The University of Osaka
Institutional Knowledge Archive

Title	自由電子レーザーの理論的研究
Author(s)	田口, 俊弘
Citation	大阪大学, 1982, 博士論文
Version Type	VoR
URL	https://hdl.handle.net/11094/2560
rights	
Note	

The University of Osaka Institutional Knowledge Archive : OUKA

https://ir.library.osaka-u.ac.jp/

The University of Osaka

自由電子レーザーの理論的研究

昭和57年1月

田　口　俊　弘

内　容　梗　概

本論文は、筆者が大阪大学大学院工学研究科電気工学専攻後期課程において行った自由電子レーザーについての理論的研究をまとめたものである。

自由電子レーザーは、高効率、チューナブルなレーザーとして最近非常に期待されているものであるが、その実用化には未だ多くの問題点が残されている。筆者はこの自由電子レーザーの動作解析および、効率改善の研究を、種々の領域において行った。特に、電子ビームと平行に伝播するマイクロ波が、効率の改善に非常に有効であることを明らかにした。

本論文は、5章より構成されている。

第一章は序論であり、自由電子レーザーの、特徴、動作原理、実験の現状について述べる。

第二章では、誘導コンプトン散乱領域での自由電子レーザーの解析を行い、増幅の飽和がビームのエネルギー分布の準線形拡散によって起こることを示す。同時に、効率改善のために加えたマイクロ波が、非常に有用であることを示す。

第三章では、電子捕獲の効果が大きい場合の自由電子レーザーの飽和過程について解析し、マイクロ波が有効であることを示す。

第四章では、ヘリカルウィグラーの磁場に横方向不均一性がある場合を解析し、光の増幅に、電子ビームの密度とエネルギー拡がりより決定される閾値が存在することを示す。

第五章は結論であって、得られた結果をまとめ、本論文の総括を行う。

目　次

緒　言　1

第一章、自由電子レーザーとは、　3
§1-1、自由電子レーザーの概要　3
§1-2、相対論的ドップラー効果による短波長化　4
§1-3、増幅機構における進行波管と自由電子レーザーの対比　7
§1-4、誘導ラマン散乱と誘導コンプトン散乱　9
§1-5、自由電子レーザーの飽和機構とその改良　10
§1-6、実験状況　12
§1-7、むすび　13

第二章、準線形理論による誘導コンプトン散乱領域における自由電子レーザーの解析とその高効率化　16
§2-1　ヘリカルウィグラー中での電子の運動と光の増幅　16
§2-2　準線形理論による電子ビームの分布の変化の記述　20
§2-3　電子のらせん運動によるシンクロトロン輻射　23
§2-4、電子ビームおよび出力光の空間的変化とエネルギー変換効率　25
§2-5　自由電子レーザーに対する外部電場の効果　32
§2-6　自由電子レーザーに対するマイクロ波の効果　34
§2-7、むすびと検討　36

第三章、電子捕獲による単一モード増幅の場合の飽和過程とマイクロ波の効果　43
§3-1　電子の運動方程式と光の増幅　43

§3-2. 捕獲粒子と非捕獲粒子 46
§3-3. 電子捕獲が強い場合の増幅光の飽和と
マイクロ波の効果 50
§3-4. 電子捕獲が弱い場合のマイクロ波の効果 54
§3-5 むすび 56

第四章 自由電子レーザーにおける2次元効果 59
§4-1 ヘリカルウィグラーの磁場の不均一 59
§4-2 不均一なヘリカルウィグラー中での電子の
運動と光の増幅 62
§4-3 光の線形増幅率 65
§4-4 箱形成長率を持つ媒質による光の増幅 69
§4-5. むすび

第五章 結論 77

謝辞 79

業績目録 80

緒　言

電磁波の発振，増幅技術において発振波長の短波長化を一挙に解決したものは、1954年における、メーザーおよび、それに続くレーザーの発明である。　それ以前のマイクロ波発振管（マグネトロン，クライストロン、進行波管、等）は発振波長が、装置の空間的構造で決まり、技術的に、波長をミリメートルのオーダーより下げるのは困難であった。　これに対し、レーザーは原子分子の励起レベルでの誘導放射を利用して発振増幅を行うために、適当な励起レベルが見出されれば、短波長化は自由である。

ところが、レーザーは、逆にその原理より明らかなように、発振周波数帯域が狭く、発振波長は自由に決定できない。さらに、励起効率の低さから、一般にエネルギー変換効率は低い。　このエネルギー変換効率の問題は、エネルギー問題解決の一手段とされる、レーザー核融合において特に重要であり、現在効率の高いレーザーの開発が急がれている。

自由電子レーザーは、従来のレーザーの欠点を補うものとして、最近盛んに研究されているものである。　これは、原理的にはマイクロ波発振管に近く、相対論的ドップラー効果によって短波長化を図るものである。

筆者はこの自由電子レーザーについての理論的研究を、行った。　これらは、次の3部より構成される。

(I)　誘導コンプトン散乱領域における自由電子レーザーの解析

従来の自由電子レーザーの解析は、電子ビームのエネルギー拡がりが小さく、かつ入力光として、単色性の良い場合が主であった。　これに対し、エネルギー拡が

りが比較的大きく、また入力光のスペクトルも広い場合を準線形理論を用いて解析した。この結果、電子ビームから出力光へのエネルギー変換効率が、ウィグラーの長さの1/2乗に比例して増大することを明らかにした。さらに、低いエネルギー変換効率を改善するために、電子ビームと平行に伝播するマイクロ波を加えた解析を行った。その結果、効率が飛躍的に増大することが、明らかにされた。

(II) 単一モード増幅の場合の電子捕獲の効果とマイクロ波による改良

電子ビームのエネルギー拡がりが小さくなり、光のスペクトルが狭くなると、(I)の場合に用いた準線形理論は適用不能となり、動重力による電子捕獲の効果が重要となる。この場合を電子の軌道を、直接、運動方程式より求めて解析し、(I)の場合の改良方法となった、マイクロ波の効果について調べた。この結果、この場合にもマイクロ波が出力光強度の成長率の改善に有効であることが明らかにされた。

(III) 自由電子レーザーにおける2次元効果

実際に自由電子レーザーを発振させる際には、ビームの進行方向に対する変化ばかりではなく、それに垂直な方向の諸量の変化が問題となる。この問題の中で、ヘリカルウィグラーの磁場の横方向不均一性による、光の成長率の変化を解析した。この結果、光の増幅に対して、電子ビームの密度とエネルギー拡がりより決定される閾値が存在することを明らかにした。

本論文は、以上の研究成果についてまとめたものである。

第一章　自由電子レーザーとは、

この章は序章である。ここでは自由電子レーザーの原理および研究の現状を述べ、次章以降の研究成果を述べる際の用語解説を行う。

§1-1. 自由電子レーザーの概要[1)2)]

自由電子レーザー（Free Electron Laser、略してFEL）とは、その名の示すように、通常の原子，分子における励起レベルによる誘導放射を用いたレーザーとは違い、相対論的速度を持つ電子ビームからの誘導放射によって光を増幅、発振させるものである。但し、周知のように完全に外力からの束縛を逃れた自由電子からは、光の発生がないため、何らかの外力、しかも光のコヒーレント性を保つため、周期的な外力が必要となる。このような外力として、現在種々のものが考えられているが、普通自由電子レーザーと呼ばれるものでは、ウィグラーと呼ばれる静的な周期磁界と、電子ビームに並行する電磁波が用いられている。その中で、現在の実験の主流は、取り扱い易い前者を用いている。このため以下の説明も専ら、ウィグラー磁場による自由電子レーザーに焦点を置く。

このような周期電磁界と、相対論的電子ビームとの相互作用によって誘導放射が起こるという考えを、最初に提案したのは、H. Motz で、1951年のことである。[3)] その後、理論的な研究はいくつか出されたが、実験の方は、その実現に必要な、質の良い相対論的電子ビームの発生技術、即ち加速器技術の発達を待って、Stanford 大学において、1975年に増幅実験[4)]、1977年に発振実験[5)]が成功した。このように、提案が比較的古いものであるにもかかわらず、実験の成功は、

最近のことである。また、Stanford大学での実験の成功を皮切りに、欧米諸国で理論的、実験的な研究が急速に進められて今日に至っている[6)7)8)]。これらのことを考えれば、この自由電子レーザーは学問的にも技術的にも新しい分野であり、それだけにまだ研究すべき問題が、数多く存在する。

§1-2. 相対論的ドップラー効果による短波長化

自由電子レーザーの最大の特徴は、相対論的ドップラー効果を利用することにより、出力光の短波長化およびチューナビリティを得たことである。従来のマイクロ波発振管等の、電子ビームを用いた装置では、発振波長が、装置の空間的構造で決定され、ミリ波以下の発振は、非常に困難であった。しかし、電子ビームのエネルギーが上昇し、速度が相対論的領域に入ると、相対論的ドップラー効果により、発振波長は急激に短くなる。図1-1はこの様子を描いたものである。

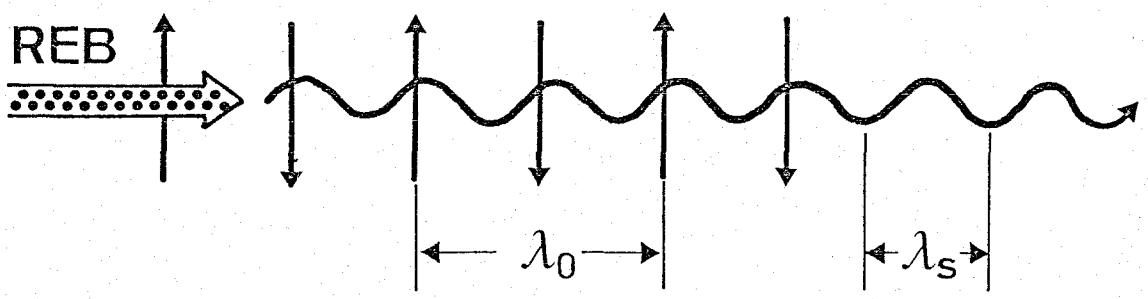


図1-1. 相対論的ドップラー効果

今、ある周期λ_0を持つ磁(電)界があるとする。この時、速度v_bの電子ビームを打ち込むと、電子ビームから見れば、ローレンツ短縮により、この周期はλ_0/γ_bに見える。但し、

$\gamma_b = (1 - v_b^2/c^2)^{-1/2}$ である。電子ビームがこの周期 λ_0/γ_b の力を受けて、前方に λ_0/γ_b の波長の光を放出したとすれば実験室系に戻して見れば、$\lambda_s = \lambda_0/2\gamma_b^2$ の光が前方に放射されていることになる。この関係より明らかなように、放射光の波長は、装置の空間的構造 λ_0 が少々大きくても、電子ビームのエネルギーを上げれば、即ち γ_b を大きくすれば、いくらでも短くできる。また、エネルギーの変化し得る範囲内では、発振波長を自由に変えることができる。

このような相対論的ドップラー効果を用いて、短波長の単色光（赤外からX線領域まで）を磁場中の、電子のシンクロトロン光を利用して取り出し、種々の研究に役立てようという試みが、現在高エネルギー研究所で行われている、光子工場（Photon Factory）である。[9] この時、使用されている周期磁界を、ウィグラー（Wiggler）と呼ぶ。現在使用されているウィグラーは2種類あり、図1-2(a), (b)のようなものである。[2)10)]

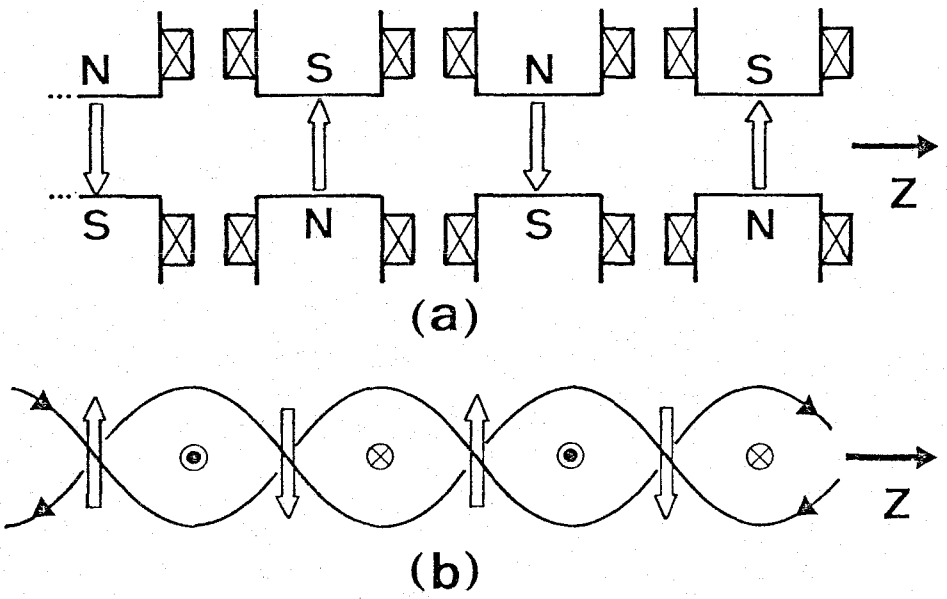


図1-2、直線的ウィグラー(a)と
ヘリカルウィグラー(b)

図の(a)は、直線的ウィグラー（linear wiggler，undulator とも呼ばれる）と呼ばれ、磁石のN極とS極を、交互に配置したものである。 また(b)は、ヘリカルウィグラー（helical wiggler）と呼ばれ、図のような2重らせん配位を持つ導線に互いに逆向きの電流を流してある。 これによりらせんの軸付近では、軸に垂直で、方向が軸が進むに従って回転するような磁場ができている。 このような周期磁界中での電子のシンクロトロン輻射光のスペクトルを図1-3に示す。 この図において、Nはウィグラーの周期（ピッチ）の数である。

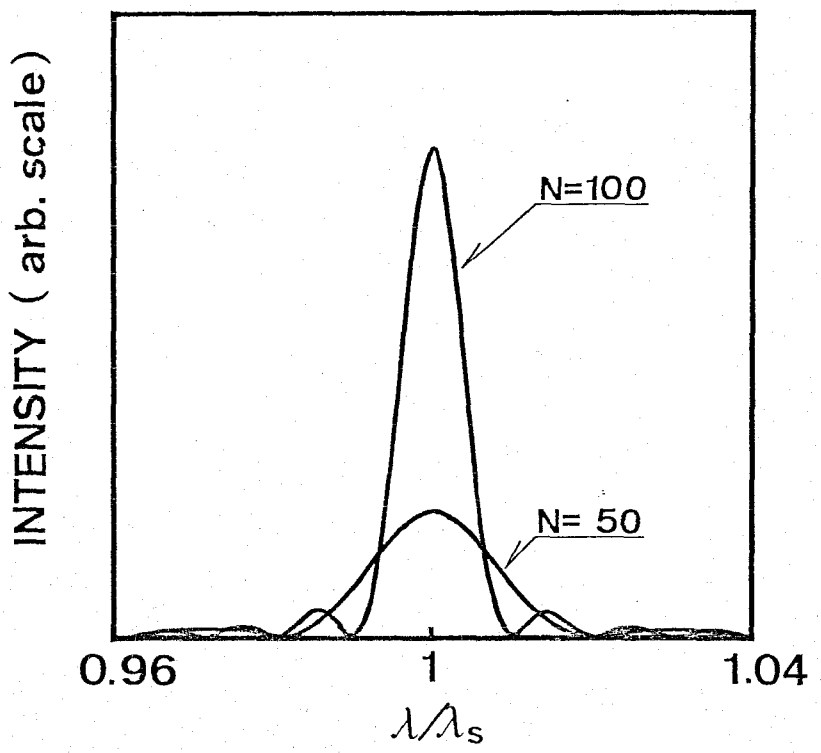


図1-3、ウィグラーからの放射光スペクトル
（Nは周期数）

このスペクトルで重要なのは、ピーク波長 λ_s が、上述の λ_0 と γ_b の関係で決定される他に、ピーク値とスペクトル巾が、周期数Nによって変化して、それぞれ、N^2，$1/N$ に比例す

ることである。即ち周期数を増し、ウィグラーを長くして、ウィグラーと電子の相互作用時間を長くする程、スペクトルは鋭くなり、単色光が得られることになる。このことについては、第二章においても、もう少し具体的に説明を行なう。

このように、ウィグラーを使用すれば、シンクロトロン光も単色性が良いが、これはレーザーで言えば、自発放射に当たり、自由電子"レーザー"として作用させるには、さらに、この上に、誘導放射、即ち増幅機構が必要となる。

§1-3. 増幅機構における進行波管と自由電子レーザーの対比

先に自由電子レーザーは、マイクロ波発振管と似ていると述べたが、それは、増幅機構の類似性による。特に進行波管のそれに良く似ている。進行波管の動作原理とは、らせん回路等の低速波回路によって、電磁波の位相速度を電子ビームの速度より落とすことにより、電子と電磁波の間に強い相互作用を起こすことである。図1-4にその概略を記す。[11)12)]

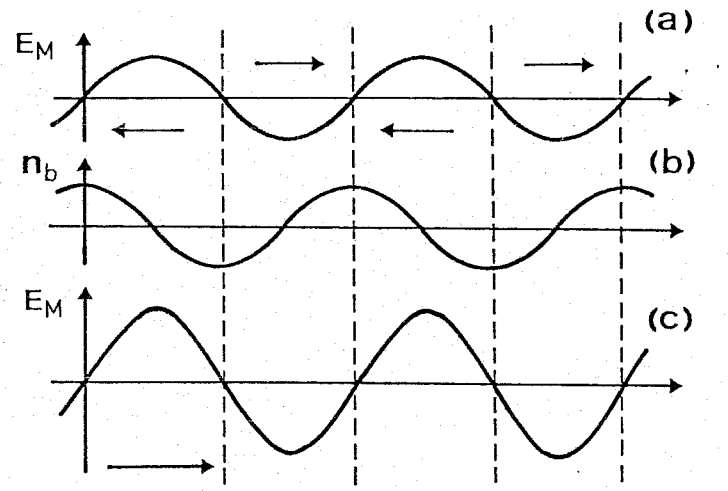


図1-4. マイクロ波発振管（進行波管）の動作原理

今低速波回路によって、位相速度 v_p が遅く、ビームの進行方向の成分を持つ電場が、図の(a)のようにできているとする。この時電子ビームの速度を v_b とすれば、$v_b \simeq v_p$ の時、周期的な電場によって、電子は速度変調を受け、図の(b)のように、密度に疎密ができる。これを、集群(Phase Bunching)と言う。この時、$v_b = v_p$ ならば、集群された電子の内、電場の加速領域にあるものと、減速領域にあるものとの数が等しくなり、電磁波の増減はないが、v_b が v_p よりも大きいと、密度の高い領域が、減速領域側に偏るため、電子ビームは平均すれば減速を受け、その反作用として、電磁波が増幅されるわけである。

自由電子レーザーの増幅機構も、これと同様である。但し、相異点として、電磁波に対して低速波回路を用いない。このため、光速以下で走る電子からエネルギーを取り出すために、媒介として、ウィグラーが必要なのである。即ち、ウィグラーが電磁波と干渉する結果、ビームの進行方向の成分を持つ力、プラズマ物理で言う動重力(ponderomotive force)が生ずるが、その位相速度は光速以下なのである。このため、パラメーターに依れば、位相速度を電子ビームの速度より下げることができ、結果的に低速波回路と同じ効果が得られる。この動重力を簡単に説明すれば、以下のようになる。ウィグラー磁場はビームの進行方向に対して垂直であるから、それに対して、電子も垂直方向の速度成分を持つ。この垂直方向の速度成分と電磁波の磁場成分が結合することにより、2次の力として、進行方向の力を生じる。これが動重力である。この動重力は、ウィグラーのピッチ λ_0, 電磁波の波長 λ_s に対して、$\lambda_0 c/(\lambda_0 + \lambda_s)$ の位相速度を持つ。但し c は光速である。この位相速度が、電子ビームの速度 v_b に等しい条件より、$\lambda_s = \lambda_0 / 2\gamma_b^2$ となる。これが、ウィグラーと、電子ビームと、電磁波が強く結合する条件であるが、

これは、§1−2で述べた、相対論的ドップラー効果の関係式に等しい。　自由電子レーザーは、この動重力によって集群を起こし、光の増幅を行うものである。　このような、低速波回路を用いずに、光の増幅を行うものに、マイクロ波領域での、ユビトロン（Ubitron）がある。[13]

§1−4、誘導ラマン散乱と、誘導コンプトン散乱

§1−3において、自由電子レーザーの増幅機構の大要を述べたが、電子ビームの密度がある程度大きい場合には、電子の空間電荷波が問題となる。　この場合、増幅機構は、プラズマ物理でよく知られたパラメトリック不安定性と解釈される。[14] 図1−5は、電子ビームに乗った系における電磁波（$\omega^2=\omega_p^2+c^2k^2$）と、電子プラズマ波（$\omega^2=\omega_p^2+\Delta v^2k^2$）の分散関係である。　但し、$\omega_p$はプラズマ振動数、$\Delta v$は電子ビームの速度拡がり（熱速度）である。

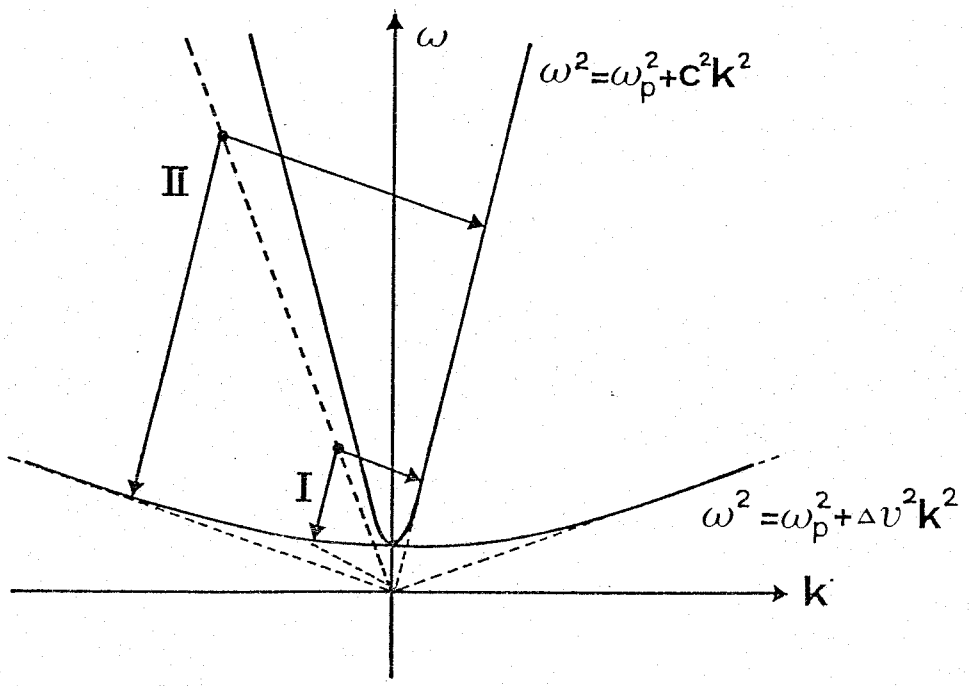


図1−5、ビーム系での分散関係

この系で見れば、ウィグラーは、図の一点鎖線のような、v_bの速度で逆行する電磁場となる。パラメトリック不安定性は、この電磁場を励起波として、電子プラズマ波、および、電磁波を励起するものである。この時、熱速度Δvと、励起される電子プラズマ波の位相速度$v_\phi(=\omega/k)$の大小関係により、2つに大別される。図のI点のように、$v_\phi \gg \Delta v$の場合には、励起された電子プラズマ波は、ランダウ減衰を受けないため、波の形体を残す。これを誘導ラマン散乱と言う。ところがII点のように、$v_\phi \simeq \Delta v$の場合には、電子プラズマ波は大きな減衰を受け、波のエネルギーは、個々の電子のエネルギーをランダムに高める、即ち、電子を暖めるのに用いられる。これを誘導コンプトン散乱と言う。
v_ϕは、大雑把には、$\lambda_0\omega_p/\gamma_b$で評価されるから、発振波長を短くするために、$\gamma_b$を大きくすれば、$v_\phi$は小さくなる。
一方、Δvは電子ビーム発生技術に依存するため、発振波長を短くしようとすれば、コンプトン領域に入る可能性が高い。
本論文においては、誘導コンプトン散乱領域についての解析のみ行なう。

§1-5. 自由電子レーザーの飽和機構とその改良

以上述べたように、自由電子レーザーは、相対論的ドップラー効果により、短波長でチューナブルな光が得られ、かつ増幅原理がマイクロ波発振管と似ているため、高効率が期待される。しかし、実際には種々の問題点があり、必ずしも効率は高くない。これが未だに多くの研究者により、研究されている理由の一つである。効率の悪い原因は、相対論的ドップラー効果を得るための、電子ビームの"速さ"にある。まず第一に、電子はウィグラー中を光速に近い速度で通過するため、充分な相互作用をするためには、装置ができる限り

長くなければならない。実際、後述のように、実験では、メートルのオーダーのウィグラーが使われている。さらに相互作用が充分起こったとしても、電子が光にエネルギーを与えて、自らの速度を動重力の位相速度に一致するまで落とせば、§1-3で述べたように増幅が止まる。即ち、増幅の飽和が起こる。ところが、動重力自身、光速に近い速度を持つため、電子が失うエネルギーは、もとの運動エネルギーに較べて、わずかにしかならない。この欠点は、光の波長を短くしようとすればする程顕著であるから、レーザーの短波長化にも支障を来たす。

現在、この欠点を改善するためのいくつかの試みがなされているが、これらを大別すれば、2種類ある。第一は、増幅に使用した後の電子ビームのエネルギーの再利用である。これには2通り考えられている。一つは、加速器で作った電子ビームを、ウィグラーに通して増幅に使用した後、もとの加速器に戻して逆に減速し、残ったエネルギーを回収する方式である。今一つは、ウィグラーをストレージリング中に組み込む方式である。この場合、ウィグラーから出た電子は、ストレージリングを回る間に、もとのエネルギーまで加速され、再びウィグラーに挿入される。その結果、一回の増幅で損失するエネルギーは小さいが、電子の再加速に必要なエネルギーも小さいので、何度も増幅を行えば、最終的に、全エネルギー効率が上がることになる。

効率改善の第二は、ウィグラー中で相互作用を起こしている時に、操作をして光の成長率を増加させることである。この方式で、現在、理論的、実験的に最も研究が進んでいるものが、Tapered ウィグラーである。[7)15)] 上述のように、光の増幅の飽和は、電子が減速されて、動重力の位相速度と一致することにより起こる。そこで、もし動重力の位相速度 v_p が、電子との相互作用が進むにつれて遅くなれば、増幅が

続くと考えられる。§1-3で述べたように、$v_p=\lambda_0 c/(\lambda_0+\lambda_s)$であるから、ウィグラーのピッチ$\lambda_0$を、ビームの進行方向に対して除々に短くなるようにすれば良い。このように、ピッチを空間的に変化させたウィグラーがTaperedウィグラーである。この方法の利点は製作の容易さにあり、現在、既に実験が行なわれている。その他に、電子の減速を抑えるために、外部より電場を加えることも考えられている。[16] 本論文の主題の一つである、マイクロ波による効率上昇は、この方式に属するものである。

§1-6、実験状況

最後に、現在までに世界で行なわれた実験の状況について略述する。[7)17)]

前述のように、初めて自由電子レーザーの実験に成功したのは、米国Stanford大学であり、まず1975年に、増幅実験に成功した。[4)] この時ウィグラーは図1-2(b)のような、ヘリカルウィグラーを使用し、ピッチが3.2 cm，全長5.2 m，中心軸付近の磁場2.4 KGであった。このウィグラーに、24 MeVのエネルギーを持つ電子ビームを挿入して、10.6 μmのCO_2レーザーからの光の増幅を行った。この結果、電子ビームの電流が70 mAの場合、ピークで7%の増幅率が、得られている。その後、1977年に電子ビームのエネルギーを、43.5 MeVに上げてキャビティを組み、波長3.4 μmでの、発振実験に成功している。[5)]

この後、色々な研究所で実験が開始され、現在、米国では、Stanford，UCSB等の大学、Los Alamos，NRL等の研究所および、TRW等の企業においてなされており、欧州では、Frascati等の加速器を持つ研究所が行っている。最近の話題は、§1-5で述べた、効率改善の問題で、電子ビームの

加速器による回収は、UCSB, Los Alamos 等が行い、ストレージリングによるものは Frascati 等が、Tapered ウィグラーは、Los Alamos, TRW 等がそれぞれ実験を行っている。

§1-7. むすび

以上、自由電子レーザーの概要と、現在の研究状況を述べた。この他に、理論的研究としては、本論文第四章で述べるような、ビームの進行方向に対して垂直な方向に対する不均一性の問題（多次元解析）が、現在盛んに議論されている。[18] また、日本でも漸く実験を行う兆が出てきており、金沢大学、理化学研究所、大阪大学レーザー核融合研究センターで、それぞれ独自に実験計画が進められている。

第一章の参考文献

1) 三間圀興, レーザー研究 5 (1977) 135.

2) 近藤 淳, 電子技術総合研究所調査報告 第200号 (1979).

3) H. Motz, J. Appl. Phys. 22 (1951) 527.

4) L. R. Elias, W. M. Fairbank et al., Phys. Rev. Lett. 36 (1976) 717.

5) D. A. G. Deacon, L. R. Elias et al., Phys. Rev. Lett. 38 (1977) 892.

6) "Novel Source of Coherent Radiation", Edited by S. F. Jacobs et al., Addison Wesley (1978).

7) "Free Electron Generators of Coherent Radiation", Edited by S. F. Jacobs et al., Addison Wesley (1980).

8) "Special issue on Free Electron Lasers", J. Quantum Electron. QE-17 (1981).

9) 高良和武, 他, 応用物理 49 (1980) 1066.

10) 北村英男, 物理学会誌 36 (1981) 279.

11) 桜庭一郎, 「電子管工学」, 森北出版 (1974).

12) 小山次郎, 「進行波管」, 丸善 (1964).

13) R. M. Phillips, in "IRE Transaction Electron Devices", (1960) 231.

14) A. Hasegawa, The Bell System Technical Journal, 57 (1978) 3069.

15) P. Sprangle, C. M. Tang and W. M. Manheimer, Phys. Rev. Lett. 43 (1979) 1932.

16) A. T. Lin, Phys. Rev. Lett. 46 (1981) 1515.

17) 田口俊弘、レーザー研究 9 (1981) 99.

18) C. M. Tang and P. Sprangle, "The Nonlinear Theory of Free Electron Laser with Transverse Dimensional Effects", Proceeding of Laser '80, Jan. (1981).

第二章．準線形理論による誘導コンプトン散乱領域における自由電子レーザーの解析とその高効率化

第一章において、自由電子レーザーの簡単な動作原理について述べたが、従来の動作解析は、主として電子ビームのエネルギー分布が狭く、出力光が単色である場合を取り扱っていた。[1)-3)] 本章では、これとは逆に、電子ビームのエネルギー分布が比較的広く、出力光スペクトルも広い場合について論ずる。

この場合、電子ビームの運動は、準線形理論により記述され、光の増幅の飽和は、電子ビームのエネルギー分布の、準線形拡散によって起こる。この解析結果より、電子ビームから出力光への総エネルギー変換効率は、ウィグラーの長さの1/2乗に比例して増大することが明らかにされた。さらに、効率改善の方策として外部より付加電場を加えた場合を解析し、その結果、電子ビームと平行に伝播するマイクロ波を使用すれば、効率が飛躍的に増大することが明らかになった。

§2-1．ヘリカルウィグラー中での電子の運動と光の増幅

図1-2(b)のような電流配位を持つヘリカルウィグラーは、そのらせんの中心軸付近の磁場が次式で表わされる。

$$\mathbf{B}_0 = B_0[\,\hat{x}\cos k_0 z + \hat{y}\sin k_0 z\,]\,. \qquad (2\text{-}1)$$

ここで、電子ビームはz方向に進むとする。この式よりわかるように、磁場はz軸に垂直な方向の成分のみを持ち、その向きはz方向に進むにつれて、回転する。この磁場を、電

子が止まっている系（ビーム系）で見れば、次式のような、円偏光電磁場となる。

$$\mathbf{B}_i' = \gamma_b B_0[\ \hat{x}\cos(k_i'z'+\omega_i't') + \hat{y}\sin(k_i'z'+\omega_i't')]\ ,$$

$$\mathbf{E}_i' = \frac{v_b\gamma_b B_0}{c}[\ -\hat{x}\sin(k_i'z'+\omega_i't') + \hat{y}\sin(k_i'z'+\omega_i't')]\ . \tag{2-2}$$

ここで、v_bは電子ビームの初期速度、$\gamma_b=(1-v_b^2/c^2)^{-1/2}$, $k_i'=\gamma_b k_0$, $\omega_i'=v_b k_i'$ である。　以下、ビーム系で話を進める。　また、本章においては、z方向に対する一次元的な変化のみを問題にし、電子ビームはその横方向の速度拡がりが無視できるとする。　自由電子レーザーの増幅現象は、第一章で述べたように、このウィグラーによる電磁波を励起波とした、電磁波のパラメトリック励起であるが、その増幅される電磁波を次式のような、円偏光波であるとする。

$$\mathbf{E}_s' = E_s'[\ \hat{x}\sin(k_s'z'-\omega_s't'+\delta) + \hat{y}\cos(k_s'z'-\omega_s't'+\delta)],$$

$$\mathbf{B}_s' = \frac{ck_s'}{\omega_s'}\ \hat{z}\times\mathbf{E}_s'\ . \tag{2-3}$$

この出力光は、マックスウェル方程式より導かれる、次の波動方程式を満足する。

$$(\omega_s'^2 - c^2k_s'^2)\mathbf{E}_s' = -4\pi i\omega_s'\mathbf{J}_s'\ . \tag{2-4}$$

ここで、$\mathbf{J}_s'$ は、電子の運動によって引き起こされる電流で、次式のように、線形電流 $\mathbf{J}_s^L$ と非線形電流 $\mathbf{J}_s^{NL}$ との和である。

$$\mathbf{J}_s' = \mathbf{J}_s^L + \mathbf{J}_s^{NL}\ ,\quad \mathbf{J}_s^L = -en_b'\mathbf{v}_s'\ ,\quad \mathbf{J}_s^{NL} = -e\delta n_e'\mathbf{v}_i'\ . \tag{2-5}$$

ここで、n_b' は、ビーム系での電子ビームの平均密度、$\underset{\sim}{v}_i'$ と $\underset{\sim}{v}_s'$ はそれぞれ、ヘリカルウィグラー $\underset{\sim}{E}_i'$ と電磁波 $\underset{\sim}{E}_s'$ による電子の振動速度であり、$\delta n_e'$ は、励起される電子プラズマ波による密度揺動である。この2種の電流の内、非線形電流 $\underset{\sim}{J}_s^{NL}$ が、ヘリカルウィグラーと、電子ビームを結合させ、出力光を励起するのに寄与する項となる。さて、(2-2)式、(2-3)式より、電子の運動方程式

$$\frac{d}{dt'} m\gamma'(\underset{\sim}{v}_i' + \underset{\sim}{v}_s') = -e(\underset{\sim}{E}_i' + \underset{\sim}{E}_s') \ . \tag{2-6}$$

が得られ、これより $\underset{\sim}{v}_i'$, $\underset{\sim}{v}_s'$ は、次式のように求められる。

$$\begin{aligned} \underset{\sim}{v}_i' &= -\frac{ev_b\gamma_b B_0}{mc\gamma_\perp \omega_i'}[\ \hat{x}\cos(k_i'z'+\omega_i't') + \hat{y}\sin(k_i'z'+\omega_i't')] \ , \\ \underset{\sim}{v}_s' &= -\frac{eE_s'}{m\gamma_\perp \omega_s'}[\ \hat{x}\cos(k_s'z'-\omega_s't'+\delta) - \hat{y}\sin(k_s'z'-\omega_s't'+\delta)] . \end{aligned} \tag{2-7}$$

但し $\gamma_\perp = (1 + e^2B_0^2/m^2c^4k_0^2)^{1/2}$ である。

次に(2-5)式の非線形電流 $\underset{\sim}{J}_s^{NL}$ において、密度揺動、δn_e は、ウィグラーと出力光の干渉によって引き起こされる z 方向の動重力 (ponderomotive force) によって生じる。これは次式で与えられる。

$$F_z^{NL} = -\frac{e}{c}\langle(\underset{\sim}{v}_i' + \underset{\sim}{v}_s')\times(\underset{\sim}{B}_i' + \underset{\sim}{B}_s')\rangle_z \ . \tag{2-8}$$

但し、$\langle\ \rangle_z$ は、z 方向成分を時間的に平均することを意味する。この力をフーリエ変換することにより、密度揺動のフーリエ成分 δn_k が次式で与えられる。

$$\delta n_k = -\frac{i\chi'(k,\omega)}{e^2\varepsilon'(k,\omega)}\, k\cdot F_k^{NL} \quad . \tag{2-9}$$

ここで F_k^{NL} は F_z^{NL} のフーリエ成分、$\varepsilon'(k,\omega)$ は誘電応答関数である。また、$\chi'(k,\omega) = [\varepsilon'(k,\omega)-1]/4\pi$ は、電気感受率で、次式で表わされる。

$$4\pi\chi'(k,\omega) = -\frac{m\omega_b'^2}{k^2}\int\frac{k\frac{\partial f_0'}{\partial p'}}{\omega+kv'}\,dp' \quad . \tag{2-10}$$

但し、$\omega_b'^2 = 4\pi n_b' e^2/m$ で、p', v' はそれぞれ、z 方向の電子の運動量および速度である。また、$f_0'(p')$ は電子ビームの 0 次の分布関数で、$\int_{-\infty}^{\infty} f_0'(p')\,dp' = 1$ となるように、規格化されている。以上の式において、波数 k と振動数 ω は結合条件より決定され、次式で与えられる。

$$\omega = \omega_i' - \omega_s' \quad , \quad k = k_i' + k_s' \quad . \tag{2-11}$$

(2-5)(2-7)(2-8)(2-9) 式より、非線形電流 $\underset{\sim}{J}_s^{NL}$ を評価すれば、次式を得る。

$$\underset{\sim}{J}_s^{NL} = 2i\,\sigma^{NL}\,\underset{\sim}{E}_s' \quad .$$

$$\sigma^{NL} = \frac{m\gamma_b^2\omega_b'^2\omega_c^2 v_b^2(1/\omega_i'+1/\omega_s')}{16\pi\gamma_\perp^2\omega_i' c\varepsilon'(k,\omega)^*}\int\frac{\partial f_0'/\partial p'}{\omega+kv'}\,dp' \quad . \tag{2-12}$$

ここで、$\omega_c = eB_0/mc$ である。(2-5)(2-12) 式を (2-4) 式に代入すれば、$\underset{\sim}{E}_s'$ に対する波動方程式が得られるが、$\underset{\sim}{E}_s'$ の中

から k_s, ω_s という速い成分を取り除き、

$$E_s' = \frac{1}{2} E_s'(z',t')[-i\hat{x}+\hat{y}]\exp(ik_s'z'-i\omega_s't'). \tag{2-13}$$

により、ゆっくり変化する成分 E_s' を取り出せば、次の波の方程式が得られる。

$$\left(\frac{\partial}{\partial t'} + c\frac{\partial}{\partial z'}\right)|E_s'|^2 = 8\pi\ \mathrm{Im}\ \sigma^{NL}\ |E_s'|^2 \quad . \tag{2-14}$$

ここで、(2-12) 式より、

$$\mathrm{Im}\ \sigma^{NL} = \frac{mc\gamma_b\omega_b'^2\omega_c^2}{16\gamma_\perp^2\omega_i'^2|\varepsilon'|^2}\left(1+\frac{\omega_i'}{\omega_s'}\right)\int\delta(\omega+kv')\frac{\partial f_0'}{\partial p'}dp'. \tag{2-15}$$

となる。この式で注意すべきなのは、(2-14) 式において、$\mathrm{Im}\ \sigma^{NL}$ が、光の成長率を表わしており、かつ、(2-15) 式において、その光の成長率が $\partial f_0'/\partial p'$ に比例していることである。即ち、出力光の増幅は、電子ビームの分布関数の勾配が、最大の点に対応する波長において、最大となる。

§2-2. 準線形理論による電子ビームの分布の変化の記述

前節においては、電子ビームの分布関数に対する、出力光の増幅の様子を調べたが、この逆として、出力光強度に対する電子ビームの分布関数の変化には、準線形方程式を用いる。[4] 準線形効果は、電子に加わる z 方向の力 F_z' によって起こるが、自由電子レーザーにおいては、z 方向の力とは、前述の動重力 F_z^{NL} と、静電力 $e\nabla\Phi'$ の和である。この内、後者は、(2-9) 式で表わされる密度揺動によって引き起こされ

るから、そのフーリエ成分 $iek\Phi_k'$ は、次式のように、動重力により、表わされる。

$$iek\Phi_k' = F_k^{NL}\ [1-\varepsilon'(k,\omega)]/\varepsilon'(k,\omega) \quad . \tag{2-16}$$

上式より、z方向の力 F_z' のフーリエ成分 F_k' は、次式のように表わされる。

$$F_k' = F_k^{NL}\ /\ \varepsilon'(k,\omega) \quad . \tag{2-17}$$

この F_k' を使用して、電子ビームの分布関数 f_0' の変化を、記述するために、次の準線形方程式を用いる。

$$\left(\frac{\partial}{\partial t'} + v\frac{\partial}{\partial z'}\right) f_0' = 2\pi \frac{\partial}{\partial p'} \sum_k \delta(\omega+kv')\,|F_k'|^2 \frac{\partial}{\partial p'} f_0' . \tag{2-18}$$

この方程式では、前記のように、ビームの横方向の速度拡がりを無視している。ここで注意すべきことは、この方程式の適用条件である。この方程式は、z方向の力 F_k' により、電子が捕獲される効果が、無視できる範囲においてのみ、有効である。即ち、電子ビームの速度拡がりが、捕獲された電子の振動速度に対して、充分大きい条件より、次の関係式が満足されねばならない。

$$|F_k'/m\omega| \ll \Delta v' \ . \tag{2-19}$$

(2-14)式、および(2-18)式を連立させる事により、電子ビームと、出力光の閉じた記述が可能となる。しかし、以上の式の導出は、すべて初期の電子ビームの速度 v_b に乗った系、即ちビーム系での記述であった。これに対し、実際

の解析結果は、実験室系での値が必要であるから、以上の式を実験室系で表わした方が便利である。　そのため、諸量を実験室系にローレンツ変換することにより、次の連立方程式を得る。

$$\frac{\partial}{\partial t} W + c \frac{\partial}{\partial z} W = \Gamma_t W ,$$

$$\frac{\partial}{\partial t} f_0 + v \frac{\partial}{\partial z} f_0 = \frac{\partial}{\partial p} D \cdot W \frac{\partial}{\partial p} f_0 \quad . \tag{2-20}$$

但し、Γ_t, D, W は、次式で与えられる。

$$\Gamma_t = \frac{\pi m^2 \omega_b{}^2 \omega_c{}^2}{4\gamma_\perp k_0{}^3 c|\varepsilon|^2} (1-\frac{v}{c})[1+\frac{v_b(c-v)}{v(c-v_b)}](1-\frac{vv_b}{c^2})\gamma_z{}^3 \frac{\partial f_0}{\partial p} ,$$

$$D = \frac{2\pi e^2 \gamma_b{}^2 \omega_c{}^2}{\gamma_\perp{}^2 k_0{}^3 c^2 |\varepsilon|^2} \frac{1}{c-v} (1-\frac{v_b}{c})^2 [1+\frac{v_b(c-v)}{v(c-v_b)}]^2 ,$$

$$W(k_s) = \frac{|E_s|^2}{4\pi} \Big|_{k_s = k_0 v/(c-v)} . \tag{2-21}$$

これらの式においては、プライムを外すことにより、諸量の実験室系への変換を表わした。　ここで $\gamma_z = (1-v^2/c^2)^{-1/2}$ である。　(2-21) 第3式よりわかるように、$W(k_s)$ は、出力光のエネルギー密度を表わしている。　また、共鳴条件、$k_s = k_0 v/(c-v)$ は、$v \simeq c$ の時、$k_s \simeq 2\gamma_z^2 k_0$ となり、第一章で述べた、相対論的ドップラー効果の関係式に等しい。例えば、電子ビームの分布関数 f_0 を次のようなガウス分布に取る。

$$f_0(\gamma_z) \sim \exp[-\frac{(\gamma_z-\gamma_b)^2}{\Delta\gamma_b^2}] \quad .$$

この時、出力光がe倍になる距離の最小値 L_{min} は、次式で与えられる。

$$L_{min} = 2.16\times10^{18}\ \frac{k_0^3\gamma_b\Delta\gamma_b^2\gamma_\perp^3}{n_b B_0^2} \quad . \qquad (2\text{-}22)$$

例として、$n_b=10^{12}\ cm^{-3}$, $\gamma_b=20$, $\Delta\gamma_b=0.1$, $B_0=10\ kG$, $k_0=5\ cm^{-1}$ とすれば、$L_{min}\simeq 2.0\ cm$ が得られる。

§2-3. 電子のらせん運動によるシンクロトロン輻射[5)-8)]

前節までにおいて、電子ビームの速度分布が比較的広い場合の自由電子レーザーにおける光の増幅、即ち誘導放射の記述方法について述べた。その結果として、(2-20),(2-21) 式を得たが、これらの方程式を用いて解析を行うためには、光の入力，即ち"たね"が必要である。本章においては、この"たね"として、電子のらせん運動によるシンクロトロン輻射光に取る。これについては、第一章において概要を説明したが、本節においてもう少し具体的な説明を行う。そして、その結果を用いて、(2-20)式の第一式に付与すべき、光の発生項を評価する。

一般的に、一個の電子が動いている時、単位立体角、単位周波数あたりに発生する光の放射強度は、次式で表わされる。

$$\frac{d^2I}{d\omega_s d\Omega} = \frac{e^2\omega_s^{\ 2}}{4\pi^2c^3}\left|\int_{-\infty}^{\infty} \underset{\sim}{n}\times[\underset{\sim}{n}\times\underset{\sim}{v}(t)]\ e^{i\omega_s[t-\underset{\sim}{n}\cdot\underset{\sim}{r}(t)/c]}dt\right|^2. \quad (2\text{-}23)$$

但し、$r(t), v(t)$ は電子の位置と速度、ω_s は光の周波数、Ω は立体角を表わす。また $\underset{\sim}{n}$ は電子から視点へ向かう単位ベクトルであり、t は遅延時間を表わしている。さて電子のヘリカルウィグラー中でのらせん運動は、次式で表わされる。

$$\underset{\sim}{r}(t) = -R_L \sin\omega_L t\ \hat{x} + R_L\cos\omega_L t\ \hat{y} + vt\ \hat{z} \quad ,$$

$$R_L = \frac{\omega_c}{\gamma_\perp\gamma_z k_0^{\ 2} v} \ , \quad \omega_L = k_0 v \quad . \qquad (2\text{-}24)$$

さて視点を z 軸上に置き、ウィグラーの全長を L とすれば電子がウィグラーを通過する際に放射する光のスペクトルは(2-23)式の積分範囲を $t=0\sim L/v$ に取る事により、次式で表わされる。

$$\left.\frac{d^2I}{d\omega_s d\Omega}\right|_{\theta=0} = \frac{e^2R_L^{\ 2}\omega_s^{\ 2}}{\pi^2c^3}\ \frac{\left[1+\frac{\omega_s^{\ 2}}{\omega_L^{\ 2}}(1-\frac{v}{c})^2\right]}{\left[1+\frac{\omega_s}{\omega_L}(1-\frac{v}{c})\right]^2}\ \frac{\sin^2\pi N\frac{\omega_s}{\omega_L}(1-\frac{v}{c})}{\left[1-\frac{\omega_s}{\omega_L}(1-\frac{v}{c})\right]^2} \ . \qquad (2\text{-}25)$$

但し、$N = k_0L/2\pi$ で、これはウィグラーのピッチの数(周期数)である。また、右辺の最後の因子が、放射光スペクトルの形状を決定し、§1-2で述べたように、$k_s\ (=\omega_s/c) \simeq 2\gamma_z^2 k_0$ でピークを持ち、ピーク値が N^2 に、スペクトル巾が $1/N$ にそれぞれ比例する。

さて、以上は一電子からの放射光スペクトルであるが、複数の電子がある場合には、以上の結果を平均することにより求められる。即ち求めるべき光の発生項 $S(k_s,t)$ は、一般的に次式のように表わされる。

$$S(k_s,t) = c\frac{d}{dz}\left[\frac{e^2\omega_s^2}{4\pi^2c^2}\left\langle\sum_j\delta(\mathbf{r}_j(0))\left|\int_{-\infty}^{\infty}dt'\,\mathbf{n}\times[\mathbf{n}\times\mathbf{v}_j(t')]\right.\right.\right.$$

$$\left.\left.\times\exp[i\omega_s\{t'-\mathbf{n}\cdot\mathbf{r}_j(t')/c\}]\right|^2\right\rangle\right]. \qquad (2\text{-}26)$$

但し、r_j, v_j は j 番目の電子の位置と速度であり、電子は、$t=0$ で磁場中に入ったとする。ここで $\mathbf{n}$ として z 方向の単位ベクトルに取り、積分を $0\leq t<z/v_{zj}$ の間で実行すれば、(2-25)式を全電子について平均した形のスペクトルが得られる。今簡単のために、電子ビームの分布が充分広く、次の関係が満足されているとする。

$$\Delta\gamma_z \gg \gamma_z / N \quad . \qquad (2\text{-}27)$$

この場合 (2-25)式の最後の因子はデルタ関数で近似されるから、最終的結果として次式を得る。

$$S(k_s,t) = \frac{me^2\omega_c^2}{2\pi\gamma_\perp}\,n_b\gamma_z^3\,f_0(p)\Big|_{v=k_sc/(k_0+k_s)} \quad . \qquad (2\text{-}28)$$

§2-4、電子ビームおよび出力光の空間的変化とエネルギー変換効率

(2-28)式のシンクロトロン輻射強度を光の発生項として、

用い、(2-20)式を連立させて数値計算を行った。但し、空間的変化を調べるため、時間微分の項を落として計算した。これは、次の2つの場合に有効である。

a) 定常問題

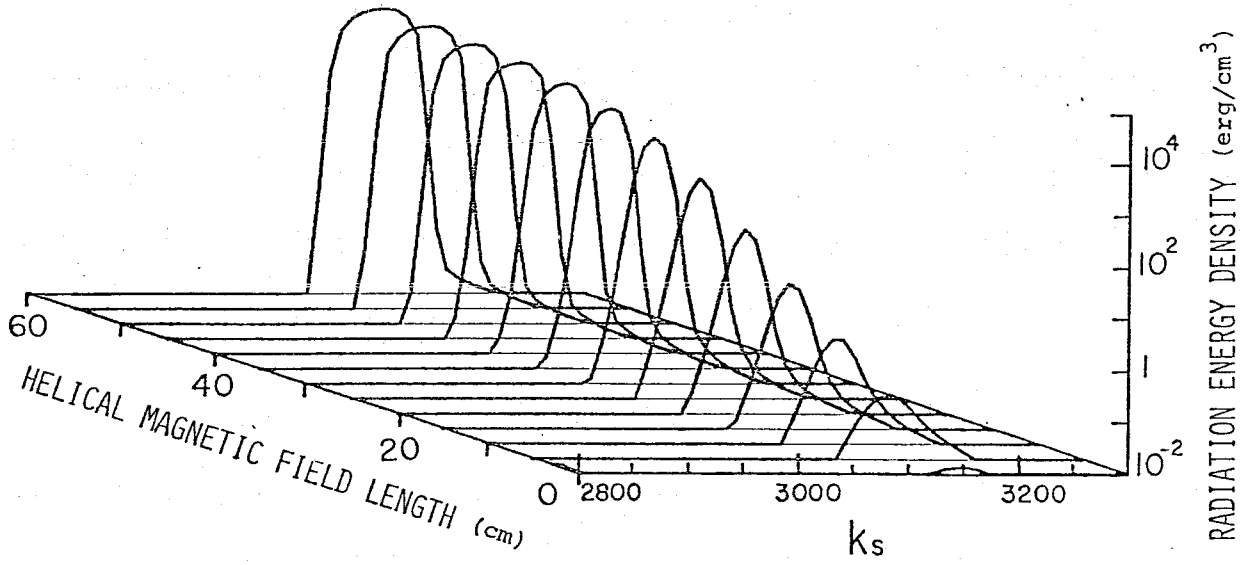
連続的なビームをヘリカルウィグラーに挿入して、連続的に増幅を行う場合には、空間的変化のみを論じて、時間的変化を無視できる。

b) 電子ビームがz方向に対して局所化している場合

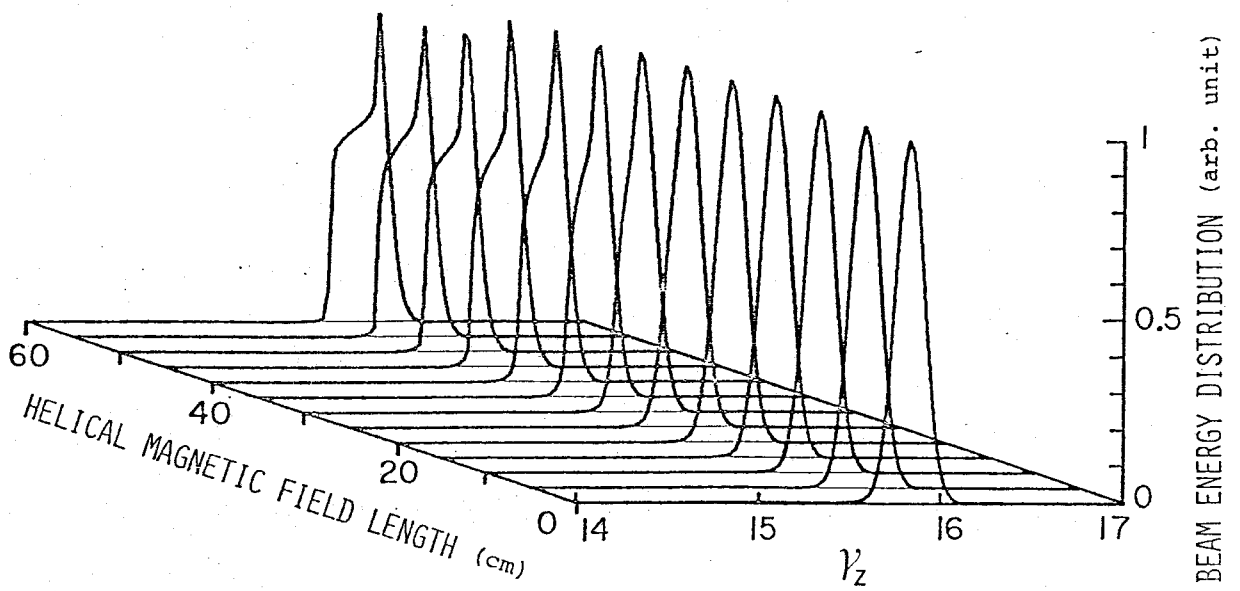
線形加速器で電子ビームを発生させる場合には、電子群はz方向に対して局所的に固った、束(bunch)になっている。この時、ビームの拡がりを無視すれば、この系の空間的変化とは即ち、$t=z/c$ という変換により、時間的変化を表わしていることになる。

以下、順を追って解析結果を述べる。

図2-1(a),(b)は、出力光スペクトルと、電子ビームのエネルギー分布が、誘導放射の影響により、空間的に変化する様子を示している。ここでパラメーターは、$B_0=10\,kG$, $\lambda_0=2\pi/k_0=1\,cm$, $v_b=0.998c$ ($\gamma_b=15.82$), $n_b=10^{12}\,cm^{-3}$ である。また初期の電子ビームの分布をガウス分布に取り、中 $\Delta\gamma_b$ を0.11に置いた。この時(2-22)式より $L_{min}\simeq 2.83\,cm$ と評価されるが、図2-1(a)を見ると、最大成長モードがこの増幅率で成長していることがわかる。また同時に、初期の巾の広いスペクトルを持つシンクロトロン輻射光が、選択的な増幅のため、除々に狭くなっている。このことを定量的に示すため、スペクトルの半値巾の空間的変化を示したのが図2-2である。この図を見れば、ウィグラーの長さが、0〜30 cm の間は、光が線形増幅されて、スペクトル巾が、



(a)



(b)

図2-1、出力光スペクトル(a)と、電子ビームの分布関数(b)の空間的変化 (z = 0～60 cm)

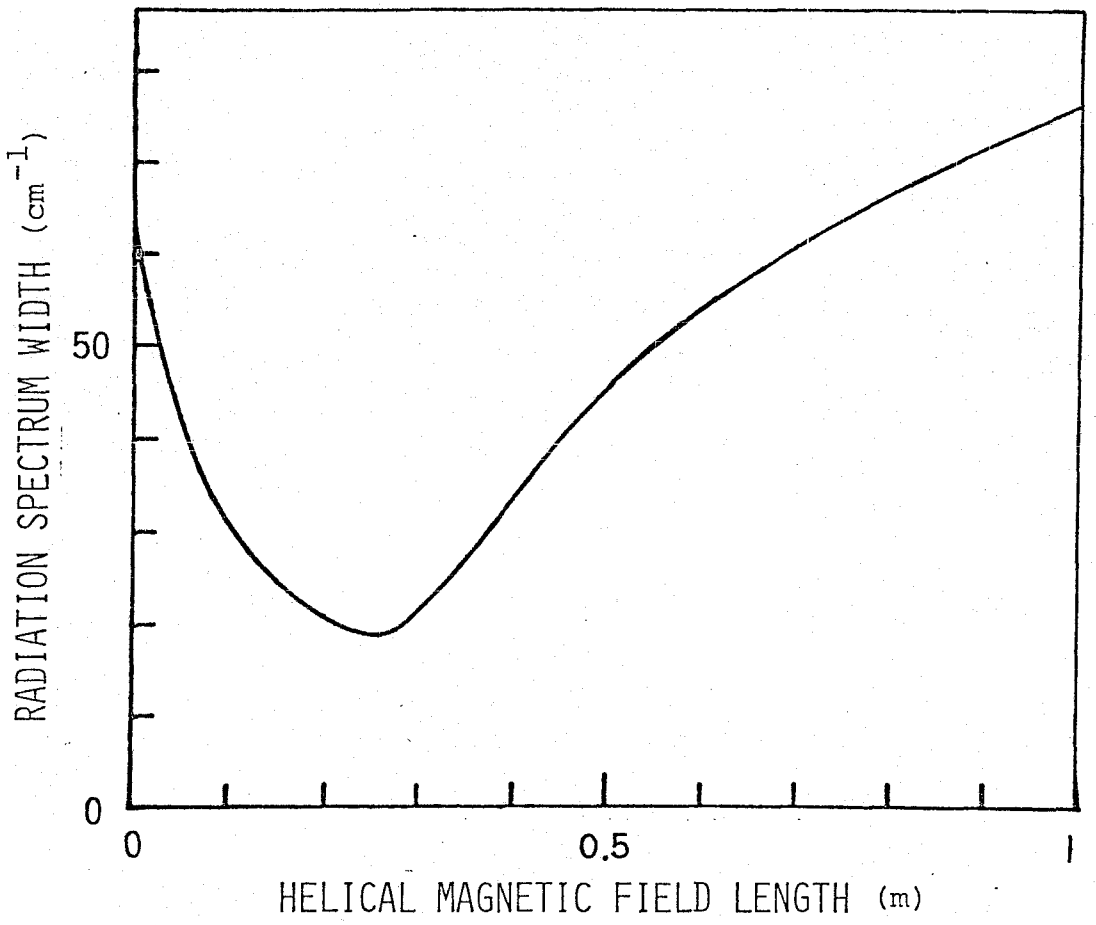
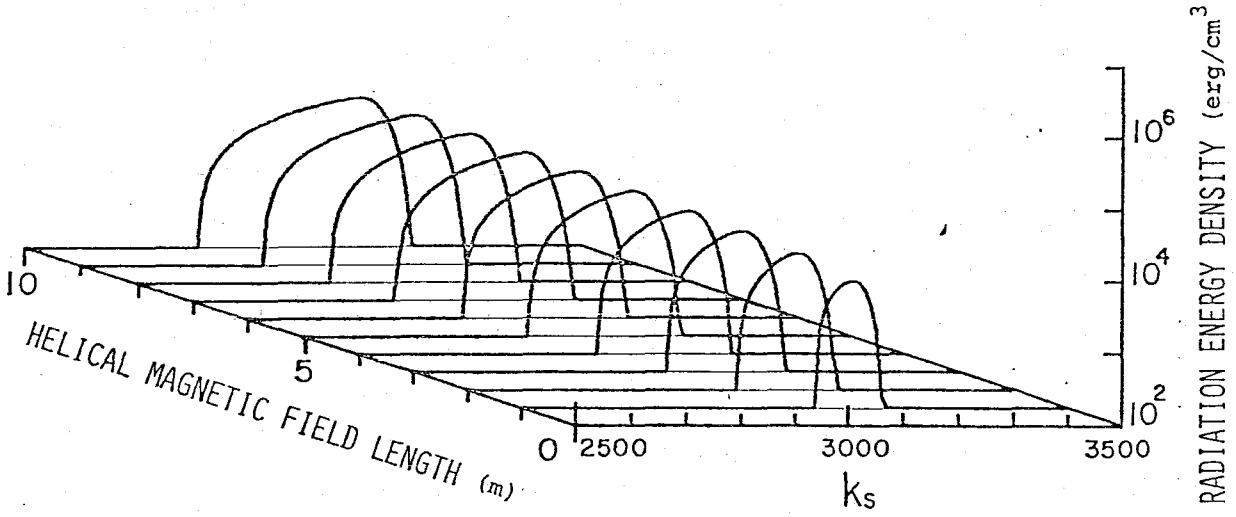


図2-2、出力光スペクトルの空間的変化、
前半の減少は、線形増幅による成長を表わし
後半の増加は、準線形拡散を表わす。

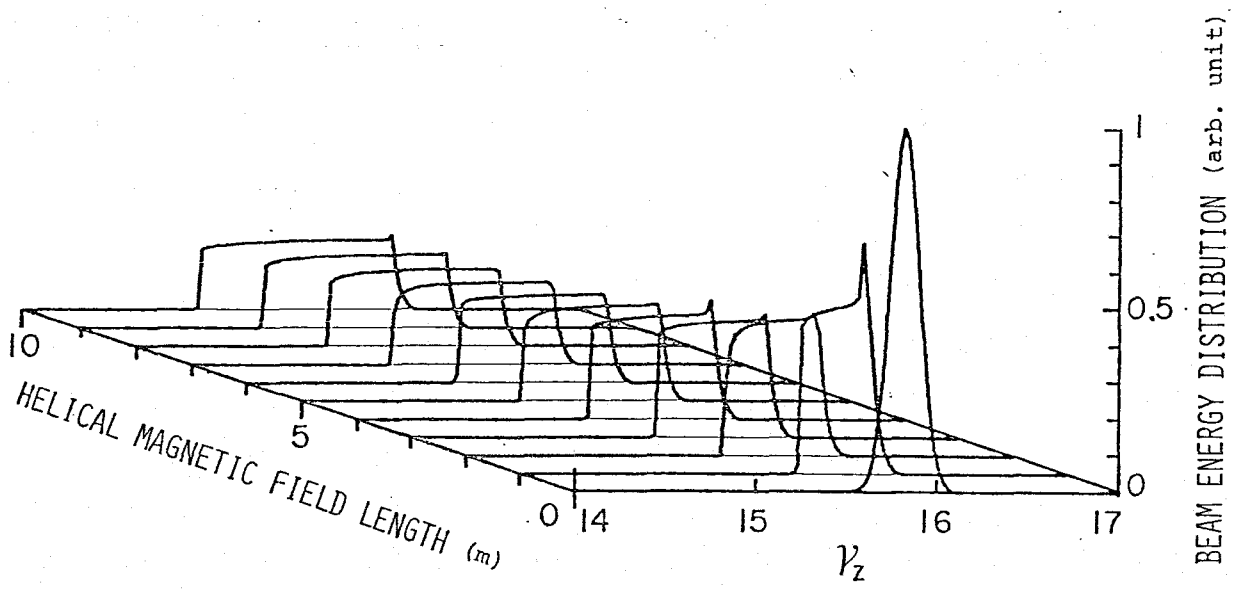
除々に狭くなるのがわかる。ところがさらにウィグラーを長くすれば、スペクトル巾は再び広くなる。これは、次のように説明される。光の強度がある程度まで増大すると、その反作用として、電子ビームに準線形効果が働き、電子ビームのエネルギー分布が拡がる。このため、分布関数の勾配の最も鋭い点が、エネルギーの低い側に移動し、それまで線形増幅していたモードの光は、飽和する。同時に、少し波長の長い別のモードが成長し始め、準線形効果により飽和するまで増幅を続ける。この増幅と飽和の繰り返しにより、光のスペクトルが、波長の長い方へ拡がるわけである。

図2-3(a),(b)は、光のスペクトルとビームの分布関数が拡がる様子をさらに長い距離にわたって調べた結果である。この時、電子ビームの分布関数は、ほぼ長方形をしており、その横の長さが除々に拡がるような変化を見せている。以上の解析結果より、出力光の総エネルギーと、入力電子ビームのエネルギーの比より、増幅によるエネルギー変換効率が計算される。これを示したのが、図2-4の実線である。図より、10mのヘリカルウィグラーを用いれば、2.2%のエネルギー変換が得られることがわかる。この図で、破線は、Vedenov等によって導かれた方法により、解析的に求めた、エネルギー変換効率である。[9] その方法は、ビームの分布関数を、完全な長方形分布であると仮定して解析するものであるが、変換効率の増大の傾向が、良く一致している。この解析解によれば、エネルギー変換効率の、ウィグラーの長さLに対する依存性は、次式で与えられる。

$$\eta = \left[\frac{\pi^2 e^2 \omega_c{}^2 n_b}{2m\gamma_\perp{}^3 \gamma_b{}^3 c^4 k_0{}^3 \ln \Lambda}\right]^{1/2} L^{1/2} \quad . \qquad (2\text{-}29)$$



(a)



(b)

図2-3．光力光スペクトル(a)と、電子ビームの分布関数(b)の空間的変化（z＝0～10m）。分布関数は、ほぼ長方形をしている。

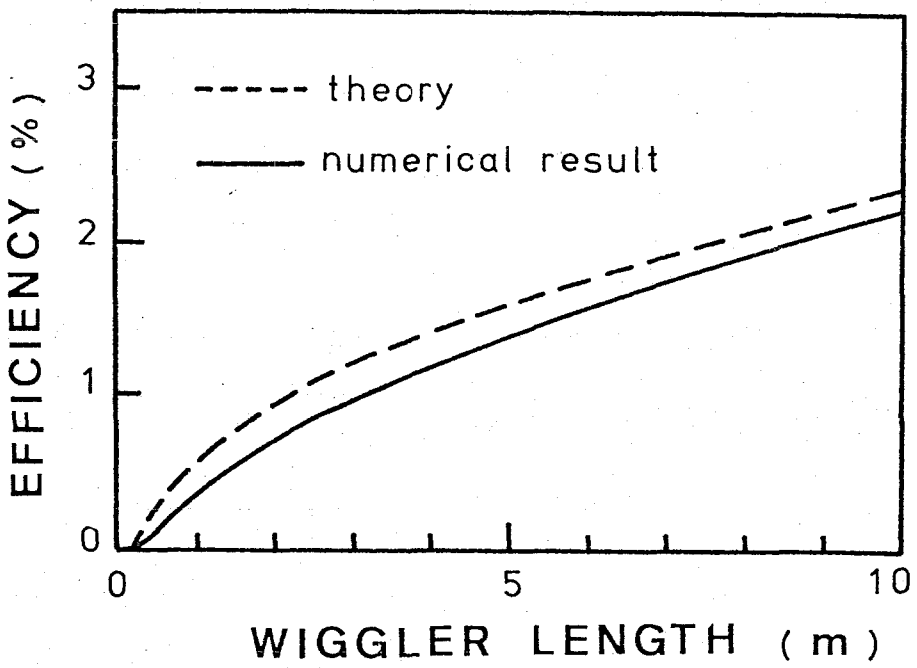


図2-4. 電子ビームから出力光へのエネルギー変換効率。破線は Vedenov の行った解析的手法による解。ウィグラー長の½乗の依存性を持つ。

ここで、Λ は、出力光エネルギーの最大値と、最小値の比である。

§2-5、自由電子レーザーに対する外部電場の効果

前節の結果を考察すれば、単純に電子ビームをヘリカルウィグラーに挿入する形の自由電子レーザーには、次のような欠点がある。

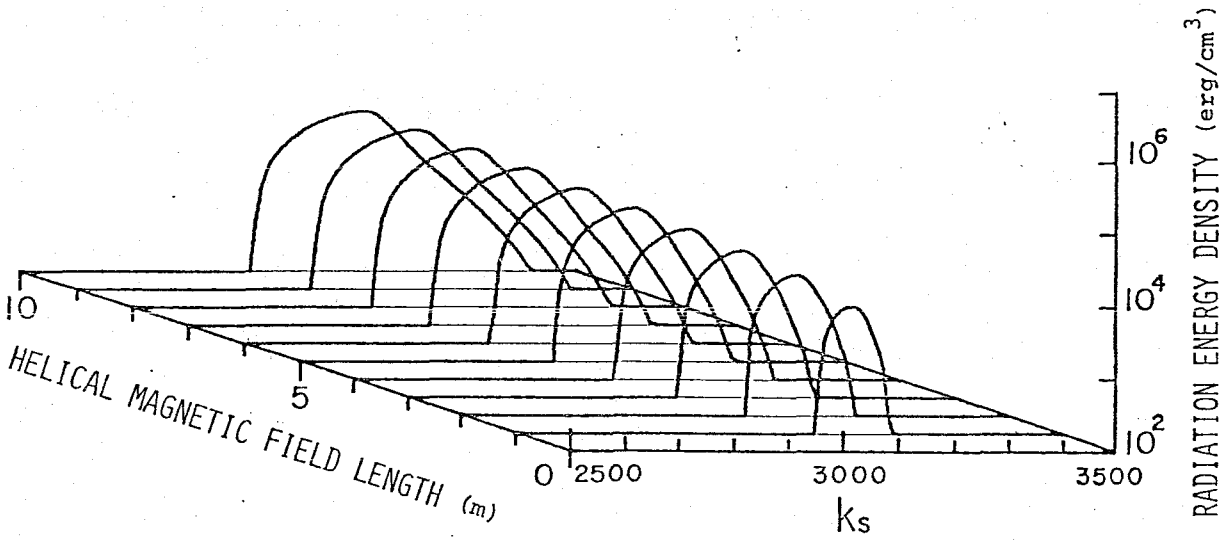
(i) エネルギー変換効率が、ウィグラーの長さの1/2乗に比例するため、装置の大型化が、エネルギー変換の面で、さ程有効ではない。

(ii) エネルギーを変換すれば、それだけビームのエネルギー分布が広くなり、同時に出力光のスペクトルがそれだけ広くなる。

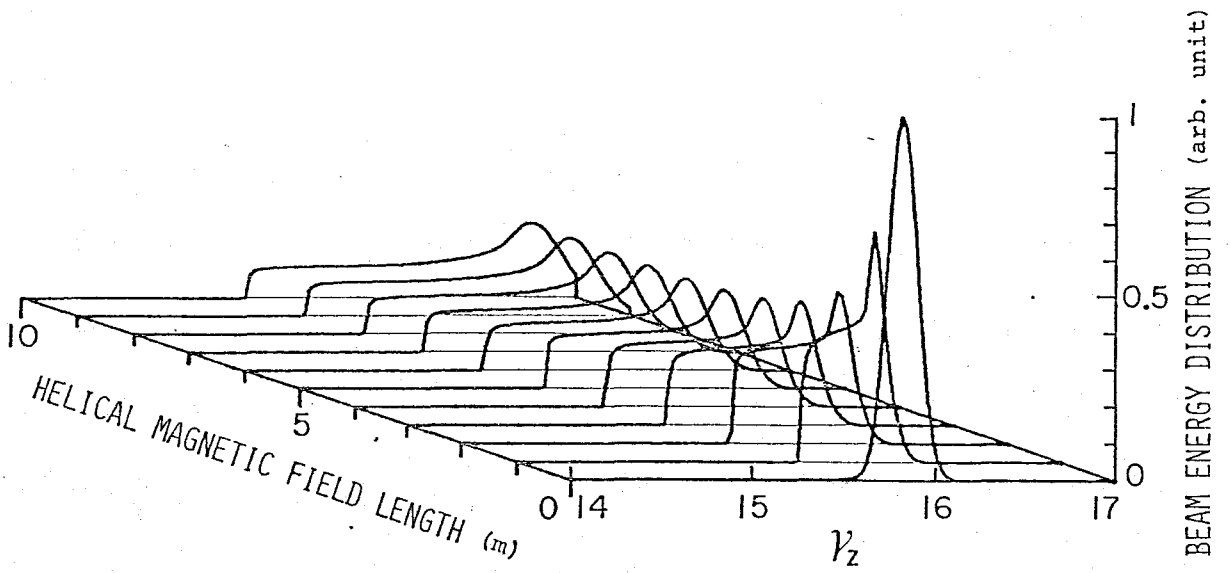
これらの欠点は、準線形効果が大きいため、電子ビームの分布が、比較的早く広がることが原因である。そこで、この準線形効果を、外部電場により抑える事を試みた。[10] このため、(2-20)式の第2式に $F_{ext}\cdot\partial f_0/\partial p$ の項を加えて計算を行った。この場合、エネルギー変換効率 η は、出力光エネルギー W_{rad} と、入力エネルギー、即ち入力電子ビームのエネルギー W_{in} と外部より加えた電場のエネルギー W_M との和の比により、求められる。

$$\eta = W_{rad} / (W_{in} + W_M) \quad . \tag{2-30}$$

この時、エネルギー保存則より、ヘリカルウィグラーから出てきた、ビームの残りのエネルギーを W_{out} とすれば、



(a)



(b)

図 2-5、外部から一様電場 ($E_{\parallel}=0.6$ kV/cm) を加えた場合の出力光スペクトル (a) と電子ビームの分布関数 (b) の空間変化。

$W_{rad} = W_{in} + W_H - W_{out}$ であるから、最終的に次式を得る。

$$\eta = W_{rad} / (W_{out} + W_{rad}) \quad . \tag{2-31}$$

図2-5(a)(b)は、最も単純な場合として、外部より、z方向に対して一様な電場 $E_{\parallel}$ を加えた結果である。 但し、$E_{\parallel} = 0.6$ KV/cm で、他のパラメーターは、前節と同じである。この場合のエネルギー変換効率を求めると、3.4%となり、外場がない場合に較べ、少し上昇している。 しかし、図よりわかるように、光のスペクトルおよび電子ビームの分布関数が、かなり広くなっている。 これは、電子ビームの中でエネルギーの高い電子は光の増幅に寄与せず、準線形効果を受けないため、加速をもっぱら外部電場から受けるのに対し、エネルギーの低い電子は、光のエネルギーが増大するため、準線形効果が大きくて、むしろ減速を受けるためである。

§2-6、自由電子レーザーに対するマイクロ波の効果

前節で述べた一様電場の欠点を補うためには、エネルギーの高い電子に対しては、力が加わらないか、あるいは減速が加わり、エネルギーの低い電子に対しては加速が加わるようになれば最良である。 このために、z方向に、電子とほぼ同じ速さで伝播するマイクロ波による加速を考えた。 但し、電子ビームは線形加速器によって作られるような、空間的に凝縮された場合を考える。 マイクロ波は、次式で与える。

$$F_m = - eE_m \sin[k_m(z - v_m t)] \ . \tag{2-32}$$

この時、$v_m \simeq v_b$ となるように置き、かつ初期において、電子群がマイクロ波によるポテンシャルの底に位置するように、

設定する。　この時、マイクロ波の強度が充分大きければ、電子群は、マイクロ波のポテンシャルに、捕捉される。　よって、加速も減速も受けない電子は、いつまでもマイクロ波のポテンシャルの底に留まるのに対し、準線形効果によって減速された電子は、マイクロ波の加速領域に移動するため、結果的に、減速が弱められる。

この様子を(2-20)式を使用して解析するために、分布関数 f_0 の代わりに、空間的に、マイクロ波の一波長にわたって平均した分布関数 $\langle f_0 \rangle$ を考える。

$$\langle f_0 \rangle = \int_{v_m t-\lambda_m/2}^{v_m t+\lambda_m/2} f_0(z,p,t)\ dz\ . \tag{2-33}$$

但し、$\lambda_m = 2\pi/k_m$ である。　前述のように、ビーム中の電子が、マイクロ波のポテンシャルの底に局在しているとして、$z_b = v_m t$ とすれば、このマイクロ波の効果は、次式のように評価される。

$$\begin{aligned}\langle F_m \frac{\partial}{\partial p} f_0 \rangle &= \frac{\partial}{\partial p} \langle F_m f_0 \rangle \\ &= \frac{\partial}{\partial p} \int_{v_m t-\lambda_m/2}^{v_m t+\lambda_m/2} F_m(z,t) f_0(z,p,t)\ dz \\ &= \frac{\partial}{\partial p} F_m(z(z_b,p), z_b/v_m)\ \langle f_0 \rangle\ .\end{aligned} \tag{2-34}$$

ここで、$z(z_b,p)$ は、一個の電子の軌道であるが、ここでは簡単のために、直線軌道で近似すれば、次式のように評価される。

$$z(z_b,p) \simeq \frac{z_b v}{v_b} = z_b \frac{c}{v_b}\left(1 - \frac{1}{\gamma_z^2}\right)^{1/2} \quad . \tag{2-35}$$

これにより、F_m は次式のような形に表わすことができる。

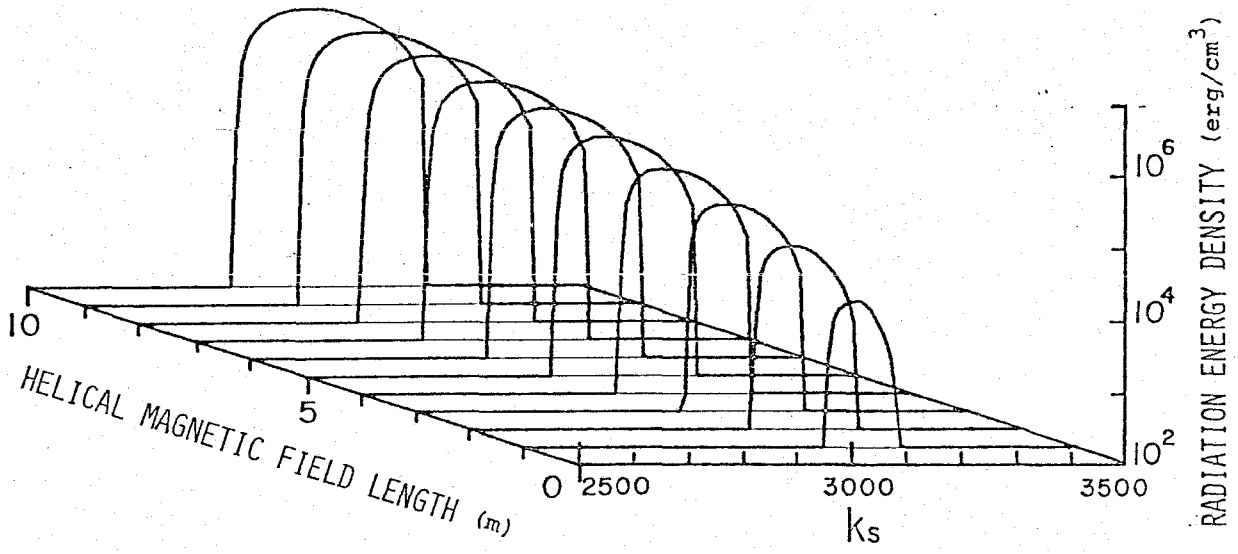
$$F_m(z(z_b,p),z_b/v_m) = -eE_m \sin\{k_m z_b[\frac{c}{v_b}(1-\frac{1}{\gamma_z^2})^{1/2}-1]\}. \tag{2-36}$$

以上の式を用い、独立変数として、z_b と p を取り、前節までと同様の空間問題として計算した結果が、図2-6 (a), (b) である。但し、マイクロ波のパラメーターとして、$\lambda_m = 1$ cm, $E_m = 60$ kV/cm とした。この図よりわかるように、出力光のエネルギーが、外場がない場合に較べ、著しく増大している。また同時に、スペクトルの拡がりも抑えられている。

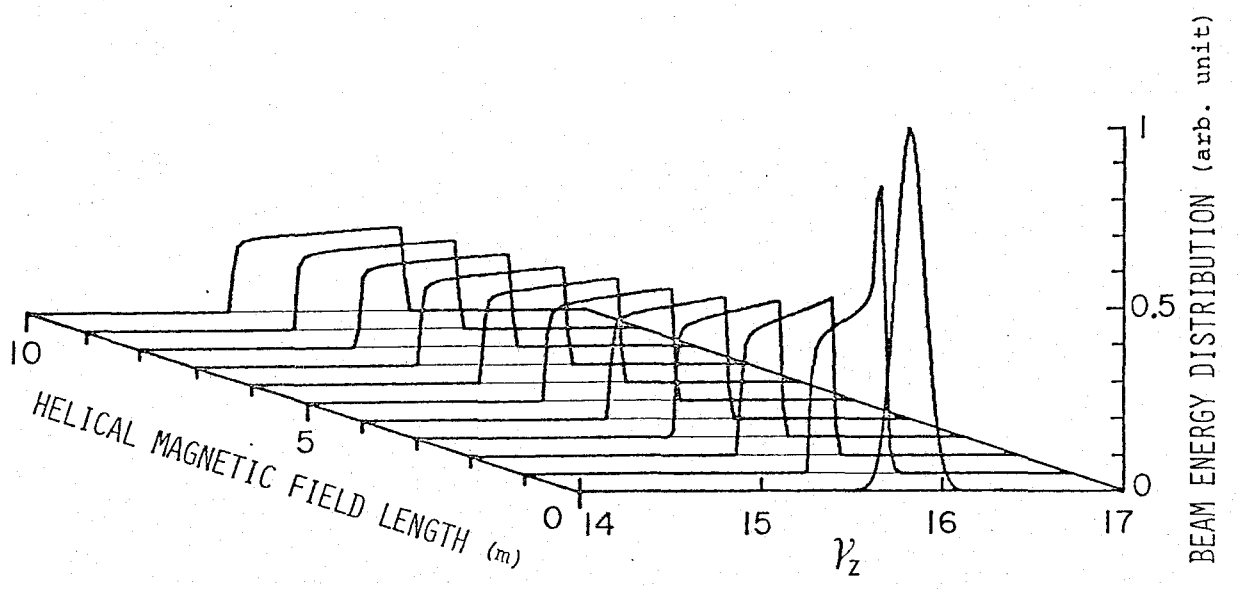
次に (2-31)式により、種々の強度を持つマイクロ波を加えた場合のエネルギー変換効率を求めたのが、図2-7である。ここで、マイクロ波の波長は 1cm に固定している。図よりわかる通り、マイクロ波により、エネルギー変換効率が著しく増大し、そのウィグラーの長さの依存性も改善されている。特に、$E_m = 60$ kV で 10m のヘリカルウィグラーの場合、エネルギー変換効率は 59% にも達している。

§ 2-7. むすびと検討

本章では、誘導コンプトン散乱領域における自由電子レーザーの空間的変化を、準線形理論を用いて解析した結果を述べた。これは、従来の解析が、光のスペクトルが狭く、電子ビームのエネルギー分布も狭い場合を取り扱っていたのに対し、逆にスペクトルに構造があり、電子ビームの分布も



(a)



(b)

図2-6、マイクロ波（$E_m = 60\ kV/cm$, $\lambda_m = 1\ cm$）を加えた場合の出力光スペクトル（a）と電子ビームの分布関数（b）の空間的変化。出力光エネルギーが著しく上昇している。

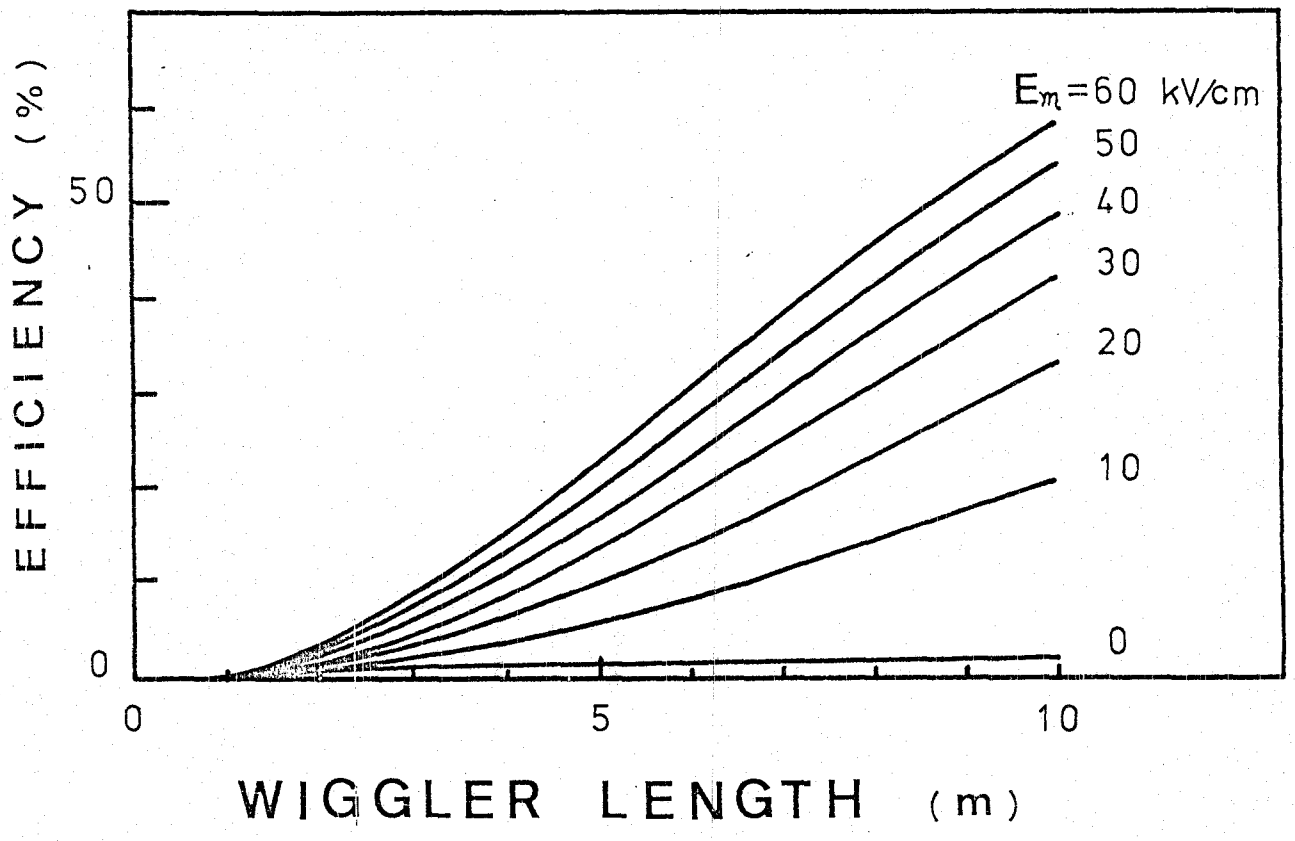


図 2-7．種々の強度のマイクロ波（λ_m=1 cm）を加えた場合のエネルギー変換効率。

広い場合を解明したものである。この場合、光の成長率は電子ビームの分布関数の勾配に比例し、出力光の飽和は、分布関数の準線形拡散によって起こることが明らかにされた。例として、$n_b = 10^{12}\ cm^{-3}$, $\gamma_b = 15.8$, $\Delta\gamma_b = 0.11$ の電子ビームを、$B_0 = 10\ kG$, $\lambda_0 = 1\ cm$ のウィグラーに挿入すれば、$0.353\ cm^{-1}$ の成長率が得られた。また、この時電子ビームから出力光へのエネルギー変換効率が計算され、それが、ウィグラーの長さの1/2乗に比例することがわかった。特に、上のパラメーターの場合、10m のウィグラーで、2.2 %のエネルギー変換が得られた。

次にこのエネルギー変換効率の長さ依存性を改善するために、外部電場の効果を調べた。その結果、電子ビームと平行に伝播するマイクロ波を使用すれば、出力光強度およびエネルギー変換効率が著しく増大することがわかった。特に、$E_m = 60\ kV/cm$, $\lambda_m = 1\ cm$ のマイクロ波を加えた場合、10m のウィグラーで、効率が 59% にも達した。この時の結果を実際のレーザーシステムとして働かせた場合の諸量を計算すれば、表 2-1 のようになる。但し、ビームのパルス巾を 10nsec とした。

表 2-1. マイクロ波を用いた自由電子レーザーシステム

Wiggler length and strength ;	10 m, 10 kG,
Electron beam energy and current ;	11 MeV, 4.8 kA/cm^2,
Input electron beam total energy ;	530 joule/cm^2,
absorbed microwave energy ;	730 joule/cm^2,
Output radiation energy ;	740 joule/cm^2,
Conversion efficiency ;	58.6 %.

最後に、以上の解析における仮定の正当性に検討を加える。まず、準線形理論の正当性を調べる。適用条件、(2-19)式において、ωを $2k_i'\Delta U'$ によって評価すれば、実験室系で次の関係式が得られる。

$$W \ll \frac{4m^2c^6\gamma_\perp^{\ 2}k_0^{\ 4}}{\pi e^2\omega_c^{\ 2}}\Delta\gamma_z^{\ 4} \quad . \tag{2-37}$$

$$\simeq 3.14\times10^8\ \Delta\gamma_z^{\ 4} \quad .$$

但し、第2式は、前節までの数値計算で使用したパラメーターにより評価したものである。計算結果を使用してこの不等式を評価すれば、次のようになる。第一に、外部電場を加えない場合には、$W \simeq 10^5\,\mathrm{erg/cm^3}$ で、$\Delta\gamma_z \simeq 0.8$ であるから充分満足していることがわかる。次に、最も光の強度が大きい、60 kV/cm のマイクロ波を加えた場合も、$W \simeq 2\times10^7\,\mathrm{erg/cm^3}$, $\Delta\gamma_z \simeq 0.8$ で満足しており、準線形理論の正当性が証明される。

もう一つ、直線軌道近似、(2-35)式の評価をしておく。電子の位置は、速度を積分することにより、次式で与えられる。

$$z = \int_0^t v\,dt' = c\int_0^t (1-\gamma_z^{-2})^{1/2}\,dt'$$

$$\simeq c\int_0^t \left(1 - \frac{1}{2\gamma_z^{\ 2}}\right) dt' \quad .$$

これに対し、

$$\gamma_z = \gamma_b + \int_0^t \frac{d\gamma_z}{dt'}\,dt' \quad .$$

という関係を使用すれば、マイクロ波の位相の上での電子の位置は、次のように評価される。

$$\psi = z - v_m t = \int_0^t c\left[1 - \frac{1}{2}\left(\gamma_b + \int_0^{t'} \frac{d\gamma_z}{dt''} dt''\right)^{-2}\right] dt' - v_m t \quad .$$

この時、$\gamma_z \gg 1$，かつ $\gamma_m = (1 - v_m^2/c^2)^{-1/2}$ として、$|\gamma_m - \gamma_z| \ll \gamma_m$ とすれば、上式は、次のようになる。

$$\psi \simeq \frac{ct(\gamma_z - \gamma_m)}{\gamma_m^3} - \frac{c}{\gamma_m^3}\int_0^t t' \frac{d\gamma_z}{dt'} dt' \quad . \tag{2-38}$$

そこで、$d\gamma_z/dt$ が，$t \leq L/v$ において充分小さければ、ψ は直線軌道 $ct(\gamma_z - \gamma_m)/\gamma_m^3$ で近似し得る。§2-6 における結果を用いれば、(2-38)式の第2項は、充分無視できることがわかる。

第二章の参考文献

1) J. M. J. Madey, J. Appl. Phys. 42 (1971) 1906.

2) F. A. Hopf, P. Meystre, M. O. Scully and W. H. Louisell, Phys. Rev. Lett. 37 (1976) 1342.

3) P. Sprangle and R. A. Smith, Phys. Rev. A 21 (1980) 293.

4) A. A. Vedenov, J. Nuclear Energy C 5 (1963) 169.

5) J. D. Jackson, "Classical Electrodynamics" J. Wiley & Sons, Inc., (1962) pp.654-700.

6) S. Ichimaru and N. Iwamoto, J. Phys. Soc. Jpn. 44 (1978) 1004.

7) B. M. Kincaid, J. Appl. Phys. 48 (1977) 2684.

8) 近藤 淳，電子技術総合研究所調査報告、第200号 (1979)

9) A. A. Vedenov and D. D. Ryutov, "Review of Plasma Physics", Vol.6, Consultants Bureau, New York (1975) pp.1-14.

10) A. T. Lin, Phys. Rev. Lett. 46 (1981) 1515.

第三章．電子捕獲による単一モード増幅の場合の飽和過程とマイクロ波の効果

前章においては、電子ビームのエネルギー分が広く、かつ入力光のエネルギーが、シンクロトロン輻射光のような、比較的低い場合を取り扱った。この場合、(2-36)式のような条件が成立し、準線形理論による解析が可能であった。ところが、電子ビームの分布が狭く、かつ、入力光として、単色の外部光を使用する場合には、(2-36)の条件が成立せず、準線形理論は適用不能となる。このような場合、増幅に対する飽和過程は、電子ビームの分布の拡がりではなく、増幅に寄与する電子の、動重力による捕獲（trapping）の効果によって起こる。本章においては、この電子捕獲の効果が強い場合の光の飽和の様子と、前章で、効率改善の方法として、重要な役割を果たした、マイクロ波の効果について論ずる。

この電子捕獲の効果を調べるため、本章においては、電子ビーム中の、個々の電子の軌道を、直接、運動方程式を解くことにより、解析した。その結果、外部電場を加えない場合には、出力光が速に飽和するのに対し、マイクロ波を加えると、飽和せずに成長を続けることがわかった。さらにこの成長の様子を直流電場と較べた場合、電子捕獲の効果が弱い場合に、マイクロ波の利点が現われることが、明らかにされた。

§3-1．電子の運動方程式と光の増幅．

問題を前章同様、1次元問題とする。実験室系での、運動方程式を得るために、相対性理論を用いるが、その計算の便宜のために、ヘリカルウイグラーおよび、出力光をベクトルポテンシャルで表わせば、次式となる。

$$\underset{\sim}{A}_0 = -A_0[\,\hat{x}\cos k_0 z + \hat{y}\sin k_0 z\,]\ . \tag{3-1}$$

$$\underset{\sim}{A}_s = A_s(z,t)[\,\hat{x}\cos(k_s z-\omega_s t+\delta) - \hat{y}\sin(k_s z-\omega_s t+\delta)\,]\ . \tag{3-2}$$

ここで、ウィグラーの磁場 B_0 と A_0 の関係は、$B_0 = k_0 A_0$ である。この２つのベクトルポテンシャルと、マイクロ波による静電ポテンシャル Φ_m を含むハミルトニアン H は、次式のように表わされる。

$$H = [\,m^2c^4 + c\{\underset{\sim}{p} + \frac{e}{c}(\underset{\sim}{A}_0+\underset{\sim}{A}_s)\}^2\,]^{1/2} - e\Phi_m\ . \tag{3-3}$$

これを用いて、電子の運動方程式を求めれば、次式のようになる。[1)]

$$\frac{d}{dt}mc^2\gamma_i = -\frac{e^2k_sA_0}{mc}A_s\frac{\sin[(k_0+k_s)z_i-\omega_s t+\delta]}{\gamma_i}$$

$$-ev_iE_m\sin k_m(z_i-v_m t)\ . \tag{3-4}$$

$$\frac{d}{dt}z_i = v_i = c\,[\,1-\frac{k_s\gamma_\perp^2}{2(k_0+k_s)\gamma_i^2}\,]\ . \tag{3-5}$$

ここで、z_i, v_i, $mc^2\gamma_i$ は、電子の位置、速度、およびエネルギーである。また添字 i は、具体的計算の際に、複数の電子の運動を連立させて解くための"i番目"という意味である。また、$\gamma_\perp = (1+e^2A_0^2/m^2c^4)^{1/2}$ である。上式において、(3-4)式は、電子の運動エネルギーの時間的変化を表わしている。その右辺の中で、第１項は、既に述べたウィグ

ラーと、出力光の干渉により生ずる、動重力による仕事で、(3-3)式の $(\underset{\sim}{A_0}+\underset{\sim}{A_s})^2$ の項より現われる。そして、第2項が、マイクロ波による仕事である。(3-5)式は、電子の速度を記述しており、ここで、$\gamma_i \gg 1$ を仮定している。

この電子の運動に対する、光の増幅の様子は、前章同様マックスウェル方程式より導かれる波動方程式に、非線形電流を考慮することにより求められる。

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+c\frac{\partial}{\partial z}\right)A_s=\frac{2\pi e^2 n_b A_0}{mck_s}\left\langle\frac{\sin[(k_0+k_s)z_i-\omega_s t+\delta]}{\gamma_i}\right\rangle . \quad (3\text{-}6)$$

この式で、n_b は電子ビームの密度を表わし、$\langle\ \rangle$ は、全電子に対して平均を取る事を意味する。

計算の便宜のために、z_i の代わりに $\psi_i=(k_0+k_s)z_i-\omega_s t$ を変数に取り、ct を z に書き換える。

$$\frac{d\gamma_i}{dz}=-\frac{e^2k_sA_0}{m^2c^4}A_s\frac{\sin(\psi_i+\delta)}{\gamma_i}-\frac{eE_m}{mc^2}\sin(\kappa\psi_i-\eta z) . \quad (3\text{-}7)$$

$$\frac{d\psi_i}{dz}=k_0-\frac{k_s}{2\gamma_i^2}\gamma_\perp^2 . \quad (3\text{-}8)$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+c\frac{\partial}{\partial z}\right)A_s=\frac{2\pi e^2 n_b A_0}{mc^2k_s}\left\langle\frac{\sin(\psi_i+\delta)}{\gamma_i}\right\rangle . \quad (3\text{-}9)$$

但し、$\kappa=k_m/(k_0+k_s)$, $\eta=k_m[v_m/c-k_s/(k_0+k_s)]$ である。

§3-2. 捕獲粒子と非捕獲粒子[2)]

§3-1で求めた式(3-7)～(3-9)を連立させて計算すれば電子の運動、および光の増幅の様子が解析されるが、その結果中の重要な概念である、電子捕獲についての概説を、本節において行う。

例えば、プラズマ中に、次式で表わされる静電波 ϕ が励起されたとする。

$$\phi = \phi_0 \cos(kx - \omega t) \quad . \tag{3-10}$$

簡単のため、プラズマはx方向だけに動く、1次元プラズマであるとすれば、この静電波中での電子の運動方程式は、次式のように表わされる。

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = e\frac{\partial\phi}{\partial x} = - ek\phi_0 \sin(kx-\omega t) \quad . \tag{3-11}$$

今、xの代わりに $\psi = kx - \omega t$ を変数として、(3-11)式を変形し、かつ両辺に $d\psi/dt$ を掛けて積分すれば、次式を得る。

$$\frac{1}{2}\frac{m}{k^2}\left(\frac{d\psi}{dt}\right)^2 - e\phi_0(1+\cos\psi) = W \quad . \tag{3-12}$$

但し、W は定数である。この式の左辺第1項は、静電波に乗った系での電子の運動エネルギーである。（実際、$\omega=0$ の場合、即ち静電波が静止している場合には、第1項は $1/2\, m v_x^2$ となる。）また、第2項は静電波のポテンシャルエネルギーであり、結局(3-12)式は、これら2つのエネルギーの和が、一定であることを示す。今、ϕ_0（>0）が、

時間的に一定であるとした場合の電子の運動を、図式的に表わしたのが、図3-1である。図3-1(a)は、(3-10)式の静電ポテンシャルの形状で、(b)は、それに対する電子の軌道を、(ψ, $d\psi/dt$)平面(位相平面)上に描いたものである。

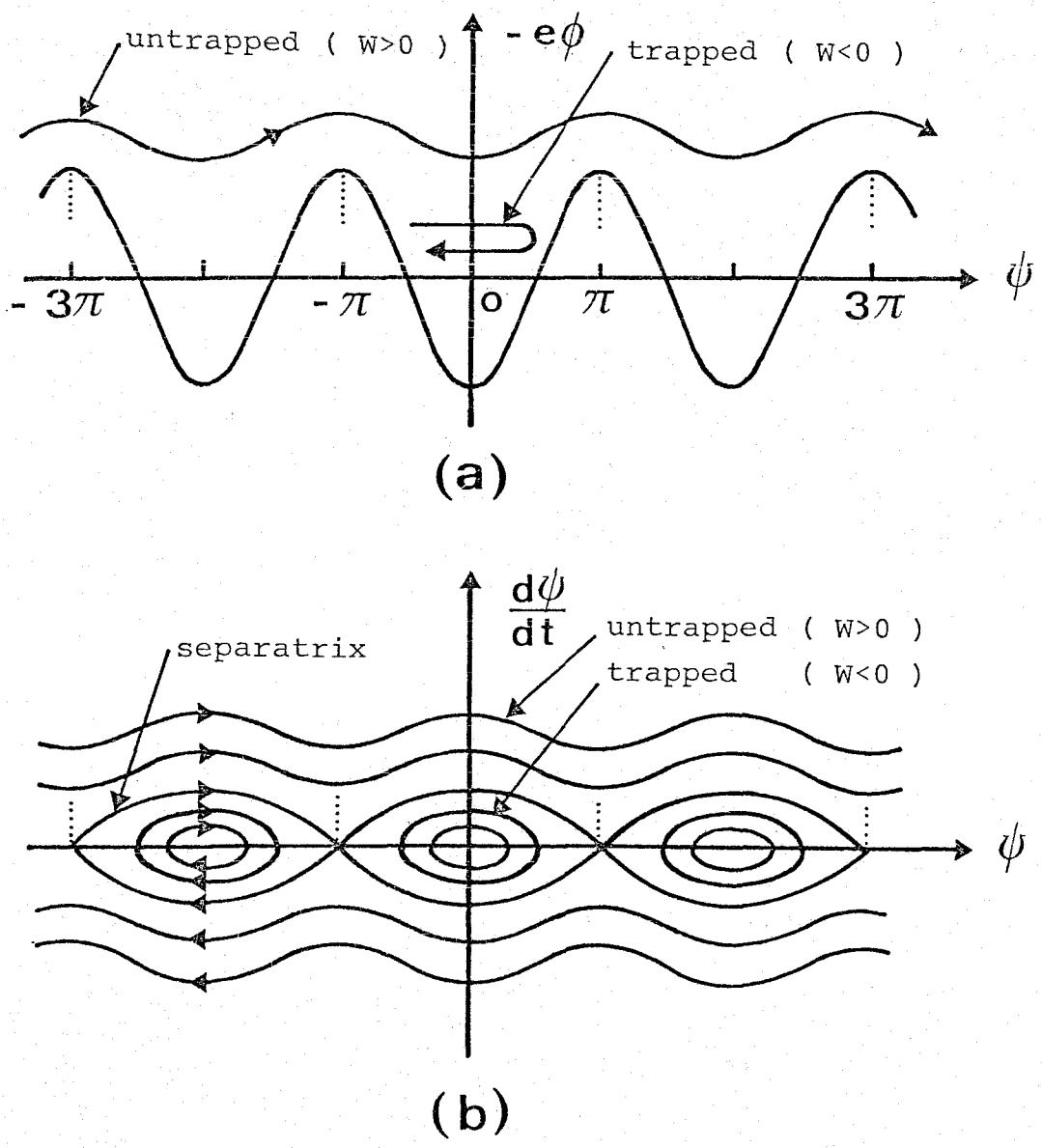


図3-1、電子捕獲の概念図。
ポテンシャルの形状(a)と位相空間(b)

図に描かれているように、電子はその総エネルギー W の正負により、2つに大別される。図3-1(b)で、楕円軌道を描いている電子、即ち $W<0$ の電子を、捕獲電子（trapped electron）と言う。この場合、電子は静電波のポテンシャルの山を越えられずに、一つの谷の中で、周期運動を繰り返す。これに対し、図の波線軌道を描く電子、即ち $W>0$ の電子を、非捕獲電子（untrapped electron）と言う。この場合、電子はポテンシャルの山を乗り越えて進むことができる。これら2種の境界（$W=0$ の曲線）を、セパラトリックス（separatrix）と言う。この電子の運動、特に捕獲電子の運動を、静電波側より見れば、電子がポテンシャルの谷の中で、減速される時は、波はエネルギーを得、加速される時は、エネルギーを与えている。それゆえ、波の振幅は一定ではなく、捕獲電子の振動数により、振動を起こしている。実際のプラズマにおいては、電子の数が多いため、事情はもう少し複雑である。今プラズマ中に、静電波を急に加えた場合を考える。初期においては、この静電波のために、すべての捕獲電子は、一様に振動し、静電波もそれに見合って、振幅振動を起こす。ところが、時間がたてば、捕獲電子の振動数が、電子のエネルギー W によって異るため、除々に加速位相にある電子と、減速位相にある電子の数が平均化され、（phase mixing）、振幅振動は止まることになる。以上の電子捕獲の効果、および振幅振動の無衝突減衰は、比較的古くより、理論的予想がなされており[3]、実験においても検証されている[4]。

(3-12)式よりわかるように、電子のエネルギーが保存する場合には、捕獲電子はいつまでも捕獲されており、非捕獲電子は、いつまでも捕獲されることはない。しかし、波が上述のような振幅振動を起こしていたり、外部より別の電場を加えた場合には、捕獲電子が非捕獲電子になったり、

(detrapping)、非捕獲電子が捕獲されたり(retrapping)する現象が起こる。これらの効果が、この章において、主要な役割を果たすものである。

次に、(3-7)(3-8)式より、自由電子レーザー中における動重力による捕獲の効果を調べておく。後に述べるように、出力光の強度は時間的に変化するが、その変化の時間スケールは、捕獲の効果による振動の周期に較べて充分大きいのでこれを無視する。また、$k_0 \gg |d\psi_i/dz|$ と仮定すれば、(3-8)式より次式を得る。

$$\gamma_i^2 \simeq \frac{\gamma_\perp^2 k_s}{2k_0}\left(1+\frac{1}{k_0}\frac{d\psi_i}{dz}\right). \tag{3-13}$$

上式を(3-7)式に代入すれば、マイクロ波の効果がない場合には、次の方程式を満足する。

$$\frac{d^2\psi_i}{dz^2} = -\frac{4e^2k_0^2A_0A_s}{m^2c^4\gamma_\perp^2}\sin(\psi_i+\delta) \quad . \tag{3-14}$$

よって、捕獲の状況を調べるための手段として、次のセパラトリックスの方程式が得られる。

$$S\left(\psi_i, \frac{d\psi_i}{dz}\right) = \left(\frac{d\psi_i}{dz}\right)^2 - \frac{8e^2k_0^2}{m^2c^4\gamma_\perp^2}A_0[|A_s|+A_s\cos(\psi_i+\delta)]. \tag{3-15}$$

即ち、$S(\psi_i, d\psi_i/dz)<0$ の場合、電子は捕獲されており、さもなくば、非捕獲である。

さらに、マイクロ波を加えた場合は、事情が少し複雑になる。この場合、捕獲は、動重力とマイクロ波の重ね合わ

せによってできるポテンシャル上で、考えなければならない。しかし一般に、動重力の波長は出力光の波長のオーダーであり、マイクロ波の波長は、センチメートルのオーダーであるから、動重力の波長は、マイクロ波の波長に較べて、はるかに短い。さらにマイクロ波の強度の方が、動重力の強度よりも大きいため、電子は長いスケールのマイクロ波のポテンシャルの中で、短いスケールの動重力を通して、出力光と、相互作用をすることになる。

§3-3、電子捕獲が強い場合の増幅光の飽和とマイクロ波の効果、

(3-7)～(3-9)式を用いて、粒子数を約1000個にして数値計算を行い、結果を得た。これを示したのが、図3-2である。ここで、ウィグラーは、磁場が5kG，ピッチが2cmで、電子ビームはその初期エネルギーが10.2MeV（$\gamma_0=20.0$，$\gamma_{z0}=14.6$）、密度を$10^{12}\,cm^{-3}$と置いた。また、出力光の波長を48.3μmに取った。これにより、動重力の位相速度v_pに対するローレンツ因子$\gamma_\phi(=(1-v_\phi^2/c^2)^{-1/2})$が14.4となり、電子ビームの速度のz成分より、わずかに遅くなっている。また、本節の計算においては、入力光のエネルギー密度を$3.4\times10^5\,erg/cm^3$に設定した。

図3-2において、破線がマイクロ波を加えない場合、実線がマイクロ波（$E_m=50\,kV/cm$，$\lambda_m=2\,cm$，$\gamma_m=(1-v_m^2/c^2)^{-1/2}=16.8$）を加えた場合である。ここで、粒子は、その初期エネルギーはすべて等しい（エネルギー拡がりがない）が、その初期位置は、動重力の位相の中に均等に配分されている。図を見ればわかるように、マイクロ波を加えない場合には、出力光強度は、初期において少し増加するのみで、すぐ飽和してしまい、その後は振動するだけである。この結果は、

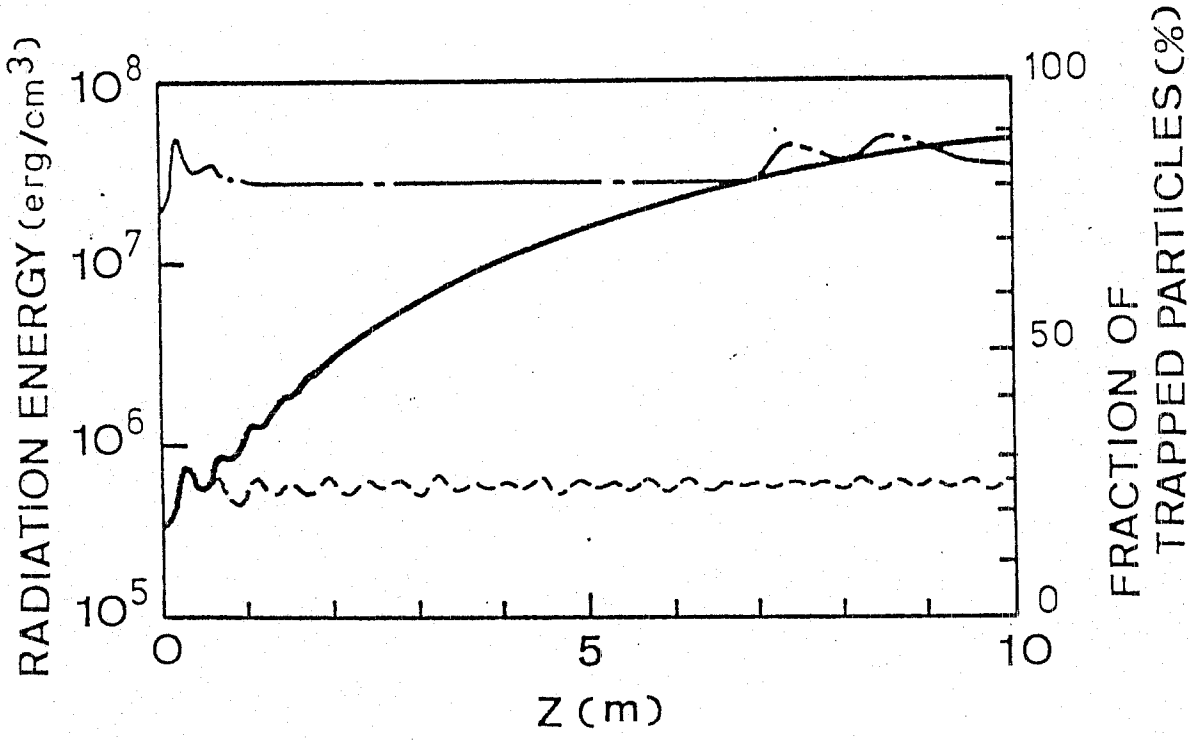


図 3-2、電子捕獲の効果が強い場合の出力光強度の空間変化。破線がマイクロ波を加えない場合。実線が、マイクロ波 ($E_m = 50\,kV/cm$, $\lambda_m = 2\,cm$, $\gamma_m = 16.8$) を加えた場合。一点鎖線は捕獲電子の割合を表わす。

Sprangle[5]等による解析結果と一致しているが、説明すれば、次のようになる。　初期条件によれば、電子の速度が、動重力の位相速度よりわずかに大きいため、少し時間が経てば、加速位相にある電子数が、減速位相にある電子数より少なくなり、光の増幅が始まる。　この増幅は、第一章で述べたように、電子の平均速度が、動重力の位相速度に等しくなるまで続く。　ところが、光のエネルギーが大きいため、エネルギーを失った電子は、殆んどが動重力のポテンシャルの谷に捕獲されてしまう。　一端、電子が捕獲されれば、前節で述べた振幅振動をするだけで、最早、光のエネルギーだけが、増大することがなくなるわけである。

これに対し、マイクロ波を加えた場合には、光の成長に飽和が見られない。　但しこの場合、電子群のz方向の拡がりは、マイクロ波の波長に較べて充分短く、かつ初期において、マイクロ波のポテンシャルの底に位置するように設定した。　この光の成長を解釈すれば、次のようになる。　今殆んどの電子が捕獲されている状態に、外部より電子を加速するような電場を加えたとする。　この時、電子が加速位相にある時には、より加速され、減速位相にある時には、減速が弱められるので、時間的に、電子が加速位相に居る時間よりも、減速位相に居る時間の方が長くなり、光のエネルギーが増大する。　即ち電子ビームを媒体として、外部から出力光への、エネルギー注入を行うわけである。　マイクロ波の場合には、初期においては、電子群がマイクロ波のポテンシャルの底にあるため電場を受けず、前記のように早い時間内に殆んどの電子が捕獲される。　この捕獲された電子の割合を(3-15)式を使って判定することにより求めたのが、図3-2の一点鎖線である。　図より、80%以上の電子が捕獲されていることがわかる。　その後、マイクロ波は動重力よりも、早い位相速度を持つので、動重力に捕獲された電子から見れ

ば、外部から加わる電場が徐々に強くなり、それに見合って出力光強度が増大するわけである。

この光の増大の様子は、(3-7)～(3-9) 式より、簡単に示される。 $W = k_s^2 A_s^2/4\pi$ として、(3-7) 式と (3-9) 式を辺々加えれば、次式を得る。

$$\frac{d}{dz}\left[W + n_b mc^2 \langle \gamma_i \rangle \right] = - e n_b E_m \langle \sin(\kappa\psi_i - \eta z) \rangle \quad . \tag{3-16}$$

この式は、電子ビームと出力光がなしている系に、マイクロ波によってエネルギー注入が行われていることを表わしている。 今、電子ビームの空間的拡がりを、マイクロ波の波長に較べて無視できるものと仮定すれば、右辺の ψ_i の依存性が無視できて、(3-16) 式は次式のように積分される。

$$W + r n_b mc^2 \langle \gamma_i \rangle \simeq \frac{2 e r n_b}{\eta} E_m \sin^2 \frac{\eta z}{2} + W_0 + r n_b mc^2 \gamma_0 \quad .$$

ここで、光の増幅には、捕獲電子のみが寄与するとして、電子密度 n_b に、捕獲電子の割合 r を掛けてある。 今、動重力中での振動を無視すれば、捕獲電子の平均エネルギーは $mc^2\langle\gamma_i\rangle \simeq mc^2\gamma_p$ となる。 但し、$\gamma_p = \gamma_\perp (1 - v_\phi^2/c^2)^{-1/2}$ で、v_ϕ は動重力の位相速度である。 よって、最終的に次式を得る。

$$\begin{aligned} W &= \frac{2 e r n_b E_m}{\eta} \sin^2 \frac{\eta z}{2} + W_0 + r n_b mc^2 (\gamma_0 - \gamma_p) \quad . \\ &\simeq \frac{e r n_b E_m}{2} \eta z^2 + \mathrm{const} \quad . \end{aligned} \tag{3-17}$$

但し、最後の式は、zが短い場合である。この式よりわかるように、マイクロ波を使って光の増幅をさせた場合、距離の2乗に比例して、出力光エネルギーが増大することが、わかる。この式より計算される増幅の様子は、図3-2の実線に非常に良く一致する。

§3-4. 電子捕獲が弱い場合のマイクロ波の効果

前節における議論を考察すれば、捕獲の効果が強い場合には、外部電場は必ずしもマイクロ波である必要はない。即ち、直流電場を加えても、光の増大の依存性が違うだけで、増大の手段としては、特に新しいものではない。しかし、捕獲の効果があまり大きくない場合には、両者の間に差が生じ、マイクロ波の有効性が現われる。

図3-3は、入力光エネルギーが $3.4\times10^{3}\ erg/cm^{3}$ であり、前節の計算における値より、2桁小さい場合である。この時、$E_m=50\ kV/cm$, $\lambda_m=2\ cm$, $\gamma_m=15.3$ のマイクロ波を加えている。この場合、マイクロ波が進むと、その強度が大きくなりすぎるために、一旦捕獲された電子が強制的に、動重力ポテンシャルの外へ出されて、非捕獲電子になってしまう。図で言えば、$z\simeq2\ m$ 程度で、捕獲電子の割合は、30% 以下に下がっているのがわかる。この時、印加した電場が、直流電場であれば、この非捕獲電子が再び捕獲されることはない。[6] ところがマイクロ波の場合、電子群はポテンシャルの底付近に位置しているので、非捕獲電子は、マイクロ波のポテンシャルで跳ね返される。このため、再び動重力の位相速度にまで減速され、再び捕獲され、増幅に寄与することになる。図3-3で言えば、$z=8\sim10\ m$ のあたりで、非捕獲電子の再捕獲が起き、捕獲電子の割合が、増加することがわかる。同時に出力光強度の成長率も増加している。図

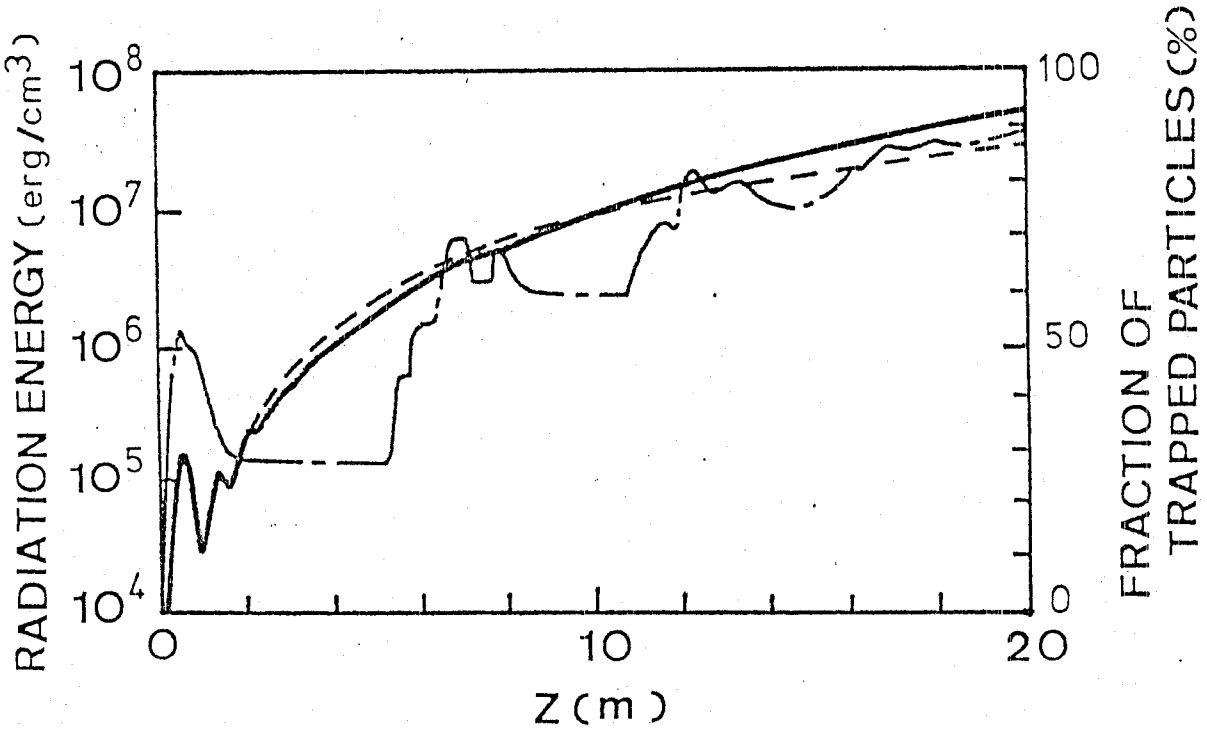


図3-3. 電子捕獲の効果が弱い場合のマイクロ波の効果。
実線は、出力光強度。 一点鎖線は捕獲電子の割合。
破線は、捕獲電子の割合を28.6%とした時の解析解。

3-3の破線は、$\gamma = 28.6\ \%$ とした場合の（3-17）式より求めた解析解である。　この図より、再捕獲が起こるまでは、実線と破線の成長の傾向は良く似ているが、再捕獲により捕獲電子が増すと、実線が優勢になることが、わかる。

§3-5、むすび

本章においては、電子ビームのエネルギー分布が狭く、かつ、出力光が単色である場合の自由電子レーザーにおける電子捕獲の効果と、マイクロ波による、出力光の増幅の様子について述べた。　この場合、前章で用いた準線形理論は、適用不能なため、個々の電子の軌道を、運動方程式を用いて追跡することにより解析した。

この結果、外部から電場を加えない場合には、出力光の増幅は、比較的短い時間内に飽和してしまい、その後は、振幅振動するだけであることがわかった。　そしてこの場合、捕獲電子の割合が多ければ、マイクロ波を加えることにより、出力光は飽和せずに、電子の進んだ距離の2乗に比例して、増大することが、わかった。　但しこの場合には、マイクロ波は、電子に加わる電場を除々に上昇するという効果の他には、独特の有用性はなく、効果としては、直流電場と同じものであった。

ところが、入力光強度が低く、初期において捕獲の効果が、あまり大きく望めない場合には、マイクロ波の捕獲より外れた電子を再捕獲する効果が、出力光の成長率の改善に、有効であることがわかった。　これは、次の場合に有効である。　(3-17)式より明らかなように、出力光の成長率を大きくするためには、外部電場はできる限り大きい方が良い。ところが、あまり大き過ぎれば、前節で述べたように、捕獲電子が動重力ポテンシャルから飛び出してしまい、かえって

成長率が減少する。　この時生ずる非捕獲電子は、直流電場の場合、捨てるしかないが、マイクロ波の場合には、再捕獲効果により再使用が可能であるため、結局、直流電場よりもマイクロ波の方が、大きな電場を加え得ることになる。

第三章の参考文献

1) C. A. Brau, J. Quantum Electron., QE-16 (1980) 1335.

2) R. Z. Sagdeev and A. A. Galeev, "Nonlinear Plasma Theory" W. A. Benjamin, Inc. (1969) 37.

3) T. M. O'Neil, Phys. Fluids 8 (1965) 2255.

4) J. H. Malmberg and C. B. Wharton, Phys. Rev. Lett. 19 (1967) 775.

5) P. Sprangle, C. M. Tang and W. M. Manheimer, Phys. Rev. Lett. 43 (1979) 1932.

6) A. T. Lin, Phys. Rev. Lett. 46 (1981) 1515.

第四章．自由電子レーザーにおける２次元効果

以上の２章において、２つの異った領域における自由電子レーザーの解析と、その高効率化について論じたが、これらはいづれも、電子ビームの進行方向に対する諸量の変化のみを論じた１次元問題であった。しかし実際には、電子ビームの太さの有限性や光の回折効果等の、横方向の変化が、光の増幅に大きな影響を及ぼすはずである。それゆえ、このような横方向の変化を考慮した２次元問題の解析は、必要不可欠であり、現在多くの研究者達が、この問題に取り組んでいる。[1)-3)]

さて、従来の２次元問題の研究は、直線的ウィグラーを用いた自由電子レーザーにおいて、そのウィグラー磁場の、横方向不均一性の、電子の運動、光の増幅への影響を論じた解析が主であった。これに対し、本章においては、ヘリカルウィグラーを用いた自由電子レーザーにおいて、磁場の不均一性を考慮した場合の光の増幅解析について述べる。そして、その結果として、光の増幅は、ウィグラー磁場の形状より決定される、ある半径内でのみ起こることを示す。これは、上述の直線的ウィグラーの場合の解析結果と同じであり[1)]、磁場の強度変化が、電子ビームと、動重力との共鳴条件を変化させることによって起こるものである。さらに、そのような半径方向に変化するような増幅率を持つ媒質により増幅を行う場合には、電子ビームの密度と、そのエネルギー拡がりより決定される閾値が存在することを示す。

§4-1．ヘリカルウィグラーの磁場の不均一．

図1-2(b)の電流配位により作られるヘリカルウィグラーでは、その形状よりわかるように、らせんの軸付近の磁場よ

りも、電流の流れている付近の磁場の方が強い。２次元問題の手始めとして、本節において、この変化の様子を計算することにする。

簡単のため、ヘリカルウィグラーは無限に長いとして、２本のらせん電流の位置を次式のように置く。

$$\mathbf{r}_1 = -\hat{x}\, r_0 \sin k_0 z' + \hat{y}\, r_0 \cos k_0 z' + \hat{z}\, z' \,. \tag{4-1}$$

$$\mathbf{r}_2 = \hat{x}\, r_0 \sin k_0 z' - \hat{y}\, r_0 \cos k_0 z' + \hat{z}\, z' \,. \tag{4-2}$$

但し、r_0 はコイルの半径である。この時 $\mathbf{r}$ に流れる電流を I とすれば、この電流配位によって生ずる磁場のベクトルポテンシャルは、ビオ・サバールの法則により、次式で与えられる[4]。

$$\mathbf{A}_0(\mathbf{r}) = \frac{I}{c}\left[\int\frac{d\mathbf{r}_1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_1|} - \int\frac{d\mathbf{r}_2}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_2|}\right],$$

$$= \frac{I}{c}\int\left[\frac{d\mathbf{r}_1/dz'}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_1|} - \frac{d\mathbf{r}_2/dz'}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_2|}\right] dz' \,. \tag{4-3}$$

さて、空間座標 $\mathbf{r}$ を、円筒座標系 (r, θ, z) で表わし、さらに、らせんの中心軸付近の磁場変化を求めるため、$r \ll r_0$ とする。この時、r/r_0 の２次までの展開を行って (4-3) 式を計算すれば、次の結果を得る。

$$\mathbf{A}_0 = A_x\,\hat{x} + A_y\,\hat{y} + A_z\,\hat{z} \,. \tag{4-4}$$

但し、A_x, A_y, A_z は、次式で与えられる。

$$A_x = -\frac{2Ix_0}{c}\cos k_0 z\ [2K_0(x_0)+\{\frac{x_0^2}{2}K_2(x_0)-x_0K_1(x_0)\}\frac{r^2}{r_0^2}]$$

$$+\frac{Ix_0^3}{2c}[\cos(k_0z-2\theta)K_2(x_0)+9\cos(3k_0z-2\theta)K_2(3x_0)]\frac{r^2}{r_0^2},$$

$$A_y = -\frac{2Ix_0}{c}\sin k_0 z\ [2K_0(x_0)+\{\frac{x_0^2}{2}K_2(x_0)-x_0K_1(x_0)\}\frac{r^2}{r_0^2}]$$

$$+\frac{Ix_0^3}{2c}[-\sin(k_0z-2\theta)K_2(x_0)+9\sin(3k_0z-2\theta)K_2(3x_0)]\frac{r^2}{r_0^2},$$

$$A_z = -\frac{4Ix_0}{c}\frac{r}{r_0}\sin(k_0z-\theta)K_1(x_0)\quad . \qquad (4\text{-}5)$$

ここで、$x_0 = k_0 r_0$ であり、$K_n(x)$ は、第2種変形ベッセル関数である。それによれば、$K_2(3x_0)$ は、$K_2(x_0)$ に対して充分小さいので、無視できる。上式より明らかなように、ベクトルポテンシャルの半径依存性は、らせんの半径と、ピッチのみで決定される。例として、半径が 1cm、ピッチが 2cm の場合には、(4-5)式は、次式のようになる。

$$A_x = -A_0[(1+2.47r^2)\cos k_0z - 2.14r^2\cos(k_0z-2\theta)],$$

$$A_y = -A_0[(1+2.47r^2)\sin k_0z + 2.14r^2\sin(k_0z-2\theta)], \qquad (4\text{-}6)$$

$$A_z = -1.08\ A_0 r\ \sin(k_0z-\theta)\quad .$$

但し、$A_0 = 4Ix_0K_0(x_0)/c$ である。実際には電流に太さがあるため、簡単のために(4-6)式をθ方向に平均化すれば、$r_0=1$cm, $\lambda_0=2$cm の場合に、次式を得る。

$$\underset{\sim}{A}_0 = - A_0(1+1.23r^2)[\ \hat{x}\cos k_0 z + \hat{y}\sin k_0 z\ ]\ . \qquad (4\text{-}7)$$

即ち、中心軸付近では、ベクトルポテンシャルの強さに r^2 に比例する補正項が加わることになる。

§4-2 不均一なヘリカルウィグラー中での電子の運動と光の増幅

前節で述べたように、実際のヘリカルウィグラーは、磁場に横方向の不均一性がある。本節においては、このような磁場中での電子の運動を考える。ヘリカルウィグラーのベクトルポテンシャルは、近似的には、(4-7) 式で表わされるように、r と z のみの関数であるから、本章においては、すべての量を、円筒対称であるとする。この時、ウィグラーおよび出力光のベクトルポテンシャルを、次式のように、表わす。

$$\underset{\sim}{A}_0 = - A_0(r)[\ \hat{x}\cos k_0 z + \hat{y}\sin k_0 z\ ]\ . \qquad (4\text{-}8)$$

$$A_s = A_s(r,z,t)[\ \hat{x}\cos(k_s z - \omega_s t + \delta(r,z,t)) - \hat{y}\sin(k_s z - \omega_s t + \delta(r,z,t))]\ . \qquad (4\text{-}9)$$

次に、以下の計算の容易さのために、次のような規格化を、行う。

$$h = H/mc^2\ ,\quad \underset{\sim}{p} = \underset{\sim}{P}/mc\ ,\quad \underset{\sim}{a}_0 = -e\underset{\sim}{A}_0/mc^2\ ,\quad \underset{\sim}{a}_s = -e\underset{\sim}{A}_s/mc^2\ ,$$
$$ct = u\ . \qquad (4\text{-}10)$$

但し，$\mathcal{H}$はハミルトニアン、$\underset{\sim}{P}$は、正準運動量である。この時、規格化されたハミルトニアンhは、次式で表わされる。

$$h = [\ 1 + (\underset{\sim}{p} - \underset{\sim}{a}_0 - \underset{\sim}{a}_s)^2\ ]^{1/2} = \gamma \quad . \tag{4-11}$$

また、これを使用すれば、運動方程式は、次のようになる。

$$\frac{d}{du}\underset{\sim}{p} = -\frac{\partial h}{\partial r} \quad , \qquad \frac{d}{du}\underset{\sim}{r} = \frac{\partial h}{\partial p} \quad . \tag{4-12}$$

次に、簡単のために、電子は、0次のらせん運動を除いては、横方向に運動しない、即ち、z方向にしか動かないと仮定する。実際に自由電子レーザーを動作させる際には、電子ビームの収束を維持するために、z方向に強いガイド磁場を、用いている。[5)6)] このような場合には、上の仮定は充分有効であると思われる。この時、$p_x \simeq 0$, $p_y \simeq 0$ と近似されるから、

$$h = [\ 1 + p_z{}^2 + a_0{}^2 - 2a_0a_s\cos(\psi + \delta)\ ]^{1/2} \quad . \tag{4-13}$$

となる。但し、$|a_0| \gg |a_s|$ とした。また $\psi = (k_0 + k_s)z - \omega_s t$ である。このハミルトニアンを(4-12)式に代入すれば、最終的にz方向の運動を表わす式として、第三章の(3-7)(3-8)式と同様な、次の2式を得る。

$$\frac{d}{du}\gamma = -\frac{k_s a_0 a_s}{\gamma}\sin(\psi + \delta) \quad . \tag{4-14}$$

$$\frac{d}{du}\psi = k_0 - -\frac{k_s}{2\gamma^2}(1 + a_0{}^2) \ . \tag{4-15}$$

但し、この時オーダリングとして、次式のような関係を用いた。

$$\gamma \gg 1 \ , \quad k_s \gg k_0 \ , \quad k_s \gg \partial\delta/\partial u \quad . \tag{4-16}$$

(4-14), (4-15) 式において、(3-7), (3-8) 式と異なるのは、a_0 が半径 r に依存することである。これにより、電子の z 方向の運動が、r によって変化し、光の増幅が異なることになる。

次に、光の増幅は、前2章同様、マックスウェル方程式より求まる次の波動方程式により記述される。

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial u^2} - \frac{\partial^2}{\partial z^2} - \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial}{\partial r} \right) a_s = k_b^2 \int \frac{v_\perp}{c} \delta f(r,z,\underset{\sim}{p},u) d\underset{\sim}{p} . \tag{4-17}$$

ここで、記述には、円筒座標系を用いている。$\underset{\sim}{v}_\perp$ は、電子の横方向の運動であり、$k_b^2 = 4\pi n_b e^2/mc^2$, n_b は電子ビームの密度である。また、δf は、電子ビームの分布関数 f の摂動項であり、$\underset{\sim}{v}_\perp$ と結合して $\underset{\sim}{a}_s$ を励起するような、フーリエ成分を持つものである。

さて、$\underset{\sim}{v}_\perp$ は、第0次近似として、ウィグラーによるらせん運動に取れば、$p_x \simeq 0$, $p_y \simeq 0$ の仮定より、次式となる。

$$v_\perp/c = - a_0(r)/\gamma \quad . \tag{4-18}$$

また、(4-17) 式の $\underset{\sim}{a}_s$ において、振幅 a_s と、位相のずれ δ より、複素振幅 $\tilde{a}_s$ を次式で定義する。

$$\tilde{a}_s = a_s(r,z,u)\exp[\ -i\delta(r,z,u)\ ] \ . \tag{4-19}$$

(4-18), (4-19) 式を (4-17)式に代入し、$\exp[-i(k_s z-\omega_s t)]$ に比例する速い成分を取り除けば、次式のような、波の増幅の方程式を得る。

$$2ik_s\left(\frac{\partial}{\partial u}+\frac{\partial}{\partial z}\right)\tilde{a}_s-\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}r\frac{\partial}{\partial r}\tilde{a}_s=k_b{}^2a_0(r)e^{i\psi}\int\frac{\delta f}{\gamma}dp. \quad (4\text{-}20)$$

但し、光は殆んど z 方向に進んでいるとし、$\omega_s \simeq ck_s$ とした。

§4-3. 光の線形増幅率.

前節で求めた方程式 (4-14), (4-15), (4-20) を解くことにより、不均一ヘリカルウィグラー中での、光の増幅の様子が、解析される。本節においては、そのために必要となる (4-20) 式の右辺を、光の線形増幅率を用いて評価する。

電子ビームの分布関数は、Vlasov 方程式を満足するが、今横方向の運動を無視しているから、結局変数変換により、次式のように ψ と γ の項のみが残る。

$$\frac{\partial}{\partial u}f+\frac{d\psi}{du}\frac{\partial}{\partial\psi}f+\frac{d\gamma}{du}\frac{\partial}{\partial\gamma}f=0 \quad . \quad (4\text{-}21)$$

(4-20)式よりわかるように、今必要なのは δf の中で $e^{-i\psi}$ に比例する項であるから $f=f_0(\gamma)+\delta\tilde{f}e^{-i\psi}+c.c$ として、摂動項は次式のようになる。

$$\delta\tilde{f}=\frac{-\dfrac{k_s a_0}{2\gamma}\tilde{a}_s}{k_0-\dfrac{k_s}{2\gamma^2}(1+a_0{}^2)}\frac{\partial f_0}{\partial\gamma} \quad . \quad (4\text{-}22)$$

上式を（4-20）式に代入すれば、次式を得る。

$$\left(\frac{\partial}{\partial u}+\frac{\partial}{\partial z}\right)\tilde{a}_s-\frac{1}{2ik_s r}\frac{\partial}{\partial r}r\frac{\partial}{\partial r}\tilde{a}_s=\frac{\tilde{\Gamma}}{2i}\tilde{a}_s\ . \qquad (4\text{-}23)$$

但し、

$$\tilde{\Gamma}=-k_b{}^2a_0{}^2\int\frac{1}{2k_0\gamma^2-k_s(1+a_0{}^2)}\frac{\partial f_0}{\partial\gamma}d\gamma\ . \qquad (4\text{-}24)$$

である。この式中、重要な役割を果たすのは、$\tilde{a}_s$の成長を与える項である。これは、(4-23)を見ればわかるように、$\tilde{\Gamma}$の虚部である。よって$\tilde{a}_s$の空間成長率Γ_aは、次式で表わされる。[7)]

$$\Gamma_a=\mathrm{Im}\,\tilde{\Gamma}=\frac{\pi K_b{}^2a_0{}^2}{4k_0}\left[\frac{1}{\gamma}\frac{\partial f_0}{\partial\gamma}\right]\Bigg|_{\gamma=\left[\frac{k_s(1+a_0{}^2)}{2k_0}\right]^{1/2}}\ . \qquad (4\text{-}25)$$

この式を見ればわかるように、光の成長率Γ_aは、a_0のr依存性を通して、間接的にr依存性を持っている。

(4-25)式を用いて具体的にΓ_aを評価するために、電子ビームのエネルギー分布を、次式のようなガウス分布に取る。

$$f_0(\gamma)=\frac{1}{\pi^{1/2}\Delta\gamma}\exp\left[-\frac{(\gamma-\gamma_0)^2}{\Delta\gamma^2}\right]\ . \qquad (4\text{-}26)$$

この分布は、$\gamma=\gamma_0-\Delta\gamma/\sqrt{2}$で$\partial f_0/\partial\gamma$が最大であるから、成長率$\Gamma_a$も、その点に対応する半径において最大値を取る。そこで初期条件として、光の成長率が$r=0$、即ちらせんの中

心軸上で最大になるように設定すれば、次式が成立する。

$$\gamma_c \gamma_s = \gamma_0 - \Delta\gamma/\sqrt{2} \quad . \tag{4-27}$$

但し、$a_c = a_0(0)$ として、$\gamma_c = (1 + a_c^2)^{1/2}$, $\gamma_s = (k_s/2k_0)^{1/2}$ である。この時、(4-25)式より、成長率 Γ_a の半径 r 依存性は、次式のようになる。

$$\Gamma_a = - \frac{\sqrt{\pi} k_b{}^2 a_c{}^2}{2k_0 \Delta\gamma^3} \frac{\gamma_s \gamma_\perp(r) - \gamma_0}{\gamma_s \gamma_\perp(r)} \exp[- \frac{(\gamma_s \gamma_\perp(r) - \gamma_0)^2}{\Delta\gamma^2}] . \tag{4-28}$$

ここで、$\gamma_\perp(r) = [1 + a_0(r)^2]^{1/2}$ である。例えば、ビームパラメーターとして、$n_b = 10^{12}\ cm^{-3}$, $\gamma_0 = 20$, $\Delta\gamma = 0.1$ とし、ウイグラーが、$B_0 = 5\ kG$, $\lambda_0 = 2\ cm$, $r_0 = 1\ cm$, 出力光の波長を $\lambda_s = 48.3\ \mu m$ とすれば、成長率の r 依存性は、図4-1の実線で表わされる。この図で重要な点は、電子ビームの太さに関係なく、ウィグラー磁場の形状が決まれば、光の成長領域が決定されることである。(4-7)式のように、ウィグラーが $a_0(r) = a_c[1 + r^2/R^2]$ という依存性を持つとすれば、成長領域の最大半径 a_{max} は、次式で与えられる。

$$a_{max} = [\frac{\gamma_c \Delta\gamma}{\sqrt{2}\gamma_s a_c{}^2}]^{1/2} R \quad . \tag{4-29}$$

例えば、$\gamma_0 = 20$, $\Delta\gamma = 0.1$, $B_0 = 5\ kG$, $\lambda_0 = 2cm$, $r_0 = 1\ cm$ の場合、$a_{max} \simeq 0.79\ mm$ であり、非常に短いことがわかる。

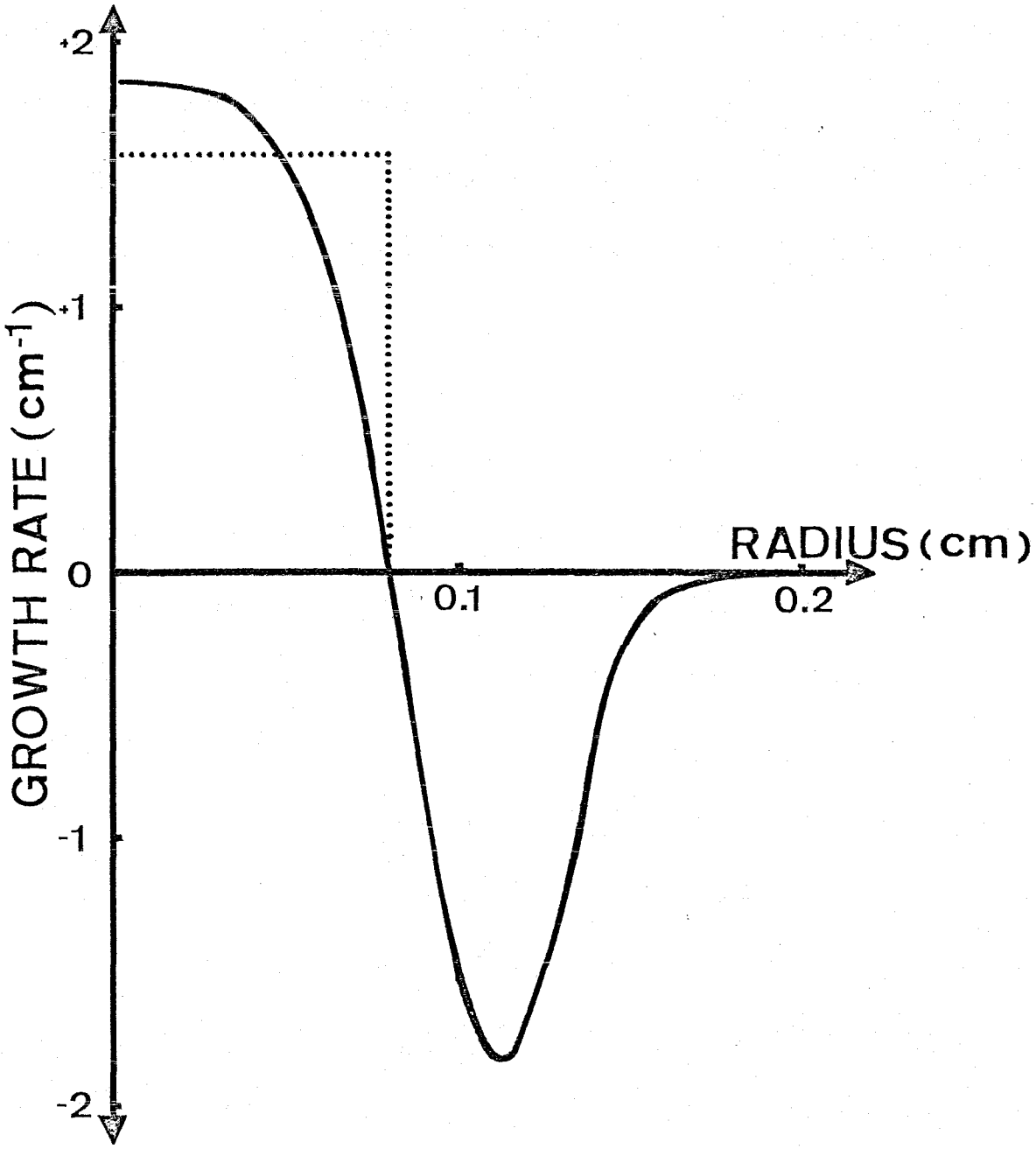


図4-1、不均一ヘリカルウィグラー中での、光の線形成長率の半径(r)依存性。

§4-4、箱形成長率を持つ媒質による光の増幅

前節において磁場が不均一なヘリカルウィグラー中では、光の成長半径が有界であることが明らかとなった。そこで本節において、このような成長率を持つ媒質により、実際に光がどのような増幅を受けるかについて調べる。

今、重要なのは、光の成長率の効果であるから、簡単のため、(4-23)式において Γ を $i\Gamma_a$ で置き換え、さらに、$z-u=z'$ という変数変換を施せば、次式を得る。

$$\frac{\partial \tilde{a}_s}{\partial u} - \frac{1}{2ik_s r}\frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial}{\partial r}\tilde{a}_s = \frac{\Gamma_a}{2}\tilde{a}_s \quad . \tag{4-30}$$

この方程式を、変数分離によって解くために、$\tilde{a}_s = e^{\frac{\lambda}{2}u}A(r)B(z')$ と置けば、次の r に関する常微分方程式が得られる。

$$\frac{1}{r}\frac{d}{dr} r \frac{d}{dr} A(r) = ik_s[\lambda - \Gamma_a(r)]\, A(r) \quad . \tag{4-31}$$

本節においては、成長半径の有限性の効果を見るのが目的であるから、簡単のために成長率の r 依存性を、図 4-1 の点線のような箱形で置き換える。

$$\Gamma_a = \begin{matrix} \Gamma & (r \leq a) \\ 0 & (r > a) \end{matrix} \tag{4-32}$$

この時、$r \to 0$, $r \to \infty$ で、$A(r)$ が、有界になるように、境界条件を取れば、(4-31)式の解として次式を得る。

$$A(r) = \begin{cases} a_0 J_0(\alpha r) & (r \leq a) \\ a_1 J_0(\beta r) + a_2 N_0(\beta r) & (r > a) \end{cases} \tag{4-33}$$

但し、$J_n(x)$, $N_n(x)$ はそれぞれ、ベッセル関数、ノイマン関数である。 また $\alpha^2 = -ik_s(\lambda - \Gamma)$, $\beta = -ik_s\lambda$ である。この時 $r \to \infty$ での有界性のため、a_1, a_2 に次式のような条件が加わる。

$$\begin{aligned} a_1 + ia_2 &= 0 \qquad (\mathrm{Im}\,\beta > 0) \\ & \qquad\quad\ \ (\mathrm{Im}\,\beta = 0) \\ a_1 - ia_2 &= 0 \qquad (\mathrm{Im}\,\beta < 0) \end{aligned}$$

今、問題なのは出力光の増幅、即ち $\hat{a}_s$ の絶対値の時間的変化であるから、定義より、$\mathrm{Im}\,\beta = 0$ の場合は除外される。この時 (4-33)が自明でない解を持ち、かつ $r = a$ でなめらかに解が接続する条件より、次の固有値方程式を得る。

$$\begin{aligned} &\alpha J_1(\alpha a) H_0^{(1)}(\beta a) - \beta J_0(\alpha a) H_1^{(1)}(\beta a) = 0 \quad (\mathrm{Im}\,\beta > 0), \\ &\alpha J_1(\alpha a) H_0^{(2)}(\beta a) - \beta J_0(\alpha a) H_1^{(2)}(\beta a) = 0 \quad (\mathrm{Im}\,\beta < 0). \end{aligned} \tag{4-34}$$

この時、固有値は α、或いは β である。 また $H_n^{(1)}(x)$, $H_n^{(2)}(x)$ はそれぞれ、第一種、第二種のハンケル関数である。 この2つの方程式の内、第1式において $\beta \to -\beta$ と置き換えれば第2式に一致し、かつ β と $-\beta$ は同じ固有値 λ を与えるので、2式は、この問題においては同値である。 そこで、$\lambda = \Gamma_E$ を、計算機を用いて、$k_s \Gamma a^2$ をパラメーターとして求めたのが、図4-2である。 この図で重要なのは、$k_s \Gamma a^2$ に対してある閾値よりも大きくなければ、光の成長モードが現われ

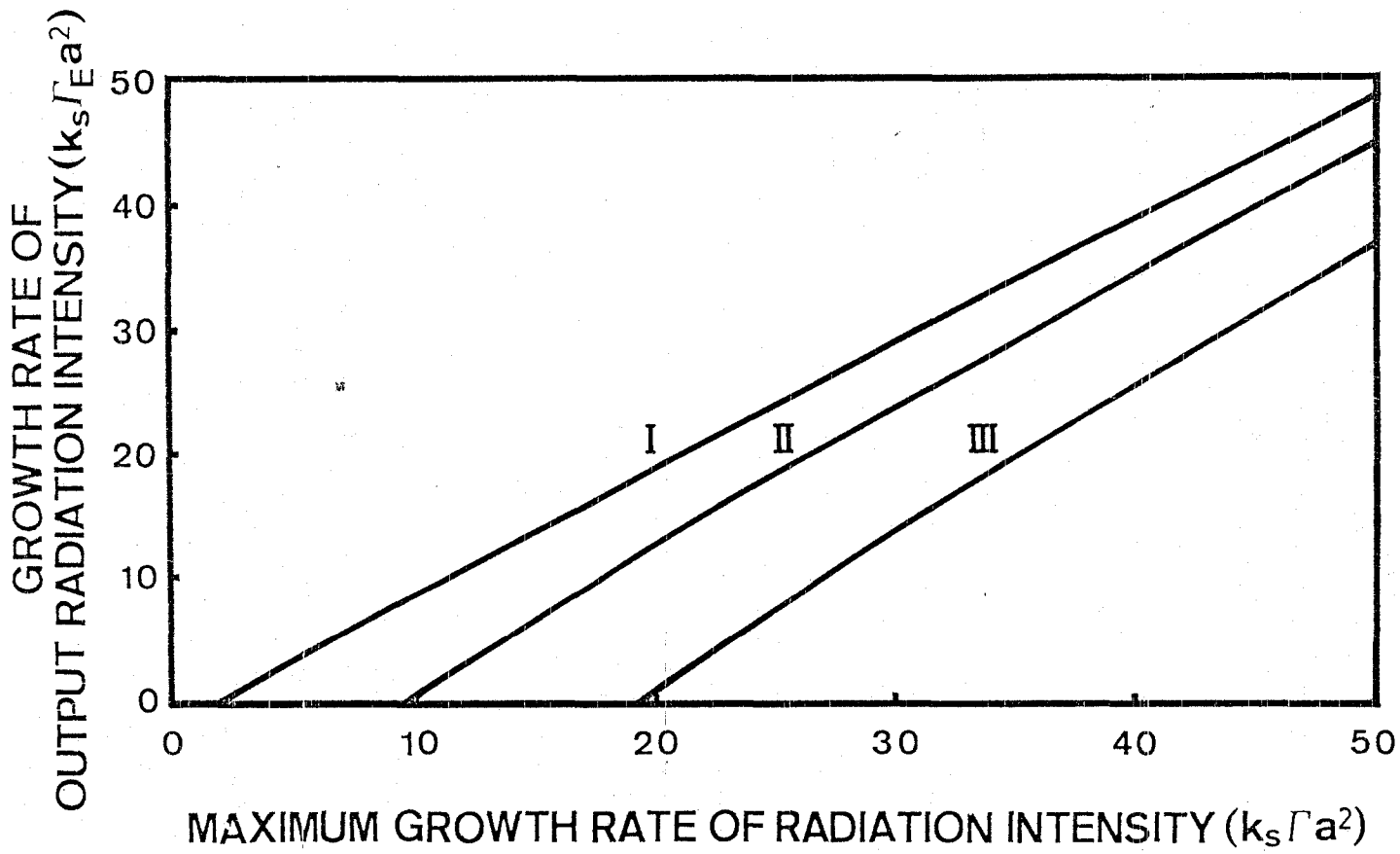


図4-2、箱形成長率による固有モードの形成。
Γは、増幅媒質の成長率である。

ないことである。　これは、光の成長半径が有限なため、成長率が小さい場合には、光が増幅する効果よりも、回折によって成長領域外へ出る効果の方が大きいためである。　図より、光の増幅する条件が　$k_s \Gamma a^2 \gtrsim 2.0$　となり、具体的には次式のようになる。

$$\left(\frac{\pi}{32}\right)^{1/2} \frac{k_b{}^2 R^2}{\Delta\gamma} > 2.0 \quad . \tag{4-35}$$

例えば　$\lambda_0 = 2\,\mathrm{cm}$，$r_0 = 1\,\mathrm{cm}$　のウィグラーの場合、次の関係式となる。

$$n_b > 2.22\times10^{12}\ \Delta\gamma \ . \tag{4-36}$$

式より明らかなように、磁場の形状が決まれば、あとはビームのパラメーターだけによって、増幅され得るか、否かが決定される。　よって電子ビームの密度があまり高くない場合、光の増幅を起こすためには、光が外へ逃げないように、反射円筒で被わなければならない。

最後に、固有モードの形状を図示すれば、図4-3，図4-4 (I)～(III) となる。　ここで、$k_s \Gamma a^2 = 30$ とした。図4-3は、固有モードの絶対値の半径r依存性である。　この図で、I, II, IIIは、図4-2のI, II, IIIに対応し、それぞれ、最大成長モード、第2成長モード、第3成長モードである。図4-4 (I)～(III)は、これらのモードの実部のrおよび時間t依存性であり、この図を見れば、光の位相が、時間が進むにつれて、rの大きい方へ移動している。　これが先に述べた回折の効果であり、3つの図を較べると、最も成長率の低い第3モードが、最も回折の効果が大きい事がわかる。

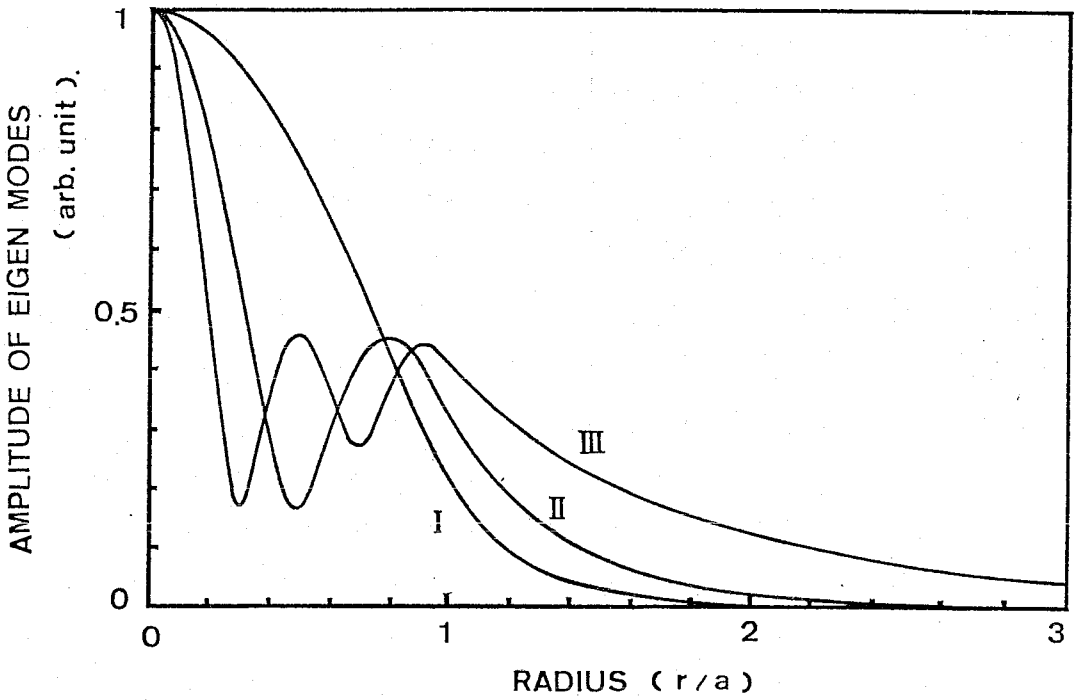


図4-3. 固有モードの絶対値の半径依存性。

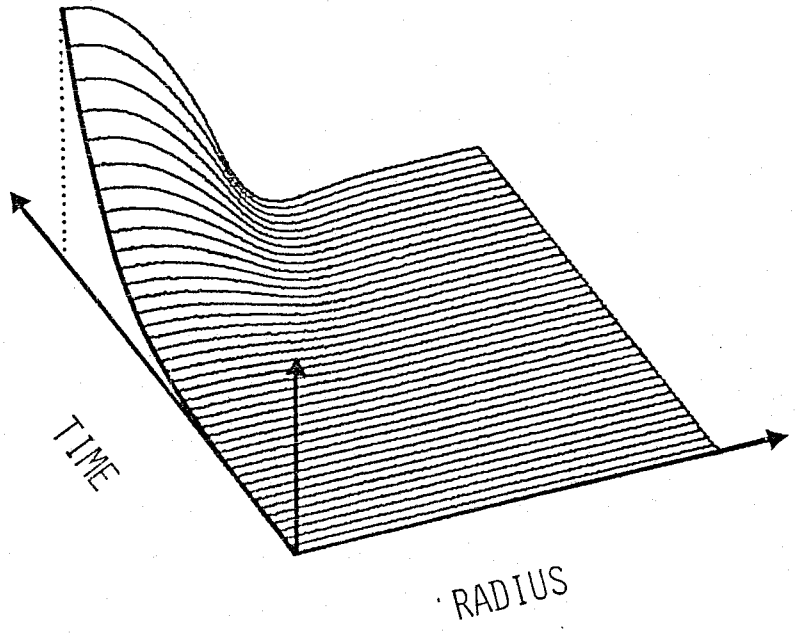


図4-4(I). 最大成長モードの位相の進みと増幅
(縦軸は arb. unit, 半径, 時間は (II), (III) と同じ)

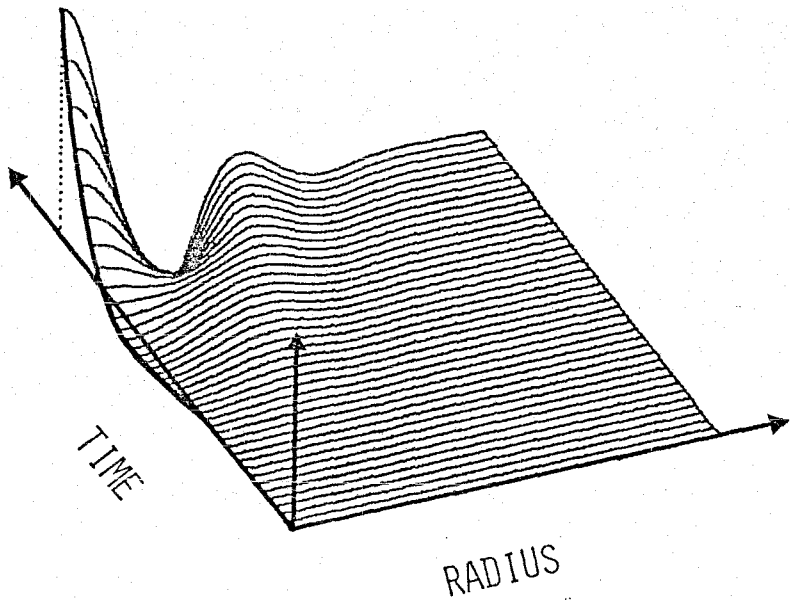


図 4-4(II) 第2成長モードの位相の進みと増幅.
(I)のかっこ内参照)

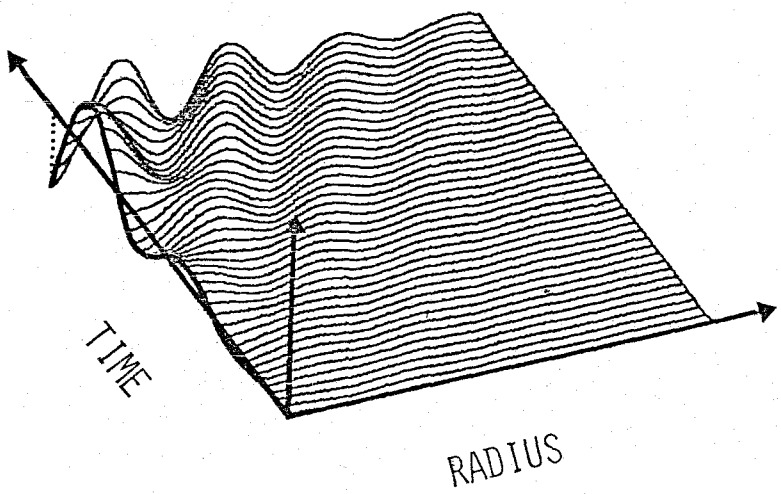


図4-4(III) 第3成長モードの位相の進みと増幅.
(I)のかっこ内参照)

§4-5. むすび

本章においては、ヘリカルウィグラーの磁場の不均一性を考慮した場合の光の増幅の様子を調べた。この結果、光の成長率は、ウィグラー磁場の、半径r依存性に伴って、r方向の変化を持つことがわかった。さらに、この成長率は、ある半径 a_{max} において0となり、それより外では、負になってしまうことがわかった。即ち光の成長は、ある有限半径内でしか起こらないことになる。

このような、有限半径内でしか光の成長がないような媒質中での光の増幅の様子を調べるため、半径依存性が、箱形の成長率を持つ媒質中での光の増幅を考えた。その結果、ウィグラーの形状を決定すれば、光の増幅に対して、入力電子ビームの密度とエネルギー拡がりから決まる、ある閾値が存在し、それよりも光の成長率が小さければ、光の増幅がない事が明らかにされた。例えば、エネルギー拡がりが、0.1の場合、ビーム密度は、$2\times10^{11}\ cm^{-3}$ 以上でなければならず、光の回折を抑える事をしなければ、光の増幅は難しい。

第四章の参考文献

1) C. M. Tang, P. Sprangle, "The Nonlinear Theory of Free Electron Laser with Transverse Dimensional Effects" Proceeding of Laser '80, Jan. (1981).

2) N. M. Kroll, P. L. Morton, M. N. Rosenbluth, J. N. Eckstein and J. M. J. Madey, IEEE J. Quantum Electron., QE-17 (1981) 1496.

3) J. M. J. Madey and R. C. Taber, in "Free-Electron Generators of Coherent Radiation", Addison Wesley (1980) 741.

4) J. D. Jackson, "Classical Electrodynamics" J. Wiley & Sons, Inc., (1962) 176.

5) L. Friedland and J. L. Hirshfield, Phys. Rev. Lett. 44 (1980) 1456.

6) T. Kwan and J. M. Dawson, Phys. Fluids 22 (1979) 1089.

7) T. Taguchi, K. Mima and T. Mochizuki, J. Phys. Soc. Jpn. 50 (1981) 1652.

第五章．結　論

自由電子レーザーは、従来のレーザーの欠点を補うものとして注目を集めているが、その実用化のためには、まだ多くの問題点を残している。本論文は、この自由電子レーザーの動作特性、効率向上の方法等についての研究成果を述べたものであるが、以上を総括すれば、以下のようになる。

第二章．

(1) 誘導コンプトン散乱領域における、自由電子レーザーの空間的変化を、準線形理論により解析した。その結果、出力光の増幅の飽和は、電子ビームの分布関数が拡がることにより起こることがわかった。

(2) この時、電子ビームから出力光へのエネルギー変換効率は、ヘリカルウィグラーの長さの1/2乗に比例して増大することが明らかにされた。例えば、ビームが、密度 $10^{12}cm^{-3}$、γ_b が 15.8 で、ウィグラーが、磁場 10 kG、ピッチ 1 cm、全長 10m の時、2.2 %の変換効率が得られた。

(3) このエネルギー変換効率の改善のため、外部から、電場を加えることを考察した。その結果、外部から電子ビームと平行に伝播するマイクロ波を加えた場合、効率が著しく増大することが明らかになった。例えば、60 kV/cm、波長 1 cm のマイクロ波の場合、10 m のウィグラーで、効率が 59 % にも達した。

第三章

(1) 入射光強度が大きく、電子捕獲の効果が大きい場合を、電子の軌道を、直接運動方程式を解くことにより求めて、解析し、同時にマイクロ波の効果を調べた。その結果、電子捕獲の効果が大きい場合にも、マイクロ波が出力光の

増幅に有効であることがわかった。但し、この場合、マイクロ波と直流電場を較べると、効果としては差が見られなかった。

(2) 入射光強度が小さく、電子捕獲の効果があまり大きくない場合には、マイクロ波の非捕獲電子を回収する効果が、光の成長率の改善に有効であり、直流電場に勝ることが、明らかにされた。

第四章、

(1) より現実的な問題として、ヘリカルウイグラーの磁場の横方向不均一性の効果を考えた。その結果、光の成長率は、磁場の形状より決定される比較的短い半径内でしか、正の値を取り得ない事が明らかにされた。

(2) このような、有限半径内でのみ、成長率を持つ様な媒質での光の増幅を考えた場合、増幅に対して電子ビームの密度とエネルギー拡がりより決定される閾値が存在し、かなり厳しい条件であることが、明らかにされた。

以上の結果より、種々の領域における、自由電子レーザーの増幅と飽和の機構が明らかとなった。同時に、効率改善の一助として考察したマイクロ波が、種々の領域で、非常に有用であることを明らかにした。

謝　辞

本研究の遂行に際し，終始懇篤なる御指導，御鞭撻を賜わった　山中千代衛教授，三間圀興助教授に深厚なる謝意を表します。　あわせて大学院在学中において御指導，御教示を戴いた，木下仁志教授，西村正太郎元教授，犬石嘉雄教授，故川辺和夫教授，藤井克彦教授，鈴木胖教授，横山昌弘教授，中井貞雄教授，山中龍彦教授，井沢靖和教授，熊谷信昭教授に謝意を表します。

本研究を通じて数々の有益な御助言，討論を戴いた，西原功修助教授ならびに望月孝晏助教授に厚く感謝します。

また終始変らぬ御指導，討論，激励を戴いた加藤義章助教授，中塚正大助教授，山中正宣助教授，佐々木孝友助教授，吉田国雄講師，北川米喜講師，矢部孝講師，今崎一夫講師に謝意を表します。

終わりに山中研究室及びレーザー核融合研究センターで研究生活の苦楽を共にし，熱心な討論，激励を戴いた的場幹史助手，井門俊治助手，畦地宏助手，藤田尚徳助手，高部英明助手，乗松孝好助手，宮永憲明助手，大道博行助手，宮本修治助手，仁木秀明助手，および本論執筆にあたり惜しみない協力を戴いた岸本泰明君，杉山勤君，大倉道隆君およびシミュレーション研究室の方々に感謝します。

業績目録

主要論文

(1) 田口俊弘、三間圀興、望月孝晏
「自由電子レーザーにおける非線形過程と
エネルギー変換効率」
レーザー研究 Vol. 8, No. 3, (1980) 515.

(2) T. Taguchi, K. Mima and T. Mochizuki,
"Saturation Mechanism and Improvement of Conversion
Efficiency of the Free-Electron laser",
Phys. Rev. Lett., Vol. 46, (1981) 824.

(3) T. Taguchi, K. Mima and T. Mochizuki,
"Quasi-Linear Saturation in Free Electron lasers",
J. Phys. Soc. Jpn., Vol. 50, (1981) 1652.

その他の発表論文

(1) T. Taguchi, K. Mima and K. Nishihara,
"Energy Relaxation of Hot Electron in Laser Plasmas",
Technol. Rep. Osaka Univ., Vol. 30, (1980) 137.

(2) 田口俊弘、
「自由電子レーザーに関するワークショップ」
レーザー研究 Vol. 9, No. 6 (1981) 694.

(3) T. Taguchi, K. Mima and T. Mochizuki,
"Nonlinear Saturation Mechanism and Improvement in Free Electron Lasers"
Preceeding of ONR Workshop, Addison-Wesley, to be published in Feb.(1982).

学会発表

(1) 「高速電子から熱電子へのエネルギー緩和」
物理学会、 静岡大学 1978年 10月3日

(2) 「自由電子レーザーにおける非線形効果」
物理学会 愛媛大学 1979年 10月3日

(3) 「自由電子レーザーにおける飽和機構」
電気学会研究会 東京 1980年 2月15日

(4) 「自由電子レーザーにおける非線形効果 part II」
物理学会 早稲田大学 1980年 3月30日

(5) 「自由電子レーザーにおける電子捕獲の効果」
物理学会 福井大学 1980年 10月2日

(6) 「自由電子レーザーにおける飽和過程と2次元安定性の効果」 レーザー学会 大阪大学 1981年 2月13日

(7) 「自由電子レーザーにおける2次元効果」
物理学会 広島大学 1981年 3月30日

(8) "FEL with co-propagating microwave field",
ONR Workshop on FEL Idaho(USA) June 22,1981.

(9) 「自由電子レーザーにおける2次元効果 II」
物理学会 新潟大学 1981年 10月2日