
\cos^3 \theta \sin \theta &= \frac{1}{8} (2 \sin 2 \theta + \sin 4 \theta) \\
\cos \theta \sin^3 \theta &= \frac{1}{8} (2 \sin 2 \theta - \sin 4 \theta)
\end{aligned}$$

(4.50)

の関係を (4.49) へ代入して (4.12) ~ (4.15) の形式で表現すると

$$C_{1111} = \frac{KE}{64} \left[3 \{ 3 + 4A(0,2) + A(0,4) \} - 4 \{ 3A(2,0) - 4A(2,2) - A(2,4) \} \right. \\ \left. + \{ 3A(4,0) + 4A(4,2) + A(4,4) \} \right]$$

$$C_{2222} = \frac{KE}{64} \left[3 \{ 3 - 4A(0,2) + A(0,4) \} - 4 \{ 3A(2,0) - 4A(2,2) - A(2,4) \} \right. \\ \left. + \{ 3A(4,0) - 4A(4,2) + A(4,4) \} \right]$$

$$C_{3333} = \frac{KE}{8} \left[3 + 4A(2,0) + A(4,0) \right]$$

$$C_{1122} = \frac{KE}{64} \left[\{ 3 - 4A(2,0) + A(4,0) \} - \{ 3A(0,4) - 4A(2,4) + A(4,4) \} \right]$$

$$C_{1133} = \frac{KE}{64} \left[\{ 1 + A(0,2) \} - \{ A(4,0) + A(4,2) \} \right]$$

$$C_{2233} = \frac{KE}{64} \left[\{ 1 - A(0,2) \} - \{ A(4,0) - A(4,2) \} \right]$$

$$C_{1123} = \frac{KE}{24} \left[2 \{ D(2,1) + D(2,3) \} - \{ D(4,1) + D(4,3) \} \right]$$

$$C_{2231} = \frac{KE}{24} \left[\{ -C(2,3) + 2C(2,4) \} + \{ C(4,3) - C(4,4) \} \right]$$

$$C_{3312} = \frac{KE}{16} \left[B(0,2) - B(4,2) \right]$$

$$C_{1131} = \frac{KE}{32} \left[2 \{ C(2,3) + 3C(2,1) \} - \{ 3C(4,1) + C(4,3) \} \right]$$

$$C_{2223} = \frac{KE}{32} \left[2 \{ -D(2,3) + 3D(2,1) \} + \{ 3D(4,1) - D(4,3) \} \right]$$

$$C_{1112} = \frac{KE}{64} \left[2 \{ 3B(0,2) - 4B(2,2) + B(4,2) \} \right. \\ \left. + \{ 3B(0,4) - 4B(2,4) + B(4,4) \} \right]$$

$$C_{2212} = \frac{KE}{64} \left[2 \{ 3B(0,2) - 4B(2,2) + B(4,2) \} \right. \\ \left. - \{ 3B(0,4) - 4B(2,4) + B(4,4) \} \right]$$

$$C_{3323} = \frac{KE}{8} [2D(2,4) + D(4,1)]$$

$$C_{3331} = \frac{KE}{8} [2C(2,4) + C(4,1)] \quad (4.51)$$

となる。

$$\left. \begin{aligned} \cos^{2n} \theta &= \frac{1}{2^{2n-1}} \left[\sum_{r=0}^{n-1} \binom{2n}{r} \cos(2n-2r)\theta + \frac{1}{2} \binom{2n}{n} \right] \\ \cos^{2n+1} \theta &= \frac{1}{2^{2n}} \sum_{r=0}^n \binom{2n+1}{r} \cos(2n-2r+1)\theta \\ \sin^{2n} \theta &= \frac{1}{2^{2n-1}} \left[\sum_{r=0}^{n-1} (-1)^{n+r} \binom{2n}{r} \cos(2n-2r)\theta + \frac{1}{2} \binom{2n}{n} \right] \\ \sin^{2n+1} \theta &= \frac{1}{2^{2n}} \sum_{r=0}^n (-1)^{n+r} \binom{2n+1}{r} \sin(2n-2r+1)\theta \end{aligned} \right\} \quad (4.52)$$

の関係より配向角分布の n 次モーメントについても 2 次, 4 次の場合と同様の方法で (4.12) ~ (4.15) の形式で表現できる。

4・1・5 繊維集合体の対称性と応力および弾性常数

繊維集合体の弾性常数は (4.43) で与えられるが, 配向角分布に対称性がない一般的異方性の場合, (4.49) のように C_{ijmn} の添字のすべての置換について等しいので独立な弾性常数の数は 15 となる。

配向角分布が X 軸に関して 2 箇の対称軸を有する場合

$$\mathcal{Q}(\theta, \varphi) = \mathcal{Q}(\theta - \pi, \varphi) \quad (4.53)$$

で与えられる。

このとき $\sin \omega_1 \theta$ を含む積分はゼロとなるので (4.14) (4.15) より

$$C(\omega_1, \omega_2) = D(\omega_1, \omega_2) = 0 \quad (4.54)$$

すると応力および弾性常数は (4.48), (4.51) より

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{13} &= \sigma_{12} = 0 \\ C_{1123} &= C_{2231} = C_{1131} = C_{2223} = C_{3323} = C_{3331} = 0 \end{aligned} \right\} \quad (4.55)$$

この場合、独立な弾性常数の数は9となる。

直交異方性の場合、配向角分布は

$$\Omega(\theta, \varphi) = \Omega(\theta - \pi, \varphi - \pi) \quad (4.56)$$

で与えられる。

このとき $\sin \omega_1 \theta$, $\sin \omega_2 \varphi$ を含む積分はゼロとなるので (4.13) ~ (4.15) より

$$B(\omega_1, \omega_2) = C(\omega_1, \omega_2) = D(\omega_1, \omega_2) = 0 \quad (4.57)$$

となり、(4.55)の他にも

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{12} &= 0 \\ C_{3312} &= C_{1112} = C_{2212} = 0 \end{aligned} \right\} \quad (4.57)$$

となり、独立な弾性常数の数は6となる。

直交異方性の場合、新しい関数として

$$\left. \begin{aligned} X_1 &= \frac{1}{2} (\sigma_{11} + \sigma_{22}) = \frac{UF}{4} \{1 - A(2, 0)\} \\ X_2 &= \frac{1}{2} (\sigma_{11} - \sigma_{22}) = \frac{UF}{4} \{A(0, 2) - A(2, 2)\} \\ X_3 &= \sigma_{33} = \frac{UF}{2} \{1 + A(2, 0)\} \end{aligned} \right\} \quad (4.58)$$

を導入すると応力 (4.48) は

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{11} &= X_1 + X_2 \\ \sigma_{22} &= X_1 - X_2 \\ \sigma_{33} &= X_3 \end{aligned} \right\} \quad (4.59)$$

となる。ここで X_1, X_3 は (4.58) において $A(\omega_1, \omega_2)$ の $\omega_2 = 0$ であるため φ に関する座標変換について不変量であることがわかる。

弾性常数についても同様に新しい関数として

$$\begin{aligned}
U_1 &= \frac{1}{8} (C_{1111} + C_{2222} + 2C_{1122}) = \frac{KE}{64} \{3 - 4A(2,0) + A(4,0)\} \\
U_2 &= \frac{1}{2} (C_{1133} + C_{2233}) = \frac{KE}{64} \{1 - A(4,0)\} \\
U_3 &= C_{3333} = \frac{KE}{8} \{3 + 4A(2,0) + A(4,0)\} \\
U_4 &= C_{1111} + C_{2222} + C_{3333} + 2(C_{1122} + C_{2232} + C_{1133}) = KE \\
U_5 &= \frac{1}{2} (C_{1111} - C_{2222}) = \frac{KE}{64} \{3A(0,2) - 4A(2,2) + A(4,2)\} \\
U_6 &= \frac{1}{8} (C_{1111} + C_{2222} - 6C_{1122}) = \frac{KE}{64} \{3A(0,4) - 4A(2,4) + A(4,4)\} \\
U_7 &= \frac{1}{2} (C_{1133} - C_{2233}) = \frac{KE}{64} \{A(0,2) - A(4,2)\}
\end{aligned}
\tag{4.60}$$

を導入すると弾性常数(4.51)は

$$\begin{aligned}
C_{1111} &= 3U_1 + 4U_5 + U_6 \\
C_{2222} &= 3U_1 - 4U_5 + U_6 \\
C_{3333} &= U_3 \\
C_{1122} &= U_1 - U_5 \\
C_{1133} &= U_2 + U_7 \\
C_{2233} &= U_2 - U_7
\end{aligned}
\tag{4.61}$$

となる。ここで U_1, U_2, U_3 は(4.60)において $A(\omega_1, \omega_2)$ の $\omega_2 = 0$ であるため、 φ に関する座標変換について不変量であることがわかる。

横断等方性の場合、配向角分布は θ と φ が独立に与えられるので

$$\Omega(\theta, \varphi) = Q(\theta) R(\varphi)
\tag{4.62}$$

とおける。 $Q(\theta), R(\varphi)$ は偶関数であるので(4.62)のフーリエ変換は

$$F(\omega_1, \omega_2) = A_\theta(\omega_1) A_\varphi(\omega_2)
\tag{4.63}$$

となる。ここで

$$\left. \begin{aligned} A_{\theta}(\omega_1) &= \int_{-\infty}^{\infty} Q(\theta) e^{-i\omega_1\theta} \sin \theta d\theta \\ A_{\varphi}(\omega_2) &= \int_{-\infty}^{\infty} R(\varphi) e^{-i\omega_2\varphi} d\varphi \end{aligned} \right\} \quad (4.64)$$

である。

横断等方性の場合 $R(\varphi)$ は一様分布であるので

$$A_{\varphi}(\omega_2) = \sin T \omega_2 / T \omega_2 \quad (4.65)$$

$T = \pi/2$ とおけるので

$$\left. \begin{aligned} A_{\varphi}(0) &= 1 \\ A_{\varphi}(2) &= A_{\varphi}(4) = 0 \end{aligned} \right\} \quad (4.66)$$

このとき (4.48), (4.51) においてゼロでない応力および弾性常数は

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{11} = \sigma_{22} &= \frac{UF}{4} \{1 - A_{\theta}(2)\} \\ \sigma_{33} &= \frac{UF}{2} \{1 + A_{\theta}(2)\} \end{aligned} \right\} \quad (4.67)$$

$$\left. \begin{aligned} C_{1111} = C_{2222} = 3C_{1122} &= \frac{3KE}{64} \{3 - 4A_{\theta}(2) + A_{\theta}(4)\} \\ C_{3333} &= \frac{KE}{8} \{3 + 4A_{\theta}(2) + A_{\theta}(4)\} \\ C_{1133} = C_{2233} &= \frac{KE}{16} \{1 - A_{\theta}(4)\} \end{aligned} \right\} \quad (4.68)$$

となり、横断等方性の独立な弾性常数の数は3となる。

横断等方性の特別な場合として一方向に完全配列した場合は

$$Q(\theta) = \delta(\theta) \quad (4.69)$$

とおける。このとき

$$A_{\theta}(2) = A_{\theta}(4) = 1$$

であるので (4.67), (4.68) の応力および弾性常数は

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{33} &= UF \\ C_{3333} &= KE \end{aligned} \right\} \quad (4.71)$$

となり、その他はすべてゼロとなる。

いま一つ、横断等方性の特別な場合として等方性を考えると

$$Q(\theta)R(\varphi) = 1/2\pi \quad (4.72)$$

で与えられるので

$$\left. \begin{aligned} A_\theta(2) &= -1/3 \\ A_\theta(4) &= -1/15 \end{aligned} \right\} \quad (4.73)$$

となる。このとき(4.67), (4.68)より応力および弾性常数は

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{11} = \sigma_{22} = \sigma_{33} &= UF/3 \\ C_{1111} = C_{2222} = C_{3333} = 3C_{1122} = 3C_{2233} = 3C_{1133} &= KE/5 \end{aligned} \right\} \quad (4.74)$$

となり、独立な弾性常数の数は1となる。

つぎに繊維集合体が面配向性を有する場合を考える。このとき配向角分布は

$$\mathcal{Q}(\theta, \varphi) = \delta(\theta - \pi/2)R(\varphi) \quad (4.75)$$

とおける。(4.12)~(4.15)の積分を(4.64)のように θ と φ が独立の場合に変形すると

$$\left. \begin{aligned} A(\omega_1, \omega_2) &= A_\theta(\omega_1)A_\varphi(\omega_2) \\ B(\omega_1, \omega_2) &= B_\theta(\omega_1)B_\varphi(\omega_2) \\ C(\omega_1, \omega_2) &= C_\theta(\omega_1)C_\varphi(\omega_2) \\ D(\omega_1, \omega_2) &= D_\theta(\omega_1)D_\varphi(\omega_2) \end{aligned} \right\} \quad (4.76)$$

となる。(4.75)を(4.76)へ代入すると

$$\left. \begin{aligned} A_\theta(0) = A_\theta(4) = B_\theta(0) = B_\theta(4) &= 1 \\ A_\theta(2) = B_\theta(2) &= -1 \\ C_\theta(2) = C_\theta(4) = D_\theta(2) = D_\theta(4) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (4.77)$$

(4.48), (4.51)を(4.76)のように書きかえて(4.77)を代入すると面配向を有する場合のゼロでない応力および弾性常数は

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{11} &= \frac{UF}{2} \{ 1 + A_{\varphi}(2) \} \\ \sigma_{22} &= \frac{UF}{2} \{ 1 - A_{\varphi}(2) \} \\ \sigma_{12} &= \frac{UF}{2} B_{\varphi}(2) \end{aligned} \right\} \quad (4.78)$$

$$\left. \begin{aligned} C_{1111} &= \frac{KE}{8} \{ 3 + 4 A_{\varphi}(2) + A_{\varphi}(4) \} \\ C_{2222} &= \frac{KE}{8} \{ 3 - 4 A_{\varphi}(2) + A_{\varphi}(4) \} \\ C_{1122} &= \frac{KE}{8} \{ 1 - A_{\varphi}(4) \} \\ C_{1112} &= \frac{KE}{8} \{ 2 B_{\varphi}(2) + B_{\varphi}(4) \} \\ C_{2212} &= \frac{KE}{8} \{ 2 B_{\varphi}(2) - B_{\varphi}(4) \} \end{aligned} \right\} \quad (4.79)$$

となり、独立な弾性常数の数は5となる。

繊維集合体が面配向かつ直交異方性を有する場合、配向角分布は

$$R(\varphi) = R(\varphi - \pi) \quad (4.80)$$

で与えられる。このとき $\sin \omega_2 \varphi$ を含む積分はゼロとなるので

$$B_{\varphi}(\omega_2) = 0 \quad (4.81)$$

(4.81)を(4.78), (4.79)へ代入すると

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{12} &= 0 \\ C_{1112} &= C_{2212} = 0 \end{aligned} \right\} \quad (4.82)$$

となり独立な弾性常数の数は3となる。

つぎに面配向かつ等方性の場合には

$$R(\varphi) = 1/\pi \quad (4.83)$$

で与えられるので

$$A_\varphi(2) = A_\varphi(4) = 0 \quad (4.84)$$

これより(4.78), (4.79)の応力および弾性常数は

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{11} = \sigma_{22} &= UF/2 \\ C_{1111} = C_{2222} &= 3C_{1122} = KE/8 \end{aligned} \right\} \quad (4.85)$$

となり、独立な弾性常数の数は1となる。

以上、繊維集合体モデルが種々の対称性を有する場合を検討してきたが、独立な弾性常数の数は金属などの通常の固体の数に比べて小さくなっている。その比較を表4.1に示す。

表4.1 繊維集合体モデルの対称性と独立な弾性常数の数

次元	材料の対称性	ゼロでない弾性常数の数	通常の固体における独立な弾性常数の数	繊維集合体モデルにおける独立な弾性常数の数
3	一般的異方性	3 6	2 1	1 5
	XY面に関して弾性対称性を有する場合	2 0	1 3	9
	直交異方性	1 2	9	6
	横断等方性	1 2	5	3
	等方性	1 2	2	1
2	一般的異方性	9	6	5
	直交異方性	5	4	3
	等方性	5	2	1

4・1・6 応力および弾性常数の座標変換

応力、弾性常数の座標変換は一般的には変換行列によって表現される。本論文では応力、弾性常数をフーリエ変換で表現しているため、その座標変換形をフーリエ変換の位相角の推移として表わす。

配向角分布 $\Omega(\theta, \varphi)$ に対して座標を $\bar{\theta}, \bar{\varphi}$ 回転した場合の分布を $\bar{\Omega}(\theta, \varphi)$ とすると

$$\left. \begin{aligned} \bar{\Omega}(\theta, \varphi) &= \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \Omega(\theta-\theta', \varphi-\varphi') \delta(\theta'-\bar{\theta}) \delta(\varphi'-\bar{\varphi}) d\omega' \\ &= \Omega * \delta(\theta-\bar{\theta}) \delta(\varphi-\bar{\varphi}) \end{aligned} \right\} \quad (4.86)$$

で与えられる。

両辺のフーリエ変換は

$$\bar{F}(\omega_1, \omega_2) = \bar{F}(\omega_1, \omega_2) e^{-i\bar{\theta}\omega_1} e^{-i\bar{\varphi}\omega_2} \quad (4.87)$$

(4.87)を(4.30)のようなマトリックス表示で表わすと

$$\begin{pmatrix} \bar{A} \\ \bar{B} \\ \bar{C} \\ \bar{D} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & -B & -C & D \\ B & A & -D & -C \\ C & -D & A & -B \\ D & C & B & A \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \omega_1 \bar{\theta} \cos \omega_2 \bar{\varphi} \\ \cos \omega_1 \bar{\theta} \sin \omega_2 \bar{\varphi} \\ \sin \omega_1 \bar{\theta} \cos \omega_2 \bar{\varphi} \\ \sin \omega_1 \bar{\theta} \sin \omega_2 \bar{\varphi} \end{pmatrix} \quad (4.88)$$

(4.88)の \bar{A} , \bar{B} , \bar{C} , \bar{D} を(4.48), (4.51)へ代入すると一般的異方性を有する場合の座標変換形を得ることができる。

代表的な場合として3次元直交異方性にたいして角度を $\bar{\varphi}$ 回転したときの応力, 弾性常数を考える。このときは $\cos \omega_1 \bar{\theta} = 1$, $\sin \omega_2 \bar{\theta} = 0$, $B=C=D=0$ であるので(4.88)は

$$\begin{pmatrix} \bar{A} \\ \bar{B} \\ \bar{C} \\ \bar{D} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & 0 & 0 & 0 \\ 0 & A & 0 & 0 \\ 0 & 0 & A & 0 \\ 0 & 0 & 0 & A \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \omega_2 \bar{\varphi} \\ \sin \omega_2 \bar{\varphi} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (4.89)$$

となる。これより

$$\left. \begin{aligned} \bar{A} &= A \cos \omega_2 \bar{\varphi} \\ \bar{B} &= A \sin \omega_2 \bar{\varphi} \\ \bar{C} &= 0 \\ \bar{D} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (4.90)$$

(4.90)を(4.48)へ代入すると応力の座標変換形 $\bar{\sigma}_{ij}$ は

$$\bar{\sigma}_{11} = \frac{UF}{4} \left[\{1 - A(2, 0)\} + \{A(0, 2) - A(2, 2)\} \cos 2\bar{\varphi} \right]$$

$$\left. \begin{aligned} \bar{\sigma}_{22} &= \frac{UF}{4} \left[\{1 - A(2, 0)\} - \{A(0, 2) - A(2, 2)\} \cos 2\bar{\varphi} \right] \\ \bar{\sigma}_{33} &= \frac{UF}{2} \left[1 + A(2, 0) \right] \\ \bar{\sigma}_{12} &= \frac{UF}{4} \left[A(0, 2) - A(2, 2) \right] \sin 2\bar{\varphi} \end{aligned} \right\} (4.91)$$

(4.91)を(4.58)で表わすと

$$\left. \begin{aligned} \bar{\sigma}_{11} &= X_1 + X_2 \cos 2\bar{\varphi} \\ \bar{\sigma}_{22} &= X_1 - X_2 \cos 2\bar{\varphi} \\ \bar{\sigma}_{33} &= X_3 \\ \bar{\sigma}_{12} &= X_2 \sin 2\bar{\varphi} \end{aligned} \right\} (4.92)$$

となる。

同様に弾性常数についても(4.90)の \bar{A} , \bar{B} , \bar{C} , \bar{D} を(4.51)へ代入し(4.61)で表現すると座標変換形は

$$\left. \begin{aligned} \bar{C}_{1111} &= 3U_1 + 4U_5 \cos 2\bar{\varphi} + U_6 \cos 4\bar{\varphi} \\ \bar{C}_{2222} &= 3U_1 - 4U_5 \cos 2\bar{\varphi} + U_6 \cos 4\bar{\varphi} \\ \bar{C}_{3333} &= U_3 \\ \bar{C}_{1122} &= U_1 - U_5 \cos 2\bar{\varphi} \\ \bar{C}_{1133} &= U_2 + U_7 \cos 2\bar{\varphi} \\ \bar{C}_{2233} &= U_2 - U_7 \cos 2\bar{\varphi} \\ \bar{C}_{3312} &= U_7 \sin 2\bar{\varphi} \\ \bar{C}_{1112} &= 2U_5 \sin 2\bar{\varphi} + U_6 \sin 4\bar{\varphi} \\ \bar{C}_{2212} &= 2U_5 \sin 2\bar{\varphi} - U_6 \sin 4\bar{\varphi} \end{aligned} \right\} (4.93)$$

となる。

弾性常数の座標変換に関して同様の表現がTai と Pagano⁽²⁵⁾によって与えられているが、本論文で展開してきたように(4.93)の表現は、配向角分布関数の4次モーメントをフーリエ変換で表わしたときの座標変換形式であることがわかる。

つぎに直交異方性で角度を $\bar{\theta}$ だけ座標回転行なったときの応力，弾性常数を求める。この場合は (4.88) において $\cos \omega_2 \bar{\varphi} = 1$, $\sin \omega_2 \bar{\varphi} = 0$, $B=C=D=0$ とおけるので

$$\left. \begin{aligned} \bar{A} &= A \cos \omega_1 \bar{\theta} \\ \bar{B} &= 0 \\ \bar{C} &= A \sin \omega_1 \bar{\theta} \\ \bar{D} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (4.94)$$

となる。

(4.94) を (4.48) へ代入すると応力の座標変換形 $\bar{\sigma}_{ij}$ は

$$\left. \begin{aligned} \bar{\sigma}_{11} &= \frac{UF}{4} \left[\{1+A(0,2)\} - \{A(2,0)+A(2,2)\} \cos 2\bar{\theta} \right] \\ \bar{\sigma}_{22} &= \frac{UF}{4} \left[\{1-A(0,2)\} - \{A(2,0)-A(2,2)\} \cos 2\bar{\theta} \right] \\ \bar{\sigma}_{33} &= \frac{UF}{2} \left[1+A(2,0) \cos 2\bar{\theta} \right] \\ \bar{\sigma}_{23} &= \frac{UF}{2} A(2,1) \sin 2\bar{\theta} \end{aligned} \right\} \quad (4.95)$$

となる。

同様に弾性常数についても (4.94) を (4.51) へ代入すると

$$\begin{aligned} \bar{C}_{1111} &= \frac{KE}{64} \left[3\{3+4A(0,2)+A(0,4)\} - 4\{3A(2,0)+4A(2,2)+A(2,4)\} \cos 2\bar{\theta} \right. \\ &\quad \left. + \{3A(4,0)-4A(4,2)+A(4,4)\} \cos 4\bar{\theta} \right] \\ \bar{C}_{2222} &= \frac{KE}{64} \left[3\{3-4A(0,2)+A(0,4)\} - 4\{3A(2,0)-4A(2,2)-A(2,4)\} \cos 2\bar{\theta} \right. \\ &\quad \left. + \{3A(4,0)-4A(4,2)+A(4,4)\} \cos 4\bar{\theta} \right] \\ \bar{C}_{3333} &= \frac{KE}{8} \left[3+4A(2,0) \cos 2\bar{\theta} + A(4,0) \cos 4\bar{\theta} \right] \\ \bar{C}_{1122} &= \frac{KE}{64} \left[3\{1-A(0,4)\} - 4\{A(2,0)+A(2,4)\} \cos 2\bar{\theta} \right. \\ &\quad \left. + \{A(4,0)-A(4,4)\} \cos 4\bar{\theta} \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \bar{C}_{1133} &= \frac{KE}{64} \left[\{1+A(0,2)\} - \{A(4,0)+A(4,2)\} \cos 4\bar{\theta} \right] \\
 \bar{C}_{2233} &= \frac{KE}{64} \left[\{1-A(0,2)\} - \{A(4,0)-A(4,2)\} \cos 4\bar{\theta} \right] \\
 \bar{C}_{2231} &= \frac{KE}{24} \left[\{-A(2,3)+2A(2,4)\} \sin 2\bar{\theta} + \{A(4,3)-A(4,4)\} \sin 4\bar{\theta} \right] \\
 \bar{C}_{1131} &= \frac{KE}{24} \left[2\{A(2,3)+3A(2,4)\} \sin 2\bar{\theta} - \{3A(4,1)+A(4,3)\} \sin 4\bar{\theta} \right] \\
 \bar{C}_{3331} &= \frac{KE}{8} \left[2A(2,4) \sin 2\bar{\theta} + A(4,1) \sin 4\bar{\theta} \right]
 \end{aligned}$$

(4.96)

となる。

(4.95), (4.96)において, 集合体が横断等方性を有する場合, 配向角分布関数のフーリエ変換は(4.64)のように $A_\theta(\omega_1)$, $A_\varphi(\omega_2)$ と分離形で与えられる。このうち $A_\varphi(\omega_2)$ は(4.65)であるので

$$\left. \begin{aligned}
 A_\varphi(0) &= 1 \\
 A_\varphi(1) &= 2/\pi \\
 A_\varphi(2) &= 0 \\
 A_\varphi(3) &= -2/3\pi \\
 A_\varphi(4) &= 0
 \end{aligned} \right\} \quad (4.97)$$

となる。(4.97)を(4.95)へ代入すると横断等方性の応力の座標変換形は

$$\left. \begin{aligned}
 \bar{\sigma}_{11} = \bar{\sigma}_{22} &= \frac{UF}{4} \left[1 - A_\theta(2) \cos 2\bar{\theta} \right] \\
 \bar{\sigma}_{33} &= \frac{UF}{4} \left[1 + A_\theta(2) \cos 2\bar{\theta} \right] \\
 \bar{\sigma}_{23} &= \frac{UF}{\pi} A_\theta(2) \sin 2\bar{\theta}
 \end{aligned} \right\} \quad (4.98)$$

同様に(4.97)を(4.96)へ代入すると弾性常数の座標変換形は

$$\left. \begin{aligned}
 \bar{C}_{1111} = \bar{C}_{2222} &= \frac{3KE}{64} \left[3 - 4A_\theta(2) \cos 2\bar{\theta} + A_\theta(4) \cos 4\bar{\theta} \right] \\
 \bar{C}_{3333} &= \frac{KE}{8} \left[3 + 4A_\theta(2) \cos 2\bar{\theta} + A_\theta(4) \cos 4\bar{\theta} \right] \\
 \bar{C}_{1122} &= \frac{KE}{64} \left[3 - 4A_\theta(2) \cos 2\bar{\theta} + A_\theta(4) \cos 4\bar{\theta} \right] \\
 \bar{C}_{1133} = \bar{C}_{2233} &= \frac{KE}{64} \left[1 - A_\theta(4) \cos 4\bar{\theta} \right] \\
 \bar{C}_{2231} &= \frac{KE}{36\pi} \left[A_\theta(2) \sin 2\bar{\theta} - A_\theta(4) \sin 4\bar{\theta} \right] \\
 \bar{C}_{1131} &= -\frac{KE}{18\pi} \left[A_\theta(2) \sin 2\bar{\theta} + 4A_\theta(4) \sin 4\bar{\theta} \right] \\
 \bar{C}_{3331} &= \frac{KE}{4\pi} A_\theta(4) \sin 4\bar{\theta}
 \end{aligned} \right\} \quad (4.99)$$

となる。

つぎに2次元直交異方性の場合について考える。このとき(4.88)は

$$\left. \begin{aligned}
 \left[\begin{array}{c} \bar{A}_\varphi(\omega_2) \\ \bar{B}_\varphi(\omega_2) \end{array} \right] &= \left[\begin{array}{cc} A_\varphi(\omega_2) & 0 \\ 0 & A_\varphi(\omega_2) \end{array} \right] \left[\begin{array}{c} \cos \bar{\varphi} \\ \sin \bar{\varphi} \end{array} \right]
 \end{aligned} \right\} \quad (4.100)$$

で与えられるので

$$\left. \begin{aligned}
 \bar{A}_\varphi(\omega_2) &= A_\varphi(\omega_2) \cos \omega_2 \bar{\varphi} \\
 \bar{B}_\varphi(\omega_2) &= A_\varphi(\omega_2) \sin \omega_2 \bar{\varphi}
 \end{aligned} \right\} \quad (4.101)$$

(4.101)を(4.78)へ代入すると応力の座標変換形は

$$\left. \begin{aligned}
 \bar{\sigma}_{11} &= \frac{UF}{2} \left[1 + A_\varphi(2) \cos 2\bar{\varphi} \right] \\
 \bar{\sigma}_{22} &= \frac{UF}{2} \left[1 - A_\varphi(2) \cos 2\bar{\varphi} \right] \\
 \bar{\sigma}_{12} &= \frac{UF}{2} A_\varphi(2) \sin 2\bar{\varphi}
 \end{aligned} \right\} \quad (4.102)$$

同様に(4.101)を(4.79)へ代入すると弾性常数の座標変換形はつぎのようになる。

$$\left. \begin{aligned}
 \bar{C}_{1111} &= \frac{KE}{8} \left[3 + 4A_{\varphi}(2) \cos 2\bar{\varphi} + A_{\varphi}(4) \cos 4\bar{\varphi} \right] \\
 \bar{C}_{2222} &= \frac{KE}{8} \left[3 - 4A_{\varphi}(2) \cos 2\bar{\varphi} + A_{\varphi}(4) \cos 4\bar{\varphi} \right] \\
 \bar{C}_{1122} &= \frac{KE}{8} \left[2A_{\varphi}(2) \sin 2\bar{\varphi} + A_{\varphi}(4) \sin 4\bar{\varphi} \right] \\
 \bar{C}_{1112} &= \frac{KE}{8} \left[2A_{\varphi}(2) \sin 2\bar{\varphi} + A_{\varphi}(4) \sin 4\bar{\varphi} \right] \\
 \bar{C}_{2212} &= \frac{KE}{8} \left[2A_{\varphi}(2) \sin 2\bar{\varphi} - A_{\varphi}(4) \sin 4\bar{\varphi} \right]
 \end{aligned} \right\} \quad (4.103)$$

4・1・7 配向係数による応力および弾性常数の表現

3次元横断等方性および2次元直交異方性集合体の応力，弾性定数は $A_{\theta}(2)$ ， $A_{\theta}(4)$ ， $A_{\theta}(2)$ ， $A_{\varphi}(4)$ で表わされる。本節では，それらが配向係数によって表現できることを示す。

Hermans⁽²⁶⁾らは横断等方性高分子固体に関してつぎのような配向係数を定義した。

$$f = \frac{1}{2} \left[3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 \theta \Omega(\theta) \sin \theta d\theta - 1 \right] \quad (4.104)$$

$$g = \frac{1}{4} \left[5 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 \theta \Omega(\theta) \sin \theta d\theta - 1 \right] \quad (4.105)$$

(4.47)，(4.50)を(4.104)，(4.105)へ代入して整理すると

$$A_{\theta}(2) = \frac{1}{3} (4f - 1) \quad (4.106)$$

$$A_{\theta}(4) = \frac{1}{15} (96g - 80f - 1) \quad (4.107)$$

となる。

(4.106)を(4.67)へ代入すると応力は

$$\left. \begin{aligned}
 \sigma_{11} = \sigma_{22} &= \frac{UF}{3} (1 - f) \\
 \sigma_{33} &= \frac{UF}{3} (2f + 1)
 \end{aligned} \right\} \quad (4.108)$$

(4.107)を(4.68)へ代入すると弾性常数は

$$\left. \begin{aligned} C_{1111} &= C_{2222} = 3 C_{1122} = \frac{KE}{10} (2 - 5f + 3g) \\ C_{3333} &= \frac{KE}{5} (1 + 4g) \\ C_{1133} &= C_{2233} = \frac{KE}{15} (1 + 5f - 6g) \end{aligned} \right\} \quad (4.109)$$

となる。

Steinは2次元直交異方性高分子固体に関してつぎのような配向係数を定義した。

$$J = \int_0^{2\pi} \cos^2 \varphi R(\varphi) d\varphi - 1 \quad (4.110)$$

(4.110)を変形すると

$$J = \int_0^{2\pi} \cos 2\varphi R(\varphi) d\varphi = A_\varphi(2) \quad (4.111)$$

これよりJは $A_\varphi(2)$ そのものであることがわかる。それゆえ(4.78)の応力は

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{11} &= \frac{UF}{2} (1 + J) \\ \sigma_{22} &= \frac{UF}{2} (1 - J) \end{aligned} \right\} \quad (4.112)$$

として配向係数によって与えられる。

いま2次元配向角分布として一様分布，三角形分布，正規分布を考える。

一様分布 $U_T(\varphi)$ は

$$U_T(\varphi) = P_T(\varphi) / 2T \quad (4.113)$$

で与えられる。ここで $P_T(\varphi)$ は $-T \leq \varphi \leq T$ の矩形パルスである。

三角形分布 $H_T(\varphi)$ は

$$H_T(\varphi) = q_T(\varphi) / T \quad (4.114)$$

で与えられる。ここで $q_T(\varphi)$ は $-T \leq \varphi \leq T$ の三角形パルスである。

正規分布 $G_\sigma(\varphi)$ は

$$G_\sigma(\varphi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sigma} e^{-\frac{\varphi^2}{2\sigma^2}} \quad (4.115)$$

で与えられる。ここで σ は標準偏差である。

(4.113)～(4.115)のフーリエ変換はそれぞれ

$$\int_{-\infty}^{\infty} U_T(\varphi) e^{-i\omega\varphi} d\varphi = A_\varphi(\omega) = \sin \omega T / \omega T \quad (4.116)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} H_T(\varphi) e^{-i\omega\varphi} d\varphi = A_\varphi(\omega) = 4 \sin^2(\omega T/2) / T^2 \omega^2 \quad (4.117)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} G_\sigma(\varphi) e^{-i\omega\varphi} d\varphi = A_\varphi(\omega) = e^{-\omega^2 \sigma^2 / 2} \quad (4.118)$$

である。

(4.116)より一様分布の場合は

$$A_\varphi(2) = \sin 2T / 2T = J \quad (4.119)$$

$$A_\varphi(4) = \sin 4T / 4T = J \cos 2T \quad (4.120)$$

(4.119), (4.120)を(4.79)へ代入すると弾性常数は

$$\left. \begin{aligned} C_{1111} &= \frac{KE}{8} (3 + 4J + J \cos 2T) \\ C_{2222} &= \frac{KE}{8} (3 - 4J + J \cos 2T) \\ C_{1122} &= \frac{KE}{8} (1 - J \cos 2T) \end{aligned} \right\} \quad (4.121)$$

JとTの関係は(4.119)によって与えられているので(4.121)はJかTのみの関数として表現できる。

三角形分布の場合は(4.117)より

$$A_\varphi(2) = \sin^2 T / T^2 = J \quad (4.122)$$

$$A_\varphi(4) = \sin^2 2T / 4T^2 = J \cos^2 T \quad (4.123)$$

(4.122), (4.123)を(4.79)へ代入すると弾性常数は

$$\left. \begin{aligned} C_{1111} &= \frac{KE}{8} (3 + 4J + J \cos^2 T) \\ C_{2222} &= \frac{KE}{8} (3 - 4J + J \cos^2 T) \end{aligned} \right\} \quad (4.124)$$

$$C_{1122} = \frac{KE}{8} (1 - J \cos^2 T) \quad \Bigg\}$$

JとTの関係は(4.122)で与えられているので(4.124)はJかTのみの関数として表現できる。

正規分布の場合は(4.118)より

$$\left. \begin{aligned} A_{\varphi}(2) &= e^{-2\sigma^2} = J \\ A_{\varphi}(4) &= e^{-8\sigma^2} = J^3 \end{aligned} \right\} \quad (4.125)$$

(4.125)を(4.79)へ代入すると弾性常数は

$$\left. \begin{aligned} C_{1111} &= \frac{KE}{8} (3 + 4J + J^3) \\ C_{2222} &= \frac{KE}{8} (3 - 4J + J^3) \\ C_{1122} &= \frac{KE}{8} (1 - J^3) \end{aligned} \right\} \quad (4.126)$$

とJのみの関数となる。

5章 繊維集合体の構造と異方弾性特性

5.1 3次元直交異方性繊維集合体の異方弾性特性

5.1.1 3次元繊維集合体の単純変形による繊維配向

変形前の初期状態において、3次元一様ランダム配向を有する繊維集合体に回転を含まない純粋変形⁽²⁷⁾を考える。集合体内に直角座標を考え、変形前の座標を (X, Y, Z) 、変形後の座標を (x, y, z) とする。集合体が X, Y, Z 方向にそれぞれ $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ 倍の伸縮変形を受けたとすると、変形後の座標は

$$\left. \begin{aligned} x &= \lambda_1 X \\ y &= \lambda_2 Y \\ z &= \lambda_3 Z \end{aligned} \right\} \quad (5.1)$$

つぎに集合体内に半径 R_0 の球を考えると、球の方程式は

$$X^2 + Y^2 + Z^2 = R_0^2 \quad (5.2)$$

(5.1)式を変形して(5.2)式へ代入すると、変形後の楕円体の方程式は

$$\frac{x^2}{\lambda_1^2} + \frac{y^2}{\lambda_2^2} + \frac{z^2}{\lambda_3^2} = R_0^2 \quad (5.3)$$

ここで座標 (x, y, z) を極座標 (R, θ, φ) で表わすと

$$\left. \begin{aligned} x &= R \sin \theta \cos \varphi \\ y &= R \sin \theta \sin \varphi \\ z &= R \cos \theta \end{aligned} \right\} \quad (5.4)$$

(5.4)を(5.3)へ代入して R について解くと

$$R = \frac{\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 R_0}{\{ (\lambda_2 \lambda_3 s_1)^2 + (\lambda_3 \lambda_1 s_2)^2 + (\lambda_1 \lambda_2 s_3)^2 \}^{1/2}} \quad (5.5)$$

となる。ここで

$$\left. \begin{aligned} s_1 &= \sin \theta \cos \varphi \\ s_2 &= \sin \theta \sin \varphi \\ s_3 &= \cos \theta \end{aligned} \right\} \quad (5.6)$$

である。

(5.3)式で表わされる楕円体の微小体積要素 dv は

$$dv = R^2 \sin \theta \, dR \, d\theta \, d\varphi \quad (5.7)$$

微小角度 $d\theta$, $d\varphi$ に囲まれる四角錐状の微小体積要素を dv_* とすると、これは(5.7)式を R の方向に積分したものであるから

$$dv_* = \frac{1}{3} R^3 \sin \theta \, d\theta \, d\varphi \quad (5.8)$$

となる。

2次元繊維集合体の変形による繊維配向については2章第3節で述べたように、その配向角分布は(2.116)式で与えられている。そのとき、集合体変形によって繊維長は変化しないという仮定を設けている。3次元の場合も、2次元と同様に集合体変形によって繊維長は変化せず、繊維自身は平行移動と回転によりその位置が変化し、繊維の中心の座標が (X, Y, Z) から変形後の $(\lambda_1 X, \lambda_2 Y, \lambda_3 Z)$ に変化すると仮定する。

繊維の3次元配向角 (θ, φ) の確率密度関数を $\mathcal{Q}(\theta, \varphi)$ とすると、任意の1本の繊維が $\theta \sim \theta + d\theta$, $\varphi \sim \varphi + d\varphi$ の間に入る確率要素は $\mathcal{Q}(\theta, \varphi) \sin \theta \, d\theta \, d\varphi$ で与えられ、それは dv_* に比例するので

$$\mathcal{Q}(\theta, \varphi) \sin \theta \, d\theta \, d\varphi \propto \frac{1}{3} R^3 \sin \theta \, d\theta \, d\varphi \quad (5.9)$$

(5.9)式の R へ(5.5)式を代入すると結局 $\mathcal{Q}(\theta, \varphi)$ は

$$\mathcal{Q}(\theta, \varphi) = \frac{1}{3} \frac{(\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 R_0)^3}{\{(\lambda_2 \lambda_3 s_1)^2 + (\lambda_3 \lambda_1 s_2)^2 + (\lambda_1 \lambda_2 s_3)^2\}^{3/2}} \quad (5.10)$$

となる。変形前の球の体積 V_0 は

$$V_0 = \frac{4}{3} \pi R_0^3 \quad (5.11)$$

体積変化率が $\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3$ であるので変形後の体積 v は

$$v = \frac{4}{3} \pi R_0^3 \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \quad (5.12)$$

で与えられる。

(5.10)式を(5.12)式で規格化すると

$$\Omega(\theta, \varphi) = \frac{1}{4\pi} \frac{(\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3)^2}{\{(\lambda_2 \lambda_3 s_1)^2 + (\lambda_3 \lambda_1 s_2)^2 + (\lambda_1 \lambda_2 s_3)^2\}^{3/2}} \quad (5.13)$$

として配向角分布が表わされる。

(5.13)式は任意の $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ に対して

$$\int_0^{2\pi} \int_0^\pi \Omega(\theta, \varphi) \sin \theta \, d\theta \, d\varphi = 1 \quad (5.14)$$

をみたしているので確率密度関数としての条件をそなえている。

初期糸態において一様ランダム配向を有する繊維集合体にZ軸方向の単軸変形を考えると、対称性よりX、Y軸方向の伸張率 λ_1, λ_2 は等しくなる。この条件より(5.13)式は

$$\Omega(\theta, \varphi) = \frac{1}{4\pi} \frac{\lambda_1^4 \lambda_3^2}{(\lambda_1^2 \lambda_3^2 \sin^2 \theta + \lambda_1^4 \cos^2 \theta)^{3/2}} \quad (5.15)$$

となり横断等方性の配向角分布を与える。

大変形の場合のポアソン比について山本⁽²⁷⁾による定義を引用すると

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3^{-p_{31}} \quad (5.16)$$

で与えられる。ここで p_{31} はZ方向へ伸縮したときのX方向への伸縮の関係を与える定数で、後で出てくる微小変形の場合のポアソン比 $\nu_{ii jj}$ と区別するため記号的に p_{ij} を使用する。(5.16)式を(5.15)式へ代入すると

$$\Omega(\theta, \varphi) = \frac{1}{4\pi} \frac{\lambda_3^{(2-p_{31})}}{(\lambda_3^2 \sin^2 \theta + \lambda_3^{-2p_{31}} \cos^2 \theta)^{3/2}} \quad (5.17)$$

となる。とくに変形による体積変化がない場合は

$$\left. \begin{aligned} \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 &= \lambda_1^2 \lambda_3 \\ &= \lambda_3^{1-2p_{31}} \\ &= 1 \end{aligned} \right\} \quad (5.18)$$

とおけるので $p_{31} = p_{32} = \frac{1}{2}$ であり(5.17)式は

$$\Omega(\theta, \varphi) = \frac{1}{4\pi} \frac{\lambda_3^3}{(\lambda_3^3 \sin^2 \theta + \cos^2 \theta)^{3/2}} \quad (5.19)$$

となり, C. C. Hsiao⁽²⁰⁾ らによって高分子モデルについて求められた配向角分布と一致する。

純粋変形の一つで, Z方向の伸縮がなくX方向に伸びY方向に縮み, 体積変化ない変形を純ずりと呼ぶ。このとき, 変形後の座標は

$$\left. \begin{aligned} x &= \lambda_1 X \\ y &= \frac{1}{\lambda_1} Y \\ z &= Z \end{aligned} \right\} \quad (5.20)$$

となる。これより(5.13)式において

$$\left. \begin{aligned} \lambda_1 &= \lambda_1 \\ \lambda_2 &= 1/\lambda_1 \\ \lambda_3 &= 1 \end{aligned} \right\} \quad (5.21)$$

とおくと

$$\Omega(\theta, \varphi) = \frac{1}{4\pi} \frac{1}{\left(\frac{1}{\lambda_1} \sin^2 \theta \cos^2 \varphi + \lambda_1 \sin^2 \theta \sin^2 \varphi + \cos^2 \theta\right)^{3/2}} \quad (5.22)$$

となり, 直交異方性の配向角分布が与えられる。

一様ランダム配向繊維集合体内に一つの直方体を考える。直方体の一对の面の間隔を一定に保って, その一方を他に対して面内で動かすような変形を考えれば, 変形後の物体の形状は平行六面体になる。このような変形を純ずりと呼ぶ。変形後の座標は移動面の変位を r とすると

$$\left. \begin{aligned} x &= X + rY \\ y &= Y \\ z &= Z \end{aligned} \right\} \quad (5.23)$$

となる。この変形は一つの純ずりと, 一つの回転を重ね合わせたものとして表現できることが証明されている。その純ずりの主軸方向の伸張比は

$$\left. \begin{aligned} \lambda_1 &= 1 + r(r + \sqrt{r^2 + 4})/2 \\ \lambda_2 &= 1 + r(r - \sqrt{r^2 + 4})/2 \\ \lambda_3 &= 1 + \end{aligned} \right\} \quad (5.24)$$

である。

単純ずりは座標の回転を含むが, 回転角 x は

$$x = \tan^{-1}(r/2 + \sqrt{1 + r^2/4}) \quad (5.25)$$

であることが知られている。

(5.24) を (5.13) へ代入して (5.25) の回転を考慮すると単純ずり変形による配向角分布の変化は

$$\begin{aligned} \Omega(\theta, \varphi) &= \frac{1}{4\pi} \frac{1}{\{[1+\gamma(\gamma-\sqrt{\gamma^2+4})]\sin^2\theta\cos^2(\varphi-x)+[1+\gamma(\gamma+\sqrt{\gamma^2+4})]\sin^2\theta\sin^2(\varphi-x)+\cos^2\theta\}^{3/2}} \end{aligned} \quad (5.26)$$

となる。

5.1.2 走査平面に交わる繊維本数による配向角分布の推定

繊維集合体を任意の位置で方向が (θ_*, φ_*) であるような走査面 (走査面に垂直な直線の方が θ_*, φ_* で与えられる) で切断する。このとき単位面積内の切断繊維本数を $\nu(\theta_*, \varphi_*)$ とすると小森ら⁽²⁸⁾ によってそれは

$$\nu(\theta_*, \varphi_*) = Nl \int_0^{2\pi} \int_0^\pi |\sin\theta \sin\theta_* \cos(\varphi - \varphi_*) + \cos\theta \cos\theta_*| \Omega(\theta, \varphi) \sin\theta d\theta d\varphi \quad (5.27)$$

として与えられている。ここで N は単位体積内の繊維本数, l は繊維長である。

X, Y, Z 軸と垂直な走査面に交わる交点数を Nl で規格化したものはそれぞれ

$$\left. \begin{aligned} \nu(\pi/2, 0) / Nl &= \int_0^{2\pi} \int_0^\pi |\sin\theta \cos\varphi| \Omega(\theta, \varphi) \sin\theta d\theta d\varphi \\ \nu(\pi/2, \pi/2) / Nl &= \int_0^{2\pi} \int_0^\pi |\sin\theta \sin\varphi| \Omega(\theta, \varphi) \sin\theta d\theta d\varphi \\ \nu(0, 0) / Nl &= \int_0^{2\pi} \int_0^\pi |\cos\theta| \Omega(\theta, \varphi) \sin\theta d\theta d\varphi \end{aligned} \right\} \quad (5.28)$$

となる。

配向角分布 (5.13) において,

$$\left. \begin{aligned} \lambda_1 &= \lambda_3^{-P_{31}} \\ \lambda_2 &= \lambda_3^{-P_{32}} \end{aligned} \right\} \quad (5.29)$$

という条件を与え, さらに体積一定すなわち

$$P_{31} + P_{32} = 1 \quad (5.30)$$

を与えると

$$\Omega(\theta, \varphi) = \frac{1}{4\pi} \frac{1}{(\lambda_3^{2(1-P_{32})} \sin^2\theta \cos^2\varphi + \lambda_3^{2(1-P_{31})} \sin^2\theta \sin^2\varphi + \lambda_3^{-2(P_{31}+P_{32})} \cos^2\theta)^{3/2}} \quad (5.31)$$

となる。 p_{31} を0から0.5まで変化させたときの(5.28)式の数値の変化を図5.1 (A), 5.1 (B), 5.1 (C) に示す。

X, Y, Z軸に垂直な走査面に交わる繊維本数の実測値の比 $\nu(\pi/2, 0) : \nu(\pi/2, \pi/2) : \nu(0, 0)$ がわかれば, 図5.1 (A), 5.1 (B), 5.1 (C) の数値の比と対応させることにより簡単に λ_3 と p_{31}, p_{32} を見つけることができ, 結局配向角分布がわかることになる。

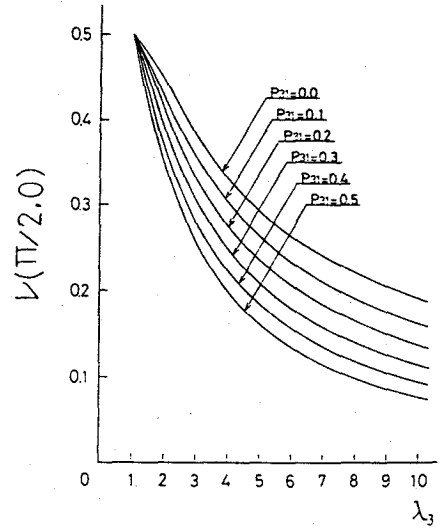


図5.1 (a) Y軸に垂直な走査平面に交わる規格化繊維本数の配向による変化。

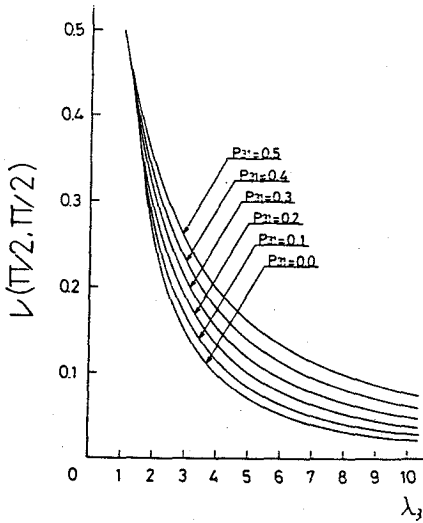


図5.1 (b) Y軸に垂直な走査平面に交わる規格化繊維本数の配向による変化。

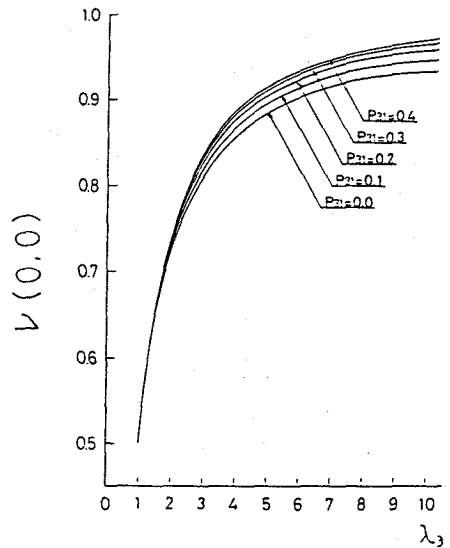


図5.1 (c) Z軸に垂直な走査平面に交わる規格化繊維本数の配向による変化。

5.1.3 有効要素率の集合体変形による変化

3次元繊維集合体において有効要素率を求める。繊維要素とは繊維接触点間の繊維のことである。有限長繊維には必ず2個の末端が存在する。繊維要素のうち、繊維末端を有している要素を非有効要素、繊維末端を有していない要素を有効要素と呼ぶ。したがって、有効要素率 Γ とは全要素のうち有効要素のしめる分率を意味する。

任意の1本の繊維の平均接触点数を m とする。すると1本の繊維内の要素数は $m+1$ である。1本の繊維には2個の繊維末端があるので、任意の要素が非有効である確率 a は

$$a = \frac{2}{m+1} \quad (5.32)$$

有効要素率 b は $1-a$ より

$$b = \frac{m-1}{m+1} \quad (5.33)$$

となる。

P. J. Flory⁽²⁹⁾ は(5.33)式で与えられると考えた。しかし、 m が比較的小さいとき、 b は実際の有効要素率より大きくなっていることがその後の研究によってわかってきた。

繊維集合体の接触状態を位相的に分類すると図5.2のように5種類になる。図5.2において x は

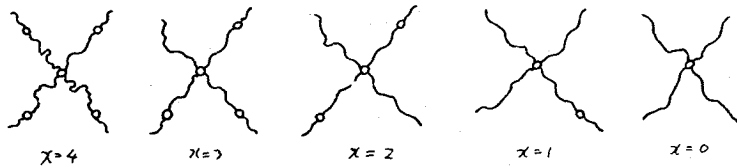


図5.2 繊維接触状態の分類。

有効要素の数を示している。任意の接触点が状態 x である確率を $B(x)$ とすると、それぞれは独立試行であるので次の2項分布で表わされる。

$$\begin{aligned} B(x) &= \binom{4}{x} b^x a^{4-x} \\ &= \binom{4}{x} \left(\frac{m-1}{m+1}\right)^x \left(\frac{2}{m+1}\right)^{4-x} \end{aligned} \quad (5.34)$$

図5.2において $x=4$ の接触状態では、すべてが有効であるのでその有効要素率を1、 $x=3$ では $3/4$ 、その他の状態では0と近似すると集合体として有効要素率 Γ は

$$\Gamma = B(4) + \frac{3B(3)}{4}$$

$$= \left(\frac{m-1}{m+1}\right)^3 \left(\frac{m+5}{m+1}\right) \quad (5.35)$$

となる。bと Γ の比較を図5.3に示す。mの小さいところでは Γ はbより小さくなっていることがわかる。mが100より大きくなるとbも Γ もともに1に近づいていく。

有効要素率 Γ は(5.35)式のようにmの関数として与えられるが、mは小森⁽²⁾らの研究によってつぎのように与えられている。

$$m = \frac{2D(N-1)l^2 I}{V} \quad (5.36)$$

ここで

$$I = \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \int_0^{\pi} \Omega(\theta, \varphi)$$

$$\cdot \Omega(\theta', \varphi') \left| \sin \alpha \right|$$

$$\cdot \sin \theta \sin \theta' d\theta d\theta' d\varphi d\varphi'$$

$$(5.37)$$

$$\sin \alpha = \left[1 - \{ \cos \theta \cos \theta' + \sin \theta \sin \theta' \cos(\varphi - \varphi') \}^2 \right]^{1/2} \quad (5.38)$$

であり、Nは繊維本数、Dは繊維直径、lは繊維長、Vは集合体の体積である。

(5.37)式へ(5.31)の配向角分布を代入し、 $p_{31} = 0$ 、と $p_{31} = 0.5$ の場合のIの変化を図5.4に示す。 $p_{31} = 0.5$ のときはZ方向への単軸引張りであるが、伸張率 λ_3 が大きくなるに従って配列が良くなり、接触点mが減少する様子を表わしている。

(5.36)式を変形すると

$$m = \frac{8}{\pi} \cdot \frac{\frac{\pi}{4} D^2 N l}{V} \cdot \frac{l}{D} \cdot I \quad (5.39)$$

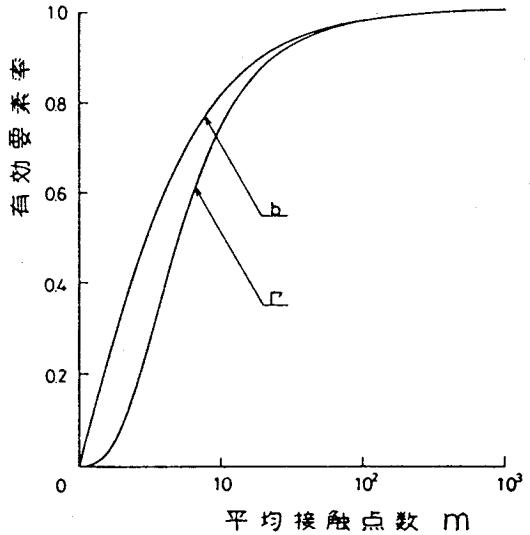


図5.3 平均接触点数m。

となる。ただし N は十分大きく $N-1 \doteq N$ としている。(5.39)式の右辺を体積分率 v_f とアスペクト比 k で表わすと

$$\left. \begin{aligned} v_f &= \frac{(\pi/4) D^2 N l}{V} \\ k &= l/D \end{aligned} \right\} \quad (5.40)$$

より(5.39)式は

$$m = (8/\pi) v_f k I \quad (5.41)$$

となる。

5.1.4 3次元直交異方性繊維集合体の構成方程式

3次元繊維集合体の構成方程式は

(4.41)式で与えられている。集

合体が $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ の伸縮率によって変形を受けるとき、体積 V 、有効要素率 Γ 、配向角分布 $\mathcal{Q}(\theta, \varphi)$ は変化するのでそれらの変数に*印をつけると(4.41)式は

$$\sigma_{ij} = \frac{N l^2 E \Gamma_*}{V_*} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \varepsilon_{kl} s_i s_j s_k s_l \mathcal{Q}_*(\theta, \varphi) \sin \theta \, d\theta \, d\varphi \quad (5.42)$$

となる。

V_* , $\mathcal{Q}_*(\theta, \varphi)$, Γ_* を $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ の関数として整理する。初期状態の体積を V_0 とすると

$$V_* = V_0 \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \quad (5.43)$$

初期状態の配向角分布を一様ランダムとして $\mathcal{Q}_0 = 1/4\pi$ とすると(5.13)式より

$$\mathcal{Q}_*(\theta, \varphi) = \mathcal{Q}_0 \frac{(\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3)^2}{\{(\lambda_2 \lambda_3 \sin \theta \cos \varphi)^2 + (\lambda_3 \lambda_1 \sin \theta \sin \varphi)^2 + (\lambda_1 \lambda_2 \cos \theta)^2\}^{3/2}} \quad (5.44)$$

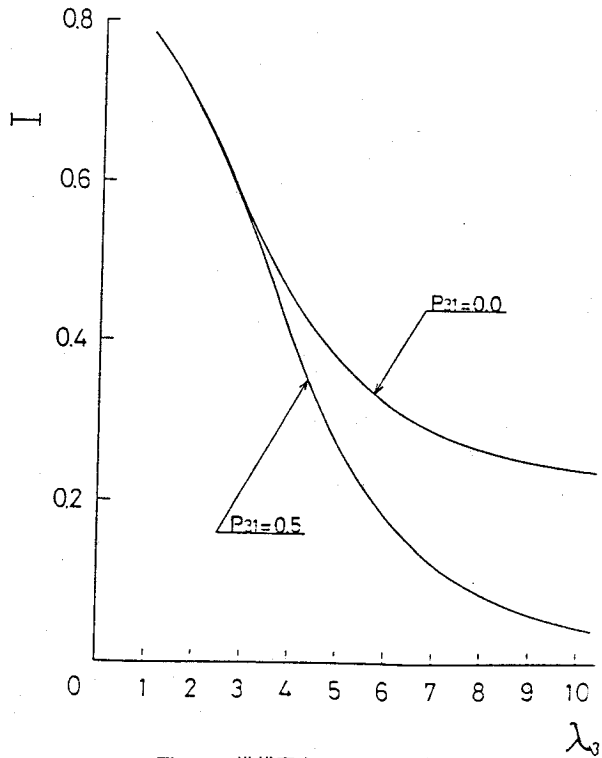


図5.4 繊維配向による I の変化。

と表わされる。

有効要素率 Γ_* は (5.35) 式より

$$\Gamma_* = \left(\frac{m_* - 1}{m_* - 1} \right)^3 \left(\frac{m_* + 5}{m_* + 1} \right) \quad (5.45)$$

と表わされるが m_* は (5.41) 式より

$$m_* = (8/\pi) v_{f*} k I_* \quad (5.46)$$

となる。(5.46) 式において初期体積分率を v_{f0} とすると

$$v_{f*} = v_{f0} / \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \quad (5.47)$$

とおくことができる。さらに I_* は (5.37) 式より

$$I_* = \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \int_0^\pi \mathcal{Q}_*(\theta, \varphi) \mathcal{Q}_*(\theta', \varphi') |\sin x| \sin \theta \sin \theta' d\theta d\theta' d\varphi d\varphi' \quad (5.48)$$

となる。

5.1.5 3次元直交異方性繊維集合体の弾性常数および工学常数

初期状態において体積 V_0 、繊維本数 N 、繊維長 l 、バネ定数 E 、有効要素率 Γ_0 、配向角分布は一様ランダムで $\mathcal{Q}_0 = 1/4\pi$ である繊維集合体に X 、 Y 、 Z 方向から λ_1 、 λ_2 、 λ_3 の伸縮率による変形を受けると、 N 、 l 、 E は変化しないが V 、 \mathcal{Q} 、 Γ は前項で述べたように変化する。

λ_1 、 λ_2 、 λ_3 の伸縮率による変形が完了した後、繊維集合体に外力が作用したときの弾性常数および工学常数を求める。

直方異方性の場合、0でない弾性常数は (4.49)、(4.55)、(4.57) より

$$\left. \begin{aligned} C_{1111} &= \frac{N l^2 E \Gamma_*}{V_*} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \sin^4 \theta \cos^4 \varphi \mathcal{Q}_*(\theta, \varphi) \sin \theta d\theta d\varphi \\ C_{2222} &= \frac{N l^2 E \Gamma_*}{V_*} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \sin^4 \theta \sin^4 \varphi \mathcal{Q}_*(\theta, \varphi) \sin \theta d\theta d\varphi \\ C_{3333} &= \frac{N l^2 E \Gamma_*}{V_*} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \cos^4 \theta \mathcal{Q}_*(\theta, \varphi) \sin \theta d\theta d\varphi \end{aligned} \right\} \quad (5.49)$$

$$C_{1122} = C_{2211} = C_{1212} = \frac{Nl^2 E \Gamma_*}{V_*} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \sin^4 \theta \cos^2 \varphi \sin^2 \varphi \Omega_*(\theta, \varphi) \sin \theta \, d\theta \, d\varphi$$

$$C_{1133} = C_{3311} = C_{3131} = \frac{Nl^2 E \Gamma_*}{V_*} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \sin^2 \theta \cos^2 \theta \cos^2 \varphi \Omega_*(\theta, \varphi) \sin \theta \, d\theta \, d\varphi$$

$$C_{2233} = C_{3322} = C_{2323} = \frac{Nl^2 E \Gamma_*}{V_*} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \sin^2 \theta \cos^2 \theta \sin^2 \varphi \Omega_*(\theta, \varphi) \sin \theta \, d\theta \, d\varphi$$

で与えられる。

すると応力 σ_{ij} と歪 ϵ_{kl} の関係は

$$\begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{31} \\ \sigma_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{1111} & C_{1122} & C_{1133} & 0 & 0 & 0 \\ C_{1122} & C_{2222} & C_{2233} & 0 & 0 & 0 \\ C_{1133} & C_{2233} & C_{3333} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{2233} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{1133} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{1122} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \epsilon_{11} \\ \epsilon_{22} \\ \epsilon_{33} \\ 2\epsilon_{23} \\ 2\epsilon_{31} \\ 2\epsilon_{12} \end{bmatrix} \quad (5.50)$$

というマトリックス表示で表わされる。

(5.50)式においてX軸方向の単軸引張を考えると

$$\begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{1111} & C_{1122} & C_{1133} \\ C_{1122} & C_{2222} & C_{2233} \\ C_{1133} & C_{2233} & C_{3333} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \epsilon_{11} \\ \epsilon_{22} \\ \epsilon_{33} \end{bmatrix} \quad (5.51)$$

となる。これを ϵ_{11} について解くと

$$\epsilon_{11} = \frac{\sigma_{11} \begin{vmatrix} C_{2222} & C_{2233} \\ C_{2233} & C_{3333} \end{vmatrix}}{|C_{ijkl}|} \quad (5.52)$$

となる。ここで $|C_{ijkl}|$ は $\{C_{ijkl}\}$ の行列式である。

X軸方向のヤング率 E_{1111} は

$$E_{1111} = \sigma_{11} / \varepsilon_{11} \quad (5.53)$$

で与えられるので(5.52), (5.53)より

$$E_{1111} = \frac{|C_{ijkl}|}{\begin{vmatrix} C_{2222} & C_{2233} \\ C_{2233} & C_{3333} \end{vmatrix}} \quad (5.54)$$

同様に

$$\left. \begin{aligned} E_{2222} &= \frac{|C_{ijkl}|}{\begin{vmatrix} C_{1111} & C_{1133} \\ C_{1133} & C_{3333} \end{vmatrix}} \\ E_{3333} &= \frac{|C_{ijkl}|}{\begin{vmatrix} C_{1111} & C_{1122} \\ C_{1122} & C_{2222} \end{vmatrix}} \end{aligned} \right\} \quad (5.55)$$

となる。

つぎにX軸方向の単軸引張におけるポアソン比 ν_{1122} , ν_{1133} を考える。ポアソン比の定義は

$$\left. \begin{aligned} \nu_{1122} &= -\varepsilon_{22} / \varepsilon_{11} \\ \nu_{1133} &= -\varepsilon_{33} / \varepsilon_{11} \end{aligned} \right\} \quad (5.56)$$

である。(5.51)式を ε_{11} , ε_{22} , ε_{33} について解いてそれぞれの比をとると

$$\left. \begin{aligned} \nu_{1122} &= \frac{\begin{vmatrix} C_{1122} & C_{2233} \\ C_{1133} & C_{3333} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} C_{2222} & C_{2233} \\ C_{2233} & C_{3333} \end{vmatrix}} \\ \nu_{1133} &= \frac{\begin{vmatrix} C_{1122} & C_{2222} \\ C_{1133} & C_{2233} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} C_{2222} & C_{2233} \\ C_{2233} & C_{3333} \end{vmatrix}} \end{aligned} \right\} \quad (5.57)$$

同様に

$$\left. \begin{aligned}
 \nu_{2233} &= \frac{\begin{vmatrix} C_{1111} & C_{1122} \\ C_{1133} & C_{2233} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} C_{1111} & C_{1133} \\ C_{1133} & C_{3333} \end{vmatrix}} \\
 \nu_{2211} &= \frac{\begin{vmatrix} C_{1122} & C_{1133} \\ C_{1133} & C_{3333} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} C_{1111} & C_{1133} \\ C_{1122} & C_{3333} \end{vmatrix}} \\
 \nu_{3322} &= \frac{\begin{vmatrix} C_{1111} & C_{1133} \\ C_{1122} & C_{2233} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} C_{1111} & C_{1122} \\ C_{1122} & C_{2222} \end{vmatrix}} \\
 \nu_{3311} &= \frac{\begin{vmatrix} C_{1122} & C_{1133} \\ C_{2222} & C_{2233} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} C_{1111} & C_{1122} \\ C_{1122} & C_{2222} \end{vmatrix}}
 \end{aligned} \right\} \quad (5.58)$$

で与えられる。

直交異方性繊維集合体にせん断応力が作用した場合、せん断歪が $2e_{ij}$ で与えられるとするとせん断弾性率 G_{ijij} は

$$G_{(ijij)} = \sigma_{(ij)} / 2e_{(ij)} \quad (i \neq j) \quad (5.59)$$

で与えられる。(5.50)式より

$$\left. \begin{aligned}
 G_{1122} &= C_{1122} \\
 G_{2233} &= C_{2233} \\
 G_{3311} &= C_{3311}
 \end{aligned} \right\} \quad (5.60)$$

となる。

体積弾性率 K は、静水圧 P_w と体積歪 $\Delta V / V$ の比として

$$K = P_W / (\Delta V / V) \quad (5.61)$$

で表わされる。ここで体積歪は

$$\Delta V / V = \varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33} \quad (5.62)$$

である。(5.50)式において

$$\sigma_{11} = \sigma_{22} = \sigma_{33} = -P_W \quad (5.63)$$

とおくと

$$\begin{bmatrix} -P_W \\ -P_W \\ -P_W \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{1111} & C_{1122} & C_{1133} \\ C_{1122} & C_{2222} & C_{2233} \\ C_{1133} & C_{2233} & C_{3333} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \end{bmatrix} \quad (5.64)$$

(5.64)式を ε_{11} , ε_{22} , ε_{33} について(5.62)(5.61)へ代入すると

$$K = \frac{|C_{ijkl}|}{\begin{vmatrix} 1 & C_{1122} & C_{1133} \\ 1 & C_{2222} & C_{2233} \\ 1 & C_{2233} & C_{3333} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} C_{1111} & 1 & C_{1133} \\ C_{1122} & 1 & C_{2233} \\ C_{1133} & 1 & C_{3333} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} C_{1111} & C_{1122} & 1 \\ C_{1122} & C_{2222} & 1 \\ C_{1133} & C_{2233} & 1 \end{vmatrix}}$$

(5.65)

となる。

(5.49)式において、特別の場合として体積変化のない変形を考え $V_* = V_0$ とおく、さらにアスペクト比 k が十分大きいときは $\Gamma_* = 1$ とおける。そのような条件で規格化弾性常数

C'_{ijkl} を

$$C'_{ijkl} = C_{ijkl} / (N l^2 E / V_0) \quad (5.67)$$

とおき、配向角分布(5.44)において

$$\left. \begin{aligned} \lambda_1 &= \lambda_3^{-p_{31}} \\ \lambda_2 &= \lambda_3^{-p_{32}} \\ p_{31} + p_{32} &= 1 \end{aligned} \right\} \quad (5.68)$$

という変形を考える。このとき λ_3 の変化に対する C'_{ijkl} の変化の様子を図 5.5 ~ 5.10 に示す。

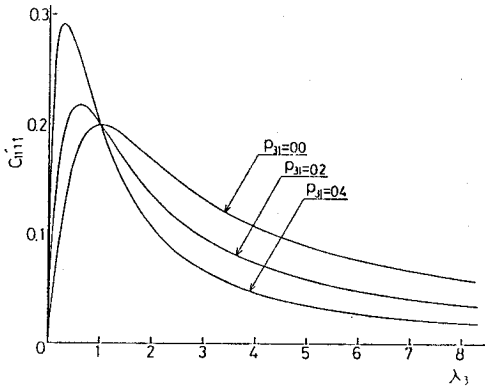


図 5.5 直交異方性の弾性常数 C'_{1111}

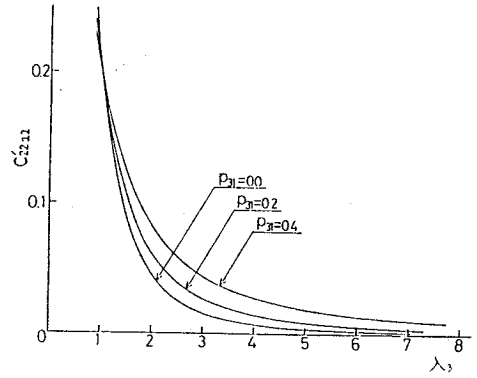


図 5.6 直交異方性の弾性常数 C'_{2222}

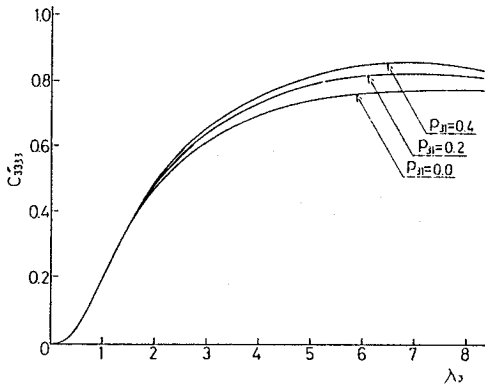


図 5.7 直交異方性の弾性常数 C'_{3333}

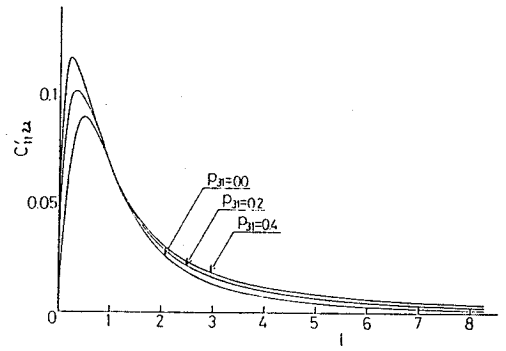


図 5.8 直交異方性の弾性常数 C'_{1122}

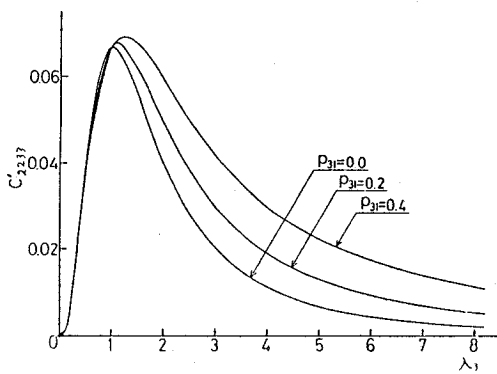


図 5.9 直交異方性の弾性常数 C'_{2233}

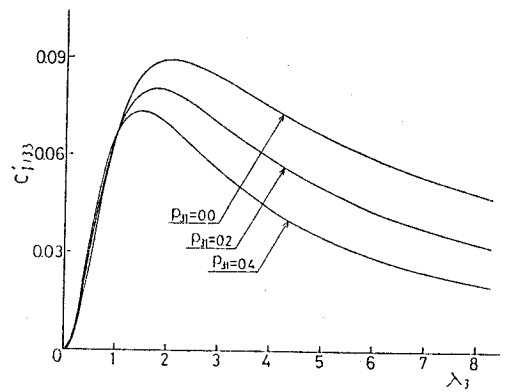


図 5.10 直交異方性の弾性常数 C'_{1133}

同様の条件で規格化されたヤング率 E'_{ijkl} とポアソン比 ν_{ijkl} を図 5.1.1 ~ 図 5.1.4 に示す。

つぎに体積は一定であるが、アスペクト比がある有限値であるため、有効要素率 Γ が変化するときの規格化されたヤング率 E'_{ijkl} の変化を図 5.1.5 ~ 5.2.3 に示す。アスペクト比が小さくなると配向によって有効要素率が減少しやすいため、ヤング率が小さくなる様子がよくわかる。

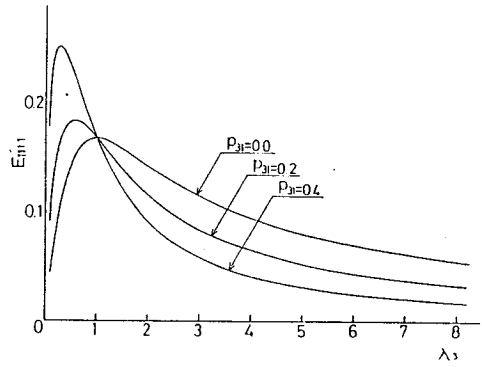


図 5.1.1 直交異方性のヤング率 E'_{1111}

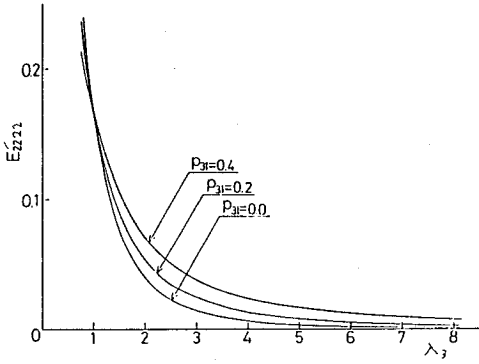


図 5.1.2 直交異方性のヤング率 E'_{2222}

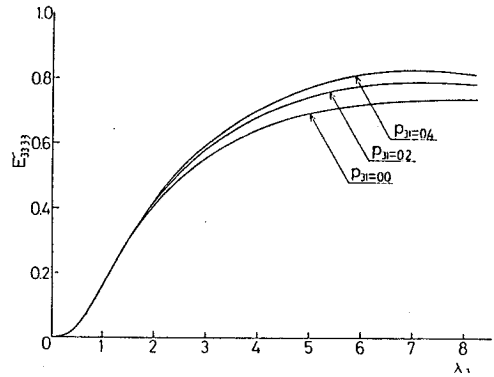


図 5.1.3 直交異方性のヤング率 E'_{3333}

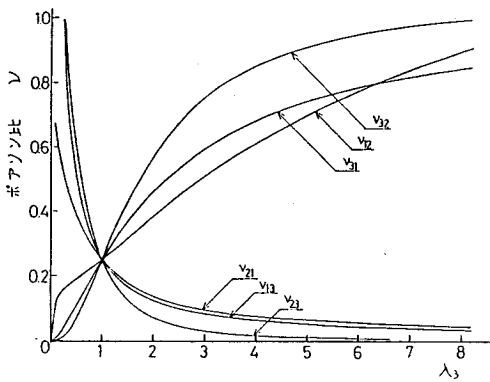


図 5.1.4 直交異方性のポアソン比 ($p_{31} = 0.2$)。

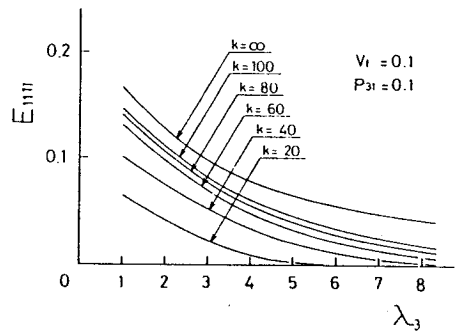


図 5.1.5 伸張率 λ_3 とヤング率。

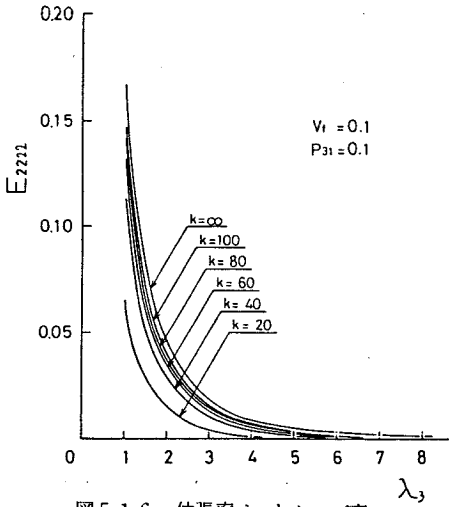


図 5.1.6 伸張率 λ_3 とヤング率。

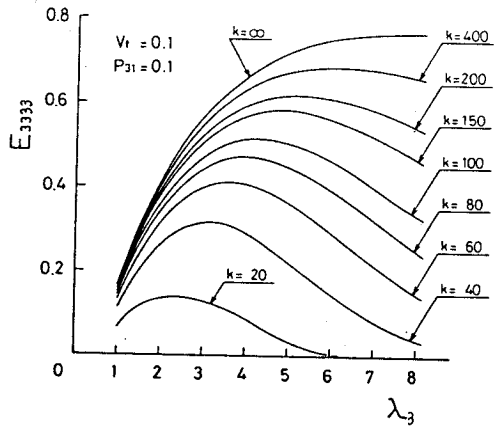


図 5.1.7 伸張率 λ_3 とヤング率。

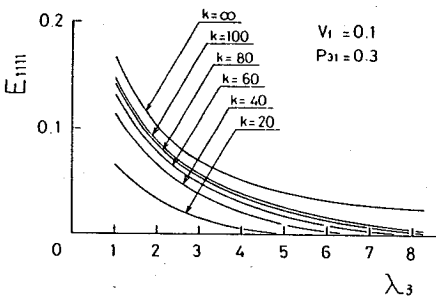


図 5.1.8 伸長率 λ_3 とヤング率。

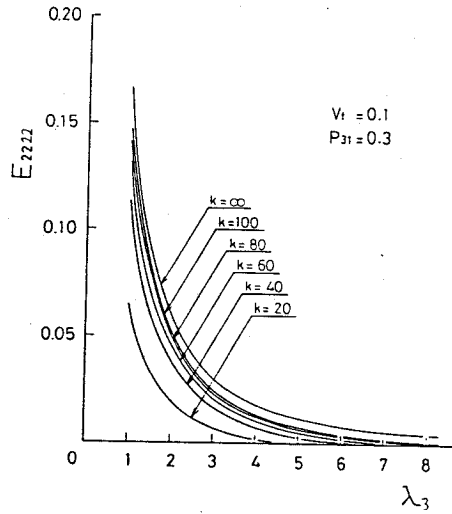


図 5.1.9 伸張率 λ_3 とヤング率。

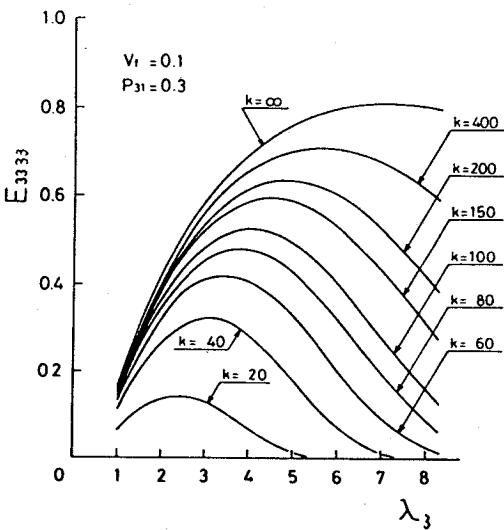


図 5.2.0 伸張率 λ_3 とヤング率。

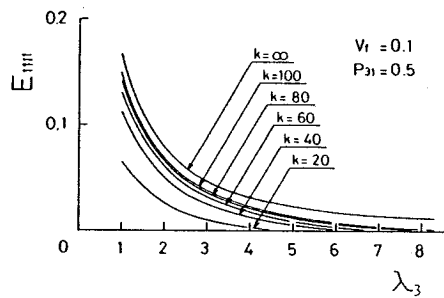


図 5.2.1 伸張率 λ_3 とヤング率。

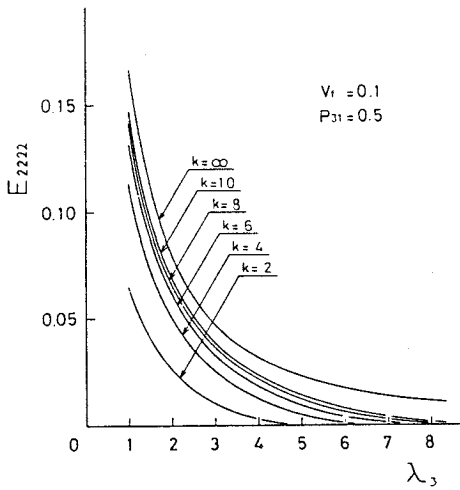


図 5.2.2 伸張率 λ_3 とヤング率。

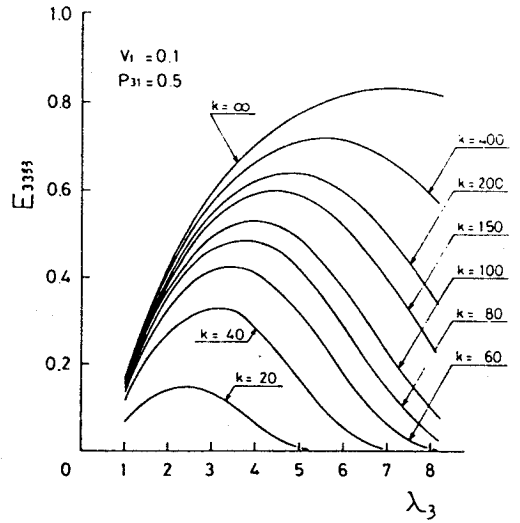


図 5.2.3 伸張率 λ_3 とヤング率。

5.2 横断等方性繊維集合体の異方弾性特性

5.2.1 弾性定数の異方性

横断等方性繊維集合体の配向角分布は (5.15) 式で与えられている。(5.15) 式を (5.49) 式へ代入して φ に関して積分すると

$$\left. \begin{aligned}
 C_{1111} &= \frac{3\pi}{16} \frac{Nl^2 E \Gamma_*}{V_*} \int_0^\pi \sin^4 \theta \Omega_*(\theta) \sin \theta d\theta \\
 C_{2222} &= \frac{3\pi}{16} \frac{Nl^2 E \Gamma_*}{V_*} \int_0^\pi \sin^4 \theta \Omega_*(\theta) \sin \theta d\theta \\
 C_{3333} &= \frac{1}{4} \frac{Nl^2 E \Gamma_*}{V_*} \int_0^\pi \cos^4 \theta \Omega_*(\theta) \sin \theta d\theta \\
 C_{1122} &= C_{2211} = \frac{\pi}{16} \frac{Nl^2 E \Gamma_*}{V_*} \int_0^\pi \sin^4 \theta \Omega_*(\theta) \sin \theta d\theta
 \end{aligned} \right\} \quad (5.69)$$

$$C_{2233} = C_{3322} = \frac{\pi}{4} \frac{Nl^2 E \Gamma_*}{V_*} \int_0^\pi \sin^2 \theta \cos^2 \theta \Omega_*(\theta) \sin \theta d\theta$$

$$C_{3311} = C_{1133} = \frac{\pi}{4} \frac{Nl^2 E \Gamma_*}{V_*} \int_0^\pi \sin^2 \theta \cos^2 \theta \Omega_*(\theta) \sin \theta d\theta$$

となる。

(4.68)式ですでに述べたように、横断等方のときは

$$\left. \begin{aligned} C_{1111} &= C_{2222} = 3C_{1122} = 3C_{2211} \\ C_{1133} &= C_{3311} = C_{2233} = C_{3322} \end{aligned} \right\} \quad (5.70)$$

という関係があり、(5.69)式において独立な弾性常数は C_{1111} 、 C_{3333} 、 C_{1133} の3つとなる。そして(5.69)式に(5.17)式を代入して θ に関して積分すると、この3つの弾性常数はつぎのようになる。

$\lambda_3 > 1$ のとき

$$C_{1111} = \frac{3}{16} \frac{Nl^2 E \Gamma_*}{V_*} \left\{ \frac{\lambda_3^{2+2P_{31}} + 2}{(\lambda_3^{2+2P_{31}} - 1)^2} + \frac{\lambda_3^{2+2P_{31}} (\lambda_3^{2+2P_{31}} - 4)}{(\lambda_3^{2+2P_{31}} - 1)^{5/2}} \tan^{-1} (\lambda_3^{2+2P_{31}} - 1)^{1/2} \right\}$$

$\lambda_3 = 1$ のとき

$$C_{1111} = \frac{1}{5} \frac{Nl^2 E \Gamma_*}{V_*} \quad (5.71)$$

$\lambda_3 < 1$ のとき

$$C_{1111} = \frac{3}{16} \frac{Nl^2 E \Gamma_*}{V_*} \left\{ \frac{\lambda_3^{2+2P_{31}} + 2}{(1 - \lambda_3^{2+2P_{31}})^2} + \frac{\lambda_3^{2+2P_{31}} (\lambda_3^{2+2P_{31}} - 4)}{2(1 - \lambda_3^{2+2P_{31}})^{5/2}} \ln \frac{1 + \sqrt{1 - \lambda_3^{2+2P_{31}}}}{1 - \sqrt{1 - \lambda_3^{2+2P_{31}}}} \right\}$$

$\lambda_3 > 1$ のとき

$$C_{3333} = \frac{1}{2} \frac{Nl^2 E \Gamma_*}{V_*} \lambda_3^{2(2+2P_{31})} \left\{ \frac{2\lambda_3^{2+2P_{31}} + 1}{\lambda_3^{2+2P_{31}} (\lambda_3^{2+2P_{31}} - 1)^2} - \frac{3}{(\lambda_3^{2+2P_{31}} - 1)^{5/2}} \tan^{-1}(\lambda_3^{2+2P_{31}} - 1)^{1/2} \right\}$$

$\lambda_3 = 1$ のとき

$$C_{3333} = \frac{1}{5} \frac{Nl^2 E \Gamma_*}{V_*} \quad (5.72)$$

$\lambda_3 < 1$ のとき

$$C_{3333} = \frac{1}{2} \frac{Nl^2 E \Gamma_*}{V_*} \lambda_3^{2(2+2P_{31})} \left\{ \frac{2\lambda_3^{2+2P_{31}} + 1}{\lambda_3^{2+2P_{31}} (\lambda_3^{2+2P_{31}} - 1)^2} - \frac{3}{2(1-\lambda_3^{2+2P_{31}})^{5/2}} \ln \frac{1 + \sqrt{1-\lambda_3^{2+2P_{31}}}}{1 - \sqrt{1-\lambda_3^{2+2P_{31}}}} \right\}$$

$\lambda_3 > 1$ のとき

$$C_{1133} = \frac{1}{4} \frac{Nl^2 E \Gamma_*}{V_*} \left\{ -\frac{3}{(\lambda_3^{2+2P_{31}} - 1)^2} + \frac{\lambda_3^{2+2P_{31}} + 2}{(\lambda_3^{2+2P_{31}} - 1)^{5/2}} \tan^{-1}(\lambda_3^{2+2P_{31}} - 1)^{1/2} \right\}$$

$\lambda_3 = 1$ のとき

$$C_{1133} = \frac{1}{15} \frac{Nl^2 E \Gamma_*}{V_*} \quad (5.73)$$

$\lambda_3 < 1$ のとき

$$C_{1133} = \frac{1}{4} \frac{N l^2 E \Gamma_{**}}{V_{**}} \left\{ - \frac{3}{(1 - \lambda_3^{2+2p_{31}})^2} + \frac{\lambda_3^{2+2p_{31}+2}}{(1 - \lambda_3^{2+2p_{31}})^{5/2}} \ln \left(\frac{1 + \sqrt{1 - \lambda_3^{2+2p_{31}}}}{1 - \sqrt{1 - \lambda_3^{2+2p_{31}}}} \right)^{1/2} \right\}$$

(5.69)式において

$$\left. \begin{aligned} C'_{1111} &= \frac{3\pi}{16} \int_0^\pi \sin^4 \theta \Omega_{**}(\theta) \sin \theta d\theta \\ C'_{3333} &= \frac{1}{4} \int_0^\pi \cos^4 \theta \Omega_{**}(\theta) \sin \theta d\theta \\ C'_{1133} &= \frac{\pi}{4} \int_0^\pi \sin^2 \theta \cos^2 \theta \Omega_{**}(\theta) \sin \theta d\theta \end{aligned} \right\} (5.74)$$

とおき、 $p_{31} = 0, 0.25, 0.5, 0.75, 1.0$ と変化させたときの C'_{1111} , C'_{3333} , C'_{1133} の変化の様子を図 5.2.4 ~ 5.2.6 に示す。

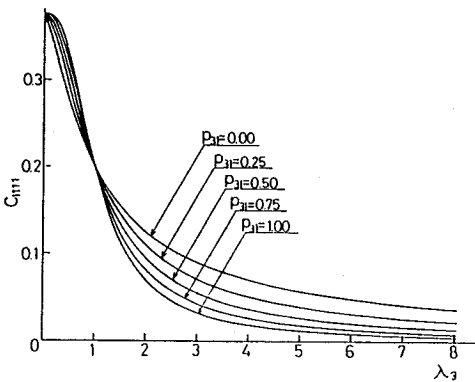


図 5.2.4 横断等方性の弾性常数 C_{1111}

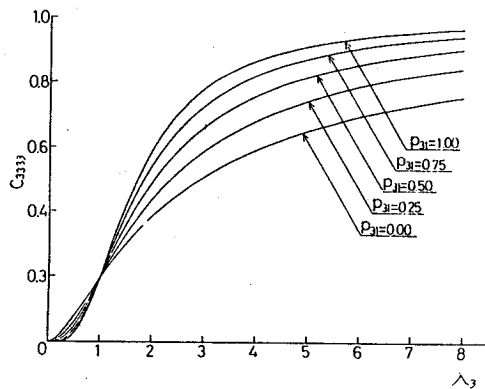


図 5.2.5 横断等方性の弾性常数 C_{3333}

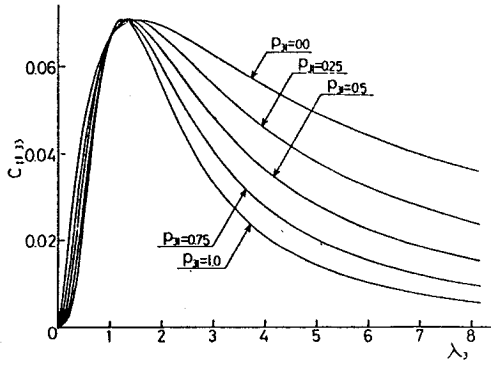


図 5.2.6 横断等方性の弾性常数 C_{1133}

5.2.2 工学常数の異方性

横断等方性繊維集合体の工学常数を求める。ヤング率については (5.7.0) 式の関係 (5.5.4), (5.5.5) 式へ代入すると

$$\left. \begin{aligned}
 E_{1111} = E_{2222} &= \frac{2}{3} C_{1111} \left[1 + \frac{C_{1111} C_{3333} - 3(C_{1133})^2}{3 \{C_{1111} C_{3333} - (C_{1133})^2\}} \right] \\
 E_{3333} &= C_{3333} - \frac{3(C_{1133})^2}{2 C_{1111}}
 \end{aligned} \right\} \quad (5.7.5)$$

ポアソン比は (5.7.0) 式を (5.5.7), (5.5.8) 式へ代入すると

$$\left. \begin{aligned}
 \nu_{1122} = \nu_{2211} &= \frac{(C_{1111} C_{3333} / 3) - (C_{1133})^2}{C_{1111} C_{3333} - (C_{1133})^2} \\
 \nu_{1133} = \nu_{2233} &= \frac{2 C_{1111} C_{1133} / 3}{C_{1111} C_{3333} - (C_{1133})^2} \\
 \nu_{3311} = \nu_{3322} &= \frac{(3/4) C_{1133}}{C_{1111}}
 \end{aligned} \right\} \quad (5.7.6)$$

と表わされる。

せん断弾性率についても (5.6.0), (5.7.0) 式より

$$\left. \begin{aligned} G_{1133} &= G_{3311} = G_{3322} = G_{2233} = C_{1133} \\ G_{1122} &= G_{2211} = C_{1111}/3 \end{aligned} \right\} \quad (5.77)$$

となる。

さらに体積弾性率は(5.65)式へ(5.70)を代入して

$$K = \frac{3(C_{1133})^2 - 2C_{1111}C_{3333}}{6C_{1133} - 2C_{1111} - 3C_{3333}} \quad (5.78)$$

と表わされる。

体積一定, すなわち $p_{31} = 0.5$ という条件で, アスペクト比 k を変化させたときの, $E_{1111}, E_{2222}, E_{3333}$ の変化の様子を図 5.21~5.23 に示している。アスペクト比が小さくなると, 有効要素率が減少するためヤング率が小さくなっている。

つぎに有効要素率については $\Gamma_* = 1$ という条件でポアソン比を $p_{31} = 0.3 \sim 0.55$ と変化させたときの E_{3333} の変化の様子を図 5.27 に示す。ポアソン比が 0.5 以下のときは体積が増下するため λ_3 が大きくなってもヤング率は λ_3 に比例して大きくなりません。

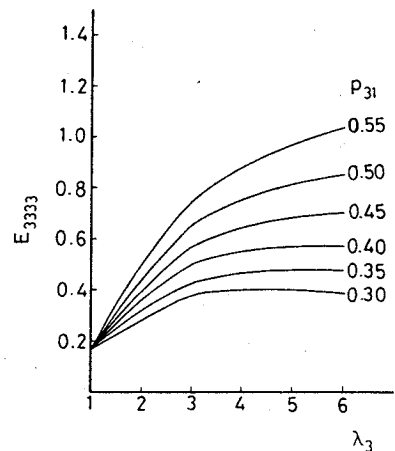


図 5.27 体積変化があるときの伸張率とヤング率。

5.2.3 弾性常数および工学常数の配向関数による表現

Hermans⁽²⁶⁾らは横断等方性高分子固体に関してつぎのような配向関数を定義した。

$$f = \frac{1}{2} \left[3 \int_0^{\pi/2} \cos^2 \theta \Omega(\theta) \sin \theta d\theta - 1 \right] \quad (5.79)$$

(5.79)式へ横断等方性の配向角分布(5.17)式を代入して積分すると f はつぎのように表わされる。

$\lambda_3 > 1$ のとき

$$f = \frac{3}{2} \frac{\lambda_3^{2+2p_{31}}}{(\lambda_3^{2+2p_{31}} - 1)^{3/2}} \left\{ (\lambda_3^{2+2p_{31}} - 1)^{1/2} - \sin^{-1} \left(\sqrt{\frac{\lambda_3^{2+2p_{31}} - 1}{\lambda_3^{2+2p_{31}}}} \right) \right\} - \frac{1}{2}$$

$\lambda_3 = 1$ のとき

$$f = 0$$

$\lambda_3 < 1$ のとき

$$f = \frac{3}{2} \frac{\lambda_3^{2+2p_{31}}}{(1-\lambda_3^{2+2p_{31}})} \left[\ln \left| \tan \left\{ \tan^{-1} \left(\frac{\sqrt{1-\lambda_3^{2+2p_{31}}}}{\lambda_3^{2+2p_{31}}} \right) / 2 + \pi/4 \right\} \right| - (1-\lambda_3^{2+2p_{31}})^{1/2} \right] - \frac{1}{2}$$

(5.80)

f は $\lambda_3 = 1$ すなわち一様ランダム配向のとき 0, $\lambda_3 = \infty$ すなわち一方向に完全配列のとき 1, そして $\lambda_3 = 0$ すなわち XY 平面内で一様ランダム配向のとき -0.5 となり, 横断等方性の配向状態を表わすパラメータとなっている。

(5.80) 式において $p_{31} = 0, 0.25, 0.5, 0.75, 1.0$ と変化させたときの f と λ_3 の関係を図 5.28 に示す。

(5.71) 式によって弾性常数と λ_3 の関係が与えられ, (5.80) 式では配向係数 f と λ_3 の関係が与えられているので, この 2 つの関係を連立させると f と弾性常数, そして工学常数の関係がわかることになる。体積 V と有効要素率 Γ を一定として, $(Nl^2 E \Gamma / V)$ で規格化した弾性常数および工学常数と f の関係を図 5.29, 5.30 に示す。

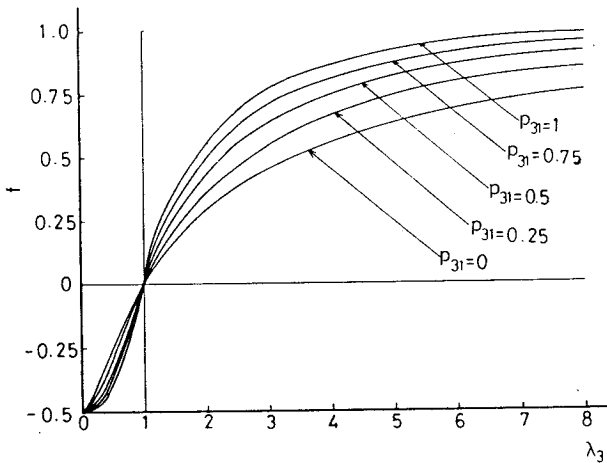


図 5.28 配向係数 f と伸張率 λ_3 の関係。

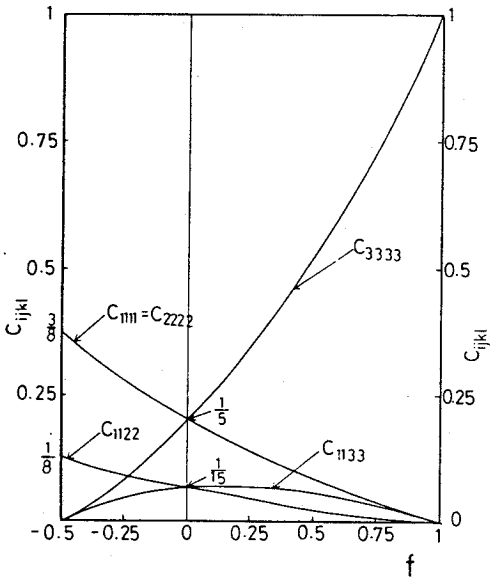


図 5.2.9 横断等方性の弾性常数と配向係数 f の関係。

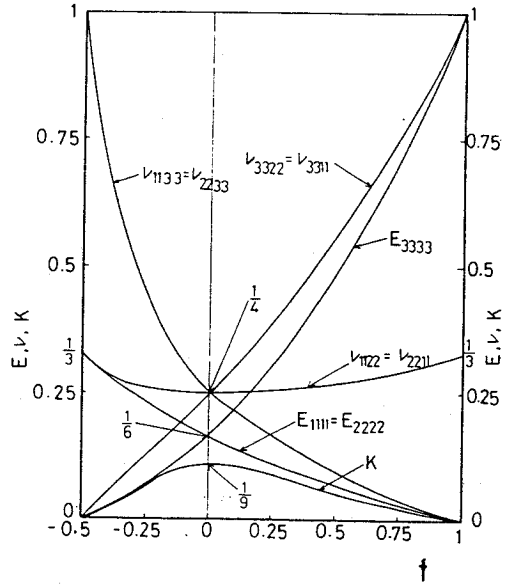


図 5.3.0 横断等方性の工学常数と配向係数 f の関係。

5.3 2次元繊維集合体の異方弾性特性

5.3.1 2次元繊維集合体の単純変形による繊維配向

集合体内に直角座標を考える。変形前の座標を (X, Y) 変形後のそれを (x, y) とする。集合体が X, Y 方向へそれぞれ λ_1, λ_2 倍伸縮されたとすると、変形後の座標は

$$\left. \begin{aligned} x &= \lambda_1 X \\ y &= \lambda_2 Y \end{aligned} \right\} \quad (5.81)$$

いま、集合体上に半径 R_0 の円を考えると、円の方程式は

$$X^2 + Y^2 = R_0^2 \quad (5.82)$$

(5.82)式へ(5.81)式を代入すると

$$\frac{x^2}{\lambda_1^2} + \frac{y^2}{\lambda_2^2} = R_0^2 \quad (5.83)$$

となって楕円の方程式となる。

座標 x, y を極座標 (R, φ) で表わすと

$$\left. \begin{aligned} x &= R \cos \varphi \\ y &= R \sin \varphi \end{aligned} \right\} \quad (5.84)$$

(5.84) を (5.83) へ代入して R について解くと

$$R = \frac{\lambda_1 \lambda_2 R_0}{\sqrt{\lambda_1^2 \sin^2 \varphi + \lambda_2^2 \cos^2 \varphi}} \quad (5.85)$$

変形後の楕円において、微小角 $d\varphi$ によってしめる3角形状の微小面積 ds は

$$ds = \frac{1}{2} R^2 d\varphi \quad (5.86)$$

(5.86) 式へ (5.85) 式を代入すると

$$ds = \frac{\lambda_1^2 \lambda_2^2 R_0^2}{2(\lambda_1^2 \sin^2 \varphi + \lambda_2^2 \cos^2 \varphi)} d\varphi \quad (5.87)$$

ここで、繊維配向角の確率密度関数を $q(\varphi)$ とすると任意の繊維が $\varphi \sim \varphi + d\varphi$ の間に入る確率要素 $q(\varphi) d\varphi$ は、変形によって繊維長が変化しない場合、微小面積 ds に比例するので

$$q(\varphi) d\varphi \propto \frac{\lambda_1^2 \lambda_2^2 R_0^2}{2(\lambda_1^2 \sin^2 \varphi + \lambda_2^2 \cos^2 \varphi)} d\varphi \quad (5.88)$$

変形前の円の面積 s_0 は $s_0 = \pi R_0^2$ ，単純変形による面積変化率は $\lambda_1 \lambda_2$ で与えられるので、変形後の楕円の面積 s は

$$s = \lambda_1 \lambda_2 \pi R_0^2 \quad (5.89)$$

である。

$$q(\varphi) = \frac{\lambda_1 \lambda_2}{2\pi(\lambda_1^2 \sin^2 \varphi + \lambda_2^2 \cos^2 \varphi)} \quad (5.90)$$

となって、単純変形のとときの配向角分布が与えられることになる。この分布は、2章第3節で求めた(2.116)式と同形式である。

任意の $\lambda_1 \lambda_2$ に対して

$$\int_0^{2\pi} q(\varphi) d\varphi = 1 \quad (5.91)$$

となっているので、(5.90)式は確率密度関数としての条件をみたしている。

2次元繊維集合体がX軸方向に単軸変形を受けるときポアソン比 p_{12} を導入すると

$$\lambda_2 = \lambda_1^{-p_{12}} \quad (5.92)$$

とおけるので(5.90)式は

$$q(\varphi) = \frac{\lambda_1^{1-p_{12}}}{2\pi(\lambda_1^{-2p_{12}} \cos^2 \varphi + \lambda_1^2 \sin^2 \varphi)} \quad (5.93)$$

となる。

集合体の変形後の座標が

$$\left. \begin{aligned} x &= \lambda_1 X \\ y &= \frac{1}{\lambda_1} Y \end{aligned} \right\} \quad (5.94)$$

で与えられるときは、3次元直交異方性の場合で述べたように純ずり変形である(ただし厚さ方向には変化しないとする)。このときは(5.92)式において $p_{12} = 1$ とおけるので(5.93)式は

$$q(\varphi) = \frac{\lambda_1^2}{2\pi(\cos^2 \varphi + \lambda_1^4 \sin^2 \varphi)} \quad (5.95)$$

となる。

集合体に単純ずり変形が作用した場合、変形後の座標は

$$\left. \begin{aligned} x &= X + rY \\ y &= Y \end{aligned} \right\} \quad (5.96)$$

で与えられる。このとき、座標には回転が生じ回転角 x は

$$x = \tan^{-1} \left(\frac{r}{2} + \sqrt{1 + \frac{r^2}{4}} \right) \quad (5.97)$$

であり、座標回転後の主軸方向の伸張率は

$$\left. \begin{aligned} \lambda_1 &= 1 + \frac{1}{2} r(r + \sqrt{r^2 + 4}) \\ \lambda_2 &= 1 + \frac{1}{2} r(r - \sqrt{r^2 + 4}) \end{aligned} \right\} \quad (5.98)$$

で表わされるので(5.90)式は

$$q(\varphi) = \frac{1}{2\pi \left\{ \left[1 + \gamma(\gamma - \sqrt{\gamma^2 + 4})/2 \right]^2 \cos^2(\varphi - \chi) + \left[1 + \gamma(\gamma + \sqrt{\gamma^2 + 4})/2 \right]^2 \sin^2(\varphi - \chi) \right\}} \quad (5.99)$$

となる。

5.3.2 直交異方性繊維集合体の弾性常数

2次元繊維集合体では繊維軸が一平面内にあるので配向角分布 $Q_*(\theta, \varphi)$ は

$$Q_*(\theta, \varphi) = \delta\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right) q_*(\varphi) \quad (5.100)$$

とおくことができる。

(5.100)式を(5.49)式の弾性常数に代入すると

$$\left. \begin{aligned} C_{1111} &= \frac{Nl^2 E \Gamma_*}{V_*} \int_0^{2\pi} \cos^4 \varphi q_*(\varphi) d\varphi \\ C_{2222} &= \frac{Nl^2 E \Gamma_*}{V_*} \int_0^{2\pi} \sin^4 \varphi q_*(\varphi) d\varphi \\ C_{1122} = C_{2211} &= \frac{Nl^2 E \Gamma_*}{V_*} \int_0^{2\pi} \cos^2 \varphi \sin^2 \varphi q_*(\varphi) d\varphi \end{aligned} \right\} \quad (5.101)$$

となり、添字に3の入った C_{3333} , C_{1133} , C_{3311} , C_{2233} , C_{3322} は0となる。

(4.79)式と同様の変換を行うと(5.101)式は

$$\left. \begin{aligned} C_{1111} &= \frac{Nl^2 E \Gamma_*}{8V_*} \left\{ 3 + 4A_\varphi(2) + A_\varphi(4) \right\} \\ C_{2222} &= \frac{Nl^2 E \Gamma_*}{8V_*} \left\{ 3 - 4A_\varphi(2) + A_\varphi(4) \right\} \\ C_{1122} = C_{2211} &= \frac{Nl^2 E \Gamma_*}{8V_*} \left\{ 1 - A_\varphi(4) \right\} \end{aligned} \right\} \quad (5.102)$$

ここで $A_\varphi(2k)$ は $q_*(\varphi)$ のフーリエ・コサイン変換で

$$A_\varphi(2k) = \int_0^{2\pi} \cos 2k\varphi q_*(\varphi) d\varphi \quad (5.103)$$

である。

(5.103)式へ(5.90)式を代入すると(2.123)式より

$$A_\varphi(2k) = \left(\frac{\lambda_1 - \lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2} \right)^k \quad (5.104)$$

となる。(5.104)式を(5.102)式へ代入すると

$$\left. \begin{aligned} C_{1111} &= \frac{Nl^2 E \Gamma_*}{V_*} \frac{(2\lambda_1^2 + \lambda_1 \lambda_2)}{2(\lambda_1 + \lambda_2)^2} \\ C_{2222} &= \frac{Nl^2 E \Gamma_*}{V_*} \frac{(\lambda_1 \lambda_2 + 2\lambda_2^2)}{2(\lambda_1 + \lambda_2)^2} \\ C_{1122} &= C_{2211} = \frac{Nl^2 E \Gamma_*}{V_*} \frac{\lambda_1 \lambda_2}{2(\lambda_1 + \lambda_2)^2} \end{aligned} \right\} \quad (5.105)$$

と λ_1, λ_2 で表わされる。

5.3.3 直交異方性繊維集合体の工学常数

2次元直交異方性繊維集合体の工学常数を求める。主軸方向の応力，歪関係は

$$\begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{1111} & C_{1122} & 0 \\ C_{1122} & C_{2222} & 0 \\ 0 & 0 & C_{1122} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \epsilon_{11} \\ \epsilon_{22} \\ 2\epsilon_{12} \end{bmatrix} \quad (5.106)$$

で表わされる。

X軸方向の単軸引張を考えると $\sigma_{22} = \sigma_{12} = 0$ とおけるので(5.106)式を ϵ_{11} について解くと

ヤング率 E_{1111} は

$$E_{1111} = C_{1111} - \frac{(C_{1122})^2}{C_{2222}} \quad (5.107)$$

同様に E_{2222} は

$$E_{2222} = C_{2222} - \frac{(C_{1122})^2}{C_{1111}} \quad (5.108)$$

ポアソン比は

$$\left. \begin{aligned} \nu_{1122} &= -\varepsilon_{22}/\varepsilon_{11} = C_{1122}/C_{2222} \\ \nu_{2211} &= -\varepsilon_{11}/\varepsilon_{22} = C_{1122}/C_{1111} \end{aligned} \right\} \quad (5.109)$$

せん断弾性率は (5.106) 式より

$$G_{1122} = G_{2211} = C_{1122} \quad (5.110)$$

(5.107) 式～(5.110) 式の工学常数へ (5.105) 式を代入すると

$$\left. \begin{aligned} E_{1111} &= \frac{Nl^2 E \Gamma_*}{V_*} \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + 2\lambda_2} \\ E_{2222} &= \frac{Nl^2 E \Gamma_*}{V_*} \frac{\lambda_2}{2\lambda_1 + \lambda_2} \\ \nu_{1122} &= \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + 2\lambda_2} \\ \nu_{2211} &= \frac{\lambda_2}{2\lambda_1 + \lambda_2} \\ G_{1122} = G_{2211} &= \frac{Nl^2 E \Gamma_*}{V_*} \frac{\lambda_1 \lambda_2}{2(\lambda_1 + \lambda_2)^2} \end{aligned} \right\} \quad (5.111)$$

となって2次元繊維集合体の工学常数が、 λ_1, λ_2 の関数として表わされる。

$\lambda_2 = 1 / \lambda_1$ で厚さ方向に変化がない変形では体積が一定である。そのような条件でアスペクト比を変化させたときの E_{1111} , E_{2222} と λ_1 の関係を図 5.3 1, 5.3 2 に示す。アスペクト比が小さくなると有効要素率が減少するためヤング率も小さくなっていく様子がわかる。

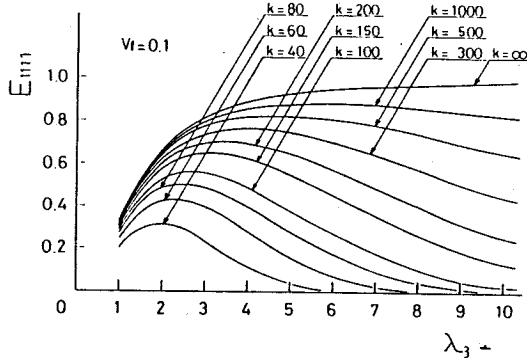


図 5.3 1 伸張率 λ_3 とヤング率の関係。

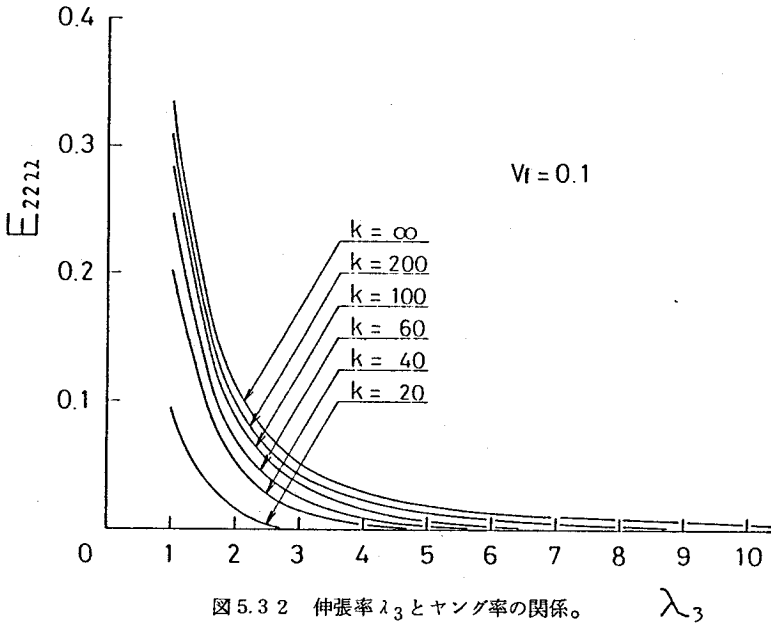


図 5.3 2 伸張率 λ_3 とヤング率の関係。

5.3.4. 弾性常数および工学常数の配向係数による表現

2次元繊維集合体の配向係数 J はつぎのように定義されている。

$$J = 2 \int_0^{2\pi} q_{**}(\varphi) \cos^2 \varphi \, d\varphi - 1$$

$$= A_{\varphi} (2)$$

$$(5.112)$$

(5.104)式よりJは

$$J = \frac{\lambda_1 - \lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2} \quad (5.113)$$

となる。

Jは $\lambda_1 = \lambda_2$ すなわち一様ランダム配向のとき0となり、 $\lambda_1 = \infty$ か $\lambda_2 = 0$ のとき $J = 1$ で、この場合はX軸に完全配列した状態である。そして $\lambda_1 = 0$ か $\lambda_2 = \infty$ のときは $J = -1$ となり、Y軸方向に完全配列した状態となる。

(5.113)式を(5.105)式へ代入すると弾性常数は

$$\left. \begin{aligned} C_{1111} &= \frac{Nl^2 E \Gamma_*}{8V_*} (1+J)(3+J) \\ C_{2222} &= \frac{Nl^2 E \Gamma_*}{8V_*} (1-J)(3-J) \\ C_{1122} &= \frac{Nl^2 E \Gamma_*}{8V_*} (1-J^2) \end{aligned} \right\} \quad (5.114)$$

と配向係数Jによって表わされる。

さらに(5.113)式を(5.111)式の工学常数へ代入すると

$$\left. \begin{aligned} E_{1111} &= \frac{Nl^2 E \Gamma_*}{V_*} \frac{(1+J)}{(3-J)} \\ E_{2222} &= \frac{Nl^2 E \Gamma_*}{V_*} \frac{(1-J)}{(3+J)} \\ \nu_{1122} &= \frac{1+J}{3-J} \\ \nu_{2211} &= \frac{1-J}{3+J} \end{aligned} \right\} \quad (5.115)$$

$$G_{1122} = G_{2211} = \frac{Nl^2 E \Gamma_*}{8 V_*} (1 - J^2)$$

となる。

($Nl^2 E \Gamma_* / V_*$)で規格化した弾性常数および工学常数とJの関係を図5.3.3に示す。

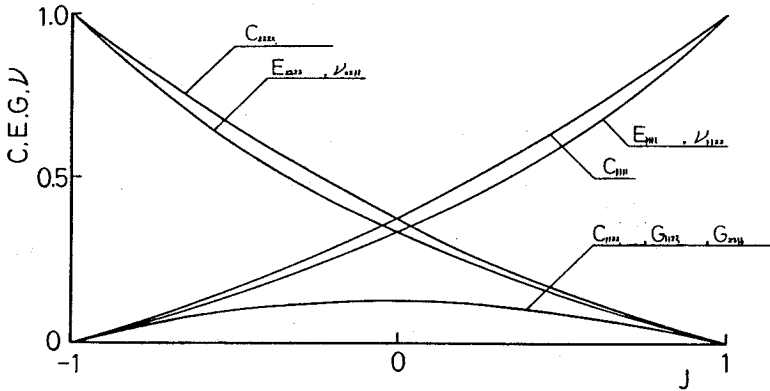


図5.3.3 弾性常数, 工学常数と配向係数Jの関係。

5.3.5 2軸配向繊維集合体の弾性常数および工学常数

織物や2軸延伸フィルムのように配向主軸が2方向である繊維集合体の弾性常数および工学常数を求める。

代表的な2軸配向集合体の配向角分布は

$$q(\varphi) = \frac{1}{2} \left\{ q_1(\varphi) + q_2\left(\varphi - \frac{\pi}{2}\right) \right\} \quad (5.116)$$

とおける。 $q_1(\varphi)$, $q_2(\varphi)$ は単軸変形のときの配向角分布(5.9.0)式で与えられる。

(5.116)式を(5.101)式へ代入して計算すると

$$\left. \begin{aligned} C_{1111} &= \frac{Nl^2 E \Gamma_*}{V_*} \left\{ (1+J_1)(3+J_1) + (1-J_2)(3-J_2) \right\} \\ C_{2222} &= \frac{Nl^2 E \Gamma_*}{V_*} \left\{ (1-J_1)(3-J_1) + (1+J_2)(3+J_2) \right\} \end{aligned} \right\} \quad (5.117)$$

$$C_{1122} = C_{2211} = \frac{Nl^2 E \Gamma_*}{16 V_*} \left\{ (1 - J_1^2) + (1 - J_2^2) \right\}$$

となる。ここで J_1, J_2 は $q_1(\varphi), q_2(\varphi)$ の配向係数である。

特別の場合として $J_1 = J_2$ の条件では (5.117) 式は

$$\left. \begin{aligned} C_{1122} = C_{2222} &= \frac{Nl^2 E \Gamma_*}{8 V_*} (3 + J_1^2) \\ C_{1122} &= \frac{Nl^2 E \Gamma_*}{8 V_*} (1 - J_1^2) \end{aligned} \right\} \quad (5.118)$$

となり工学常数は

$$\left. \begin{aligned} E_{1111} = E_{2222} &= \frac{Nl^2 E \Gamma_*}{V_*} \frac{(1 + J_1^2)}{(3 + J_1^2)} \\ \nu_{1122} = \nu_{2211} &= \frac{1 - J_1^2}{3 + J_1^2} \\ G_{1122} = G_{2211} &= \frac{Nl^2 E \Gamma_*}{8 V_*} (1 - J_1^2) \end{aligned} \right\} \quad (5.119)$$

となる。

弾性常数および工学常数と配向係数の関係を図 5.3.4 に示す。

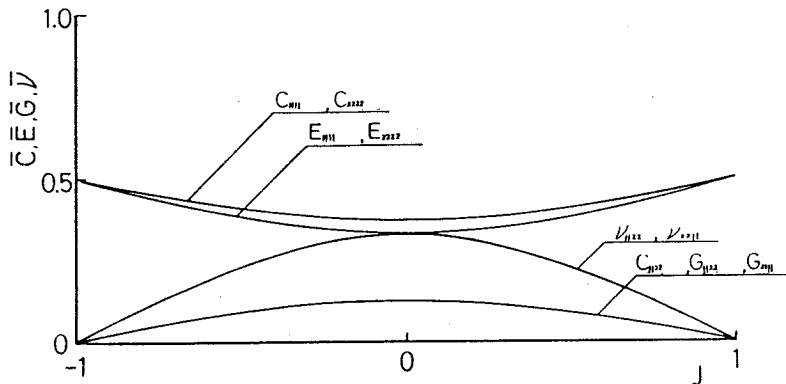


図 5.3.4 2 軸配向のときの弾性常数, 工学常数と配向係数 J の関係

5.3.6 任意方向の弾性常数および工学常数

X軸に対して任意の角度 α 方向の工学常数を求める。任意方向に座標変換したときの応力、歪テンソルを ϵ'_{kl} , σ'_{kl} とすると

$$\begin{bmatrix} \epsilon'_{11} \\ \epsilon'_{22} \\ \epsilon'_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{XX} & C_{XY} & C_{XS} \\ C_{XY} & C_{YY} & C_{YS} \\ C_{XS} & C_{YS} & C_{SS} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma'_{11} \\ \sigma'_{22} \\ \sigma'_{12} \end{bmatrix} \quad (5.120)$$

とおける。ここで

$$\begin{aligned} C_{XX} &= \frac{\cos^4 \alpha}{E_{1111}} + \frac{\sin^4 \alpha}{E_{2222}} + \cos^2 \alpha \sin^2 \alpha \left(\frac{1}{G_{1122}} - 2 \frac{\nu_{1122}}{E_{1111}} \right) \\ C_{YY} &= \frac{\sin^4 \alpha}{E_{1111}} + \frac{\cos^4 \alpha}{E_{2222}} + \cos^2 \alpha \sin^2 \alpha \left(\frac{1}{G_{1122}} - 2 \frac{\nu_{1122}}{E_{1111}} \right) \\ C_{SS} &= \frac{1}{G_{1122}} + 4 \cos^2 \alpha \sin^2 \alpha \left(\frac{1}{E_{1111}} + \frac{1}{E_{2222}} + 2 \frac{\nu_{1122}}{E_{1111}} - \frac{1}{G_{1122}} \right) \\ C_{XY} &= -\frac{\nu_{1122}}{E_{1111}} + \cos^2 \alpha \sin^2 \alpha \left(\frac{1}{E_{1111}} + \frac{1}{E_{2222}} + 2 \frac{\nu_{1122}}{E_{1111}} - \frac{1}{G_{1122}} \right) \\ C_{XS} &= -2 \cos^3 \alpha \sin \alpha \frac{1 + \nu_{1122}}{E_{1111}} + 2 \cos \alpha \sin^3 \alpha \frac{1 + \nu_{2211}}{E_{2222}} \\ &\quad + \cos \alpha \sin \alpha (\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha) \frac{1}{G_{1122}} \\ C_{YS} &= -2 \cos \alpha \sin^3 \alpha \frac{1 + \nu_{1122}}{E_{1111}} + 2 \cos^3 \alpha \sin \alpha \frac{1 + \nu_{2211}}{E_{2222}} \\ &\quad - \cos \alpha \sin \alpha (\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha) \frac{1}{G_{1122}} \end{aligned} \quad (5.121)$$

である。

任意方向 α の単軸引張を考えると (5.120) 式で $\sigma'_{22} = \sigma'_{12} = 0$ とおけるので

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon'_{11} &= C_{XX} \sigma'_{11} \\ \varepsilon'_{22} &= C_{XY} \sigma'_{11} \\ \varepsilon'_{12} &= C_{XS} \sigma'_{11} \end{aligned} \right\} \quad (5.122)$$

(5.122) 式より任意方向のヤング率 $E(\alpha)$ は

$$E(\alpha) = \frac{\sigma'_{11}}{\varepsilon'_{11}} = \frac{1}{C_{XX}} \quad (5.123)$$

ポアソン比 $\nu(\alpha)$ は

$$\nu(\alpha) = - \frac{\varepsilon'_{22}}{\varepsilon'_{11}} = - \frac{C_{XY}}{C_{XX}} \quad (5.124)$$

せん断弾性率 $G(\alpha)$ は

$$G(\alpha) = \frac{\sigma'_{12}}{\varepsilon'_{12}} = \frac{1}{C_{SS}} \quad (5.125)$$

となる。ここで (5.121) 式へ (5.115) 式を代入すると

$$\left. \begin{aligned} C_{XX} &= \frac{V_*}{Nl^2 E \Gamma_*} \left(\frac{-8J}{1-J^2} \cos^2 \alpha + \frac{3+J}{1-J} \right) \\ C_{YY} &= \frac{V_*}{Nl^2 E \Gamma_*} \left(\frac{8J}{1-J^2} \cos^2 \alpha + \frac{3-J}{1+J} \right) \\ C_{SS} &= \frac{V_*}{Nl^2 E \Gamma_*} \frac{8}{(1-J^2)} \\ C_{XY} &= \frac{V_*}{Nl^2 E \Gamma_*} \end{aligned} \right\} \quad (5.126)$$

$$C_{XS} = \frac{V_*}{Nl^2 E \Gamma_*} \frac{4J}{(1-J^2)} \sin 2\alpha$$

$$C_{YS} = \frac{V_*}{Nl^2 E \Gamma_*} \frac{4J}{(1-J^2)} \sin 2\alpha$$

と表わせる。

(5.126) 式を (5.123), (5.124), (5.125) 式へ代入すると工学常数は

$$E(\alpha) = \frac{Nl^2 E \Gamma_*}{V_*} \left(\frac{-8J}{1-J^2} \cos^2 \alpha + \frac{3+J}{1-J} \right)^{-1}$$

$$\nu(\alpha) = \left(\frac{-8J}{1-J^2} \cos^2 \alpha + \frac{3+J}{1-J} \right)^{-1}$$

$$G(\alpha) = \frac{Nl^2 E \Gamma_*}{V_*} \left(\frac{1-J^2}{8} \right)$$

(5.127)

となる。

($Nl^2 E \Gamma_* / V_*$) で規格化した任意方向のヤング率, せん断弾性率と配向係数の関係を

図 5.3.5 ~ 5.3.6 に示す。

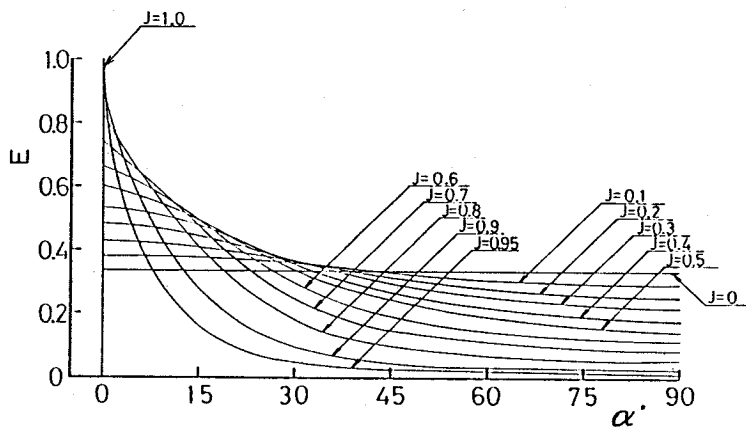


図 5.3.5 任意方向 α のヤング率。

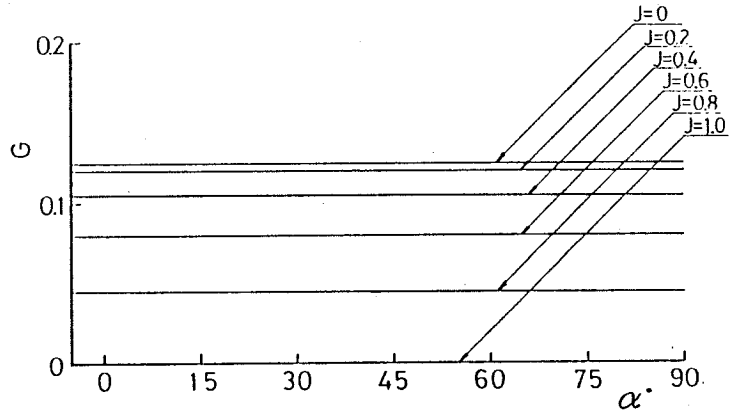


図5.3.6 任意方向 α のせん断弾性率。

2軸配向繊維集合体の場合も同様に(5.1.19)式を(5.1.21)式へ代入すると弾性常数は

$$\left. \begin{aligned}
 C_{XX} = C_{YY} &= \frac{V_*}{Nl^2 E \Gamma_*} \left\{ \frac{16J^2}{J^4 - 1} (\cos^4 \alpha - \cos^2 \alpha) + \frac{3 + J^2}{1 + J^2} \right\} \\
 C_{SS} &= \frac{V_*}{Nl^2 E \Gamma_*} \left\{ -\frac{64J^2}{J^4 - 1} (\cos^4 \alpha - \cos^2 \alpha) + \frac{8}{1 - J^2} \right\} \\
 C_{XY} &= \frac{V_*}{Nl^2 E \Gamma_*} \left\{ -\frac{16J^2}{J^4 - 1} (\cos^4 \alpha - \cos^2 \alpha) + \frac{J^2 - 1}{J^2 + 1} \right\} \\
 C_{XS} &= \frac{V_*}{Nl^2 E \Gamma_*} \left\{ -\frac{4J^2}{J^4 - 1} \sin 2\alpha \cos 2\alpha \right\} \\
 C_{YS} &= \frac{V_*}{Nl^2 E \Gamma_*} \left\{ -\frac{4J^2}{J^4 - 1} \sin 2\alpha \cos 2\alpha \right\}
 \end{aligned} \right\} (5.1.28)$$

となる。したがって(5.1.28)式を(5.1.23)～(5.1.25)式へ代入すると2軸配向繊維集合体の任意方向の工学常数は

$$\begin{aligned}
 E(\alpha) &= \frac{Nl^2 E \Gamma_*}{V_*} \left\{ \frac{16J^2}{J^4 - 1} (\cos^4 \alpha - \cos^2 \alpha) + \frac{3 + J^2}{1 + J^2} \right\}^{-1} \\
 \nu(\alpha) &= \frac{16J^2 (\cos^4 \alpha - \cos^2 \alpha) - (J^2 - 1)^2}{16J^2 (\cos^4 \alpha - \cos^2 \alpha) + (J^2 + 3)(J^2 - 1)} \\
 G(\alpha) &= \frac{Nl^2 E \Gamma_*}{V_*} \left\{ -\frac{64J^2}{J^4 - 1} (\cos^4 \alpha - \cos^2 \alpha) + \frac{8}{1 - J^2} \right\}^{-1}
 \end{aligned}
 \tag{5.129}$$

と表わせる。

$(Nl^2 E \Gamma_* / V_*)$ で規格化した任意方向のヤング率，ポアソン比，せん断弾性率と配向係数の関係を図 5.3.7～5.3.9 に示す。

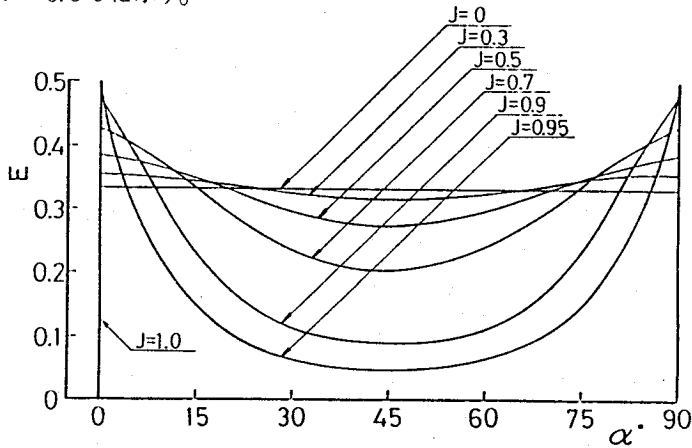


図 5.3.7 2 軸配向のときの任意方向 α のヤング率。

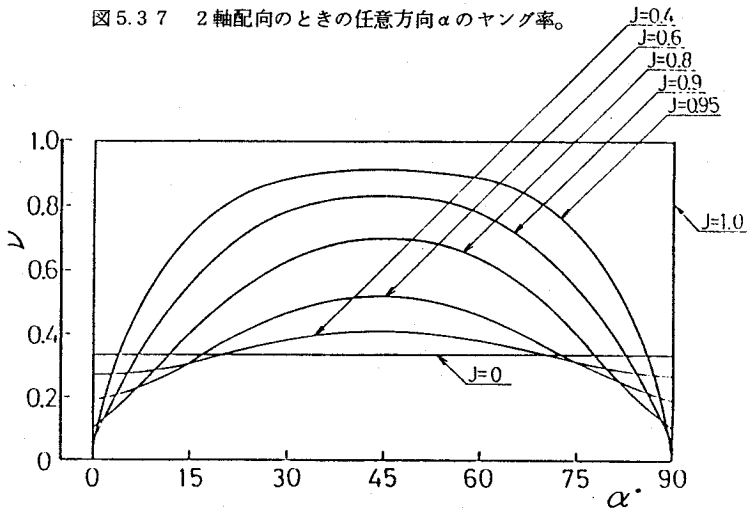


図 5.3.8 2 軸配向のときの任意方向 α のポアソン比。

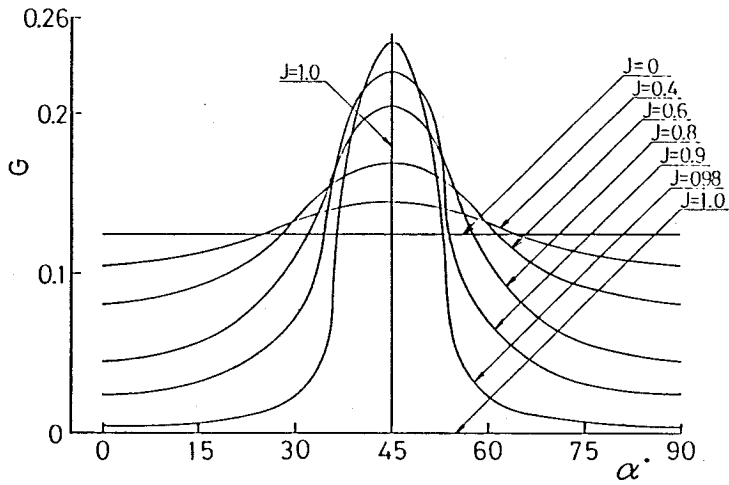


図 5.3 9 2 軸配向のときの任意方向 α のせん断弾性率。

5.4 結果と考察

繊維集合体の構成方程式を求めるとき、単繊維の力 F は (4.4 0) 式で

$$F = E l \epsilon_{kl} s_k s_l \quad (5.1 3 0)$$

と表わされている。ここで E はバネ常数、 l は繊維長、 ϵ_{kl} は歪テンソルである。

いま a を単繊維の断面積、 E' を繊維軸方向のヤング率とすると (5.1 3 0) 式は

$$F = a E' \epsilon_{kl} s_k s_l \quad (5.1 3 1)$$

となる。(5.1 3 1) 式を (4.3 9) 式へ代入すると

$$\sigma_{ij} = \frac{aNlE'\Gamma}{V} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \epsilon_{kl} s_i s_j s_k s_l \Omega(\theta, \varphi) \sin\theta d\theta d\varphi \quad (5.1 3 2)$$

と表わされる。(5.1 3 2) 式において体積分率を導入すると

$$v_f = \frac{aNl}{V} \quad (5.1 3 3)$$

より

$$\sigma_{ij} = v_f E' \Gamma \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \epsilon_{kl} s_i s_j s_k s_l \Omega(\theta, \varphi) \sin\theta d\theta d\varphi \quad (5.1 3 4)$$

となる。

(5.134)式において、体積分率 v_f 、単繊維のヤング率 E' 、有効要素率 Γ と配向角分布 $\Omega(\theta, \varphi)$ がわかれば集合体としての弾性常数や工学常数を求めることができる。

そこで、3次元直交異方性繊維集合体として厚さ15mmの繊維フィルター(テトロン繊維)を用いて幾何学構造の測定とヤング率の測定を行った。

繊維フィルターから単繊維を10本取り出し、万能投影器で拡大して測定した結果、平均繊維長 $\bar{l} = 43.6 \text{ mm}$ 、平均断面積は $\bar{a} = 0.0154 \text{ mm}^2$ 、アスペクト比は $k = 311$ 、そして繊維の体積分率は $v_f = 0.07$ であった。3次元配向角分布 $\Omega(\theta, \varphi)$ は直接測定することは困難であるので、直交異方性を表わす(5.13)式で近似し、(5.28)式で与えられている $\nu(\theta_*, \varphi_*)$ の測定によって $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ を求めた。その結果

$$\left. \begin{aligned} \nu(\pi/2, 0) &= 72.1 \\ \nu(\pi/2, \pi/2) &= 56.6 \\ \nu(0, 0) &= 2.22 \end{aligned} \right\} \quad (5.135)$$

であった。(5.28)式でこのような関係をみたす配向角分布は近似的に

$$\left. \begin{aligned} \lambda_1 &= 3.57 \\ \lambda_2 &= 2.36 \\ \lambda_3 &= 0.120 \end{aligned} \right\} \quad (5.136)$$

と表わされる。これはZ軸方向に圧縮され、面配向に近い配向状態を表わしている。(5.136)式の $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ を(5.13)式へ代入すれば繊維フィルターの配向角分布 $\Omega(\theta, \varphi)$ がわかる。

有効要素率 Γ は、(5.37)式へ求められた配向角分布 $\Omega(\theta, \varphi)$ を代入すると $I = 0.615$ であるので、

$$\begin{aligned} m &= (8/\pi) v_f k I \\ &= 34.1 \end{aligned} \quad (5.137)$$

となり、 Γ は(5.35)式より

$$\Gamma = 0.934 \quad (5.138)$$

と計算される。

単繊維のヤング率 E' は、インストロン型引張試験機により測定した結果 $E' = 5246 \text{ g/mm}^2$ であった。

以上、実測によって求められた v_f , E' , Γ , $Q(\theta, \varphi)$ を (5.53) ~ (5.55) 式へ代入して計算するとヤング率の計算値 E_{1111} (計), E_{2222} (計), E_{3333} (計) がつぎのように求められた。

$$\left. \begin{aligned} E_{1111} \text{ (計)} &= 140 \text{ g/mm}^2 \\ E_{2222} \text{ (計)} &= 75.8 \text{ g/mm}^2 \\ E_{3333} \text{ (計)} &= 0.0744 \text{ g/mm}^2 \end{aligned} \right\} \quad (5.139)$$

これに対して X, Y, Z 軸方向からの単軸引張実験によるヤング率の実測値 E_{1111} (実), E_{2222} (実), E_{3333} (実) は

$$\left. \begin{aligned} E_{1111} \text{ (実)} &= 141 \text{ g/mm}^2 \\ E_{2222} \text{ (実)} &= 73.9 \text{ g/mm}^2 \\ E_{3333} \text{ (実)} &= 0.0753 \text{ g/mm}^2 \end{aligned} \right\} \quad (5.140)$$

となっており、計算結果とよく合っていることがわかる。

つぎに XY 平面内で X 軸に対して α 方向から引張ったときのヤング率 $E(\alpha)$ の実測値と計算の比較を図 5.40 に示す。両者はよく一致している。

ナイロン、テトロンなどの高分子繊維は繊維軸方向に延伸されることによって分子鎖が配列し、ヤング率や強度が大きくなることについてはよく知られており、繊維工学においても重要な意味を持っている。

J. H. Wakelin ら⁽³⁰⁾ はナイロン 66 とダクロン繊維のヤング率を動的測定法(曲げ)と静的測定法(引張)によって求めている。繊維はあらかじめ繊維軸方向に 1 ~ 6 倍の伸張がなされており、そのときの断面積も測定されている。

繊維軸を Z 軸と一致させて考えると、繊維の延伸は Z 軸方向の単軸変形であり、配向角分布は (5.17) 式で与えられて

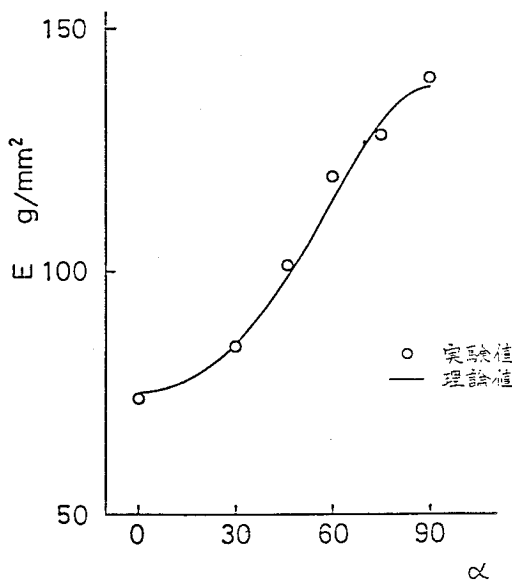


図 5.40 繊維フィルターの XY 平面内における任意方向 α のヤング率における実験値と計算値の比較。

いるような横断等方性となる。初期断面積を a_0 とすると延伸後の断面積 a は

$$\begin{aligned} a &= a_0 \lambda_1 \lambda_2 \\ &= a_0 \lambda_3^{-2p_{31}} \end{aligned} \quad (5.141)$$

と表わされる。(5.141)式を変形すると

$$p_{31} = p_{32} = \frac{\log a_0 - \log a}{2 \log \lambda_3} \quad (5.142)$$

となり延伸にともなうポアソン比 p_{31} , p_{32} が, a_0 , a , λ_3 によって計算できる。Wakelin らのヤング率と断面積の測定値, それに(5.142)式で計算されるポアソン比 p_{31} を表 5.1 ~ 5.5 に示す。その結果, 各伸張率によってポアソン比はかなり異なっており, とくに $\lambda_3 = 2$ のときのポアソン比が他の伸張率のときに比べて小さくなっていることに注意する必要がある。

表 5.1 ナイロン 66 のヤング率 (引張)

伸張率	ヤング率 (g/cm ²)×10 ⁻⁶	断面積 (μ ²)	ポアソン比 (p ₃₁)
1	8.8	2694	
2	18.3	1369	0.4883
3	24.0	1055	0.4267
4	33.9	789	0.4429
5	42.8	608	0.4625
6	51.8	561	0.4379

表 5.2 ナイロン 66 のヤング率 (曲げ)

伸張率	ヤング率 (g/cm ²)×10 ⁻⁶	断面積 (μ ²)	ポアソン比 (p ₃₁)
1	16.4	2660	
2	21.0	1846	0.2635
3	33.9	1122	0.3929
4	42.6	788	0.4388
5	50.3	609	0.4580
6	57.0	560	0.4348

表 5.3 ダクロン繊維のヤング率 (引張)

伸張率	ヤング率 (g/cm ²)×10 ⁻⁶	断面積 (μ ²)	ポアソン比 (p ₃₁)
1	22.0	2748	
2	28.6	1876	0.2754
3	81.0	905	0.5055
4	125.0	754	0.4664
5	130.3	601	0.4722
6	140.4	512	0.4689

表 5.4 ダクロン繊維のヤング率 (曲げ)

伸張率	ヤング率 (g/cm ²)×10 ⁻⁶	断面積 (μ ²)	ポアソン比 (p ₃₁)
1	23.9	2746	
2	31.9	1700	0.3459
3	93.7	885	0.5153
4	117.6	759	0.4638
5	142.4	579	0.4836
6	138.2	516	0.4667

高分子繊維が延伸変形を受けるときの構成方程式は(5.42)式で与えられているが、分子鎖のアスペクト比 k が十分大きいと仮定すると有効要素率は $\Gamma \doteq 1$ とおける。単繊維の初期体積を V_0 とすると構成方程式は

$$\sigma_{ij} = \frac{Nl_2^2 \Gamma}{V_0 \lambda_3^{1-2p_{31}}} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \cdot \varepsilon_{kl} s_i s_j s_k s_l Q_{*}(\theta, \varphi) \cdot \sin\theta d\theta d\varphi \quad (5.143)$$

となる。(5.143)式へ(5.17)式の配向角分布を代入すると弾性常数および工学常数を導くことができる。(5.143)式の構成方程式に基づいて、(5.75)式のヤング率 E_{3333} を p_{31} が変化する場合と、 $p_{31} = p_{32} = 0.5$ すなわち体積一定の場合について計算した。そしてWakelinらの測定した実測値との比較を図5.41～5.45に示す。実測値の誤差が大きいため、計算値との一致はよくないが、ヤング率が λ_3 とともに大きくなっていく傾向は、ほぼ同様である。ナイロン66については体積一定とする場合より体積変化がある場合の計算値の方が適合性が良く

表5.5 ダクロン繊維のヤング率(曲げ)

伸張率	ヤング率 (g/cm ²)×10 ⁻⁶	断面積 (μ ²)	ポアソン比 (p ₃₁)
1	24.3	2689	
2	42.6	1441	0.4500
3	83.2	873	0.5120
4	109.6	743	0.4639
5	131.9	571	0.4814
6	127.5	500	0.4695

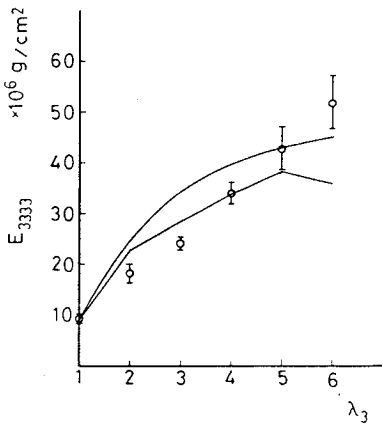


図5.41 ナイロン66の延伸によるヤング率の変化(◇は実測値、曲線は体積一定、折れ線は体積変化があるとしたときの理論値)。

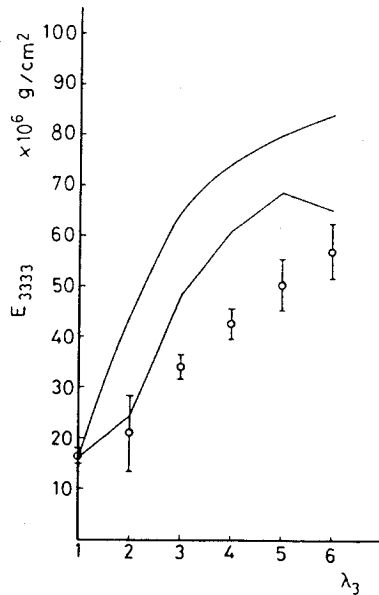


図5.42 ナイロン66の延伸によるヤング率の変化(◇は実測値、曲線は体積一定、折れ線は体積変化があるとしたときの理論値)。

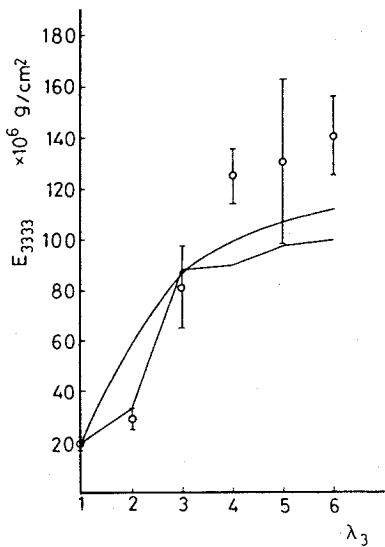


図 5.4.3 ダクロンの延伸によるヤング率の変化(○は実測値, 曲線は体積一定, 折れ線は体積変化があったときの理論値)。

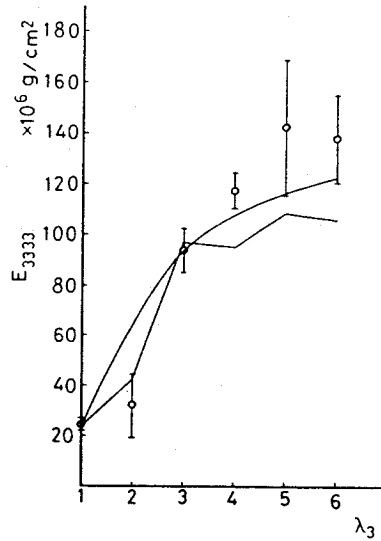


図 5.4.4 ダクロンの延伸によるヤング率の変化(○は実測値, 曲線は体積一定, 折れ線は体積変化があったときの理論値)。

なっている。ダクロンの場合は、 $\lambda_3 = 2$ のときのポアソン比が小さく、そのため体積の増加によってヤング率の配向による増加がおさえられている。この傾向はポアソン比が変化するという条件で計算された折れ線の様子と $\lambda_3 \leq 3$ でよく一致している。

2次元繊維集合体については、単軸配向の場合は紙(和紙, 新聞紙), 不織布, 革, 2軸配向の場合は不織布, ポリエチレンフィルム, 織物の任意方向のヤング率を測定した。

紙, 不織布, 革のように繊維配向の様子が光学的に観測できる場合は写真より直接配向角分布を測定した。その一例を図 5.4.6 に示す。そして、配向角分布より配向係数 J を計算する。

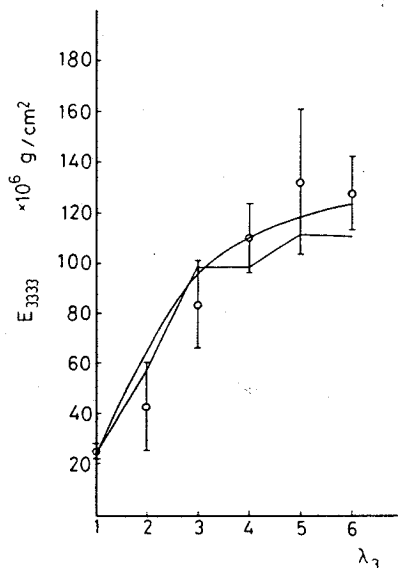


図 5.4.5 ダクロンの延伸によるヤング率の変化(○は実測値, 曲線は体積一定, 折れ線は体積変化があったときの理論値)。

単軸，2軸配向のヤング率は配向係数 J によってそれぞれ (5.115)，(5.119) 式で与えられている。 J がわかっている2次元繊維集合体の X 軸方向のヤング率の実測値と (5.115)，(5.119) 式を比較することによって ($Nl^2 E \Gamma / V$) を求めることができる。

($Nl^2 E \Gamma / V$) と J がわかると (5.127)，(5.129) 式によって X 軸に対して任意方向のヤング率が計算できる。紙，不織布，革

に関する実測値と計算値の比較を図 5.4 7～5.5 1 に示す。いずれの場合もほぼ一致している。

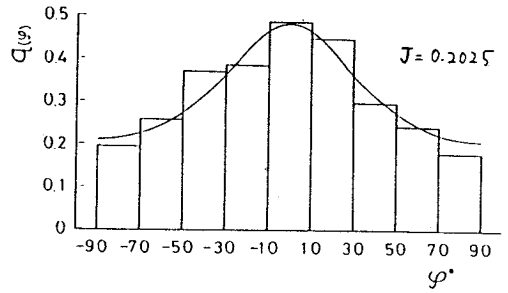


図 5.4 6 単軸配向繊維集合体の配向角分布 (曲線は $J=0.2025$ のときの理論値，ヒストグラフは実験値を表わしている)。

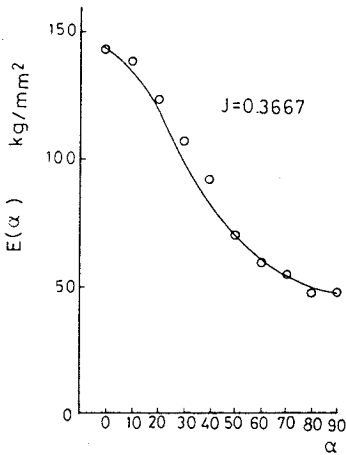


図 5.4 7 新聞紙の任意方向 α のヤング率 (曲線は計算値， \circ 印は実測値)。

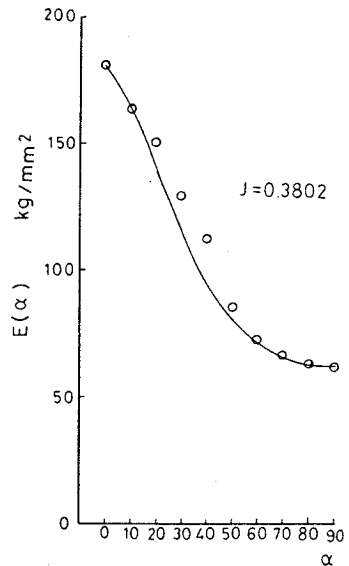


図 5.4 8 和紙の任意方向 α のヤング率 (曲線は計算値， \circ 印は実測値)。

ポリエチレンフィルムの場合，直接配向の様子を見ることができないので，まず任意方向のヤング率を測定し， $E(0)$ ， $E(\pi/4)$ ， $E(\pi/2)$ の比を計算する。そして，その比を実現できる配向係数を (5.117) 式で試行錯誤的に見つけ出す。その結果， $J_1 = 0.6$ ， $J_2 = -0.4$ の条

件で実測値と計算値がほぼ合い、結果として配向状態が評価できるとともに、ヤング率以外の工学
 常数や弾性常数が理論式より評価できる。

織物については、たて糸とよこ糸のヤング率が異なっている。さらに糸が2次元配向を有してい
 るとみなして、ポリエチレンフィルムのとときと同様、 $E(0)$ 、 $E(\pi/4)$ 、 $E(\pi/2)$ の比が合う
 ように J を決定した。ポリエチレンフィルムと織物の実測値と計算値の比較を図 5.5 5 2、5.5 5
 3 に示す。

以上、3次元直交異方性、横断等方性、2
 次元直交異方性繊維集合体のヤング率につ
 いて理論と実験の比較検討を行い、両者の数値
 や傾向がほぼ合うことを確かめた。

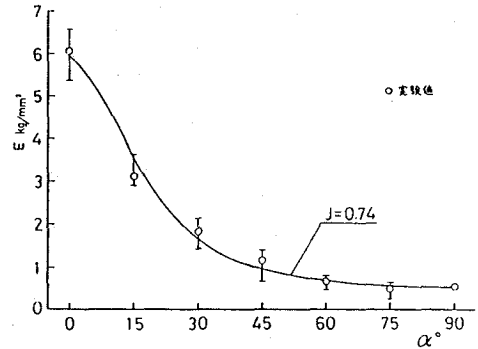


図 5.4 9 不織布の任意方向 α のヤング率
 (曲線は計算値、 ϕ は 5 回の実
 測値の最大、平均、最小値)。

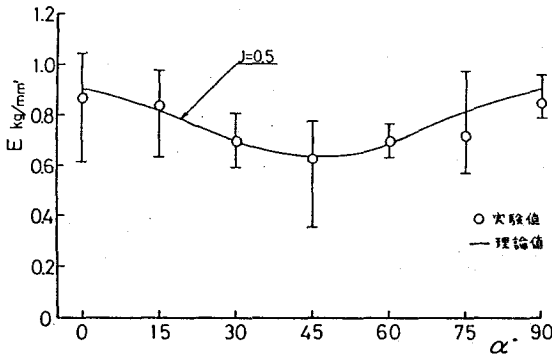


図 5.5 0 2 軸配向不織布の任意方向 α のヤング率
 (曲線は計算値、 ϕ は 5 回の実測による
 最大、平均、最小値)。

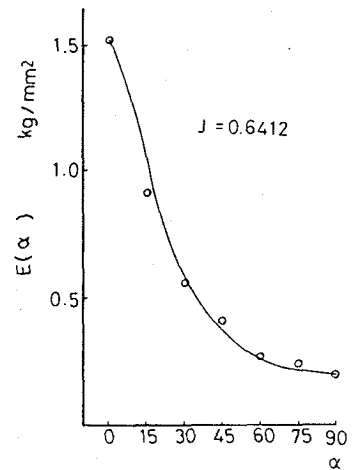


図 5.5 1 革の任意方向 α のヤング率
 (曲線は計算値、 ϕ は 5 回の実測値)。

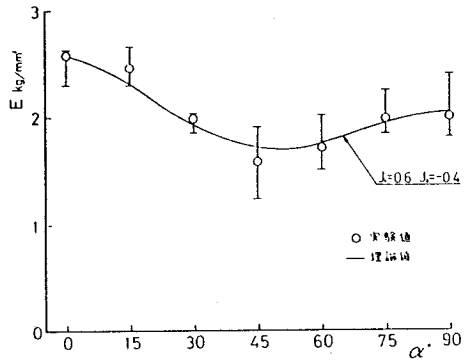


図 5.5.2 2軸配向ポリエチレンフィルムの任意方向 α のヤング率(曲線は計算値, ϕ は5回の実測による最大,平均,最小値)。

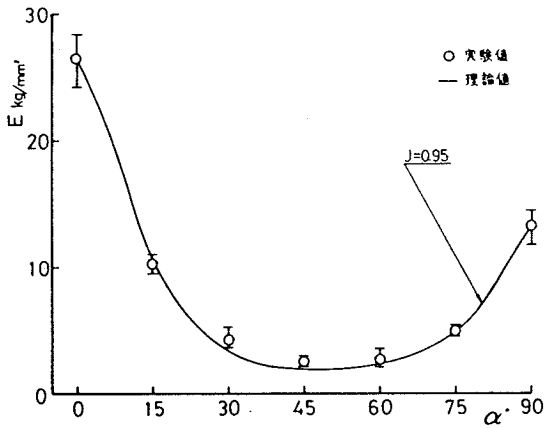


図 5.5.3 織物の任意方向 α のヤング率(曲線は計算値, ϕ は5回の実測による最大,平均,最小値)。

6章 結 論

6. 結 論

繊維集合体中を粒子や流体が通過するときの特性や集合体に外力が作用したときの弾性特性は、集合体を構成している単繊維の幾何学特性と物性、さらにその集合体構造に依存している。

繊維集合体の幾何学構造と物性を関連づけるための基礎論として2章では2次元繊維集合体の多角形の辺の数、周長、変形度、面積の分布と、その k 次モーメントを理論的に求めモンテカルロ・シミュレーションの結果とよく合うことを確かめた。

3章では繊維フィルター中を粒子が通過するときの粒子通過率、目づまり効果、通過粒子径の変化などについて、粒子—繊維衝突モデルを用いて理論解析を行い、モンテカルロ・シミュレーションの結果とよく合うことを確かめた。さらに多角形の流体半径の分布およびその k 次モーメントを求め、多角形の流体通過率を計算した。

4章では繊維集合体の力学モデルについて検討し、弾性常数や応力が配向角分布のフーリエ変換によって統一的に表わされることを示した。

5章では繊維集合体が単純変形を受けたときの配向角分布を理論的に誘導し、そのような配向状態における弾性常数や工学常数を求めた。そして、ヤング率などの工学常数については理論値と実験値がほぼ合うことを確かめた。

本研究の対象となった集合体材料は紙、不織布、綿塊、繊維フィルター、織物、革、ポリエチレンフィルム、ナイロンやテトロン繊維であったが、それらがすべて本研究でいうところの「繊維集合体」として、その幾何学構造と力学特性の関係が説明できることを示した。

今後は、幾何学構造として繊維の本質的性である曲がりを評価できる理論を確立する必要がある。そして力学特性については、弾性論としては曲げやねじれの問題、より大きな変形を受けたときの強度の予測、さらに生物を構成している繊維集合体の粘弾性特性についても研究を進めていく必要があると考える。

文 献

- 1) O. Kallmes, H. Corte ; Tappi., 43, No 9, 737(1960)
- 2) 小森, 牧島 ; 織学誌., 32, No 6, 71(1976)
- 3) J. W. S. Hearle, V. Ozsalav ; J. Text. Inst., 11, 487(1979)
- 4) R. S. Stein, S. N. Stidham ; J. Appl. phys., 35, No 1, 42(1964)
- 5) 栗田稔 ; 積分幾何, 共立出版(1956)
- 6) E. F. Harding, D. G. Kendall ; Stochastic Geometry, John Wiley & Sons.
- 7) S. Godsmit ; Rev. Mod. phys, 17, 321(1945)
- 8) R. E. Miles ; Proc. Nat. Acad. Sci, U. S. A, 52, 901(1964)
- 9) H. W. Piekarr, L. A. Clareburg ; Chem. Eng. Sci., 22, 1399(1967)
- 10) M. S. Abdel-Ghani, G. A. Davies ; Chem. Eng. Sci., 40, 117(1985)
- 11) D. F. Sherony, R. C. Kintner ; Canad. J. Chem. Eng., 49, 314(1971)
- 12) 日本化学会編 ; 新実験化学講座 19., 高分子化学Ⅱ, p793~809(1978), 丸善
- 13) R. J. Roe ; J. Appl. phys., 36, 2024(1965)
- 14) S. Nomura, H. Kawai, I. Kimura, M. Kagiya ; J. Polym. Sci., A-2, 8, 383(1970)
- 15) H. L. Cox ; Brit. J. Appl. phys., 3, No 4, 72(1952)
- 16) D. R. Petterson ; Text. Res. J., 33, 809(1963)
- 17) S. Backer ; Text. Res. J., 30, 704(1960)
- 18) J. W. S. Hearle ; Text. Res. J., 34, 181(1964)
- 19) P. J. Stevenson ; Text. Res. J., 34, 181(1964)
- 20) C. C. Hsiao ; J. Appl. phys., 30, No 10, 1492(1959)
- 21) S. R. Kao ; J. Appl. phys., 35, No 11, 3127(1964)
- 22) 北川敏男 ; マルコフ過程, 共立出版(1967)
- 23) ラオ ; 統計的推測とその応用., p156, 東京図書(1977)

- 24) 森口, 宇田川, 一松, 数学公式 I, p247, 岩波全書 (1956)
- 25) S. W. Tsai, J. J. Pagano ; "Invariant Properties of Composite Materials" in Composite Materials Workshop., Technomic Pub, U. S. A (1968)
- 26) P. H. Hermans ; Contribution to the physics of Cellulose Fibers., Elsevier, Amsterdam (1946)
- 27) 山本 ; 物体の変形学, p43, 誠文堂新光社 (1972)
- 28) 小森, 牧島 ; 織学誌., 32, No 9 (1976)
- 29) P. J. Flory ; Principles of polymer Chemistry., Ithaca, Cornell University Press (1953)
- 30) J. W. Wakelin, E. T. L. Vong, D. J. Montgomery, J. H. Dusenbury ; J. Appl. phys., 26, No 7, 786 (1955)

関 連 発 表 論 文

- 1) 2次元繊維集合体の確率幾何
(第1報) 平面内のランダム直線によって生成される多角形の幾何学特性, 繊維機械学会論文集, 第36巻8号, T111 (1983)
- 2) 2次元繊維集合体の確率幾何
(第2報) ランダム直線によって生成される多角形の周長, 正多角形からの変形度および面積の分布, 繊維機械学会論文集, 第37巻3号, T31 (1984)
- 3) 2次元繊維集合体の確率幾何
(第3報) 位置がランダムでかつ配向を有する直線によって生成される多角形の幾何学特性, 繊維機械学会論文集, 第37巻12号, T201 (1984)

謝 辞

本論文を結ぶにあたり，終始厚意あふれる御指導，御鞭撻を賜りました大阪大学工学部機械工学科，堀川明教授に謹んで深甚の謝意をささげます。また，本論文の作成にあたり，貴重な御教示と綿密な御校閲をいただきました大阪大学工学部機械工学科，浜田実教授ならびに応用物理学科，西田俊夫教授に心より感謝申し上げます。

本研究の遂行にあたり，たえず有益な御助言をいただきました大阪大学工学部機械工学科，中村喜代次助教授ならびに千葉訓司助手に深く感謝致します。