Osaka University Knowledge Archive

Title	超大型油槽船の強度に関する研究
Author(s)	松石, 正克
Citation	大阪大学, 1969, 博士論文
Version Type	VoR
URL	https://hdl.handle.net/11094/2563
rights	
Note	

Osaka University Knowledge Archive : OUKA

https://ir.library.osaka-u.ac.jp/

Osaka University

超大形油槽船の強度に関する研究

昭和44年9月

松　石　正　克

論　文　目　録　　大阪大学

報告番号・甲第1106号　　松石正克

主論文　超大形油槽船の強度に関する研究

（主論文のうち印刷公表したもの）

1. 有限要素法による鋼構造物の弾塑性解析（第2報）－不連続境界を有する平板の圧縮座屈－
関西造船協会誌第126号，昭和42年9月

1. 有限要素法による平板の弾塑性座屈（第1報）
造船協会論文集第122号，昭和42年12月

1. El-Pl Buckling of Plates by Finite Element Method
（有限要素法による平板の弾塑性座屈）
米国土木学会（ASCE）年次大会，昭和44年2月

1. 有限要素法による鋼構造物の弾塑性解析（第3報）－種々の荷重を受ける三角形板の座屈－
関西造船協会誌第131号，昭和44年3月

1. 有限要素法による平板の弾塑性座屈解析
日本鋼構造協会第3回大会研究集会論文集，

KOKUYO

昭和44年5月

1. 大型タンカーの局部強度に関する研究(第1報)
日本造船学会論文集第125号, 昭和44年6月

1. 大形タンカーの横桁ウエブの座屈強度(その1)
日立造船技報第30巻第2号, 昭和44年8月

1. El-Pl Buckling of Plates by Finite Element Method
(有限要素法による平板の弾塑性座屈)
第1回マトリックス構造解析法に関する日米セミナー, 昭和44年8月

(主論文のうち未公表のもの)

1. 大型タンカーの局部強度に関する研究(第2報)
原稿72枚, 日本造船学会論文集第126号, 昭和44年12月掲載の予定

KOKUYO

超大形油槽船の強度に関する研究

昭和44年9月

松　石　正　克

緒　　言

最近の油槽船の大形化は急速に進み，３０万$D.W.T.$級の油槽船が既に建造され，現在は40万$D.W.T.$級の超大形油槽船の試設計の段階で，建造される日も近い。

油槽船の大形化に伴って，船の吃水は深く，かつ油槽長が長くなり，したがって，船体構造部材に作用する外力も大きくなってきた。これに応じて，船体の大形化は外力を受け持つ構造部材の寸法の増加を必然的に伴うが，そのなかで板厚の増加だけは小さい傾向がある。このような理由で，船体構造部材に生じる応力は相対的に増加しており，油槽船の大形化に伴って，船体の局部強度はむしろ低下しているきらいがある。事実，大形油槽船の船体構造部材にはクラックあるいは座屈等の損傷が多発している。これらを如何に未然に防止するかが，超大形油槽船の設計上の重大な問題である。

本研究では，この問題を解決するために，超大形油槽船の立体強度および局部強度を解析し，油槽船の船体強度を究明しようとするものである。

すなわち，油槽船を立体構造物とみなして，船体の立体強度を解析し，各部材が分担する外力を求め，それを基にして，船体を構成する部材の局部座屈強度および応力集中部の弾塑性応力分布等を解析し，船体の局部強度を検討する必要がある。そこで，著者は，超大形油槽船の立体強度および，これまで殆んど研究報告のない船体構造部材の局部強度，すなわち，応力集中部の弾塑性応力分布，平板の弾塑性座屈強度および補強板の座屈強度に関して，広範囲にわたる研究を行ない，理論的および実験的に油槽船の船体強度を究明した。

理論解析に当っては，油槽船の船体の立体強度解析には撓角撓度法を用い，船体の局部強度，すなわち弾塑性応力分布および弾塑性座屈強度の理論を，有限要素法を基に展開し，それによって局部強度を解析した。

本論文の第１編においては，超大形油槽船の立体強度に関した研究成果について述べ，第２編においては，超大形油槽船の局部強度に関した研究成果について述べる。

総　　括

本論文では，第1編においては，超大形油槽船の船体の立体強度に関する研究成果について述べ，第2編においては，超大形油槽船の船体の局部強度に関する研究成果について述べた。

すなわち，第1編においては，超大形油槽船の立体強度を理論的に解析する方法を述べ，標準状態の20万および40万D.W.T.級の超大形油槽船の立体強度を解析した。さらに，貨物油タンクの水圧試験時に，実船の実験を行ない，計測結果と解析結果を比較し，理論の有用性を立証した。

第2編においては，超大形油槽船の局部強度を有限要素法を基にして理論的に解析する方法を述べ，それを基にして，弾塑性応力分布，平板の座屈強度および補強板の座屈強度解析の電子計算機用プログラムを開発しそれを用いて，応力集中部の弾塑性応力分布，横桁ウエブの局部座屈強度，その他船体各部の座屈強度および補強板の座屈強度を解析した。さらに，上記の問題に関して，模型実験を行ない，計測結果と解析結果を比較し，理論の有用性を立証すると同時に，船体の局部強度を合理的に評価した。

目　　次

緒　　言

総　　括

第 1 編　船体の立体強度

第1章　緒　　言 …… 1

第2章　船体立体強度解析理論 …… 3

2．1　仮　定 …… 3

2．2　基礎理論 …… 5

2．2．1　横強度部材 …… 6

(i)　横桁リング …… 7

(ii)　水密横隔壁 …… 9

(iii)　水密横隔壁付き縦桁 …… 10

(iv)　制水横隔壁 …… 11

2．2．2　縦強度部材 …… 12

2．2．3　境界条件 …… 15

2．3　解析法 …… 17

第3章　解析結果 …… 19

第4章　実船実験 …… 24

第5章　総　　括 …… 29

第　2　編　　船体の局部強度

第1章　緒　　言 …… 30

第2章　応力集中部の弾塑性応力分布 …… 32
1　緒　言 …… 32
2　弾塑性応力分布解析理論 …… 34
2．1　理論の前提条件および仮定 …… 34
2．1．1　応力・ひずみ関係 …… 34
2．1．2　弾性域 …… 35
2．1．3　降伏条件 …… 36
2．1．4　塑性域 …… 37
2．2　基礎理論 …… 39
2．2．1　弾性域 …… 42
2．2．2　塑性域 …… 42
2．2．3　弾塑性応力分布 …… 43
2．2．4　解析法 …… 43
2．3　有限要素法による解法 …… 43
2．3．1　基礎理論 …… 43
2．3．2　計算法 …… 46
3　開孔を有する板の弾塑性応力分布 …… 48
3．1　引張り試験 …… 48
3．1．1　模型 …… 48
3．1．2　実験方法 …… 49
3．1．3　実験結果 …… 49
3．2　理論解析 …… 50
3．2．1　境界条件 …… 50
3．2．2　解析結果および考察 …… 53
4　総　　括 …… 53

第3章　座屈強度 …… 55
1　緒　　言 …… 55
2　平板の弾塑性座屈理論 …… 55
2．1　平板の弾塑性座屈理論 …… 55

2．1．1　弾性座屈 …… 55
2．1．2　塑性座屈 …… 57
2．1．3　弾塑性座屈 …… 59
2．2　残留応力が存在する場合の弾塑性座屈理論 …… 60
2．2．1　弾性座屈 …… 60
2．2．2　塑性座屈 …… 61
2．2．3　弾塑性座屈 …… 62
2．3　解析法 …… 62
3　有限要素法による解法 …… 63
3．1　有限要素法による弾性および塑性座屈理論 …… 63
3．1．1　基礎式 …… 63
3．1．2　座屈理論 …… 66
3．1．3　変位関数 …… 67
3．1．4　計算法 …… 68
3．2　残留応力が存在する場合の解析法 …… 70
3．3　解の精度 …… 70
3．3．1　一様圧縮応力の正方形板の座屈 …… 71
(1)　弾性座屈 …… 71
(2)　塑性座屈 …… 71
3．3．2　一様せん断応力の正方形板の座屈 …… 73
(1)　弾性座屈 …… 73
(2)　塑性座屈 …… 74
4　横桁リングのウエブの座屈強度 …… 75
4．1　横桁ウエブの座屈強度解析法 …… 75
4．1．1　外力の伝達 …… 75
4．1．2　解析法 …… 80
4．2　模型実験 …… 80
4．2．1　実　験 …… 80
4．2．2　解析および考察 …… 84
4．3　実船試験 …… 87
4．3．1　実船の座屈事故 …… 87
4．3．2　解析および考察 …… 88

4．4　横桁ウエブのせん断座屈におよぼす種々の影響 …… 91
4．4．1　曲げモーメントの影響 …… 91
4．4．2　ウエブ形状，カラープレートおよび補強材の影響 …… 95
(i)　ウエブ深さの影響 …… 96
(ii)　スロット高さの影響 …… 97
(iii)　スロット幅の影響 …… 97
(iv)　カラープレートの影響 …… 97
(v)　補強材の影響 …… 100
4．4．3　横桁ウエブの補強効果に対する考察 …… 101
5　その他船体各部の座屈強度 …… 103
5．1　三角形ブラケットの座屈強度 …… 103
5．2　千鳥溶接されたパネルの座屈強度 …… 104
(i)　スリット法 …… 105
(ii)　連続法 …… 105
5．3　中心に円孔を有する板の座屈強度 …… 106
5．4　矩形の開孔を有する板のせん断座屈強度 …… 110
5．5　溶接組立柱の圧縮座屈強度 …… 113
6　総　　括 …… 114

第4章　補強板の座屈強度 …… 118
1　緒　　言 …… 118
2　補強板の座屈強度 …… 118
2．1　補強板の座屈強度 …… 118
2．2　有限要素法による解法 …… 121
2．2．1　前提条件 …… 121
2．2．2　有限要素法による補強板の座屈理論 …… 121
(1)　応力解析 …… 122
(a)　ひずみエネルギーの変分 …… 122
（a－i）　板要素 …… 122
（a－ii）　梁要素 …… 123
(b)　外力のなす仮想仕事 …… 124
(c)　平衡方程式 …… 125
(2)　座屈解析 …… 125
(a)　ひずみエネルギーの変分 …… 125

（a－ⅰ）　板要素 …… 125
（a－ⅱ）　梁要素 …… 127
(b)　外力のなす仮想仕事 …… 130
（b－ⅰ）　板要素 …… 131
（b－ⅱ）　梁要素 …… 131
(c)　固有値方程式 …… 132
2．2．3　補強材の変位関数 …… 133
(1)　軸方向変形 …… 133
(2)　曲げ変形 …… 134
(3)　捩り変形 …… 135
2．3　計算法 …… 137
2．4　解の精度 …… 138
2．4．1　一様圧縮応力を受ける正方形補強板（中央に1本の補強材）…… 138
2．4．2　一様圧縮応力を受ける正方形補強板（等間隔に配置された2本の補強材）…… 139
3　解析結果および考察 …… 140
3．1　非対称補強板の座屈強度 …… 141
3．2　補強材の最適位置の検討 …… 142
4　総　括 …… 144

第5章　総　括 …… 145

謝　辞 …… 149

付録1　撓角撓度法における荷重項 …… 150
付録2　変形の基礎式 …… 155

記　号 …… 159
添　字 …… 163

参考文献 …… 164

第　1　編

船体の立体強度

第１章　緒　　言

最近の油槽船の大形化は急速に進み，３０万*D.W.T.*級の油槽船が既に建造され，現在は４０万*D.W.T.*級の超大形油槽船の試設計の段階で，建造される日も近い。

船が大形化すると船の深さが深くなり吃水および貨物油槽内の貨油の水頭が高くなり，油槽長が大となるので船体に作用する外力は一般に大きくなる。このように油槽が長くなり，作用する外力が大となると船体強度の見地からは縦通隔壁と船側外板の相対撓みが大きくなり，外力の増大と相まって船体横強度部材に過大な応力が生じることになる。これは船体横強度部材における応力集中部のクラックの発生ならびに横強度部材のウエブの局部座屈等の損傷事故の発生する原因となる。

油槽船の大形化に伴って，上述したような損傷事故を引き起す傾向にあり，これらを如何に未然に防止するかが超大形船の設計上の重大な問題である。この問題を解決するためには，船体強度解析において船体を立体構造とみなして解析し，各部材が分担する外力を求めそれを基にして船体を構成する部材の局部座屈強度および応力集中部の弾塑性応力分布等をできるだけ正確に解析し，船体の局部強度を検討しなければならない。

船体強度の解明に当り，まず，その基本となっているのが船体の立体強度の解析である。本編では，船体の立体強度解析法を展開する。

これに関連して，船体の立体強度に関するこれまでの研究を調査検討する。*H. J. Adams* は１９５０年に *Hardy Cross Method* を用いて，簡単のために船体の横断面だけを取り出し縦通部材の影響を無視して横強度部材だけについて，いわゆる平面計算を行ない[1]，その後１９５２年に船体の立体強度に及ぼす縦通部材の影響を考慮して，先に行なった平面計算に修正を加えた[2]。

岡部博士等は１９５４年に同じく *Hardy Cross Method* を用いて縦通部材の影響を考慮し，かつ船体構造部材のせん断撓みの影響も入れて船体を構成する横強度部材の強度解析に重点を置いた船体立体強度の近似計算を行なっている[3]。

E. Steneroth は１９５５年に縦通部材の影響，せん断撓みの影響および変断面の影響をも考慮に入れて１油槽間に２枚の横桁リングを持つ構造に対して船体の横強度部材の強度解析に重点を置いた計算を行なった[4]。

西牧博士は１９５８年にせん断撓みおよび部材の端部肘板の影響を考慮した撓角撓度法を用いて1油槽間に3枚の横桁リングを持つ構造に対する計算式を展開し，近似算式を導いた。同時に，

油槽船の実船実験を始めて行ない，計測結果と解析結果を比較し，近似算式が十分実用に供し得ることを確かめた[5]。

山越教授等は，１９６５年に縦通隔壁および船側外板のせん断撓みを考慮し，曲げ撓みを無視して，全油槽を取り出して長大油槽を有する油槽船の立体強度計算を行ない，玄側油槽のせん断変形を求めた。そして，玄側油槽のせん断変形を小さくする対策を明らかにした[6]。

真能教授は１９６６年に長大油槽を有する油槽船の立体強度計算を行なうにあたって解析の対象としている油槽の前後１油槽計３油槽を取り出して立体強度を計算すれば，実用上十分な精度で玄側油槽のせん断変形を計算できることを明らかにした[7]。

森氏等は，１９６７年に縦通隔壁および船側外板の曲げおよびせん断撓みを考慮し，油槽船の全油槽を取り出して厳密に船体立体強度の解析を行ない，実船結果と比較して両者がよく一致することを確かめた[8]。

本研究では，部材の曲げ撓みおよびせん断撓みを考慮し，かつ部材端部の変断面の影響を考慮した撓角撓度法を用いて油槽船の立体強度解析理論を展開し，超大形油槽船の立体強度を解析する。

第１章の緒言に引き続いて第２章では超大形油槽船の立体強度解析法を展開する。第３章では標準状態の積み付けをしている油槽船の立体強度解析を行なって，横強度部材に生じる応力分布および玄側油槽のせん断変形量を計算する。第４章では，船体強度の実船実験を行ない，その結果を解析結果と比較して，本研究で適用した船体の立体強度解析法の有用性を検討する。

第2章　船体立体強度解析理論

2．1　仮　定

通常，船体構造は柱，梁，板および桁等の多数の部材によって構成された複雑な構造物であり，代表的な例として大形油槽船の見取り図を図2．1に示す。

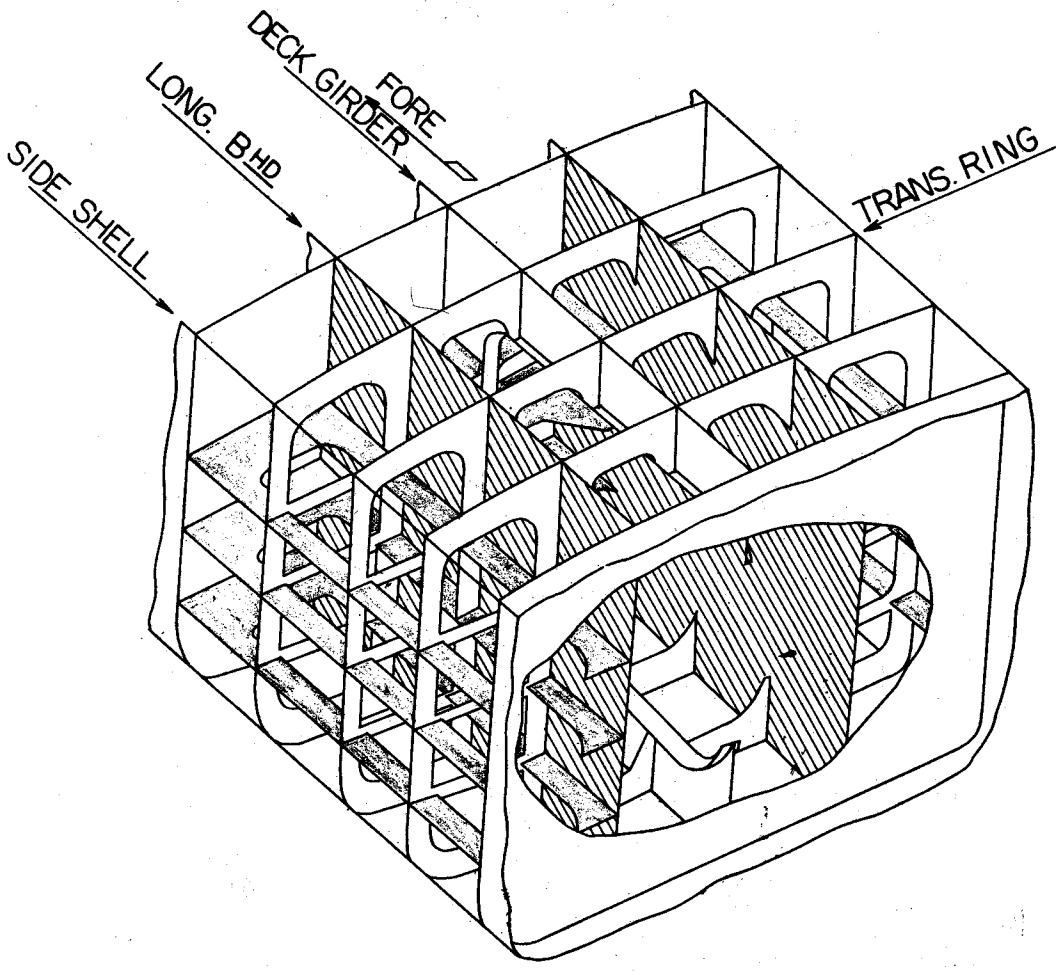


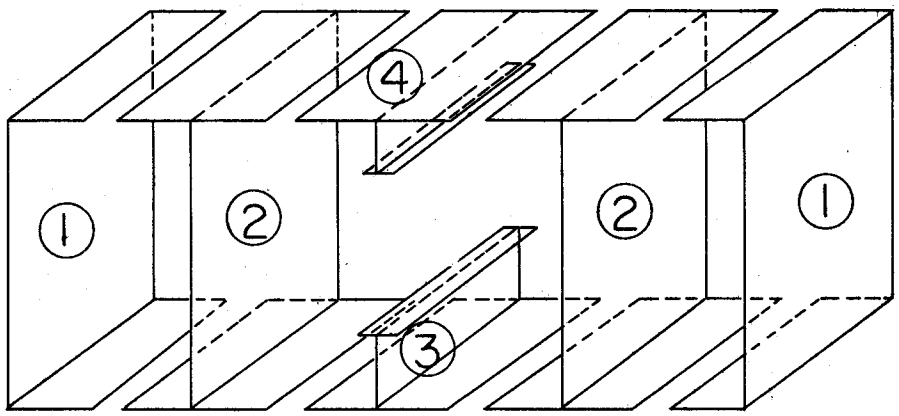
図2・1　油槽船見取り図

船体構造を構成する部材には主として船体の縦強度を分担する縦強度部材，および横強度を分担する横強度部材がある。

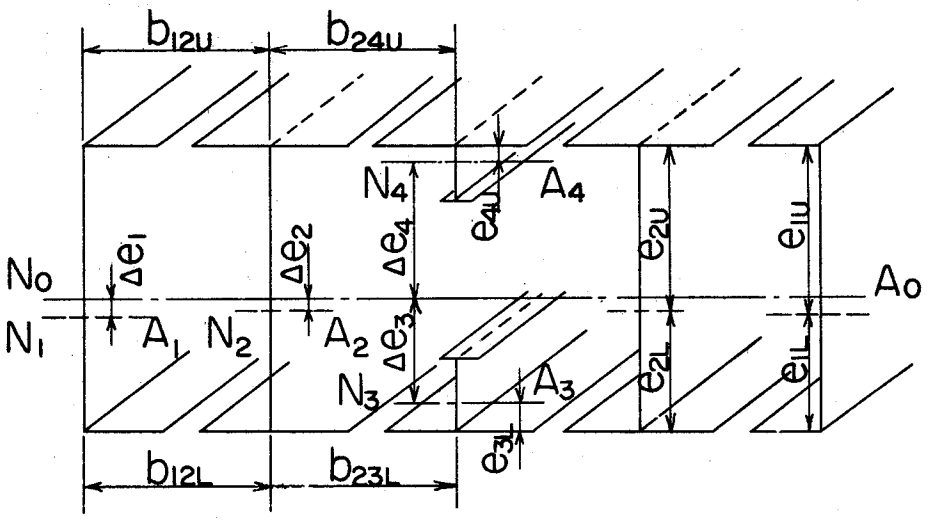
主要な船体縦強度部材としては図2・2に示した次の4部材がある。

1. 船側外板部
2. 縦隔壁部
3. 船底桁部

4. 甲 板 桁 部



(a) IDEALIZATION



(b) DIMENSIONS

図 2・2　縦 強 度 部 材

一方，主要な横強度部材としては次の4部材がある。

1. 横桁リング
2. 水密横隔壁
3. 制水横隔壁
4. 横隔壁付き縦桁

これら主要な部材から構成されている船体構造の解析で各部材の相互干渉の影響を同時に考慮して，構造物全体を取り扱うこともできるが，ここでは電子計算機を用いて数値計算を行なう時に出て来る解くべき方程式の元数を少なくして，計算時間を短縮するために，本研究では，横強度部材及び縦強度部材の相互干渉の影響を考慮しつつ，船体の立体強度解析の2つの計算，すなわち縦強度計算と横強度計算に分けて，次の仮定を設けて解析する。

(1) 解析の対象とする油槽およびその前後1油槽合計3油槽を取り出して，立体強度計算を行なう。

(2) 境界条件としては，計算の対象とする3油槽の前後端で外板部と縦通隔壁部の上下変位を零とする。また各縦強度部材の前後変位を一端で拘束し，他端で自由にする（図2・3）。縦強度部材に作用する外力としては，1横桁心距間の荷重および縦強度部材の自重である。

(3) 3油槽の前後端における縦曲げモーメントは，各縦強度部材が船体全体の中性軸N_0A_0の周りに持つ曲げ剛性の比によって，各縦通部材に配分される。

(4) 縦強度部材は横桁リング，船底板，甲板，水密横隔壁および制水横隔壁によって相互に結合された合成平行梁として取り扱って縦強度を決定する。

(5) 横強度部材の変形は，横強度部材が縦強度部材と交差している位置で単純支持されているものとし，側水圧をも含めた1横桁心距間の荷重を受けた状態における変形と，(4)の仮定のもとで計算した各縦強度部材の垂直変位に等しい強制変位を各支点に与えた変形を別々に計算して合成し最終変形状態とする。

(6) 横強度部材では，軸力による変形を無視する。

2．2 基礎理論

船体を構成する主強度部材である横強度部材及び縦強度部材について，力と変位に関する基礎式を導き，それらを基にして油槽船の立体強度解析に必要な平衡方程式及び境界条件について述べる。

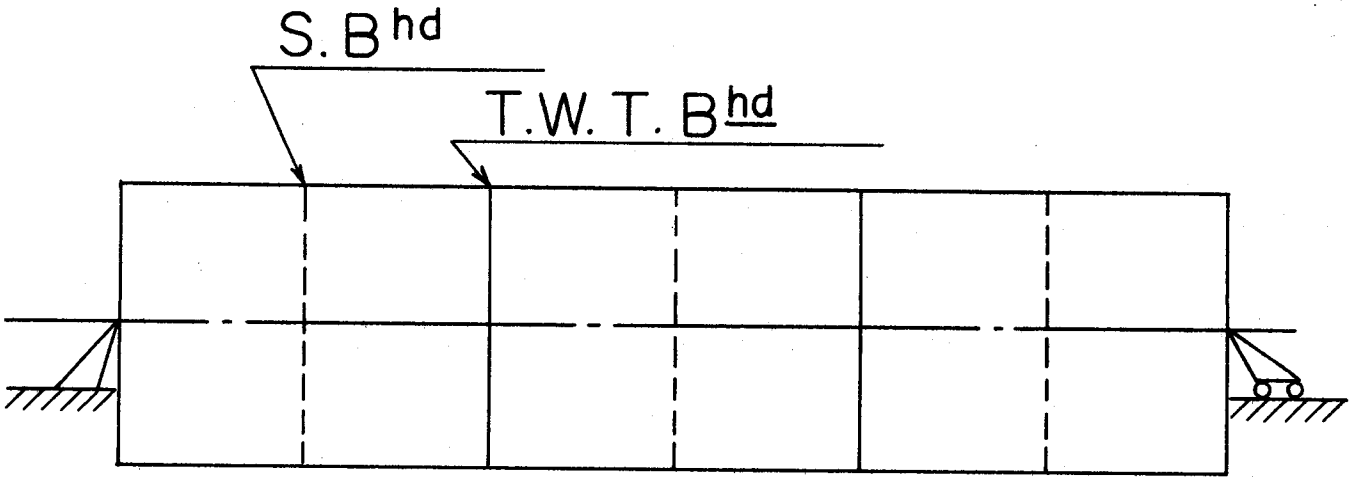


図２・３　　境　界　条　件

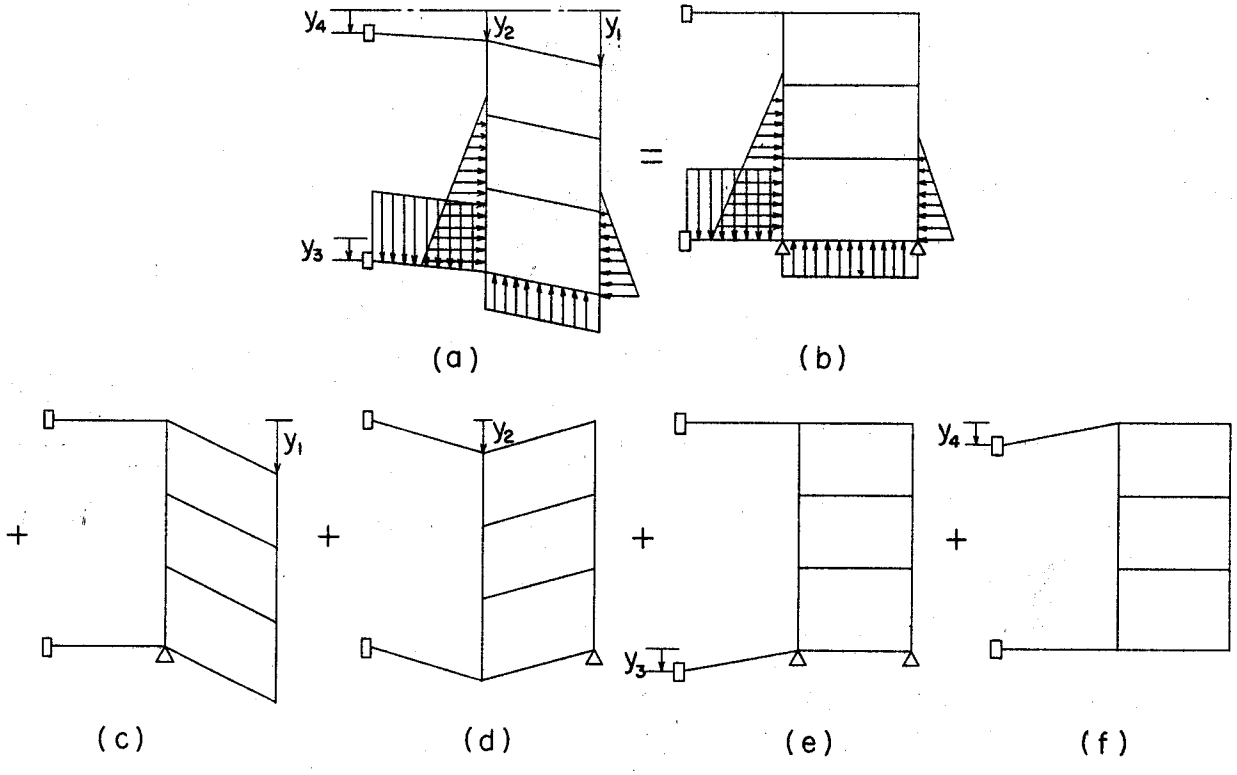


図２・４　　変　形　様　式

２．２．１　横強度部材

先ず，船体横強度部材を構成する横桁リング，水密横隔壁，横隔壁付き縦桁および制水横隔壁の力と変位に関する基礎式を導く。

(i) 横桁リング

図２・４(a)に示す横桁リングの変形を５ケの変形成分（図２・４(b)，(c)，(d)，(e)，(f)）に分割して，力と変位に関する基礎式を導く。５ケの変形成分は，縦通部材位置（４ケ所）に支点を設けて垂直方向変位を拘束し，１－横桁心距間の荷重を受けた時の変形（図２・４(b)）および各支点の拘束を１つずつ解除して対応する縦強度部材の垂直変位に等しい強制変位を与えた時に生じる４ケの変形（図２・４(c)～(f)）である。

部材 ij の断面 i に作用するせん断力 S_{ij}，曲げモーメント M_{ij}，およびせん断応力 τ_{ij}，および軸応力 σ_{ij} は上で述べた各変形によって生じる値の和としてそれぞれ次式で与えられる。

$$\left.\begin{aligned} S_{ij} &= S_{ij}(0) + \sum_{k=1}^{4} y_k \cdot S_{ij}^{k}(1) \\ M_{ij} &= M_{ij}(0) + \sum_{k=1}^{4} y_k \cdot M_{ij}^{k}(1) \\ \tau_{ij} &= \tau_{ij}(0) + \sum_{k=1}^{4} y_k \cdot \tau_{ij}^{k}(1) \\ \sigma_{ij} &= \sigma_{ij}(0) + \sum_{k=1}^{4} y_k \cdot \sigma_{ij}^{k}(1) \end{aligned}\right\} \qquad (2 \cdot 1)$$

ここで $S_{ij}(0)$，……，$\sigma_{ij}(0)$ は支点変位が全て拘束されて外荷重を受けている状態（図２・４(b)）での値であり，$S_{ij}^{k}(1)$，……，$\sigma_{ij}^{k}(1)$ は第 k 番目の支点に単位の強制変位を与え，他の支点の変位を拘束した状態（図２・４(c)～(f)）での値であり，y_k は第 k 番目の支点に生じた変位である。

支点反力 R_i は（２・１）式と同様に次式で与えられる。

$$R_i = R_i(0) + \sum_{k=1}^{4} y_k \cdot R_i^{k}(1) \qquad (2 \cdot 2)$$

横桁心距を S とすると，（２・２）式の R_i の逆方向の力が単位長さ当り R_i/S なる分布荷重として縦強度部材 ij に作用する。

大形油槽船で用いられる横桁リングでは部材長に対して部材の深さが深いのでせん断撓みの影響を考慮しなければならない。さらに部材の端部は応力集中を避け，力の伝達を向上させるために大きな曲率半径を持った構造様式にするかあるいはブラケットによって補強するのが普通であるから，部材端部の変断面の影響を考えなければならない。この端部構造の影響を考えるには部材を漸変断面梁として取り扱う方法と適当な位置にいわゆるスパンポイントを設けて部材端とス

パンポイント間は剛体であると考えて部材の有効長を減じて一様断面柱として取り扱う方法とが考えられる。

船体構造のなかで，端部に変断面を有する部材は数が多く，部材を漸変断面梁として取り扱う方法を適用すると非常に計算の手数を要する。

一方，もし何かの方法によってスパンポイントを決定することが可能であれば，各部材に対してスパンポイントを設け，部材端にそれだけの剛体長さを有するような構造の梁に対する基礎式を求めておけば以後の計算は画一的に実施することが可能となって便利である。

したがって，ここでは部材端部の変断面の影響をスパンポイントを設けて部材端とスパンポイント間は剛体であると考える方法を適用する。

そこで，まず，部材の両端に剛体部を有する一様断面梁の力と変位に関する基礎式を撓角撓度法を用いて導くことにする。

図２・５に示す両端に剛体部mm_0およびnn_0を有する一様断面梁のせん断撓みの影響を考慮した撓角撓度法の基本式は次のように書ける[4]。

$$\left.\begin{aligned}
M_{mn} &= EK_0 k_{mn}(2\alpha_{mn}\theta_m + \beta_{mn}\theta_n - 3\gamma_{mn}\phi_{mn}) + C_{mn}\\
M_{nm} &= EK_0 k_{mn}(\beta_{mn}\theta_m + 2\alpha_{nm}\theta_n - 3\gamma_{nm}\phi_{mn}) + C_{nm}\\
Q_{mn} &= EK_0 f_{mn}(\mu_{mn}\theta_m + \mu_{nm}\theta_n - 2\nu_{mn}\phi_{mn}) + D_{mn}\\
Q_{nm} &= EK_0 f_{mn}(\mu_{mn}\theta_m + \mu_{nm}\theta_n - 2\nu_{mn}\phi_{mn}) + D_{nm}
\end{aligned}\right\} \quad (2\cdot3)$$

ここで

$$\alpha_{mn} = \Gamma_{mn}\left(1+\frac{\eta_{mn}}{2}+3\lambda_{mn}+3\lambda^2_{mn}\right)$$

$$\alpha_{nm} = \Gamma_{mn}\left(1+\frac{1}{2}\eta_{mn}+3\lambda_{nm}+3\lambda^2_{nm}\right)$$

$$\beta_{mn} = \Gamma_{mn}(1-\eta_{mn}+3\lambda_{mn}+3\lambda_{nm}+6\lambda_{mn}\lambda_{nm})$$

$$\gamma_{mn} = \mu_{mn}\Lambda_{mn}$$

$$\gamma_{nm} = \mu_{nm}\Lambda_{mn}$$

$$\nu_{mn} = \Gamma_{mn}\Lambda_{mn}$$

$$\mu_{mn} = \Gamma_{mn}(1+2\lambda_{mn})$$

$$\mu_{nm} = \Gamma_{mn}(1+2\lambda_{nm})$$

$$\Gamma_{mn} = \frac{1}{1+2\eta_{mn}}$$

$$\Lambda_{mn} = L_{mn}/l_{mn}$$

$$\lambda_{mn} = l_{mn}/l$$

$$\lambda'_{nm} = l'_{nm}/l$$

$$\eta_{mn} = \frac{6EI_{mn}}{A_{mn}Gl^2}$$

$$f_{mn} = 3k_{mn}/l$$

$$k_{mn} = \frac{2I_{mn}}{l\ K_0}$$

$$k_0 = I_0/l_0$$

C_{mn}, C_{nm}, D_{mn} および D_{nm} は荷重項であり，その値は荷重状態によって定められる（付録１参照）。

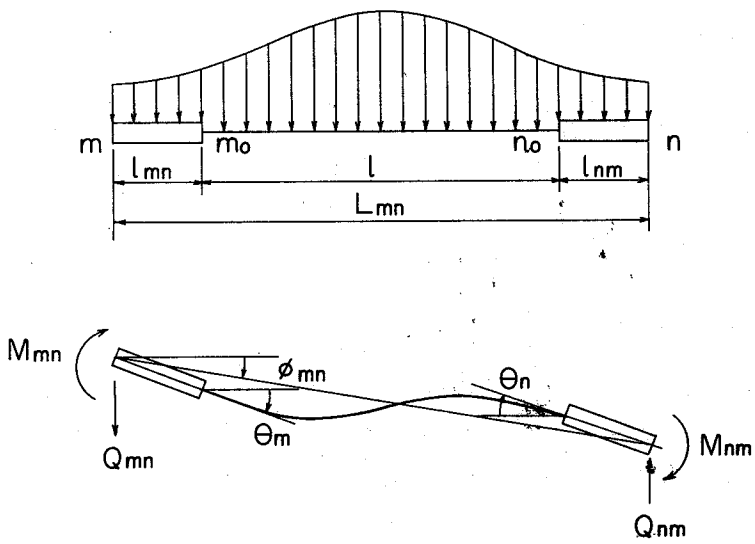


図２・５　力と変位

(ii) 水密横隔壁

水密横隔壁には，図２・６(a)に示す変位 y_1，y_2，y_3 および y_4 が生じる。普通隔壁では深さとス

パンの比は1以上でありスパンに比較して深さが深いので，その曲げ変形はせん断変形に比較して無視できる程度の量であるから隔壁の変形としてはせん断変形のみを考慮する。

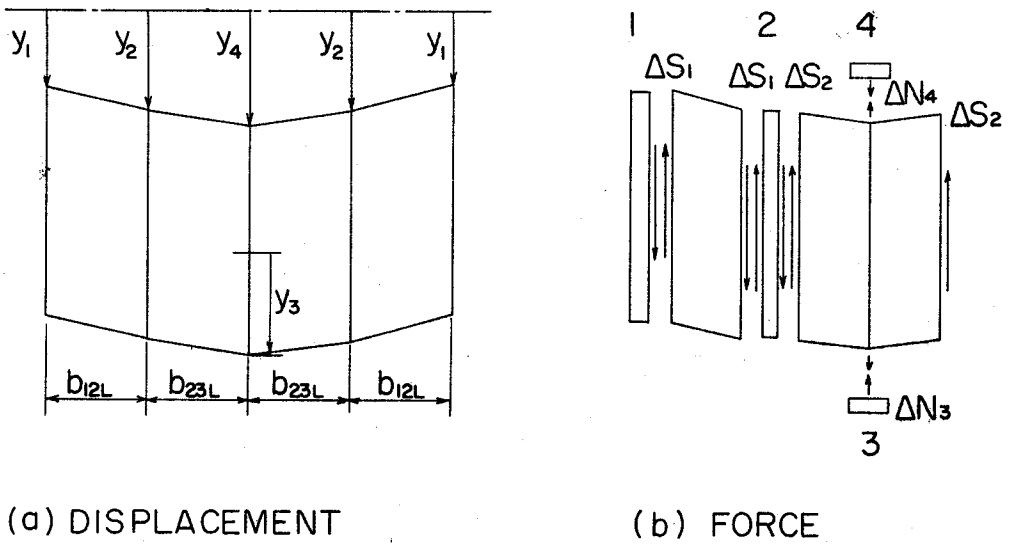
隔壁に作用するせん断力 ΔS_1 および ΔS_2 は，次式で与えられる。

$$\left.\begin{aligned} \Delta S_1 &= K_{SB1} \circ (y_2 - y_1) \\ \Delta S_2 &= K_{SB2} \circ (y_3 + y_4 - 2y_2) \end{aligned}\right\} \qquad (2 \circ 4)$$

ここで　$K_{SB1} = G \circ A_{SB1} / b_{12}$

$K_{SB2} = G \circ A_{SB2} / 2\, b_{23}$

A_{SB1}, A_{SB2} ： 横隔壁板のせん断有効断面積



(a) DISPLACEMENT　　(b) FORCE

図2・6　横隔壁の変形および力

(iii) 水密横隔壁付き縦桁

水密横隔壁付き縦桁には，その両端に図2・7(b)に示す軸力 ΔN_3， ΔN_4， せん断力 ΔS_3， ΔS_4 および曲げモーメント ΔM_3， ΔM_4 が作用し，図2・7(a)に示す軸方向変位 u，撓み y および回転角 φ が生じる。

軸力 ΔN_3 および ΔN_4 は，水密横隔壁に作用する（2・4）式の ΔS_1 および ΔS_2 が隔壁の深さ方向に一様に分布すると考えると次式で与えられる。

$$\left.\begin{aligned} \Delta N_3 &= K_{NV}\{(y_3 - y_2) - (y_4 - y_2)\} + K_{SB2}\{(y_3 - y_2) + (y_4 - y_2)\} \\ \Delta N_4 &= K_{NV}\{(y_3 - y_2) - (y_4 - y_2)\} - K_{SB2}\{(y_3 - y_2) + (y_4 - y_2)\} \end{aligned}\right\} \qquad (2 \circ 5)$$

ここで　　$K_{NV} = E(A_{NV}/D)$

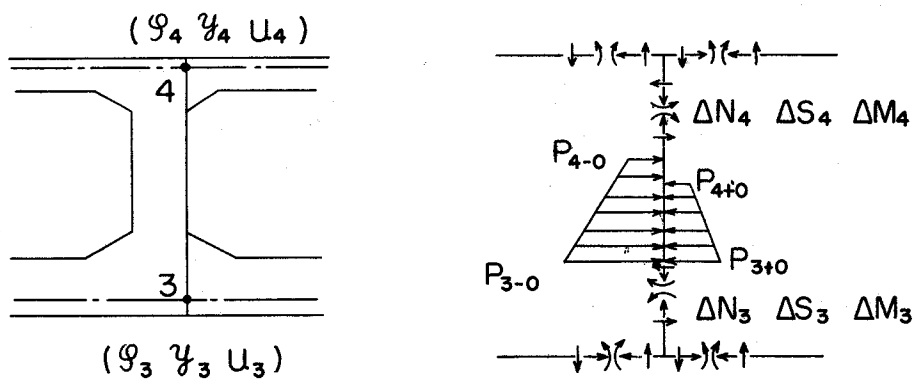
A_{NV} ：縦桁ウエブの断面積

一方，縦桁に作用するせん断力 ΔS_3，ΔS_4 および曲げモーメント ΔM_3，ΔM_4 は撓角撓度法を適用すると次のように書ける。

$$\left.\begin{aligned}
\Delta M_3 &= EK_0\, k_{34}\left\{2\alpha_{34}\varphi_3+\beta_{34}\varphi_4-3\frac{\gamma_{34}}{L_{34}}(u_4-u_3)\right\}+C_{3\cdot4-0}-C_{3\cdot4+0}\\
\Delta M_4 &= EK_0\, k_{34}\left\{\beta_{34}\varphi_3+2\alpha_{43}\varphi_4-3\frac{\gamma_{43}}{L_{34}}(u_4-u_3)\right\}+C_{4\cdot3-0}-C_{43+0}\\
\Delta S_3 &= -EK_0 f_{34}\left\{\mu_{34}\varphi_3+\mu_{43}\varphi_4-2\frac{\nu_{34}}{L_{34}}(u_4-u_3)\right\}-D_{3\cdot4-0}+D_{3\cdot4+0}\\
\Delta S_4 &= -EK_0 f_{34}\left\{\mu_{34}\varphi_3+\mu_{43}\varphi_4-2\frac{\nu_{34}}{L_{34}}(u_4-u_3)\right\}-D_{4\cdot3-0}+D_{4\cdot3+0}
\end{aligned}\right\}\quad(2\cdot6)$$

ここで C_{ij} および D_{ij} はタンク内液体圧力による荷重項で荷重の分布形によって付録１の式で与えられる。上式で添字＋０および－０は考えている点の前および後の値を意味する。

（２・４），（２・５）および（２・６）式で求められる力の逆方向の力が水密横隔壁の位置で縦強度部材に集中的に作用する。



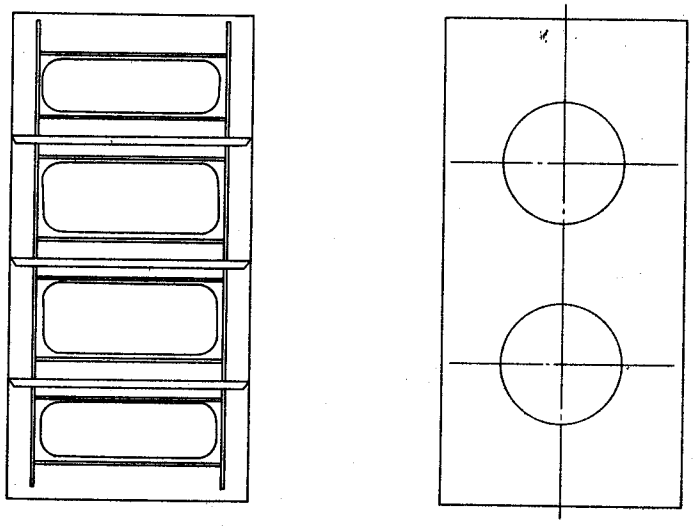
(a) DEFORMATION　　(b) FORCE & MOMENT

図２・７　横隔壁付き縦桁

(iv)　制水横隔壁

制水横隔壁が図２・８(*a*)に示される様な *Strong Transverse Ring Type* の場合には(i)の横桁リングと同様な取り扱いをし，図２・８(*b*)に示されるような *Perforated Plane Type* の場合には(ii)の水密横隔壁と同様に取り扱う。

制水横隔壁付き縦桁は(iii)の水密横隔壁付き縦桁と同様に取り扱う。



(a)STRONG TYPE　　(b) PERFORATED PLANE TYPE

図２・８　　制　水　隔　壁

２・２・２　縦強度部材

船体の縦強度を分担する縦強度部材には，２．１節で述べたように船側外板部，縦隔壁部，船底桁部及び甲板桁部の４部材があるが，これらの部材における力と変位の関係の基礎式には共通した式を用いる。

先ず，縦強度部材の断面 i に生じる変位および力を定義する（図２・９）。

中性軸の垂直変位	y_i
断面の回転角	φ_i
水平変位	u_i
せん断変位	$(dy_i/dx - \varphi_i)dx$
せん断力	S_i
曲げモーメント	M_i
軸力	N_i

変位と力の関係は微少長さ dx 間の力の釣合条件より次のようになる。

$$S_i = kGA_i(dy_i/dx - \varphi_i)$$

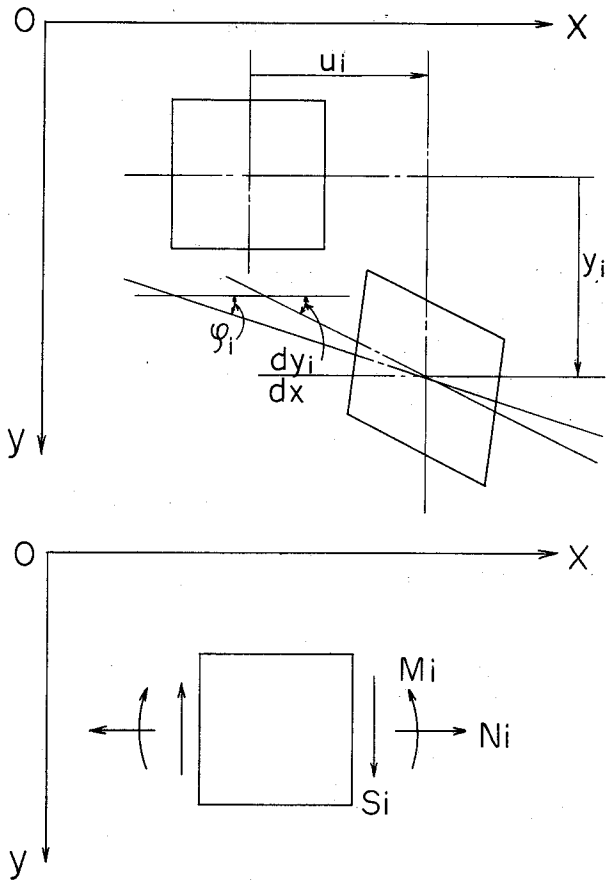


図２・９　　力と変位

$$\left.\begin{aligned} M_i &= -EI_i \frac{d\varphi_i}{dx} \\ N_i &= EA_i \frac{du_i}{dx} \end{aligned}\right\} \qquad (2\cdot7)$$

ここで　kA_{si}　：　部材のせん断有効断面積

I_i　：　部材の断面２次モーメント

A_i　：　部材の断面積

外力としては次の力が縦強度部材に作用する。

外荷重　$f_i = -R_i(0)/S + w_i$

縦強度部材と横強度部材の相互干渉力としては

垂直方向力　$r_i = -\sum_{k=1}^{4} y_k \{R^k_{ij}(1)/S\}$　　（２・８）

水平方向力　$q_{ijU} = G\beta_{ijU}\{(u_i+e_{iU}\varphi_i)-(u_j+e_{jU}\varphi_j)\}$

$q_{ijL} = G\beta_{ijL}\{(u_i-e_{iL}\varphi_i)-(u_j-e_{jL}\varphi_j)\}$

ここで

S　：横桁心距

w_i　：i－部材の自重

$\beta_{ijU} = t_{ijU}/b_{ijU}$

$\beta_{ijL} = t_{ijL}/b_{ijL}$

t_{ij}　：縦強度部材iおよびj間の甲板あるいは船底板の板厚

b_{ij}　：縦強度部材iおよびj間の距離

添字

U　：甲板における値

L　：船底における値

図２・１０に示した微少要素（dx）の力およびモーメントの釣合条件より次式が得られる。

$$\left.\begin{aligned} dS_i/dx &= -r_i - f_i \\ dM_i/dx &= S_i + e_{iU}(q_{ijU}-q_{ihU}) - e_{iL}(q_{ijL}-q_{ihL}) \\ dN_i/dx &= -(q_{ijU}-q_{ihU})-(q_{ijL}-q_{ihL}) \end{aligned}\right\} \quad (2\cdot 9)$$

（２・７），（２・８）および（２・９）式より次の基礎式を得る。

$$\frac{d}{dx}\{Y\} = [V]\{Y\} + \{W\} \quad (2\cdot 10)$$

ただし　$\{Y\}$　：未知変位行列

$[V]$　：相互干渉係数行列

$\{W\}$　：外荷重行列

（２・１０）式の$[V(x)]$および$\{W(x)\}$はxの関数であるが，実際の場合には，xの範囲（$x_{i-1} \leq x \leq x_i$）を適当に小さくとるとその範囲では$[V]$および$\{W\}$は一定と考えることができる。従って（２・１０）式は次のようにかける。

$$\frac{d}{dx}\{Y\} = [V_i]\{Y\} + \{W_i\} \quad (2\cdot 11)$$

ここで　$[V_i] = [V(x)]$

$$\{W_i\} = \{W(x)\} \qquad x_{i-1} \leq x \leq x_i$$

であり，各行列の要素は全て定数である。

（２・１１）式の解は

$$\{Y\} = e^{[V_i](x-x_{i-1})}\{Y_{i-1}\} + [V_i]^{-1}(e^{[V_i](x-x_{i-1})} - [I])\{W_i\} \tag{2・12}$$

ここで $\{Y_{i-1}\} = \{Y(x_i - 1)$ （２・１３）

$$e^{[V]x} = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{[V]^j x^j}{j!} \tag{2・14}$$

$[I]$ ： 単位行列

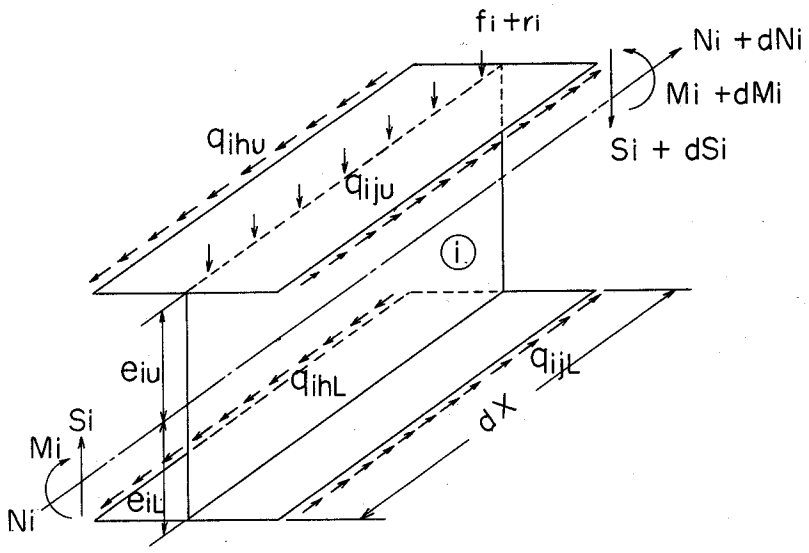


図２・１０　力の平衡

２．２．３　境界条件

船体の立体強度解析は，２．１節で述べた仮定に基づいて，次の境界条件を用いて行なう。

(a)　後端部

$$y_1 = 0$$

$$M_1 = (I_1/I_0)M_A - \Delta M^A_{1-0} + \Delta M^A_{1+0}$$

$$u_1 = 0$$

$$y_2 = 0$$

$$M_2 = (I_2/I_0)M_A - \Delta M^A_{2-0} + \Delta M^A_{2+0}$$

$$
\left.
\begin{aligned}
u_2 &= 0 \\
S_3 &= \Delta N_3^A \\
M_3 &= (I_3/I_0)M_A - \Delta M_3{}^A \\
u_3 &= 0 \\
S_4 &= -\Delta N_4^A \\
M_4 &= (I_4/I_0)M_A - M_4^A \\
u_4 &= 0
\end{aligned}
\right\} \qquad (2\cdot15)
$$

(*b*) 中間の横隔壁位置

$$
\left.
\begin{aligned}
y_i\rceil_{+0} &= y_i\rceil_{-0} \\
\varphi_i\rceil_{+0} &= \varphi_i\rceil_{-0} \\
u_i\rceil_{+0} &= u_i\rceil_{-0} \qquad (i=1,\sim 4) \\
S_1\rceil_{+0} &= S_1\rceil_{-0} - \Delta S_1 \\
M_1\rceil_{+0} &= M_1\rceil_{-0} - \Delta M_{1-0} + \Delta M_{1+0} \\
N_1\rceil_{+0} &= N_1\rceil_{-0} - \Delta N_{1-0} + \Delta N_{1+0} \\
S_2\rceil_{+0} &= S_2\rceil_{-0} + \Delta S_1 - \Delta S_2 \\
M_2\rceil_{+0} &= M_2\rceil_{-0} - \Delta M_{2-0} + \Delta M_{2+0} \\
N_2\rceil_{+0} &= N_2\rceil_{-0} - \Delta N_{2-0} + \Delta N_{2+0} \\
S_3\rceil_{+0} &= S_3\rceil_{-0} + \Delta N_3 \\
M_3\rceil_{+0} &= M_3\rceil_{-0} - \Delta M_3 \\
N_3\rceil_{+0} &= N_3\rceil_{-0} - \Delta S_3 \\
S_4\rceil_{+0} &= S_4\rceil_{-0} - \Delta N_4 \\
M_4\rceil_{+0} &= M_4\rceil_{-0} - \Delta M_4 \\
N_4\rceil_{+0} &= N_4\rceil_{-0} + \Delta S_4
\end{aligned}
\right\} \qquad (2\cdot16)
$$

(*c*) 前　端　部

$$
\begin{aligned}
y_1 &= 0 \\
M_1 &= (I_1/I_0)M_F + \Delta M_{1-0}^F - \Delta M_{1+0}^F \\
N_1 &= (\Delta e_1 A_{N1}/I_0)\,M_F + \Delta N_{1-0}^F - \Delta N_{1+0}^F
\end{aligned}
$$

$$
\left.
\begin{aligned}
y_2 &= 0 \\
M_2 &= (I_2/I_0)\,M_F + \Delta M^F_{2-0} - \Delta M^F_{2+0} \\
N_2 &= (\Delta e_2\,A_{N2}/I_0)\,M_F + \Delta N^F_{2-0} - \Delta N^F_{2+0} \\
S_3 &= -\Delta N^F_3 \\
M_3 &= (I_3/I_0)\,M_F + \Delta M^F_3 \\
N_3 &= (\Delta e_3\,A_{N3}/I_0)\,M_F + \Delta S^F_3 \\
S_4 &= \Delta N^F_4 \\
M_4 &= (I_4/I_0)\,M_F + \Delta M^F_4 \\
N_4 &= -(\Delta e_4\,A_{N4}/I_0)\,M_F - \Delta S_4{}^F
\end{aligned}
\right\}
\qquad (2\cdot17)
$$

ここで　M_F，M_A　：前後端における縦曲げモーメント

$\Delta M_{1-0} \sim \Delta M_{2+0}$，　$\Delta N_{1-0} \sim \Delta N_{2+0}$　：　油槽内の液体の圧力による曲げモーメントおよび軸力

$+0$，　-0　：　考えている点の前および後を示す。

2．3　解　析　法

船体の立体強度解析は船体を構成する縦強度部材の強度を問題にする船体縦強度解析および横強度部材の強度を問題にする船体横強度部材の解析の2つに大別される。

油槽船の縦強度は船体を構成する主要な縦強度部材の断面寸法すなわち断面係数Zおよび板厚tの値が次のように決定されると特に問題は生じない。すなわち縦曲げモーメントおよびせん断力が船体に作用した時に，梁理論を用いて計算した応力が許容応力以下になるように決定すればよい。

一方，船体の横強度の解析では，横強度部材だけでなく，縦強度部材をも考慮に入れて，立体構造として解析しなければ横強度部材の強度を精度良く計算することができない。

通常，横強度部材では第2編で述べるように局部的に過大な応力が作用してクラックあるいは座屈等の損傷が発生する。そこで船体の横強度部材の解析を行なった結果をもとにして，さらに横強度部材の局部強度を検討しなければならない。

ここでは船体の横強度に重点を置いた立体強度の解析を次のように行なう。

まず解析の対象としている油槽とその前後1油槽合計3油槽を取り出して船体構造を等価な立体骨組構造物に置換する。この立体骨組構造は縦強度部材および横強度部材によって構成されて

いるが，縦強度部材は横強度部材によって弾性的に支持されていると考える。

次に横強度部材の剛性を計算して，縦強度部材を支持しているバネ（横強度部材）のバネ定数を得る。弾性支持（横強度部材）上の梁（縦強度部材）が与えられた荷重を受けた時の梁（縦強度部材）の強度を計算して，縦強度部材の変形を求めると，横強度部材との交点に於ける変位が定まる。横強度部材は縦強度部材との交点で，今計算された強制変位および側水圧を含めた1横桁心距間の荷重を受けているとしてその内力を解析すると，横強度部材の変形および内力が計算される。

船体の立体強度解析法を適用して得られた結果より各部材に生じる応力分布を求めるには，部材の平行部に対しては単純梁理論を適用して応力分布を計算する一方，部材端部がブラケットによって補強されているかあるいは大きな曲率を有している場合の応力分布の計算には第2編第2章で述べる有限要素法を適用する。

第3章　解析結果

第2章で述べた立体強度解析理論を用いて，２０万*D.W.T.* 級油槽船および４０万*D.W.T.* 級超大形油槽船の立体強度を解析する。前者は既に日立造船株式会社堺工場において数隻の同型船が建造され，かつ又後述するように横強度実験の供試船として選ばれたものである。後者は，現在同社において試設計が行なわれており建造準備中のものである。それぞれの船の主要寸法を表３・１に示す。

図３・１　供試船の主要寸法

要目＼船名		A	B
L (m)		298.00	362.00
B (m)		50.80	59.00
D (m)		24.20	33.40
d (m)		17.80	25.00
b_c (m)		22.08	19.67
D.W.T. (ton)		187,500	400,000
構造方式	中央	C. Girder 有り	C. Girder なし
	玄側	2 Struts	2 Struts
タンク数		5	5

解析する油槽船の載荷状態，吃水などは図３・１に図示するが，ノルウェーの船級協会（*Det norske Veritas* ：*NV*）が規定している横強度計算の標準状態に準じて次のように定めた。

中央油槽　：満載

玄側油槽　：空

前後の油槽　：全て空

吃水　：0.25 *D*

動荷重　：考慮せず

端部の曲げモーメント：0

供試船は5個の油槽を有しているが，中央の3個の油槽を取り出して立体強度計算を行ない得られた結果のなかで，船側外板と縦通隔壁との相対撓みおよび横桁リングの応力分布をそれぞれ図3・2，3・3，3・4および3・5に示す。

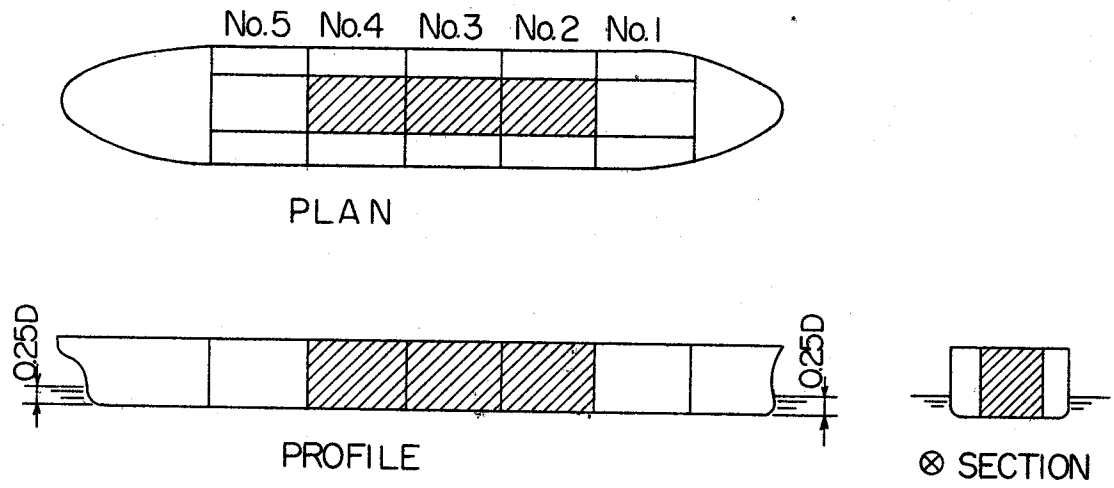


図3・1　標準状態

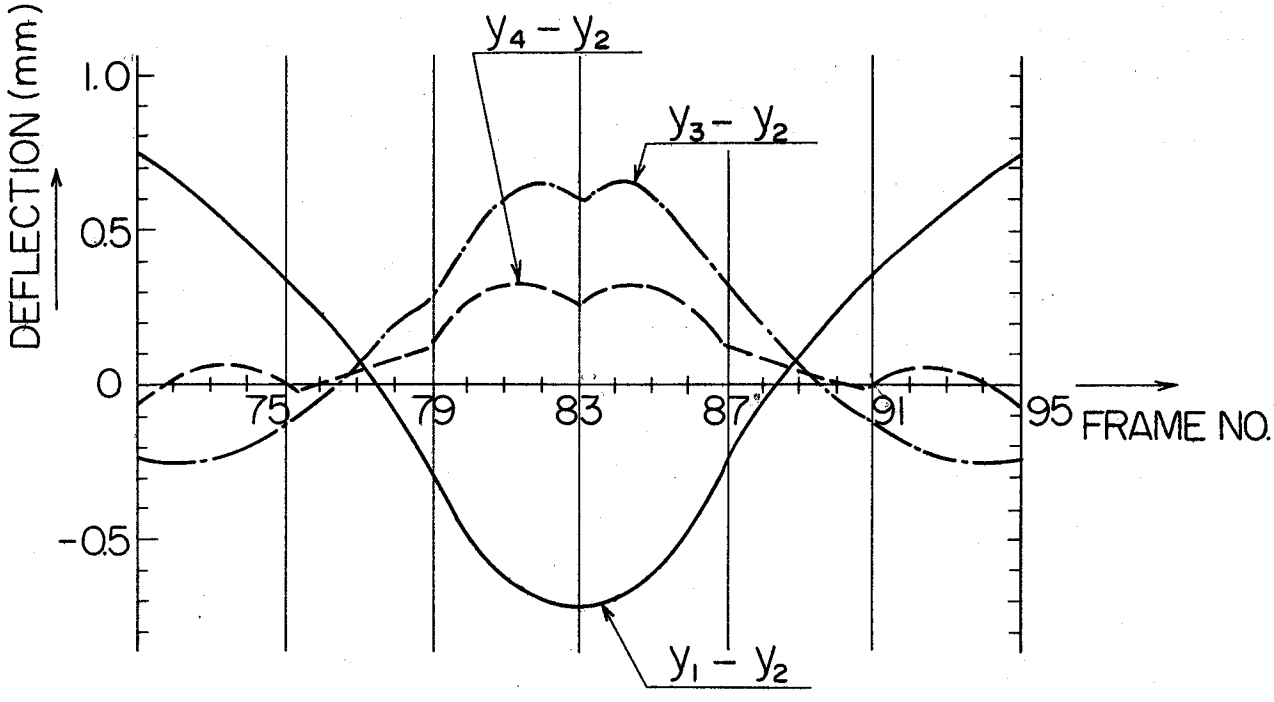


図3・2　縦通部材の縦隔壁に対する相対変位（*A*船）

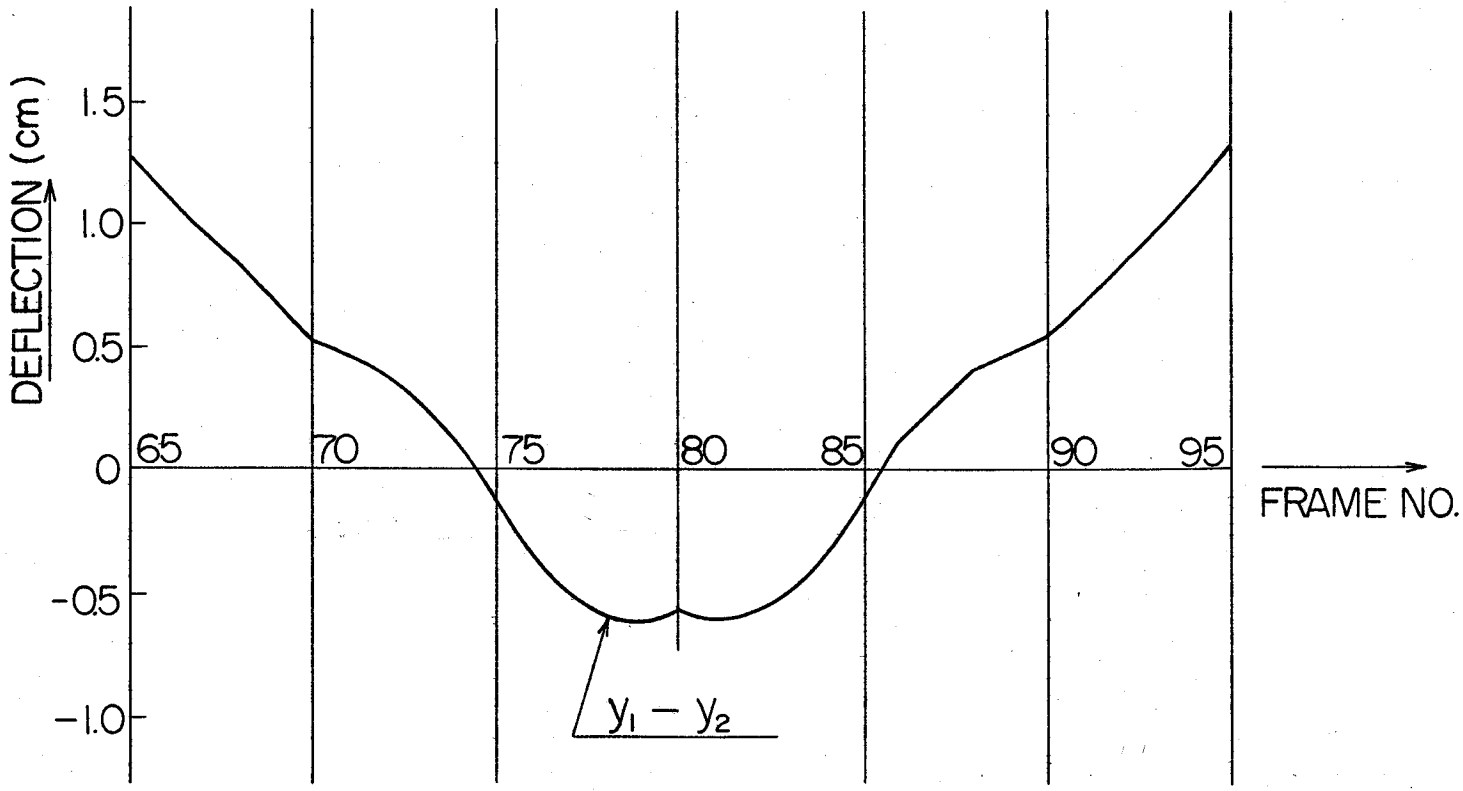


図３・３　縦通部材の縦隔壁に対する相対変位（*B* 船）

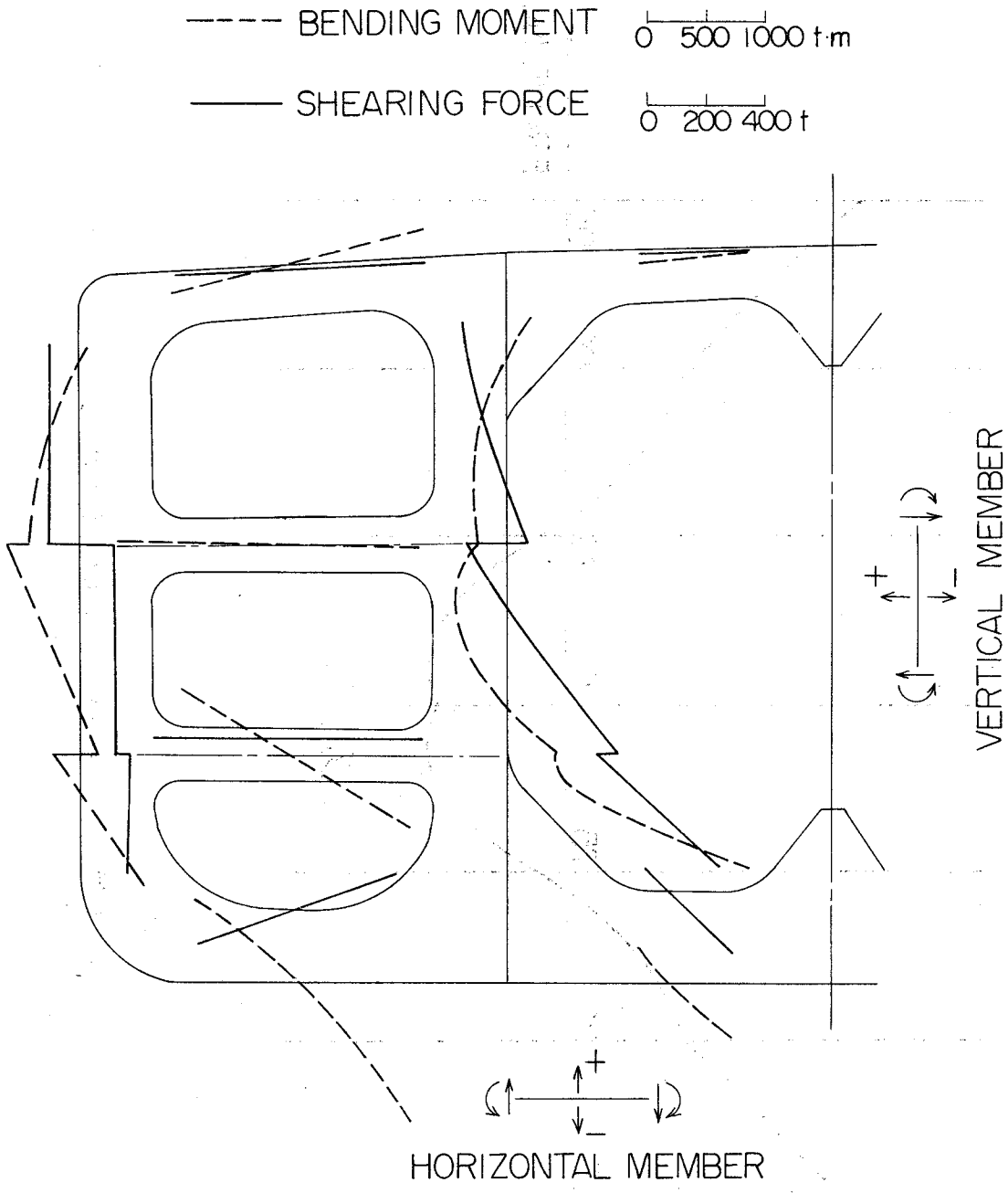


図３・４　曲げモーメントおよびせん断力（Ａ船）

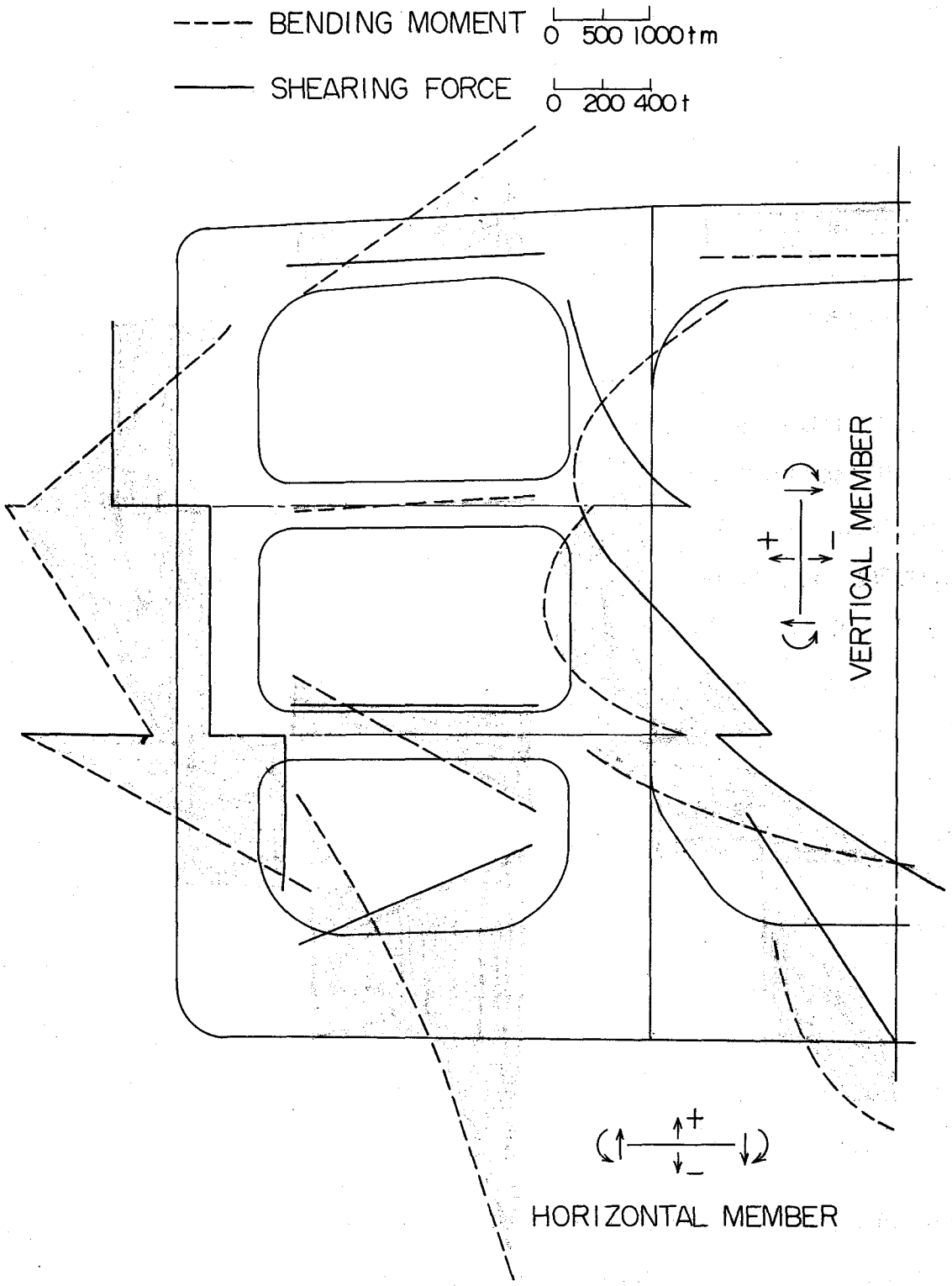


図３・５　曲げモーメントおよびせん断力（B船）

第4章　実船実験

本論文で詳述した船体の立体強度の計算法の適用性を検討するために実船による船体強度の実験を実施した。

ここで対象にしているのは船体の弾性挙動であるから，実船の実験における荷重状態はどんな状態でもよく，その荷重状態に対応した状態で船体の立体強度解析を行なって，船体の剛性の評価が正しいかどうかを実験結果と比較して検討する。

最近の大形油槽船では貨物油槽の水圧試験* を海上で実施する。この水圧試験時に吃水および油槽内水位が変化して船体に外力が作用する。

そこで水圧試験時を利用して実船の実験を実施する。船体に作用する外力の状態は吃水および貨物油槽内の水位の変化を計測することによって容易に求めることができる。

計測の対象としたものは横桁リングの面材の直応力および玄側油槽のせん断変形，すなわち船側外板と縦通隔壁の相対撓みである。横桁リングの面材は形状が複雑でなくまた応力集中が生じないので船体の立体強度解析結果と実船の計測値を比較するのに最適の場所である。

横桁リングの面材の応力分布の計測には，電気抵抗線ひずみ計を使用した。玄側油槽のせん断変形の計測には図4・1(a)に図示するように玄側タンク内の対角線方向にピアノ線を張り，その伸びをダイアル・ゲージを用いて計測した。

玄側油槽のせん断変形量ΔVはダイアル・ゲージの変化量Δlを用いて次式で計算する。

$$\Delta V = \Delta l \sqrt{1 + n^2} \qquad (4 \cdot 1)$$

ここで　$n = H / V$

H ：玄側油槽の幅

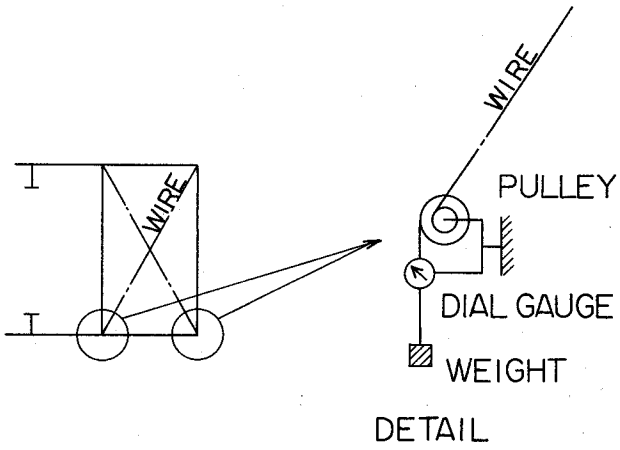
V ：油槽の高さ

Δl ：ダイアル・ゲージの変化量

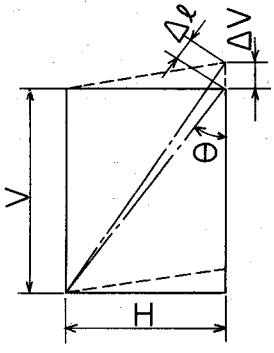
実船の実験は20万D.W.T.級の油槽船A船（第3章で標準状態での立体強度を解析した）が艤装岸壁で係留中に実施した水圧試験時を利用して行なった。

---

* 貨物油槽の水圧試験は船級協会が製造中登録検査における試験として規定しているものである。たとえば，日本海事協会の規定では，水圧試験の試験圧力を次の様に定めている。貨物油タンクの頂板を構成する甲板の船側における上面上2.45 mの高さまでの水高圧力及び倉口頂部上0.6 mの高さまでの水高圧力のうち大きい方の圧力の水圧試験を実施しなければならない。



(a) EQUIPMENT



(b) DEFORMATION

図 4・1　計　測　装　置

実験状態は図 4・2 に示すが，初期状態の吃水（d_a および d_f）は。

d_a = 5.0 m

d_f = 2.8 m

また貨物油槽の積付け状態は

No. 1	中央油槽	1,160	ton
No. 3	〃	6,740	ton
No. 5	〃	350	ton

他の油槽は全て空であった。

最終状態の吃水は

d_a = 7.1 m

d_f = 8.7 m

であり貨物油槽の積付け状態は

No. 1　中央油槽　　16，860 *ton*

No. 3　　〃　　24，180 *ton*

No. 5　　〃　　8，460 *ton*

であり他の油槽は全て空であった。

実船の実験を行なって計測した玄側油槽のせん断変形量および横桁リングの面材の応力分布をそれぞれ図4・3および4・4に示す。同図には第2章で述べた理論計算を用いて，計測時と同じ負荷状態の油槽船の立体強度計算を行なって得た結果も示してある。

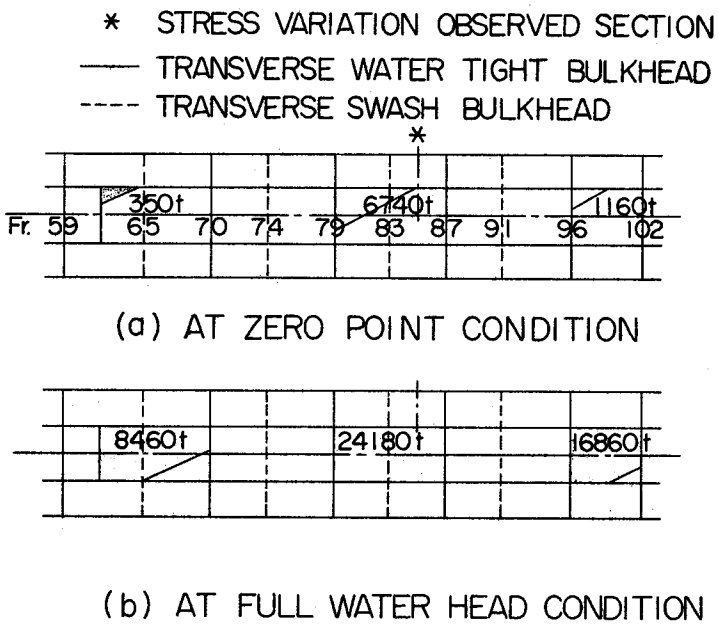


図4・2　タンクテスト状態

計測結果と理論解析結果とを比較すると明らかなように横桁リングの面材の応力分布に関しては，理論解析結果と実験値は良い一致を示している。一方玄側油槽のせん断変形量に関しては実験結果は理論解析結果の約2倍の値になっている。

この両者の相違する原因として，次の理由が考えられる。玄側油槽の変形量の計測値としては，図4・5に示すような玄側油槽のせん断変形，軸力による変形および曲げ変形の3種類の変形量が含まれている。これら3種類の変形によって生じる変形量は同じ程度のものである。例えば軸力による玄側油槽の変形の場合，軸応力として1 kg／mm²の応力が横桁リングに生じると，スパンすなわち船の深さが約20 *m*であるから軸方向の変位1 mmが生じる。大形油槽船の部材には船底からの水圧および貨物油槽内の貨油圧力によって数kg／mmの軸応力が生じるので軸方向変位は数

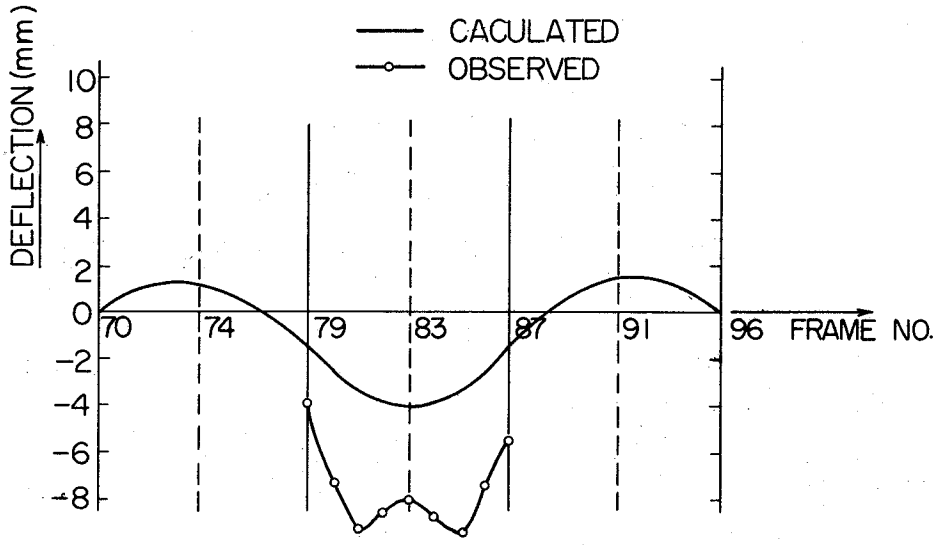


図４・３　玄側油槽のせん断変形（ A船 ）

mmの値になる。

一方ここで用いている船体の立体強度計算法では軸力による横強度部材の変形を無視している。従って本法では一般に精度の良い横強度部材の軸方向変形を求めることができない，しかし，玄側油槽のせん断変形によって横桁リングに生じる応力は小さいので，本解析法で横強度部材に生じる応力は十分良い精度で解析できることがわかる。

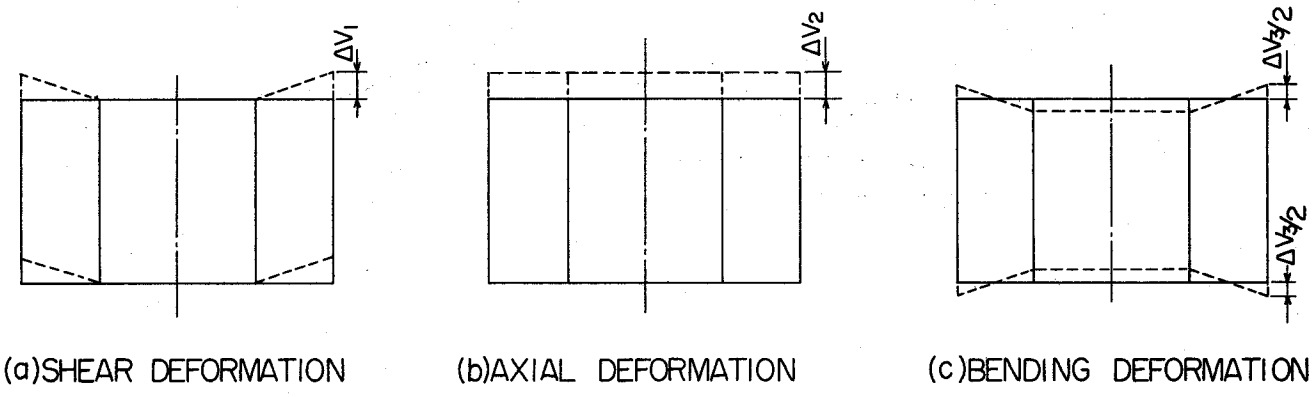


図４・５　玄側油槽の変形

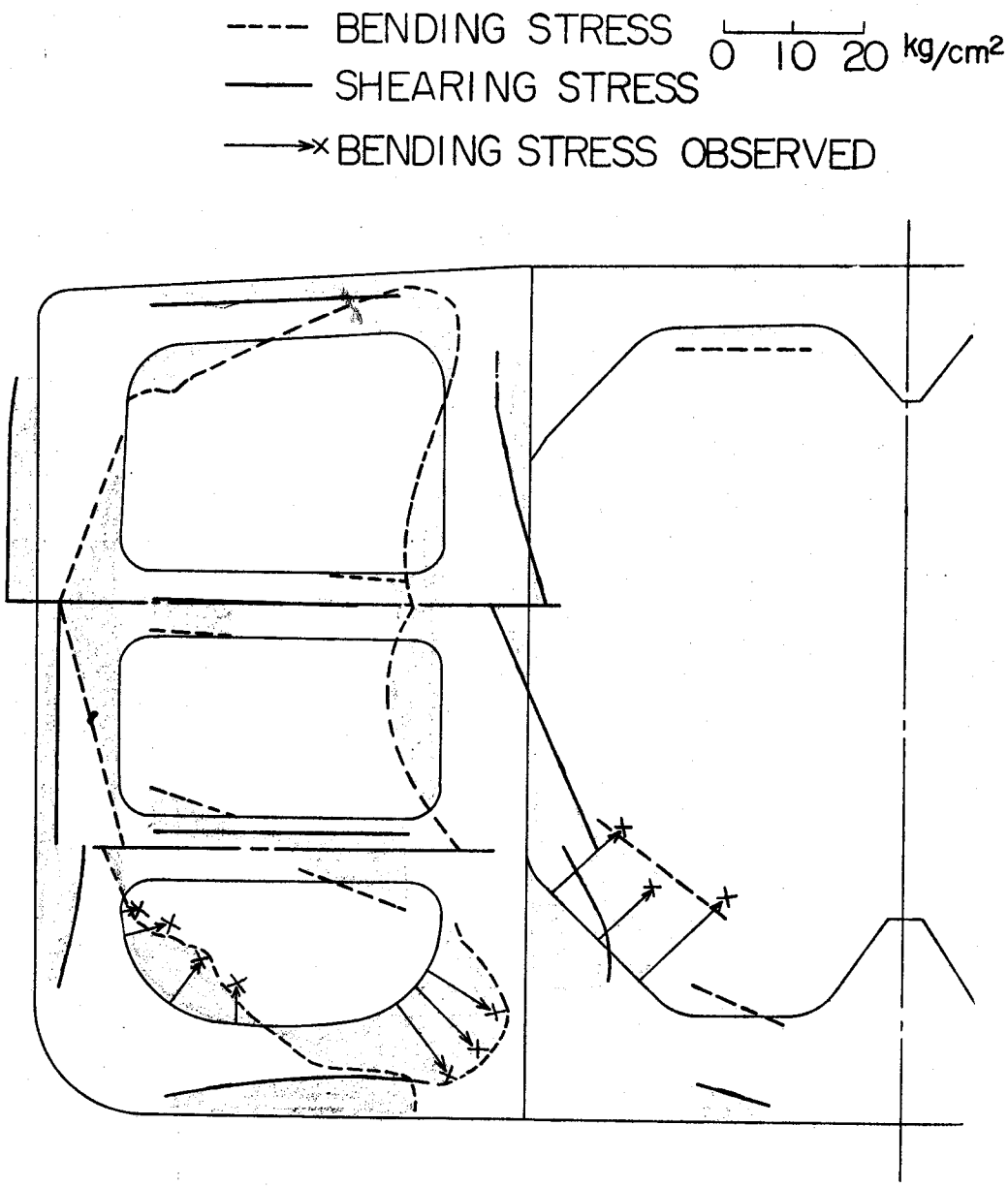

BENDING STRESS
SHEARING STRESS
BENDING STRESS OBSERVED
0 10 20 kg/cm2

図 4・4　応 力 分 布（A船）

第5章　総　括

第1編においては，超大形油槽船の立体強度を理論的に解析する方法を述べ，それをもとに計算機のプログラムを開発して船体の立体強度の計算を行なった。

以下においては第1編で得られた主要な結論を記述する。

第1章の緒言に続き，第2章では超大形油槽船の立体強度解析理論を展開した。

第3章では，第2章の理論に基づいて。*Det norske Veritas* が定めている標準状態の20万*D.W.T.* 級および40万*D.W.T.* 級超大形油槽船の立体強度解析を行ない，横桁リングの面材に生じる応力分布および縦通部材の撓み等を求めた。

第4章では，貨物油タンクの水圧試験時を利用して実船の実験を行なって，横桁リングの面材に生じる応力および玄側タンクのせん断変形量を計測した。同時に理論解析を行なって得られた応力分布を計測値と比較して，両者が良く一致することを確かめた。その結果，第2章で述べた船体の立体強度解析法が十分実用に供し得るものであると考えられる。

第　2　編

船　体　の　局　部　強　度

第1章　緒　　言

第1編の研究で明らかなように，油槽船の大形化に伴って，船の吃水は深く，かつ油槽長が長くなり，従って，船体構造部材に作用する外力も大きくなってきた。これに応じて，船体の大形化は外力を受け持つ構造部材寸法の増加を必然的に伴うが，そのなかで板厚の増加だけは小さい傾向がある。このような理由で，船体構造部材に生じる応力は相対的に増加しており，油槽船の大形化に伴って，船体の局部強度はむしろ低下しているきらいがある。

事実，大形油槽船の船体構造部材にはクラックあるいは座屈等の損傷事故が多発しており，第1編で述べた船体の立体強度解析のみならず，船体構造部材の局部的な強度を良い精度で解析することが必要になる。第2編では，このような問題について論じる。

構造部材の局部強度の解析としては，応力集中部の応力分布の計算と，座屈強度解析のために必要な応力分布と，その応力を受けて座屈する時の座屈荷重の計算がある。

船体構造部材は形状が複雑であり，しかも部材に作用する外力がせん断力，曲げモーメントおよび軸力が組み合わさっているので，応力集中部の応力解析あるいは座屈強度解析のための応力分布の計算および座屈荷重の計算は，一般には，非常に困難であり，船体の局部強度の理論的研究は非常に限られた問題のみが取り扱われてきた。

このような状態において，近年の電子計算機の進歩は目覚しく，それに伴って，2次元応力解析で注目を浴びている強力な解析法に有限要素法がある。

本編では，この有限要素法を用いて船体の局部強度の解析を行なう。すなわち，本章の緒言に引き続いて，第2章においては弾性および塑性域における応力・ひずみ関係を定義し，それをもとに平板の弾塑性応力分布解析理論を示し，有限要素法を用いた場合の解析法を示す。そして，有限要素法に基づいて，応力集中部の弾塑性応力分布の解析を行なって，実験結果と比較する。

第3章においては，第2章で定義した弾性および塑性域における応力・ひずみ関係を用いて，平板の弾塑性座屈理論を導き，有限要素法を基にした解析法を展開する。この解析法により応力分布から座屈強度解析にいたる一連の計算を行なう電子計算機用プログラムを開発する。さらにこれを基に，超大形油槽船で特に問題になる横桁ウエブの座屈強度解析用プログラムを作成し，模型による座屈実験結果および実船に生じた座屈事故結果を解析して，計測値と比較する。さらに，横桁ウエブ以外で，座屈が問題になる船体各部の座屈強度を解析して，得られた結果を実験結果およびエネルギー法による解析結果と比較する。

第4章においては船体構造によく用いられる補強板の厳密な座屈理論を有限要素法を用いて導

き，補強材が任意の位置に取り付けられた場合の補強板の座屈強度解析用プログラムを開発して，補強材の効果を検討する。

第2章　応力集中部の弾塑性応力分布

1.　緒　　言

第1編の研究で明らかなように油槽船の大形化に伴って船の吃水が深く，かつ油槽長が長くなり，船体構造部材に作用する外力が大きくなってきた。

一方，油槽船の大形化に伴う部材の形状寸法の増加にもかかわらず，その板厚の増加は少ない傾向があった。その結果，油槽船が大形化すると部材に生じる応力は増加する傾向にある。その1例として，油槽船の船底横桁ウエブの板厚と船長との関係を調査すると図1．1に示すような結果が得られる。[9]

一般に，船体構造の不連続部および重量軽減のための軽目孔あるいは部材が互いに交差する時に，部材を貫通させるために設ける孔等の近傍に応力集中が生じる。しかも，上述したように大形油槽船の部材の平均応力が増加しているので，このような応力集中部には，これまで弾性範囲程度の応力しか生じないような場所においても，塑性応力が生じる可能性がある。そして部分的に塑性応力が生じていると考えられる応力集中部にはクラックの損傷，また，高応力を受けている部材では弾塑性局部座屈等の損傷事故が多い。

損傷事故の1例として大形油槽船の横桁リングの応力集中部に発生したクラックを図1．2，図1．3および表1．1に示す。[10] 実船における応力分布の計測結果よりクラックが発生した横桁リングの応力集中部には塑性応力が生じていることが知られている。

これらのクラックの発生を防止するためには応力集中部の弾塑性応力分布を正しく計算しなければならないし，また部材の弾塑性座屈強度を解析するためには，まず，部材に生じている弾塑性応力分布を計算する必要がある。応力分布とくに弾塑性応力分布の解析は船体構造部材の局部強度を評価するために極めて重要なものである。

平板の応力分布の解析法としては，これまで主に，微分方程式を直接解く方法，微分方程式を差分方程式に置換して解く方法あるいは微分方程式の近似解を級数によって求める方法が用いられた。

一般に，平板の応力分布なかでも弾塑性応力分布に関した問題で微分方程式から解を得ることができる荷重および支持条件の場合は少なく，特に，本研究で取り扱う船体構造部材の形状は複雑であり，その方法を弾塑性応力分布の解析に適用することは非常に困難である。

近年，電子計算機の発達に伴って非常に有用な解析法として注目を集めている数値解析法に有

限要素法がある。本論文ではこの有限要素法を用いて船体構造部材に生じる弾塑性応力分布を解析する。

第1節の緒言に続いて，第2節では平板の弾塑性応力分布解析理論を展開するが，まず，2.1では弾性および塑性域における応力とひずみの関係および降伏条件について述べる。2．2では2．1の基本式を基に弾塑性応力分布を解析する基礎理論を展開する。2．3では有限要素法による弾塑性応力分布の解析法を述べる。

第3節では開孔を有する板の模型実験を行なって，弾塑性応力分布を計測し，有限要素法による解と比較して本法の有用性を検討する。

表1．1　クラックの形状別分類

場所＼クラック形状	C	D	E	F	P	Q	R	計
SIDE SHELL TRANSVERSE	2	79	51	15	1		98	246
LONG.B HD TRANSVERSE	1	70	36	2	2		187	298
BOTTOM TRANSVERSE	15	140	39	3	323	16	854	1390
HORIZONTAL GIRDER	25	72	2					99
計	43	361	128	20	326	16	1139	2033

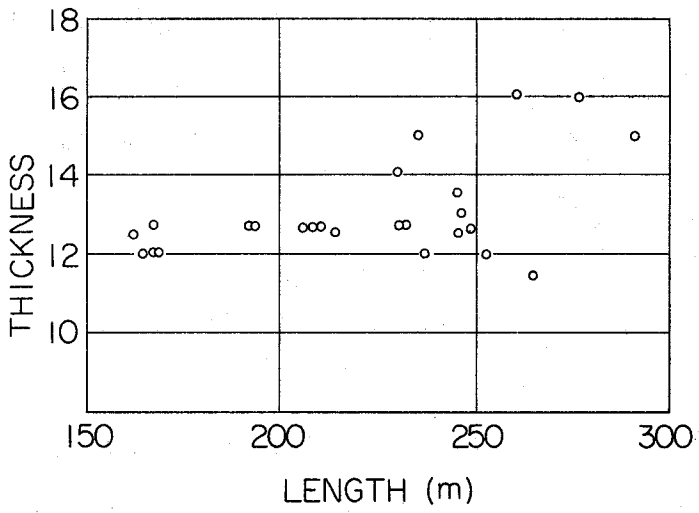


図1．1　油槽船の船長とウエブ板厚

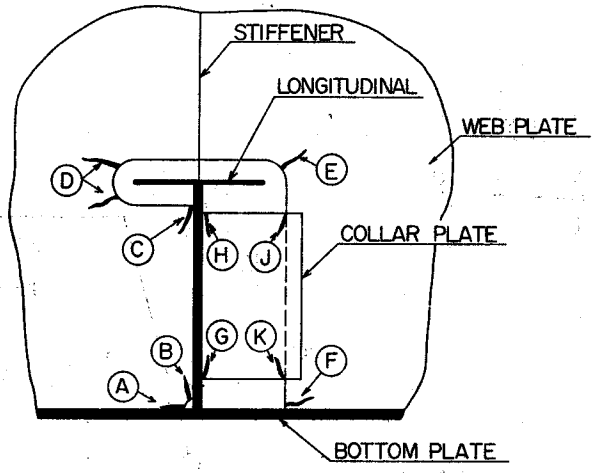


図１．２　油槽船の横桁リングのクラック

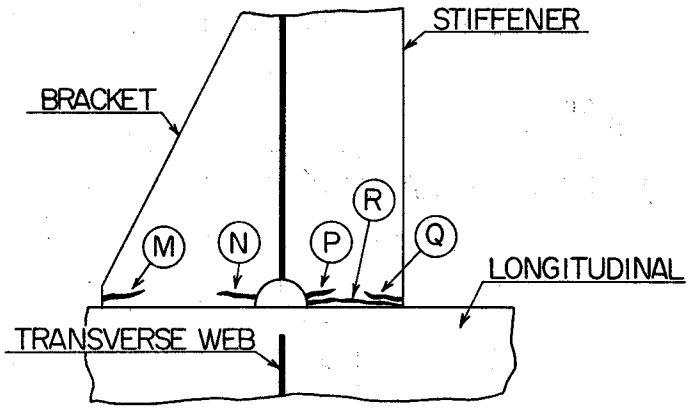


図１．３　油槽船の横桁リングのクラック

2.　弾塑性応力分布解析理論

２．１　理論の前提条件および仮定

２．１．１　応力・ひずみ関係

一般に構造部材の変形と応力を解析する場合には，材料の弾性および塑性域における応力・ひずみ関係が定義されねばならない。

材料の基本的な応力・ひずみ関係は通常単軸の引張試験を行なって決定される。一般にひずみ硬化体に対しては応力・ひずみ関係は図２．１(*a*)のようになる。本研究で取り扱う材料が主に鋼であり，低ひずみ領域であるから，応力・ひずみ関係を図２．１(*b*)のように理想弾塑性体と考え

ることにする。

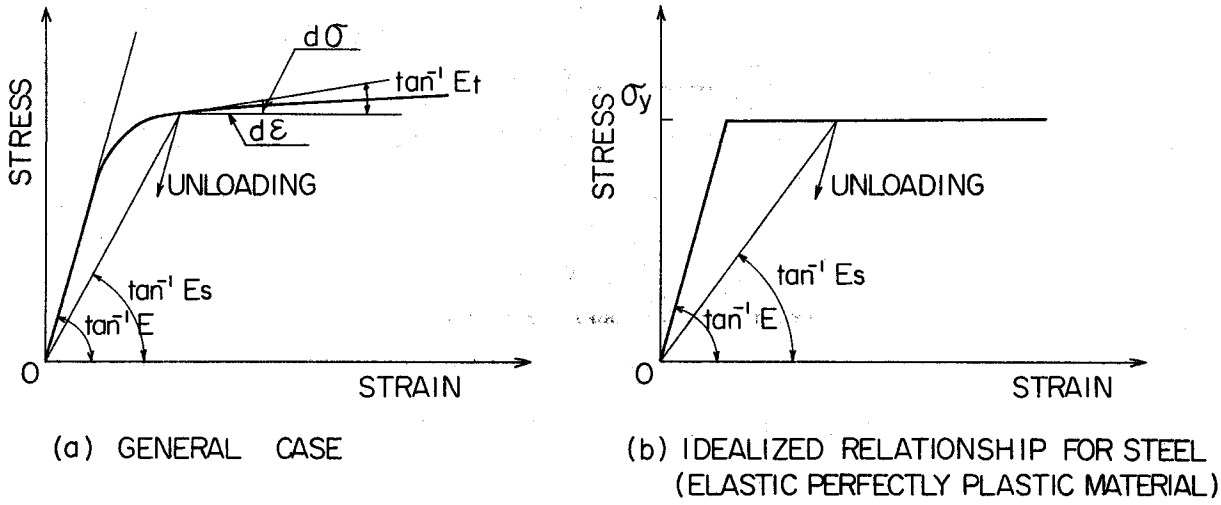


図２．１　応力とひずみの関係

２．１．２　弾　性　域[11]

均質，等方性材料が弾性域にある場合の応力・ひずみ関係はフックの法則に従うと次式で与えられる。

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{xy} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{zx} \end{Bmatrix} = \frac{E}{1+\nu}\left[D^e \right] \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \end{Bmatrix} \tag{2.1}$$

ここで

$$\left[D^e \right] = \begin{bmatrix} \frac{1-\nu}{1-2\nu} & \frac{\nu}{1-2\nu} & \frac{\nu}{1-2\nu} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\nu}{1-2\nu} & \frac{1-\nu}{1-2\nu} & \frac{\nu}{1-2\nu} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\nu}{1-2\nu} & \frac{\nu}{1-2\nu} & \frac{1-\nu}{1-2\nu} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \tag{2.2}$$

ε_x , ε_y , ε_z , γ_{xy} , γ_{yz} , γ_{zx} ：ひずみ成分

σ_x , σ_y , σ_z , τ_{xy} , τ_{yz} , τ_{zx} ：応力成分

E ：縦弾性係数

ν ：ポアソン比

また取り扱う問題が平面応力状態である場合には上式は次のように簡単になる。

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = E\,[\,D^e\,] \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \tag{2.3}$$

ここで

$$[\,D^e\,] = \frac{1}{1-\nu^2} \begin{pmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (1-\nu)/2 \end{pmatrix} \tag{2.4}$$

2．1．3　降伏条件[12]

応力が小さい間は材料の挙動は弾性的であるが，応力がある値に達すると塑性化する。また，ひとたび塑性化した材料が除荷によって弾性的な挙動を示すようになる応力の値に対する制限が降伏条件である。

いま，材料は等方性であると仮定しているので，降伏条件はその応力値を表わす座標の変換に無関係な不変量で表示できる。また一様な静水圧を加えても塑性変形が生じないということが知られている，この場合，平均応力は変化するが偏差応力は変らないということから降伏条件は通常応力偏差による不変量で表わされる。この代表的なものにミーゼスの降伏条件[13]とトレスカの降伏条件[14]がある。

本研究では材料の降伏はミーゼスの降伏条件に従うものとするとその条件式は一般に次式で与えられる。

$$[\,(\sigma_x-\sigma_y)^2+(\sigma_y-\sigma_z)^2+(\sigma_z-\sigma_x)^2+6\,(\tau_{xy}^2+\tau_{yz}^2+\tau_{zx}^2)\,] = 2\,\sigma_Y^2 \tag{2.5}$$

ここで

σ_Y ：単軸の場合の降伏応力

平面応力状態の場合に（2．5）式は次式のようになる。

$$\sigma_x^2-\sigma_x\sigma_y+\sigma_y^2+3\,\tau_{xy}^2=\sigma_Y^2 \tag{2.6}$$

2.1.4 塑性域

材料が2.1.3節で述べた降伏条件を満足した後，さらに負荷されひずみが増加する場合には，材料は塑性変形をする。材料の塑性域での挙動を解析するための応力・ひずみ関係の代表的なものには塑性変形理論と塑性流れ理論がある。

塑性変形理論によると[15]，塑性域における材料は比例荷重のもとでは等方性であり，偏差応力成分は偏差ひずみ成分を用いて下式のように表わされると考える。

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x' \\ \sigma_y' \\ \sigma_z' \\ \tau_{xy} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{zx} \end{Bmatrix} = \frac{E_s}{1+\nu_p} [D^s] \begin{Bmatrix} \varepsilon_x' \\ \varepsilon_y' \\ \varepsilon_z' \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \end{Bmatrix} \tag{2.7}$$

ここで

$$[D^s] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2 \end{bmatrix} \tag{2.8}$$

σ_x'，σ_y'，σ_z'：偏差応力成分

ε_x'，ε_y'，ε_z'：偏差ひずみ成分

$\sigma_x' = \sigma_x - \sigma$，$\sigma_y' = \sigma_y - \sigma$，$\sigma_z' = \sigma_z - \sigma$

$\sigma = \frac{1}{3}(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z)$

$\varepsilon_x' = \varepsilon_x - \varepsilon$，$\varepsilon_y' = \varepsilon_y - \varepsilon$，$\varepsilon_z' = \varepsilon_z - \varepsilon$

$\varepsilon = \frac{1}{3}(\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z)$

$E_s = \sigma_I / \varepsilon_I$

$$\sigma_I = \sqrt{\frac{1}{2}\left[(\sigma_x-\sigma_y)^2 + (\sigma_y-\sigma_z)^2 + (\sigma_z-\sigma_x)^2\right] + 3(\tau_{xy}^2+\tau_{yz}^2+\tau_{zx}^2)}$$

$$\varepsilon_I = \frac{2}{\sqrt{3}}\sqrt{\frac{1}{6}\left[(\varepsilon_x-\varepsilon_y)^2 + (\varepsilon_y-\varepsilon_z)^2 + (\varepsilon_z-\varepsilon_x)^2\right] + \frac{1}{4}(\gamma_{xy}^2+\gamma_{yz}^2+\gamma_{zx}^2)}$$

ν_p：塑性域におけるポアソン比（＝0.5）　　(2.9)

この関係は平面応力状態に対しては次のようにかける。

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = E_s \left[D^s \right] \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \tag{2.10}$$

ここで

$$\left[D^s \right] = \frac{1}{1-\nu_p^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu_p & 0 \\ \nu_p & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (1-\nu_p)/2 \end{bmatrix} \tag{2.11}$$

$$\sigma_I = \sqrt{\sigma_x^2 - \sigma_x \sigma_y + \sigma_y^2 + 3\tau_{xy}^2}$$

$$\varepsilon_I = \frac{2}{\sqrt{3}} \sqrt{\varepsilon_x^2 + \varepsilon_x \varepsilon_y + \varepsilon_y^2 + \frac{1}{4}\gamma_{xy}^2}$$

つぎに，除荷過程においては，材料は弾性的であると考えると，その応力の変化量とひずみの変化量の関係は

$$\begin{Bmatrix} d\sigma_x \\ d\sigma_y \\ d\tau_{xy} \end{Bmatrix} = E \left[D^e \right] \begin{Bmatrix} d\varepsilon_x \\ d\varepsilon_y \\ d\gamma_{xy} \end{Bmatrix} \tag{2.12}$$

一方，塑性域における塑性流れ理論[16][17]によると，応力およびひずみの増分の関係は次のように書ける。[18]

$$\begin{Bmatrix} d\sigma_x \\ d\sigma_y \\ d\sigma_z \\ d\tau_{xy} \\ d\tau_{yz} \\ d\tau_{zx} \end{Bmatrix} = \frac{E}{1+\nu} \left[D^f \right] \begin{Bmatrix} d\varepsilon_x \\ d\varepsilon_y \\ d\varepsilon_z \\ d\gamma_{xy} \\ d\gamma_{yz} \\ d\gamma_{zx} \end{Bmatrix} \tag{2.13}$$

ここで

$$\left[D^f \right] = \begin{bmatrix} \frac{1-\nu}{1-2\nu} - \frac{\sigma_x'^2}{S}, & & Sym. \\ \frac{\nu}{1-2\nu} - \frac{\sigma_x'\sigma_y'}{S}, & \frac{1-\nu}{1-2\nu} - \frac{\sigma_y'^2}{S}, & \end{bmatrix}$$

$$
\left\{
\begin{array}{lllll}
\dfrac{\nu}{1-2\nu}-\dfrac{\sigma_x'\sigma_z'}{S}, & \dfrac{\nu}{1-2\nu}-\dfrac{\sigma_y'\sigma_z'}{S}, & \dfrac{1-\nu}{1-2\nu}-\dfrac{\sigma_z'^2}{S}, & & \\
-\dfrac{\sigma_x'\tau_{xy}}{S}, & -\dfrac{\sigma_y'\tau_{xy}}{S}, & -\dfrac{\sigma_z'\tau_{xy}}{S}, & \dfrac{1}{2}-\dfrac{\tau_{xy}^2}{S}, & \\
-\dfrac{\sigma_x'\tau_{yz}}{S}, & -\dfrac{\sigma_y'\tau_{yz}}{S}, & -\dfrac{\sigma_z'\tau_{yz}}{S}, & -\dfrac{\tau_{xy}\tau_{yz}}{S}, & \dfrac{1}{2}-\dfrac{\tau_{yz}^2}{S} \\
-\dfrac{\sigma_x'\tau_{zx}}{S}, & -\dfrac{\sigma_y'\tau_{zx}}{S}, & -\dfrac{\sigma_z'\tau_{zx}}{S}, & -\dfrac{\tau_{xy}\tau_{zx}}{S}, & -\dfrac{\tau_{yz}\tau_{zx}}{S}, \quad \dfrac{1}{2}-\dfrac{\tau_{zx}^2}{S}
\end{array}
\right\}
$$

$$
S=\frac{2}{3}\sigma_I^2 \qquad (2.14)
$$

上式は平面応力状態に対して次のように簡単に書ける。

$$
\begin{Bmatrix} d\sigma_x \\ d\sigma_y \\ d\tau_{xy} \end{Bmatrix} = E\left[D^f\right] \begin{Bmatrix} d\varepsilon_x \\ d\varepsilon_y \\ d\gamma_{xy} \end{Bmatrix} \qquad (2.15)
$$

ここで

$$
\left[D^f\right]=\frac{1}{Q}\begin{bmatrix}
\sigma_y'^2+2P & -\sigma_x'\sigma_y'+2\nu P & -\dfrac{\sigma_x'+\nu\sigma_y'}{1+\nu}\tau_{xy} \\
-\sigma_x'\sigma_y'+2\nu P & \sigma_x'^2+2P & -\dfrac{\sigma_y'+\nu\sigma_x'}{1+\nu}\tau_{xy} \\
-\dfrac{\sigma_x'+\nu\sigma_y'}{1+\nu}\tau_{xy} & -\dfrac{\sigma_y'+\nu\sigma_x'}{1+\nu}\tau_{xy} & \dfrac{R}{2(1+\nu)}
\end{bmatrix}
$$

$$
P=\frac{\tau_{xy}^2}{1+\nu}
$$

$$
Q=R+2(1-\nu^2)P
$$

$$
R=\sigma_x'^2+2\nu\sigma_x'\sigma_y'+\sigma_y'^2 \qquad (2.16)
$$

この場合にも除荷時には弾性的であると考えると

$$
\begin{Bmatrix} d\sigma_x \\ d\sigma_y \\ d\tau_{xy} \end{Bmatrix} = E\left[D^e\right] \begin{Bmatrix} d\varepsilon_x \\ d\varepsilon_y \\ d\gamma_{xy} \end{Bmatrix} \qquad (2.17)
$$

2．2 基礎理論

図2．2に示した微少要素 $dx \cdot dy \cdot dz$ の力の釣合より，次の平衡条件式が得られる。

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + X = 0 \\
&\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} + Y = 0 \\
&\frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + Z = 0
\end{aligned}\right\} \qquad (2.18)$$

ここで

X，Y，Z：単位体積当りの物体力成分

物体の表面における力の釣合より

$$\left.\begin{aligned}
F_x &= \sigma_x \cdot l + \tau_{xy} \cdot m + \tau_{xz} \cdot n \\
F_y &= \tau_{xy} \cdot l + \sigma_y \cdot m + \tau_{yz} \cdot n \\
F_z &= \tau_{zx} \cdot l + \tau_{yz} \cdot m + \sigma_z \cdot n
\end{aligned}\right\} \qquad (2.19)$$

ここで　F_x，F_y，F_z：単位面積当りの表面力成分

l，m，n：物体表面の外向きの法線の方向余弦

一方，変位とひずみの関係は次式で表わされる。

$$\left.\begin{aligned}
\varepsilon_x &= \partial u / \partial x \\
\varepsilon_y &= \partial v / \partial y \\
\varepsilon_z &= \partial w / \partial z \\
\gamma_{xy} &= \partial v / \partial x + \partial u / \partial y \\
\gamma_{yz} &= \partial w / \partial y + \partial v / \partial z \\
\gamma_{zx} &= \partial u / \partial z + \partial w / \partial x
\end{aligned}\right\} \qquad (2.20)$$

ここで　u，v，w：変位成分

上式から変位u，vおよびwを消去すると，次の適合条件式が得られる。

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} \\
&\frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{yz}}{\partial y \partial z} \\
&\frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{zx}}{\partial z \partial x} \\
&2\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y \partial z} = \frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial y} + \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z}\right)
\end{aligned}\right\} \qquad (2.21)$$

$$2\frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x \partial z} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} - \frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial y} + \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z}\right)$$

$$2\frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial y} - \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z}\right)$$

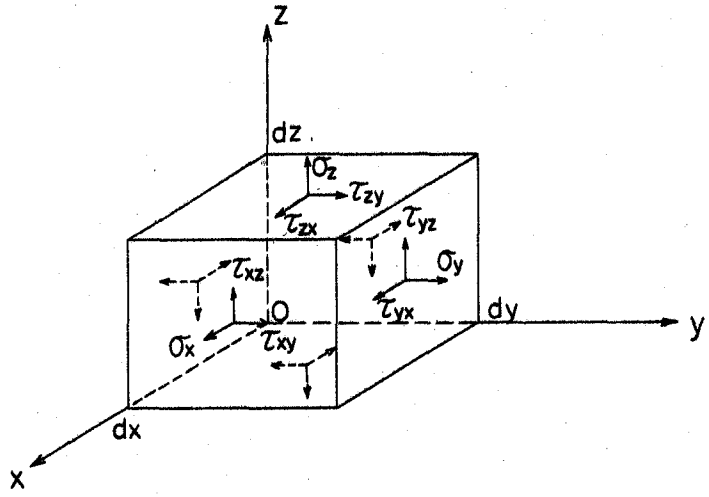


図２．２　応力成分

平面応力状態の場合に上式は次の簡単な形になる。すなわち，平衡方程式では物体力を無視すると

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} &= 0 \\ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} &= 0 \end{aligned}\right\} \qquad (2.22)$$

境界条件式は

$$\left.\begin{aligned} F_x &= \sigma_x \cdot l + \tau_{xy} \cdot m \\ F_y &= \tau_{xy} \cdot l + \sigma_y \cdot m \end{aligned}\right\} \qquad (2.23)$$

さらに，適合条件式は

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} \qquad (2.24)$$

平面応力場の応力解析には (2.22)，(2.23) および (2.24) 式に加えて，２．１節で述べた応力・ひずみの関係式を用いて弾性および塑性それぞれについて有限要素法の解析のための基礎方程式をつくる。

2．2．1　弾性域

材料が弾性的挙動を示している場合には（2．3），（2．22）および（2．24）式はエアリーの応力関数Fを用いると

$$\frac{\partial^4 F}{\partial x^4}+2\frac{\partial^4 F}{\partial x^2\partial y^2}+\frac{\partial^4 F}{\partial y^4}=0 \qquad (2.25)$$

ここで

$$\sigma_x=\frac{\partial^2 F}{\partial y^2} \qquad \tau_{xy}=-\frac{\partial^2 F}{\partial x\partial y} \qquad \sigma_y=\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \qquad (2.26)$$

（2．25）式を満足するFを境界条件（2．23）式によって決定すれば，（2．26）式より応力成分が得られる。

2．2．2　塑性域

塑性域での応力・ひずみの関係が塑性変形理論で表わされる場合，（2．10），（2・22)および（2．24）式はエアリーの応力関数Fを用いて，弾性域の場合と同じく

$$\frac{\partial^4 F}{\partial x^4}+2\frac{\partial^4 F}{\partial x^2\partial y^2}+\frac{\partial^4 F}{\partial y^4}=0 \qquad (2.27)$$

一方，塑性域における塑性流れ理論によると，（2．15）（2．22）および（2．24）式はエアリーの応力関数Fを用いて

$$\frac{\partial^4 F}{\partial x^4}+2\frac{\partial^4 F}{\partial x^2\partial y^2}+\frac{\partial^4 F}{\partial y^4}+E\left\{\frac{\partial^2}{\partial y^2}\int_0^{\varepsilon_x^p}d\varepsilon_x^p+\frac{\partial^2}{\partial x^2}\int_0^{\varepsilon_y^p}d\varepsilon_y^p\right.$$

$$\left.-2\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}\int_0^{\gamma_{xy}^p}d\gamma_{xy}^p\right\}=0 \qquad (2.28)$$

ここで　$\varepsilon_x{}^p$，$\varepsilon_y{}^p$，$\gamma_{xy}{}^p$　：塑性ひずみ成分

$d\varepsilon_x{}^p$，$d\varepsilon_y{}^p$，$d\gamma_{xy}{}^p$：塑性ひずみ増分成分でありロイスの式[17]によって次のように書ける。

$$d\varepsilon_x{}^p=\sigma_x'\,d\lambda$$

$$d\varepsilon_y{}^p=\sigma_y'\,d\lambda$$

$$d\gamma_{xy}{}^p=\tau_{xy}\,d\lambda$$

$$d\lambda=\frac{3}{2}\frac{1}{\sigma_I}d\varepsilon_I^p$$

$$d\varepsilon_I^p=\frac{2}{3}\frac{\sigma_I}{Q}\left[(\sigma_x'+\nu\sigma_y')\,d\varepsilon_x+(\sigma_y'+\nu\sigma_x')\,d\varepsilon_y\right.$$

$$\left.+(1-\nu)\,\tau_{xy}\,d\gamma_{xy}\right] \qquad (2.29)$$

結局，塑性域での応力分布は（2．27）又は（2．28）式を満足するFを与えられた境界条件によって決定すれば得ることができる。

2．2．3　弾塑性応力分布

これまでに述べた弾性および塑性応力分布では，板は一様に弾性状態にあるか，もしくは塑性状態にある場合について考えた。しかしながら，一般に，応力成分σ_x，σ_yおよびτ_{xy}の分布は一定ではなく，荷重の増加と共に，局部的に塑性部分が生じる。このような弾性部分と塑性部分とが混在した弾塑性応力分布を求めるためには弾性部分に対しては（2．25）式，塑性部分に対しては（2．27）または（2．28）式を適用し，各領域の境界で変位および応力の連続条件を考慮して解を求めることになる。通常，このような弾塑性応力状態にある平板の応力分布をこれまでに示した微分方程式から計算することは非常に難しいので本研究では，次項で示す有限要素法によって解析を行なう。

2．2．4　解析法

平板が面内荷重を受けて弾塑性挙動を示す場合に，その弾塑性応力分布は境界値問題の解として得られる。このような問題では，通常，与えられた微分方程式を直接解き，それらが境界条件を満足する解を求める。

しかし，一般に平板の応力分布に関する問題で微分方程式を直接解くことが可能な荷重および支持条件の場合は少なく，特に本研究で取り扱う応力集中部の弾塑性応力分布の問題では非常に難しい。

このような問題に対する解法としては，これまで主に微分方程式を差分方程式に置き換えて解く方法[20]，その他，微分方程式の近似解を級数によって得る方法等がある。これらの方法に対し，近年構造物の解析で特に注目を集めている数値解析法に有限要素法[21]がある。

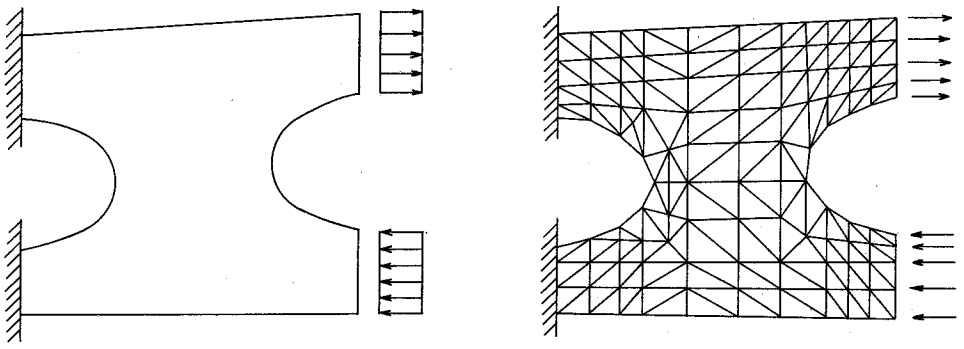
本研究では，有限要素法を用いて応力集中部をもつ平面応力状態の板の弾塑性応力分布を解析する。

2．3　有限要素法による解法

2．3．1　基礎理論

有限要素法では，解析の対象としている構造物を適当な形状（例えば3角形または矩形等）の有限要素に分割し，各々の要素がそれぞれの節点で他の要素と結合された集合体であると考える（図2．3）。

ここでは，平板をQ個の3角形の有限要素に分割し，図2．4に示す第N第目の要素について次の諸量を定義する。



(a) ACTUAL STRUCTURE　　(b) IDEALIZED MODEL

図２．３　有限要素

頂点の座標	(x_i, y_i), (x_j, y_j), (x_k, y_k)
頂点の変位	(u_i, v_i), (u_j, v_j), (u_k, v_k)
頂点に作用する外力	(f_i, g_i), (f_j, g_j), (f_k, g_k)

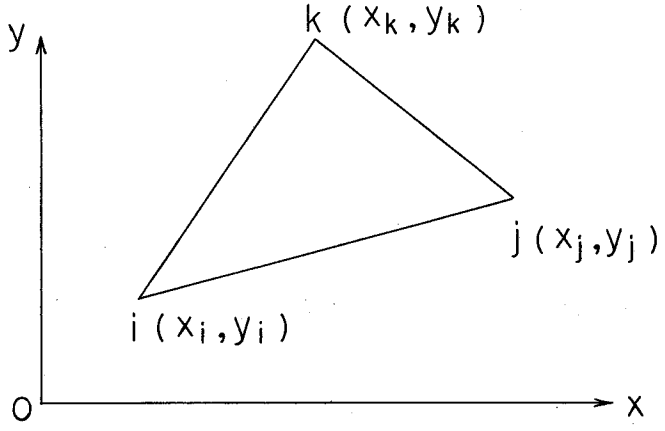


図２．４　第N有限要素

3角形要素内の任意の点における変位$\{v\}$は，変位関数$[M]$を用いて次式で表わせる。

$$\{v\} = [M(x, y)]\{\alpha\} \tag{2.30}$$

ここで

$$[M(x, y)] = \begin{bmatrix} 1 & x & y & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & x & y \end{bmatrix} \tag{2.31}$$

$\{\alpha\}$：一般化座標

頂点の変位 $\{ v_N \}$ は（2．30）式に各項点の座標を代入して

$$\{ v_N \} = [T_1] \{ \alpha \} \tag{2.32}$$

ここで

$$[T_1] = \begin{bmatrix} 1 & x_i & y_i & 0 & 0 & 0 \\ 1 & x_j & y_j & 0 & 0 & 0 \\ 1 & x_k & y_k & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & x_i & y_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 & x_j & y_j \\ 0 & 0 & 0 & 1 & x_k & y_k \end{bmatrix} \tag{2.33}$$

要素内のひずみ $\{ \varepsilon \}$ は（2．30）式を偏微分して

$$\{ \varepsilon \} = \begin{Bmatrix} \dfrac{\partial u}{\partial x} \\ \dfrac{\partial v}{\partial x} \\ \dfrac{\partial u}{\partial y} + \dfrac{\partial v}{\partial x} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = [B] \{ \alpha \} = [B] [T_1]^{-1} \{ v_N \} \tag{2.34}$$

ここで

$$[B] = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \tag{2.35}$$

（2．34）式から明らかなようにひずみ成分の値は要素内で一定値をとる。

要素内の応力 $\{ \sigma \}$ は材料の特性によってひずみ $\{ \varepsilon \}$ を用いて次のように書ける。

材料が等方性で弾性域の場合，応力 $\{ \sigma \}$ は（2．3）式より

$$\{ \sigma \} = \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = [D_0] \{ \varepsilon \} \tag{2.36}$$

ここで

$$[D_0] = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (1-\nu)/2 \end{bmatrix} \tag{2.37}$$

材料が塑性域にある場合，応力・ひずみ関係に塑性流れ理論を用いると（2．15）式より

$$\{ d\sigma \} = [D_p^f] \{ d\varepsilon \} \qquad (2.38)$$

ここで

$$[D_p^f] = E \cdot [D^f] \qquad (2.39)$$

一方，応力・ひずみ関係に塑性変形理論を用いると（2．10）式より

$$\{ \sigma \} = [D_p^s] \{ \varepsilon \} \qquad (2.40)$$

ここで　$[D_p^s] = E_s \cdot [D^s]$　（2．41）

（2．36），（2．38）および（2．40）式から明らかなように要素内の応力成分の値はひずみ成分と同様一定値であり，一様応力状態になっていることがわかる。

要素の剛性行列（一般化座標で表示）は仮想変位の定理を適用して次式で与えられる

$$[\bar{k}] = \int_{vol} [B]^T [D][B] dV \qquad (2.42)$$

一般化座標から座変変換して x y 座標で表わすと，剛性行列は

$$[k] = [A^{-1}]^T [\bar{k}][A^{-1}] \qquad (2.43)$$

有限要素の集合体の板の平衡方程式は，与えられた節点外力 $\{ R \}$ と節点に生じる変位 $\{ r \}$ を用いて

$$[K] \{ r \} = \{ R \} \qquad (2.44)$$

となる。ここで $[K]$ は板全体の剛性行列であり，各々の要素の剛性行列をそれぞれ結合されている節点で集合したものであり次のように書ける。

$$[K] = \sum k_i \qquad (2.45)$$

（2．44）式を与えられた境界条件のもとで解くと変位 $\{ r \}$ が得られ，それより（2．34）および（2．36），（2．38）あるいは（2．40）式を用いると応力分布が得られる。

2．3．2　計算法

有限要素法を用いて平板の弾塑性応力分布を解析する場合には，平板を有限要素に分割し，有限要素の形状に応じて適当な変位関数を用いて，各有限要素に対する剛性行列を求める。次に，それらを平板全体について集合し，板全体の剛性行列を計算して，最後に平衡方程式（2．44）を得る。この平衡方程式は変位に関する1次多元連立方程式になっている。

平板に作用する外力が小さい間は板は弾性的な挙動をするが，外力の増加に伴って局部的に塑性域が生じる。有限要素の塑性化はミーゼスの降伏条件（2．6）式を用いて検討される。

弾性応力解析は（2．37）式と（2．43）式を各要素に適用し，平板全体の平衡方程式を得てそれを解いて行なう。要素内の応力が一様であるから，弾性解析の結果より最初に塑性化する要

素がわかる。

塑性化した要素のそれ以後の応力増分とひずみ増分の関係は，（2．39）あるいは（2．41）式から明らかなように，各瞬間の要素の応力成分の関数になっている。塑性域における応力増分とひずみ増分の関係を用いて平衡方程式（2．44）を作成すると，その方程式は非線型代数方程式になる。非線型代数方程式の解法としては代表的な2つの方法すなわち反復法と荷重漸増法とがある。

反復法は，緩和法を用いて一度に最終状態を求める方法であり，その計算法は次のようになる。すなわち非線型代数方程式の係数を線型項と非線型項に分離して，まず非線型項を無視して線型代数方程式を解いて第1近似解を求める。つぎにこの解を初期値として非線型項の影響を考慮して第2近似解を求める。この操作を繰り返して第n近似解と第（$n-1$）近似解の差が許容範囲内におさまるまで計算を続ける。

構造解析の分野においては，非線型材料を取り扱う場合あるいは大変形の影響を考慮した場合等に平衡方程式は非線型となる。

材料の非線型を考慮した場合，塑性流れ理論では，応力と塑性ひずみ（もしくは全ひずみ）の間には1対1の対応がないが，応力と塑性ひずみ増分との間には対応関係がある。そのために，荷重が初期状態から最終状態まで変化する間の応力およびひずみの径路を追跡しなければならない。従って，材料の非線型を考慮した場合には，反復法よりは次に述べる荷重漸増法の方が都合がよい。

荷重漸増法は荷重増分が微少な範囲では，非線型項は変化しないと仮定すると，与えられた方程式は線型方程式と見做すことができ，その解は容易に得られる。この場合得られる解の精度は荷重増分の大きさに影響されるが，本法の特徴は幾何学的な非線型のみならず材料の非線型を考慮した場合にも適用が可能という点にある。

ここでは，荷重漸増法を用いて，塑性化した要素の応力増分とひずみ増分の関係に対しては塑性流れ理論による（2．39）式が次の荷重増加に対しては一定であると考えて，塑性化していない弾性の要素に対しては（2．37）式を適用して，弾性の場合とまったく同じ手法によって計算を行なうと第2番目に塑性化する要素および荷重が得られる。

3. 開孔を有する板の弾塑性応力分布

船体では構造が不連続に変化する部分および重量軽減のために設ける軽目孔あるいは部材が互いに交差する時に部材を貫通させるために設ける孔等の近傍に応力集中が生じる。

一方，緒言で述べたように油槽船の大形化に伴って構造部材に作用する外力が大きくなったにもかかわらず部材の板厚はあまり増加していない。したがって，部材の平均応力は増加して，上記の応力集中部に塑性応力分布が生じる可能性が高い。

そこで，船体構造によく用いられる構造様式の試験片を製作し，本論文で詳述した有限要素法による応力集中部の弾塑性応力解析法の適用性を検討するため模型実験を実施した。実験と同じ負荷状態で模型の弾塑性応力分布を計算して実験結果と比較し，この解析法の有効性を検討する。

3．1　引張り試験

3．1．1　模型

模型の材料は軟鋼（ＳＳ－４１）でその機械的性質は表３．１に示す。

模型の形状は図３．１に示すように，正方形平板（１５０^{mm}×１５０^{mm}×５^{mm}）であり，その中央

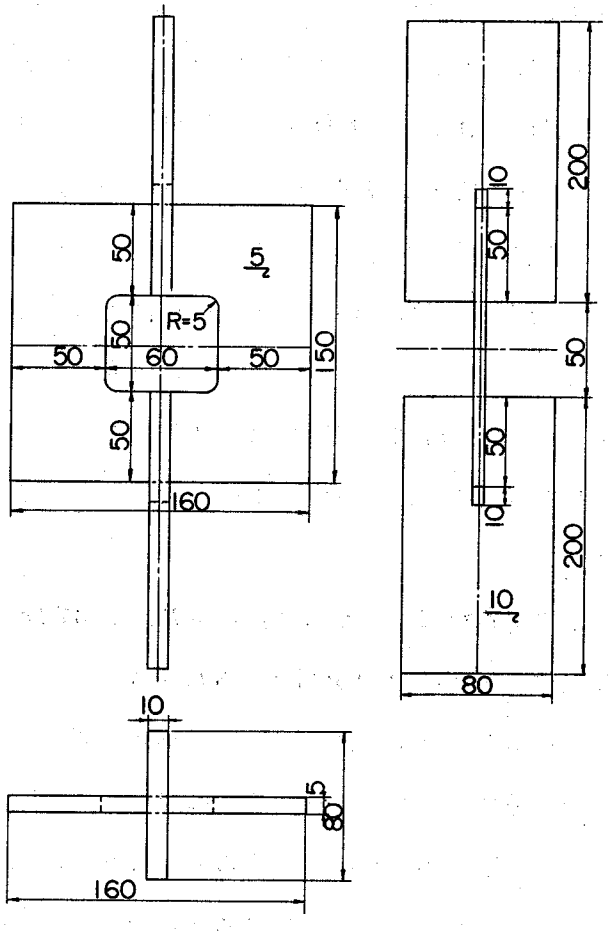


図３．１　試験片

に５０㎜×５０㎜の開孔がある。模型は溶接で組み立てた後，余盛り形状が応力分布に影響を与えないように機械仕上げを行なった。また模型を溶接で組み立てる時に生じる残留応力の影響を除くために応力焼鈍を行なって残留応力を除去した。

表３．１　模型の機械的性質

ヤング率（E）	20830.0　Kg／㎟
降伏応力（σ_Y）	30.0　Kg／㎟

３．１．２　実験方法

実験は５０トン定変位型試験機を用いて試験片に引張り荷重を与えた。

電気抵抗線ひずみ計およびダイアル・ゲージを用いて各荷重段階で試験片に生じるひずみおよび伸びを計測した。また，ここで特に問題としている塑性域の広がりを計測するために塑性応力塗料（関西ペイント製，ダイラーA，B）を試験片の表面に塗布して，荷重によるひずみの増加に伴って塗料に生じるきれつによって塑性域の広がりを観測した。

塑性応力塗料はカルシウム分が約２４％の石灰ロジンを主成分とした樹脂であり，ひずみが一定値に達すると引張主応力に直角にきれつが生じる。応力塗料のきれつ感度は塗膜厚さによって大きく左右される。本実験では応力塗料の密着性を良くするために下塗り塗料を用いて，この塗料の膜厚を変えて塑性応力塗料にきれつの入るひずみを制御した。応力塗料は塗布後加熱乾燥の必要があるので実験の前日に塗布し約１２時間赤外線ランプで加熱乾燥した。

また，各荷重段階における主ひずみおよび塑性域の拡大を調べるために，各荷重以前に発生したきれつを消去するために，応力塗料は加熱すると軟化し弾性的になるという特性を利用した。すなわち，一度除荷した試験片に塑性応力塗料を塗り直した後，加熱状態のまま，前回加えた荷重付近まで荷重を作用させ，そこで冷却して応力塗料が再びその性能を回復したところで更に負荷して純粋に各荷重段階のみの主ひずみの方向および塑性域の広がりを調べた。

３．１．３　実験結果

引張り荷重Pと試験片の伸びδを図３．２にまた荷重Pが4.67 ton，５．６７tonおよび7.40 tonにおいて塑性応力塗料に入ったきれつを図３．３に示す。

図３．２および３．３より明らかなように，荷重Pが小さい間は試験片は弾性域にあり，荷重Pと試験片の伸びδは直線関係にあるが，荷重の増加に伴い，応力塗料にきれつが生じ試験片に塑性域の生じたことがわかる。荷重がさらに増加すると，試験片には大きな伸びδが生じ，荷重と伸びの関係は非線型になり，また応力塗料に生じるきれつの領域が拡大し塑性域が進展して行

くことが明確に観測される。

また，電気抵抗線ひずみ計によって計測されたひずみ分布を図３．４に図示する。

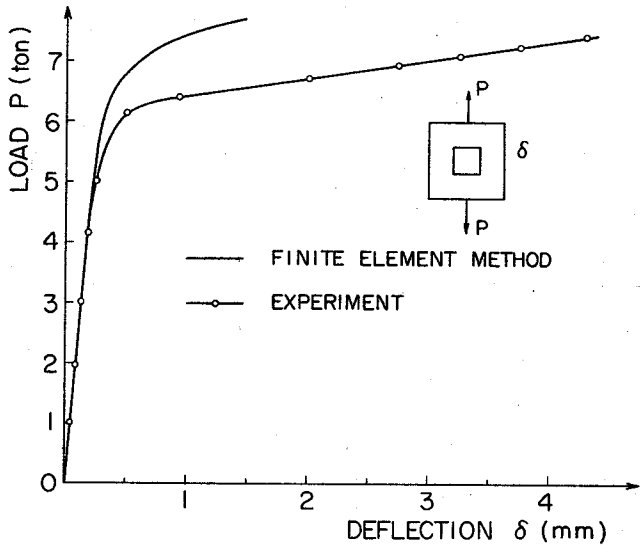


図３．２　荷重～伸び曲線

３．２　理論解析

３．２．１　境界条件

本実験の理論解析には２．３で展開した有限要素法に基づく弾塑性応力解析法を適用する。

試験片は図３．１に示すように，２本の対称軸を有しているので，その対称性を利用して全体の¼の領域を解析の対象として，図３．５に示すように試験片を有限要素に分割した。本解析では塑性応力域の広がりを調べるのが主目的であり，応力の集中度を求めることを目的としていないので同図に示す程度の有限要素の分割は十分小さいと考えられる。

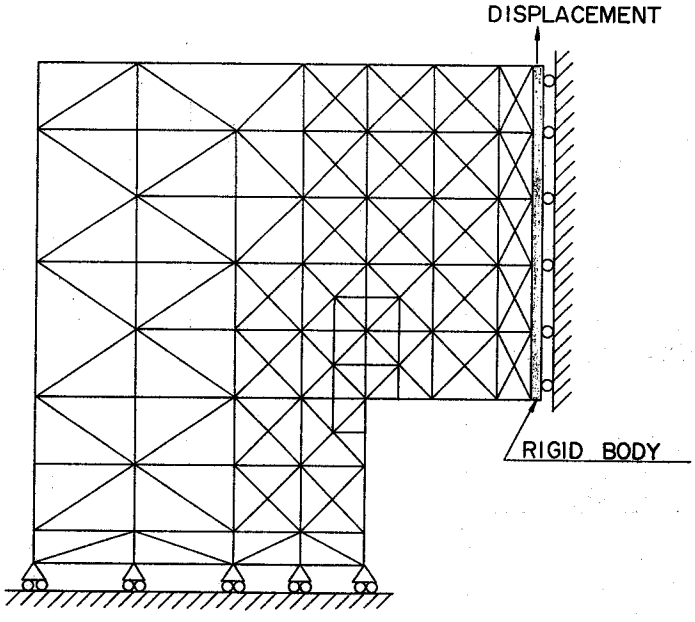
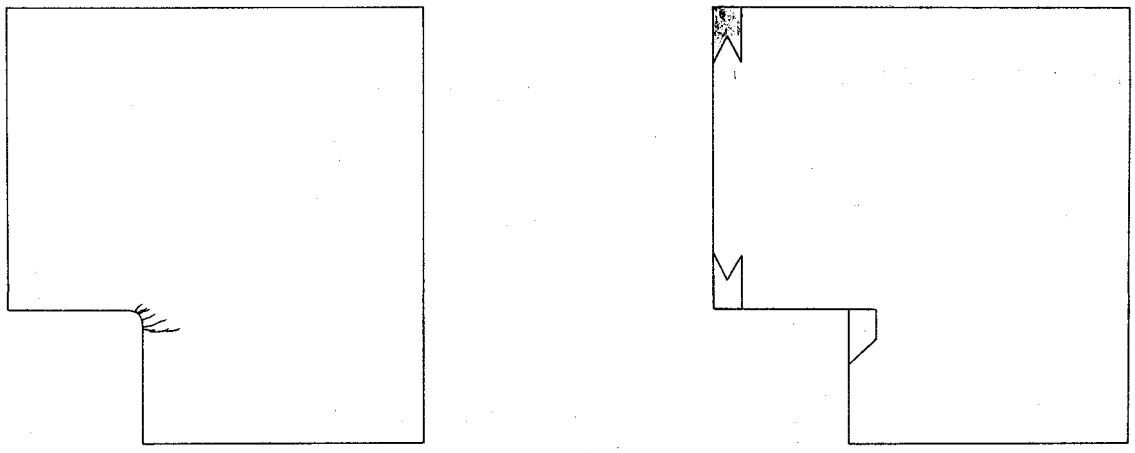
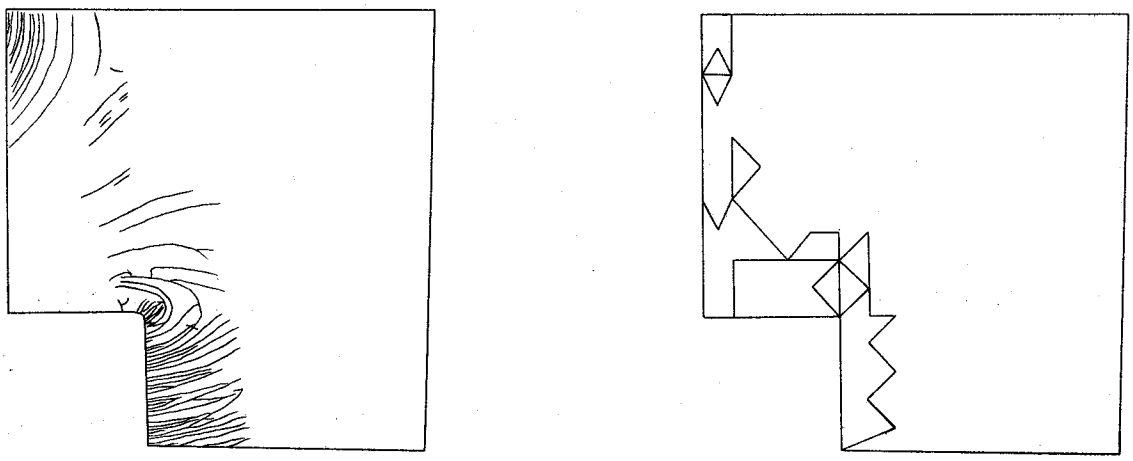


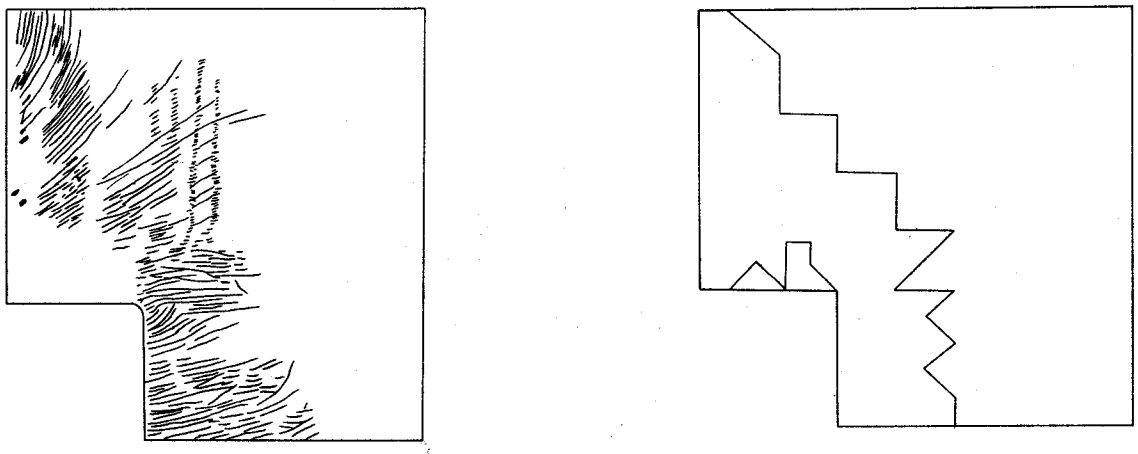
図３．５　境界条件



(a)　$P = 4.67\ ton$



(b)　$P = 5.67\ ton$



(C)　$P = 7.40\ ton$

図３．３　塑性域の広がり

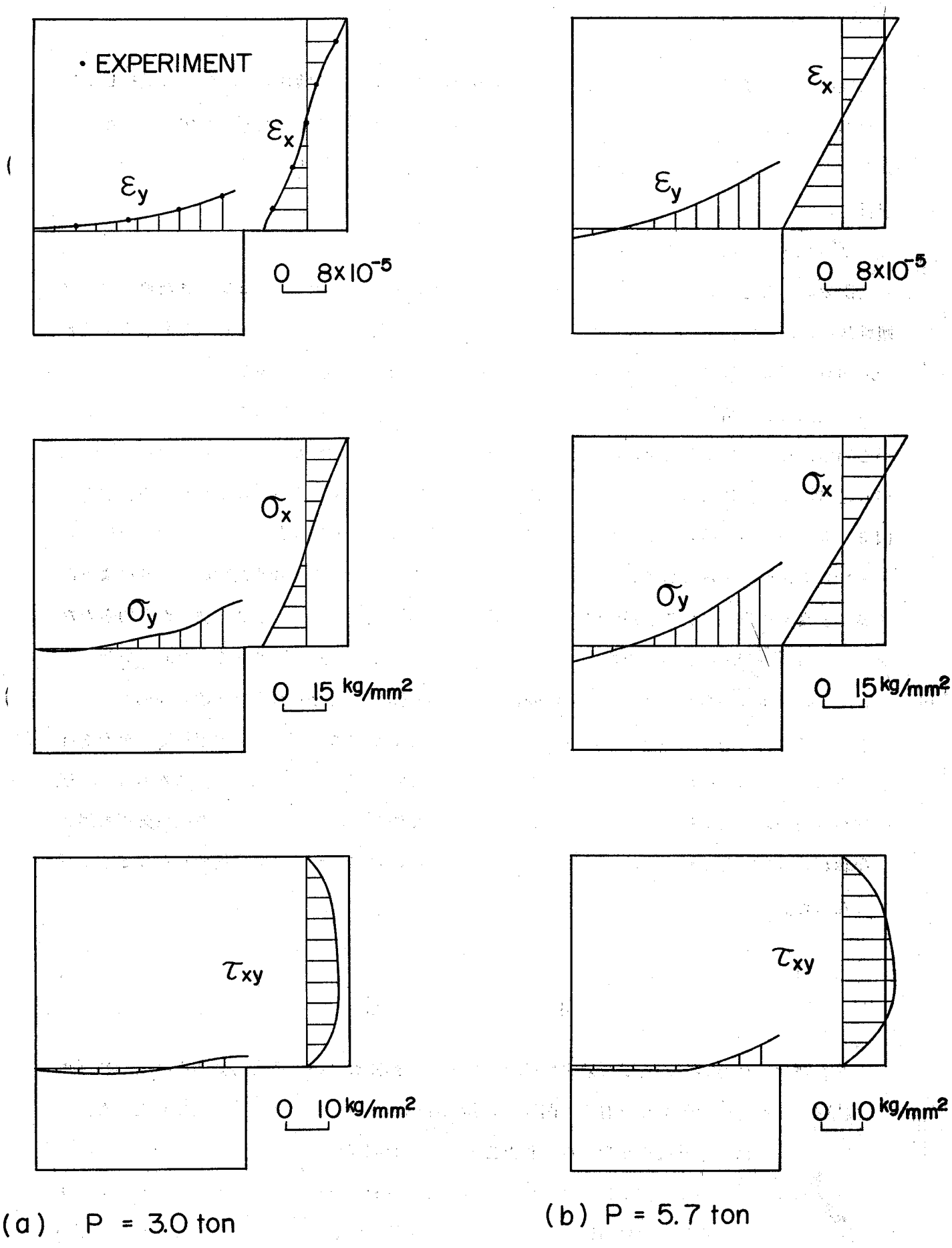


図３．４　応力およびひずみ分布

試験片には図３．１に図示するように板厚１０㎜のつかみ板を試験片の対称軸上に溶接し，このつかみ板を介して負荷しているので，試験片には対称軸上で一様な強制変位が生じていると考えられる。そこで荷重は試験片の対称軸上で一様な強制変位が作用するように与えて応力分布の解析を行なう。

３．２．２　解析結果および考察

有限要素法を適用して得られた荷重Pと試験片の伸びδの関係を図３．２に，また弾性および塑性域における応力とひずみの分布を図３．４に示す，さらに荷重の増加と共に拡大する塑性域の広がりを図３．３に図示する。同図では塑性化した要素を黒く塗りつぶしてある。

解析結果と実験結果を比較すると，本研究の主目的である塑性応力分布に関しては，図３．３から明らかなように，各荷重段階において応力塗料に生じるきれつによって決定された塑性域の広がりと有限要素法によって計算された塑性域の広がりは良く一致していることがわかる。また，図３．４の結果から明らかなように弾性域における試験片のひずみ分布，従って応力分布は，これまでにも確かめられているように，有限要素法による解析結果は電気抵抗線ひずみ計による計測結果と良く一致している。最後に，荷重と試験片の伸びの関係も図３．２の結果から明らかなように，有限要素法による解析結果とダイアル・ゲージによる計測結果は良く一致している。

以上の結果より明らかなように，有限要素法に基づく弾塑性応力分布解析法は弾性応力分布の解析だけでなく，塑性応力分布の解析にも適用が可能で，非常に良い精度で弾塑性応力分布を計算できることが明らかになった。特に，有限要素法は形状が複雑で応力集中部がある場合の弾塑性応力分布の解析にも適用が可能であることが本研究で明らかになったので，有限要素法を用いて船体構造部材の弾塑性応力分布を解析して，局部強度の評価を充分良い精度で行なうことが可能になった。

4.　総　　括

第２編第２章においては有限要素法に基づいて平板の弾性および塑性応力分布を理論的に解析する方法を述べ，応力集中部を有する開孔板の弾塑性応力分布の実験と理論解析を行なった。

以下においては，第２編第２章で得られた主要な結論を記述する。

第１節の緒言に続いて，第２節では平板の弾塑性応力分布の解析法を述べた。すなわち，2.1では弾性域および塑性域における応力とひずみの関係を塑性流れ理論および塑性変形理論を用いて述べ，さらに降伏条件について述べた。２．２では弾性応力分布，塑性応力分布および弾塑性

応力分布の基礎理論を述べ，２．３では有限要素法による，弾性および塑性応力分布の解析法を述べた。

第３節では，応力集中部を有する開孔試験片の引張り試験を行ない，ひずみ分布，塑性域の広がりおよび伸びを計測した。そして，有限要素法を基にして作成した弾塑性応力分布解析用プログラムを用いて開孔試験片の弾塑性応力分布を解析して得られたひずみ分布，塑性域の広がりおよび試験片の伸びを計測値と比較し，両者が非常に良く一致する事を確かめた。その結果，有限要素法に基づく弾塑性応力分布の解析法は応力集中部の弾塑性応力分布の解析に対して充分良い精度で適用できることが判明した。

従って，有限要素法を弾塑性応力分布の解析に適用することによって，船体構造部材の中で部分的に塑性応力が生じていると考えられる応力集中部に発生するクラツクあるいは弾塑性局部座屈等の損傷の原因を究明し，その発生を防止することが可能になる。

第3章　座屈強度

1.　緒　　言

構造物が外力の作用のもとで弾性的な変形をしている時，外力と部材内部に生じている内力とは釣り合っており，通常，その釣り合いは安定である。ところが，外力を増加していった場合にその変形形式での釣り合いが安定なものでなく，同じ荷重のもとで他の安定な変形形式が存在することがある。このようにして，荷重・変形関係において，1つの荷重のもとで2つの釣り合い状態が存在する現象を“座屈”と呼んでいる。[22]

本章においては，有限要素法を基に，平板の弾塑性座屈強度理論を展開し，第2編第2章で述べた弾性，弾塑性および塑性応力分布の解析法を用いて，弾塑性座屈強度の解析法を確立する。さらに，本法を用いて船体各部の座屈強度を解析する。

第1節の緒言に続いて，第2節では平板の弾性および塑性座屈理論について述べ，さらに残留応力分布を有する平板の弾性および塑性座屈理論を述べる。第3節では複雑な弾塑性座屈問題に対する有限要素法の適用性を検討する。

第4節では，大形油槽船で特に問題になる横桁リングのウエブの座屈強度を有限要素法を用いて解析して，ウエブに設けられた開孔（スロット）が座屈強度に及ぼす影響を明らかにする。

第5節では，横桁リングのウエブ以外の他の船体各部の座屈強度を解析する，また，残留応力が溶接組立柱の板要素の弾性，弾塑性および塑性座屈におよぼす影響を調べる。

2.　平板の弾塑性座屈理論

2．1　平板の弾塑性座屈理論

2．1．1　弾性座屈

まず，1枚の平板に図2．1に示す面内荷重（圧縮，曲げ，せん断またはそれらの組み合せ荷重）が作用する時に生じる応力が弾性応力である場合は，荷重が増加してある値に達すると平板は座屈して横撓みを生じた場合の平衡方程式は，次のような仮定のもとで導かれる。[22]

(1)　変形または変位とひずみの関係は，変形が微少であり，その間には線形関係が成立する。

(2)　変形または変位は微少であり，力の釣り合いは変形前の物体の形状ならびに状態に対して成立する。

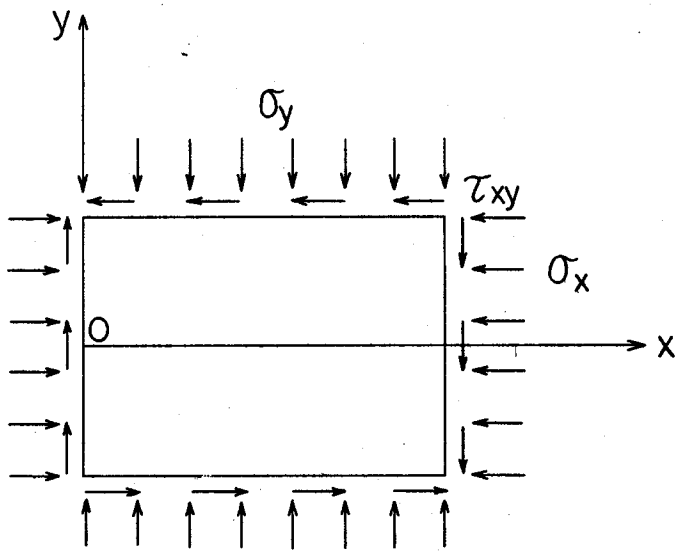


図２．１　応力成分

この場合の平衡方程式は次の微分方程式で与えられる。

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = -\frac{t}{D}\left[\sigma_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + 2\tau_{xy}\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + \sigma_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right] \tag{2.1}$$

ここで

$$D = \frac{E t^3}{12(1-\nu^2)}$$

w：板の横撓み

t：板厚

E：ヤング率

ν：ポアソン比

σ_x，σ_y，τ_{xy}：平板が座屈した時に作用している応力成分

従って，この平板が与えられた境界条件のもとで座屈する場合には，上式の解を境界条件を満足するための条件式に代入すると，境界値問題としての固有値方程式を得る。その固有値方程式の解が座屈値を与える。

次に，板要素からなる部材の局部座屈強度について考える。この場合に対して，このような板要素からなる部材の断面形状は閉断面と開断面であるが，これらは局部座屈強度の解析に関しては全く同様に取り扱うことができる。そこで，次の仮定を設ける。[23]

(1)　部材は外力を受けて局部座屈し，局部座屈以外の座屈は生じない。

(2)　板要素が接合されている線上では，横撓みは生じない。

(3) 板要素の接合線上において互になす角は変化しない。

(4) 連続している板要素の座屈波長は，いずれも同じである。

このような仮定を設けると，部材が局部座屈する時に，連続する板要素は接合線に対して直角方向の回転角と曲げモーメントは連続しなければならない。すなわち，i 番目および（$i+1$）番目の板要素の接合線上での連続条件は，

$$\left.\begin{aligned} M_i &= M_{i+1} \\ \theta_i &= \theta_{i+1} \end{aligned}\right\} \qquad (2.2)$$

通常，部材が外力を受けた場合の応力分布は各部材で必ずしも同じではないが，これらの部材の局部座屈は座屈直前の釣り合い状態での応力分布によって決定される。従って，部材の局部座屈強度を解析する場合は，各板要素の応力分布を求め，座屈の平衡方程式（2．1）式を解いて各板要素の境界条件および連続条件を考慮した固有値方程式の解として座屈値が求まる。

2．1．2 塑性座屈

平板が外力のもとで降伏し塑性応力状態になった場合には，塑性域での応力・ひずみ関係が弾性域での関係と異なるために，平板が面内荷重を受けて座屈し，横撓みを生じる場合の平衡方程式が弾性座屈に対するものと異なってくる。

この問題に対して，まず *Bleich* は，単純圧縮を受ける平板の塑性座屈の場合について考え，平板が塑性化すると，材料は異方性を示すと考えた。そして，荷重方向にはヤング率 E が減少するので，換算係数 α_t を用い，荷重と直角方向にはまだ弾性的であるとし，捩りに対して修正係数を用いて，座屈の平衡方程式として次の式を得た。[24]

$$\alpha_t \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2\sqrt{\alpha_t}\,\frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = -\frac{t}{D}\,\sigma_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \qquad (2.3)$$

ここで

$\alpha_t = E_t / E$ （換算係数）

$E_t = d\sigma / d\epsilon$ （接線係数）

その後，塑性学の発展に伴って，塑性学を基礎とした平板の塑性座屈理論が発表された。第1編第2章で述べたように，塑性学においては，材料の応力・ひずみ関係を定める理論として，塑性変形理論と塑性流れ理論がある。これらの応力・ひずみ関係をもとにして，弾性座屈の理論を導いた場合と同じ手順で，塑性座屈に対する平衡方程式を導くことができる。

一般に，塑性座屈において，その座屈荷重は接線係数荷重と換算係数荷重とで表わされている。[24] このことを，まず，直直な柱または板が一様圧縮を受ける場合について考えると，荷重の増加に

よって，ある荷重で座屈して，もとの平衡状態から他の平衡状態に移る場合に，座屈変形によって圧縮ひずみと引張りひずみが生じる，すなわち，ひずみの反転が生じる。このひずみの反転を考慮に入れて計算すると，換算係数荷重が得られる。一方，接線係数荷重は，柱あるいは板が座屈する場合にも荷重の増加があり，それによるひずみの増加が座屈変形によって生じる引張りひずみを打ち消して，断面内のひずみは，常に，圧縮で，座屈によってひずみの反転がないとする *Shanley* の考え[25]に基礎を置いている。一般に，接線係数荷重が実際の塑性座屈値を与えるものと考えられている[26]。

本研究における板の塑性座屈に対しても，上述のように，座屈時には板のどの点においてもひずみの反転がないと考えて，座屈の平衡方程式を導く。

今，平板は面内応力によって降伏しており，降伏条件を満足する応力成分を σ_{x0}，σ_{y0}，τ_{xy0} とする。

塑性変形理論を用いると，座屈の平衡方程式は

$$C_1 \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} - C_2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^3 \partial y} + C_3 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} - C_4 \frac{\partial^4 w}{\partial x \partial y^3} + C_5 \frac{\partial^4 w}{\partial y^4}$$

$$= -\frac{t}{D_d} \left\{ \sigma_{x0} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + 2\,\tau_{xy0} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + \sigma_{y0} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right\} \qquad (2.4)$$

ここで

$$\left.\begin{aligned}
&\sigma_{x0}^2 - \sigma_{x0}\sigma_{y0} + \sigma_{y0}^2 + 3\,\tau_{xy0}^2 = \sigma_Y^2 \\
&c_1 = 1 - (1-\nu_p^2)\frac{\sigma_{x0}^2}{\sigma_I^2} \\
&c_2 = 4\,(1-\nu_p^2)\frac{\sigma_{x0}\,\tau_{xy0}}{\sigma_I^2} \\
&c_3 = c_3' + c_3'' \\
&c_3' = 2\left\{(1-\nu_p) - 2\,(1-\nu_p^2)\frac{\tau_{xy0}^2}{\sigma_I^2}\right\} \\
&c_3'' = 2\left\{\nu_p - (1-\nu_p^2)\frac{\sigma_{x0}\sigma_{y0}}{\sigma_I^2}\right\} \\
&c_4 = 4\,(1-\nu_p^2)\frac{\sigma_{y0}\cdot\tau_{xy0}}{\sigma_I^2} \\
&c_5 = 1 - (1-\nu_p^2)\frac{\sigma_{y0}^2}{\sigma_I^2}
\end{aligned}\right\} \qquad (2.5)$$

$$D_d = \frac{E_s \cdot t^3}{12(1-\nu_p^2)}$$

つぎに，塑性域での応力・ひずみ関係に塑性流れ理論を適用すると[31][32]，

$$c_6 \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} - c_7 \frac{\partial^4 w}{\partial x^3 \partial y} + c_8 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} - c_9 \frac{\partial^4 w}{\partial x \partial y^3} + c_{10} \frac{\partial^4 w}{\partial y^4}$$

$$= -\frac{t}{D_f} \left\{ \sigma_{x0} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + 2\tau_{xy0} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + \sigma_{y0} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right\} \qquad (2.6)$$

ここで

$$c_6 = \left(\frac{1}{F}\right) \left\{ (1-\nu^2)(-\sigma_{x0} + 2\sigma_{y0})^2 + 18(1-\nu)\tau_{xy0}^2 \right\}$$

$$c_7 = \left(\frac{1}{F}\right) \left\{ (1-\nu^2)(\sigma_{x0} + \sigma_{y0}) + 3(1-\nu)^2(\sigma_{x0} - \sigma_{y0}) \right\} 6\tau_{xy0}$$

$$c_8 = c_8' + c_8''$$

$$c_8' = \left(\frac{1}{F}\right) \left\{ (1-\nu^2)(\sigma_{x0} + \sigma_{y0})^2 + 9(1-\nu)^2(\sigma_{x0} - \sigma_{y0})^2 \right\} \qquad (2.7)$$

$$c_8'' = \left(\frac{1}{F}\right) \left\{ 2(1-\nu^2)(2\sigma_{x0} - \sigma_{y0})(\sigma_{x0} - 2\sigma_{y0}) + 36\nu\tau_{xy0}^2 \right\}$$

$$c_9 = \left(\frac{1}{F}\right) 6\tau_{xy0} \left\{ (1-\nu^2)(\sigma_{x0} + \sigma_{y0}) - 3(1-\nu)^2(\sigma_{x0} - \sigma_{y0}) \right\}$$

$$c_{10} = \left(\frac{1}{F}\right) \left\{ (1-\nu^2)(2\sigma_{x0} - \sigma_{y0})^2 + 18(1-\nu)\tau_{xy0}^2 \right\}$$

$$F = \frac{1+\nu}{2}(\sigma_{x0} + \sigma_{y0})^2 + \frac{9(1-\nu)}{2}(\sigma_{x0} - \sigma_{y0})^2 + 18(1-\nu)\tau_{xy0}^2$$

$$D_f = \frac{E_t \cdot t^3}{12(1-\nu^2)}$$

平板の塑性座屈強度は（2．4）又は（2．6）式を，弾性座屈の場合と全く同じ手法で解いて得られる。また，板要素から構成された部材の塑性域における局部座屈強度も，弾性局部座屈において設けたと同じ仮定および解析法を適用して解析できる。

2．1．3　弾塑性座屈

2．1．1および2．1．2で述べた弾性および塑性座屈では，平板の全領域が弾性域にあるか，あるいは塑性域にある場合の平衡方程式を導出した。しかし，一般に，外荷重によって生じる応力分布σ_x，σ_yおよびτ_{xy}は板面内で一様ではなく，荷重の増加に伴って，部分的に塑性領域が生じる。このように，弾性域と塑性域が混在した状態では，平板に弾塑性座屈が生じる場合がある。この場合，弾性域に対しては（2．1）式，塑性域に対しては（2．4）または(2．6)

式を適用して，各領域の境界で変位および応力が連続するという条件のもとで解析する。

2．2　残留応力が存在する場合の弾塑性座屈理論

2．2．1　弾性座屈

これまでに述べた座屈理論では，外力によって生じる応力成分σ_x，σ_yおよびτ_{xy}は外力と共に比例的に増大すると仮定していた，しかし，その応力分布については何らの制限も付されていなかつた。つまり，これらの応力成分が，平板の各点で異なった値を持つ場合に対しても(2．1)式が適用できる。

次に，外荷重が比例的でなく，2段階にそれぞれ異なった荷重が負荷された場合を考えることにする。

第1段階で与えられた外力によって，板に生じた弾性応力成分をσ_{x1}，σ_{y1}およびτ_{xy1}とする。次に，この応力状態に，さらに，第2段階の外力を与えた結果生じる弾性応力成分をσ_{x2}，σ_{y2}およびτ_{xy2}とする。第2段階の荷重が与えられた後に，面内に生じている応力は，板が弾性範囲であると，それぞれの応力成分の和として（$\sigma_{x1}+\sigma_{x2}$），（$\sigma_{y1}+\sigma_{y2}$）および（$\tau_{xy1}+\tau_{xy2}$）となる。

このような応力状態にある板の座屈の平衡方程式は

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4}+2\frac{\partial^4 w}{\partial x^2\partial y^2}+\frac{\partial^4 w}{\partial y^4}=-\frac{t}{D}\left\{(\sigma_{x1}+\sigma_{x2})\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right.$$

$$\left.+2(\tau_{xy1}+\tau_{xy2})\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}+(\sigma_{y1}+\sigma_{y2})\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right\} \qquad (2.8)$$

今，1段階において，与えられた荷重によって生じた応力成分σ_{x1}，σ_{y1}およびτ_{xy1}を残留応力成分であると考えると，(2．8) 式は残留応力を有する平板の弾性座屈に対する平衡方程式となる。（2．8）式で，σ_{x1}，σ_{y1}，τ_{xy1}の応力分布とσ_{x2}，σ_{y2}，τ_{xy2}の応力分布は，一般に同じではない。すなわち，

$$\frac{\sigma_{x1}+\sigma_{x2}}{\sigma_{x2}}\neq\frac{\sigma_{y1}+\sigma_{y2}}{\sigma_{y2}}\neq\frac{\tau_{xy1}+\tau_{xy2}}{\tau_{xy2}} \qquad (2.9)$$

である。従って，$\sigma_{x1}=\sigma_{y1}=\tau_{xy1}=0$の場合の応力分布と異なった応力分布となり，(2．8) 式は（2．1）式とは異なった座屈値を与える。

今，（2．8）式の応力成分を次の様に書き換える。

$$\left.\begin{array}{lll}\sigma_{x1}=\sigma_{xr} & \sigma_{y1}=\sigma_{yr} & \tau_{xy1}=\tau_{xyr}\\ \sigma_{x2}=\sigma_{x} & \sigma_{y2}=\sigma_{y} & \tau_{xy2}=\tau_{xy}\end{array}\right\} \qquad (2.10)$$

残留応力を有する平板の弾性座屈に対する平衡方程式は，あらためて，次式になる。

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = -\frac{t}{D}\{(\sigma_{xr}+\sigma_x)\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}$$

$$+2(\tau_{xyr}+\tau_{xy})\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + (\sigma_{yr}+\sigma_y)\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\} \qquad (2.11)$$

ただし

$$(\sigma_{xr}+\sigma_x)^2-(\sigma_{xr}+\sigma_x)(\sigma_{yr}+\sigma_y)+(\sigma_{yr}+\sigma_y)^2+3(\tau_{xyr}+\tau_{xy})^2<\sigma_Y{}^2 \qquad (2.12)$$

この場合，外力による応力成分 σ_x ，σ_y および τ_{xy} は比例的に増大する。すなわち，

$$\sigma_y/\sigma_x=\lambda_1=\text{定数}$$
$$\tau_{xy}/\sigma_x=\lambda_2=\text{定数} \qquad (2.13)$$

である。従って，残留応力 σ_{xr} ，σ_{yr} ，τ_{xyr} を有する平板の座屈荷重は，σ_x ，σ_y ，τ_{xy} を生ぜしめた荷重の大きさで評価できる。

2．2．2　塑性座屈

平板の弾性座屈に及ぼす残留応力の影響を考慮した方法に準じて，塑性座屈に及ぼす残留応力の影響を考える。この場合，平板は到るところで塑性化しているとすると，その応力分布は降伏条件を満足しているので，

$$(\sigma_{xr}+\sigma_x)^2-(\sigma_{xr}+\sigma_x)(\sigma_{yr}+\sigma_y)+(\sigma_{yr}+\sigma_y)^2+3(\tau_{xyr}+\tau_{xy})^2=\sigma_Y{}^2 \qquad (2.14)$$

ここで　$\sigma_{xr}+\sigma_x=\sigma_{x0}$ ，$\tau_{xyr}+\tau_{xy}=\tau_{xy0}$ ，$\sigma_{yr}+\sigma_y=\sigma_{y0}$　(2．15)

と置くと，（2．14）式は

$$\sigma_{x0}{}^2-\sigma_{x0}\sigma_{y0}+\sigma_{y0}{}^2+3\tau_{xy0}^2=\sigma_Y{}^2 \qquad (2.16)$$

塑性域における応力・ひずみの関係に塑性変形理論を用いると，残留応力を有する平板の塑性座屈の平衡方程式は，

$$c_1\frac{\partial^4 w}{\partial x^4}-c_2\frac{\partial^4 w}{\partial x^3 \partial y}+c_3\frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2}-c_4\frac{\partial^4 w}{\partial x \partial y^3}+c_5\frac{\partial^4 w}{\partial y^4}$$

$$=-\frac{t}{D_d}\{\sigma_{x0}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+2\tau_{xy0}\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}+\sigma_{y0}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\} \qquad (2.17)$$

一方，塑性流れ理論を用いると，

$$c_6 \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} - c_7 \frac{\partial^4 w}{\partial x^3 \partial y} + c_8 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} - c_9 \frac{\partial^4 w}{\partial x \partial y^3} + c_{10} \frac{\partial^4 w}{\partial y^4}$$

$$= -\frac{t}{D_f} \left\{ \sigma_{x0} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + 2\tau_{xy0} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + \sigma_{y0} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right\} \qquad (2.18)$$

従って，塑性座屈強度を評価する場合には，本研究で仮定しているような完全弾塑性体の材料に対しては，その座屈荷重は，平板の到るところで塑性化する荷重の大きさで表わされ，それ以上の荷重には耐え得ないことになる。一方，座屈時の平板内のひずみの大きさは，たとえ座屈荷重が同じ値を示しても，異なった値になり得るので，この座屈ひずみによって平板の塑性座屈強度を論じることができるので，残留ひずみの塑性座屈ひずみにおよぼす影響を検討することができる。

2．2．3　弾塑性座屈

これまでの弾性および塑性座屈では，平板は一様に弾性状態にあるか，もしくは，塑性状態にある場合を考えた。しかし，一般に，残留応力 σ_{xr}，σ_{yr}，τ_{xyr} の分布は板面内で一定ではなく，荷重の増加と共に，局部的に塑性領域が生じる。このように弾性部分と塑性部分とが混在した状態で，弾塑性座屈が生じる場合がある。このような場合には，弾性領域に対しては（2．11）式，塑性領域に対しては（2．17）または（2．18）式を適用して，各領域の境界で変位および応力が連続するという条件のもとで，解を得ることになる。通常，このような状態にある平板の弾塑性座屈強度を，これまでに示した微分方程式から解析することは，一般に難しい。

2．3　解析法

平板が面内荷重を受けて座屈する場合に，その座屈強度は境界値問題の解として求めることができる。このような問題では，普通，与えられた微分方程式を直接解いて，その解が周辺条件を満足するような固有値方程式の有意な解を求める。

一般に，このような方法で，平板の座屈に関した問題で微分方程式から直接座屈強度を得ることができる荷重および支持条件の場合は少なく，特に，本研究で取り扱う船体を構成する板要素に生じる応力分布および支持条件は複雑で，その方法を弾塑性局部座屈問題に適用することは，非常に困難である。

座屈強度解析の近似解法として，工学的に最も有用な方法の一つにエネルギー法[22]がある。また，積分方程式から出発して，座屈強度を得る方法[32]もある。一方，数値解法としてよく知られている解析法に，微分方程式を差分方程式に置換して解く方法がある[33]。この他，近年電子計算機の

発達に伴って非常に有用な解析法として注目を集めている方法に，有限要素法がある。[21]

本論文では，この有限要素法を用いて，新しく平板の弾塑性座屈理論を展開し，種々の問題に適用して，その適用性を検討する。

さらに，本研究では，有限要素法を適用して，これまで明らかにされなかった船体各部の座屈強度を解析する。

3. 有限要素法による解法

3．1 有限要素法による弾性および塑性座屈理論

有限要素法は解析の対象とする構造物（連続体）を物理的な近似により，有限要素にモデル化して，このモデルについて，平衡方程式（連立1次方程式）を作成して，この平衡方程式を解くことによって，数値解を得るものである。

一方，これまでに用いられてきた数値解析法は，数学的な近似によって，解を得るものである。例えば，良く知られている差分方程式による解析では，解析の対象とする構造物に関して作成された平衡方程式（微分方程式）を数学的近似により差分方程式に変換して，この方程式を解いて近似解を得るものである。

3．1．1 基礎式

有限要素法を用いて平板の座屈強度を解析する場合，解析すべき構造物を適当な形状の有限要素に分割するが，ここでは，平板をQ個の三角形有限要素に分割する。第N番目の要素について図3．1に示すように，次の諸量を定義する。

頂点の座標　(x_i, y_i)，(x_j, y_j)，(x_k, y_k)

頂点の撓みおよび傾斜　$(w_i, \theta_{xi}, \theta_{yi})$，$(w_j, \theta_{xj}, \theta_{yj})$，$(w_k, \theta_{xk}, \theta_{yk})$

ここで

$$\theta_x = -\frac{\partial w}{\partial y} \quad , \quad \theta_y = \frac{\partial w}{\partial x}$$

平板が座屈した時に，要素に生じる撓みwは変位関数$[A]$を用いて次式のように書ける。

$$w(x, y) = [A(x, y)]\{r_N\} \tag{3.1}$$

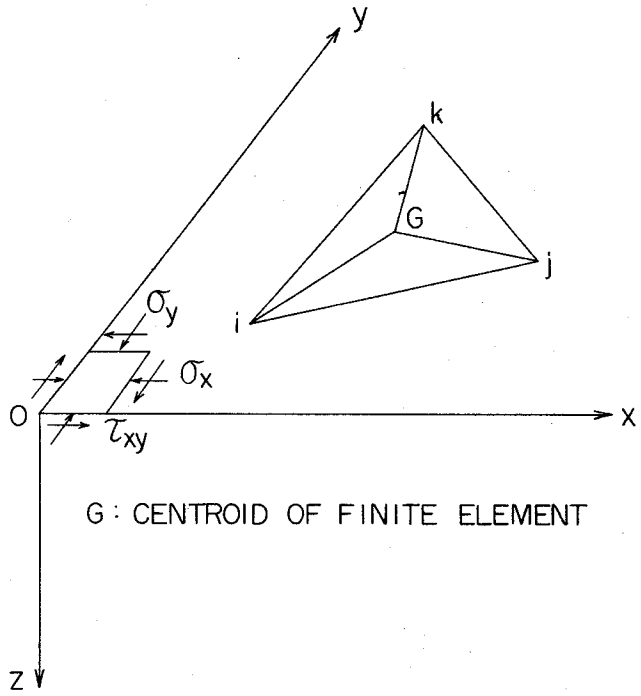


図３．１　第N有限要素

ここで

$$\{ r_N \} = \begin{Bmatrix} r_i \\ r_j \\ r_k \end{Bmatrix} \qquad \{ r_i \} = \begin{Bmatrix} w_i \\ \theta_{xi} \\ \theta_{yi} \end{Bmatrix} \tag{3.2}$$

また，平板が座屈して，横撓みwが生じた時の傾斜$\{ \theta \}$は，撓み（３．１）式を微分して，

$$\{ \theta \} = \begin{Bmatrix} \dfrac{\partial w}{\partial x} \\ \dfrac{\partial w}{\partial y} \end{Bmatrix} = [G] \{ r_N \} \tag{3.3}$$

ここで，$[G]$は傾斜行列であり，

$$[G] = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial A}{\partial x} \\ \dfrac{\partial A}{\partial y} \end{bmatrix}$$

曲率と捩りを表わす行列$\{ \chi \}$は，変位関数$[A]$を微分した$[C]$を用いて，次式で与えられる。

$$\{\chi\} = \begin{Bmatrix} \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\ \dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2} \\ 2\dfrac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \end{Bmatrix} = [C]\{r_N\} \tag{3.4}$$

ここで

$$[C] = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial^2 A}{\partial x^2} \\ \dfrac{\partial^2 A}{\partial y^2} \\ 2\dfrac{\partial^2 A}{\partial x \partial y} \end{bmatrix} \tag{3.5}$$

有限要素に働く曲げおよび捩りモーメント$\{M\}$は（3．4）式を用いて，

$$\{M\} = \begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = [D]\{\chi\} \tag{3.6}$$

ここで，$[D]$は板の曲げ剛性を表わす。

本研究では，板の材料は等方性で，応力・ひずみ関係は弾性域ではフックの法則に，一方，塑性域では，その応力・ひずみ関係は塑性変形理論または塑性流れ理論に従うと考えている。従って，板の曲げ剛性$[D]$は，平板が弾性か，あるいは塑性であるかによって異なる。

板が弾性域の場合，曲げ剛性$[D]$は

$$[D] = D \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \dfrac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \tag{3.7}$$

ここで

$$D = \frac{E t^3}{12(1-\nu^2)}$$

（3．7）式は次のようにも書ける。

$$\left.\begin{aligned} &D(1,1) = D(2,2) = D \\ &D(1,2) = D(2,1) = \nu D \\ &D(3,3) = \frac{1-\nu}{2} D \\ &D(1,3) = D(2,3) = D(3,1) = D(3,2) = 0 \end{aligned}\right\} \tag{3.8}$$

（３．８）式と同様な表示法を用いると，塑性域にある平板の曲げ剛性は，座屈時にひずみの反転がないとして，塑性変形理論を用いると，（２．５）式の c_i を用いて，次式のように書ける。

$$\left.\begin{aligned}
&D(1,1)=c_1\cdot D_d\\
&D(1,2)=D(2,1)=\frac{1}{2}c_3''D_d\\
&D(1,3)=D(3,1)=-\frac{1}{4}c_2\cdot D_d\\
&D(2,2)=c_5D_d\\
&D(2,3)=D(3,2)=-\frac{1}{4}c_4D_d\\
&D(3,3)=\frac{1}{4}c_3'D_d
\end{aligned}\right\}\qquad(3.9)$$

一方，塑性流れ理論を用いて同様に考えると，（２．７）式の c_i を用いて次のように書ける。

$$\left.\begin{aligned}
&D(1,1)=c_6\cdot D_f\\
&D(1,2)=D(2,1)=\frac{1}{2}c_8''\cdot D_f\\
&D(1,3)=D(3,1)=-\frac{1}{4}c_7D_f\\
&D(2,2)=c_{10}\cdot D_f\\
&D(2,3)=D(3,2=-\frac{1}{4}c_9\cdot D_f\\
&D(3,3)=\frac{1}{4}c_8'D_f
\end{aligned}\right\}\qquad(3.10)$$

（３．９）および（３．１０）式を弾性域に対して適用するときには，$E_s=E_t=E$ となるので上式は弾性の剛性の式（３．８）に一致する。従って，塑性に対する剛性の式（３．９）または（３．１０）式を用いて，弾性および塑性域に対する剛性を同時に計算できる。

３．１．２　座屈理論

有限要素法を用いた座屈理論を，変分原理をもとにして展開する。

有限要素の曲げによるひずみエネルギーの変分を δV_N，外力のなす仮想仕事を δW_N とすると，

$$\delta V_N=\iint\delta\{\chi\}^T\{M\}\,dxdy=\delta\{r_N\}^T[K_N]\{r_N\}\qquad(3.11)$$

$$\delta W_N=t\iint\delta\{\theta\}^T[P]\{\theta\}\,dxdy=\delta\{r_N\}^T[K_N']\{r_N\}\qquad(3.12)$$

ここで，$[K_N]$ は有限要素の曲げに対する剛性行列であり，$[K_N']$ は安定係数行列であり，$[P]$ は応力行列で，それぞれ次式で与えられる。

$$[K_N]=\iint[C]^T[D][C]\,dxdy\qquad(3.13)$$

$$[K_N']=t\iint[G]^T[P][G]\,dxdy\qquad(3.14)$$

$$[P]=\begin{bmatrix}\sigma_x & \tau_{xy}\\ \tau_{xy} & \sigma_y\end{bmatrix}\qquad(3.15)$$

応力成分σ_x，σ_y，τ_{xy}の正方向は図３．１に示す。

平板全体に貯えられるひずみエネルギーの変分をδV，外力のなす仮想仕事をδWとすると，

$$\left.\begin{aligned}\delta V &= \sum_{N=1}^{Q} \delta V_N = \delta\{r\}^T[K]\{r\} \\ \delta W &= \sum_{N=1}^{Q} \delta W_N = \delta\{r\}^T[K']\{r\}\end{aligned}\right\} \qquad (3.16)$$

ここで，$[K]$および$[K']$は平板全体の剛性行列および安定係数行列で，各有限要素の値をそれぞれ結合されている節点で集合したものである。

（３．１６）式を用いて，平板の座屈に対する次の仮想仕事の方程式を得る。

$$\delta V - \delta W = \delta\{r\}^T[K - K']\{r\} = 0 \qquad (3.17)$$

ここでは，平板の座屈を考えているので，上式における$\delta\{r\}$は任意の値をとり，零にはならないので，結局，次の座屈に対する固有値方程式の解が座屈値を与える。

$$[K - K']\{r\} = 0 \qquad (3.18)$$

３．１．３　変位関数

有限要素法を用いて，実際の平板の座屈強度を解析する場合に，有限要素の変位関数が定義されなければならない。

一般に，有限要素法を適用した時に，有限要素の分割を細かくしていった時に，有限要素法による解が正解に一様に収束するためには，変位関数は次の条件を満足することが要求される。[21]

(1)　剛体変位によっては，有限要素内でひずみが生じないこと。

(2)　有限要素の周辺で幾何学的連続条件を満足すること。

(3)　有限要素内で一定曲率になり得ること。

これらの条件を満足する変位関数を選び，それを用いて計算した各要素の剛性行列を基にして得られる有限要素法の解析結果は，有限要素の分割を細かくすると，常に，高めから真の座屈応力（または座屈荷重）に一様に収束することが知られている。

本研究では，複雑な形状の板の座屈強度を解析するために，三角形の有限要素を用いる。そして，三角形要素に対して上記３っの条件が完全に満たされる変位関数として，次式で表わされるものを選ぶ。[21]

$$w(x, y) = w^R(x, y) + w^*(x, y) \qquad (3.19)$$

$$w^R(x, y) = [L_i, 0, 0, L_j, 0, 0, L_k, 0, 0] \qquad (3.20)$$

$$w^*(x, y) = [N_{ix}, N_{iy}, N_{jx}, N_{jy}, N_{kx}, N_{ky}][T_2]\{r_N\} \qquad (3.21)$$

ここで

$$
[T_2] = \frac{1}{2\Delta}\begin{bmatrix}
c_i & 2\Delta & 0 & c_j & 0 & 0 & c_k & 0 & 0 \\
-b_i & 0 & 2\Delta & -b_j & 0 & 0 & -b_k & 0 & 0 \\
c_i & 0 & 0 & c_j & 2\Delta & 0 & c_k & 0 & 0 \\
-b_i & 0 & 0 & -b_j & 0 & 2\Delta & -b_k & 0 & 0 \\
c_i & 0 & 0 & c_j & 0 & 0 & c_k & 2\Delta & 0 \\
-b_i & 0 & 0 & -b_j & 0 & 0 & -b_k & 0 & 2\Delta
\end{bmatrix}
$$

$$
\Delta = \frac{1}{2}\begin{vmatrix}
1 & x_i & y_i \\
1 & x_j & y_j \\
1 & x_k & y_k
\end{vmatrix}
$$

$$a_i = x_j y_k - x_k y_j$$

$$b_i = y_j - y_k$$

$$c_i = x_k - x_j$$

$$L_i = (a_i + b_i x + c_i y) / 2\Delta$$

$$N_{ix} = N_{ix0} + b_k \chi_{ik} - b_j \chi_{ij}$$

$$N_{iy} = N_{iy0} + c_k \chi_{ik} - c_j \chi_{ij}$$

$$N_{ix0} = (b_k L_j - b_j L_k) L_i^2 + (b_k - b_j) L_i L_j L_k / 2$$

$$N_{iy0} = (c_k L_j - c_j L_k) L_i^2 + (c_k - c_j) L_i L_j L_k / 2$$

$$\chi_{ij} = -\frac{1}{2}\phi_i + \frac{3}{2}\left[\frac{b_j(b_k - b_i) + c_j(c_k - c_i)}{b_j^2 + c_j^2}\right]\phi_j + \frac{1}{2}\phi_k$$

$$\chi_{ik} = -\frac{1}{2}\phi_i + \frac{1}{2}\phi_j + \frac{3}{2}\left[\frac{b_k(b_j - b_i) + c_k(c_j - c_i)}{b_k^2 + c_k^2}\right]\phi_k$$

$$\phi_i = L_i(5L_i^2 - 3L_i + 6L_j L_k) / 6 \qquad for \quad \Delta Gjk$$

$$\phi_i = L_j^2(3L_k - L_j) / 6 \qquad for \quad \Delta Gki$$

$$\phi_i = L_k^2(3L_j - L_k) / 6 \qquad for \quad \Delta Gij$$

他の値は，添字を $i - j - k$ の順に順番に変えて得る。

3．1．4　計算法

有限要素法を用いて平板の座屈強度を解析する場合，平板を有限要素に分割し，有限要素の形状に応じた適当な変位関数を用いて，各有限要素に対する剛性行列と安定係数行列を求める。それらを板全体について集合すれば，固有値方程式（3．18）を得る。

実際に固有値方程式を解くために，次に示すような式の変換を行なう。

座屈値を平板の限界板厚 t_{cr} として求めるときには，単位板厚の平板に対して計算した剛性行列を K_0 とすると，

$$[K] = c_1 [K_0] \tag{3.22}$$

ここで

$$c_1 = t_{cr}^3 \tag{3.23}$$

一方，座屈値を座屈応力 σ_{cr}（または座屈荷重）として求める場合には，単位板厚の平板に生じた単位応力分布（または単位外力によって生じた応力分布）に対して求めた安定係数行列を $[K_0']$ とすると，

$$[K'] = c_2 [K_0'] \tag{3.24}$$

ここで

$$c_2 = \sigma_{cr} \cdot t_{cr} \tag{3.25}$$

今，$\beta = c_2 / c_1 = \sigma_{cr} / t_{cr}^2$ とおくと，固有値方程式（3．18）は

$$[K_0 - \beta K_0'] \{r\} = 0 \tag{3.26}$$

となる。ここで，β は固有値であり座屈値を与え，$\{r\}$ は固有ベクトルであり座屈波形を与える。

上式から数値計算で解を得るのに，代表的な方法が2つある。

第1の方法は，（3．26）式が有意な解を有するためには，次式が満足されなければならない。すなわち，

$$\left| K_0 - \beta K_0' \right| = 0 \tag{3.27}$$

上式の解 β の最小値が座屈値である。

第2の方法は，乗べき法（*power method*）である。(3.26) 式に $\frac{1}{\beta}[K_0]^{-1}$ を乗じると，

$$\left[\frac{1}{\beta} K_0^{-1} K_0 - K_0^{-1} K_0'\right] \{r\} = 0$$

となり，これより次式を得る。

$$\frac{1}{\beta} \{r\} = [F] \{r\} \tag{3.28}$$

ここで

$$[F] = [K_0]^{-1} [K_0'] \tag{3.29}$$

（３．２８）式において，座屈波形｛r｝の初期値を仮定し，繰り返し計算すると，$1/\beta$の最大値，すなわち座屈値が得られる。本研究では第２の方法，すなわち乗べき法によって固有値方程式を解く。

３．２　残留応力が存在する場合の解析法

通常，残留応力分布は平板内で連続的に変化する。しかし，本研究で用いる有限要素法による弾性および塑性座屈理論では，各有限要素内の応力は一定であると仮定しているので，有限要素法を用いて残留応力を有する平板の座屈強度を解析する場合には，残留応力が各有限要素内で一定であるように平均化したものを使用しなければならない。

このように，有限要素内で一様に分布した残留応力σ_{xr}，σ_{yr}，τ_{xyr}を有する平板に，外力が作用すると，外力によって生じる応力σ_x，σ_y，τ_{xy}が残留応力に重畳される。ただし，この外力による応力も，通常，平板内では連続的に変化するが，本研究における三角形有限要素を用いた応力解析では，要素内の応力は一定であるから，要素内では一定応力になるように操作して，残留応力に付加する。

有限要素内の応力が弾性域にあれば，要素内の応力成分は（$\sigma_x+\sigma_{xr}$），（$\sigma_y+\sigma_{yr}$）および（$\tau_{xy}+\tau_{xyr}$）で与えられ，その曲げ剛性は（３．８）式で与えられる。

しかし，外力によって生じる応力が残留応力に重畳されて要素が降伏する場合には，その要素の応力成分は，次の降伏条件式を満足する σ_{x0}，σ_{y0} および τ_{xy0} となる。

$$\sigma_{x0}^{2}-\sigma_{x0}\,\sigma_{y0}+\sigma_{y0}^{2}+3\,\tau_{xy0}^{2}=\sigma_{Y}^{2} \qquad (3.30)$$

塑性化した要素の曲げ剛性は，（３．９）または（３．１０）式で与えられる。以上で各有限要素の応力成分と曲げ剛性が規定されることになり，これを平板全体について集合して固有値方程式を導き，与えられた境界条件のもとで，固有値方程式を解けばよい。

このようにして，残留応力を有する平板の弾性，弾塑性および塑性座屈強度を得ることができる。

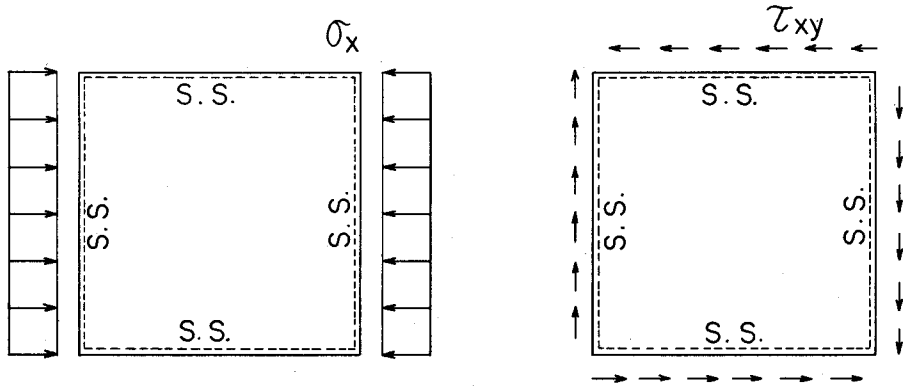
平板要素から組み立てられた部材が，残留応力分布を有する場合の座屈強度の解析は，板要素全部を取り出して解析するか，または，最も座屈しやすい板要素のみを取り出し，その板要素の周辺条件として，他の板要素の影響を考慮する方法を適用することもできる。

３．３　解の精度

本研究で用いる有限要素法では，有限要素の形状は三角形でその変位関数として*Zienkiewicz*らが導いた式（３．１９）を採用する。この場合の解析結果の精度を，基本的な荷重状態である

一様な圧縮応力およびせん断応力を受ける正方形板について，その有限要素の分割数と解の精度との関係を，弾性座屈および塑性座屈について調べる。ここでは，計算の対象とする正方形板を荷重辺でn分割し，他の辺でm分割する。

尚，比較のために*Melosh*が示した矩形の有限要素で*non-conforming*な変位関数[34]も用いて計算する。*Melosh*が導いた変位関数では，隣接する要素の間で，撓みは連続しているが，傾斜の連続条件は満足されていない。



(a) COMPRESSIVE BUCKLING　　(b) SHEAR BUCKLING

図３．２　境界条件

３．３．１　一様圧縮応力の正方形板の座屈

(1)　弾性座屈

取り扱う正方形板の境界条件は，図３．２(*a*)に示すように周辺単純支持である。計算結果を表３．１および図３．３に示す。ここで，平板の座屈強度を次式で表わし，有限要素法による結果を，次式のkで比較する。

$$\sigma_{cr} = k \frac{E\pi^2}{12(1-\nu^2)} \left(\frac{t}{b}\right)^2 \qquad (3.31)$$

計算結果の誤差は有限要素の分割数によって異なるが，１０×１０分割で，１％から２％以下という非常によい精度の解が得られていることを示している。

(2)　塑性座屈

塑性座屈の計算には，塑性変形理論を用いて周辺単純支持の正方形板について行なった。その結果を，表３．２および図３．４に示す。この場合，平板には降伏ひずみε_Yなる圧縮ひずみが生じ，その応力が，丁度，降伏応力σ_Yで塑性座屈したと考えると，$E_s = E$，$\nu_p = 0.5$となる。

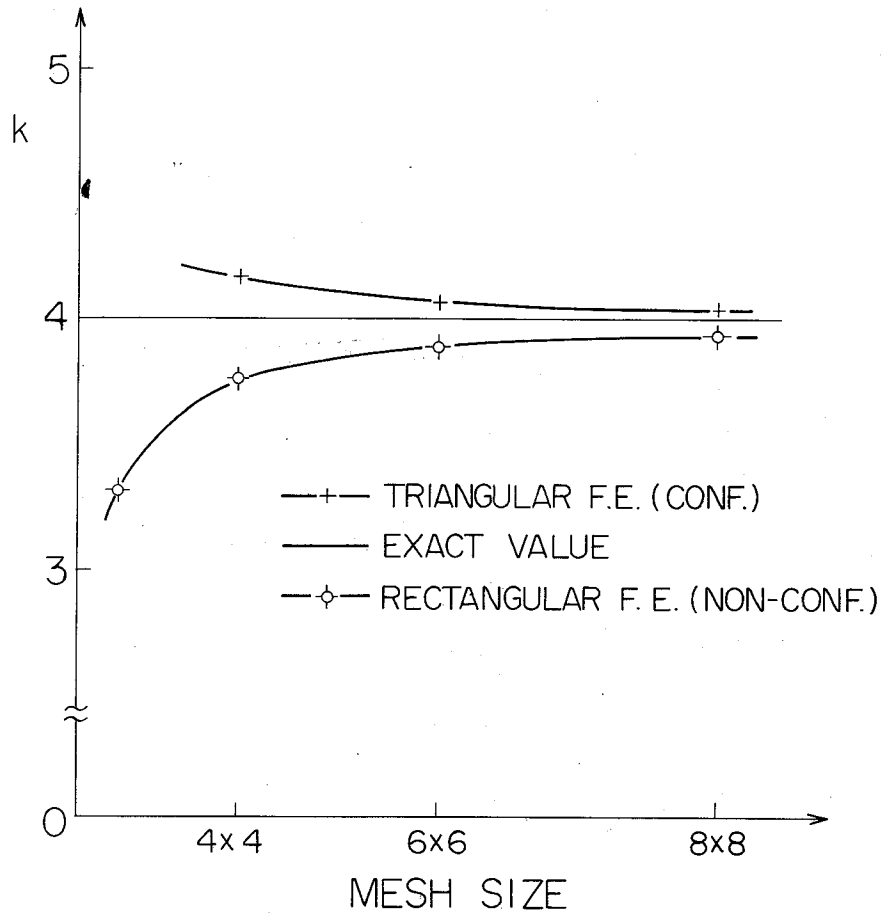


図３．３　圧縮座屈強度（弾性座屈）

表３．１　圧縮座屈（弾性座屈）

Mesh Size	4×4	6×6	8×8	10×10
k	4.168	4.076	4.048	4.045
error(%)	4.19	1.90	1.20	1.12

$k_{exact} = 4.0$

ここで，平板の塑性座屈を次式で表わし，解の精度を，次式の k で比較する。

$$\sigma_Y = k \frac{E\pi^2}{12(1-\nu_p^2)} \left(\frac{t}{b}\right)_{cr}^2 \tag{3.32}$$

この場合も，弾性座屈と同様非常によい精度の解が得られている。

表３．２　圧縮座屈（塑性座屈）

Mesh Size	4×4	6×6	8×8
k	3.371	3.301	3.276
error(%)	3.72	1.57	0.80

$k_{exact} = 3.25$

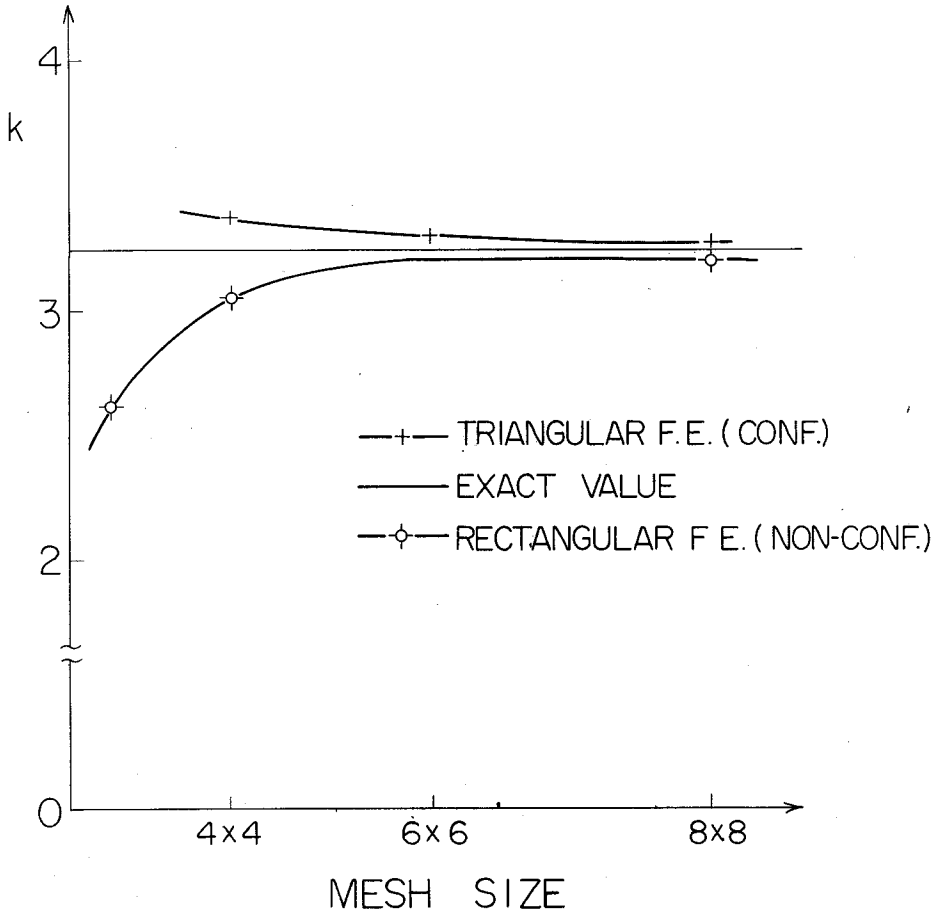


図３．４　圧縮座屈強度（塑性座屈）

３．３．２　一様せん断応力の正方形板の座屈

(1)　弾性座屈

取り扱う正方形板の境界条件は，図３．２（b）に示すように，周辺単純支持である。計算結果を表３．３および図３．５に示す。ここで，平板の座屈強度を次式で表わして，kの値で有限要素法による結果を比較する。

$$\tau_{cr} = k \frac{E\pi^2}{12(1-\nu^2)} \left(\frac{t}{b}\right)^2 \qquad (3.33)$$

この場合も，圧縮座屈と同じく，非常によい精度の解が得られている。

表３．３　せん断座屈（弾性座屈）

Mesh Size	4×4	6×6	8×8	10×10
k	11.232	10.059	9.727	9.586
error(%)	20.1	7.6	4.0	2.5

k_{exact}= 9.35

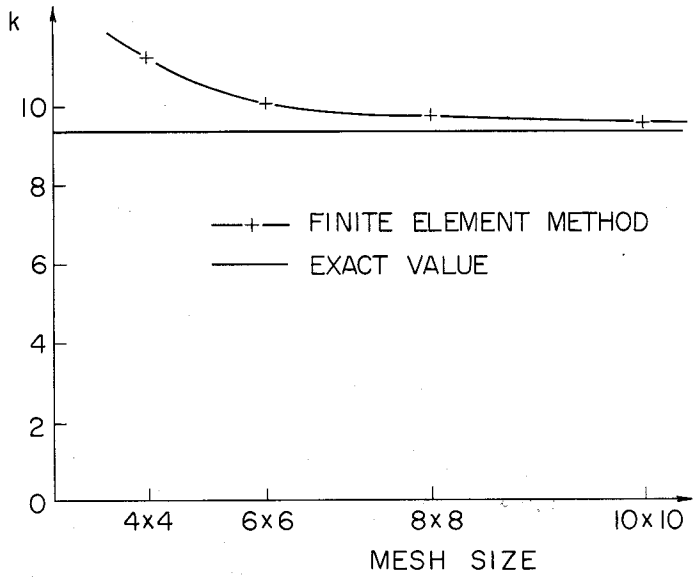


図３．５　せん断座屈強度（弾性座屈）

(2)　塑性座屈

塑性座屈の計算には，塑性変形理論を用いて，周辺単純支持の正方形板について行なった。その結果を表３．４および図３．６に示す。この場合，平板にはせん断降伏ひずみ γ_Y なるひずみが生じ，その応力が，丁度，せん断降伏応力 τ_Y で塑性座屈したとすると，$E_s = E$，$\nu_p = 0.5$ となる。ここでは，平板の塑性座屈強度を次式で表わし，解の精度を，次式の k で比する。

$$\tau_Y = k \frac{E\pi^2}{12(1-\nu_p^2)} \left(\frac{t}{b}\right)^2_{cr} \tag{3.34}$$

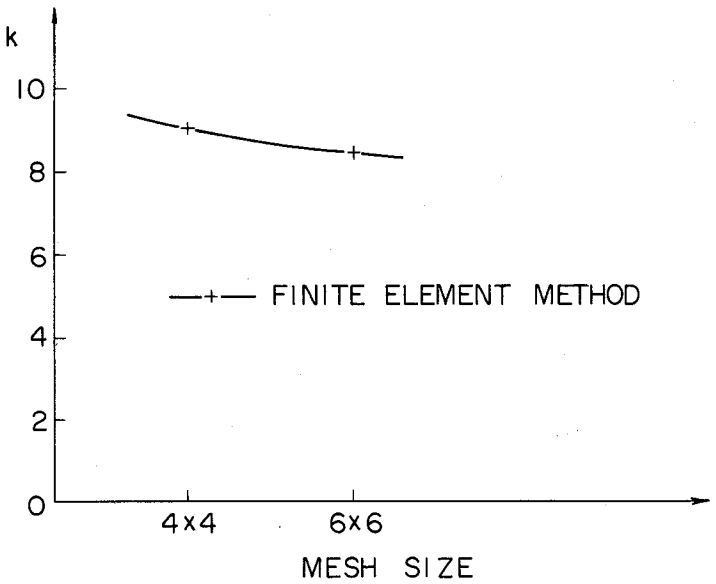


図３．６　せん断座屈強度（塑性座屈）

図３．４　せん断座屈（塑性座屈）

Mesh Size	4×4	6×6
k	9.017	8.470

4. 横桁リングのウエブの座屈強度

１９６５年頃，７万*D.W.T.*～１５万*D.W.T.*級の大形油槽船において，座屈による事故が多発した。これらの事故は，建造直後の貨物油槽の水圧試験時あるいは公試運転時に，横桁リングの縦通材貫通切欠部（以後スロットと呼ぶ）付近に集中して生じている。

大形油槽船の座屈事故に対して，その後の設計では横桁リングのウエブの板厚を増したり，補強材あるいはカラープレートを設けて補強するなどの対策が行なわれた。その結果，我国で建造された大形油槽船の座屈事故は急激に減少した。

しかし，上記の対策は理論的研究の成果に基づいたものではなく，むしろ，経験的な推定によって行なったものである。それは，このような問題に対する理論解析は，対象となる板の幾何学形状ならびに荷重状態が複雑なため非常に困難で，これまでスロットを有する横桁ウエブの座屈強度に関した研究は，いたって少なく，実験的研究が一部報告されているに過ぎない。[35]

本研究では，この問題に関して，１２万*D.W.T.*級油槽船の⅕縮尺の船底模型の座屈実験を実施し，また，実船の横桁ウエブに生じた座屈事故例を調査した。さらに，横桁ウエブの座屈強度の理論解析を行なうために，前節で述べた有限要素法による座屈強度解析法を基にして，電子計算機プログラムを作成した。そして有限要素法による計算結果を船底模型実験結果および実船に生じた横桁ウエブの座屈事故の計測結果と比較し，さらに，スロットを有するウエブのせん断座屈強度に及ぼす種々の影響を調査した。

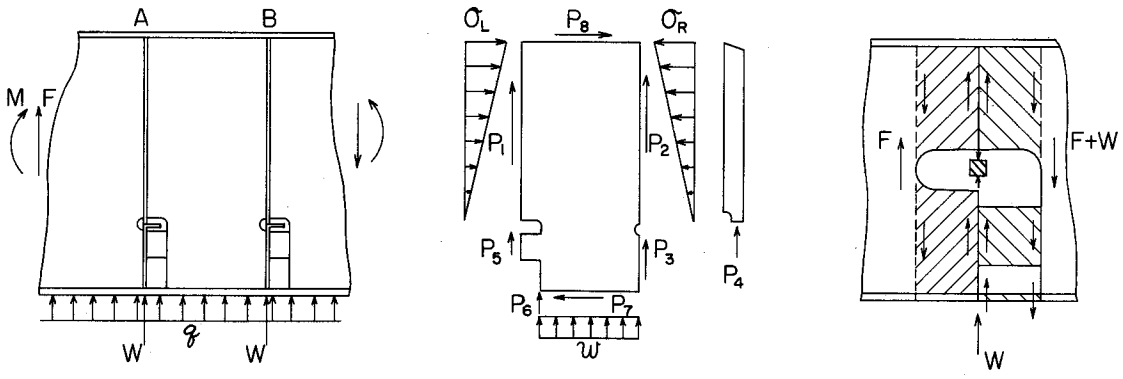
４．１　横桁ウエブの座屈強度解析法

４．１．１　外力の伝達

横桁ウエブの座屈強度を理論的に解析する場合，まず，図４．１(*a*)に示す横桁ウエブにおいて，解析の対象とするパネル（図４．１(*b*)）の周辺における支持条件ならびに荷重条件を，できるだけ忠実に考慮することが必要である。

まず，船体の立体構造解析もしくは実測結果より，横桁リングに伝達されるせん断力および曲げモーメント（F, M, W）を解析する（図４．１(*a*)）。それをもとに，図４．１(*b*)に示すパネル

の周辺に作用する力P_1，P_2，…，P_8，σ_L，σ_Rおよびwを計算し，その結果を用いて，パネルの応力分布および座屈強度を解析する。



(a)WEB PLATE　　(b)PANEL FOR ANALYSIS　　(c)IDEALIZED MODEL

図４．１　横桁リング

横桁リングに伝達される力および曲げモーメントの解析結果より，パネル周辺に作用する力P_1，…，P_6の導出は，渡辺教授の方法[36]を変形したものを用いる。

実船の横桁リングを，図４．１(c)の如く斜線を施した６個の領域に分割する。この領域に，せん断力Fおよび縦通材よりウエブに作用する力Wが働く時，力の平衡条件式および変形の適合条件式は次のようになる。

各領域における力F_iと変位u_iの関係を，

$$u_i = k_i F_i \quad (i = 1, \cdots, 6) \tag{4.1}$$

とおく。ここで，k_iは各領域の変位係数であり，次式で与えられる[38]。

$$\left.\begin{aligned}
k_1 &= c_1 b_1 / \{ G \cdot t_w (d_w - h) \} \\
k_2 &= c_2 b_2 / \{ G \cdot t_w (d_w - h) \} \\
k_3 &= c_3 b_2 / \{ G \cdot t_w \cdot h \} \\
k_4 &= c_4 h_s / \{ E \cdot b_s \cdot t_s \} \\
k_5 &= c_5 b_1 / \{ G \cdot h_c \cdot t_c \} \\
k_6 &= c_6 \left(\frac{b_1}{t_p} \right)^3 / \{ E \cdot b_p \}
\end{aligned}\right\} \tag{4.2}$$

ここで　$c_1 = c_2 = c_3 = 1.25$

$$c_4 = 1 + 2.6 \left(d_s - \frac{1}{2} b_s \right) b_s / (h_s d_s) + 9\theta \left(d_s - \frac{1}{2} b_s \right)^2 / b_s^2$$

$$c_5 = 1.0$$

$$c_6 = 0.5$$

Θは図４．３で与えられる

G：横弾性係数

横桁ウエブの部材寸法 t_w，～，b_p は図４．２に示す。

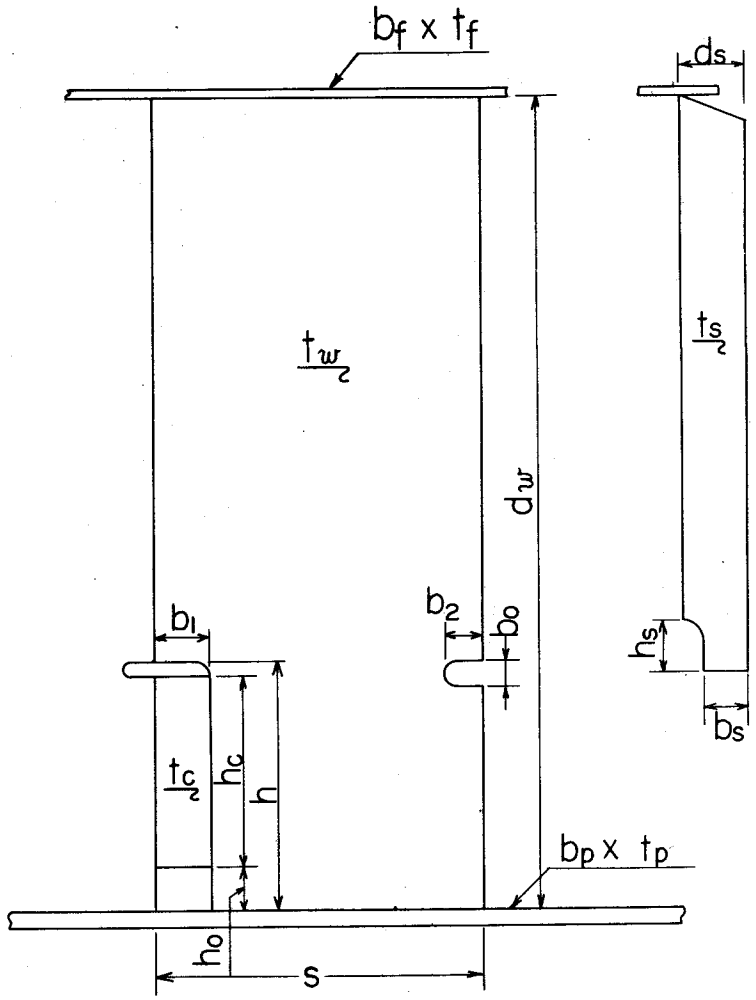


図４．２　横桁ウエブ形状

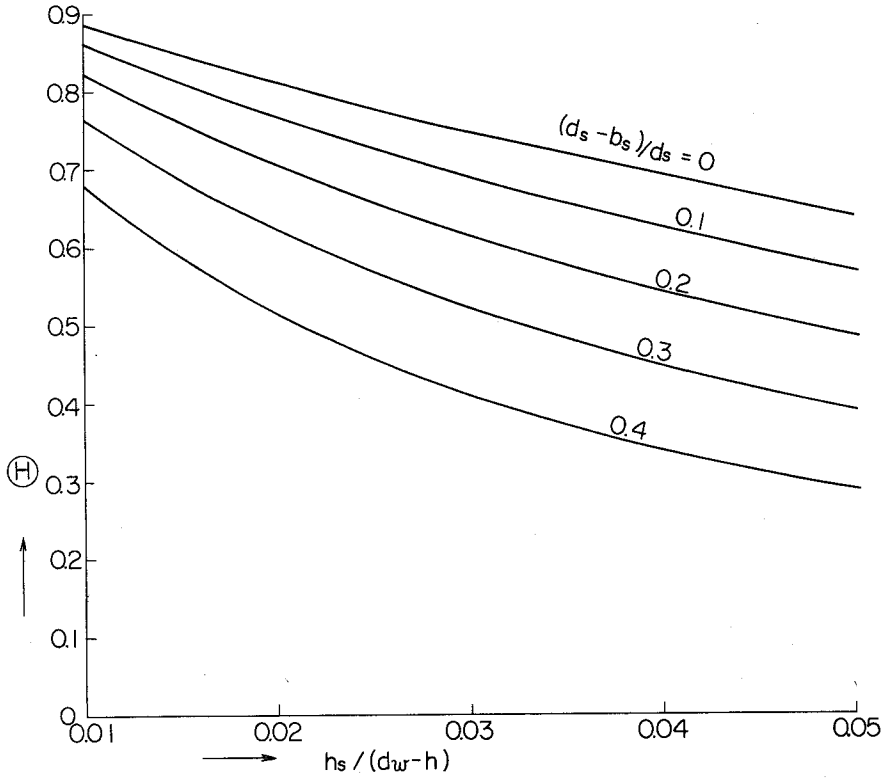


図４．３　$\Theta \sim \dfrac{h_s}{d_w - h}$ の関係

力の平衡条件式は

$$\left.\begin{aligned} &F_3+F_4+F_5+F_6=W \\ &F_1+F_2-F_4=0 \\ &F_2+F_3=-F \end{aligned}\right\} \qquad (4.3)$$

変形の適合条件式は

$$\left.\begin{aligned} &u_1-u_2=u_5-u_3 \\ &u_1+u_4=u_5 \\ &u_5=u_6 \end{aligned}\right\} \qquad (4.4)$$

（4．4）式に（4．2）式を代入すると，

$$\left.\begin{aligned} &k_1F_1-k_2F_2+k_3F_3-k_5F_5=0 \\ &k_1F_1+k_4F_4-k_5F_5=0 \\ &k_5F_5-k_6F_6=0 \end{aligned}\right\} \qquad (4.5)$$

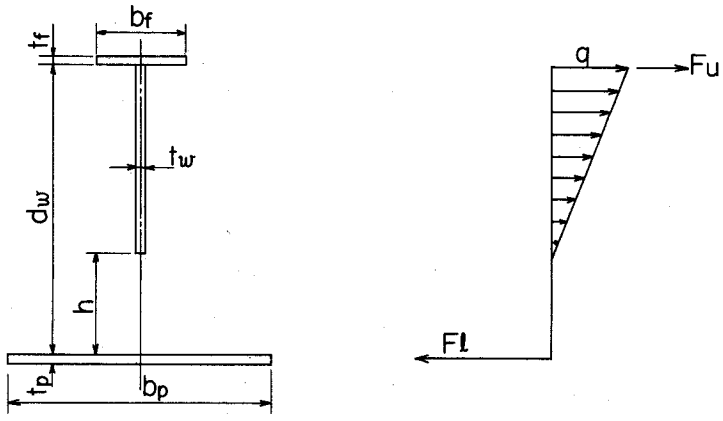
（4．3）および（4．5）式は，F_1，…，F_6に関する6元連立一次方程式である。これを解いてF_1，…，F_6が求められる。この計算を図4．1(a)のA部について行なった場合の解のうち$(F_1)_A$，$(F_5)_A$，$(F_6)_A$が図4．1(b)のP_1，P_5，P_6に対応し，B部について行なつた場合の解のうち，$(F_2)_B$，$(F_3)_B$がP_2，P_3に対応する。横桁ウエブには，外力FとWの他に水圧wが作用していることを考慮すると，次式を得る。

$$\left.\begin{aligned} P_1&=(F_1)_A-\frac{w(s-b_1)^2(d_w-h)}{2s(d_w-h+h_0)} \\ P_2&=(F_2)_B-\frac{w(s^2-b_1^2)(d_w-h)}{2s(d_w-b_0)} \\ P_3&=(F_3)_B-\frac{w(s^2-b_1^2)(h-b_0)}{2s(d_w-b_0)} \\ P_5&=(F_5)_A-\frac{w(s-b_1)^2h_c}{2s(d_w-h+h_c)} \\ P_6&=(F_6)_A \end{aligned}\right\} \qquad (4.6)$$

ここで　　s：横桁心距

スロット部にカラープレートがない場合には，P_5は零になり，スロット部は自由辺になる。

図4．4(a)に示す断面に，曲げモーメント（*Sagging* を正）が作用した時に，この曲げモーメントによってウエブに生じる曲げ応力σおよび上下フランジに生じる軸力F_u，F_lの分布形状が，図4．4(b)に示す形になるとする。



(a) SECTION OF TRANS. RING　　(b) ASSUMED FORCE DISTRIBUTION

図４．４　曲げ応力分布

下部フランジ面に関するモーメントの平衡より

$$F_u d_w + \sigma t_w (d_w - h)(2d_w + h)/6 = M \tag{4.7}$$

上部フランジ面でひずみが連続なことから

$$F_u/(E \cdot b_f \cdot t_f) = \sigma/E \tag{4.8}$$

（４．７）および（４．８）式より

$$F_u = M/\left\{ d_w + \frac{(d_w - h)(2d_w + h)\, t_w}{6\, b_f t_f} \right\} \tag{4.9}$$

$$\sigma = M/\left\{ b_f t_f d_w + \frac{(d_w - h)(2d_w + h)\, t_w}{6} \right\} \tag{4.10}$$

力の釣り合いより F_l は次式で与えられる。

$$F_l = F_u + \frac{1}{2}\sigma (d_w - h)\, t_w \tag{4.11}$$

（４．９）および（４．１１）式より

$$F_l = M\left\{ b_f t_f + \frac{1}{2}(d_w - h)\, t_w \right\} / \left\{ b_f t_f d_w + \frac{1}{6}(d_w - h)(2d_w + h)\, t_w \right\} \tag{4.12}$$

図４．１(a)の A および B 断面に作用する曲げモーメントを M_A，M_B とすると，P_7，P_8，σ_L および σ_R は（４．９），（４．１０）および（４．１２）を用いて，

$$P_7 = (M_A - M_B)\left\{ b_f t_f + \frac{1}{2}(d_w - h)\, t_w \right\} / \left\{ b_f t_f d_w + \frac{1}{6}(d_w - h)(2d_w + h)\, t_w \right\} \tag{4.13}$$

$$P_8 = (M_A - M_B) / \left\{ d_w + \frac{(d_w - h)(2d_w + h)\, t_w}{6\, b_f t_f} \right\} \tag{4.14}$$

$$\sigma_L = M_A / \left\{ \frac{b_f t_f d_w}{t_w} + \frac{1}{6}(d_w - h)(2d_w + h) \right\} \qquad (4.15)$$

$$\sigma_R = M_B / \left\{ \frac{b_f t_f d_w}{t_w} + \frac{1}{6}(d_w - h)(2d_w + h) \right\} \qquad (4.16)$$

となる。

4．1．2　解析法

船体横桁ウエブの座屈強度の解析は，前述の理論を用いて，次の方法で行なう。まず，スロットを有するウエブを，三角形有限要素に分割する。つぎに，このウエブ面内に作用する基準外力すなわち，せん断力F，曲げモーメントM，縦通材よりウエブに入る力Wおよび底板からウエブに入る力wが求まると，4．1．1で述べた基本式を用いて周辺力を計算する。この周辺力が，その作用している辺に一様に分布しているものとして，有限要素の各節点に作用する力を計算する。節点力が得られると，有限要素法を基にして開発したプログラムを用いて，与えられた境界条件を満足させて，応力分布，およびその応力分布を用いて座屈強度の解析を行なう。

本節で開発した横桁ウエブの座屈強度解析用プログラムの特徴は，スロットを有するウエブの座屈強度，すなわち，応力解析と座屈の固有値解析を一貫して処理すること，および有限要素の分割を電子計算機に自動分割させたことである。有限要素の分割は次の方法によっている。すなわち，大形油槽船の横桁リングのウエブ，カラープレート，補強材および縦通材心距などの寸法の実績値を整理して，有限要素の分割を上記諸寸法の関数として表示した。その結果，座屈強度を解析しようとする横桁ウエブの諸寸法とカラープレートの有無を*input*すると，電子計算機が自動的に問題を処理する。カラープレートがないウエブの有限要素分割例を図4．5に図示する。本プログラムの流れ図を図4．6に示す。

4．2　模型実験

4．2．1　実験

実験に用いた模型は12万*D.W.T.*級油槽船の横桁リングの⅕縮尺模型で，その形状を図4.7に示す。模型は4個作成し，補強材及びカラープレートの有無を表4．1に示す。これらの模型に水圧を負荷して実験を行なった。

模型はその周辺で単純支持され，桁の両端で曲げモーメントは殆んど零であり，一様水圧のもとで，横桁ウエブの端部パネルに最も大きなせん断力が作用する。このような状態で，最もせん断座屈が生じやすいのは桁端部のパネルであり，しかも，スロット周辺に沿った応力が圧縮応力になるような方向のせん断力を受けている側のパネルである。図4．8(*b*)に示したせん断座屈は，本実験中

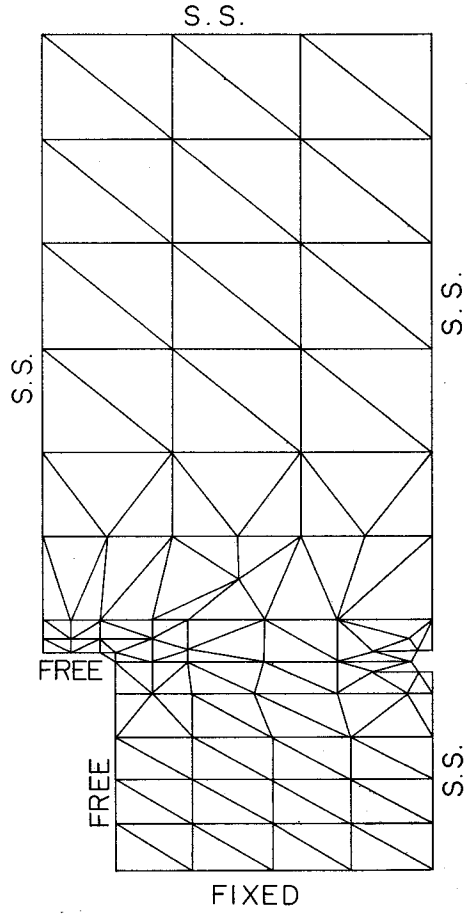


図４．５　有限要素分割例

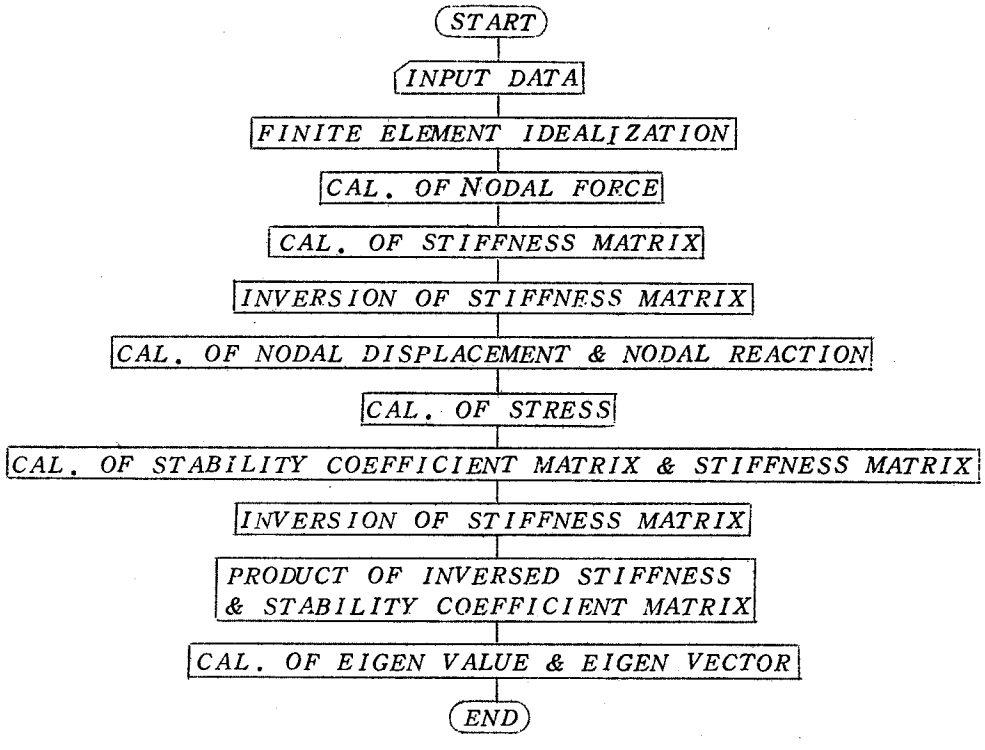


図４．６　プログラム流れ図

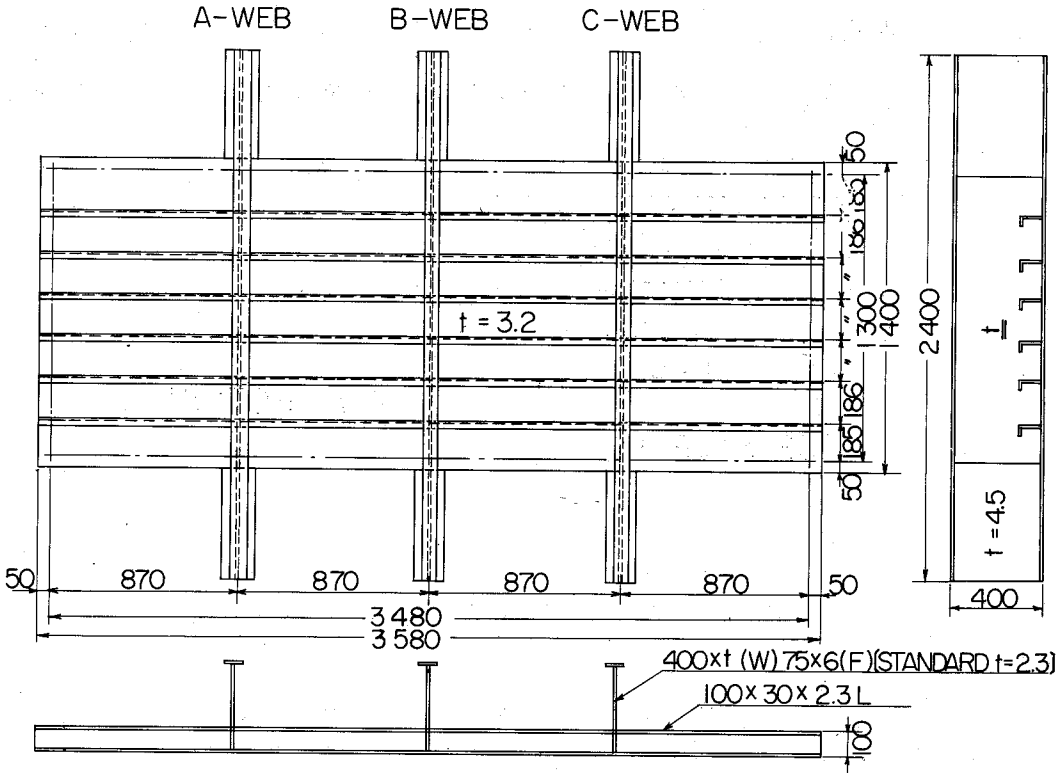


図４．７　試　験　片

表４．１　試験片要目

Model	*Web*	*Stiffener*	*Collar Plate*
1	*A*	–	–
	B	–	–
	C	*S* (*t* = 2.3)	–
2	*A*	*C* (*t* = 2.3)	–
	B	*S* (*t* = 2.3)	–
	C	*S* (*t* = 4.5)	–
3	*A*	*C* (*t* = 2.3)	–
	B	*C* (*t* = 4.5)	–
	C	*C* (*t* = 2.3)	*F*
4	*A*	*B* (*t* = 2.3)	–
	B	*C* (*t* = 2.3)	*H*
	C	*S* (*t* = 2.3)	*F*
5*	*A*	*C* / *L* (*t* = 2.3)	–

Where

* : *No experiment carried out on this model*
B : *Bracket*
F : *Full collar plate*
H : *Half collar plate*
C : *Stiffener welded to longitudinal*
L : *Stiffener attached around slot*
S : *Snipped stiffener*

に観測された座屈例の典型的なものである。同図から明らかなように，この形式の座屈はスロット間の1パネルのウエブが局部座屈したものであり，これをせん断座屈と呼ぶことにする。

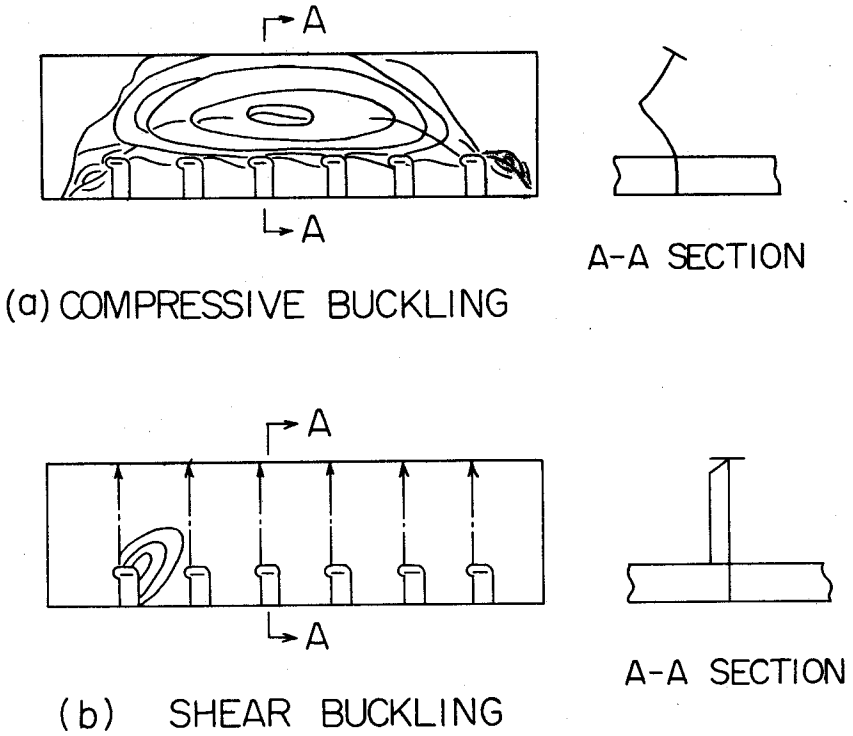


図4．8　座屈形式

このような補強材をウエブに付けた場合のパネルの座屈に対して，横桁ウエブに補強材が全然設けられていない模型1のAおよびB桁ウエブは非常に低い水圧を受けて座屈し，図4．8(a)に示すように，横桁ウエブの深さのほぼ中央部で最も大きい横撓みが生じて，桁全体が崩壊した。この座屈形式をウエブ中央部圧縮座屈と呼ぶことにする。

実験における座屈荷重を決定するために，ウエブの表裏に電気抵抗線ひずみ計を貼布して，模型に作用させた水圧とひずみの関係より，ウエブに大きな曲げ変形が生じてウエブ表裏のひずみの差異が大きくなった時の水圧を，実験における座屈荷重とした。1例として，模型4のB桁ウエブの端部パネルにおけるスロット近傍でのひずみの計測値と水圧の関係を図4．9に示す。

最もせん断座屈の生じやすい横桁端部のパネルについて，上記の方法で決定された座屈強度を表4．2に示す。同表には，ウエブが座屈した時に，ウエブに作用していたせん断力Fおよび模型に作用していた水圧pを示してある。

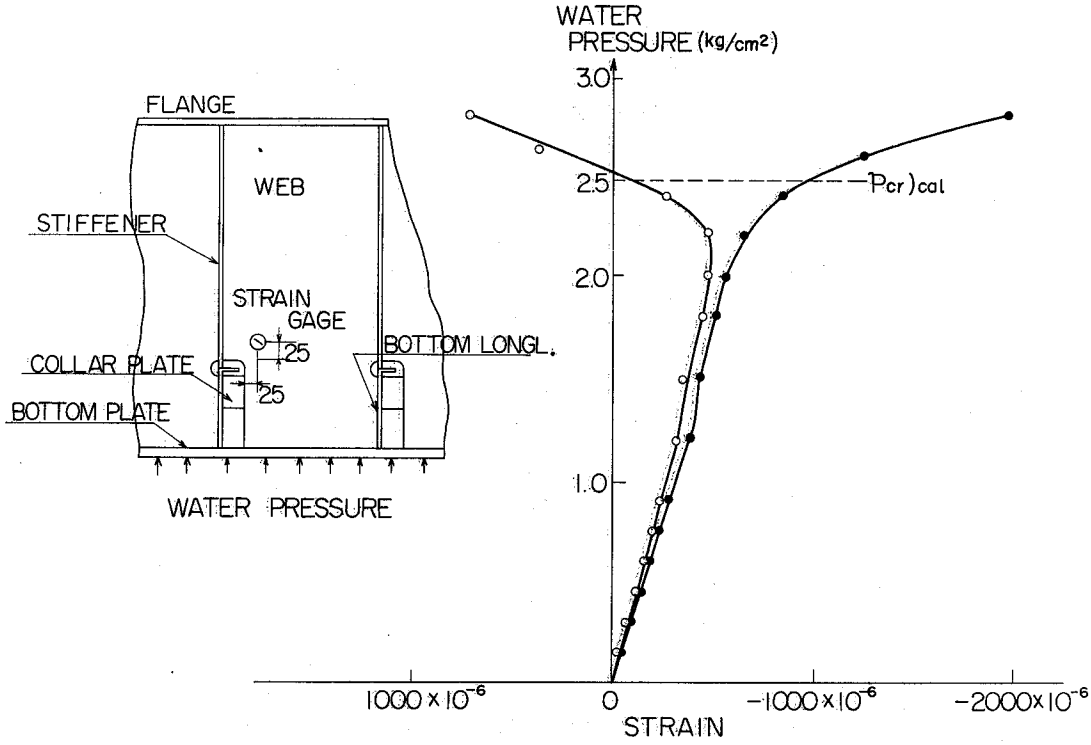


図４．９　座屈実験結果

表４．２　ウエブの座屈強度

	$F_{cr})_{exp}$	$F_{cr})_{cal}$	$p_{cr})_{exp}$	$p_{cr})_{cal}$
モデル２ A桁	−11.3 ton	−10.5 ton	2.0 Kg/cm²	1.86 Kg/cm²
モデル４ B桁	−13.0	−14.2	2.3	2.51
モデル５ A桁	−	14.5	−	−2.65

ここで

F_{cr} ：座屈せん断力

p_{cr} ：座屈水圧

添字

exp ：実験値

cal ：計算値

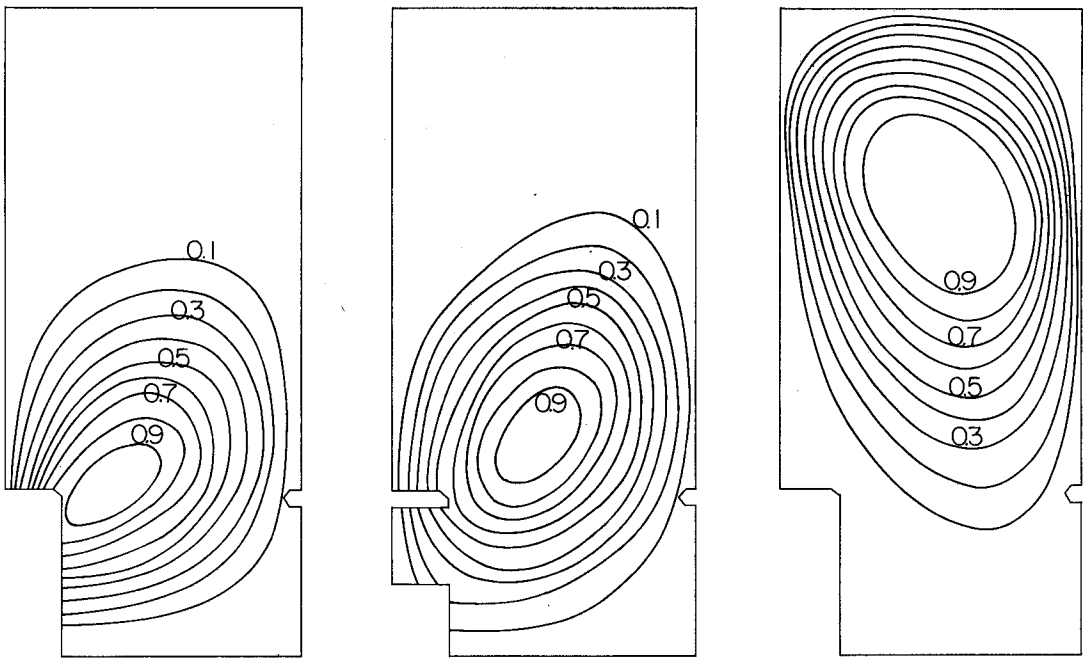
４．２．２　解析および考察

横桁ウエブの座屈強度を解析するにあたっては，内力の分布を正しく推定することが必要である。そこで，模型を横桁ウエブおよび縦通材より構成された格子構造であり，その端部で単純支持されていると考えて，それに水圧を加えた時に，模型の横桁ウエブに分布するせん断力および

曲げモーメントを評価する。模型に基準外力として，水圧1kg/cm² が作用する時，横桁ウエブに作用する力は，端の縦通材がウエブを貫通する断面で次の値になる。

$$\left.\begin{array}{lll} \text{せん断力} & F=-5.484 & ton \\ \text{曲げモーメント} & M=-0.9983 & ton\cdot m \\ \text{縦通材からウエブに入る力} & W=\ \ 2.036 & ton \\ \text{船底板からウエブに入る力} & w=\ \ 1.146 & ton/m \end{array}\right\} \qquad (4.17)$$

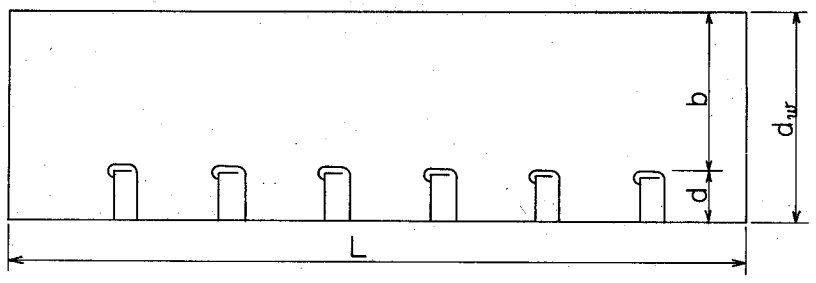
（４．１７）式に示される基準外力のもとで，スロットを有するウエブにせん断座屈が生じる時，カラープレートなしおよび有りのウエブの座屈強度を，４．１．２節で述べたプログラムを用いて計算し，その結果を表４．２および図４．９に示す。その時得られた座屈波形を図４．１０に示す。これらの図表に示されている計算結果と実験結果を比較すると，両者はかなり良く一致している。



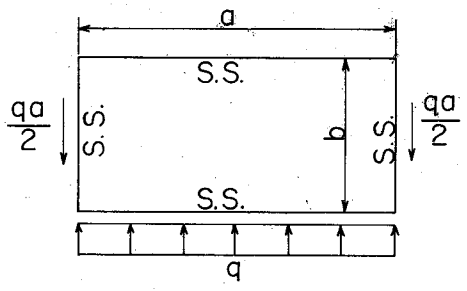
(a) MODEL 2, A-WEB　　(b) MODEL 4, B-WEB　　(c) MODEL 5, A-WEB

図４．１０　座屈波形

つぎに，補強材が付けられていない横桁ウエブに生じた座屈を解析する。図４．８の座屈波形から明らかなように，この形式の座屈には，横桁の両端に近い部分ではせん断力の影響が見られるが，他の大部分では，水圧方向応力によるものと考えられる。図４．１１(a)に示す横桁ウエブから座屈撓みが大きく，しかも，水圧方向応力が支配的と考えられる部分の３－横桁心距を取り出し，図４．１１(b)に示す周辺単純支持された平板に等分布荷重 q が作用しているモデルを考える。



(a) WEB PLATE OF TRANSVERSE RING



(b) IDEALIZED MODEL

図４．１１　ウエブ中央部圧縮座屈モデル

周辺単純支持された矩形板が等分布荷重と曲げモーメントを受ける時の座屈強度を，山越教授らが[37]エネルギー法を用いて解析している。本例の場合，座屈波形が１次であることを考慮すると，山越教授らの研究結果より，座屈係数 $k \fallingdotseq 2.5$ を得る。今，$b = 300$ mm，$t = 2.3$ mm だから

$$q_{cr})_{cal} = \frac{E\pi^2}{12(1-\nu^2)}\left(\frac{t}{b}\right)^2 k = 6.57 \text{ kg/mm} \qquad (4.18)$$

となり，実験値 $q_{cr})_{exp} = 6.96$ kg/mm とかなり良く一致する。

以上の結果から，ウエブに補強材が付けられていない場合のウエブ中央部圧縮座屈を解析するに当って，横桁ウエブから水圧方向応力が支配的と考えられる部分の３－横桁心距のウエブを取り出した簡単なモデルについて，座屈強度を計算しても，かなり良い精度で座屈強度を評価できる事が明らかになった。

これは，ウエブ中央部圧縮座屈のモデル化にあたって，座屈に影響を及ぼしていた応力分布および座屈領域の考慮が妥当であったからと推定される。

最後に，スロット周辺に面材を付して補強した模型５のA桁ウエブの座屈強度を解析する。スロット周辺の境界条件は単純支持と考えられ，この場合に対して，前述のプログラムを用いて座屈強度を解析し，得られた結果を表４．２および図４．１０に示す。計算結果で水圧が負になっているのは，模型実験時の逆方向から水圧を模型５のA桁ウエブに作用させることであり，ウエブが（４．１７）式に示した基準外力の逆方向の荷重を受けた時に，最も座屈しやすいことを意

味している。この時，ウエブに生じた座屈は，図４．１０の座屈波形から，曲げ応力が支配的な場合の座屈であることが推定される。

結局，（４．１７）式に示す基準外力が図４．７の横桁ウエブに作用する場合，座屈強度はスロット部にカラープレートを設けると３５％増加し，スロット周辺に面材を設けると４３％増加する。

４．３　実船試験

数年前，大形油槽船の建造直後の水圧試験時あるいは公試運転時に船体構造部材のウエブに座屈事故が多発した。本節では，上記の座屈事故の１つを取り上げ，４．１節で述べたプログラムを用いて解析して得られた結果と油槽船の横桁リングのウエブに生じた座屈事故結果とを比較して，本解析法の有用性を検討し，実船の横桁ウエブの局部座屈強度を検討する。

４．３．１　実船の座屈事故

１９６４年５月２９日に*K*社建造の*T*丸（主要目を表４．３に示す）の海上運転時 *Butter-worth* 施工中に，No.３貨物油槽内の縦通隔壁付き横桁のNo.１０縦通材のスロット近傍に，図４．１２に示す座屈事故が発見された。

図４．１２に示した座屈のうち，①，③，④および⑤はウエブに生じたもので，スロットの先端より45°方向に座屈波形が生じ，①，③，④，⑤の順序で座屈波形の広がりが小さくなっている。②の座屈は，No.１０の縦通材位置に設けた補強材に生じた座屈である。以上の損傷は，ストラットのある横桁ウエブで２ケ所，およびストラットのない横桁ウエブで４ケ所発生している。

なお，このような事故が発生したと考えられる貨物油槽の水圧試験は，図４．１３に示す順序で行なわれた。

表４．３　主　要　目

L	$235^{m}0$
B	$36^{m}5$
D	$19^{m}2$
d_{mld}	$11^{m}97$
$D.W.T.$	68,300 LT

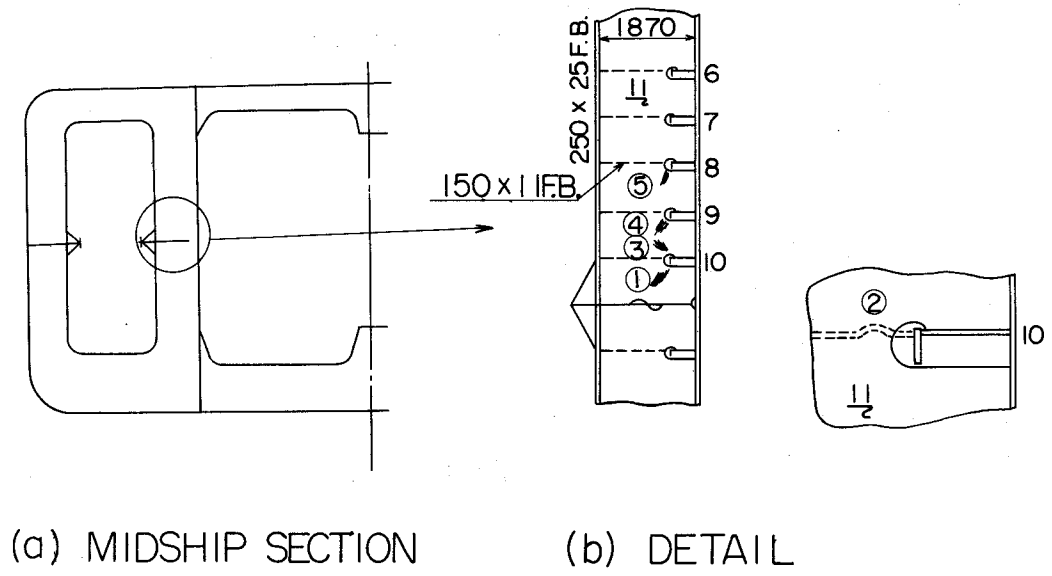


図４．１２　座屈事故例

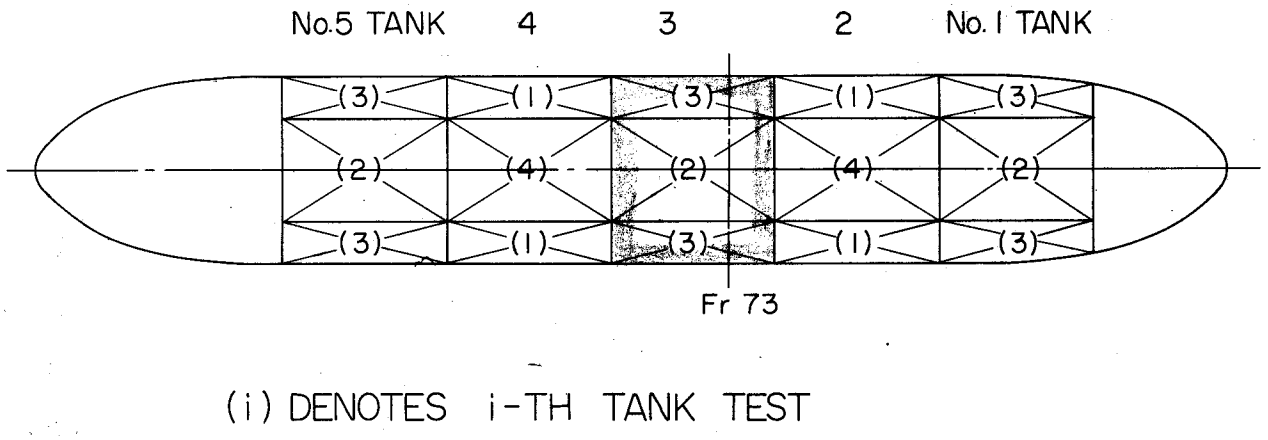


図４．１３　水圧試験

４．３．２　解析および考察

横桁ウエブの座屈強度の解析は，損傷のあった№３貨物油槽の*Fr*．７３縦通隔壁付き横桁のウエブについて行なう。

座屈強度の解析に先立って第１編で述べた船体の立体強度解析法を適用して，対象としているウエブに作用する力および曲げモーメントを計算する。第２回および第３回水圧試験時に対して計算したウエブに作用する力および曲げモーメントを表４．４に示す。

同表の結果より，第３回水圧試験時に，横桁ウエブに作用していたせん断力によって，スロットコーナー部に圧縮応力が生じていたことがわかる。そこで，ウエブに生じた座屈の①，④および⑤は，第３回水圧試験時に生じたものと推定される。一方，第２回水圧試験時に，ウエブに作

用するせん断力の方向は，第3回水圧試験時の逆方向であり，スロットコーナー部には引張り応力が生じて，ウエブには③の形式の座屈が生ずるものと考えられる。

今，第3回水圧試験時の座屈損傷例を解析する。この最大水高時におけるウエブ周辺の外力は立体強度解析結果より，

$$\left.\begin{aligned} F &= -174.6\ ton \\ M &= -99.2\ ton\cdot m \\ W &= -54.2\ ton \end{aligned}\right\} \qquad (4.19)$$

となり，この外力のもとでのウエブの座屈強度を，4．1．2節で述べたプログラムを用いて解析すると，本例の場合，次式で与えられる荷重が作用すると，ウエブは座屈して図4．14に図示するような座屈波形を示す。

$$\left.\begin{aligned} F_{cr} &= -81.4\ ton \\ M_{cr} &= -46.2\ ton\cdot m \\ W_{cr} &= -25.3\ ton \end{aligned}\right\} \qquad (4.20)$$

又，この時ウエブの座屈せん断力$F_{mean})_{cr}$はウエブの中央断面で

$$F_{mean})_{cr} = F_{cr} + W_{cr} = -107\ ton \qquad (4.21)$$

である。

なお，このウエブの座屈に対して曲げモーメントはほとんど影響を与えず，ほぼ，せん断力の大きさで座屈を決定することができる（4．4節参照）。従って，$Fr.73$ 断面の横桁ウエブに作用するせん断力分布F_{act} および（4．21）式で与えられる座屈せん断力を図4．15に図示すると，ウエブに作用するせん断力が座屈せん断力を超過しているウエブがせん断座屈する可能性を示している。事実，第3回水圧試験時に№8，9および10の縦通材が貫通する3っのウエブがせん断座屈していること，およびせん断力の大きさに比例して，座屈横撓みが大きいことと一致する。

表4．4　水圧試験時に横桁ウエブに作用していた力

水圧試験＼力	F (ton)	M (ton·m)	W (ton)
第　2　回	126.5	− 88.0	54.2
第　3　回	−174.6	− 99.2	− 54.2

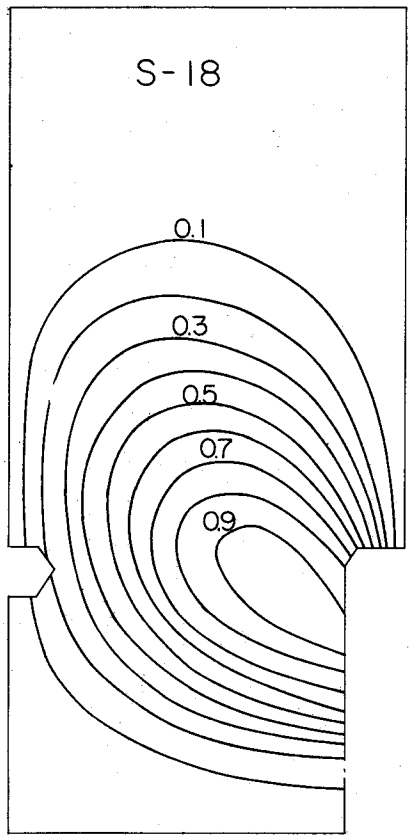


図４．１４　座屈波形

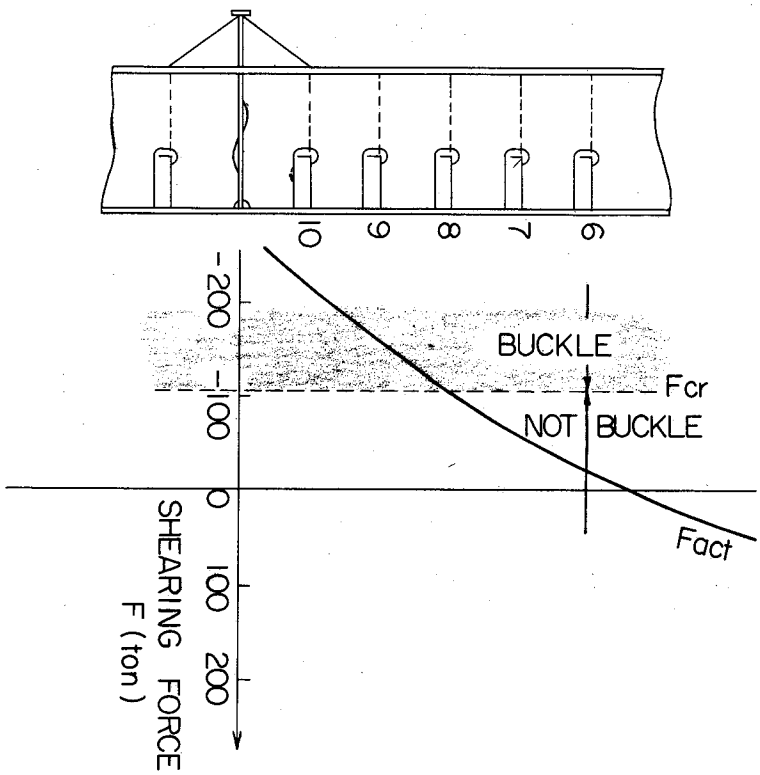


図４．１５　横桁リングの座屈強度

以上の結果より，本研究で採用した有限要素法に基づくウエブの座屈強度解析法は，実船に生じた座屈事故を非常に良い精度で説明することが明らかになった。それと同時に，横桁ウエブに座屈が生じた本船では，ウエブのせん断座屈に対する配慮の不足していたことが明らかになった。

4．4　横桁ウエブのせん断座屈に及ぼす種々の影響

これまでに，横桁ウエブの座屈強度を有限要素法に基づいて解析して，得られた結果を模型実験および実船試験結果と比較して，両者が非常によく一致することを確かめた。

通常，油槽船の横桁ウエブのせん断座屈強度は，種々の因子の影響を強く受けるので，簡単なモデル化ができない。そこで，以下に述べるように，曲げモーメント，横桁ウエブの形状，カラープレートおよび補強材がウエブのせん断座屈に及ぼす影響を検討する。

なお，ウエブ内に作用する曲げモーメントおよびせん断力は，長さ方向に一定ではなく変化しているので，横桁ウエブの座屈強度を表わすのに，ウエブ中央断面に作用する曲げモーメントおよびせん断力を用いることにする。

4．4．1　曲げモーメントの影響

油槽船の横桁ウエブには，せん断力と曲げモーメントが組み合さって作用する。一般に，矩形板に曲げモーメントとせん断力が組み合さって作用すると，座屈強度は低下することが知られている。[24] そこで，まず，横桁ウエブにせん断力と曲げモーメントが組み合さって作用した時に，ウエブの座屈強度がどのような影響を受けるかを調べる。

横桁ウエブに曲げモーメントとせん断力が組み合さって作用する時の座屈強度を，4．2節で述べたプログラムを用いて解析して，得られた結果を図4．16に図示する。

解析に用いたウエブの部材寸法は，

$$h/s = 0.924 \quad , \quad b_1/s = 0.196 \quad , \quad d_w/s = 3.0$$

である。ここで

h　：スロット高さ

b_1：スロット幅

d_w：ウエブ深さ

s　：縦通材心距

図4．16では，ウエブの座屈強度を，基準座屈強度M_0およびF_0を用いて，無次元化している。

ここで，M_0 はウエブに曲げモーメントのみが作用した時の座屈曲げモーメントであり，F_0はウエブにせん断力のみが作用した時の座屈せん断力であり，その値は，本解析で選んだ寸法の横

桁ウエブでは，

$$F_0 = -3076\ ton \tag{4.22}$$

$$M_0 = 1153\ ton \cdot m \tag{4.23}$$

である。

図４．１７には，ウエブが曲げ座屈およびせん断座屈した時の座屈波形を示す。

図４．１６に示した解析結果から，横桁ウエブに曲げモーメントおよびせん断力が組み合さって作用しても，ウエブの座屈強度の低下は殆んど見られない。結局，ウエブに作用する曲げモーメントとせん断力のいずれか先に，それぞれ独立に作用した時の座屈値に達した時に，横桁ウエブは座屈することが明らかになった。

従って，横桁ウエブの座屈強度を検討する場合には，曲げ座屈強度およびせん断座屈強度を，別々に，計算すればよいことになる。

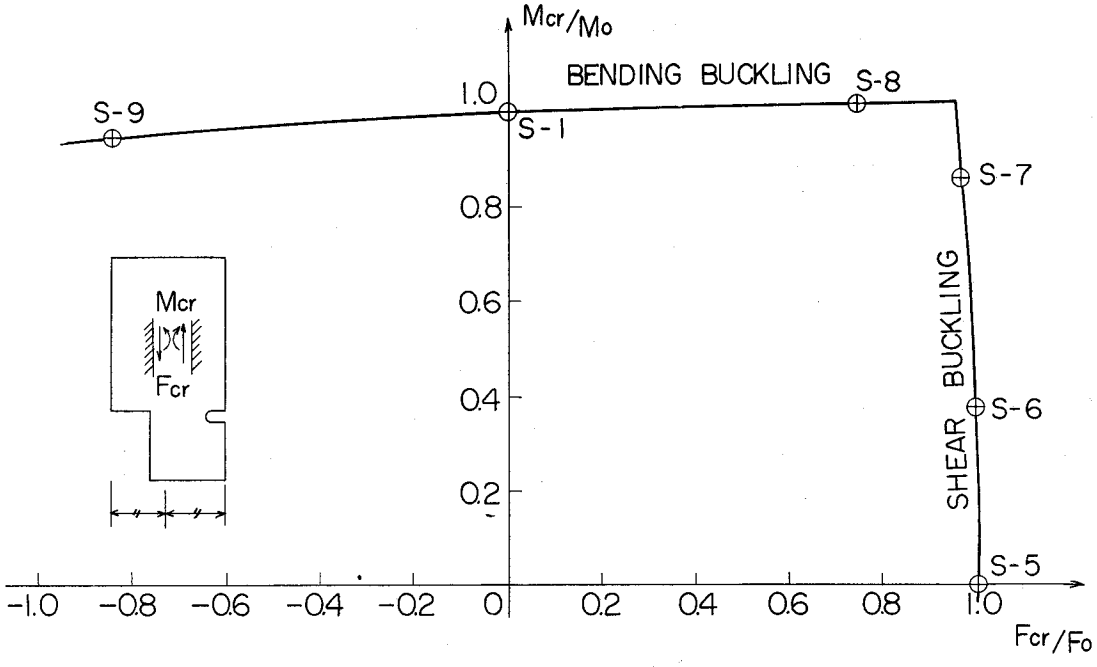
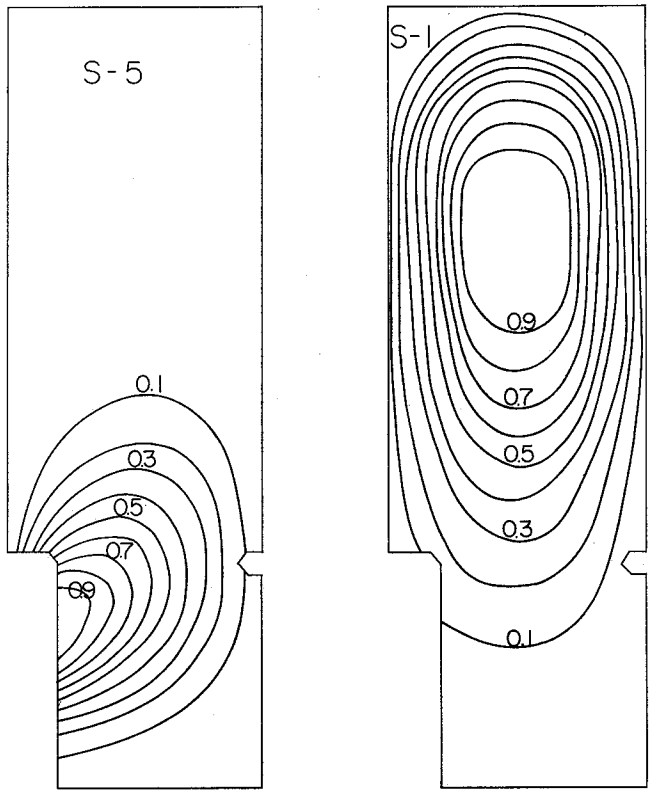


図４．１６　せん断力と曲げモーメントの相関々係

普通，矩形板に曲げモーメントとせん断力が組み合さって作用すると，座屈強度は低下する。[24] しかし，横桁ウエブでは曲げモーメントとせん断力が組み合さって作用した時に，座屈強度の低下が見られない理由としては，次の点が考えられる。図４．１７に示した座屈波形より明らかなように，ウエブがせん断座屈した時に，座屈波形はほとんどスロット近傍に集中しており，せん断座屈に関係するのは，ウエブ下部のスロット近傍であることがわかる。一方，曲げモーメント



(a) SHEAR BUCKLING　　(b) BENDING BUCKLING

図４．１７　座屈波形

が作用して，ウエブに曲げ座屈が生じる場合には，座屈波形はスロット部から離れたウエブ上部の圧縮応力を受ける部分に集中し，曲げ座屈に関係するのはスロット上部のウエブであることがわかる。

法規では，横桁ウエブの深さ d_w とスロットの高さ h の比が　$\dfrac{d_w}{h} > 3.0$

であることを規定している。従って，実船の横桁ウエブでは，せん断座屈に関係するウエブ下部のスロット近傍と，曲げ座屈の場合には圧縮側になるスロット上部の領域とが分離されることになり，ウエブに曲げモーメントとせん断力が組み合さって作用しても，それによるウエブの座屈強度の低下は殆んど見られないことになる。

図４．１７に示したウエブの曲げ座屈波形から明らかなように，座屈による横撓みは，殆んど圧縮側になるスロット上部のウエブに限定されている。そこで，図４．１８(a)に示したウエブから，スロット部を除いた $ABCD$ 部を取り出す。横桁ウエブの座屈強座は，この矩形板 $ABCD$ を，図４．１８(b)に示すように周辺を単純支持して，曲げモーメントだけを作用させたと考えて充分良い精度で解析できる。その座屈強度を，次式の座屈強度値 k を用いて，図４・１９に示す。[39]

$$k = \frac{\sigma_b}{\sigma_e} \qquad (4.24)$$

ここで

$$\sigma_b = M / \{ b_f t_f d_w + \frac{1}{6}(d_w - h)(2d_w + h) t_w \}$$

$$\sigma_e = \frac{E\pi^2}{12(1-\nu^2)} \left(\frac{t_w}{d_w - h} \right)^2$$

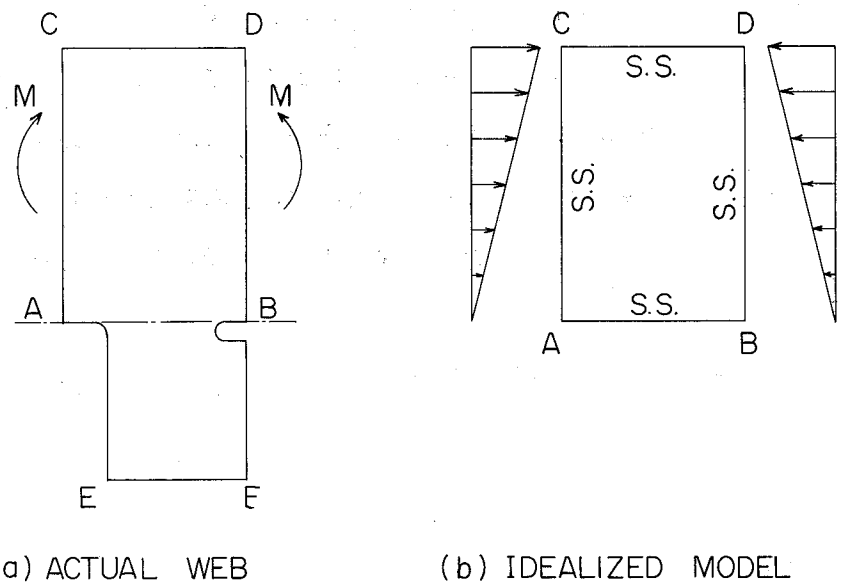


図４．１８　横桁ウエブの曲げ座屈モデル

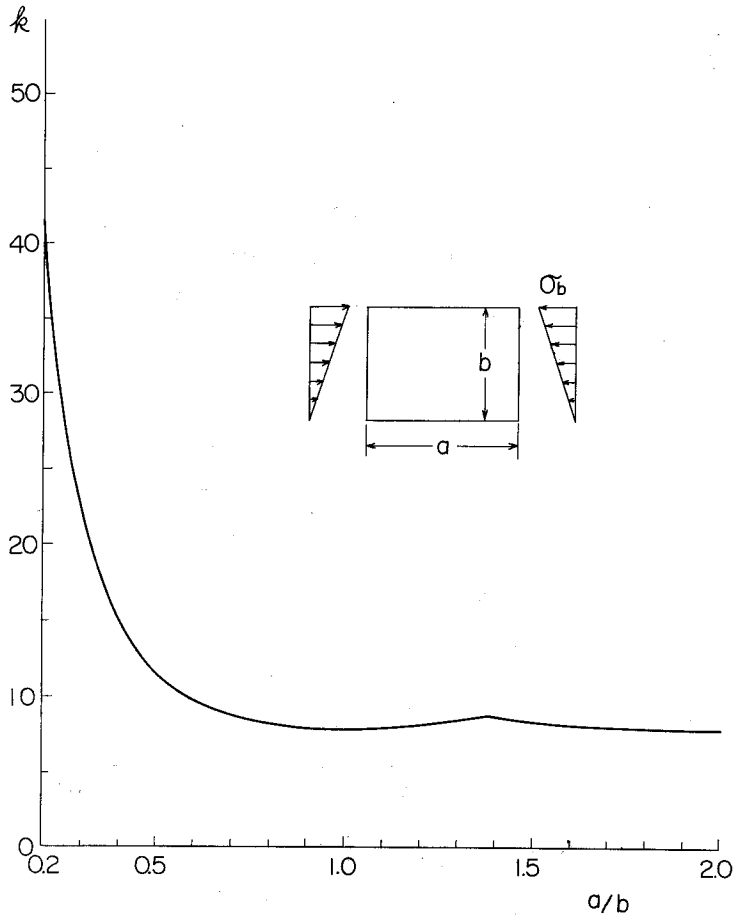


図４．１９　横桁ウエブの曲げ座屈強度

4．4．2　ウエブ形状，カラープレートおよび補強材の影響

油槽船に用いられる横桁ウエブの形状は，図4．2に図示するように，縦通材心距 s，ウエブの深さ d_w およびスロットの高さ h と幅 b_1 によって規定されている。これらの各寸法が，ウエブの座屈強度に及ぼす影響を明らかにすれば，それによってウエブのせん断座屈強度は簡単に評価できる。そこで，横桁ウエブの形状が，そのせん断座屈強度に及ぼす影響を解析するに当って，まず，10万～40万 $D.W.T.$ の油槽船の横桁ウエブの縦通材心距，ウエブ深さ，スロットの幅および高さを調査した結果を図4．20に図示する。考える寸法比は同図に示した範囲にあるので，これらの各寸法比がウエブの座屈強度に及ぼす影響が明らかになると，設計上都合がよい。

従って，同図に示した範囲の部材寸法を有する横桁ウエブの座屈強度を解析する。

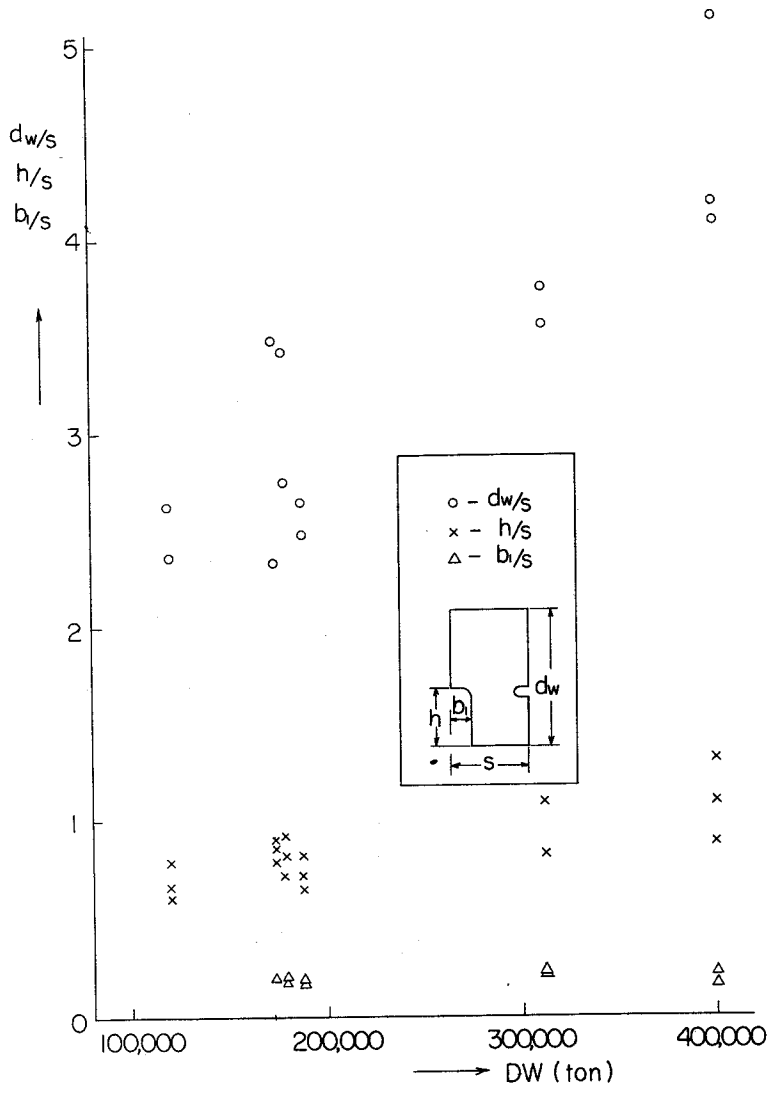


図4．20　横桁ウエブの寸法

(j) ウエブ深さ d_w の影響

ウエブの深さ d_w がせん断座屈強度に及ぼす影響を調査するために，ウエブの深さを変化させて，座屈強度を解析する。ウエブのせん断座屈強度を，次式の座屈せん断応力 τ_{cr} を用いて，図４．２１に図示した。

$$\tau_{cr} = \frac{F_{cr}}{d_w \cdot t_w} \qquad (4.25)$$

ここで

F_{cr} ：ウエブの中央断面に作用する座屈せん断力

図４．２１の座屈強度から明らかなように，ウエブの座屈せん断応力はほぼ一定であり，ウエブの深さ d_w は座屈せん断応力にあまり影響を及ぼさないと考えることができる。

なお，解析に用いた横桁ウエブのスロットの形状は

スロット高さ比　　$h/s = 0.924$

スロット幅比　　$b_1/s = 0.196$

ここで

h ：スロット高さ

b_1 ：スロット幅

s ：縦通材心距

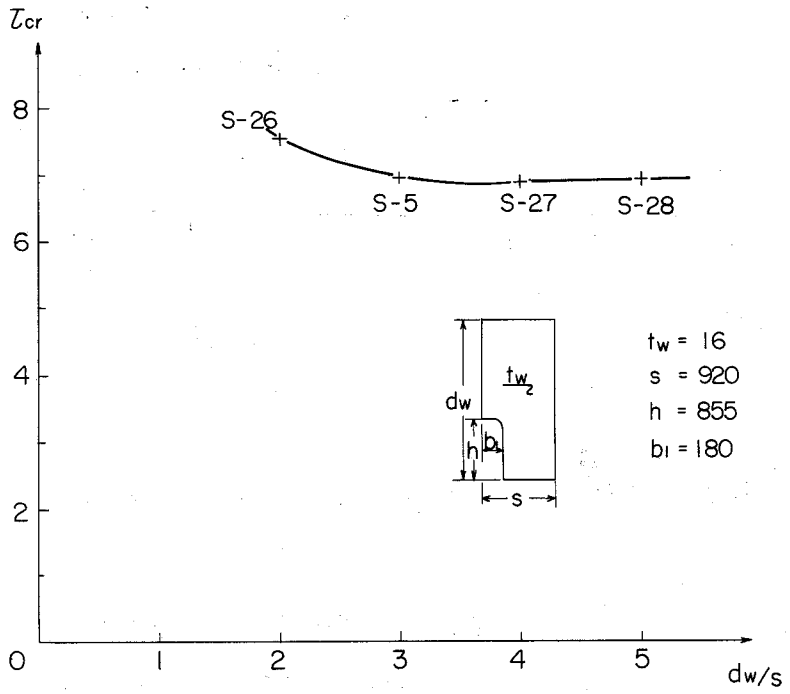


図４．２１　ウエブ深さの影響

(ii) スロット高さ h の影響

スロット高さが横桁ウエブのせん断座屈強度に及ぼす影響を調べるために，スロット高さを変化させて，座屈強度を解析する。図４．２２に，ウエブのせん断座屈強度を，ウエブの中央断面に作用する座屈せん断力 F_{cr} を用いて表示した。図４．２３には，ウエブが座屈した時の座屈波形を示す。

図４．２２に示した解析結果より，スロットの高さ h はウエブの せん断座屈強度に非常に大きい影響を及ぼす事が明らかである。スロットの高さが低くなると，ウエブのせん断座屈強度は上昇し，スロットの高さ比 h/s が 0.7 のウエブは，h/s が 1.3 のウエブの略 2.4 倍のせん断力を受ける迄，座屈しないことがわかる。

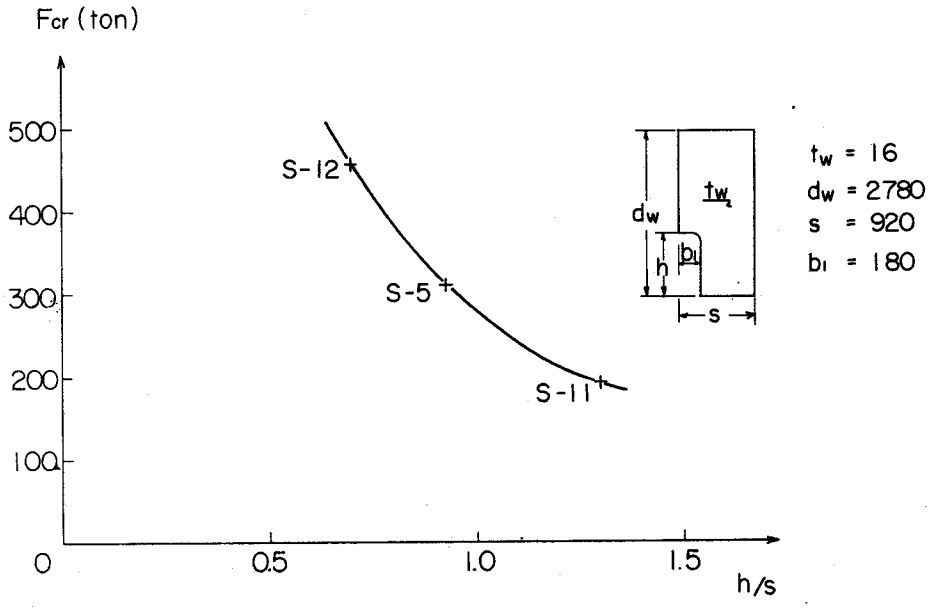


図４．２２　スロット高さの影響

(iii) スロット幅 b_1 の影響

スロットの幅 b_1 が横桁ウエブのせん断座屈強度に及ぼす影響を調べるために，スロット幅を変化させて，座屈強度を解析した。

図４．２４に，ウエブのせん断座屈強度をウエブの中央断面に作用する座屈せん断力 F_{cr} を用いて図示した。解析結果より，スロットの幅とせん断座屈強度の間には比例関係のあることがわかる。しかし，スロットの幅が変化しても，座屈強度にはあまり影響がない。

(iv) カラープレートの影響

横桁ウエブの座屈を防止するのに，最もよく用いられる方法に，スロット部をカラープレート

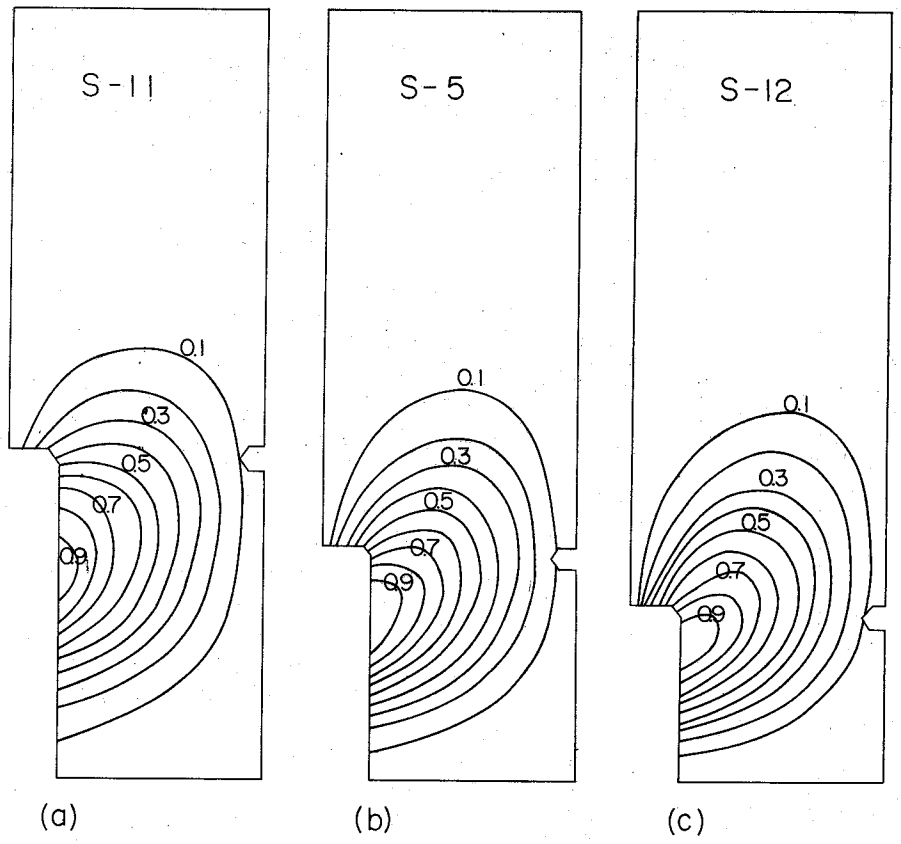


図４．２３　座屈波形（スロット高さの影響）

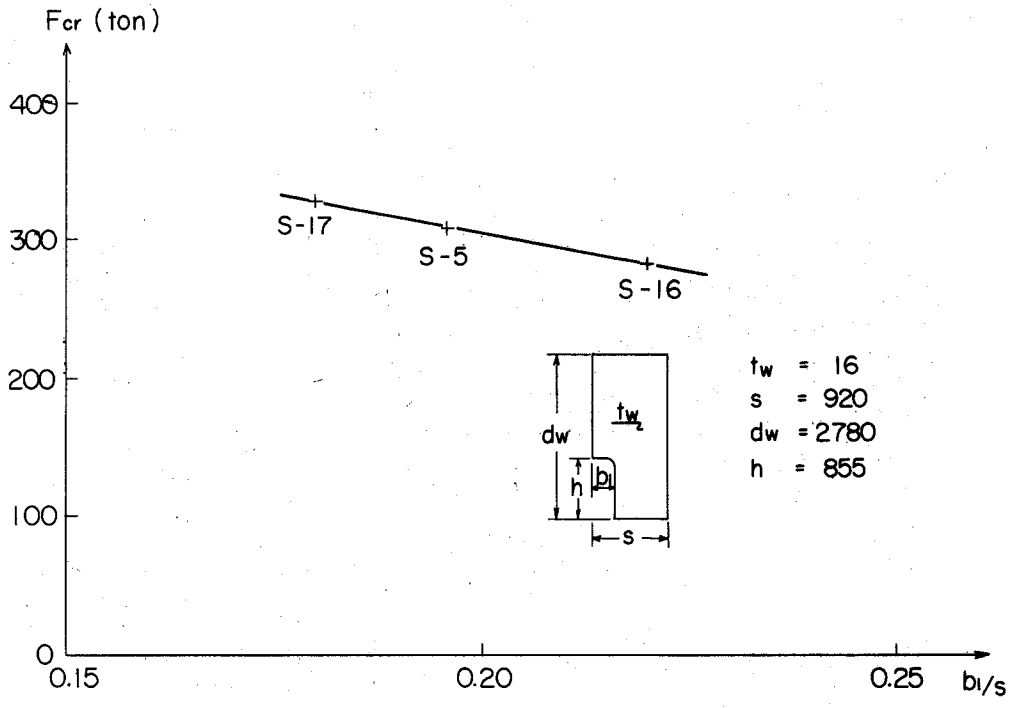


図４．２４　スロット幅の影響

で補強する方法がある。本研究では，スロット高さの約6割の高さのカラープレートを用いて，スロット部を補強した時の横桁ウエブのせん断座屈強度を解析した。ウエブの座屈強度を図4.25に，またその時得られた座屈波形を図４．２６に示す。

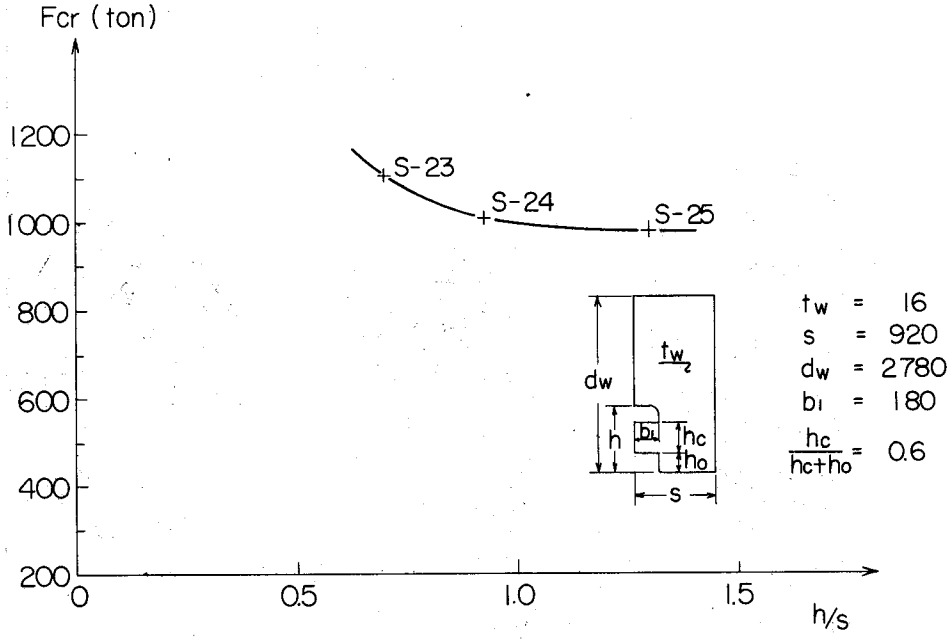


図４．２５　カラープレートの影響

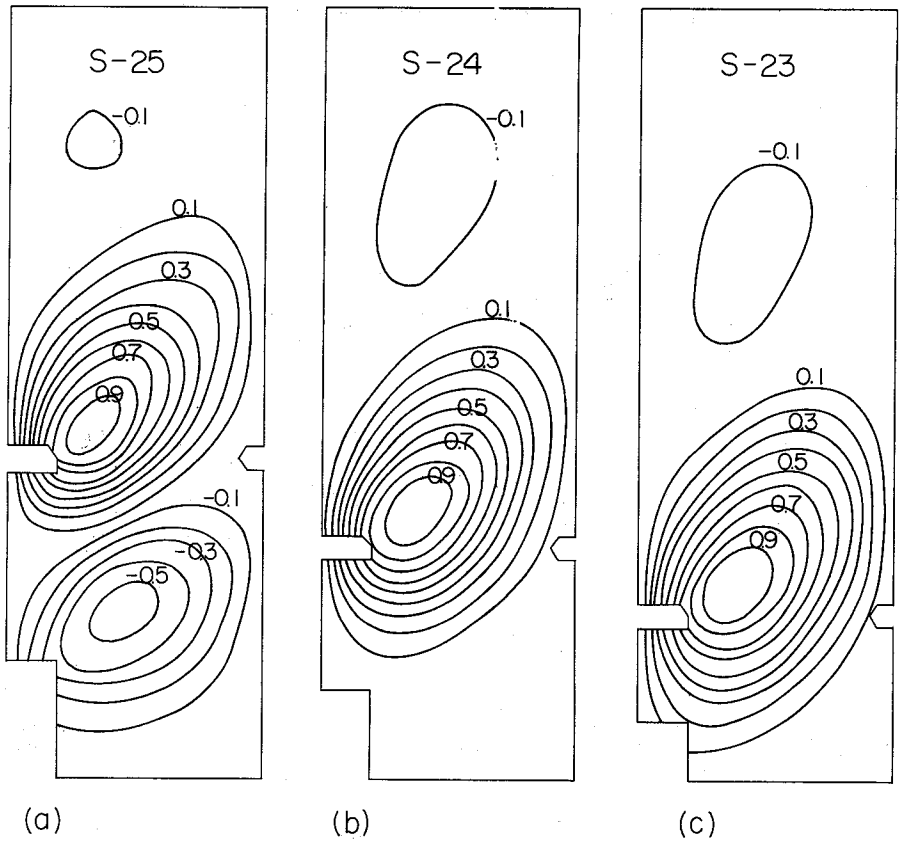


図４．２６　座屈波形（カラープレートの影響）

図４．２５に示した結果から，スロット部にカラープレートを設けて補強すると，座屈強度は非常に上昇することがわかる。

(V)　補強材の影響

横桁ウエブの座屈に対する補強方法には，上記のカラープレートの他に，補強材を設ける方法がある。ここでは，スロット上部に水平方向の補強材を付して横桁ウエブを補強した時に，ウエブのせん断座屈に及ぼす補強材の効果を検討する。

解析にあたっては，次の仮定を設けた。すなわち，補強材は横桁ウエブの応力分布に影響を与えない，すなわち，補強材の面内変形に対する剛性は零であること，および横桁ウエブが座屈する時に，補強材を設けた位置で，ウエブの撓みは零であることを仮定した。

有限要素法を用いて得られた横桁ウエブの座屈強度を図４．２７に，座屈波形を図４．２８に示す。

解析結果から明らかなように，水平補強材を設けると横桁ウエブの座屈強度は約２０～６０％増加して，補強材は，横桁ウエブの補強方法として，効果のあることが明らかになった。

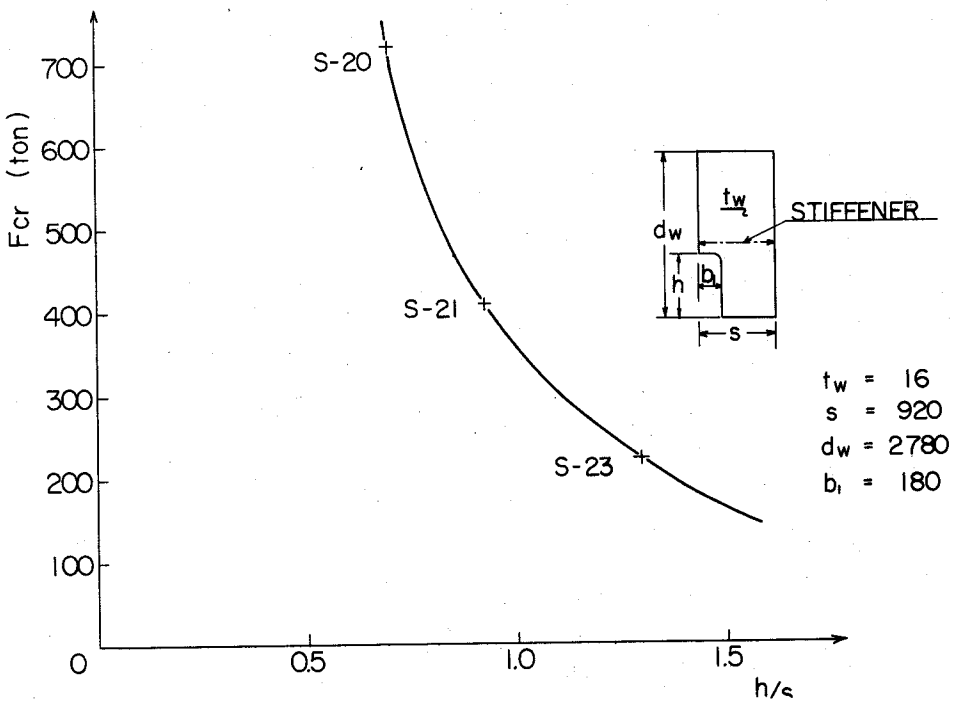


図４．２７　水平補強材の影響

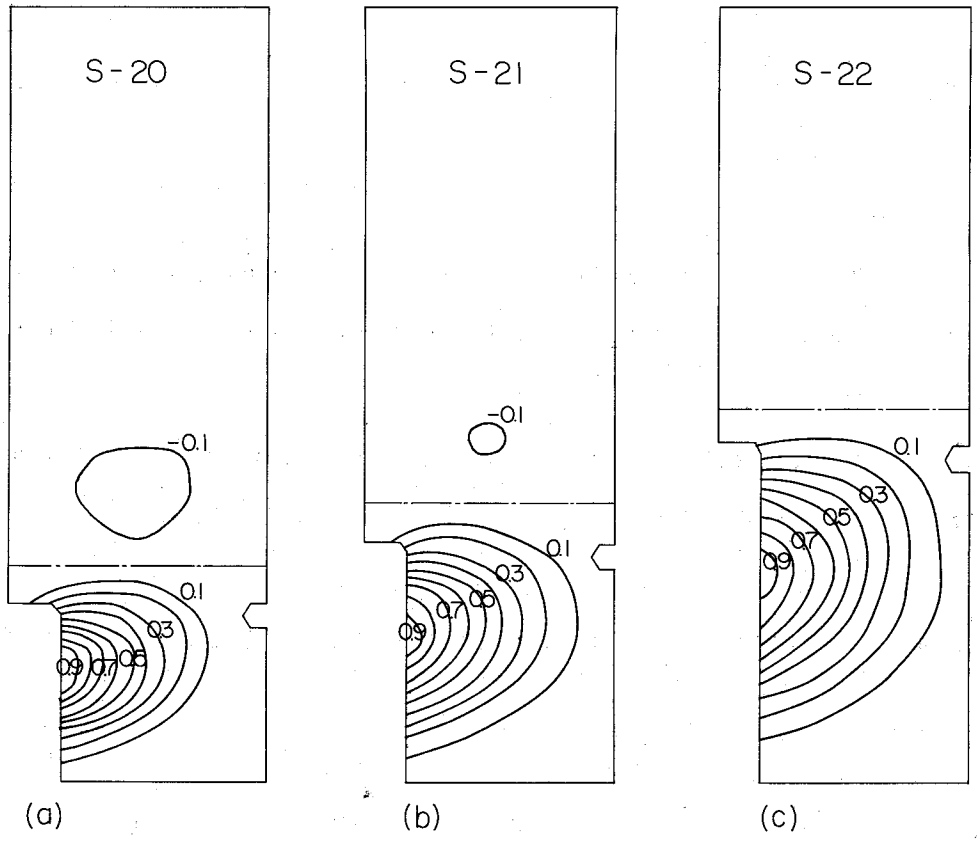


図４．２８　座屈波形（水平補強材の影響）

４．４．３　横桁ウエブの補強効果に対する考察

ウエブの補強方法として，カラープレートあるいは水平補強材を付けた時の補強効果を検討してみる。

カラープレートを付けて補強する場合は，スロットの自由辺を減少させて，直接的に座屈強度を増加させることを意図したものである。一方，水平補強材による補強は，ウエブに生じる座屈のモードを変えて，間接的に座屈強度を増加させることを意図したものである。

カラープレートあるいは補強材を付けた場合の座屈せん断力F_{cr}を，スロット部を補強しないウエブの座屈せん断力F_0で無次元化した結果を，図４．２９に示す。

同図より，カラープレートの効果が大きく，特に，スロットの高さが高くなる程，その効果の大きいことがわかる。

スロットの高さ比h/sの大きい領域で，カラープレートによる補強効果の大きい理由としては次の事が考えられる。スロット部にカラープレートを付けると，座屈強度は大幅に増加するが，その値はスロット高さ比h/sにかかわらず，ほぼ一定である。一方，図４．２２から明らかなように，スロット部を補強しないウエブでは，通常油槽船で採用されているスロット高さ比h/sが

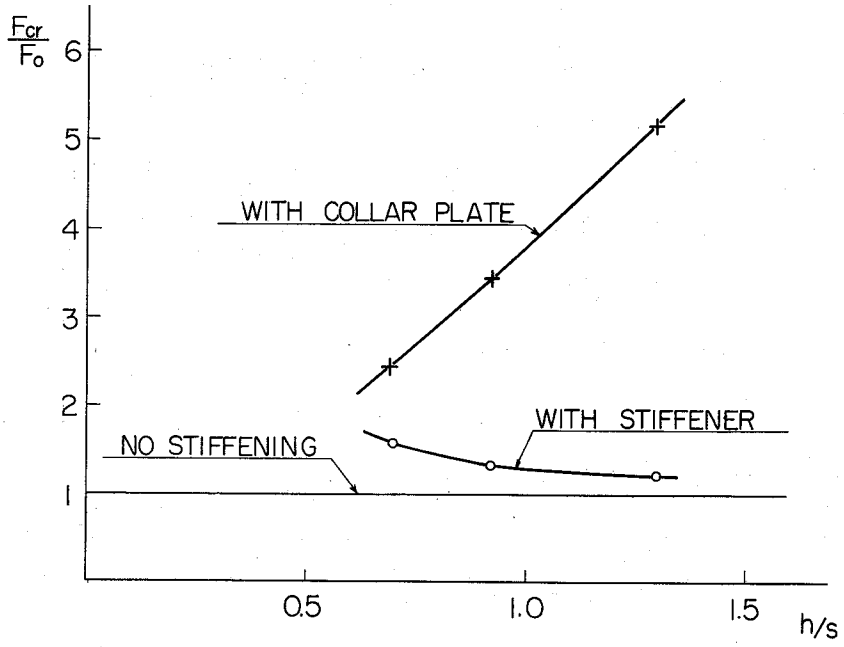


図４．２９　補強効果

0.７～1.３の範囲ではウエブの座屈強度は，スロット高さ比の値によって大きく影響を受け，スロット高さ比が大きくなると自由辺が長くなって，ウエブのせん断座屈強度は大幅に低下する。従って，スロット部を補強しないウエブの座屈強度を基準値に選んで，カラープレートを付けたウエブの座屈強度を表示すると，スロット高さ比の大きい領域で補強効果が大になる。

一方，スロットの高さ比の小さい領域では，カラープレートによる補強効果が小さくなることは，スロット部を補強しないウエブで自由辺hが短くなって座屈強度が上昇して，カラープレートを用いて補強したウエブの座屈強度に近づいていくことを意味している。事実，極限として，h/sが零になると，カラープレートを用いて補強したウエブと補強なしのウエブの形状は全く同じになり，両者の座屈強度は等しくなる。

水平補強材による補強効果は，カラープレートに比べるとよくない。しかし，スロットの高さ比h/sの小さい領域，すなわち縦通材心距sが大きくなると，補強材による補強効果のあることがわかる。水平補強材によって座屈強度の上昇効果の少ない理由としては，ウエブのせん断座屈強度の弱点はスロット部の自由辺にある，したがって，スロット上部に水平補強材を設けて座屈モードを変えることによって，間接的な補強効果を期待しても，スロット部の自由辺はそのまま残っているので，ウエブのせん断座屈強度の大幅な増加がないことになる。

5. その他船体各部の座屈強度

前節では，大形油槽船で特に問題になる横桁ウエブの座屈強度を論じた。そこで本節では，油槽船の横桁ウエブ以外の場所で座屈が重要である船体各部の座屈強度を解析する。

5．1　三角形ブラケットの座屈強度

船体に用いられる構造部材の結合部では応力集中を避け，力の伝達を向上させるために，ブラケットを付して補強する。このブラケットが外力を受けて局部座屈すると，結合部の剛性が低下して，構造部材の強度が大幅に低下することになる。

三角形ブラケットの座屈強度を解析するには，まず，ブラケット内部の応力分布を計算し，その後座屈の固有値を計算しなければならない。しかし，通常，ブラケット内部の応力分布は一様でなく，微分方程式あるいはエネルギー法から応力分布を計算されねばならないので，特別の場合を除いて，その計算は困難である。従って，ブラケットの座屈強度の理論的研究は簡単な応力分布の場合に限られ非常に少ない。

本研究では，ブラケットの応力分布および座屈の固有値の計算に，一貫して有限要素法を適用して，座屈強度を解析できるプログラムを完成しているので，それによって行なうことにする。ブラケットには図5．1に示すように，ブラケットが結合されている部材より直角をはさむ2辺に，直線的に変化する強制変位が作用するので，反力として辺に垂直力とせん断力が生じる。解析にあたっては，ブラケットを同図に示すような有限要素に分割する。

種々の境界条件を有するブラケットが，上記の強制変位を受けた時の座屈強度を，解析して得られた結果を表5.1に示す。同表には，*Salmon*[40]がエネルギー法を用いて得た結果も示してある。*Salmon*は座屈の前後でブラケットの応力分布が変るとして，有限変形理論を用いて解析している。本研究による解は，*Salmon*の解と良く一致している。同表から明らかなように，全周辺が単純支持されたブラケットは，1次の座屈モードの座屈荷重は2次の座屈モードの値よりも3％低いだけである。それゆえ，ブラケットの座屈防止用に対称軸上に補強材を付けると，座屈モードは1次から2次に変化するが，座屈強度は僅か3％しか上昇しない。従って，補強材をブラケットの対称軸上に付けても，座屈防止の効果はほとんどないことが明らかになった。

本法を用いて解析した時に得られた座屈波形の1例として，全周辺が単純支持されたブラケットの1次および2次の座屈波形を図5．2に示す。

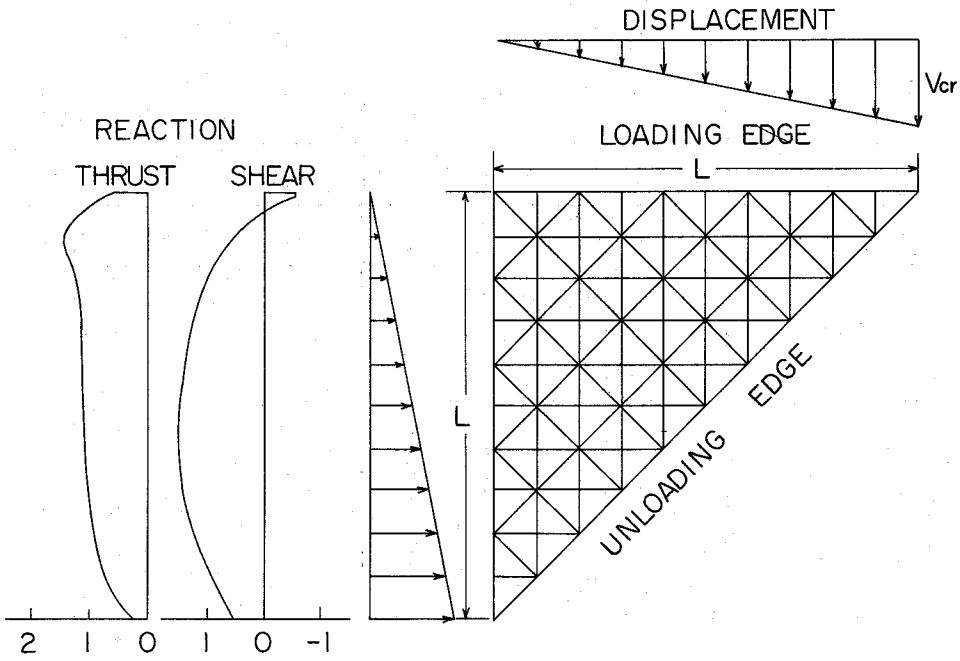


図５．１　三角形ブラケット

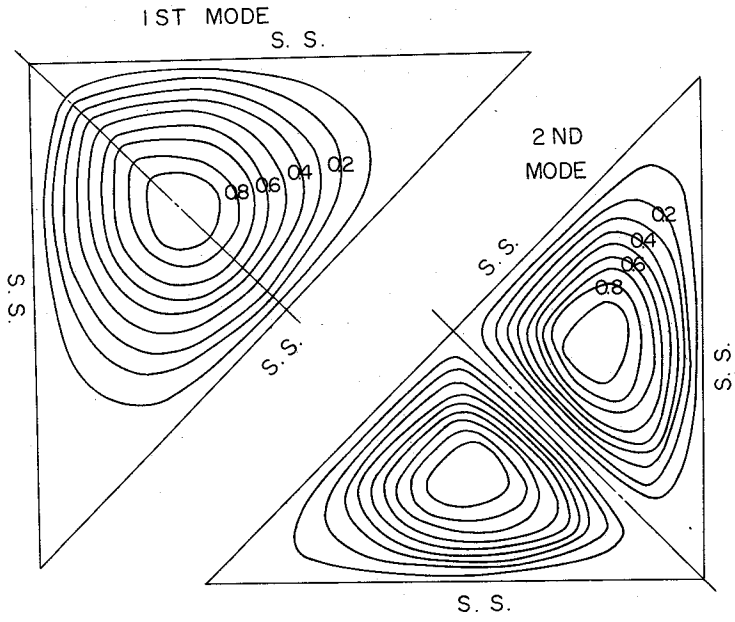


図５．２　座屈波形

５．２　千鳥溶接されたパネルの座屈強度

船体構造部材の殆んど全ては溶接によって組み立てられており，溶接法としては主として連続溶接および千鳥溶接が採用されている。千鳥溶接されたパネルは周辺で部分的にしか固着されていないので，座屈強度が低下することが予想される。従って，その座屈強度を正確に把握する必要がある。本研究では，千鳥溶接されたパネルが圧縮力を受ける時の座屈強度を解析する。

表５．１　三角形ブラケットの座屈強度

Itesms	case 1	case 2	case 3	case 4	case 5	case 6	case 7
Loading Edge	S.S.	S.S.	Fixed	S.S.	S.S.	Fixed	Fixed
Unloading Edge	Free	Free	Free	S.S.	S.S.	S.S.	S.S.
K/K_0	1.00	3.68	5.97	12.48	12.80	11.93	13.86
K/K_0^*	1.00	—	6.03	—	—	—	—
Buckling Mode	1st	2nd	1st	1st	2nd	1st	2nd
$(V_{cr}/L)/(t/L)^2$	247	909	1475	3083	3171	2946	3423
$(V_{cr}/L)/(t/L)^{2*}$	233	—	1405	—	—	—	—

＊：Values by Salmon[40]

千鳥溶接されたパネルの座屈強度を解析する場合，境界条件としては，千鳥溶接された辺では固定，溶接されてない辺では単純支持であると考える。本節では，図５．３(a)に示すように固定辺と単純支持辺が入り混ざった不連続な境界条件を有する平板の圧縮座屈強度を解析する。

有限要素法を用いて，同一辺で固定と単純支持が混在する不連続境界条件を有する平板の座屈強度を解析する場合，境界条件が変化する点の境界条件の取り扱い方法として，次の２つ，すなわちスリット法および連続法を考える。

(i)　スリット法

境界条件が固定から単純支持に変化する位置をLMとする。図５．３(b)に示すように，LMに沿ってスリットを入れて，LM上で隣接する２つの有限要素を切り離して，LMの右側の要素の節点Aに固定，左側の要素の節点Bに単純支持の条件を与える。この時，スリットの幅は無限小にする。すなわち，A点とB点は同じ位置にあるものとする。従って，L点では傾斜の不連続があり，LMに沿って撓みは不連続になる。

(ii)　連続法

図５．３(c)に示すように，境界条件が変化する位置LMが有限要素の内部になるように有限要素の位置を定める。LMの右側の節点Aに固定，左側の節点Bに単純支持の境界条件を与える。この場合，境界条件が変化する位置が明確に定まらなくなるので，有限要素の幅Δを小さくすることによって，有限要素の節点間の中点，すなわち$\Delta/2$の位置が境界条件の変化する位置であると考える。

解析に用いる平板は，アスペクト比αが1.0，1.5および2.0の３種類で，図５．３(a)に示す

ように荷重辺が単純支持され，支持辺の中央部の相対する部分が固定されて，残りの部分が単純支持されたものとする。

固定部分の長さを無次元化して，次式の固定度βを用いて表わす。

$$\beta = \frac{\text{固定部分の長さ}\ (\beta L)}{\text{支持辺の長さ}\ (L)} \qquad (5.1)$$

スリット法および連続法を用いて不連続境界を取り扱って，有限要素法を用いて，座屈波形が奇数次のモードの場合を計算して，その結果を図5.4に示す。同図には，エネルギー法を用いて得た座屈値[41]もあわせて記入した。

図5．4において知られるように，連続法による解はエネルギー法と良く一致している。一方，スリット法による解は，固定度βが0.75の場合に，座屈値は非常に大きくなっている。エネルギー法による解は，常に高めの近似値を与えることになるが，スリット法を用いて得られる解は，前者の解に比べて変動する値を示しており，正解に対する推定を困難にしている。

このようなスリット法の欠陥を考察してみると，スリット法においては，図5．3(b)で，スリットLMに沿って撓みが不連続であるから，そこで傾斜および曲率は無限大になり，LM近傍のポテンシャル・エネルギーが正しく評価されないことになる。これがスリット法による解の精度の悪い原因であると考えられる。

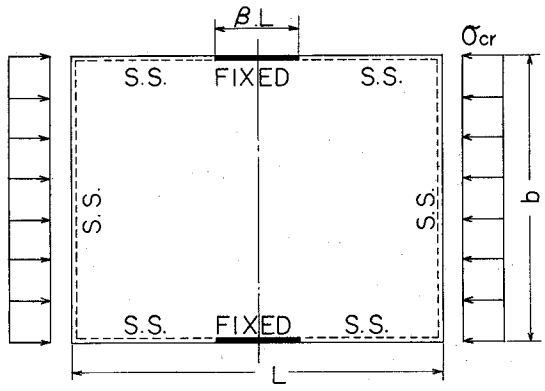
従って，以後連続法によってのみ座屈強度を解析する。その結果を図5．5に，エネルギー法による結果[41]とあわせて示す。座屈モードが偶数の場合も奇数の場合も，有限要素法による解はエネルギー法による解と良く一致している。実際の平板は，最小の座屈荷重で座屈する。アスペクト比が1の平板は，固定度βが小さい間は1次のモードで，βがほぼ0.2より大きくなると2次のモードで座屈する。アスペクト比が1.5の平板では，固定度に無関係に，常に，2次のモードで座屈する。アスペクト比が2.0の平板では，固定度の値が大きくなるにつれて，座屈モードは2次→3次→4次→3次のモードに変化する。

以上，いずれの場合も，固定度βが増すにつれて座屈強度は増加し，支持辺が固定された平板の座屈強度に近づいていく。

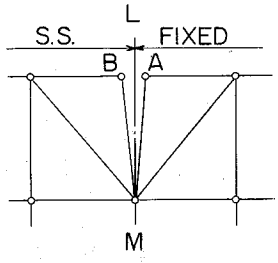
5．3　中心に円孔を有する板の座屈強度

船体構造では重量軽減あるいは交通路を設けるために，開孔を設けることが多い。開孔の形状には円孔，長円孔，矩形孔などがあるが，なかでも中心に円孔を有する板は2重底肋板などに数多く見られる。

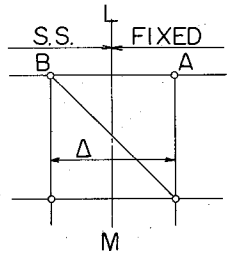
これらの開孔が座屈強度に及ぼす影響は，非常に重要な設計上の問題であるが，その理論的研



(a) PLATE INTERMITTENTLY FIXED



(b) SLIT METHOD



(c) CONTINUOUS METHOD

図５．３　境界条件

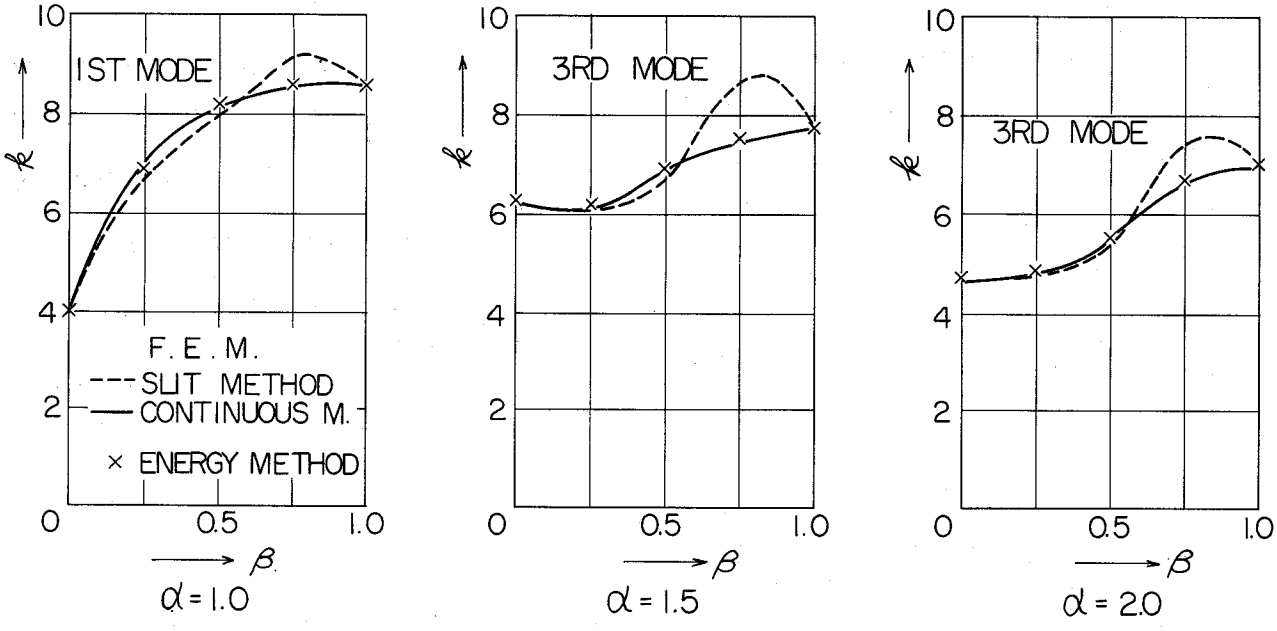


図５．４　座屈強度（スリット法と連続法）

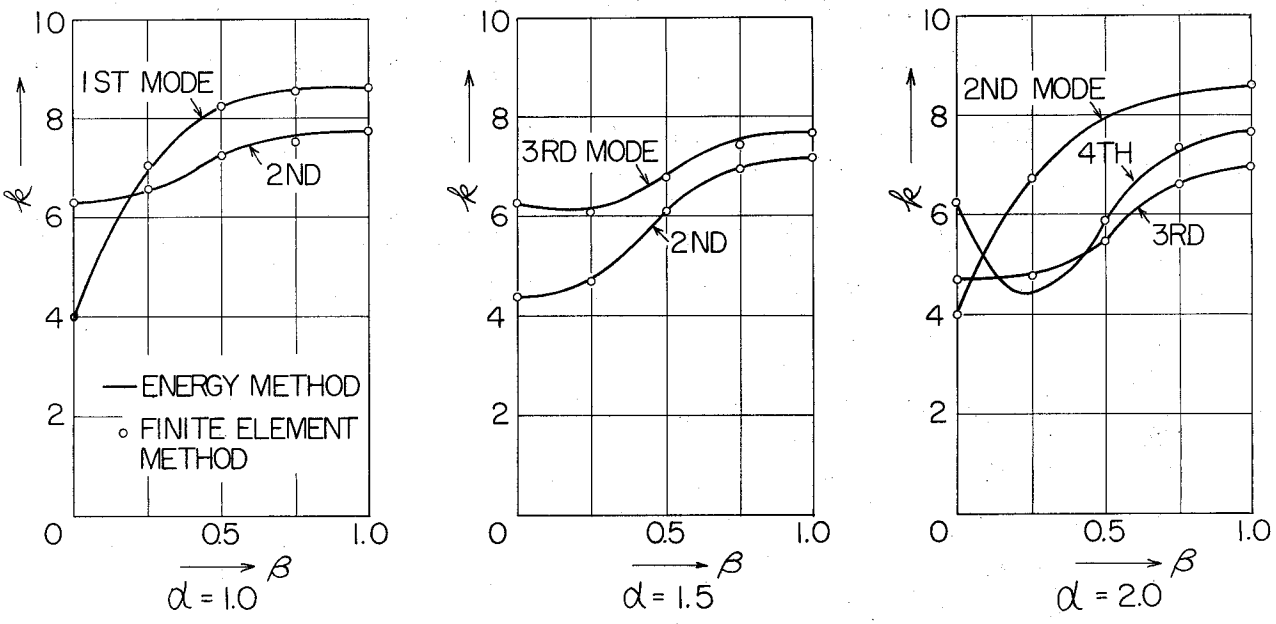


図５．５　座屈強度（連続法）

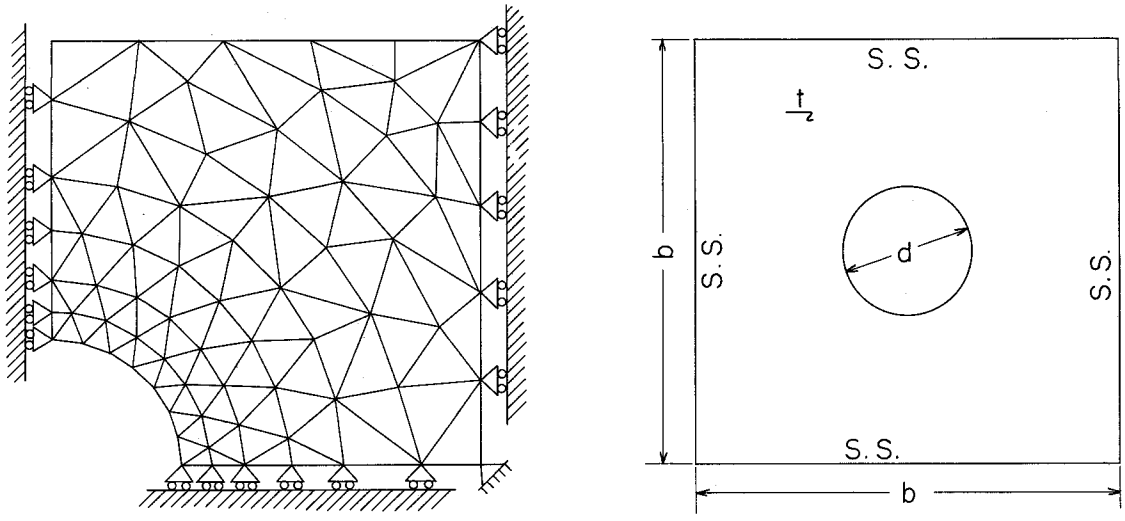
究は，従来余り行なわれていない。その理由は，板の座屈強度の計算に必要な応力分布を精密に計算することが，これまでほとんど不可能であったこと，さらに，応力分布が適当に求まっても有孔板の座屈荷重を工学的に求める方法が，ある特殊な場合を除いて，十分確立していなかったからである。

そこで，本研究では，このような問題に対して有効である有限要素法を適用して，中央に直径 d の円孔を有する正方形板が一様な強制圧縮変位を受けた時の座屈強度を解析して，開孔が座屈強度に及ぼす影響を検討する。

解析では，図５．６(a)に示すように，対称性を利用して全体の¼の領域を対象とした。有限要素の分割例として，開孔比 $d/b=0.3$ の場合を図５．６(a)に，又応力解析および座屈解析の境界条件をそれぞれ図５．６(a)および(b)に示す。外力として開孔板に強制変位を作用させた時に生じた反力分布を図５．７に，また座屈強度を図５．８に示す。予想されるように，反力分布は開孔の影響を受ける辺の中央部で小さくなっている。

Schlack[42]が図５．９に示すような実験装置を用いて，中央に円孔を持つ板をボール・ベアリングを使用して単純支持し，外力として一定変位を与えて，座屈実験を行なって得た座屈値，および理論解析として応力解析および座屈解析にエネルギー法を適用して得た座屈値，および吉識教授[43]らが応力解析には有限要素法を，座屈解析にはエネルギー法を用いて得た座屈値を，図５．８にあわせて図示する。

同図から明らかなように，応力解析および座屈解析に一貫して有限要素法を適用した著者の解析解が，*Schlack* の実験値と最もよく一致している。さらに，開孔があると，座屈強度は低下し，開孔比 $d/b=0.3$ になると座屈強度は約１５％も低下する。



(a) STRESS ANALYSIS　　(b) BUCKLING ANALYSIS

図５．６　境界条件

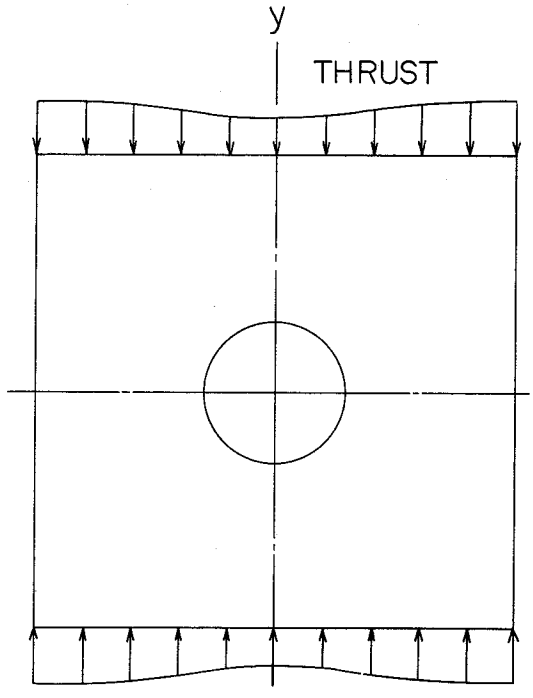


図５．７　反力分布

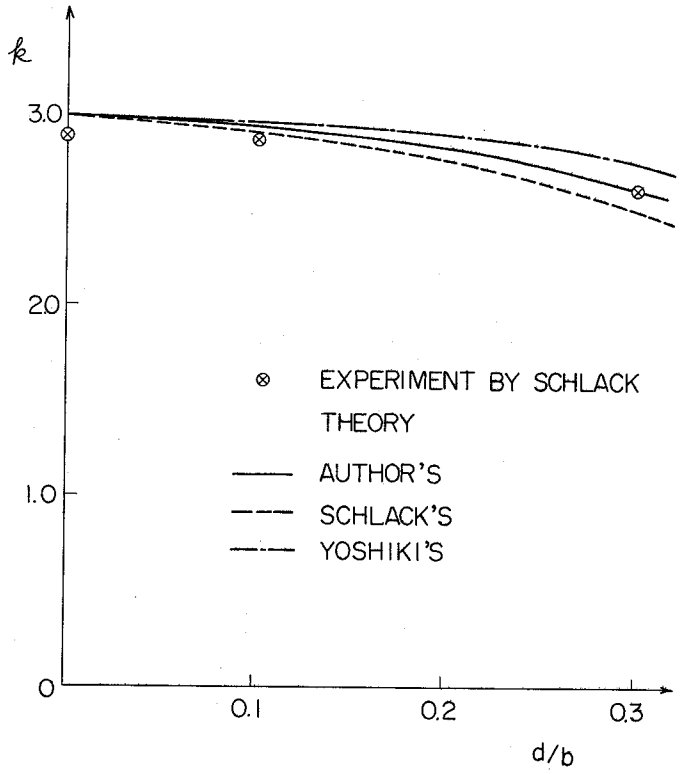


図５．８　有孔板の圧縮座屈強度

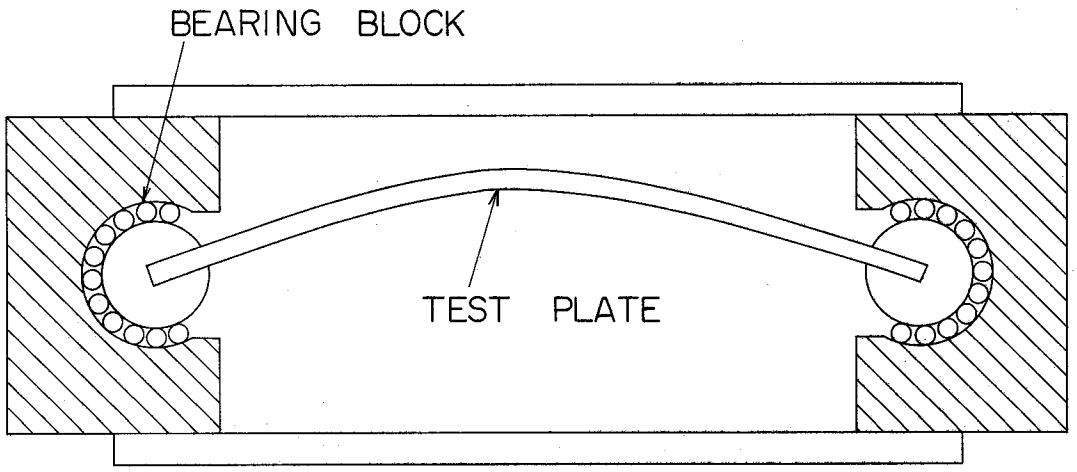


図５．９　実験装置

５．４　矩形の開孔を有する板のせん断座屈強度

油槽船を設計する場合，桁の重量を最小にするために，桁の板厚は*Rule* が規定している最小板厚をとり，ウエブを深くして必要な剛性を満足させるのが普通である。従って，油槽船が大形になればなる程，ウエブは深くなり，せん断力の影響が顕著になってくる。このように大きなせん断力が作用するウエブに開孔（例えば縦通材を貫通させるためのもの）を設ける場合が多い。

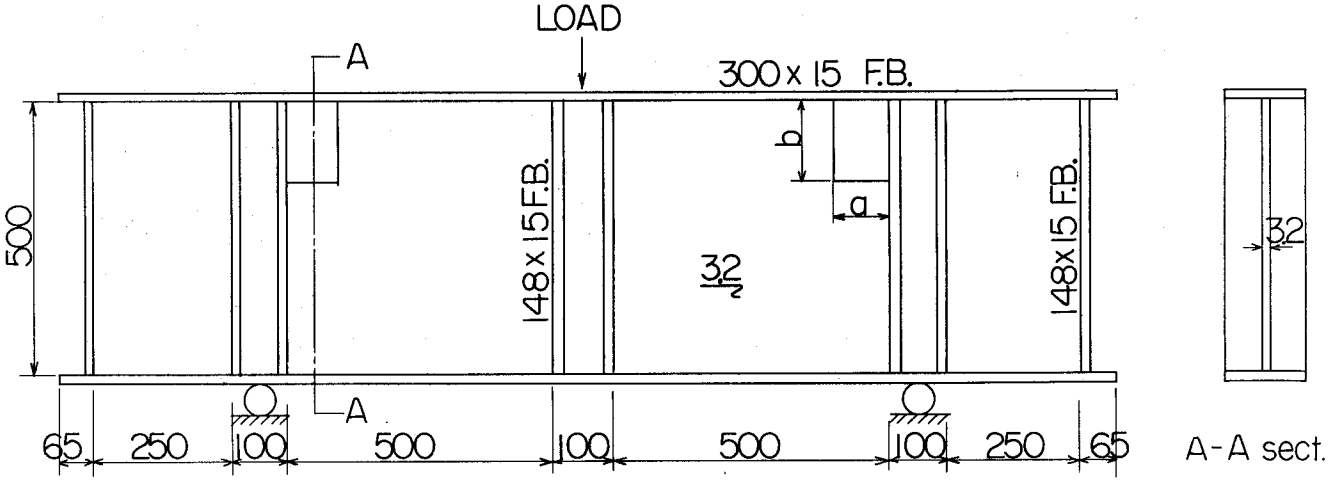
この開孔の影響によって，座屈強度が低下して，ウエブはせん断座屈しやすくなる。事実，油槽船の横桁リングのウエブに多発した座屈事故は，せん断座屈と見なされる座屈波形を呈している例が多い。

本節では，隅部に矩形の開孔を有する正方形板のせん断座屈強度に関して，実験および理論解析を行なって，開孔がせん断座屈強度の低下に及ぼす影響を検討する。

実験に用いる試験片は，図５．１０に示すように，周辺固定された正方形平板で，その隅部に矩形の開孔を有している。実験は２点支持，中央集中荷重とし，４００ *ton*アムスラー試験機を用いて実施した。模型を溶接で組み立てる時に生じる残留応力が，その座屈強度に及ぼす影響を除くために，応力焼鈍して残留応力を除去した。座屈強度値は，荷重Pとパネルの横撓みδを計測して$P\sim\delta^2$ 法によって決定した。実験によって得られた座屈荷重を図５．１１に図示する。

理論解析は有限要素法を用いて行なった。模型の座屈強度を解析する時の境界条件および三角形有限要素による分割状況を図５．１２に示す。模型に付した面材および補強材は軸力のみを受けもつ単純梁として取り扱った。有限要素法によって得られた座屈強度値を図５．１１に図示する。同図から明らかなように，計算値と実験値は良い一致を示している。

開孔の存在によって，平板のせん断座屈強度は大幅に低下している。開孔の寸法が９０㎜×１５０㎜の$S-3$模型では，約４０％の座屈強度の低下が見られる。



	PERFORATION	
T. No.	a (mm)	b (mm)
S-1	0	0
S-2	60	100
S-3	90	150

図５．１０　試　験　片

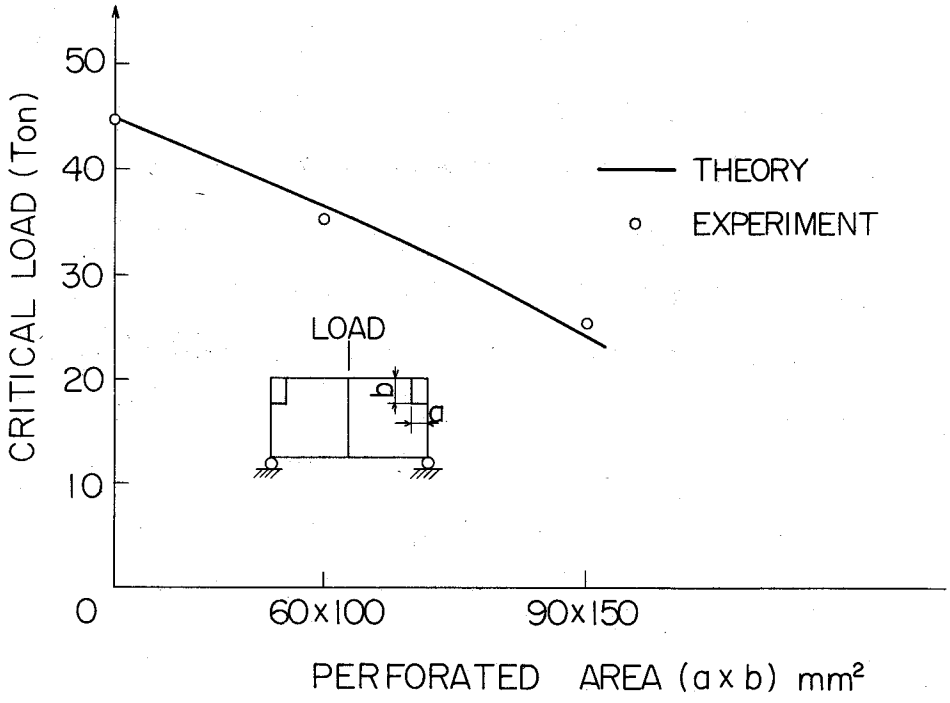


図５．１１　せん断座屈強度

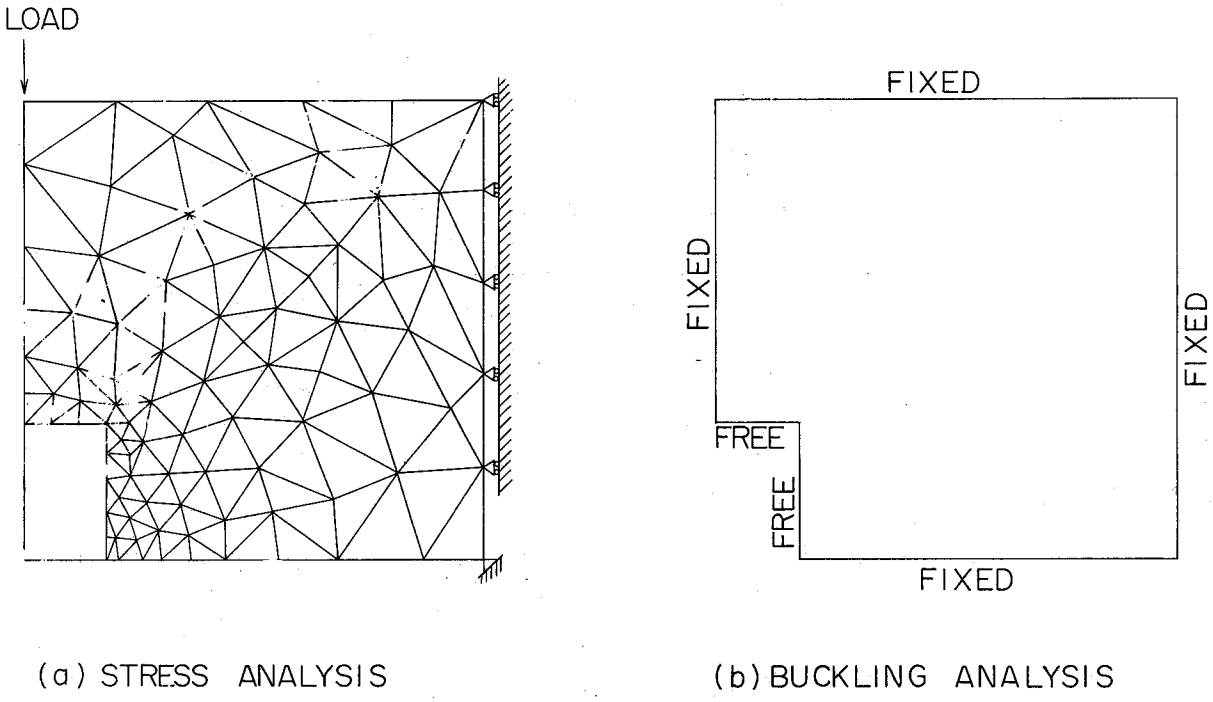


図５．１２　境界条件

5．5　溶接組立柱の圧縮座屈強度

主に，圧縮荷重を受ける構造部材を，通常，柱と呼ぶが，そのなかで船体構造に広く利用されているものにI形，矩形あるいは正方形断面柱がある。これらの断面を構成している板要素は，大体2種類に大別できる。その1つは，通常ウエブと呼ばれるもので，柱の長さ方向に平行な両辺で他の板要素と接続し，その辺が支持辺となる板要素である。他は，1辺が自由辺で他辺が他の板要素と接続しているような板要素で，I形断面柱ではフランジと呼ばれるものである。このような断面柱が板材から溶接によって組み立てられた場合には，各板要素に残留応力が生じて，板要素の座屈強度が低下する。

一般に，溶接を行なった場合，部材はまず熱せられ，その後不均一な冷却過程を受ける。このように局部的に加熱，冷却の熱サイクルによって，冷却後に部材に残留応力が生じる。このような残留応力の大きさは，材料の温度に依存する諸性質と共に，溶接入熱量，溶接層数，部材の断面形状および長さなど非常に多くの要因によって影響される。従って，部材に生じる溶接残留応力分布を簡単に推定することは困難である。しかし，平板の長さ方向の両辺で溶接された場合に生じる残留応力分布は，溶接線の近傍で母材の降伏応力に近く，中央に進むにしたがって減少する。

本節では図5．13(a)に示す正方形断面柱が圧縮荷重を受ける場合，柱を構成する板要素の局部座屈強度を解析する。このような板要素は周辺単純支持の矩形板として取り扱い，残留応力の大きさが平板の座屈強度に及ぼす影響を詳しく調べるために，残留応力分布を図5．13(a)のように単純化する。この分布は矩形分布の場合の引張応力側と圧縮応力側とを結ぶ直線を中心にして引張応力側の方へ傾斜させた分布になっているが，ここで取り扱う寸法の平板に対しては非常によい近似になっている。また，このように単純化された分布では，中央部の圧縮応力σ_cの大きさで，残留応力分布を規定することができるので好都合である。なお，この残留応力分布は，長さ方向に直角な断面で平衡を保っている。

ここでは，中央の圧縮残留応力σ_c/σ_Yが0および¼の場合に対して数値計算を行なうことにする。この場合座屈は弾性から弾塑性さらに塑性域におよび，応力分布が一様でなく，しかも，弾性部分と塑性部分とが混在する場合に対しても，本解析法を適用する。

解析に際しては，平板は非常に長いと仮定しており，その座屈波長は最小の座屈値を与えるようなところで生じると考えてよい。従って計算は種々のアスペクト比の平板について計算を行なって，その中で最小値を与えたものを採用して図5．13(b)に図示した。これらの結果は，材料の機械的性質の相違する場合にも適用できるようにするために，縦軸には平均座屈応力σ_{cr}と降

伏応力σ_Yの比σ_{cr}/σ_Yをとり，横軸には$(b/t)\sqrt{\sigma_Y/E}$をとって無次元化した。同図にはエネルギー法を適用して得た値[44]も記入してあるがエネルギー法および有限要素法を用いて得た結果は良い一致を示している。

図５．１３(b)で$\sigma_c/\sigma_Y=1/4$の場合に座屈強度曲線が弾性から弾塑性座屈に入るところで水平の不連続な部分が現われている。これは計算を行なうに際して仮定した残留応力分布から知られるように，中央部に一様な圧縮残留応力が存在し，それが圧縮荷重のもとで同時に塑性化し，板の剛性が急に低下するためである。又座屈強度曲線が横軸と交わる点は$\sigma_{cr}/\sigma_Y=0$であり，外力の作用なしに座屈することを意味している。これは溶接後の冷却過程で残留応力がしだいに大きくなり，その大きさによっては板が座屈するもので，溶接変形の一要因であると考えられる。

6. 総　　括

第２編第３章においては有限要素法に基づいて，平板の弾性および塑性座屈強度を理論的に解析する方法を述べ，超大形油槽船で座屈強度が問題になる船体各部の座屈強度を解析した。

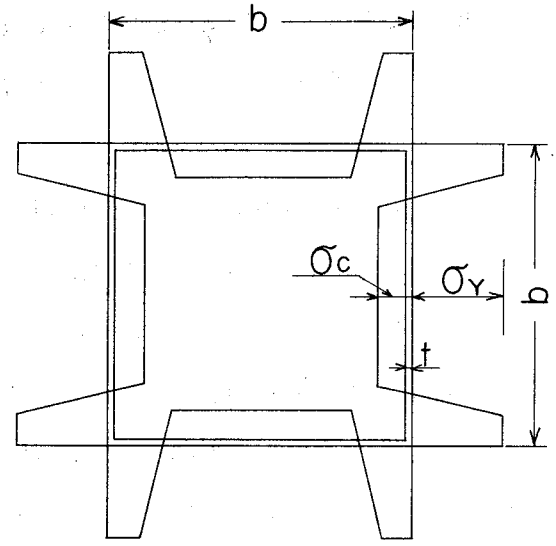
以下においては，第２編第３章で得られた主要な結論を記述する。

第１節の緒言に続いて，第２節ではこれまでの平板の弾性および塑性座屈理論を述べ，さらに，残留応力分布を有する平板の弾性および塑性座屈理論を導いた。

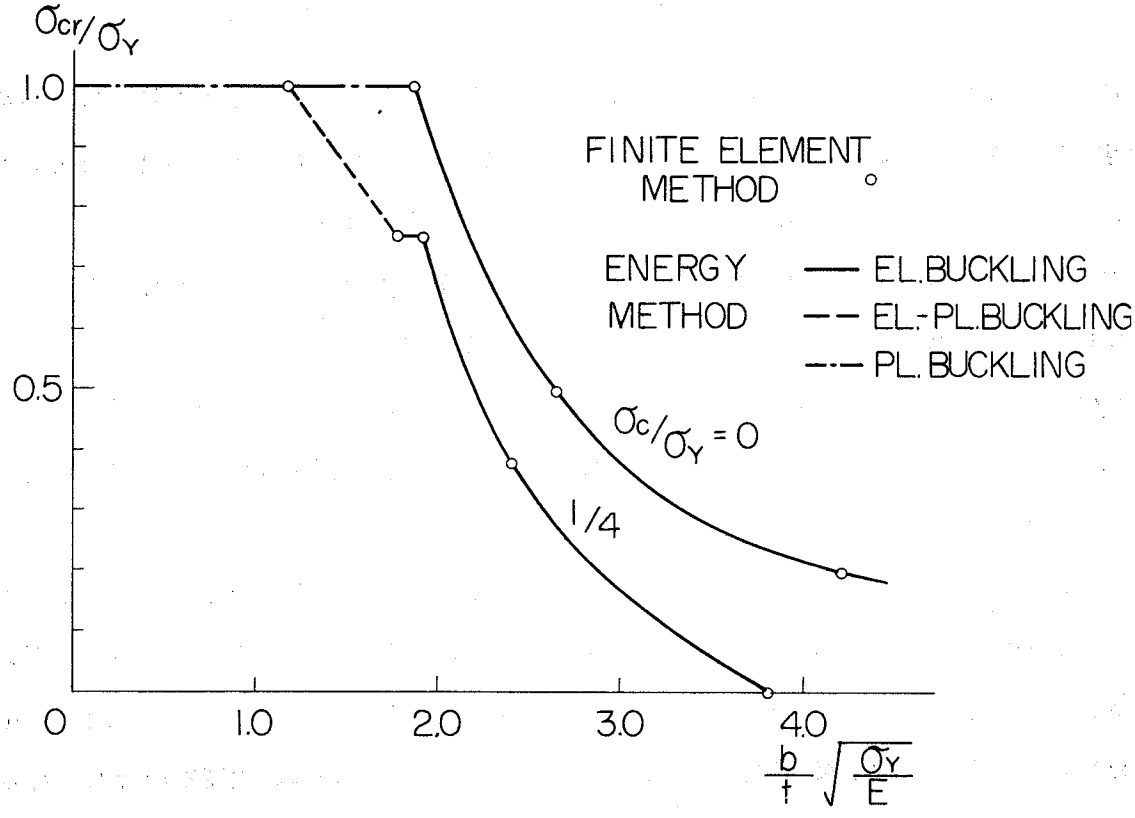
第３節では有限要素法に基づいて，平板の弾性および塑性座屈理論を始めて展開した，また，本法を用いて平板の基本的な例について弾性および塑性座屈強度を解析し，正解と比較して精度の良いことを確かめた。

第４節では，超大形油槽船の設計で最も問題になる横桁ウエブの座屈強度を解析するために，第３節で展開した理論に基づいて解析用プログラムを開発した（４．１）。このプログラムは応力解析と座屈強度解析とを一括して行なうようになっており，このプログラムの適用性を検討するために１２万*D.W.T.*級の油槽船の1/5縮尺模形を製作し，その座屈強度を解析し，得られた結果を実験結果と比較して両者が良く一致することを確かめた（４．２）。また，６万８０００*D.W.T.*の油槽船の横桁ウエブに生じた座屈事故を解析したが，その結果が実船に生じた座屈事故を非常に良く説明することができた（４．３）。このように，有限要素法をもとにした解析プログラムが横桁ウエブの座屈強度解析に非常に有用であることが明らかになった。

一般に，横桁ウエブのスロットはウエブがせん断座屈する場合に顕著な影響を及ぼすので，ここではさらに横桁ウエブのせん断座屈強度に及ぼす種々の影響を検討した。すなわち，



(a) RESIDUAL STRESSES OF COLUMN AT A SECTION



(b) BUCKLING STRENGTH OF PLATE WITH RESIDUAL STRESSES

図５．１３　溶接組立柱の座屈強度

(1) 6万～40 D.W.T.級の油槽船に通常用いられる横桁ウエブにせん断力と曲げモーメントが組み合さって作用しても，それによって座屈強度は低下しない。

(2) ウエブの曲げ座屈強度は，ウエブからスロット上部の矩形板を取り出し，その板が全周辺で単純支持されたものとして取り扱って，簡単にその座屈強度を充分良い精度で推定できる。

(3) ウエブの形状がせん断座屈強度に及ぼす影響としては，スロットの高さ h が最も影響を与える。通常油槽船で採用されているスロット高さ比 h/s の領域では，スロットの高さ h が高くなると，座屈強度は急激に低下して，h/s が 0.7 から 1.3 に増加すると，座屈強度は約 60 % 低下する。

(4) ウエブのスロット部にカラープレートを設けて補強すると，せん断座屈強度は大幅に上昇する，特にスロット高さが高くなる程，その効果は高い。

(5) ウエブに水平補強材を設けると，せん断座屈強度は 2 ～ 6 割上昇する。特に，スロット高さ h が小なる領域で座屈強度の増加が大きい。

(6) ウエブのせん断座屈に対する補強方法としては，ウエブに水平補強材を設けるよりはスロット部にカラープレートを設けるほうが補強効果が大である。特に，スロット高さ比 h/s が大きくなると補強効果が著しく，座屈強度はスロット部を補強しない場合の約 5 倍にも増加する。

第5節では，横桁ウエブ以外で座屈が問題になる船体各部の座屈強度を有限要素法に基づいて解析した。

（5．1）では，船体の構造部材の接合部に設けられたブラケットが種々の境界条件を有する場合について，座屈強度を計算した。本法によって得られた結果をエネルギー法による結果と比較して，両者が良く一致することを明らかにした。

（5．2）では千鳥溶接されたパネルの圧縮座屈強度を解析した。千鳥溶接されたパネルの境界条件の取り扱い方法として連続法とスリット法の 2 っを考えて，座屈強度を解析したが，連続法を用いて得た解がエネルギー法による解と良く一致することが明らかになった。また，固定辺の長さ，すなわち溶接長が長くなると座屈強度が上昇し，同時に座屈波形のモードが変化することが明らかになった。

（5．3）では船体の構造部材に設けた円孔が圧縮座屈強度に及ぼす影響を解析して，座屈強度が低下することを明らかにした。本法による解は実験値と良く一致し，本法の有用性が明らかになった。

（5．4）では，矩形の開孔を有する板のせん断座屈強度を解析して，板に開孔を設けるとせん断座屈強度が大幅に低下すること，および解析結果と実験結果は良く一致することが明らかに

なった。

（５．５）では溶接組立柱に生じた残留応力が柱を構成している板要素の局部座屈強度に及ぼす影響を解析して，残留応力が板の座屈強度を大幅に低下させることを明らかにした。また，本法による解はエネルギー法による解と非常に良く一致することが判明した。

これらの結果より，外力による平板の面内応力分布の計算から座屈荷重の計算まで一貫して有限要素法を適用することによって，あらゆる荷重状態および幾何学的形状の平板の弾塑性座屈の問題が解けることが判明した。そして，有限要素法を基にした平板の座屈強度解析法を用いて，超大形油槽船の船体各部の座屈強度を解析して，種々の問題を非常によい精度で解析できた。

第４章　補強板の座屈強度

1.　緒　　言

船体構造は大部分板要素から構成されていると考えることができる。このような板要素に補強材を付けた場合には，面内荷重に対する座屈強度を増加せしめることができる。この他，板に垂直な荷重が作用する場合には，板厚を増加せずに，補強材等によって板の曲げ剛性を効果的に上昇せしめることができる。このような補強法は少ない重量の増加で，より効果的な板の強度，剛性を増加せしめることを意図したものである。従って，船体構造に補強材を用いて，効果的な補強方法を決定することは非常に重要な設計上の問題の１つになっている。

実際の船体では，一般に，補強材を板の片側に付けた非対称補強板が大部分を占める。この非対称補強板の座屈強度を厳密に解析する場合には，補強板の中性軸が板要素および補強材の中性軸と一致しない事，さらに，補強材の捩りおよび曲げ捩り剛性を考慮しなければならず，これらの影響を厳密に考慮して補強板の座屈強度を解析することは非常に困難なことである。それ故，これまでに非対称補強板の座屈強度に関してなされた研究は非常に少ない。

本研究では，上記の諸項を厳密に考慮して，非対称補強板の座屈強度理論を有限要素法に基づいて展開し，補強材の座屈強度に及ぼす影響を詳しく検討する。

なお，板の両面に対称に同一形状の補強材を付けた対称補強板の座屈強度は，非対称補強板の座屈理論を用いて容易に求められる。

第１節の諸言に続いて，第２節では有限要素法に基づいて非対称補強板の座屈理論を展開し，さらに補強材の変位関数を導く。

第３節では，第２節で展開した有限要素法による補強板の座屈理論を用いて，非対称補強板の座屈強度を解析し，効果的な補強方法を検討する。

2.　補強板の座屈強度

２．１　補強板の座屈強度の解析法[45]

平板および補強材より構成された補強板（図２．１）に面内荷重（圧縮，曲げ，せん断またはその組合せ荷重）が作用した時に，荷重が増加してある値に達すると，補強板は座屈して横撓みを生じる。この場合の平衡方程式は次のような仮定のもとで導かれる。

(1)　変形または変位とひずみの関係は変形が微少であり，その間には線形関係が成立する。

(2) 変形または変位は微少であり，力の釣り合いは変形前の形状ならびに状態に対して成立する。

(3) 補強材の接合線上において平板および補強材のなす角は変化しない。

この場合の平衡方程式は補強板を構成する平板および補強材を補強材の接合線上において，それぞれ切り離して別々に座屈の平衡方程式を作成する（図２．２）。対称補強板（板の両面に対称に同一形状の補強材を付けた補強板）についての平衡方程式は次式で与えられる。[45]

補強材間の i 番目の平板について，

$$\frac{\partial^4 w_i}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4 w_i}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w_i}{\partial y^4} = -\frac{t_i}{D_i}\left[\sigma_{xi}\frac{\partial^2 w_i}{\partial x^2} + 2\tau_{xyi}\frac{\partial^2 w_i}{\partial x \partial y} + \sigma_{yi}\frac{\partial^2 w_i}{\partial y^2}\right] \qquad (2.1)$$

i 番目の補強材について，

$$EI_i\frac{\partial^4 w_{is}}{\partial x^4} = -D_i\left\{\frac{\partial^3 w_i}{\partial y^3} + (2-\nu)\frac{\partial^3 w_i}{\partial x^2 \partial y}\right\} + D_{i+1}\left\{\frac{\partial^3 w_{i+1}}{\partial y^3} + (2-\nu)\frac{\partial^3 w_{i+1}}{\partial x^2 \partial y}\right\} - t_{is}\sigma_{xis}A_i\frac{\partial^2 w_{is}}{\partial x^2} \qquad (2.2)$$

$$GJ_i\frac{\partial^3 w_{is}}{\partial x^2 \partial y} = D_i\left(\frac{\partial^2 w_i}{\partial y^2} + \nu\frac{\partial^2 w_i}{\partial x^2}\right) - D_{i+1}\left(\frac{\partial^2 w_{i+1}}{\partial y^2} + \nu\frac{\partial^2 w_{i+1}}{\partial x^2}\right) \qquad (2.3)$$

ここで

$$D_i = \frac{Et_i^3}{12(1-\nu^2)}$$

t_i ： i 番目の平板の板厚

w_i ： i 番目の平板の横撓み

I_i ： i 番目の補強材の断面２次モーメント

J_i ： i 番目の補強材の捩り定数

A_i ： i 番目の補強材の断面積

t_{is} ： i 番目の補強材の板厚

w_{is} ： i 番目の補強材の横撓み

σ_{xi} , σ_{yi} , τ_{xyi} ： 補強板が座屈した時に i 番目の平板に作用していた応力成分

σ_{xis}　：補強板が座屈した時に i 番目の補強材に作用していた軸応力

補強材の位置で両側の平板の撓みおよび撓み角の連続条件が満足されなければならないので，補強材の接合線上における連続条件は次式で与えられる。

$$\left.\begin{aligned} w_i &= w_{i+1} = w_{is} \\ \frac{\partial w_i}{\partial y} &= \frac{\partial w_{i+1}}{\partial y} \end{aligned}\right\} \qquad (2.4)$$

従って，この補強板が与えられた境界条件のもとで座屈する場合には，上式の解を境界条件を満足させるための条件式に代入すると，境界値問題としての固有値方程式を得る。その固有値方程式の解が座屈値を与える。

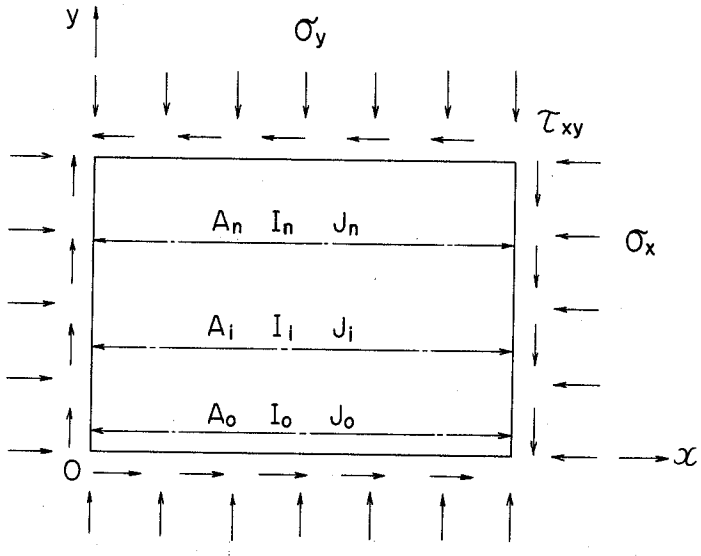


図２．１　補　強　板

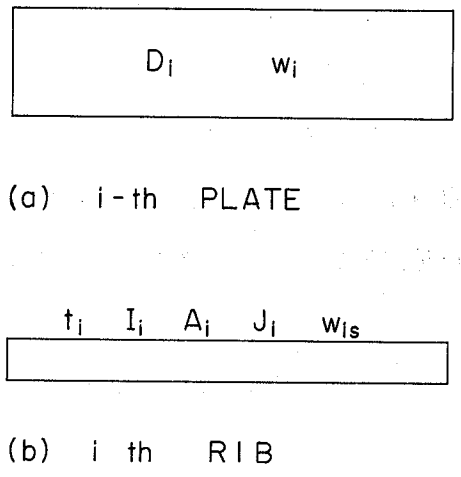


図２．２　補強板要素

補強板が面内荷重を受けて座屈する場合に，その座屈強度は境界値問題の解として求める事ができる。このような問題では，普通，与えられた微分方程式を直接解いて，その解が境界条件を満足するような固有値方程式の有意な解を求める。

一般に，このような方法で補強板の座屈に関した問題で微分方程式から直接座屈強度を求めることができるような荷重および支持条件を持つ問題は少ない。特に，本研究で取り扱う船体を構成する補強板に生じる面内応力分布および支持条件は複雑であり，微分方程式による直接解法を適用することは非常に困難である。

座屈強度解析の近似解法として工学的に有用な方法の1つにエネルギー法[46]がある。一方，数値解析法として良く知られた方法に，微分方程式を差分方程式に置換して解く方法[47]がある。

この他，近年電子計算機の発達に伴って非常に有力な解析法として注目を集めている数値解析法に有限要素法[21]がある。

本論文では，この有限要素法を用いて，新しく補強板の座屈理論を展開し，種々の問題に適用してその適用性を検討する。さらに，本研究では有限要素法を適用することにより，これまで明らかにされなかった船体各部に用いられる補強板の座屈強度を解析する。

2．2　有限要素法による解法

2．2．1　前提条件

有限要素法を用いて補強板の座屈理論を導くにあたって，2．1で述べた仮定に加えて次の仮定を設ける。

(1)　補強材は梁と見做して，その引張り剛性，曲げ剛性および捩り剛性を評価する。

(2)　補強板が面内力を受けて面内変形をする時に，補強板を構成する平板は平面応力状態にあり，補強材は軸応力のみが作用する単軸応力状態にある。

(3)　補強板は座屈によって始めて面外変形を生じる。

2．2．2　有限要素法による補強板の座屈理論

補強板が面内荷重を受けて座屈する場合の座屈強度を解析するには，まず，面内荷重による面内応力分布の計算，および，荷重が増加してある値に達して補強板が座屈する時の座屈値の計算をしなければならない。

本研究では，有限要素法を基にして，補強板の外力による面内応力分布の解析法および座屈強度の解析法を導く。

補強板は平板および補強材より構成されているので（図2．3），有限要素法を用いて，補強板の座屈理論を導くに当って，平板および補強材を適当な形状の有限要素に分割する。ここでは

補強板を構成する平板を3角形板要素に，補強材を直線梁要素に分割する。板要素および梁要素の代表的な有限要素を図2．4に図示する。

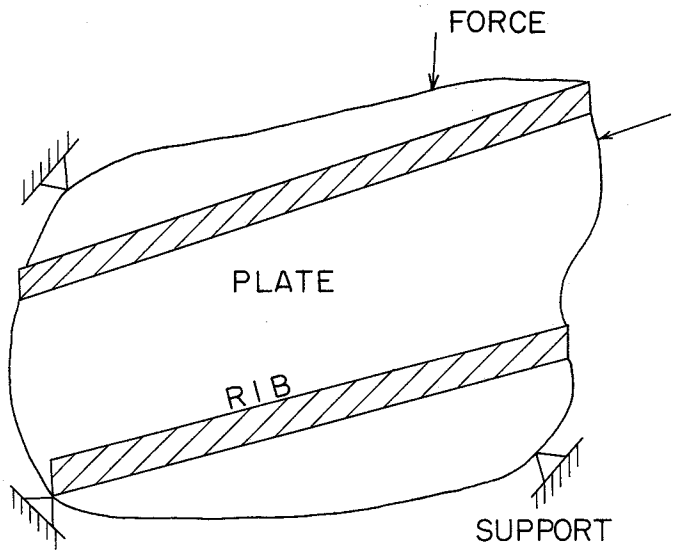


図2．3　補　強　板

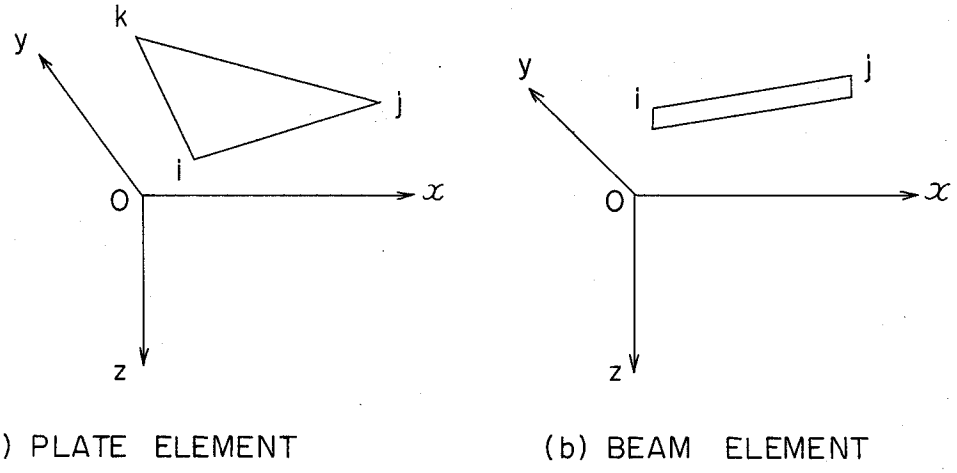


図2．4　補強板要素

(1)　応力解析

補強板に面内荷重が作用して面内変形する場合，面内荷重のもとでは座屈するまで板および梁要素は面外変形を生じないので，補強板を構成する平板および補強材にそれぞれ面内応力が生じる。

今，補強板に生じる応力分布を解析するに当たつて，補強板を構成している板要素と補強材を分けてそれぞれ仮想変位の定理を適用して面内変形の平衡方程式を導く。

(a)　ひずみエネルギーの変分

（a－1）　板要素

有限要素内の応力およびひずみは第2章2．3．1の（2．34）と（2．36）式より節点変位$\{v_N\}$を用いて次式のように書ける。

$$\{\varepsilon\}=\begin{Bmatrix}\varepsilon_x\\ \varepsilon_y\\ \gamma_{xy}\end{Bmatrix}=[B][T_1]^{-1}\{v_N\} \tag{2.5}$$

$$\{\sigma\}=\begin{Bmatrix}\sigma_x\\ \sigma_y\\ \tau_{xy}\end{Bmatrix}=[D_0][B][T_1]^{-1}\{v_N\} \tag{2.6}$$

ここで，$\{v_N\}$は$x\ y\ z$座標で定義される節点変位である。

第N番目の要素内に貯えられるひずみエネルギーの変分δV_Nは

$$\delta V_N=\iint t\cdot\delta\{\varepsilon\}^T\{\sigma\}dxdy \tag{2.7}$$

ここで，$\delta\{\varepsilon\}$は仮想変位$\delta\{v_N\}$によって板要素に生じた仮想ひずみである。

（2．5），（2．6）および（2．7）式より

$$\delta V_N=\delta\{v_N\}^T[k]\{v_N\} \tag{2.8}$$

ここで，$[k]$は平板要素の面内変形に対する剛性行列である。

平板全体に貯えられるひずみエネルギーの変分δV_pは(2．8)式を積分して

$$\delta V_p=\sum_{N=1}^{Q}\delta V_N=\delta\{v\}^T[K]\{v\} \tag{2.9}$$

ここで，$[K]$は平板全体の面内変形に対する剛性行列であり，これは各有限要素の剛性行列をそれぞれ結合されている節点で集合したものであり，$\{v\}$は節点変位である。

（a－ii）　梁要素

梁要素内の任意の点におけるs_G軸方向の変位$\{\delta_0\}$は変位関数$[H_a]$と節点変位$\{\delta_s\}$を用いて，

$$\{\delta_0\}=[H_a(s_G)]\{\delta_s\} \tag{2.10}$$

ここで

$$\{\delta_s\}=\begin{Bmatrix}\delta_i\\ \delta_j\end{Bmatrix} \tag{2.11}$$

δ_i：節点iのs_G軸方向の変位

（2．10）式を微分すると，要素内のひずみε_sおよび応力σ_sは，

$$\varepsilon_s=[B_s]\{\delta_s\} \tag{2.12}$$

$$\sigma_s=E\,\varepsilon_s=E[B_s]\{\delta_s\} \tag{2.13}$$

ここで

$$[B_s]=\frac{1}{\ell}[-1,1] \tag{2.14}$$

ℓ：梁要素の長さ

付録2の変位に対する考察を利用して，節点変位$\{\delta_s\}$をxyz座標で定義される変位$\{v_M\}$に変換すると，（2．12）および（2．13）式は，変換行列$[T_3]$を用いて，

$$\varepsilon_s=[B_s][T_3]\{v_M\} \tag{2.15}$$

$$\sigma_s=E[B_s][T_3]\{v_M\} \tag{2.16}$$

$$[T_3]=\begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos\alpha & \sin\alpha \end{bmatrix} \tag{2.17}$$

$$\{v_M\}=\begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \\ u_j \\ v_j \end{Bmatrix} \tag{2.18}$$

梁要素に貯えられるひずみエネルギーの変分δV_Mは

$$\begin{aligned}\delta V_M&=\int A_s\ \delta\varepsilon_s\ \sigma_s\ ds_G \\ &=\delta\{v_M\}^T[k_s]\ \{v_M\}\end{aligned} \tag{2.19}$$

ここで，A_sは梁要素の断面積であり，$[k_s]$は軸変形に対する剛性行列で次式で与えられる。

$$[k_s]=E[T_3]^T[B_s]^T[B_s][T_3] \tag{2.20}$$

補強材全体に貯えられるひずみエネルギーの変分δV_sは（2．19）式を補強材全体について積分して，

$$\delta V_s=\sum_{M=1}^{R}\delta V_M=\delta\{v\}^T[K_s]\{v\} \tag{2.21}$$

ここで，$[K_s]$は補強材の面内変形に対する剛性行列であり，これは各梁要素の剛性を，それぞれ結合されている節点で，集合したものである。

(b) 外力のなす仮想仕事

N番目の板要素およびM番目の梁要素に対して外力がなす仮想仕事δW_NおよびδW_Mは，

$$\delta W_N=\delta\{v_N\}^T\{R_N\} \tag{2.22}$$

$$\delta W_M=\delta\{v_M\}^T\{R_M\} \tag{2.23}$$

補強板全体で外力のなす仮想仕事δWは，上式を補強板全体について積分して，次式のように書ける。

$$\delta W=\sum_{N=1}^{Q}\delta W_N+\sum_{M=1}^{R}\delta W_M=\delta\{v\}^T\{R\} \qquad (2.24)$$

ここで　$\{R\}$：補強板に作用する基準外力

$\delta\{v\}$：補強板の仮想変位

(c)　平衡方程式

（２．１０），（２．２１）および（２．２４）式を用いて補強板の応力解析に対して，次の仮想仕事の方程式を得る。

$$\delta V_p+\delta V_s-\delta W=\delta\{v\}^T([K+K_s]\{v\}-\{R\})=0 \qquad (2.25)$$

ここで，$\delta\{v\}$は仮想変位であり，すべてが零とならないので，上式が成立するためには

$$[K+K_s]\{v\}=\{R\} \qquad (2.26)$$

これが面内変形に対する平衡条件式であり，これをもとに応力解析を行なうことができる。従って，境界条件を満足する（２．２６）式の解を求めると，基準外力$\{R\}$を受ける補強板の応力分布が得られる。

(2)　座屈解析

補強板に作用する面内力が増加してある値に達すると，補強板は座屈して，補強板を構成する板および補強材に座屈撓みが生じる。有限要素法によって，この補強板の座屈の固有値方程式を変分原理を適用して導く。

(a)　ひずみエネルギーの変分

（a－i）　板要素

補強板が座屈した時に，補強板全体としての中性軸は，それを構成する平板および補強材の自身の中性軸の位置とは異なっているので，それぞれは付加面内応力と付加曲げモーメントを受ける。従って，第N番目の板要素（三角形$i\ j\ k$）に生じる付加面内ひずみ$\{\varepsilon\}$と付加面内応力$\{\sigma\}$および付加曲率$\{\chi\}$と付加曲げモーメント$\{M\}$は，

$$\{\varepsilon\}=\begin{Bmatrix}\varepsilon_x\\ \varepsilon_y\\ \gamma_{xy}\end{Bmatrix}=[B][T_1]^{-1}\{\gamma_N\} \qquad (2.27)$$

$$\{\sigma\} = \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = [D_0]\{\varepsilon\} \tag{2.28}$$

$$\{\chi\} = \begin{Bmatrix} \partial^2 w/\partial x^2 \\ \partial^2 w/\partial y^2 \\ 2\partial^2 w/\partial x \partial y \end{Bmatrix} = [C]\{r_N\} \tag{2.29}$$

$$\{M\} = \begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = [D]\{\chi\} \tag{2.30}$$

ここで$[D]$は板の曲げ剛性を表わす。

等方性弾性平板では

$$[D] = \frac{Et^3}{12(1-\nu^2)} \begin{pmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{pmatrix} \tag{2.31}$$

平板要素に貯えられるひずみエネルギーの変分δV_Nは

$$\delta V_N = \int \delta\{\varepsilon\}^T\{\sigma\}\,dxdy + \int \delta\{\chi\}^T\{M\}\,dxdy$$

$$= \delta\{r_N\}^T[K_N]\{r_N\} \tag{2.32}$$

ここで

$$\{r_N\} = \begin{Bmatrix} r_i \\ r_j \\ r_k \end{Bmatrix}$$

$$\{r_i\} = \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \\ w_i \\ \theta_{xi} \\ \theta_{yi} \end{Bmatrix}$$

$\delta\{r_N\}$：仮想変位によって生じた節点変位の増分

$\delta\{\varepsilon\}$　：仮想変位によって生じた面内ひずみの増分

$\delta\{\chi\}$　：仮想変位によって生じた曲率の増分

平板全体に貯えられるひずみエネルギーの変分δV_pは（2．32）式を板全体に積分して，

$$\delta V_p = \sum_{N=1}^{Q} \delta V_N = \delta \{ r \}^T [K] \{ r \} \tag{2.33}$$

ここで，$[K]$は平板全体の剛性行列であり，各平板要素の値をそれぞれ結合されている節点で集合したものであり，$\{ r \}$は節点変位である。

（a－ⅱ）　梁要素

補強板が座屈した時に，補強材（梁要素）には軸変形，曲げ変形および捩り変形が生じる。

今，第M番目の梁要素の任意の点のたわみw_0および捩れ角φ_0が変位関数$[H_b]$および$[H_t]$を用いて次式のように表わせるとする。

$$w_0 = [H_b(s_G)] \{ w_s \} \tag{2.34}$$

$$\varphi_0 = [H_t(s_c)] \{ \varphi_s \} \tag{2.35}$$

ここで，$\{ w_s \}$および$\{ \varphi_s \}$は節点変位であり，次式で表わせる。

$$\{ w_s \} = \begin{Bmatrix} w_i \\ \dot{w}_i \\ w_j \\ \dot{w}_j \end{Bmatrix} \tag{2.36}$$

$$\{ \varphi_s \} = \begin{Bmatrix} \varphi_i \\ \dot{\varphi}_i \\ \varphi_j \\ \dot{\varphi}_j \end{Bmatrix} \tag{2.37}$$

ここで“・”はs_Gおよびs_cによる微分を意味する

（2．34）式を微分すると，梁要素の曲げの曲率χ_sおよび曲げモーメントM_sは

$$\chi_s = -\frac{d^2 w_0}{d s_G^2} = -[c_s] \{ w_s \} \tag{2.38}$$

$$M_s = E I_s \chi_s = -E I_s [c_s] \{ w_s \} \tag{2.39}$$

ここで

$$[c_s] = \left[\frac{d^2 H_b}{d s_G^2} \right] \tag{2.40}$$

（２．３５）式を微分すると，梁要素の捩れの曲率χ_tおよび捩りモーメントM_tは

$$\chi_t = \frac{d\varphi}{ds_c} = [\,C_t\,]\{\,\varphi_s\,\} \tag{2.41}$$

$$M_t = GJ\chi_t = GJ[\,C_t\,]\{\,\varphi_s\,\} \tag{2.42}$$

ここでGJは捩り剛性である。

梁要素に生じる*warping* ωは（２．３５）式より

$$\omega = (\bar{\omega}_s - \omega_s)\frac{d\varphi}{ds_G} = (\bar{\omega}_s - \omega_s)[\,C_t\,]\{\,\varphi_s\,\} \tag{2.43}$$

ここで　ω_sは*warping functin*であり，$\bar{\omega}_s$はω_sの平均値でそれぞれ次式で与えられれる（図２．５）。

$$\omega_s = \int_0^s r\,ds \tag{2.44}$$

$$\bar{\omega}_s = \frac{1}{m}\int_0^m \omega_s\,ds \tag{2.45}$$

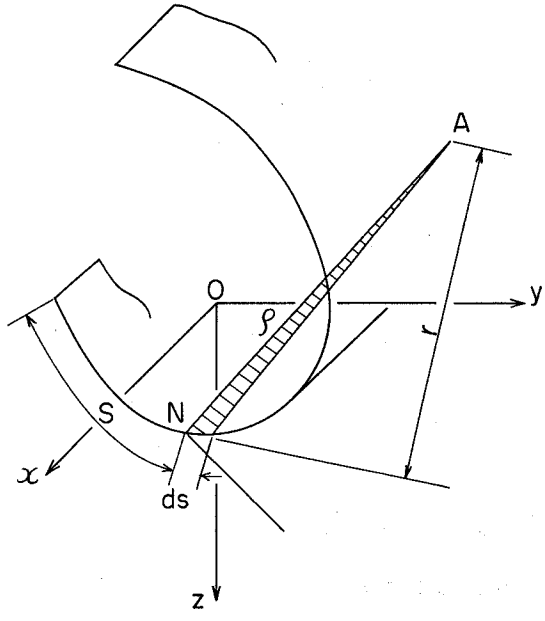


図２．５　*warping*

*warping*による軸ひずみε_ωおよび軸応力σ_ωは（２．４３）式より，

$$\varepsilon_\omega = \frac{d\omega}{ds_G} \tag{2.46}$$

$$\sigma_\omega = E\varepsilon_\omega = E\frac{d\omega}{ds_G} \tag{2.47}$$

一方，梁要素に生じる付加軸応力σ_sおよび付加軸ひずみε_sは

$$\varepsilon_s = [B_s][T_3]\{v_M\} \tag{2.48}$$

$$\sigma_s = E\varepsilon_s \tag{2.49}$$

従って，梁要素に貯えられるひずみエネルギーの変分δV_mは（2.38），（2.39）．(2.41)（2.42），（2.46），（2.47），（2.48）および（2.49)式を用いて次式で与えられる。

$$\begin{aligned}\delta V_m &= \int_0^\ell \delta\chi_s \cdot M_s \cdot ds_G + \int_0^\ell \int_{A_s} \delta\varepsilon_s \cdot \sigma_s \cdot dA \cdot ds_G \\ &\quad + \int_0^\ell \delta\chi_t \cdot M_t \cdot ds_c + \int_0^\ell \int_{A_s} \delta\varepsilon_\omega \cdot \sigma_\omega \cdot dA \cdot ds_c \\ &= \delta\{r_s\}^T [k_{as} + k_{bs} + k_{ts} + k_{\omega s}]\{r_s\}\end{aligned} \tag{2.50}$$

上式で

$[k_{as}]$：梁要素の軸変形の剛性行列

$[k_{bs}]$：梁要素の曲げの剛性行列

$[k_{ts}]$：梁要素の捩りの剛性行列

$[k_{\omega s}]$：梁要素の曲げ捩りの剛性行列

であり，それぞれ次式で与えられる

$$\left.\begin{aligned}[k_{as}] &= \int_0^\ell EA_s [T_3]^T [B_s]^T [B_s][T_3]\, ds_G \\ [k_{bs}] &= \int_0^\ell EI_s [C_s]^T [C_s]\, ds_G \\ [k_{ts}] &= \int_0^\ell GJ [C_t]^T [C_t]\, ds_c \\ [k_{\omega s}] &= \int_0^\ell EI_\omega [C_\omega]^T [C_\omega]\, ds_c\end{aligned}\right\} \tag{2.51}$$

ここで

EI_s　：梁要素の曲げ剛性

GJ　：梁要素の捩り剛性

EI_ω：梁要素の曲げ捩り剛性

$$[C_\omega] = \left[\frac{\partial^2 H_t}{\partial s_c^2}\right] \tag{2.52}$$

$$\{r_s\} = \begin{Bmatrix} r_{is} \\ r_{js} \end{Bmatrix} \tag{2.53}$$

$$\{ r_{is} \} = \begin{Bmatrix} w_G \\ \dot{w}_G \\ \varphi_c \\ \dot{\varphi}_c \end{Bmatrix} \tag{2.54}$$

ひずみエネルギーの変分を補強板について定義した $x\ y\ z$ 座標系に座標変換して，付録2の変換行列 $[T_1]$ および $[T_2]$ を用いて表示すると，（2．50）式は次式のように書ける。

$$\delta V_m = \delta \{ r_0 \} [k_a + k_b + k_t + k_\omega] \{ r_0 \} \tag{2.55}$$

ここで

$$[k_a] = [T_2]^T [T_1]^T [k_{as}] [T_1] [T_2]$$

$$[k_b] = [T_2]^T [T_1]^T [k_{\dot{b}s}] [T_1] [T_2]$$

$$[k_t] = [T_2]^T [T_1]^T [k_{ts}] [T_1] [T_2]$$

$$[k_\omega] = [T_2]^T [T_1]^T [k_{\omega s}] [T_1] [T_2]$$

$$\{ r_0 \} = \begin{Bmatrix} r_i \\ r_j \end{Bmatrix}$$

$$\{ r_i \} = \begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \\ \theta_x \\ \theta_y \\ \dot{\varphi} \end{Bmatrix}$$

梁要素全体に貯えられるひずみエネルギーの変分 δV_s は（2．55）式を補強板全体について積分して，

$$\delta V_s = \sum_{M=1}^{R} \delta V_M$$

$$= \delta \{ r \}^T [K_s] \{ r \} \tag{2.56}$$

ここで，$[K_s]$ は補強板全体の面内変形および面外変形に対する剛性行列であり，その値は各梁要素の面内，曲げ，捩りおよび曲げ捩り剛性行列の値をそれぞれ結合されている節点で集合したものである。

(b) 外力のなす仮想仕事

補強板が面内荷重を受けて座屈する時，平板および補強材のなかで外力のなす仮想仕事を，板要素および梁要素についてそれぞれ求める。

（b－ⅰ）　板要素

補強板が座屈した時に第N番目の板要素に作用している応力分布$[P]$と傾斜$\{\theta\}$を用いると，外力のなす仕事δW_Nは次式で与えられる。

$$\delta W_N = t\iint \delta\{\theta\}^T[P]\{\theta\}\,dxdy$$
$$= \delta\{r_N\}^T[K'_N]\{r_N\} \qquad (2.57)$$

ここで

$$[P] = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} \\ \tau_{xy} & \sigma_y \end{bmatrix} \qquad (2.58)$$

$$\{\theta\} = \begin{Bmatrix} \dfrac{\partial w}{\partial x} \\ \dfrac{\partial w}{\partial y} \end{Bmatrix} = [G]\{r_N\} \qquad (2.59)$$

$$[K'_N] = t\iint [G]^T[P][G]\,dxdy \qquad (2.60)$$

σ_x，σ_y，τ_{xy}　：応力成分（圧縮応力を正とする）

平板全体で外力のなす仮想仕事δW_pは，（２．５７）式を平板全体について積分して，

$$\delta W_p = \sum_{N=1}^{Q} W_N = \delta\{r\}^T[K']\{r\} \qquad (2.61)$$

ここで，$[K']$は平板全体の安定係数行列であり，各平板要素の値をそれぞれ結合されている節点で集合したものである。

（b－ⅱ）　梁要素

補強板が座屈した時に，第M番目の梁要素に対して外力のなす仮想仕事δW_Mは，軸応力σ_sおよび梁要素の曲げと捩り変形によって生じる付加軸ひずみ$\delta\varepsilon_s$を用いて，次のように書ける。

$$\delta\varepsilon_s = \left(\frac{dw}{ds_G}\right)\cdot\delta\left(\frac{dw}{ds_G}\right) + (n_{G0} - n_G)\cdot\left\{\left(\frac{dw}{ds_G}\right)\cdot\delta\left(\frac{d\varphi}{ds_c}\right) + \left(\frac{d\varphi}{ds_c}\right)\cdot\delta\left(\frac{dw}{ds_G}\right)\right\} + (n_{G0} - n_G)^2\cdot\left(\frac{d\varphi}{ds_c}\right)\cdot\delta\left(\frac{d\varphi}{ds_c}\right) \qquad (2.62)$$

ここで，n_{G0}は梁要素の図心とせん断中心の距離である。

（２．６２）式を用いると，外力のなす仮想仕事δW_Mは，

$$\delta W_M = \int_0^{\ell}\int_{A_s} \delta\varepsilon_s\cdot\sigma_s\,dA\,ds$$
$$= \delta\{r_s\}^T[k'_{bs} + k'_{bts} + k'_{ts}]\{r_s\} \qquad (2.63)$$

ここで　$[k'_{bs}]$：梁要素の曲げの安定係数行列

$[k'_{bts}]$：梁要素の曲げと捩りの連成項の安定係数行列

$[k'_{ts}]$：梁要素の捩りの安定係数行列

であり，次のように書ける。

$$[k'_{bs}] = \sigma_s \cdot A_s \cdot \int_0^{\ell} [G_s]^T [G_s]\, ds$$

$$[k'_{bts}] = \sigma_s \cdot A_s \cdot n_{G0} \int_0^{\ell} \{ [G_s]^T [G_t] + [G_t]^T [G_s] \}\, ds$$

$$[k'_{ts}] = \sigma_s \cdot (A_s \cdot n_{G0}^2 + I_p) \int_0^{\ell} [G_t]^T [G_t]\, ds$$

$$[G_s] = [\frac{dH_b}{ds_G}]$$

$$[G_t] = [\frac{dH_t}{ds_c}]$$

I_p　：　極慣性能率

外力のなす仮想仕事を補強板に固定した $x\ y\ z$ 座標系に変換して表わすと，（２．６３）式は付録２の変換行列 $[T_1]$ および $[T_2]$ を用いて次式のように書ける。

$$\delta W_M = \delta \{ r_0 \}^T [k'_b + b'_{bt} + k'_t] \{ r_0 \} \qquad (2.65)$$

ここで　$[k'_b] = [T_2]^T [T_1]^T [k'_{bs}] [T_1] [T_2]$

$[k'_{bt}] = [T_2]^T [T_1]^T [k'_{bts}] [T_1] [T_2]$

$[k'_t] = [T_2]^T [T_1]^T [k'_{ts}] [T_1] [T_2]$

梁要素全体で外力のなす仮想仕事 δW_s は，（２．６５）式を補強材全体について積分して，次式で与えられる。

$$\delta W_s = \sum_{M=1}^{R} \delta W_M$$

$$= \delta \{ r \}^T \cdot [K'_s] \cdot \{ r \} \qquad (2.66)$$

ここで，$[K'_s]$ は補強材全体の安定係数行列であり，その値は，各有限要素の曲げ，捩りおよび曲げと捩りの連成項の安定係数行列の値をそれぞれ結合されている節点で集合したものである。

(c)　固有値方程式

（２．３３），（２．５０），（２．５５）および（２．６６）式より，補強板の座屈解析に対して，次の仮想仕事の方程式を得る。

$$\delta V_p + \delta V_s - \delta W_p - \delta W_s = \delta \{ r \}^T \cdot [K + K_s - K' - K'_s] \{ r \} = 0 \qquad (2.67)$$

ここでは補強板の座屈を考えているので，上式における仮想変位$\delta\{r\}$は任意の値をとり，零にはならないので，結局，座屈に対する次の固有値方程式の解が座屈値を与える。

$$[K+K_s-K'-K'_s]\{r\}=0 \tag{2.68}$$

2．2．3　補強材の変位関数

有限要素法を用いて，実際の補強板の座屈強度を解析する場合には，有限要素の変位関数が義されなければならない。

補強板を構成する平板要素の変位関数は，既に第2編第3章で述べた。従って，本節では梁要素である補強材の軸方向変形，曲げ変形および捩り変形に対する変位関数を，各変形状態に対する平衡方程式である微分方程式の一般解として求める。

(1)　軸方向変形

梁の軸方向にx軸を定め，x軸方向の変位をuとする（図2．6）。

いま，梁要素に分布軸力qと軸力Pが作用する場合，力の釣り合い式は次式で与えられる。

$$\frac{dP}{dx}+q=0 \tag{2.69}$$

応力・ひずみ関係および適合条件式は，

$$P=AE\varepsilon \tag{2.70}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\varepsilon \tag{2.71}$$

上式より，軸力Pは次式で与えられる。

$$P=A\sigma=AE\frac{\partial u}{\partial x} \tag{2.72}$$

（2．69）および（2．72）式より，

$$AE\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+q=0 \tag{2.73}$$

分布荷重は節点に作用する等価な荷重に置換するので，$q=0$になる。従って，（2．73）式は次式になる。

$$AE\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=0 \tag{2.74}$$

上式の一般解は，

$$u=c_1x+c_2 \tag{2.75}$$

今，境界条件として

$$\left.\begin{array}{lll} u = u_i & at & x = 0 \\ u = u_j & at & x = \ell \end{array}\right\} \qquad (2.76)$$

を考えると，（２．７５）式は次式のように書ける。

$$u = [\, H_a \,] \left\{ \begin{array}{c} u_i \\ u_j \end{array} \right\} \qquad (2.77)$$

ここで$[\, H_a \,]$は梁要素の軸方向変形に対する変位関数であり，次式のように書ける。

$$[\, H_a \,] = [\, (1 - \frac{x}{\ell}),\ \frac{x}{\ell} \,] \qquad (2.78)$$

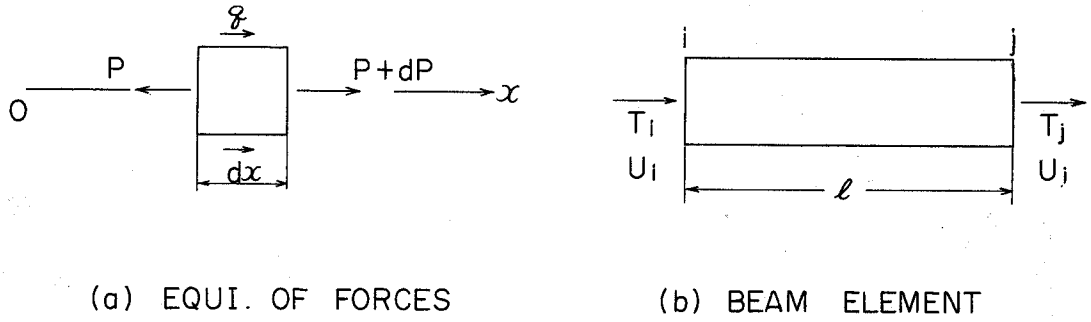


図２．６　軸　変　形

(2)　曲げ変形

梁要素の軸方向にx軸をとり，x軸と直角方向にy軸を定める（図２．７）。

梁にy方向の分布荷重wが作用した時，梁に生じる撓みをyとする（図２．７）と，曲げの平衡方程式として次式を得る。

$$EI \frac{d^4 y}{dx^4} = w \qquad (2.79)$$

本項においても，分布横荷重は等価な集中力に置換するので，$w = 0$になる。従って，(２．７９)式は次式になる。

$$EI \frac{d^4 y}{dx^4} = 0 \qquad (2.80)$$

上式の一般解は，

$$y = c_1 x^3 + c_2 x^2 + c_3 x + c_4 \qquad (2.81)$$

今，境界条件として，

$$\left.\begin{array}{llll} y = y_i & \dot{y} = \dot{y}_i & at & x = 0 \\ y = y_j & \dot{y} = \dot{y}_j & at & x = \ell \end{array}\right\} \qquad (2.82)$$

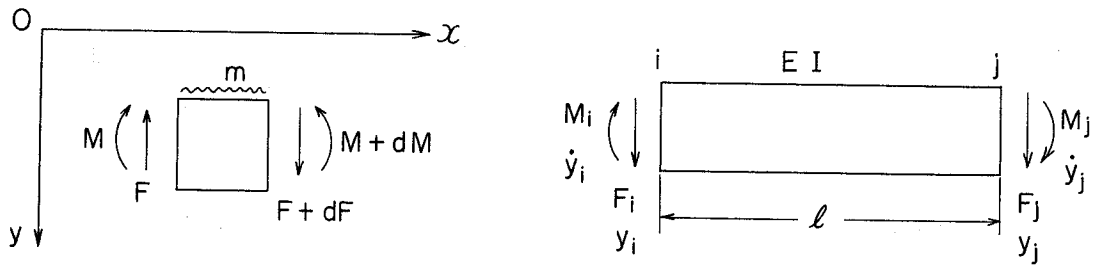
を考えると，（２．８１）式より次式を得る。

$$y = [\, H_b \,] \begin{Bmatrix} w_i \\ \dot{w}_i \\ w_j \\ \dot{w}_j \end{Bmatrix} \tag{2.83}$$

ここで，$[\, H_b \,]$は梁要素の曲げ変形に対する変位関数であり，次式のように書ける。

$$[\, H_b \,] = [\, (\, 2\frac{x^3}{l^3} - 3\frac{x^2}{l^2} + 1\,) \,,\, (\frac{x^3}{l^2} - 2\frac{x^2}{l} - x\,) \,,$$

$$(\, 3\frac{x^2}{l^2} - 2\frac{x^3}{l^3}\,) \,,\, (\frac{x^3}{l^2} - \frac{x^2}{l}\,)\,] \tag{2.84}$$



(a) EQUI. OF FORCES　　(b) BEAM ELEMENT

図２．７　曲げ変形

(3) 捩り変形

図２．８に示すように，梁要素の軸方向にx軸をとる。分布捩りモーメントm_tが作用した時の平衡方程式は，次式で与えられる。

$$EI_\omega \frac{d^4\varphi}{dx^4} - GJ\frac{d^2\varphi}{dz^2} = m_t \tag{2.85}$$

分布捩りモーメントは等価な集中捩りモーメントに置換するので，$m_t = 0$になる。従って，（２．８５）式は次式になる。

$$EI_\omega \frac{d^4\varphi}{dx^4} - GJ\frac{d^2\varphi}{dz^2} = 0 \tag{2.86}$$

上式の一般解は，

$$\varphi = c_1 \sinh \alpha x + c_2 \cosh \alpha x + c_3 x + c_4 \tag{2.87}$$

ここで

$$\alpha=\sqrt{\frac{GJ}{EI_{\omega}}} \tag{2.88}$$

境界条件として，

$$\left.\begin{array}{llll} \varphi=\varphi_i & \dot{\varphi}=\dot{\varphi}_i & at & x=0 \\ \varphi=\varphi_j & \dot{\varphi}=\dot{\varphi}_j & at & x=l \end{array}\right\} \tag{2.89}$$

を考えると，（２．８７）式より次式を得る。

$$\varphi=[\,H_t\,]\begin{Bmatrix}\varphi_i\\ \dot{\varphi}_i\\ \varphi_j\\ \dot{\varphi}_j\end{Bmatrix} \tag{2.90}$$

ここで，$[\,H_t\,]$ は梁要素の捩り変形に対する変位関数であり，次式で与えられる。

$$[\,H_t\,]=[\,f_1(x)\,,f_2(x)\,,f_3(x)\,,f_4(x)\,] \tag{2.91}$$

ここで

$$f_1(x)=(1-B_1/A_1)-(B_5\cdot\alpha/A_2)\,x+(B_1\cosh\alpha x)/A_1+(B_5\sinh\alpha x)/A_2$$

$$f_2(x)=-B_2/A_1-(B_6\cdot\alpha\cdot x)/A_2+(B_2\cosh\alpha x)/A_1+(B_6\sinh\alpha x)/A_2$$

$$f_3(x)=-B_3/A_1+(A_2-B_7\cdot\alpha)\,x/A_2+(B_3\cosh\alpha x)/A_1+(B_7\cdot\sinh\alpha x)/A_2$$

$$f_4(x)=-B_4/A_1-B_8\cdot\alpha\cdot x/A_2+(B_4\cdot\cosh\alpha x)/A_1+(B_8\cdot\sinh\alpha x)/A_2$$

$$A_1=\alpha\{(\cosh\alpha l-1)^2-\sinh\alpha l(\sinh\alpha l-\alpha l)\}$$

$$A_2=-A_1$$

$$B_1=\alpha(1-\cosh\alpha l)$$

$$B_2=-B_1$$

$$B_3=\sinh\alpha l-\alpha l\cosh\alpha l$$

$$B_4=\alpha l-\sinh\alpha l$$

$$B_5=-\alpha\sinh\alpha l$$

$$B_6=-B_5$$

$$B_7=\cosh\alpha l-\alpha l\sinh\alpha l-1$$

$$B_8=1-\cosh\alpha l \tag{2.92}$$

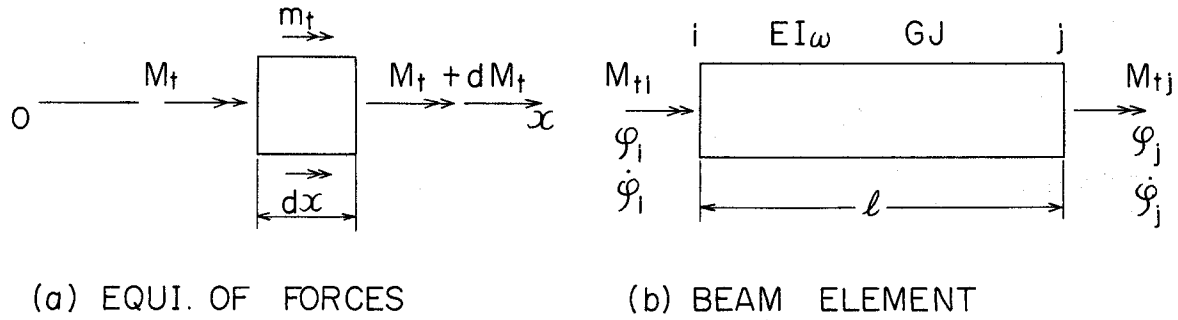


図２．８　捩り変形

２．３　計算法

有限要素法を用いて補強板の座屈強度を解析する場合，補強板を構成する平板と補強材をそれぞれ平板要素（三角形有限要素）および梁要素に分割し，要素の形状に応じた適当な変位関数を用いて，各有限要に対する剛性行列と安定係数行列を求める。それらを補強板全体について集合すれば，固有値方程式（２．６８）を得る

普通,船体構造によく用いられる構造様式の，補強材の板の片側に付けた非対称補強板の座屈強度を解析する場合，補強材の図心と補強板の中心間の距離 e が零でないある値を有するので，先に述べた固有値方程式（２．６８）式において，付加面内変位の項が含まれる。そこで，(2.68)式を解くと，非対称補強板の座屈強度が求まる。

一方，補強材が板の両側に対称に付けられた対称補強板では，$e=0$ となる。この場合，（２．６８）式の固有値方程式において，付加面内変形の項が消滅して，（２．６８）式を用いて容易に対称補強板の座屈強度を計算できる。

実際に固有値方程式を解くためには，次に示す式の変換をする。

補強板の座屈強度を補強板に作用する座屈応力（または座屈荷重）として求めるために，単位の応力分布（または単位外力によって生じた応力分布）に対して求めた安定係数行列を K'_0 とすると，

$$[K'_p + K'_s] = \gamma [K'_{p0} + K'_{s0}] \qquad (2.93)$$

となる。

ここで　γ：座屈荷重係数（＝座屈荷重／単位荷重）

従って，固有値方程式（２．６８）式は

$$[(K_p + K_s) - \gamma (K'_{p0} + K'_{s0})]\{r\} = 0 \qquad (2.94)$$

上式から数値計算で固有値と固有ベクトルを求める方法は，第２編第３章で述べたと同じように，乗べき法を用いる。

2．4　解の精度

本研究で用いる有限要素法では，平板の有限要素の形状は三角形で，その変位関数としては，第2編第3章に示した変位の連続条件が完全に満足されている *conforming* な変位関数を採用し，補強材の有限要素の形状は直線梁で，その変位関数としては，各変形状態に対する平衡方程式である微分方程式の一般解として求めた変位関数を採用する。この場合の解析結果の精度を調べるために，基本的な荷重状態である一様な圧縮応力を受ける正方形板に，補強材が付けられた場合の座屈強度を解析し，解の精度と有限要素の分割数との関係を調べる。ここでは，計算の対象とする正方形板を荷重辺で n 分割し，他の辺で m 分割する。

2．4．1　一様圧縮応力を受ける正方形補強板（中央に1本の補強材）

取り扱う補強板の境界条件は，図2．9(*a*)に示すように周辺単純支持であり，中央に補強材を1本有している。この場合の座屈強度を，表2．1および図2．10に示す。

ここで，補強板の座屈強度を次式の k で表わし，有限要素法による結果をエネルギー法による解[22]と比較する。

$$k = \frac{\sigma_{cr}}{\sigma_e} \tag{2.95}$$

ここで　$$\sigma_e = \frac{E\pi^2}{12(1-\nu^2)}\left(\frac{t}{b}\right)^2$$

計算結果の精度は有限要素の分割数によって異なるが，非常に良くエネルギー法による解と一致している。エネルギー法による解は正解ではないが，仮定する座屈撓みは2項の3角級数であり，その精度はよい。

なお，解析に用いた補強材の断面積比 δ および曲げ剛性比 γ を次に示す。

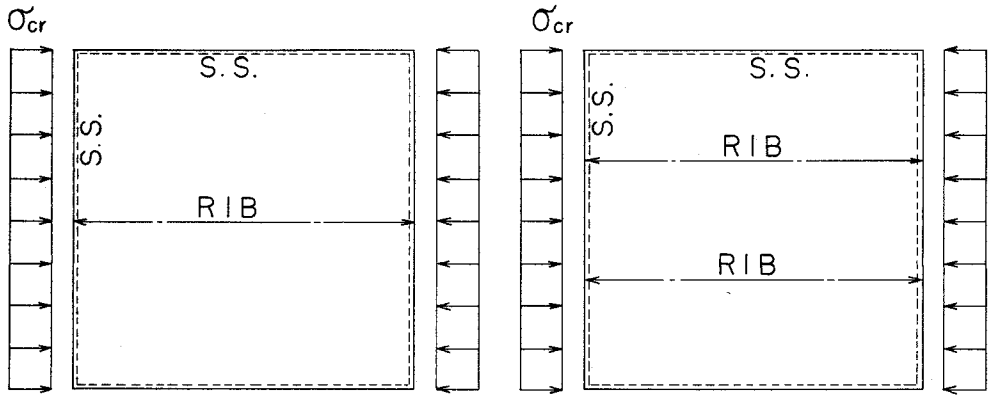
$$\left.\begin{aligned} \delta &= \frac{A}{b\cdot t} = 0.05 \\ \gamma &= \frac{EI}{bD} = 5.0 \end{aligned}\right\} \tag{2.96}$$

ここで，A は補強材の断面積であり，EI は補強材の曲げ剛性である。また，b は平板の深さ，t は平板の板厚であり，D は平板の曲げ剛性である。

表2．1　正方形補強板（中央に1本の補強材）

MESH SIZE	4×4	6×6	8×8
k	12.325	12.089	11.988
k^*		12	

k^* : *values by Timoshenko*[22]



(a) WITH ONE RIB　　(b) WITH TWO RIBS

図２．９　境界条件

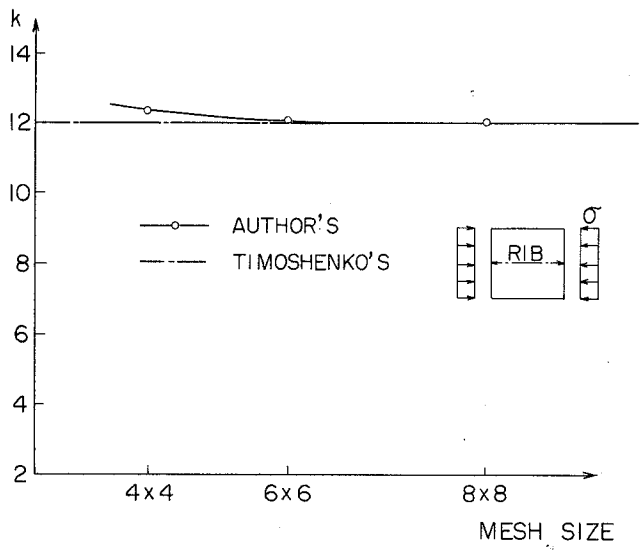


図２．１０　圧縮座屈強度（補強材 １本）

２．４．２　一様圧縮応力を受ける正方形補強板（等間隔に配置された２本の補強材）

取り扱う補強板の境界条件は図２．９(*b*)に示すように，周辺単純支持であり，等間隔に配置された２本の補強材を有している。この場合の座屈強度を（２．９６）式の座屈値 k を用いて表わし，その値を表２．２及び図２．１１に示す。

計算結果をエネルギー法による解[22]と比較したが，本法による解の精度は有限要素の分割数によって異なるが，非常に良くエネルギー法による解と一致している

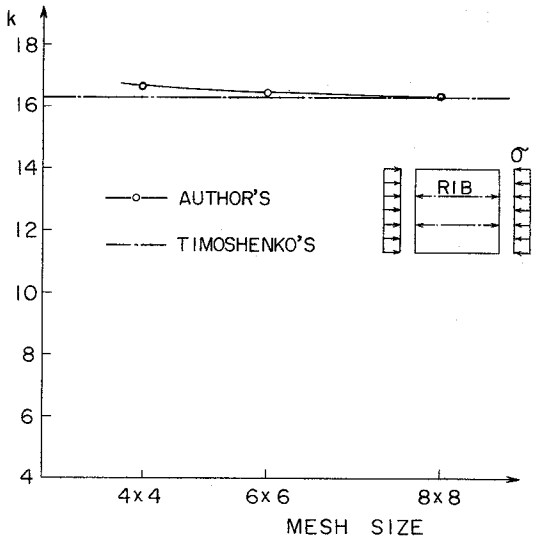


図２．１１　圧縮座屈強度（補強材２本）

表２．２　正方形補強板（等間隔に２本の補強材）

MESH SIZE	4×4	6×6	8×8
k	16.644	16.436	16.376
k^*		16.3	

k^* : *values by Timoshenko*[22]

3.　解析および考察

船体構造は，大部分板から構成されていると考えることができる。このような板要素に補強材を付けた場合には，面内荷重に対する座屈強度を増加せしめることができるし，また，板に垂直な荷重が作用する場合には，板厚を増加せずに補強材によって板の曲げ剛性を効果的に上昇せしめることができる。このような補強法は，少ない重量増加で，より効果的な板の強度，剛性を増加せしめることを意図したものであり，船体構造に補強材を用いて，効果的な補強法を決定することは，非常に重要な設計上の問題の１つである。

実際の船体では，一般に，補強材を板の片側に付けた非対称補強板が大部分を占めるが，この非対称性の影響が座屈強度におよぼす影響については，これまでに解析例はあまり報告されていない。そこで，本節では，この非対称性が座屈強度におよぼす影響を調べる。つぎに，圧縮荷重を受ける正方形板に付ける補強材の取り付け位置が座屈強度におよぼす影響を調べて，補強材の最適位置の検討を行なう。

3．1　非対称補強板の座屈強度

船体構造では，補強材を板の片側に付けた非対称補強板が大部分を占める。そこで非対称性の影響を検討するために，基本的な例として，一様圧縮応力を受ける周辺単純支持補強板（図2.9 (a)）を選び，補強材の図心Gと補強板の中心Oとの距離e（離心率）を変化させた場合の座屈強度を計算して，非対称補強板の座屈強度を検討する。この場合の座屈強度を図3．1に示す。ここで補強板の座屈強度を（2．96）式のkで表わしている。

解析に用いた補強材の寸法は一定であり，その断面積比δおよび曲げ剛性比γはそれぞれ次に示す。

$$\left.\begin{aligned}\delta &= \frac{A}{b\,t} = 0.05\\ \gamma &= \frac{EI}{bD} = 5.0\end{aligned}\right\} \qquad (3.1)$$

ここで，Aは補強材の断面積であり，EIは補強材の曲げ剛性である。また，bは平板の幅，tは板厚であり，Dは平板の曲げ剛性である。

図3．1から明らかなように，同一形状の補強材を取り付ける場合，補強材の図心Gと強補板の中心Oとの距離eが増加すると座屈強度は大幅に増加することがわかる。したがって，板の座屈強度あるいは曲げ剛性を効果的に増加させるためには，板の両側に対称に補強材を付ける（$e=0$）よりは，板の片側に補強材を付ける方が，より少ない重量の増加で，より効果的な板の強度，剛性を増加させることができる。

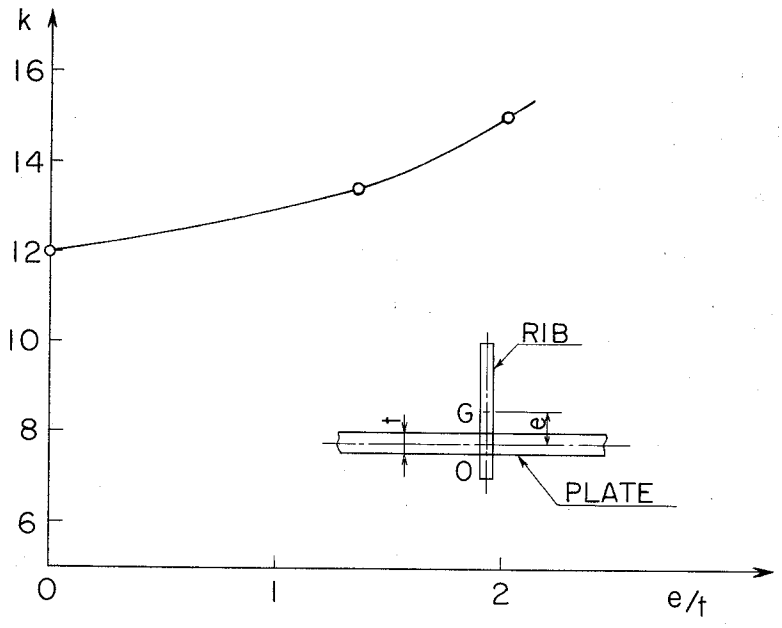


図3．1　非対称補強板の座屈強度

つぎに，図 2.9 (a)に示す中央に補強材を1本有する周辺単純支持補強板において，補強材の断面2次モーメント I と離心率 e を変化させて，補強板の中心 O まわりの断面2次モーメント $I+e^2A$ が一定になるように補強材の寸法を選び，その場合の圧縮座屈強度を計算して，表3．1に示す。

同表より明らかなように，補強材の断面2次モーメント I が小さくとも，離心率 e が大きく，有効断面2次モーメント $I+e^2A$ が同じならば，補強材は同等の座屈強度を有することがわかる。結局，補強板の座屈強度を決定するのは，補強材の断面2次モーメント I ではなく，有効断面2次モーメント $I+e^2A$ である。

表3．1　非対称補強板の座屈強度

e (mm)	0	1	2
A (mm^2)	40	40	40
I (mm^4)	366.3	326.3	206.3
$I+e^2A$ (mm^4)	366.3	366.3	366.3
k	11.988	11.975	11.910

非対称補強板の座屈強度が増加するのは，次の理由に原因している。すなわち，補強材の図心 G が補強板の中性軸から e_0 だけ離れると，補強材の補強板の中性軸まわりの断面2次モーメント I は次式で与えられる。

$$I = I_0 + e_0^2 A \qquad (3.2)$$

ここで，I_0 は補強材の図心 G まわりの断面2次モーメント。普通，補強板の中性軸は，殆んど補強板の中心 O と一致しているので

$$e = e_0 \qquad (3.3)$$

になる。したがって，補強材の有効な曲げ剛性 EI は次式で与えられ，

$$EI = E(I_0 + e^2A) \qquad (3.4)$$

非対称補強板では，補強材の曲げ剛性が効果的に高められ，その結果，補強板の座屈強度が増加する。事実，表3．1より明らかなように，補強板の座屈強度は，補強材の有効曲げ剛性 EI によって決定されている。

3．2　補強材の最適位置の検討

船体構造に用いられる板要素を効果的に補強して，強度，剛性を増加せしめるためには，補強材の寸法および取り付け位置に充分考慮を払い，最適なものを取り付けなければならない。ここでは，荷重辺で一様な強制圧縮変位を受ける周辺単純支持正方形板に取り付ける補強材の位置

（補強材と圧縮方向のなす角θ（図３．２））を系統的に変化させた場合の圧縮座屈強度を解析して，図３．２に図示する。

ここで用いる補強材の寸法は一定であり，断面積比δおよび曲げ剛性比γは次に示す。

$$\left.\begin{array}{l}\delta = 0.05 \\ \gamma = 1.0\end{array}\right\} \qquad (3.5)$$

図３．２より明らかなように，補強板の圧縮座屈強度は，補強材の取り付け位置によって変化し，補強材を平板の対角線上に取り付けた場合（$\theta = 45°$）に，座屈強度は最も高くなり，補強材の取り付け位置が平板の対角線から離れると座屈強度は低下し，$\theta \doteqdot 25°$の時に座屈強度は最低になり，その値は最大値の約８０％である。

補強材の取り付け位置によって座屈強度が変化するのは，補強材を取り付けることによって，座屈のモードが変わり，その結果座屈強度が増加するからである。

なお，補強材の最適位置は，補強板の幾何学的形状と境界条件ならびに外力の種類によって変化する。したがって，船体構造で用いられる板要素に取り付ける補強材に関しては，問題に応じて板要素の形状および作用する外力の種類に留意して，補強材の最適位置と寸法を決定しなければならない。

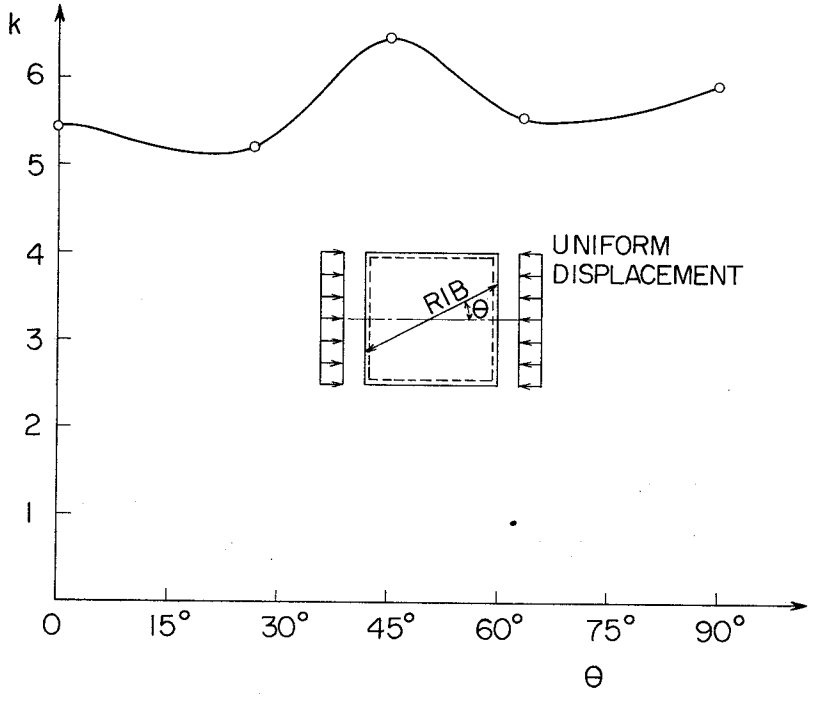


図３．２　補強材の最適位置の検討

4. 総　　括

第2編第4章においては，有限要素法に基づいて，補強板の座屈強度を理論的に解析する方法を述べ，補強材の最適位置についての検討を行なった。

以下においては，第2編第4章で得られた主要な結論を記述する。

第1節の緒言に続いて，第2節ではこれまでの補強板（補強材が板の両面に対称についた補強板）の座屈理論を述べた（2．1）。（2．2）では，有限要素法を基にして，非対称補強板の座屈理論を導き，さらに補強材の変位関数を導いた。（2．3）では，有限要素法を用いて補強板の座屈強度を解析する場合の計算法を述べた，また，（2．4）では，本法を用いて補強板の基本的な例について座屈強度を解析し，エネルギー法による解と比較して精度の良いことを確かめた。

第3節では，板要素に取り付けられる補強材の非対称性および取り付け位置について検討を行ない，最適な補強法について考察を行なった。すなわち，（3．1）では，船体構造によく用いられる非対称補強板（板の片側に補強材を取り付ける）の座屈強度を解析した結果，次の2点が明らかになった。

(1) 同一形状の補強材を平板に取り付けて補強する場合，板の両側に対称に取り付けるより，片側にのみ取り付ける方が大幅に座屈強度は増加する。

(2) 補強板の座屈強度は，補強材の有効断面2次モーメント $I+e^2A$ によって決定される。

（3．2）では，圧縮荷重を受ける周辺単純支持正方形平板に取り付ける補強材の位置を系統的に変化させた場合の圧縮座屈強度を解析し，その結果，平板の対角線上に補強材を取り付けると座屈強度は最も高くなり，補強材の取り付け位置が対角線から離れると座屈強度は低下し，補強材と圧縮方向のなす角度 θ が約25°の時に，座屈強度は最低になり，その値は最大値の約80％に低下する。

これらの結果より，船体構造で大部分を占める板要素の強度および剛性を増加させるために取り付ける補強材の最適寸法および取り付け位置の決定に有限要素法を適用できることが明らかになった。

第5章　総　　括

第2編においては，超大形油槽船の局部強度を有限要素法を基にして理論的に解析する方法を述べ，それを基にして，弾塑性応力分布，平板の座屈強度および補強板の座屈強度解析の電子計算機用のプログラムを開発して，超大形油槽船の船体の局部強度の計算を行なった。

以下においては，第2編で得られた主要な結論を記述する。

第1章の緒言に続き，第2章では有限要素法に基づいて，平板の弾性および塑性応力分布を理論的に解析する方法を述べ，応力集中部を有する開孔板の弾塑性応力分布を解析し実験結果と比較した。すなわち，

第1節の緒言に続いて，第2節では平板の弾塑性応力分布の解析法を述べた。すなわち，2.1では弾性域および塑性域における応力・ひずみの関係を塑性流れ理論および塑性変形理論を用いて述べ，さらに降伏条件について述べた。2．2では弾性応力分布，塑性応力分布および弾塑性応力分布の基礎理論を述べ，2．3では有限要素法による。弾性および塑性応力分布の解析法を述べた。

第3節では，応力集中部を有する開孔試験片の引張り試験を行ない，ひずみ分布，塑性域の広がりおよび伸びを計測した。そして，有限要素法を基に作成した弾塑性応力分布解析用プログラムを用いて，開孔試験片の弾塑性応力分布を解析して得られたひずみ分布，塑性域の広がりおよび試験片の伸びを計測値と比較し，両者が非常に良く一致することを確かめた。その結果，有限要素法に基づく弾塑性応力分布の解析法は，応力集中部の弾塑性応力分布の解析に対して，充分良い精度で適用できることが判明した。

第3章においては，有限要素法に基づいて，平板の弾性および塑性座屈強度を理論的に解析する方法を述べ，超大形油槽船で座屈強度が問題になる船体各部の座屈強度を解析した。すなわち，

第1節の緒言に続いて，第2節では，これまでの平板の弾性および塑性座屈理論を述べ，さらに残留応力分布を有する平板の弾性および塑性座屈理論を導いた。

第3節では，有限要素法に基づいて平板の弾性および塑性座屈理論を始めて展開した，また，本法を用いて平板の基本的な例について，弾性および塑性座屈強度を解析し，正解と比較して精度の良いことを確かめた。

第4節では，超大形油槽船の設計で最も問題になる横桁ウエブの座屈強度を解析するために，第3節で展開した理論に基づいて解析用プログラムを開発した（4．1）。このプログラムは，応力解析と座屈強度解析とを一括して行なうようになっており，このプログラムの適用性を検討するために，12万$D.W.T.$級油槽船の1/5縮尺模型を製作し，その座屈強度を解析し，得られ

た結果を実験結果と比較して，両者が良く一致することを確かめた（４．２）。また，6万8000 $D.W.T.$ の油槽船の横桁ウエブに生じた座屈事故を解析したが，その結果が，実船に生じた座屈事故を非常に良く説明することができた（４．３）。このように，有限要素法を基にした解析プログラムが，横桁ウエブの座屈強度解析に非常に有用であることが明らかとなった。

一般に，横桁ウエブのスロットは，ウエブがせん断座屈する場合に顕著な影響を及ぼすので，ここでは，さらに横桁ウエブのせん断座屈強度に及ぼす種々の影響を検討した。すなわち，

(1) 6万～４０万 $D.W.T.$ 級の油槽船に，通常用いられる横桁ウエブに，せん断力と曲げモーメントが組み合さって作用しても，それによって座屈強度は低下しない。

(2) ウエブの曲げ座屈強度は，ウエブからスロット上部の矩形板を取り出し，その板が全周辺で単純支持されたものとして取り扱っても，簡単に，その座屈強度を充分良い精度で推定できる。

(3) ウエブの形状がせん断座屈強度に及ぼす影響としては，スロットの高さ h が最も影響を与える。通常油槽船で採用されているスロット高さ比 h/s の領域では，スロットの高さが高くなると，座屈強度は急激に低下して，h/s が０．７から１．３に増加すると，座屈強度は約６０％低下する。

(4) ウエブのスロット部にカラープレートを設けて補強すると，せん断座屈強度は大幅に上昇する。特に，スロットの高さが高くなる程その効果は高い。

(5) ウエブに水平補強材を設けると，せん断座屈強度は２～６割上昇する。特に，スロット高さ h が小なる領域で，座屈強度の増加が大きい。

(6) ウエブのせん断座屈に対する補強方法としては，ウエブに水平補強材を設けるよりは，スロット部にカラープレートを設けるほうが，補強効果が大である。特に，スロット高さ比が大きくなると補強効果が著しく，座屈強度はスロット部を補強しない場合の約５倍にも増加する。

第５節では，横桁ウエブ以外で座屈が問題になる船体各部の座屈強度を解析した。

（５．１）では，船体の構造部材の接合部に設けられたブラケットが種々の境界条件を有する場合について，座屈強度を計算した。本法によって得られた結果をエネルギー法による結果と比較して，両者が良く一致することが明らかになった。

（５．２）では，千鳥溶接されたパネルの圧縮座屈強度を解析した。千鳥溶接されたパネルの境界条件の取り扱い方法として，連続法とスリット法の２つを考えて座屈強度を解析したが，連続法を用いて得た解がエネルギー法による解と良く一致することが明らかになった。また，固定辺の長さ，すなわち溶接長が長くなると，座屈強度が上昇して，同時に座屈波形のモードが変化することが明らかになった。

（５．３）では，船体の構造部材に設けた円孔が圧縮座屈強度に及ぼす影響を解析して，開孔があると座屈強度が低下することを明らかにした。本法による解は実験値と良く一致して，本法の有用性が明らかになった。

（５．４）では，矩形の開孔を有する板のせん断座屈強度を解析して，板に開孔を設けるとせん断座屈強度が大幅に低下すること，および解析結果と実験結果は良く一致することが明らかになった。

（５．５）では，溶接組立柱に生じた残留応力が，柱を構成している板要素の局部座屈強度に及ぼす影響を解析して，残留応力が板の座屈強度を大幅に低下させることを明らかにした。また本法による解はエネルギー法による解と非常に良く一致することが判明した。

これらの結果より，外力による平板の面内応力分布の計算から座屈荷重の計算まで，一貫して有限要素法を適用することによって，あらゆる荷重状態および幾何学的形状の平板の弾塑性座屈の問題が解けることが明らかになった。そして，有限要素法を基にした平板の座屈強度解析法を用いて，超大形油槽船の船体各部の座屈強度を解析して，種々の問題を非常に良い精度で解析できた。

第４章においては，有限要素法に基づいて，補強板の座屈強度を理論的に解析する方法を述べ補強材の最適位置についての検討を行なった。すなわち，

第１節の緒言に続いて，第２節ではこれまでの補強板（補強材が板の両面に対称についた補強板）の座屈理論を述べた（２．１）。（２．２）では，有限要素法を基にして，非対称補強板の座屈理論を導き，さらに補強材の変位関数を導いた。（２．３）では，有限要素法を用いて補強板の座屈強度を解析する場合の計算法を述べた，また，（２．４）では，本法を用いて補強板の基本的な例について座屈強度を解析し，エネルギー法による解と比較して精度の良いことを確かめた。

第３節では，板要素に取り付けられる補強材の非対称性および取り付け位置について検討を行ない，最適な補強法についての考察を行なった。すなわち，（３．１）では，船体構造によく用いられる非対称補強板の座屈強度を解析した結果，次の２点が明らかになった。

(1) 同一形状の補強材を平板に取り付けて補強する場合，板の両側に対称に取り付けるよりは片側にのみ取り付ける方が，大幅に座屈強度は増加する。

(2) 補強板の座屈強度は，補強材の有効断面２次モーメント $I+e^2A$ によって決定される。

（３．２）では，圧縮荷重を受ける周辺単純支持正方形板に取り付ける補強材の位置を系統的に変化させた場合の圧縮座屈強度を解析し，その結果，平板の対角線上に補強材を取り付けると，

座屈強度は最も高くなり，補強材の取り付け位置が対角線から離れると座屈強度は低下し，補強材と圧縮方向のなす角度θが約２５°の時に，座屈強度は最低になり，その値は最大値の約８０％に低下する。

これらの結果より，船体構造で大部分を占める板要素の強度および剛性を増加させるために取り付ける補強材の最適寸法および取り付け位置の決定に，有限要素法を適用できることが明らかになった。

謝　　辞

本研究を行なうにあたり，大阪大学八木教授，上田助教授より直接御指導をいただき，また大阪大学寺沢名誉教授，日立造船*K.K.* 技術研究所西牧室長より有益な多くの御助言を賜った。

なお，本研究の遂行に当っては日立造船*K.K.* の関係各位より格別の御支援と御激励を受けた。

これらの多くの御指導と御援助に対して，ここに深く感謝する次第である。

付録1.　撓角撓度法における荷重項

せん断撓みを考慮し，端部に剛体部を有する梁の力と変位に関する基礎式を，撓角撓度法を用いて展開すると，その荷重項は荷重状態によって次のようになる。

(a)　等分布荷重（図１．１）

$$C_{mn} = -\frac{w\,l^2}{12}\left(1 + 6\,\lambda_{mn} + 6\,\lambda_{mn}^2\right)$$

$$C_{nm} = \frac{w\,l^2}{12}\left(1 + 6\,\lambda_{nm} + 6\,\lambda_{nm}^2\right)$$

$$D_{mn} = -\frac{w\,l}{2}\left(1 + 2\,\lambda_{mn}\right)$$

$$D_{nm} = \frac{w\,l}{2}\left(1 + 2\,\lambda_{nm}\right)$$

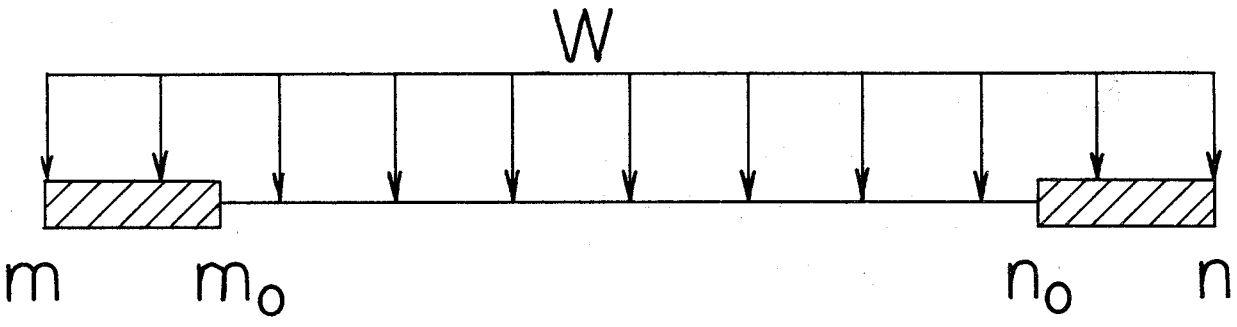


図１．１　等分布荷重

(b)　梯形分布荷重（図１．２）

$$C_{mn} = -w_{0mn}\,l^2\left[\frac{1}{20} + \frac{7}{20}\lambda_{mn} + \left(\frac{1}{12} + \frac{2}{3}\lambda_{mn}\right)\eta_{mn}\right]\Gamma_{mn}$$

$$-w_{0nm}\,l^2\left[\frac{1}{30} + \frac{3}{20}\lambda_{mn} + \left(\frac{1}{12} + \frac{1}{3}\lambda_{mn}\right)\eta_{mn}\right]\Gamma_{mn}$$

$$-\frac{l^2_{mn}}{6}\left(w_{mn} + 2\,w_{0mn}\right)$$

$$C_{nm} = w_{0mn}\,l^2\left[\frac{1}{30} + \frac{3}{20}\lambda_{nm} + \left(\frac{1}{12} + \frac{1}{3}\lambda_{nm}\right)\eta_{nm}\right]\Gamma_{mn}$$

$$+ w_{0nm} l^2 \left[\frac{1}{20} + \frac{7}{20} \lambda_{nm} + \left(\frac{1}{12} + \frac{2}{3} \lambda_{nm} \right) \eta_{mn} \right] \Gamma_{mn}$$

$$+ \frac{l^2_{nm}}{6} \left(w_{nm} + 2 w_{0nm} \right)$$

$$D_{mn} = - w_{0mn} l \left(\frac{7}{20} + \frac{2}{3} \eta_{mn} \right) \Gamma_{mn}$$

$$- w_{0nm} l \left(\frac{3}{20} + \frac{1}{3} \eta_{mn} \right) \Gamma_{mn} - \frac{l_{mn}}{2} \left(w_{mn} + w_{0mn} \right)$$

$$D_{nm} = w_{0mn} l \left(\frac{3}{20} + \frac{1}{3} \eta_{mn} \right) \Gamma_{mn} + w_{0mn} l \left(\frac{7}{20} + \frac{2}{3} \eta_{mn} \right) \Gamma_{mn}$$

$$+ \frac{l_{nm}}{2} \left(w_{nm} + w_{0nm} \right)$$

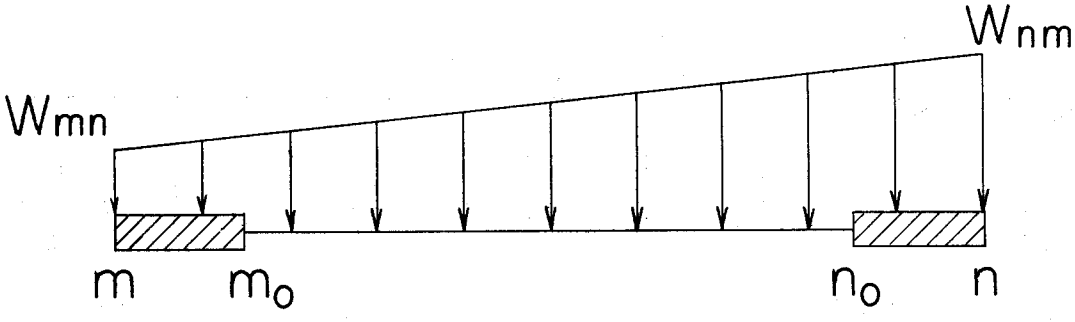


図１．２　梯形分布荷重

(c)　３角荷重（その１）（図１．３）

$$C_{mn} = - \frac{w_{nm} l^3}{(I_{mn} - C)} \left[\frac{1}{6} (\lambda_{mn} - \lambda_c)^2 (2 \lambda_{mn} + \lambda_c) + \frac{1}{12} (\lambda_{mn} - \lambda_c) \right.$$

$$+ \frac{1}{2} \lambda_{mn} (\lambda_{mn} - \lambda_c) + \left(\frac{1}{30} + \frac{3}{20} \lambda_{mn} \right) \Gamma_{mn}$$

$$\left. + \left(\frac{1}{12} + \frac{1}{3} \lambda_{mn} \right) \eta_{mn} \Gamma_{mn} \right]$$

$$C_{nm}=\frac{w_{nm}l^3}{(L_{mn}-C)}\left[\frac{1}{2}\lambda_{nm}^2(\Lambda_{mn}-\lambda_c)-\frac{1}{3}\lambda_{nm}^3+\frac{1}{2}\lambda_{nm}\right.$$

$$+\frac{1}{2}\lambda_{nm}(\lambda_{mn}-\lambda_c)+\frac{1}{12}(\lambda_{mn}-\lambda_c)$$

$$\left.+\left(\frac{1}{20}-\frac{3}{20}\lambda_{nm}\right)\Gamma_{mn}+\left(\frac{1}{12}-\frac{1}{3}\lambda_{nm}\right)\eta_{mn}\Gamma_{mn}\right]$$

$$D_{mn}=\frac{-w_{nm}l^2}{(L_{mn}-C)}\left[\frac{1}{2}(\lambda_{mn}-\lambda_c)^2+\frac{1}{2}(\lambda_{mn}-\lambda_c)+\frac{3}{20}\Gamma_{mn}+\frac{1}{3}\eta_{mn}\Gamma_{mn}\right]$$

$$D_{nm}=\frac{w_{nm}l^2}{(L_{mn}-c)}\left[\lambda_{nm}(\Lambda_{mn}-C)-\frac{1}{2}\lambda_{nm}^2+\frac{1}{2}\right.$$

$$\left.+\frac{1}{2}(\lambda_{mn}-\lambda_c)-\frac{3}{20}\Gamma_{mn}-\frac{1}{3}\eta_{mn}\Gamma_{mn}\right]$$

$$\lambda_c=C/l$$

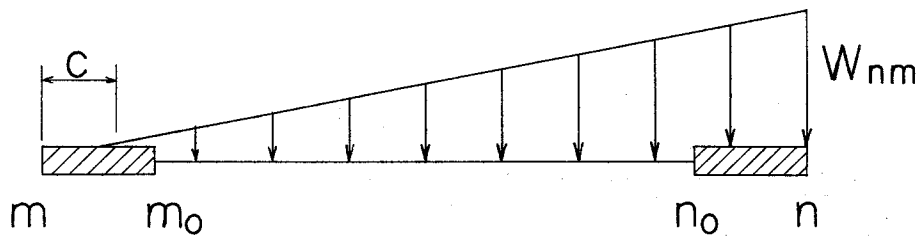


図１．３　３角荷重（その１）

(d)　３角荷重（その２）

$$C_{mn}=-\frac{w_{nm}l^3}{(L_{mn}-l_{mn}-C)}(1-\lambda_c)^3\Gamma_{mn}\left[(1-\lambda_c)\left(\frac{1}{30}+\frac{1}{20}\lambda_c\right.\right.$$

$$\left.\left.+\frac{3}{20}\lambda_{mn}+\frac{1}{10}\lambda_{mn}\lambda_c\right)+\frac{1}{12}(1+\lambda_c+4\lambda_{mn})\eta_{mn}\right]$$

$$C_{nm}=\frac{w_{nm}l^3}{(L_{mn}-l_{mn}-C)}\left[\frac{1}{2}\lambda_{nm}^2(\Lambda_{mn}-\lambda_{mn}-\lambda_c)-\frac{1}{3}\lambda_{nm}^3\right.$$

$$+\frac{1}{2}\lambda_{nm}(1-\lambda_c)^2+(1-\lambda_c)^3\Gamma_{mn}\left\{\frac{1}{20}+\frac{1}{15}\lambda_c+\frac{1}{20}\lambda_c^2\right.$$

$$-\frac{3}{20}\lambda_{nm}+\frac{1}{20}\lambda_{nm}\lambda_c(1+2\lambda_c)+\frac{1}{12}(1+\lambda_c-4\lambda_{nm})\eta_{mn}\}]$$

$$D_{mn}=-\frac{w_{nm}l^2}{(L_{mn}-l_{mn}-C)}(1-\lambda_c)^3\Gamma_{mn}[(1-\lambda_c)(\frac{3}{20}+\frac{1}{10}\lambda_c)$$

$$+\frac{1}{3}\eta_{mn}]$$

$$D_{nm}=\frac{w_{nm}l^2}{(L_{mn}-l_{mn}-C)}[\lambda_{nm}-(\Lambda_{mn}-\lambda_{mn}-\lambda_c)-\frac{1}{2}\lambda_{nm}^2$$

$$+\frac{1}{2}(1-\lambda_c)^2-(1-\lambda_c)^3\Gamma_{mn}\{(1-\lambda_c)(\frac{3}{20}+\frac{1}{10}\lambda_c)$$

$$+\frac{1}{3}\eta_{mn}\}]$$

$$\lambda_c=C/l$$

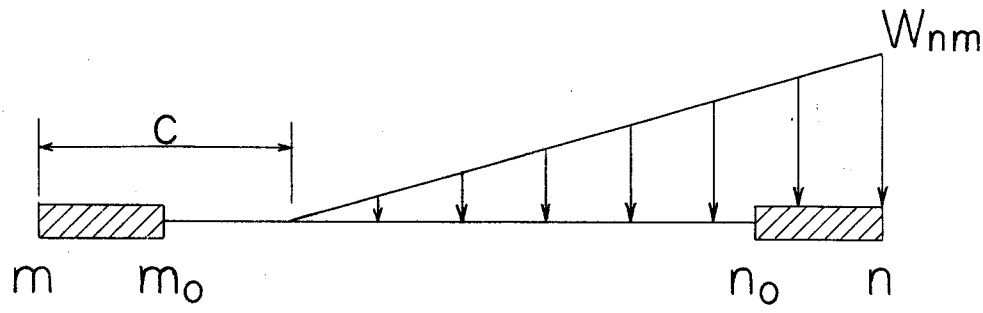


図１．４　３角荷重（その２）

(e)　３角荷重（その３）（図１．５）

$$C_{mn}=0$$

$$C_{nm}=\frac{w_{nm}l^2}{6}(\lambda_{nm}-\lambda_c)^2$$

$$D_{mn}=0$$

$$D_{nm}=\frac{w_{nm}l}{2}(\lambda_{nm}-\lambda_c)$$

$$\lambda_c=C/l$$

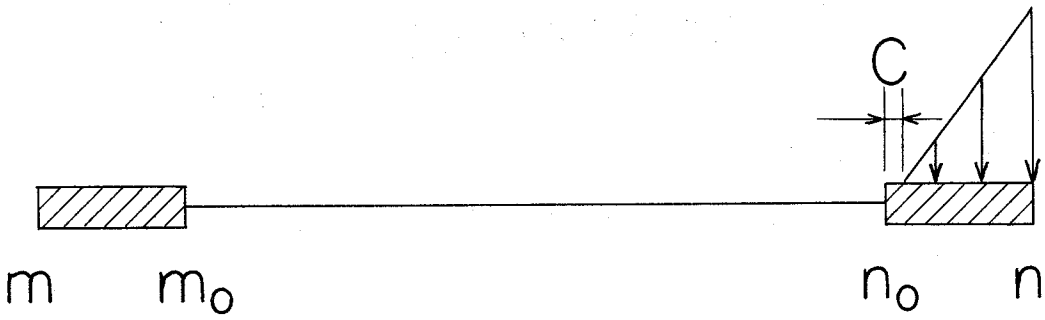


図１．５　３角荷重（その３）

(f)　集中荷重（図１．６）

$$C_{mn} = -Pl\,(1-\lambda)\,\Gamma_{mn}\left[\,(1-\lambda)\,(\lambda_{mn}+\lambda+2\lambda_{mn}\lambda)+(2\lambda_{mn}+\lambda)\,\eta_{mn}\right]$$

$$C_{nm} = Pl\lambda\Gamma_{mn}\left[\,\lambda\,(1+3\lambda_{nm}-\lambda-2\lambda_{nm}\lambda)+(1+2\lambda_{nm}-\lambda)\,\eta_{mn}\right]$$

$$D_{mn} = -P\,(1-\lambda)\,\Gamma_{mn}\left[\,(1-\lambda)\,(1+2\lambda)+2\,\eta_{mn}\right]$$

$$D_{nm} = P\lambda\Gamma_{mn}\left[\,\lambda\,(3-2\lambda)+2\,\eta_{mn}\right]$$

$$\lambda = l_0 / l$$

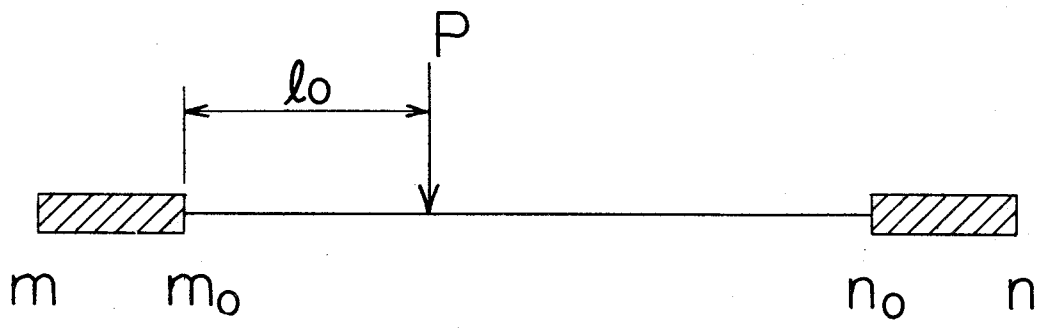


図１．６　集　中　荷　重

付録2. 変形の基礎式

第2編第4章では2．3．1の前提条件の基で，補強板の中心Oに関して平衡方程式を作成する。従って，補強材ならびに板については各要素に関して，それぞれ単独に考えた変形を補強板の中心Oについての変形に変換して考えなければならない。

普通，単独部材の変形は図心まわりの曲げおよびせん断中心まわりの捩り変形を考える。本節では，まず，補強材の変形として図心まわりの曲げおよびせん断中心まわりの捩りを考え，それを補強板の中心Oのまわりの面内，曲げおよび捩り変形に変換する。

補強板における座標系および変位成分を次のように定義する（図2．1および2．2）。

まず，第M番目の梁要素（補強材）に固定した局部座標系として$s\ n\ z$座標を定める。ここでs軸を補強材の長さ方向にとり，$s\ n\ z$座標の各座標軸方向の変位を次のように定める。

w：z方向の撓み

$\dot{w}$：傾斜（$=\partial w/\partial s$）

φ：捩り角

δ：s方向変位

$\dot{\varphi}$：捩り率（$=\partial\varphi/\partial s$）

ここで，添字

O：補強板の中心

G：補強材の図心

C：補強材のせん断中心

一方，補強板に固定した全体座標系を$x\ y\ z$座標とし，各変位成分を次のようにとる

u：x方向の変位

v：y方向の変位

w：z方向の変位

θ_x：x方向の回転角（$=-\partial w/\partial y$）

θ_y：y方向の回転角（$=\ \partial w/\partial x$）

$\dot{\varphi}$：捩り率

補強材の図心Gとせん断中心Cに関する変位と補強板の中心Oに関する変位との間の関係は，変換行列$[T_1]$を用いて次式で表わせる。

$$\begin{Bmatrix} \delta_G \\ w_G \\ \dot{w}_G \\ \varphi_C \\ \dot{\varphi}_C \end{Bmatrix} = [T_1] \begin{Bmatrix} \delta \\ w \\ \dot{w} \\ \varphi \\ \dot{\varphi} \end{Bmatrix} \qquad (2.1)$$

ここで，“・”はsに関する微分を表わす。

$$[T_1] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & e & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad (2.2)$$

e：補強材の図心Gと補強板の中心Oの距離（図２．３）

補強板に固定した$x\ y\ z$座標に関する変位と補強材に固定した$s\ n\ z$座標系に関する変位との間の関係は，変換行列$[T_2]$を用いて次式で与えられる。

$$\begin{Bmatrix} \delta \\ w \\ \dot{w} \\ \varphi \\ \dot{\varphi} \end{Bmatrix} = [T_2] \begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \\ \theta_x \\ \theta_y \\ \dot{\varphi} \end{Bmatrix} \qquad (2.3)$$

ここで

$$[T_2] = \begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos\alpha & \sin\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad (2.4)$$

α：s軸とx軸のなす角度（図２．２）

（２．１）式と（２．３）式より次式を得る

$$\begin{Bmatrix} \delta_G \\ w_G \\ \dot{w}_G \\ \varphi_C \\ \dot{\varphi}_C \end{Bmatrix} = [\,T_3\,] \begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \\ \theta_x \\ \theta_y \\ \dot{\varphi} \end{Bmatrix} \qquad (2.5)$$

ここで

$$[\,T_3\,] = [\,T_1\,][\,T_2\,] \qquad (2.6)$$

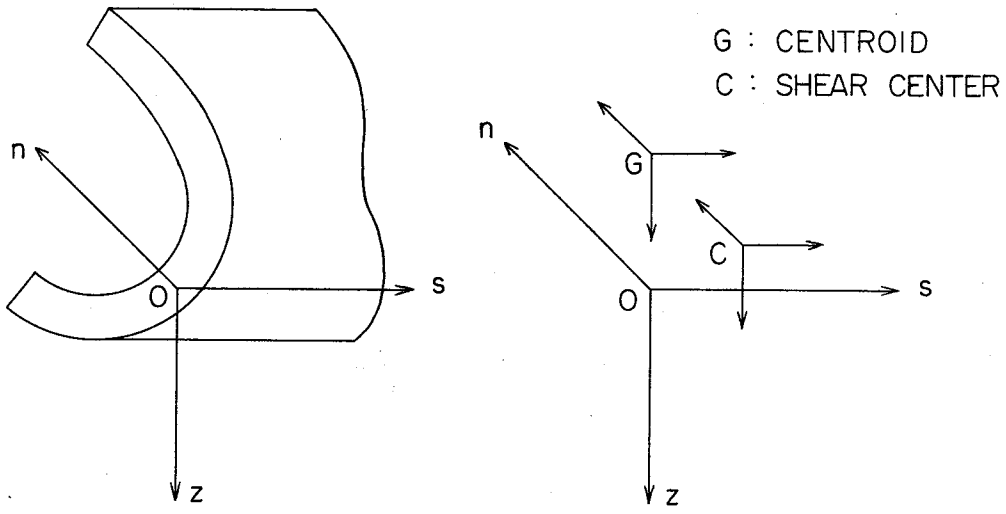
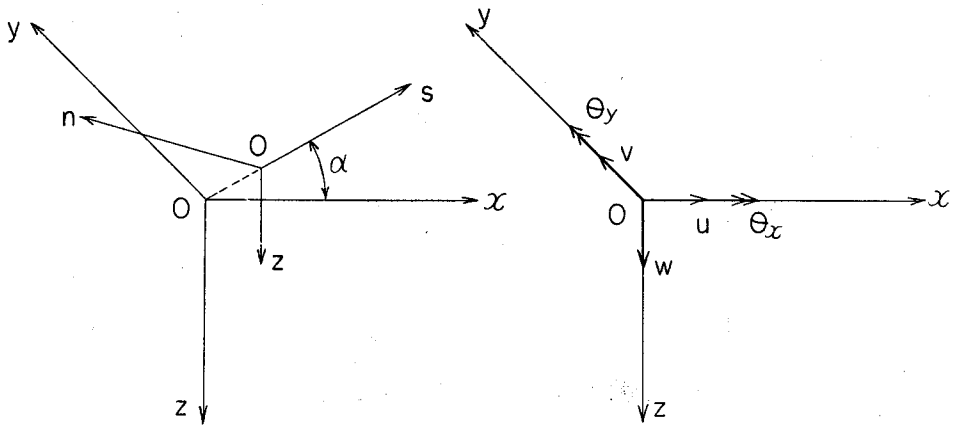


図２．１　座　標　系



(a) COORDINATES　　(b) NODAL DISPLACEMENT

図２．２　補強材の節点変位

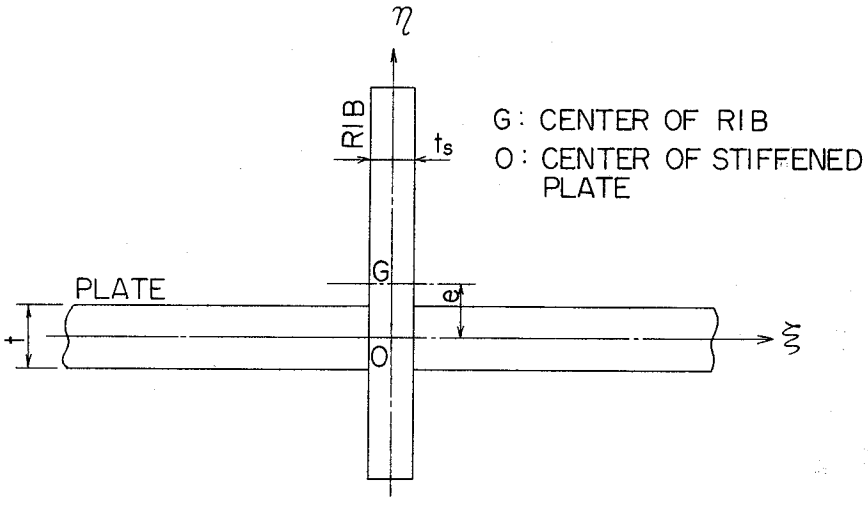

η
RIB
t_s
G: CENTER OF RIB
O: CENTER OF STIFFENED PLATE
PLATE
G
e
t
O
ξ

図２．３　補強板の断面図

記　　号

A	断　面　積
$[A]$	変位関数
B	船　　幅
b	板　　幅
b_1	スロット幅
C	剪断中心
C , D	荷　重　項
D	船の深さ，曲げ剛性
$[D]$	曲げ剛性行列
$D.W.T.$	載荷重量
d	直径，吃水
d_w	ウエブ深さ
E	ヤング率
E_t	接線係数
E_s	切線係数
e	部材の中性軸と構造物全体の中性軸間の距離
F	剪断力，応力関数
F_x , F_y , F_z	表面力成分
f	外　荷　重
G	横弾性係数，重心
H	玄側油槽の幅
$[H]$	補強材の変位関数
h	スロットの高さ
I	断面２次モーメント
$[I]$	単位行列
I_p	極慣性能率
I_ω	曲げ捩り定数
J	捩り定数

$[K]$	剛性行列
$[K']$	安定係数行列
k	座屈強度値，変位係数
$[k]$	有限要素の剛性行列
L	船長
l	部材長さ
l, m, n	方向余弦
M	モーメント，曲げモーメント
$\{M\}$	モーメント行列
$[M]$	変位関数
m_t	分布捩りモーメント
N	軸　　力
O	補強板の中心
P	外力，軸力，集中荷重，周辺力
$[P]$	応力行列
p	水　　圧
Q	剪断力，有限要素の数
q	水平力，分布軸力，桁に作用する分布荷重
R	支点反力
$\{R\}$	節点力
r	垂直力
$\{r\}$	節点変位
S	剪断力
s	縦通材心距
s, n, z	補強材の座標系
$[T]$	変換行列
t	板　厚
t_w	ウエブ板厚
u, v	面内変位成分
V	ひずみエネルギー，油槽の高さ

$[V]$	相互干渉係数
W	外力のなす仕事，縦通材からウエブに入る力
$\{W\}$	外荷重
w	撓み，分布荷重，船底板からウエブに入る力
X, Y, Z	物体力成分
x, y, z	左手座標系
$\{Y\}$	変位行列
y	変　位
α	アスペクト比
α_t	換算係数
$\{\alpha\}$	一般化座標
β	固有値，固定度
δ	伸び，断面積比
ε	平均ひずみ
$\{\varepsilon\}$	ひずみ行列
ε_I	相当ひずみ
$\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z,$	ひずみ成分
$\gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{zx}$	
$\varepsilon_x', \varepsilon_y', \varepsilon_z'$	偏差ひずみ成分
ε_Y	降伏ひずみ
η	補強材の中心線
$\{\theta\}$	傾斜行列
ν	ポアソン比
ξ	板の中心線
σ	平均応力，軸応力
$\{\sigma\}$	応力行列
σ_I	相当応力
$\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z,$	応力成分
$\tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{zx}$	
$\sigma_x', \sigma_y', \sigma_z'$	偏差応力成分

σ_Y	降伏応力
τ	剪断応力
φ	回転角，捩り角
$\dot{\varphi}$	捩り率
χ	曲　率
$\{\chi\}$	曲率行列
ω	ワーピング
ω_s	ワーピング関数
Δ	有限要素の面積

添　　字

a	軸方向変形，前
b	曲　げ
cal	計算値
cr	座屈値
d	塑性変形理論
e	弾　性
exp	実験値
f	塑性流れ理論，後
i	節　点
k	支点番号
L	船底における値
N	有限要素
o	基準値
p	板，塑性
r	残留応力
s	補強材
T	転置行列
t	捩れ
U	甲板における値
Δ	変化量，微少量
δ	変化量
ω	ワーピング

参　考　文　献

(1) *Adams, H. J.*,

Notes on Stresses in Tankers' Members, T.I.N.A., Vol. 92, 1950

(2) *Adams, H. J.*,

Some Further Applications of Moment Distribution to the Framing of Tankers, T.N.E.C.I., 1952～3

(3) 岡部，堀，

ハーディクロス法によるタンカー骨組構造の立体的解析，西部造船会々報，

8号，昭和29年11月

9号，昭和30年5月

(4) *Steneroth, E.*,

On the Transverse Strength on Tankers, Tr. Royal Inst. of Tech., Stockholm, 1955

(5) 西牧興，

油槽船の横強度の計算例について，造船協会論文集，108号，昭和35年12月

(6) 山越，香川，

ウイングタンクのせん断変形について(1)，(2)，西部造船会々報，第29号，昭和40年2月，第33号，昭和42年2月

(7) 真能創，

玄側タンクのせん断変形について，関西造船協会誌，123号，昭和41年12月

(8) *Mori, M., Izuchi, S., Funaoka, K. and Ohyama, T.*,

On the Transverse Strength of Oil Tankers, 造船協会論文集，121号，昭和42年6月

(9) 運輸省船舶局編，

巨大船に関する技術資料，1966

(10) 造船学会船体構造委員会西部地区部会，スロット・ワーキング・グループ資料，

スロット部の損傷整理(4)，1968

(11) *Love, A.E.H.*,

A Treatise on the Mathematical Theory of Elasticity, Dover, New York, 4－*th Edition*, 1944

(12) *Hill, R.,*

Mathematical Theory of Plasticity, Oxford Clarendon Press, 1950

(13) *Mises, R.V.,*

Mechanik der festen Koerper im Plastisch Deformablen Zustand, Goettinger Nachr., Math. Physs. Kl., 1913

(14) *Tresca, H,*

Memoire sur l'e' conlement des corps solides, Mem. Press. par div. saw. 18, 1868

(15) *Hencky, H.*

Zur Theorie Plastischer Deformationen und der Heirdurch im Material Hervorgerufenen Nebenspannungen, Proc. 1st International Congress, Applied Mechanics, Delft, 1924

(16) *Prandtl, L,*

Spannungsverteilung in Plastischen Koerpern, Proc. 1st International Congress, Applied Mechanics, Delft, 1924

(17) *Reuss, E.,*

Berucksichtigung der Elastischen Formaenderungen in der Plastizitats Theorie, Z. Angew. Math. Mech. 10, 1930

(18) 山田嘉昭，

弾塑性問題における剛性マトリックス，生産研究，19巻，3号，1967

(19) *Airy, G. B.,*

British assoc. Advancement Sci. Rept., 1862

(20) *Roberts, E. and Mendelson, A.,*

Analysis of Plastic Thermal Strsses and Strains in Finite Thin Plate of Strain-Hardening Material, NASA TN D-2206, 1964

(21) *Zienkiewicz, O.C. and Cheung, Y.K.,*

The Finite Element Method in Structural and Continuum Mechanics, McGraw-Hill, 1967

(22) *Timoshenko, S.P. and Gere, J.M.,*

Theory of Elastic Stability, 2nd Edition, McGraw-Hill, New York, 1961

(23) 倉西正嗣

弾性学，日本機械学会，１９５２

(24) *Bleich,F.,*

*Buckling Strength of Metal Structures,McGraw-Hill,New York,*1961

(25) *Shanley,F.R.,*

*Inelastic Column Theory,Journal Aeronaut.Sci.,Vol.*14，1947

(26) *Karman,Th.V.,*

*A Comment on Shanley's Paper,Journal Aeronaut.Sci.,Vol*14，1947

(27) *Bijlaard,P.P.,*

Theory of the Plastic Buckling of Thin Plates,I.A.B.S.E.,

*Zurich,*6，1940−1941

(28) *Ilyushin,A.A.,*

*Some Problems in the Theory of Plastic Deformations,P.M.M.,*7,

1943,*Translation by Applied Mathematics Group,Brown Univ.,*1946

(29) *Stowell,E.Z.,*

A Unified Theory of Plastic Buckling of Columns and Plate,NACA,

TN 1556，1948

(30) *Stowell,E.Z.and Pride,R.A.,*

The Effect of Compressibility of the Material on Plastic Buckling,

*Journal Aeronaut.Sci.,*18，1951

(31) *Handleman,C.H.and Prager,W.,*

Plastic Buckling of a Rechtangular Plate under Edge Thrust,NACA,

TN 1530,1948

(32) 吉識雅夫，藤田譲，川井忠彦

残留応力が板の座屈強度におよぼす影響，造船協会論文集，１０７号，昭和３５年６月

(33) *Nishino,F.,*

Buckling Strength of Column and Their Component,Ph.D.Dissertation,

*Lehigh Univ.,*1964

(34) *Melcsh, R.J.,*

Basis for Derivation of Matricies for the Direct Stiffness Method,

J.A.I.A.A., Vol.1, July, 1963

(35) 森正浩，的場正明，

有孔矩形板の剪断塑性座屈に関する研究，西部造船会々報，第33号，昭和42年2月

(36) 渡辺恵弘

縦通材貫通部の*Trans. Web*の強度，造船学会船体構造委員会西部地区部会資料，

63－1－½，1967

(37) 山越道郎

スロットまわりの計算法のまとめ，造船学会船体構造委員会西部地区部会資料，

69－13－1/1，1968

(38) 山越道郎，河野高顕，

等分布荷重と曲げモーメントを受ける矩形板の座屈について，西部造船会々報，

第29号，昭和40年2月

(39) *Kloeppel.E.h.K. and Scheer, J.,*

Beulwerte ausgesteifter Rechteckplatten, Berlin, 1960

(40) *Salmon, C.G.,*

Analysis of Triangular Bracket-Type Plates, A.S.C.E., EM6,

December, 1962

(41) 浜田実，井上豊，橋本裕，

部分的固定の支持辺を持つ長方形板の圧縮座屈，日本機械学会論文集，32巻，236号，昭和41年4月

(42) *Schlack, A.L.,*

Elastic Stability of Pierced Square Plates, Experimental Mechanics,

June, 1964

(43) 吉識雅夫，川井忠彦，大坪英臣

平板の曲げ振動および座屈問題に関するエネルギー法の一般的適用法について(III)，日本造船学会論文集，123号，昭和43年6月

(44) *Ueda, Y.,*

Elastic, Elastic-Plastic and Plastic Buckling of plates with Residual Stresses, Ph.D. Dissertation, Lehigh Univ., 1962

(45) 長柱研究委員会，

弾性安定要覧，コロナ社，1960

(46) *Timoshenko, S.,*

Uber die Stabilitat versteifter Platten, Eisenbau, 12, 1921

(47) *Burchard, W.,*

Beulspannungen der quadratichen Platte mit Schragsteife unter Druck bzw. Schub, Ing. Arch., 8, 1937