Title	コンパートメントアナリシスに関する研究
Author(s)	梶谷, 文彦
Citation	大阪大学, 1977, 博士論文
Version Type	VoR
URL	https://hdl.handle.net/11094/2566
rights	
Note	

コンパートメントアナリシスに関する研究

大阪大学工学部電子工学教室

梶　谷　文　彦

１　９　７　７　大　阪

目　　　次

内　容　梗　概

コンパートメントアナリシスは，いくつかの区画（コンパートメント）から構成されている系に，ラジオアイソトープや色素などのトレーサ（追跡物質）を入力した場合の一部のコンパートメントのトレーサ動態曲線の観測値から，この系を推定する方法であり，生体やエコロジーシステムの解析に用いられている。コンパートメントアナリシスは，コンパートメントシステムの同定とシステム理論的な解析に大別されるが，これまで前者については次数推定の問題が残され，後者についてはわずかに次数が３以下の場合あるいは特殊なシステムについて主に入出力部位が等しい場合の性質が明らかにされているのみであった。

そこで，本研究では同定問題については，精度の高い次数ならびにパラメータ推定法を提案し，併せてサンプリング条件の最適化について検討を加えた。また，システム論的にはこれまで明らかにされていた系よりも広いクラスについて論議を拡張し，入出力部位が異なる場合についての検討を行うとともに最小実現問題について２～３の解析を行った。

本論文では，第一章にコンパートメントシステムのあらましを，第二章ではコンパートメントシステムの次数ならびにパラメータ同定法を，第三章では計測系に雑音が重畳している場合のサンプリング条件について述べ，第四章でコンパートメントシステムに対してシステム論的な考察を加えたあと，第五章で本解析法の具体的医学応用結果について述べる。

第一章　緒　　論

生体系，物理系，化学系などにトレーサを負荷した場合のレスポンスは，それを支配する物理法則，化学法則に帰因して，いくつかの特徴が現われてくる。それは多くの場合，システムを記述する状態方程式　$\dot{x} = \mathrm{A}x + \mathrm{b}u$，出力方程式　$y = \mathrm{C}^T x$　で　$\mathrm{A} = [\mathrm{A}_{ij}]$　としたとき，

(i)　$a_{ii} \leqq 0$，　$a_{ij} \geqq 0$，　$i \neq j$

(ii)　$|a_{jj}| \geqq \sum_{i \neq j} a_{ij}$

という制限が現われてくることである。システムマトリクスAに関する条件(i),(ii)は，物理的，化学的保存則に関係するものである。いま図１－１に示すようなコンパートメントがあり，それぞれの間で物質の授受があるというシステムを考えてみると，コンパートメントiでの物質の収支（保存則）を表す方程式はつぎのようになる。

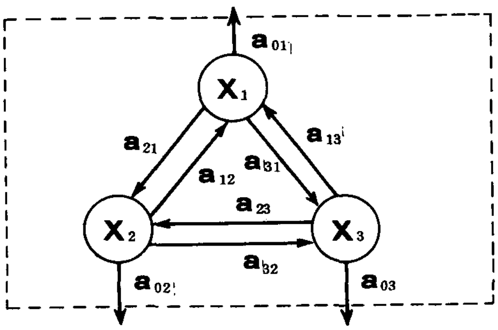


図１－１　コンパートメントシステム

$$\dot{x}_i = -\sum_{j=0}^{n} a_{ji} x_i + \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \text{ ,} \quad i = 1,\ 2,\ \cdots\cdots n \qquad (1.1)$$

ここで　$a_{0i} \geqq 0$　は系外への排泄を表す移行係数である。この方程式からシステムマトリクスに関する条件(i),(ii)が成立していることがわかる。

コンパートメントアナリシスは，このようにいくつかのコンパートメントからなると考えられるシステムに，トレーサをパルス状に負荷したときの，あるコンパートメントにおけるトレーサの応答を観測し，その結果を用いてコンパートメントの数や移行係数を推定するものである。

コンパートメントの意味は，解析対象によって異るが，例えば，生体では血管・臓器などの機能的な分布相を意味し，電気回路においてはコンデンサ，化学反応では物質状態，マルコフ過程で表現可能な系では state（状態），人口移動モデルでは各地域などが，これに相当する。一方，トレーサは追跡調査される物質であり，例をあげると生体では，放射性物質や色素，電気回路では電価，化学反応系では測定される物質，マルコフ過程では観測可能な state における計測量，人口移動モデルでは人口などが，トレーサとして使用される。また，移行係数は，あるコンパートメントから他のコンパートメントに移行する割合を示すものであり，確率的な現象では，状態間の推移を示す確率と考えてもよい。したがって compartmental analysis は，線形性が仮定でき，かつ系全体の計測が不可能である系の解析法として有力であり，医学，工学，社会学，行動計量学などで広く応用可能な方法と考えられる。ただし，本解析法は，一義的に解明できないシステムにおける系の解析法であるから，モデルの妥当性に関する検討は各応用分野における固有

科学によって検証する必要がある。

第二章　コンパートメントシステムの次数および パラメータ推定法

コンパートメントシステムは，状態方程式　$\dot{x}=\mathrm{A}x+\mathrm{b}u$　のマトリクスの要素 a_{ij}　が零であるかどうかによって，コンパートメント j から i に向う経路の存否，すなわちコンパートメントの配列が決る。このようなコンパートメントの配列としては，いくつかの特殊型が知られているが，このうち生体系など現実のシステムの解析の際にしばしば用いられるカテナリー，マミラリーシステム（図２－１）においては，トレーサの入出力部位を問わず，観測される動態曲線はいくつかの指数関数の和

$$y(t)=\sum_{i=1}^{p}A_i e^{-\alpha_i t}$$

で表わされ，A_i，α_i は正の実数であることが証明されている。したがって，コンパートメントアナリシスの作業として，まずこの指数関数 $\{A_i\}$，$\{\alpha_i\}$，P を推定することが必要である。

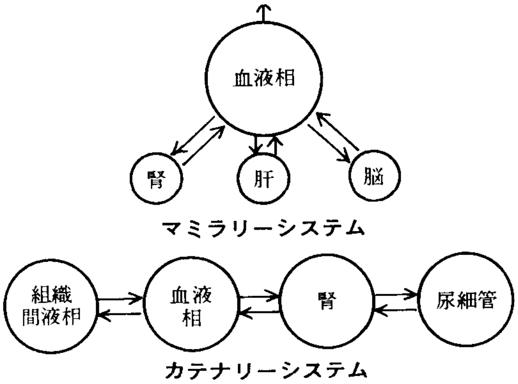


図２－１　マミラリー，カテナリーシステムと その医学的対応づけの例

このようなパラメータ推定法としては，これまで(1)Peeling 法[1] (2)モーメント法[2] (3)最小二乗法[3] (4)最尤法[4] (5)フーリエ変換法[5] (6)プロニー法[6] などが提案されている。しかし，いずれの方法もコンパートメントの数 P の推定に難点があるとされている。そこで，本研究では，このような問題点を解決するため，

1　Gardner によって提案されたフーリエ変換法をディジタルフィルタで改善する方法

2　赤池氏によって提案された AIC (An Information Theoretical Criterion) によってコンパートメント数 P を推定し，最尤法を用いてパラメータ $\{A_i\}$，$\{\alpha_i\}$ を推定する方法

の２つの方法を提案し，数値実験による検討を加えた。なおトレーサとしては医学的に頻用されるラジオアイソトープを想定し，計測値がポアソン分布にしたがうものとして解析を進めた。

２－１　フーリエ変換法にディジタル・フィルタを適用したコンパートメントシステムの同定[5]

フーリエ変換法は，まず単位インパルス関数 δ を用いて

$$g(\alpha)=\sum_{i=1}^{p}A_i\delta(\alpha-\alpha_i) \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (2.1)$$

を定義し，この $g(\alpha)$ によって指数関数　$x(t)=\sum_{i=1}^{p}A_i e^{-\alpha_i t}$　を

$$x(t)=\sum_{i=1}^{p}A_i e^{-\alpha_i t}=\int_{0-}^{\infty}g(\alpha)e^{-\alpha t}d\alpha \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (2.2)$$

のような積分形で表現することから出発する。つぎに $f(t)=tx(t)$ というガンマ関数の和の型にする。

そこで $\alpha=e^{-y}$, $t=e^{x}$ と置き換えると, $f(t)$ はつぎのようになる。

$$f(e^{x})=\int_{-\infty}^{\infty}e^{x}e^{-e^{x-y}}g(e^{-y})e^{-y}dy \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (2.3)$$

式2.3をフーリエ変換すると, つぎのようになる。

$$F(\mu)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}e^{x-y}e^{-e^{x-y}}g(e^{-y})e^{\mu ix}dxdy \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (2.4)$$

ただし, $i=\sqrt{-1}$ である。 式2.4 において $x-y=v$ とおくと, 次式が得られる。

$$F(\mu)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}e^{v}e^{-e^{v}}g(e^{-y})e^{i\mu(v+y)}dvdy$$

$$=\left(\int_{-\infty}^{\infty}e^{v}e^{-e^{v}}e^{i\mu v}dv\right)\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}g(e^{-y})e^{i\mu y}dy\right) \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (2.5)$$

ここで, 右辺第1項を $K(\mu)$ と置き $e^{v}=p$ とすれば

$$K(\mu)=\int_{-\infty}^{\infty}e^{-p}p^{i\mu}dp=\Gamma(1+i\mu)$$

となり, 既知の複素ガンマ関数となる。また, 式2.5の右辺第2項は $g(e^{-y})$ のフーリエ変換 $G(\mu)$ であるから, 結局式2.5は

$$F(\mu)=K(\mu)G(\mu) \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (2.6)$$

と表わされる。したがって

$$G(\mu)=F(\mu)/K(\mu) \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (2.7)$$

なる関係が得られ, $F(\mu)$, $K(\mu)$ は与えられるので 式2.7 を計算し,これを逆フーリエ変換すれば, $g(e^{-y})$が得られる。ここで, $g(e^{-y})dy=-\left(g(\alpha)/\alpha\right)d\alpha$ であるから, $\alpha_i=e^{-y_i}$ と置くと,

$$\int_{y_i-0}^{y_i+0}g(e^{-y})dy=\int_{\alpha_i+0}^{\alpha_i-0}\left(g(\alpha)/\alpha\right)d\alpha=A_i/\alpha_i \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (2.8)$$

となり,

$$g(e^{-y})=\sum_{i=1}^{p}(A_i/\alpha_i)\delta(e^{-y}-e^{-y_i})=g(\alpha)/\alpha \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (2.9)$$

が得られる。

したがって, $G(\mu)$ の逆フーリエ変換 $g(e^{-y})$ は, $\alpha=\alpha_i$ の時 A_i/α_i の大きさを有するインパルスを与えることになり, α_i, A_i がスペクトグラムより読みとれる。

ところで，式２．４のフーリエ変換は

$$F(\mu)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}f(e^{x})\,e^{i\mu x}dx \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (2.10)$$

となり，x の積分範囲は $-\infty\sim+\infty$ となる。しかし，実際の数値積分においては積分範囲を限定する必要がある。そこで，x の積分範囲を設定するために $A_i/\alpha_i=10^4$ となるような三つのテスト関数

$$x(t)=10^2e^{-0.01t}$$

$$x(t)=10\ e^{-0.001t}$$

$$x(t)=1\ e^{-0.0001t}$$

について $f(e^x)$ を求めると，$|x|$ が十分大きいとき，$f(e^x)$ は０に近づく。（図２－２）これは $x(t)=\sum_{i=1}^{p}A_ie^{-\alpha_it}$ についても当てはまるから，α の値が $1.0\times10^{-4}\sim1.0\times10^{-1}$ の範囲では $-5\leqq x\leqq15$ を考えれば打切り誤差を 10^{-3} 以下にしうることを意味する。このように取扱う事象ごとに指数部の大略の見当をつけておけば $f(e^x)$ のフーリエ変換の積分範囲を設定することができる。

しかし，このようにして $F(\mu)$ を求めたものを $K(\mu)=\Gamma(1+i\mu)$ で除して $G(\mu)$ を計算すると，高周波領域で発散する（図２－３）。この理由は，$x(t)$ の測定値の高周波成分の誤差と数値積分誤差である。

Gardner は，この $G(\mu)$ の発散を抑制するために，発散しはじめる周波数 μ_0 より高い周波数成分を除いて逆フーリエ変換を行った。しかし，この操作によりエラーリップル（副ピーク，波うち）が生じる（図２－４）。

そこで，このようなエラーリップルを減少させ，しかも分解能を向上するため本研究では，つぎのような Hanning の窓関数を適用した後，２－１－１で述べるディジタル・フィルタを作用させた。

$$Z(\mu)=0.5+0.5\cos(\pi\mu/\mu_0)：\mu<\mu_0$$

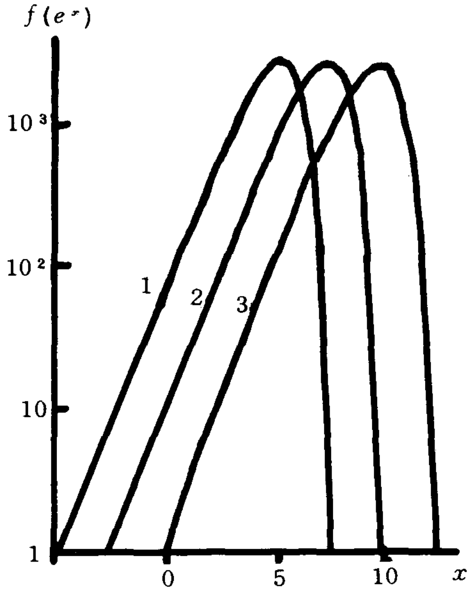


図２－２　テスト関数 1. $q(t)=100e^{-0.01t}$，2. $q(t)=10e^{-0.001t}$，3. $q(t)=e^{-0.0001t}$ を用いた場合の x に対する $f(e^x)$ 値の変化

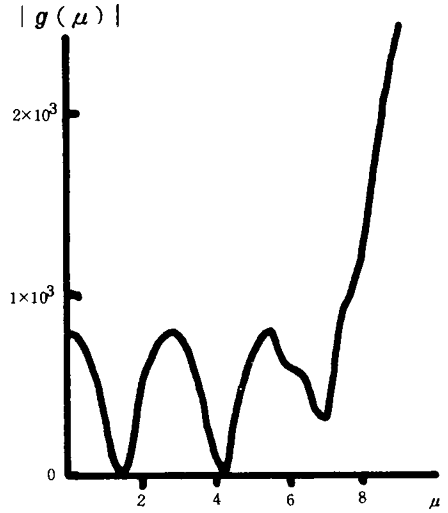


図2－3　G(μ)のパワースペクトルの例。$q(t)=1000e^{-0.1t}+100e^{-0.01t}$ にポアソン雑音を重畳したものについてGardnerの原法によりG(μ)を求めると高周波領域で発散を示す。

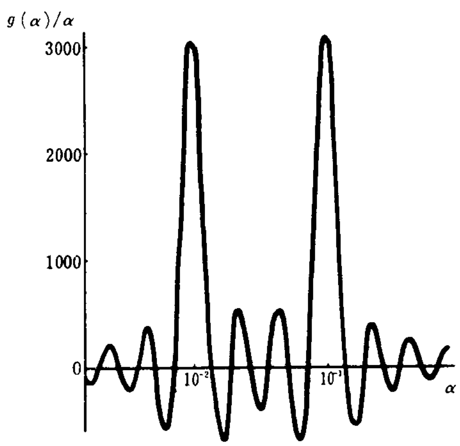


図2－4　$q(t)=100e^{-0.1t}+10e^{-0.01t}$ をテスト関数に用いてGardnerの原法通りに$A_i\alpha_i$ の同定を行った場合のエラーリップルの出現（図中，ピークの位置に相当するαをα_i の値とし，ピーク値をA_i/α_i としてA_i, α_i を求める）

$$Z(\mu)=0 \qquad : \mu \geqq \mu_0$$

ただし，μ_0 は $G(\mu)$ が発散しはじめる周波数で，

$$|G(\mu)| \leqq K|G(\mu_0)|, \quad K=5$$

を満足する最大のμ値とした。

2－1－1　ディジタル・フィルタを用いた分解能の向上[8)]

（2.7）式の $G(\mu)$ の逆フーリエ変換時に，ディジタル・フィルタを作用させてA_i/α_i の検出能の改善を図った。すなわち，

a　目的とする周波数は完全に通す

b　これ以外の周波数は出来るだけ通さない

という条件を満たす帯域通過・フィルタ$h(t)$ を Lacoss[7)] にしたがって，つぎのように作成した。

いま入力をI_t，出力をO_t とすれば，入出力の間にはフィルタ $h(t)$ を用いて

$$O_t=\sum_{\tau=0}^{N-1} h_\tau I_{t-\tau} \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots (2.11)$$

なる“たたみ込み”が成立する。

ここで，条件aは入力 I_t が$e^{i\omega_0 t}$ の時，出力 O_tが同じく$e^{i\omega_0 t}$ であることから，この関係を

上式に代入すると，

$$e^{i\omega_0 t} = \sum_{\tau=0}^{N-1} h_\tau e^{i\omega_0 (t-\tau)} \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (\ 2 \ .\ 12\ )$$

となる。したがって，両辺を $e^{i\omega_0 t}$ で除して入れかえると，

$$\sum_{\tau=0}^{N-1} h_\tau e^{-i\omega_0 \tau} = 1 \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (\ 2 \ .\ 13\ )$$

なる結果が得られる。

一方，条件 b としては O_t のパワーを最小にすることを考える。そこで O_t のパワー $E(|O_t^2|)$ を求めると，

$$E(\ |O_t^2|\ ) = E\left[\ \sum_{s,\ \tau=0}^{N-1} h_\tau h_s^* I_{t-\tau}\ I_{t-s}\ \right]$$

$$= \sum_{s,\ \tau=0}^{N-1} h_\tau h_s^* \gamma_{\tau-s} \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (\ 2 \ .\ 14\ )$$

となる。ただし h^* は h の複素共役，γ は O_t の自己相関関数である。ここで

$$E = [\ 1,\ e^{-i\omega_0},\ e^{-2i\omega_0},\ \cdots\cdots\cdots\cdots,\ e^{-(N-1)i\omega_0}\ ]$$

$$H = \mathrm{col}[\ h_0\ ,\ h_1\ ,\ h_2\ ,\ \cdots\cdots\cdots\cdots,\ h_{N-1}\ ]$$

$$R = \begin{bmatrix} \gamma_0\ ,\ \gamma_1\ ,\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\ \gamma_{N-1} \\ \gamma_1\ ,\ \gamma_0\ ,\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\ \gamma_{N-2} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \gamma_{N-1}\ ,\ \gamma_{N-2}\ ,\ \cdots\cdots\cdots\cdots\ \gamma_0 \end{bmatrix}$$

なるマトリクス表現を用いると式2．13は

$$EH = 1 \quad \text{または} \quad E^*H^* = 1 \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (\ 2 \ .\ 15\ )$$

式2．14は

$$E(\ |O_t^2|\ ) = H^{*\prime} RH \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (\ 2 \ .\ 16\ )$$

となる。但し $H^{*\prime}$ は H^* の転置を意味する。

したがって，問題は式2．15の条件のもとで式2．16を 最大にする H を求めることになる。これは条件つき極値問題であるから，ラグランジェの未定乗数法により H は

$$H = \frac{R^{-1}E^{*\prime}}{ER^{-1}E^{*\prime}} \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (\ 2 \ .\ 17\ )$$

となる。このように種々の ω_0 に対する H を求めてフィルタリングを行えば効率のよい $g(\ e^{-y})$ の検出を行いうる。

2－1－2　ディジタル・フィルタの効果[8)]

ディジタル・フィルタによる分解能向上の効果をみるため式2．7の逆フーリエ変換時に ディジタル・フィルタを併用した場合について，*RI* データであることを想定したテスト関数 による検討を行った。すなわち，時刻 t における計測値の平均値が，つぎのような $q_1(t)$ であるものとして，これにポアソン分布に従う乱数を重畳させた。

$$q_1(t) = 1000\,e^{-0.1t} + 100\,e^{-0.01t}$$

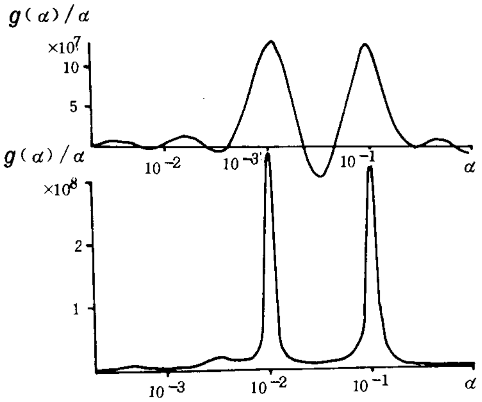


図2－5　$q_1(t)$ の同定をディジタルフィルタを用いて行った場合とGardnerの原法との比較
(a)：Gardnerの原法
(b)：ディジタルフィルタ適用

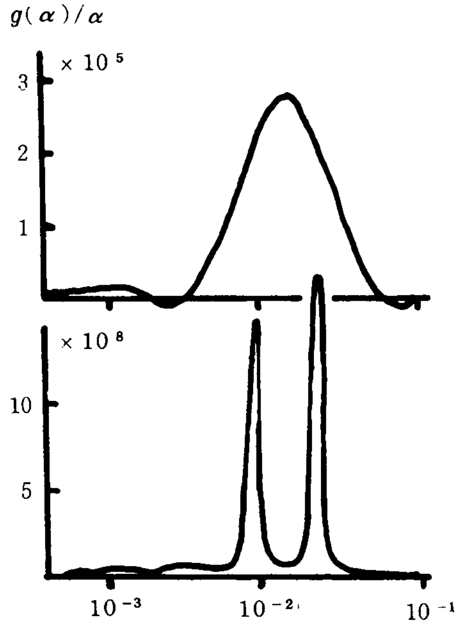


図2－6　$q_2(t)$ の同定におけるディジタルフィルタの効果
(a)：Gardner の原法
(b)：ディジタルフィルタ適用

図2－5は Gardner の原法によるものと ディジタル・フィルタを用いた場合を比較したものであるが，両者の $g(\alpha)/\alpha$ のスペクトルを比較すると，逆フーリエ変換時にディジタル・フィルタを併用した方が明らかにスペクトルが鋭くかつ狭帯城であることがいえる。

次に，同様にポアソン分布に従うノイズを含むテスト関数

$$q_2(t) = 100\,e^{-0.01t} + 150\,e^{-0.015t}$$

を与え，α 値が互に近似している場合の検討を行った（図2－6）。この場合 Gardner の原法では，α が 10^{-2} と 2×10^{-2} の間に1峰性のスペクトルのみが得られ，コンパートメント数は1個と判定された。これに対して逆フーリエ変換時にディジタル・フィルタを併用すると，2峰性のスペクトルが得られ，2個のコンパートメントの抽出が可能であった。

以上の実験結果より，逆フーリエ変換時のディジタル・フィルタにより分解能の向上が認めら

れ，Gardner の原法に比し，優れた精度が得られた。すなわち，$q_1(t)$ 式で示される関数のように，α 値の大なるものに対する小なるものの比が 10 倍程度の場合には，Gardner の原法でも十分検出可能であるが，$q_2(t)$ 式のテスト関数のように 各 α 値が互に近似している場合には，逆フーリエ変換時にさらにディジタル・フィルタを併用する必要があると考えられる。したがって，データの精度に応じて分解能を考慮したフィルタを選択するのが望ましい。ただし，ディジタル・フィルタを作用させた場合，理論的には $A_i = g(\alpha_i)/\alpha_i$ が成立するが，フィルタ操作により $g(\alpha_i)/\alpha_i$ のスペクトルは強調されるので，実際には線形最小自乗法で A_i を補正しなければならない。

2－1－3 小　　括

1）Gardner のフーリエ変換法は，分解能の点ですぐれている反面，“error ripple ”のため，ピークの判定が困難なことがある。
2）逆フーリエ変換時に最尤法にもとずくディジタル・フィルタ処理を行うことにより α_i の分解能をさらに向上させることができる。
3）$G(\mu)$ の逆フーリエ変換により理論的には，A_i は $A_i = g(\alpha_i)/\alpha_i$ より求められるが，フィルタ操作により A_i のスペクトルが強調されるので実際上は，線形最小自乗法で A_i を補正する必要がある。

2－2 AICおよび最尤法を用いたコンパートメントシステムの同定 [12][13][14][15][16]

2－1で述べたフーリエ変換法によって，コンパートメントシステムの次数の推定精度が向上したが，しかし，小さなピークをどこまで次数と算定するかについては，主観的な判断が必要であり，またパラメータの推定精度にはなお問題がある。そこで，同定精度をさらに向上させるため，パラメータ $\{A_i\}$ $\{\alpha_i\}$の推定に最尤法を用いたうえで，次数の決定に赤池氏の AIC (An Information Criterion)[10][11] を適用する方法を提案し，数値例によって本法の推定精度の検討を行った。

すなわち，システムのある時刻 t_j における計測値 n_j（カウント数）の期待値 $\langle n_j \rangle$ が

$$\langle n_j \rangle = \sum_{i=1}^{p} A_i e^{-\alpha_i t_j} \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots (2.18)$$

で表わされ，その時刻におけるカウント数の分布が $e^{-\langle n_j \rangle} \dfrac{\langle n_j \rangle^{n_j}}{n_j\,!}$ に従う場合を想定した解析を行った。

2－2－1　最尤法によるパラメータの推定

ここでは，コンパートメントの次数pがあらかじめ判明しているものとして論議を進める。いま便宜上式2．18において $\{A_1, A_2, \cdots, A_p\}$ を $\{\theta_1, \theta_2, \cdots\cdots, \theta_p\}$, $\{\alpha_1, \alpha_2, \cdots\cdots, \alpha_p\}$ を $\{\theta_{p+1}, \theta_{p+2}, \cdots\cdots, \theta_{2p}\}$とおき，未知のパラメータ $\theta_1, \cdots\cdots \theta_{2p}$を含むシステムにおいて $n_1, n_2, \cdots\cdots, n_m$なる$m$個の観測が独立に行われたものとする。

すでに述べたように，観測値がポアソン分布にしたがう場合，ある時刻 t_jにおける 観測値が n_jである確率は

$$P(n_j : \theta_1\ \theta_2 \cdots\cdots \theta_{2p}) = e^{-\langle n_j\rangle}\frac{\langle n_j\rangle^{n_j}}{n_j!} \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots(2.19)$$

である。したがって観測ベクトル $(n_1, n_2, \cdots\cdots\cdots, n_m)$ に対する尤度関数Lは

$$\begin{aligned} L &= \prod_{j=1}^{m} p(n_j : \theta_1\ \theta_2 \cdots\cdots\cdots \theta_{2p}) \\ &= e^{-\Sigma\langle n_j\rangle}\frac{\langle n_1\rangle^{n_1}\langle n_2\rangle^{n_2}\cdots\cdots\cdots\langle n_m\rangle^{n_m}}{n_1!\,n_2!\cdots\cdots\cdots n_m!} \end{aligned} \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots(2.20)$$

で与えられる。

ここで，スターリングの公式を用いると，式2．20は

$$-l_nL = \sum_{j=1}^{m}\left\{(\langle n_j\rangle - n_j\, l_n\langle n_j\rangle + n_j\, l_n n_j - n_j - \tfrac{1}{2}\, l_n(2\pi n_j)\right\} \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots(2.21)$$

と変形できる。

そこで，式2．21の $-l_nL$ を最小にするような $\{A_i, \alpha_i\}$を求める非線形最適化問題を解けばよいことになる。このために，本研究では評価関数を直接最小にしていくため極小値の判断が必要でないこと，データに応じて初期値を変化させなくても収束することなどの理由により直接探索法の一種である Nelder-Mead[9]のシンプレックス法を用いた。

22－2－2　AICによるコンパートメントの数（次数）の推定[10][11]

すでに述べたように，AICは赤池氏によって導出されたものであり，現実に観測されるデータを用いて統計的モデルの悪さを評価する情報量基準である。確率変数をX.その密度関数$f(x/\theta)$，Xの独立な観測値$x_1 \cdots\cdots\cdots x_m$，尤度 $l(\theta) = \prod_{j=1}^{m} f(x_j/\theta)$ を最大にするパラメータθの推定値を $\hat{\theta}$ とするとき

$$\mathrm{AIC}(k) = -2\sum_{j=1}^{m} l_n f(x_i/_k\hat{\theta}) + 2k \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots(2.22)$$

で定義される。但し θ はパラメータベクトル，k は次数，$\hat{\theta}$ は $\{\hat{\theta}_1 \cdots\cdots \hat{\theta}_k\ o \cdots\cdots o\}$ である。

そこで，AICが 小さいものが良いモデルと判断されるが，比較するモデル間で著しい差があるときは，右辺第１項が作用して次数が推定され，モデル間に大差がないときは，第２項が作用して次数が少い方が良いと判断される。

さて，すでに述べたようにラジオアイソトープトレーサを用いた動態曲線は，分布形があらかじめ判っているので，尤度関数は式２．20（２．21）式のように表わされ，これを最大にするような最大尤度 L_{max} を求めれば，コンパートメントシステムの次数推定にAICが適用できる。

この際，パラメータ $\{\theta_1\ \theta_2 \cdots\cdots\cdots \theta_{2p}\}$ が $\{A_1 \cdots\cdots\cdots A_p,\ \alpha_1 \cdots\cdots\cdots \alpha_p\}$ に対応しているので，コンパートメントの次数を p として

$$\mathrm{AIC}(2p) = -2\,l_n(L_{max}) + 4p \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (2.23)$$

を最小にする p を求めれば良いことになる。

２ 2－2－3　数値実験結果および考察

（a）サンプル数および指数項の数を変化させた場合の次数およびパラメータの推定精度

コンパートメントアナリシスは，推定パラメータの分数が大きくなること，および解析結果と生体系との対応づけが困難であることなどの理由により，通常３コンパートメントシステムまでで解析が行われる。

そこで，１個から３個までのコンパートメントシステムにおける動態曲線，すなわち指数関数が１，２，３項よりなるテスト関数

$$y_1(t) = 100\,e^{-0.01t}$$

$$y_2(t) = 100\,e^{-0.01t} + 200\,e^{-0.05t}$$

$$y_3(t) = 100\,e^{-0.01t} + 200\,e^{-0.05t} + 300\,e^{-0.2t}$$

にポアソン雑音を重畳して，ザンプリング間隔を1.0，サンプリング数50，100，200　として AIC値およびパラメータ $\{A_1\ A_2 \cdots\cdots\cdots \alpha_1\ \alpha_2 \cdots\cdots\cdots\}$ を推定した（表２－１）。

その結果，$y_1(t)$ に関するAICは，いずれのサンプル数でも次数が１のところに最小値があり，正しい次数を推定し得た。

指数項が２個よりなるテスト関数 $y_2(t)$ の場合にも，AICの値はいずれの場合にも２次のところで最小となった。

３個の指数項よりなるテスト関数 $y_3(t)$ では，サンプル数を50とするとAICの最小値が２個となり，次数を１つ低く推定した。サンプル数を100，200とすると正しい次数が推定された。

つぎにサンプル数と推定されたパラメータの精度の関係を，次数が正しく推定されなかったサ

$y_1(t) = 100\,e^{-0.01t}$

サンプル数 \ 次数	1	2	3	4	指数関数の推定値
50	181.1	182.7	184.6	186.7	$102.7e^{-0.0099t}$
100	345.8	347.6	349.6	351.9	$103.3e^{-0.0102t}$
200	631.7	633.5	635.7	637.7	$103.1e^{-0.0101t}$

$y_2(t) = 100e^{-0.01t} + 200e^{-0.05t}$

サンプル数 \ 次数	1	2	3	4	指数関数の推定値
50	205.1	201.6	203.6	205,6	$105e^{-0.0093t}+205e^{-0.0523t}$
100	426.9	371.2	373.0	375.0	$93e^{-0.0089t}+215e^{-0.0484t}$
200	891.8	656.6	658.2	660.2	$97e^{-0.0096t}+210e^{-0.0483t}$

$y_3(t) = 100e^{-0.01t} + 200e^{-0.05t} + 300e^{-0.2t}$

サンプル数 \ 次数	1	2	3	4	指数関数の推定値
50	333.7	200.6	205.7	207.3	$234e^{-0.0219t}+382e^{-0.175t}$
100	761.1	379.3	375.1	377.1	$40e^{-0.0162t}+240e^{-0.235t}+341e^{-0.183t}$
200	1496.5	680.1	665.9	673.3	$108e^{-0.0104t}+219e^{-0.054t}+297e^{-0.218t}$

(1/2 AIC 値)

表2－1 指数関数の数およびサンプル数を変化させた場合の次数およびパラメータの推定結果（アンダーラインはAICが最小値を示す次数。サンプリング間隔 1.0 ）

ンプル数 50 の y_3（ t ）を除いて検討した。

まず y_1（ t ）では，いずれのサンプル数でもパラメータの推定精度は比較的高く，この傾向は2コンパートメントシステムである y_2（ t ）でもほぼ同様であった。これに対して y_3（ t ）では，サンプル数 100 でも次数は正しく推定されているもののパラメータの推定精度は悪く，サンプル数を 200 にすることによって比較的高い推定精度が得られた。

（ b ）指数部がたがいに接近している場合の次数およびパラメータの推定精度

指数部が接近している場合の次数およびパラメータの推定は，コンパートメントアナリシスにおける最も困難な課題であり，逆に指数部が接近している場合の推定精度が良ければ優れた同定法であるということができる。

そこで，2コンパートメントを例にとって，指数部のたがいに接近したテスト関数を用いて，次のような実験を行った。

T－1 ： $y_4(t) = 100\,e^{-0.01t}+200\,e^{-0.015t}$ で，サンプル数を 200，サンプリング間隔 τ を 1.0 ，5.0 とした場合

T－2 ： $y_5(t) = 100\,e^{-0.05t}+200\,e^{-0.1t}$ で，サンプリング間隔 1.0 ，サンプル数を 50，100，200 とした場合

T－3 ： $y_6(t) = 100\,e^{-0.05t}+200\,e^{-0.075t}$ を用いて，サンプリング間隔 1.0 ，サンプル数を 50，100，200 とした場合

$y_4(t)=100e^{-0.01t}+200e^{-0.015t}$

サンプリング間隔＼次数	1	2	3	4	指数関数の推定値
τ=1.0	724.9	736.3	727.8	730.3	$305e^{-0.013t}$
τ=5.0	309.9	302.2	308.8	310.1	$213e^{-0.011t}+102e^{-0.021t}$

$y_5(t)=100e^{-0.05t}+200e^{-0.1t}$

サンプル数＼次数	1	2	3	4	指数関数の推定値
50	174.5	167.4	169.4	171.5	$35e^{-0.0267t}+277e^{-0.0921t}$
100	267.6	251.8	253.7	255.6	$138e^{-0.0533t}+175e^{-0.115t}$
200	310.0	287.5	289.3	290.7	$117e^{-0.0510t}+195e^{-0.107t}$

$y_6(t)=100e^{-0.05t}+200e^{0.075t}$

サンプル数＼次数	1	2	3	4	指数関数の推定値
50	177.7	179.4	181.4	182.6	$307e^{-0.0647t}$
100	283.2	279.1	281.4	283.0	$79e^{-0.0444t}+234e^{-0.0772t}$
200	310.0	307.2	309.2	313.2	$102e^{-0.103t}+213e^{-0.0557t}$

(1/2 AIC 値)

表2－2 指数部がたがいに接近した場合の次数およびパラメータの推定結果($y_4(t)$ ではサンプル数 200, $y_5(t)$, $y_6(t)$ ではサンプリング間隔 1.0)

すなわち，T－1ではサンプル数を一定にして，サンプリング間隔を変え，T－2，T－3では，サンプリング間隔を一定にして，サンプル数を変化させた（表2－2）。

T－1の結果は，$\tau=1.0$ の場合には，次数が1と低く判断され，$\tau=5.0$ とすることによって，正しい次数が推定された。

T－2の場合には，いずれのサンプル数でも正しい次数が推定された。

T－3では $m=50$ の場合に誤った判断がされた。

つぎにパラメータの推定精度は，T－1では$\tau=5.0$，T－2では$m=200$，T－3では $m=100$ の場合が比較的高かったが，指数関数がたがいに接近していない場合に比して一般に精度は悪い。

これらの実験により，本法はコンパートメントアナリシスにおける次数の推定に優れていると考えられるが，指数部がたがいに接近している場合には，特にサンプル数，サンプリング間隔などのサンプリング条件に充分に注意する必要性が窺われた。

以上，コンパートメントアナリシスの同定問題に最尤法とAIC を用いる方法を提案し本法の妥当性について検討した。すでに述べたようにコンパートメントアナリシスに於て最も問題になるのは次数の推定である。次数の推定法としてこれまで行われてきた方法は，フーリエ変換法と代数的な方法に大別されるが，このうちフーリエ変換法については2－1で詳しく検討した。

一方，代数的な方法は，等間隔時系列観測データ q_1 q_2 ……… q_m が与えられた時，ハンケル

行列

$$H(s,\ n)=\begin{pmatrix} q_n & q_{n+1} & \cdots\cdots & q_{n+s-1} \\ q_{n+1} & q_{n+2} & \cdots\cdots & q_{n+s} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ q_{n+s-1} & q_{n+s} & \cdots\cdots & q_{n+2s-2} \end{pmatrix}$$

について，$n=1,\ 2,\ \cdots\cdots$ のそれぞれについて $s=1,\ 2,\ \cdots\cdots$ における $H(s,\ n)$ の行列式を計算し，この行列が0になる最小の s を次数 p とするものである。これは理論的には正しいが，実際上は $q_1\ q_2\ \cdots\cdots q_m$ に誤差が含まれるので $H(s,\ n)$ の行列式が 0になるような s は存在しない。したがって $det H(s,\ n)=0$ を判断する主観的な規準を導入する必要がある。

本研究では，このような主観的な規準を用いることなく次数判定が可能なAIC を適用したが，種々のテスト関数を用いた数値実験によると，本法によるコンパートメントシステムの次数の推定精度はきわめて良く，T－3のように指数部がたがいに近い場合にもサンプリング条件を適当に選べば，正しい次数が推定された。このような次数の推定精度の向上は，従来のものに比して本法の優れた特質と考えることができる。

つぎに，パラメータの推定法として，観測データがポアソン分布に従う場合に最尤法を適用したが，このようなアプローチはすでにSandor[4]によって報告されている。 Sandorらは2．18式より求められる対数尤度の極値を求めるための非線形最適化法として Newton Raphson 法を用いた。しかし，この方法は彼等も指摘しているように初期値をパラメータの真値に近く設定する必要があること，場合によっては解の収束がみられないことがあるとされている。

そこで筆者らは，非線形最適化法として Nelder-Mead のシンプレックス法を用いて解を求めたが，初期値を固定しておいても，いずれの数値例でも解が収束した。 Davis[17]もいくつかのシステムで Flecher-Powell, Flecher-Reeve, Nelder-Mead 法の比較検討を行い，パラメータが少い場合，シンプレックス法が最も効率が高いことを証明している。しかし，いずれの非線形最適化法にも当てはまることであるが，解が局所解に収束することがあるので， Davisの主張のように誤差分散に注意して，これが大きい場合には初期値を変えて実験を繰り返す必要がある。

つぎに，本法の具体的な臨床応用の可能性を検討するため，ヒトに10mCi の ^{133}Xe を経口的に吸入させて平衡状態に達したことを確めた後，肺から洗い出しを行って各肺野における^{133}Xのカウントを経時的に計測した。そこで，このデータについて本法を適用してコンパートメントアナリシスを行った。ただし $\tau=1.0$ ，$m=50$ とした。解析の結果，各肺野の^{133}Xe洗い出しの機能的な分布相（指数関数の数）は2～3個と判断され，これまで臨床分野で経験的に解析されている分布相の数と一致した（表2－3）。

以上の結果より本法は，コンパートメントアナリシスの次数と指数関数の推定の両面に優れた方法であり，今後ラジオアイソトープ・トレーサカイネティクスの解析に広く応用されることが

肺野 ＼ 次数	1	2	3	4	指数関数の推定値
右　上	484.1	<u>220.9</u>	222.9	223.4	$724e^{-0.162t}+823e^{-0.0212t}$
右　中	582.7	<u>242.2</u>	243.2	245.2	$742e^{-0.243t}+506e^{-0.0256t}$
右　下	573.7	<u>237.8</u>	239.6	241.5	$608e^{-0.376t}+380e^{-0.0256t}$
左　上	413.0	<u>224.0</u>	225.6	225.1	$570e^{-0.133t}+242e^{-0.0222t}$
左　中	649.9	234.6	<u>222.9</u>	223.9	$544e^{-0.54t}+517e^{-0.079t}+73e^{-0.0019t}$
左　下	728.0	214.3	<u>212.5</u>	223.9	$630e^{-0.38t}+228e^{-0.054t}+34e^{-0.0008t}$

(1/2 AIC 値)

表2－3 肺のXe洗い出し曲線のコンパートメントアナリシス

期待される。

2－2－4 小 括

1）AICによるコンパートメント数（次数）の 推定精度は高く，指数部がたがいに接近した場合でもサンプル数を大きくすれば満足のいく結果が得られる。

2）本法による指数関数のパラメータ推定精度は，指数部がたがいにきわめて接近している場合を除き良好であり，従来の方法に比して推定精度が高い。

第三章　コンパートメントアナリシスにおける観測値のサンプリング条件

二章で述べた同定実験結果より，観測値のサンプリング条件が同定精度に大きく影響することがわかった。

そこで本章では，観測値に含まれる雑音がポアソン分布に従う場合について，あらかじめトレーサ動態曲線が表す指数関数が与えられていることを想定して，サンプリング間隔，サンプル数，指数関数の項数およびパラメータ $\{A_i\}$, $\{\alpha_i\}$ の変化が $\{A_i\}$, $\{\alpha_i\}$ の分散に与える影響について， Fisher の情報量および Cramēr-Rao の不等式を用いて，数値例によって解析した結果について述べる。

又，ある時刻 t_j において計測される RI のカウント数は，サンプリング間隔　$t_j - t_{j-1}$　におけるカウント数が積分されて出力されるので，カウント数自体もサンプリング間隔に依存するが，本論文では，このような条件のほかカウント数がサンプリング間隔に依存しない場合についても併わせ検討する。

すなわち，カウント数の期待値が次のように表現される２つのモデル；

（１）モデルA

カウント数がサンプリング間隔に依存せず，カウント数の期待値　$\langle n_j \rangle$ が

$$\langle n_j \rangle = \sum_{i=1}^{p} A_i \, e^{-\alpha_i t} \quad \text{である場合}$$

（２）モデルB

カウント数がサンプリング間隔に依存し

$$\langle n_j \rangle = \int_{t_{j-1}}^{t_j} \sum_{i=0}^{p} A_i \, e^{-\alpha_i t} dt \quad \text{である場合}$$

を想定して数値実験による解析を行う。

３－１　Cramēr-Rao の不等式によるパラメータの分散の有効不偏推定

２－２と同様に，未知のパラメータ　$\theta_1, \theta_2, \cdots\cdots\cdots, \theta_{2p}$ を含むシステムにおいて，$n_1, n_2, \cdots\cdots\cdots, n_m$ なる m 個の独立な観測が行われたものとする。いま j 番目の観測値が　n_j　である確率が　$P(n_j : \theta_1, \cdots\cdots\cdots \theta_{2p})$ で与えられるものとすると，観測ベクトル $(n_1, \cdots\cdots\cdots, n_m)$ に対する尤度関数 L は次式のように表される。

$$L = \prod_{j=1}^{m} P(n_j : \theta_1, \theta_2, \cdots\cdots\cdots, \theta_{2p}) \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (3.1)$$

そこで，Fisher[18] によって定義された情報量を導入すると，情報行列 I の kl 成分 I_{kl}　は次式で与えられる。

$$I_{kl}=E\left\{\frac{\partial}{\partial\theta_k}(l_nL)\times\frac{\partial}{\partial\theta_l}(l_nL)\right\}$$
$$=-E\left\{\frac{\partial^2}{\partial\theta_k\partial\theta_l}(l_nL)\right\} \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots (3.2)$$

但し，$E\{\cdot\}$は期待値を表す。

Cramér-Rao[19]の不等式は，パラメータが多変数の場合にも成立するので，$\theta_1,\cdots\cdots,\theta_{2p}$のある不偏推定量 $\hat{\theta}_1,\cdots\cdots\hat{\theta}_{2p}$ に関する分散共分散行列をVとすると $V-I^{-1}$ は常に非負定 (non-negative definite)である。すなわち，この意味で常にVはI^{-1}より大きい。従って，情報行列Iの逆行列I^{-1} は$\theta_1,\cdots\cdots,\theta_{2p}$の分散共分散行列の有効不偏推定量と考えることができ，I^{-1} の対角成分が$\theta_1,\cdots\cdots,\theta_{2p}$の分散の有効不偏推定量となる。

３－２　観測値がポアソン分布に従う場合の Fisher の情報行列[20][21][22][23][24]

観測値がポアソン分布に従っている場合には，ある時刻 t_j における観測値が n_j である確率は，その時刻における観測値の期待値を $\langle n_j\rangle$ とすれば，

$$P(n_j;\theta_1,\theta_2,\cdots\cdots,\theta_{2p})=e^{-\langle n_j\rangle}\frac{\langle n_j\rangle^{n_j}}{n_j!} \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots (3.3)$$

である。従って観測ベクトル$(n_1,n_2,\cdots\cdots,n_m)$に対する尤度関数$L$は，

$$L=\prod_{j=1}^{m}P(n_j;\theta_1,\theta_2,\cdots\cdots,\theta_{2p})$$
$$=e^{-\sum_{j=1}^{m}\langle n_j\rangle}\frac{\langle n_1\rangle^{n_1}\langle n_2\rangle^{n_2}\cdots\cdots\langle n_m\rangle^{n_m}}{n_1!\,n_2!\cdots\cdots n_m!} \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots (3.4)$$

で与えられる。

式３．４の対数をとると，

$$l_nL=\Sigma\ (\langle n_j\rangle-n_j\,l_n\langle n_j\rangle+l_nn_j!) \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots (3.5)$$

となるので，式３．２で定義される情報行列Iのkl成分 I_{kl}は次のようになる。

$$I_{kl}=-E\left\{\frac{\partial^2}{\partial\theta_k\partial\theta_l}(l_nL)\right\}$$
$$=E\left\{\frac{\partial^2}{\partial\theta_k\partial\theta_l}(\Sigma\langle n_j\rangle-\Sigma n_j\,l_n\langle n_j\rangle\right\}$$
$$=\sum_{j=1}^{m}\left(\frac{1}{\langle n_j\rangle}\cdot\frac{\partial\langle n_j\rangle}{\partial\theta_k}\cdot\frac{\partial\langle n_j\rangle}{\partial\theta_l}\right) \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots (3.6)$$

3－3　モデルA・BにおけるFisherの情報行列とパラメータの分散の有効不偏推定量[20]

モデルA

モデルAでは，カウント数がサンプリング間隔に依存せず，時刻 t_j におけるカウント数の期待値 $\langle n_j \rangle$ が

$$\langle n_j \rangle = \sum_{i=1}^{p} A_i \, e^{-\alpha_i t_j} \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (3.7)$$

で与えられている。従って，$\partial \langle n_j \rangle / \partial \alpha_i$　及び　$\partial \langle n_j \rangle / \partial A_i$ はそれぞれ次のようになる。

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial \langle n_j \rangle}{\partial \alpha_i} &= -A_i \, t_j \, e^{-\alpha_i t_j} \\ \frac{\partial \langle n_j \rangle}{\partial A_i} &= e^{-\alpha_i t_j} \end{aligned}\right\} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (3.8)$$

ここで，サンプリング間隔を τ（実数）とすれば，

$$t_j = (j-1)\tau \qquad (j = 1, 2, \cdots\cdots\cdots, m)$$

となる。又，既に述べたようにパラメータ $\{\theta_i\}$ は，以下のように定義されるものとする。

$$\theta_i = \begin{cases} \alpha_i & 1 \leqq i \leqq p \\ A_{i-p} & p+1 \leqq i \leqq 2p \end{cases}$$

そこで，Fisher　の情報マトリクス I を

$$I = \left(\begin{array}{c:c} \overbrace{I^{(1\,1)}}^{p} & \overbrace{I^{(1\,2)}}^{p} \\ \hdashline I^{(2\,1)} & I^{(2\,2)} \end{array} \right) \begin{array}{l} \}\, p \\ \}\, p \end{array}$$

なるブロックに分け，各ブロックの kl 成分を式3.6，3.8 を用いて求めると，次のようになる。

$$\left.\begin{aligned} I_{kl}^{(1\,1)} &= \sum_{j=1}^{m} \left\{ \frac{1}{\langle n_j \rangle} A_k A_l \, e^{-(\alpha_k+\alpha_l)(j-1)\tau} \times (j-1)^2 \tau^2 \right\} \\ I_{kl}^{(2\,2)} &= \sum_{j=1}^{m} \left\{ \frac{1}{\langle n_j \rangle} e^{-(\alpha_k+\alpha_l)(j-1)\tau} \right\} \\ I_{kl}^{(1\,2)} &= I_{lk}^{(2\,1)} = \sum_{j=1}^{m} \left\{ \frac{-1}{\langle n_j \rangle} A_k \, e^{-(\alpha_k+\alpha_l)(j-1)\tau} \times (j-1)\tau \right\} \end{aligned}\right\} \cdots\cdots (3.9)$$

従って，式3．9によって求めた I の逆行列 I^{-1} を求めれば，その対角成分に（α_1，⋯⋯，α_p，A_1，⋯⋯⋯，A_p）の分散の有効不偏推定量が得られる。

モデルB

モデルBにおいては，カウント数はサンプリング間隔（t）に依存し，時刻 t_j {＝（j＝1）τ におけるカウント数の期待値〈n_j〉は次式で与えられている。

$$\langle n_j \rangle = \int_{t_{j-1}}^{t_j} \sum_{i=1}^{p} A_i e^{-\alpha_i t} dt = \sum_{i=1}^{p} \frac{A_i}{\alpha_i} (e^{\alpha_i \tau} - 1) e^{-\alpha_i \tau \times j} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (3.10)$$

従って，$\partial \langle n_j \rangle / \partial \alpha_i$，及び $\partial \langle n_j \rangle / \partial A_i$ はそれぞれ次のようになる。

$$\frac{\partial \langle n_j \rangle}{\partial \alpha_i} = - \frac{e^{-\alpha_i \tau \times j}}{\alpha_i} \left[\frac{1}{\alpha_i} (e^{\alpha_i \tau} - 1) + \tau \left\{ j (e^{\alpha_i \tau} - 1) - e^{\alpha_i \tau} \right\} \right] A_i$$

$$\frac{\partial \langle n_j \rangle}{\partial A_i} = - \frac{1}{\alpha_i} \times e^{-\alpha_i \tau \times j} \cdot (e^{\alpha_i \tau} - 1) \quad \cdots\cdots\cdots (3.11)$$

そこで，モデルAの場合と同様に Fisher の情報行列をブロックに分けて，それぞれのブロックの kl 成分を求めると次のような結果が得られる。

$$I_{kl}^{(1\ 1)} = \sum_{j=1}^{m} \left\{ \frac{1}{\langle n_j \rangle} \cdot \frac{e^{-(\alpha_k + \alpha_l) j \tau}}{\alpha_k \alpha_l} \cdot \gamma_{kj} \cdot \gamma_{lj} \right\}$$

$$I_{kl}^{(2\ 2)} = \sum_{j=1}^{m} \left\{ \frac{1}{\langle n_j \rangle} \cdot \frac{e^{-(\alpha_k + \alpha_l) j \tau}}{\alpha_k \alpha_l} \cdot (e^{\alpha_k \tau} - 1) (e^{\alpha_l \tau} - 1) \right\}$$

$$I_{kl}^{(1\ 2)} = I_{lk}^{(2\ 1)} = \sum_{j=1}^{m} \left\{ \frac{-1}{\langle n_j \rangle} \cdot \frac{e^{-(\alpha_k + \alpha_l) j \tau}}{\alpha_k \alpha_l} \cdot (e^{\alpha_l \tau} - 1) \cdot \gamma_{kj} \right\}$$

但し，

$$\gamma_{kj} = \left[\frac{1}{\alpha_k} (e^{\alpha_k \tau} - 1) + \tau \left\{ j (e^{\alpha_k \tau} - 1) - e^{\alpha_k \tau} \right\} \right] A_k$$

従って，モデルAと同様に式3．12を用いて I^{-1} を求めれば，各パラメータの分散の有効不偏推定量が I^{-1} の対角成分で与えられる。

3－4　数値実験結果および考察[20)]

3－4－1　サンプル数およびサンプリング間隔が各パラメータの分散に与える影響

2コンパートメントシステムにおける動態曲線，すなわち指数関数が2項からなるテスト関数（T－1）

$$A_1 e^{-\alpha_1 t} + A_2 e^{-\alpha_2 t} = 20 e^{-0.05 t} + 50 e^{-0.2 t}$$

を用いて，モデルA ，BにおけるパラメータA_1 ，A_2 ，α_1 ，α_2 の分散を求めた。

まず，サンプル数を 50,100,200,500,1000 と変化させた場合の，サンプリング間隔と各パラメータの分散の関係を両対数表示（以下，$V-\tau$ 曲線）（図3－1）すると，モデルA，B共に下に凸なるパターンが得られ，それぞれのサンプル数に対してサンプリング間隔の最適値が存在することがうかがわれた。これらのサンプリング間隔の最適値はサンプル数の増加と共に小さくなる。このような最適値の存在は Bergner[25]らによって既に指摘されているが，その理由とし

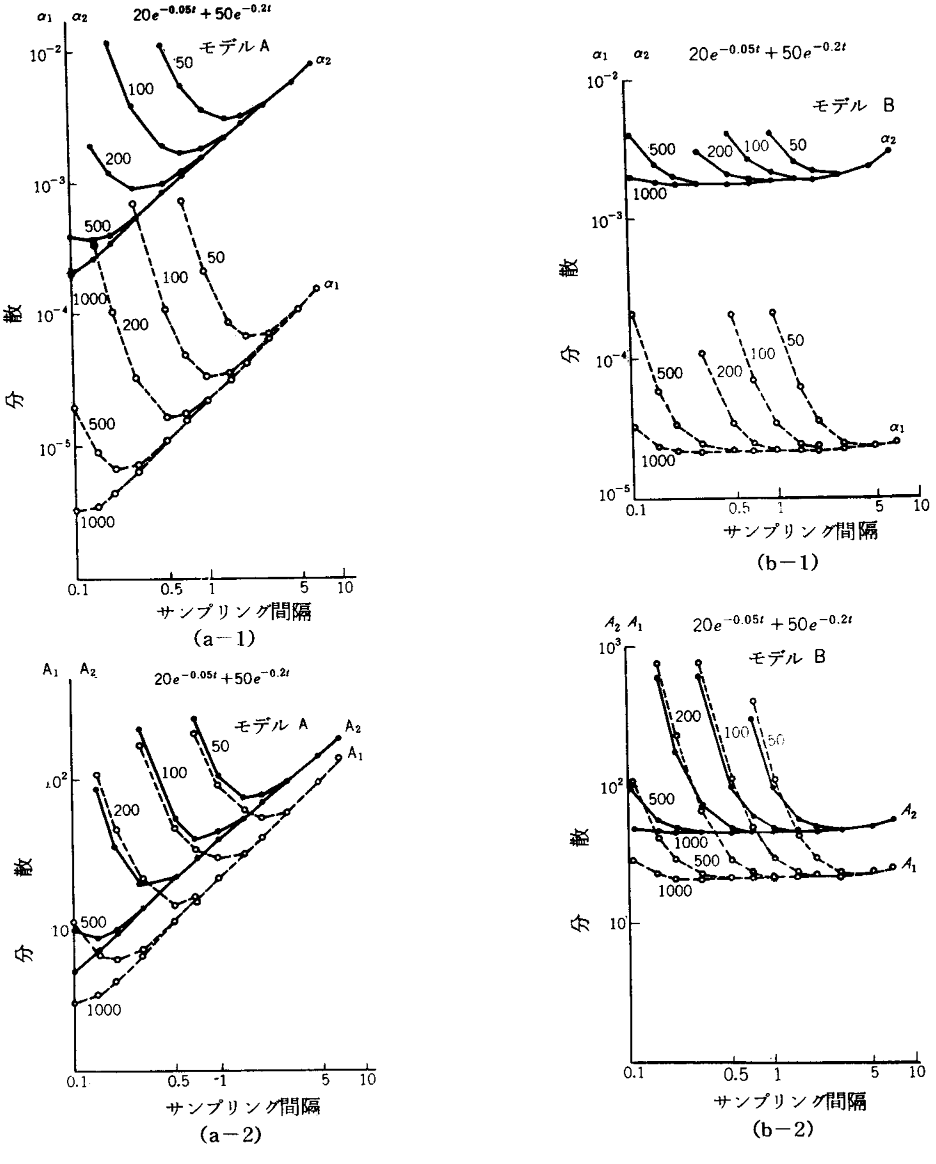


図3－1　モデルA（a－1，a－2）およびモデルB（b－1，b－2）におけるサンプリング間隔とパラメータ分散の関係（図中，数字 50, 100, 200, 500, 1000 はサンプル数を表す）

てサンプル数を一定にしてサンプリング間隔を小さくすることは，動態曲線の初期スロープのみを利用することであり，逆にサンプリング間隔を大きくすれば，曲線の特性が失われているため，いずれの場合も分散が増大すると考えられる。

モデルA，Bについて$V-\tau$曲線を比較すると，モデルAではサンプル数によらず最小分散（V_{min}）付近の曲線は急しゅんであり，容易にV_{min}を指摘し得る。一方，モデルBでは，最適サンプリング間隔付近の$V-\tau$曲線は緩徐で，比較的広い範囲でV_{min}に近い分散を示すサンプリング間隔が存在し，この傾向はサンプル数の増加と共に著しくなる。このようにモデルBにおいてV_{min}付近の$V-\tau$曲線が緩徐である理由としては，サンプリング間隔を小さくすればカウント数の減少をきたし，逆にサンプリング間隔を大きくすればカウント数が増加するという一長一短の効果があると解釈される。

従って，核医学データのようにモデルBに相当するシステムにおいては，ある程度のサンプル数が得られる場合には，サンプリング間隔の選択はそれほど厳密に行う必要がないと考えられる。一方，モデルAに相当するシステムにおいては，サンプル数に応じたサンプリング間隔を設定する必要がある。

次に，同じテスト関数を使用して，サンプリング間隔を一定（$t=1.0$）にした上で，サンプル数を増加させる実験を行った。モデルA，Bともにサンプル数の増加に対する各パラメータの分散の減少傾向は，サンプル数が約100まで顕著であるが，サンプル数が200以上で両モデル共にほぼプラトーに達した（図3－2）。

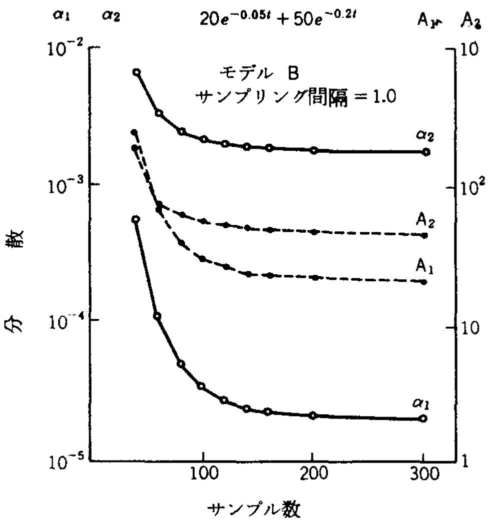


図3－2　サンプリング間隔を一定（1.0）にしてサンプル数を変化させた場合のパラメータ分散の推定量（モデルB）

すなわち，あらかじめサンプリング間隔が指定されている場合には，一定値以上サンプル数を増加させても分散減少の効果は少ないと考えられる。

そこで，（サンプル数）×（サンプリング間隔）＝100，すなわち，最終サンプリングまでの時間を一定にしてサンプリング間隔を種々変化させた場合の$V-\tau$曲線を求めた。モデルAの$V-\tau$曲線はサンプリング間隔を小さくすると分散は直線的に減少するのに対し，モデルBではサンプリング間隔によらず分散はほぼ一定値を示した。すなわち，モデルAはカウント数がサンプリング間隔に依存しないで，サンプル数の増加は分散の減少に通じるが，モデルBでは，サンプリング間隔の短縮がカウント数の減少をもたらすため，両者の効果が相殺されて$V-\tau$曲線がほぼ一定値を示したものと解釈される（図3－3）。

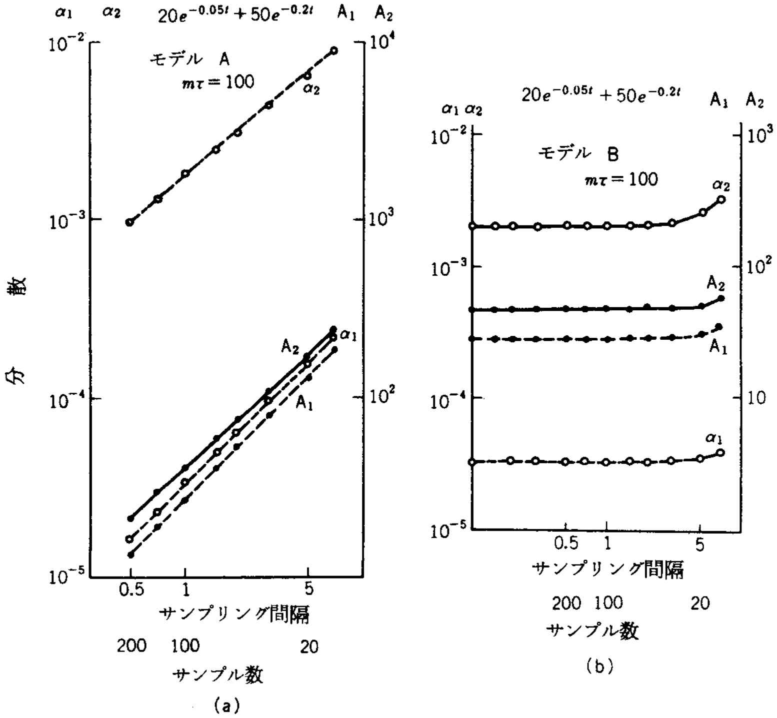


図3－3　総観測時間が一定（ mτ=100）のモデルA，モデルBにおけるパラメータ分散とサンプリング間隔の関係

3－4－2　パラメータの値が各パラメータの分散に与える影響

これまでの実験はいずれも同一のテスト関数（ T－１ ）を使用したが，ここでは２コンパートメントシステムの指数関数のパラメータ組（ A_1 ，A_2 ），（ α_1 ，α_2 ） のうち片方のA_1，α_2をそれぞれ表３－２のように変化させた場合の$V-\tau$曲線よりV_{min}と最適サンプリング間隔を求めＴ－１の結果と比較した。

まず，A_1 の値を小さくすると（ Ｔ－２ ），各パラメータのV_{min}はモデルＡ，Ｂ共にA_2 ，α_2では減少しα_1 のV_{min} の値は増加した。逆に，A_1 の値を大きくすると（ Ｔ－３ ），両モデル共A_2 ，α_2 のV_{min}の増加，α_1 のV_{min}の減少をみた。次にα_2 の値を小さくすると（ Ｔ－４ ），A_1，A_2，α_1 のV_{min}はいずれも増加した。 なお予期されるように，いずれのテスト関数においても変化させたパラメータ自体の分散はパラメータの値の変化に応じて増減した。

又，V_{min}に対応するサンプリング間隔は，A_i の値の変化にあまり依存せず，α_1 の値の変化に影響されることがうかがわれた（ 表３－１ ）。

T − 1		モデルA		モデルB	
パラメータ値		V_{min}	最適サンプリング間隔	V_{min}	最適サンプリング間隔
A_1	20	27.4	1.0	21.2	2.2
A_2	50	40.0	0.8	45.2	1.8
α_1	0.05	3.15×10^{-5}	1.2	2.17×10^{-5}	2.4
α_2	0.2	1.67×10^{-3}	0.7	1.86×10^{-3}	1.8
T − 2					
A_1	4	7.11	1.1	5.29	2.4
A_2	50	16.8	0.6	26.4	1.6
α_1	0.05	1.83×10^{-4}	1.2	1.23×10^{-4}	2.4
α_2	0.2	6.84×10^{-4}	0.7	7.50×10^{-4}	1.8
T − 3					
A_1	100	121.3	1.0	96.2	2.2
A_2	50	150.2	0.8	137.7	2.0
α_1	0.05	5.88×10^{-6}	1.2	4.11×10^{-6}	2.4
α_2	0.2	5.79×10^{-3}	0.7	6.58×10^{-3}	1.8
T − 4					
A_1	20	636	1.5	365	2.8
A_2	50	556	1.5	307	2.8
α_1	0.05	2.23×10^{-4}	1.6	1.22×10^{-4}	2.8
α_2	0.1	1.11×10^{-3}	1.4	7.19×10^{-4}	2.6

表３－１　各テスト関数におけるＶmin（分散の最小値）および最適サンプリング間隔

３－４－３　指数項の数が各パラメータの分散に与える影響

指数項の数が変化した場合の分散とサンプリング間隔の関係を解析するために，

（a）　$q_1(t)=20\,e^{-0.05t}$

（b）　$q_2(t)=20\,e^{-0.05t}+50\,e^{-0.2t}$

（c）　$q_3(t)=20\,e^{-0.05t}+50\,e^{-0.2t}+30\,e^{-0.1t}$

（d）　$q_4(t)=20\,e^{-0.05t}+50\,e^{-0.2t}+30\,e^{-0.1t}+5\,e^{-0.01t}$

なるテスト関数を用いて，サンプル数が100の場合について各パラメータの分散を求めた（図３－４）。パラメータの分散を比較する必要上，これらのテスト関数のうち多数項は，少数項の指数関数を含むように設定した。

上記のテスト関数を用いて$V-\tau$曲線を求め，各テスト関数のうちそれぞれ共通する項のパラメータのV_{min}を比較すると，モデルA，B共に指数項の増加に伴い大きくなり，この傾向は最大の指数項を有する　$q_4(t)$　の場合に特に著しい。すなわち，４コンパートメントシステムを解析する場合には，サンプル数100程度ではサンプリング間隔によらず，各パラメータの推定値の信頼性が低いと考えられる。

V_{min}に対応するサンプリング間隔は，V_{min}同様指数項の増加と共に右方へ移動，すなわちサンプリング間隔の延長をみる。

又，一般的に近接した指数部を有する項が加わった場合には，その項に対応する付加項に近接した指数項の係数の分散がほかの項の係数の分散に比してかなり大きな値となる。

従って，コンパートメント数が多い場合，ならびに指数部の値が互いに近接している場合には，モデルAではサンプル数の増加とサンプリング間隔の短縮を，又，モデルBでは，（サンプル数）×（サンプリング間隔）の増加を企ることによって推定値の分散の減少が期待される。

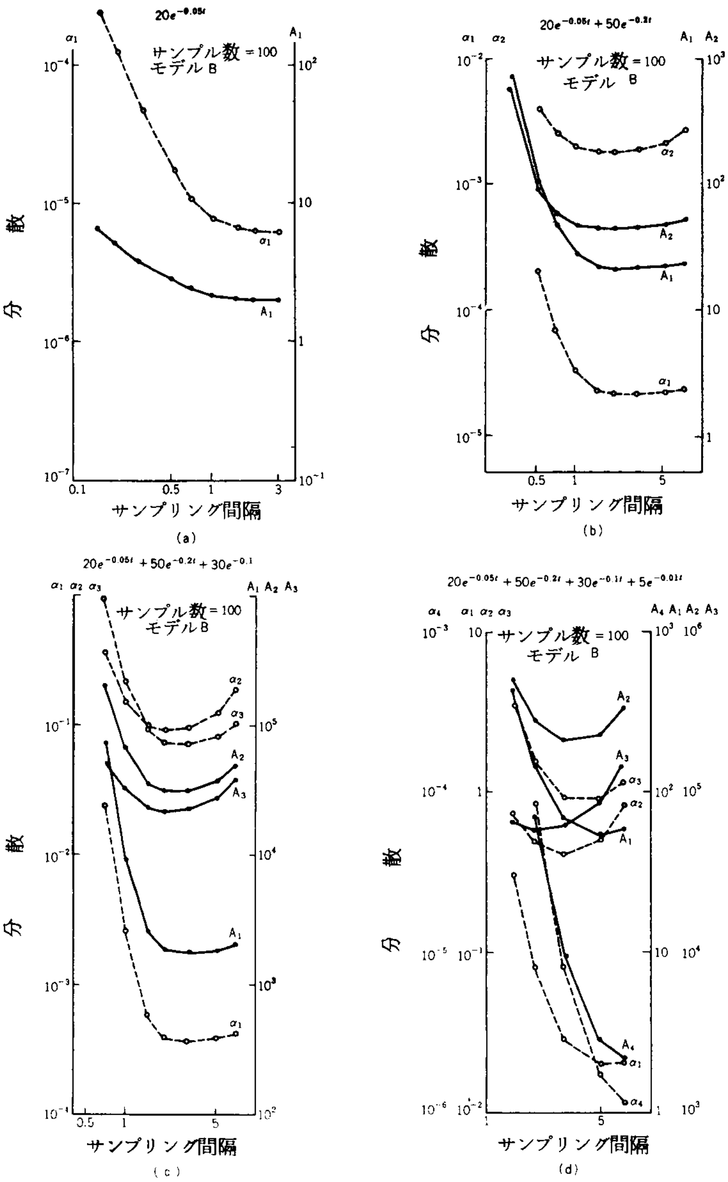


図3－4　指数項の数が各パラメータ分散の推定量に与える影響

3－4－4　サンプリング条件を最適化した場合の次数ならびにパラメータの推定精度[13]

以上の実験でモデルA，Bともに与えられたサンプル数に対して，パラメータA_i，α_iの分散を最小にする最適サンプリング間隔が存在していることが証明された。そこで，つぎにサンプリング条件を最適化することによってコンパートメントアナリシスの同定精度がどのように改善されるかについて数値実験によって検討を加える。

与えられたサンプル数に対して，パラメータ$\{\theta_1\ \theta_2 \cdots \theta_{2p}\} \equiv \{A_1 \cdots A_p\ \alpha_1 \cdots \alpha_p\}$の分散

を最小にするサンプリング間隔をそれぞれ$\{\tau_1\ \tau_2 \cdots\ \tau_{2p}\}$と定義する。これまでの実験で，$\tau_1\ \tau_2 \cdots\ \tau_{2p}$はたがいに接近していることが判っているので，全体としてみた場合最適サンプリング間隔として$\tau_1\ \tau_2 \cdots\ \tau_{2p}$の中央値や平均値を採用しても支障はないと考えられる。本研究では，$\{\theta_1\ \theta_2 \cdots\ \theta_{2p}\}$に対する分散を$\{\sigma_1^2\ \sigma_2^2 \cdots\ \sigma_{2p}^2\}$としたとき，分散をパラメータ値で基準化した統計量

$$\frac{\sigma_i^2}{\theta_i^2} = E\left\{\left(\frac{\hat{\theta}_i}{\theta_i}-1\right)^2\right\}$$

を導入し$\sum_{i=1}^{2p}\frac{\sigma_i^2}{\theta_i^2}$を最も小さくするサンプリング間隔を求めて，それを全体としてみた場合の最適サンプリング間隔として用いた。

このような最適サンプリング間隔をモデルAについて計算して，２－２で述べたAIC および最尤法を用いる方法によって同定実験を行った。すなわちテスト関数として２－２で用いた

$$y_1(t) = 100\,e^{-0.01t}$$

$$y_2(t) = 100\,e^{-0.01t} + 200\,e^{-0.05t}$$

$$y_3(t) = 100\,e^{-0.01t} + 200\,e^{-0.05t} + 300\,e^{-0.2t}$$

と，指数部がたがいに接近している例として２－２のT－２，T－３と同一の関数

$$y_5(t) = 100\,e^{-0.05t} + 200\,e^{-0.1t}$$

$$y_6(t) = 100\,e^{-0.05t} + 200\,e^{-0.075t}$$

によって検討を加えた。

まず，$y_1(t)$, $y_2(t)$, $y_3(t)$, $y_5(t)$についてサンプル数50，100，200 に対する最適サンプリング間隔を求めると表３－２の結果が得られた。これらのサンプリング条件によって数値実験を行った結果，$y_1(t)$, $y_2(t)$ では２－２で得た結果とほぼ同様であった。すなわち，$y_1(t)$, $y_2(t)$ に関してはサンプリング条件を最適化しなくても推定精度は満足のいくものであり，サンプリング条件を最適化することによってさらに推定精度が向上することはなかった。

サンプル数 / テスト関数	50	100	200
$y_1(t)$	6.0	3.0	1.5
$y_2(t)$	8.0	4.0	2.0
$y_3(t)$	5.0	2.5	1.2
$y_5(t)$	3.0	1.5	0.8

表３－２　各サンプル数に対応する最適サンプリング間隔

$y_3(t)$ の場合は（表３－３），２－２－３ではサンプル数mが50の時，次数が２と低く推定されたのに対して，サンプリング条件を最適化することによっていずれのサンプル数においても正しい次数を推定し得た。また$m = 100$ の場合のパラメータ推定精度も サンプリング条件の最適化によって著しく改善した。しかし$m = 50$ の場合のパラメータ推定精度はなお十分でなく，この場合精度向上のためにはサンプル数の増加が不可欠であることが示唆された。

$y_3(t)=100e^{-0.01t}+200e^{-0.05t}+300e^{-0.2t}$

サンプリング間隔 / サンプル数	1	2	3	4	指数関数の推定値
m=50, τ=5.0	438.2	165.6	<u>159.8</u>	166.8	$71e^{-0.007t}+197e^{-0.036t}+346e^{-0.188t}$
m=100, τ=2.5	772.1	325.8	<u>317.7</u>	319.7	$106e^{-0.01t}+232e^{-0.055t}+291e^{-0.235t}$
m=200, τ=1.2	1439.8	643.2	<u>629.4</u>	638.8	$108e^{-0.01t}+224e^{-0.055t}+291e^{-0.203t}$

$y_5(t)=100e^{-0.05t}+200e^{-0.1t}$

サンプリング間隔 / サンプル数	1	2	3	4	指数関数の推定値
m=50, τ=3.0	91.0	<u>87.7</u>	89.7	91.7	$79e^{-0.39t}+253e^{-0.005t}$
m=100, τ=1.5	211.6	<u>186.6</u>	198.6	200.6	$224e^{-0.099t}+89.6e^{-0.048t}$
m=200, τ=0.8	357.9	<u>343.8</u>	345.9	347.9	$187e^{-0.058t}+127e^{-0.135t}$

(1/2 AIC 値)

表3－3 サンプリング条件を最適化した場合の次数およびパラメータの推定結果

つぎに，指数部が互いに近い $y_5(t)$ の場合の最適サンプリング間隔はサンプル数 50．100，200 に対してそれぞれ 3.0，1.5，0.8 であったが，これらの値を用いた推定結果は（表３－３），いずれも正しい次数が推定され，かつパラメータの推定精度は $m=50$，100 ともに向上し，特に $m=100$ の場合には

$$\hat{y}_5(t)=224\,e^{-0.099t}+89.6\,e^{-0.048t}$$

と指数部が互いに近いにもかかわらず良好な推定精度を得た。$m=200$ の場合は ２－２－３の サンプリング間隔が 1.0 で最適サンプリング間隔に近いため 結果の差異はほとんどみられなかった。

$y_6(t)$ の $m=200$ に対する最適サンプリング間隔は $t=1.0$ であるので，すでに最適サンプリング間隔での実験が２－２－３で行われていることになる。この場合，指数部が互いに近いので，次数の推定には成功しているもののパラメータの推定精度はなお十分ではなかった。このことは，指数部の比が 1.5 程度の場合，サンプリング条件を最適化することによって次数の推定は成功するが，その際パラメータの推定結果の信頼性はあまり高くないことを示しているものと考えられる。

３－４－５ 臨床例における最適サンプリング条件[21)22)]

すでに指摘したようにコンパートメントアナリシスの同定において実験精度を上げるためには，（サンプル数×サンプリング間隔）を大きくすることが重要な要因である。

そこで，具体的な臨床応用の１例として脳における ^{133}Xe洗い出し曲線について最適サンプリング条件を求める実験を行った（図３－５）。この場合，基準になる関数は，疾病例を含む10個の関数の平均を求めて

$$A_1 e^{-\alpha_1 t} + A_2 e^{-\alpha_2 t} = 950\, e^{-0.008 t} + 480\, e^{-0.003 t}$$

として各パラメータの分散を求めた。また，図中縦軸の各パラメータの分散は基準化している。この結果より，テスト関数で検討したように各サンプル数に対する最適サンプリング間隔が存在していることが判る。さらにサンプリング条件として25分間測定を行えば，分散の最小値に近い精度で推定値が得られることがグラフより読み取れる。

また， initial slope 法による脳血流測定を行う場合は第1項の指数関数のみに注目することになるので，

$$A_1 e^{-\alpha_1 t} = 950\, e^{-0.008 t}$$

を用いて同様の検討を行うと，この場合，サンプリング条件として3～5分間観測すれば良いことが理解できる。

これらの解析は，臨床的に通常行っている ^{133}Xe 洗い出し曲線の解析における計測条件に近いものであり，経験的に行われている実験条件の妥当性を理論的に証明するものである。このような最適サンプリング条件の設定の試みは，種々の臓器におけるRI カイネティックスの実験を行う上でデータ収集をいかに効率よく行うかという点からも重要であり，今後各臓器について検討を加えていく必要があるであろう。

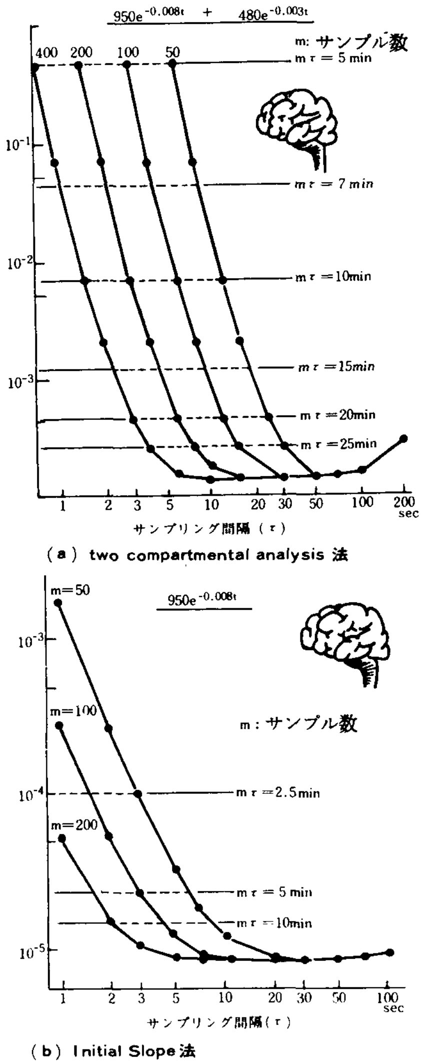


図3－5 脳 ^{133}Xe 洗い出し曲線において，サンプル数とサンプリング間隔を変化させた場合の分散

3－5 小　　括

（1） モデルA，Bのいかんわ問わず，サンプル数に対応するサンプリング間隔の最適値が存在し，サンプル数の増加と共に最適サンプリング間隔は減少する。モデルBはモデルAに比してサンプリング間隔の許容区間が広く，この傾向はサンプル数が増加するにつれて顕著になる。

（2） サンプリング間隔を一定にしてサンプル数を増加させると，各パラメータの分散は次第に小さくなり，やがて一定値に収束する。

（3） 指数関数の個々のパラメータ値の変化は，それ自体の分散のみならず，ほかのパラメータ

の分散にも影響を与える。

（4）指数項の数が増加すると各パラメータの分散は大きくなり，特に 4 コンパートメント以上のシステムではこの傾向が著しい。

（5）各パラメータの推定の信頼性を向上させるためには，モデル A ではサンプル数の増加およびサンプリング間隔の短縮を，モデル B では（サンプル数）×（サンプリング間隔）の増加を企る必要がある。

（6）サンプリング条件を最適化した上で，AIC および最尤法による同定実験を行うと同定精度の向上が得られる。

（7）脳における ^{133}Xe 洗い出し曲線について最適サンプリング条件を求めたところ，これまで経験的に行われていた計測条件とほぼ一致する結果を得た。

第四章　コンパートメントアナリシスのシステム論的考察

二章，三章において，コンパートメントシステムの同定問題について述べたが，コンパートメントアナリシスをシステム理論的に表現すると，それはインパルスレスポンス又は伝達関数からシステムの状態方程式を求めるいわゆる実現問題であるといえる。しかし前に述べたように状態方程式　$\dot{x} = Ax + bu$　のパラメータ$A = [a_{ij}]$は　(i)　$a_{ii} \leqq 0$，$a_{ij} \geqq 0$，$i \neq j$　(ii)　$|a_{jj}| \geqq \sum_{i \neq j} a_{ij}$　という条件を満たさなければならない。したがって，この条件(i)，(ii)に対しては十分な考慮が必要である。１例としてコンパートメント数について考えてみよう。従来システム理論の結果では，伝達関数の次数（分母多項式の次数，McMillan次数）によって最小実現でき，最小実現は正則変換の範囲で一意的であることが知られている。

では，こうして述べた最小実現から，適当な正則変換によってシステムマトリクスを先の条件(i)，(ii)を満たすようにできるだろうか。（条件(i)，(ii)を満たすために McMillan 次数以上の次元が必要になるかもしれない。）すなわち，最小次元の問題が起る。また，システム理論では，実現可能な伝達関数はプロパーな有理関数でそのときに限ることは良く知られている。ところがコンパートメントアナリシスでは，システムマトリクスの制限によって，より狭いクラスの有理関数になるはずであるが，それはどのように表現できるであろうか。すなわち，伝達関数の実現可能条件を明確にすることが問題となる。

そこで本章では，まずコンパートメントシステムの性質について，これまでの知見をまとめ，ついで医学的に頻用されるマミラリー，カテナリーシステムの実現問題に関する考察を加えた後，問題をマミラリー，カテナリーシステムよりやや広げた場合について言及し，併せて最小実現について実例を挙げながら説明する。

4－1　コンパートメントシステムの性質[26)27)]

以後の議論のために，すでに知られているコンパートメントシステムの性質について簡単に述べる。まず，ベクトル・マトリクスに対する不等号について定めておく。ベクトルx，yに対して　$x \geqq y$　とは，対応する各要素間に　$x_i \geqq y_i$，$i = 1, 2, \cdots\ n$　が成立することを意味し，行列A，Bについても　$A \geqq B$　とは　$a_{ij} \geqq b_{ij}$，$\forall ij$　が成立することを表わすものとする。またコンパートメントシステムのクラスをCと表現する。

さて，コンパートメントシステムでは，その係数マトリクスの非対角成分が非負ということから，次の性質が示される。

［補題　4－1－1］[28)]　$A \in C$，$x_0 \geqq 0$なら，$\dot{x} = Ax$，$x(0) = x_0$　の解は　$x(t) \geqq 0$，

$V_t \geqq 0$　また，各列の要素の総和が非正ということから，つぎのことがいえる。

［補題４－１－２］[29] $A \in C$，$C = \max \lambda_{ii}$ とすると，任意の固有値　$\lambda = \lambda(A)$　に対して，

$|\lambda + C| \leqq C$

これは，コンパートメントマトリクスの固有値が，複素平面の左半平面内にあって，原点以外の虚軸上に存在し得ないことを意味する。

［補題４－１－３］[30] $A \in C$　かつ分解不能とする。

(i)　零固有値が存在するのは，各列において要素の総和がすべて０の時，またその時に限る。

(ii)　最大固有値 $\lambda_{\max} \leqq 0$　が存在し，それは特性多項式の単根で，対応する固有ベクトルとして，$v > 0$　のものが存在する。（原点に極があっても高々一位である。）

ここで分解不能とは，どのような順列マトリクスPに対しても

$$PAP^{-1} = \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ A_{21} & A_2 \end{pmatrix} \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots (4, 1)$$

と分解されない時を言う。４．１式のように分解できる時は，分解可能という。

この補題４－１－３から，分解可能なコンパートメントマトリクスを用いて表現できるシステムは，リアプノフの意味で安定となることは明らかであるが，実は，分解可能であっても，一般に，リアプノフ安定は保証される。それは例えば，Aが分解可能で４．１式のように分解できたとする。特にA_1, A_2 が分解不能であれば$A_{21} \neq 0$　のときは補題 4−1−3 の(i)から　$R.\lambda_i[A_1] < 0$，$R.\lambda_i[A_2] \leqq 0$　で最大実固有値 $\lambda_{\max}[A_2]$ は単根だからリアプノフ安定となるし，$A_{21} = 0$ のときは，A_1, A_2 の最大実固有値は非正で，両方とも０でもそれは最小多項式の単根だからリアプノフ安定となる。A_1, A_2 が分解可能なら，そのおのおのに今の分解を施し，これを繰り返し用いることによって，結局Aが分解可能であるかどうかに関係なく次の性質が成立する。

［補題４－１－４］　$A \in C$　とすると　$\dot{x} = Ax$　のすべての解は，$t \geqq 0$　で有界である。

また，リアプノフ安定と関係した次の結果も有用である。

［補題４－１－５］　Aを分解不能で　$A \in C$とすると，適当な正の対角行列Vがあって

$$AV + VA' = -Q \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots (4.2)$$

としたとき，Qは対称準正定となる。但しA'　はAの転置行列である。

（証明）　補題４－１－３の(ii)から　$Av = \lambda_{\max} v$，$v > 0$　なる固有ベクトルが存在する。

$v = \mathrm{col}[v_1 \cdots\cdots v_n]$　として　$V = \mathrm{diag}\{v_1 \cdots\cdots v_n\}$　とすると，$Ve = v$　が成立する。

ここに　$e = \mathrm{col}[1, 1, \cdots\cdots, 1]$　よって　$[AV]e = \lambda_{\max} v \leqq 0$　であるから $-Q$ は対称かつ非対角成分は非負であり，$-e'Q = (e'A)V + e'VA' \leqq 0$　となって準正定となる。

4−2 マミラリーシステム[31)]

マミラリーシステムMaとは，図４－１のように中央のコンパートメントが周囲のコンパートメントと結合しあうものである。中央のコンパートメンに１，周囲のコンパートメントに２，３……nと番号をつけ，入力部位をk，出力部位をlとすると，その状態方程式は

$$\dot{x} = Ax + e_k u\ ,\ \ y = e'_l x \quad \cdots\cdots (4.3)$$

と与えられる。但し，

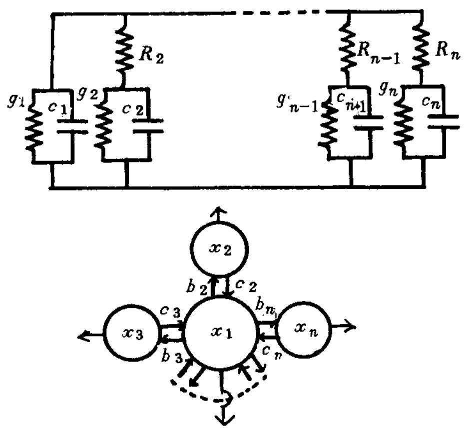


図４−１ マミラリーシステムと等価なＲＣ回路

$$A = \begin{pmatrix} -a_1 & c_2 & \cdots\cdots & c_n \\ b_2 & -a_2 & & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ \vdots & \vdots & & \\ b_n & 0 & & -a_n \end{pmatrix} \qquad e_k = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \leftarrow k \qquad \cdots\cdots\cdots (4.4)$$

で，a_i, b_i, c_i はすべて非負実数で，次の条件を満たす。

$$a_1 \geqq \sum_{i=2}^{n} b_i\ ,\ a_i \geqq c_i\ ,\quad i = 2, 3, \cdots\cdots n \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots (4.5)$$

式４．４のマトリクスAの形で，制約条件式４．５を満たすマトリクスのクラスを Ma^n と表し，特に $b_i, c_i > 0$，$i = 2 \cdots\cdots n$ のときは M^n_{a+} と表わして以下の論議を行うことにする。

$A \in M^n_{a+}$ については，４−１およびこれまでの報告により既につぎのことが知られている。

［補題４−２−１］[27)34)] $A \in M^n_{a+}$ とする。このとき

(i) 固有値｛λ_i｝は実，非正で，その最大固有値は１位である。また，最大固有値が零であるのは式４．５の不等式の等号がすべて成立するときに限る。

(ii) $\{a_i\}_{i=2}^{n}$ がたがいに相異なるものとすると，$\{a_i\}$ は $\{\lambda_i\}$ を分離する。すなわち適当に順序づけるとつぎのようになる。

$$0 \geqq \lambda_1 > a_2 > \lambda_2 > \cdots\cdots > a_n > \lambda_n$$

したがって，この場合，

$$e_1'(sI - A)^{-1} e_1 = \frac{\prod_{i=2}^{n}(s + a_i)}{det(sI - A)} \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots (4.6)$$

は正実RC駆動点インピーダンス関数となる。

この結果と，$A\in M_{a+}^{n}$ なら$D\triangleq \mathrm{diag}\{1,\ c_2/b_2,\ \cdots\cdots\cdots c_n/b_n\}$ とすれば $DAD^{-1}=A'$ となること，したがって $D^{\frac{1}{2}}AD^{-\frac{1}{2}}\triangleq B$ とすれば，$B=B'$ となることを用いて つぎの結果が導かれる。

［補題４－２－２］ $A\in M_{a+}^{n}$，かつ $\{a_i\}_{i=2}^{n-1}$ はたがいに相異なるものとする。そのとき，Aの固有値を$\{\lambda_i\}$，Aのn行n列を除いた $(n-1)\times(n-1)$マトリクス$A(1\cdots\cdots n-1)$のそれを $\{\mu_i\}$とすると，

$$0\geqq\lambda_1>\mu_1>\lambda_2>\cdots\cdots\cdots>\mu_{n-1}>\lambda_n \quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(4.7)$$

したがって

$$e_n'(sI-A)^{-1}e_n=\frac{\det\{sI-A(1,\ \cdots\cdots,\ n-1)\}}{\det(sI-A)}\cdots\cdots\cdots(4.8)$$

は正実RC駆動点インピーダンス関数となる。

（証明） $D^{\frac{1}{2}}AD^{-\frac{1}{2}}=B=B'$ とすると，$A(1\cdots n-1)$の固有値，したがって$B(1\cdots n-1)$の固有値は補題４－２－１の(ii)から相異なる非正の実数である。またBは対称行列でもあるから，Bの固有値と$B(1\cdots n-1)$の固有値は他をたがいに分離して式４．７が成立する。[32)]

４－２－１ 可制御性，可観測性，最小実現

線形システム理論では，システムの可制御で可観測な部分が，元のシステムと零状態等価（伝達関数が相等しい）なもののうちで最小次元のものであることはよく知られている。そこで，この節での主題は，マミラリーシステムの可制御，可観測部分を，適当な基底を選んで表現すると，やはりマミラリーシステムで表現できることを示すことである。

まず，可制御性，可観測性の具体的な条件を導くことにする。図４－１のマミラリー構造より判断すると，$b_i=0$，$a_i=a_j$，$i\neq j\ (i,\ j\neq 1)$ となるものがあれば，(A,e_1)が可制御でないことは明らかである。実はこの逆も成立することが，実際に可制御マトリクスを計算して容易に示すことができる。

［補題４－２－３］ $A\in M_{a}^{n}$，$Q_c\triangleq[e_k, Ae_k, \cdots\cdots\cdots, A^{n-1}e_k]$ とすると，

$\mathrm{rank}[Q_c]=\rho\ (2\leqq\rho\leqq n)\Longleftrightarrow$

(i)　$k=1$のとき：　$b_i>0$に対応するa_iのうちで相異なるものは$\rho-1$個ある。

(ii)　$k\neq 1$のとき：　$c_k>0$でありかつ，b_kを除いた$b_i>0$に対応するa_iのうちで 相異なるものが$\rho-2$個ある。

また，可観測性の場合も全く同様で，上の結果で$b_i\to c_i$，$c_i\to b_i$とすればよい。

この補題の直接的な結果としてつぎの系が得られる。

［系］　$A\in M^n_{a+}$ とする。

(A, e_k)：可制御 ⟺ (e_k, A)：可観測 ⟺

$k=1$のとき：$\{a_i\}$, $i\in[2 \cdots n]$ は相異なる。

$k\neq 1$のとき：$\{a_i\}$, $i\in[2 \cdots n]-\{k\}$ は相異なる。

この系から補題4－2－1，4－2－2の $\{a_i\}$ に関する性質は，可制御性，可観測性の条件であったことがわかる。

そこで，以上の結果を用いて可制御（可観測）分解について考えることにする。まず，可制御でないときマミラリー構造をした可制御部分が取り出せることを示す。

［補題4－2－4］　$A\in M^n_a$，$e'_l(sI-A)^{-1}e_k\neq 0$　であるものとする。

この時 $\mathrm{rank}\,[e_k, Ae_k, \cdots\cdots, A^{n-1}e_k]=\rho\ (2\leqq\rho\leqq n)$

⇨適当な $\widetilde{A}\in M^n_a$，$\widetilde{l}$，$\widetilde{k}\in[1,\cdots,\rho]$と $c>0$があって

$$e'_l(sI-A)^{-1}e_k=c\,e'_{\widetilde{l}}\,(sI-\widetilde{A})\,e_{\widetilde{k}} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (4.9)$$

となり，かつ$(\widetilde{A}, e_{\widetilde{k}})$は可制御である。

（証明）　$k=1$の場合について示す。$b_i=0$のものがあれば，それに対応するコンパートメントは明らかに不可制御であるから，始めから$b_i>0$，$i=2,\cdots,n$ としても一般性は失われない。そこで，a_i の順序を入れかえて番号をつけかえることによって，$\{a_i\}^{\rho}_{i=2}$ はたがいに相異なり，それ以外のa_i，$i=\rho+1,\cdots,n$ は $\{a_i\}^{\rho}_{i=2}$のいずれかと重複するようにする。このような順序の入れかえを行うと，出力部位は$\{1,\cdots,\rho\}$ のいずれかのコンパートメント，たとえば$\widetilde{l}$に対応づけることが出来る。

さて，ここで $I(i)\triangleq\{j : a_j=a_i,\ j\neq i\}$，$i=2,\cdots,\rho$ として，新しい状態 $x=\mathrm{col}[\widetilde{x}_1,\cdots,\widetilde{x}_n]$をつぎのように定める。

$$x_i=\begin{cases} d_i x_i & i=1,2,\cdots,\rho \\ x_i-\dfrac{b_i}{b_j}x_j & i\in I(j) \end{cases} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (4.10)$$

ここに，$d_1=1$，$d_i=\left(1+\sum_{j\in I(i)}(b_j/b_i)\right)$，$i=2,\cdots,\rho$ とする。

このように状態を定めると，元の方程式と零状態等価なつぎの方程式を得る。

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix}\tilde{x}_1\\ \tilde{x}_2\\ \vdots\\ \vdots\\ \tilde{x}_\rho\end{bmatrix}=\underbrace{\begin{bmatrix}-a_1 & \tilde{c}_2 & \cdots & \cdots & \tilde{c}_\rho\\ \tilde{b}_2 & -a_2 & & & \\ \vdots & & \ddots & & \\ \vdots & & & \ddots & \\ \tilde{b}_\rho & & & & -a_\rho\end{bmatrix}}_{\tilde{A}}\begin{bmatrix}\tilde{x}_1\\ \tilde{x}_2\\ \vdots\\ \vdots\\ \tilde{x}_\rho\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1\\ 0\\ \vdots\\ \vdots\\ 0\end{bmatrix}u$$

$$y=\frac{1}{d_{\tilde{l}}}\tilde{x}_{\tilde{l}}$$

但し，$\tilde{b}_i=d_i b_i>0$，$i=2$，…，ρ，$\tilde{c}_i=[c_i+\sum_{j\in I(i)}(c_j b_j/b_i)]/d_i$，$i=2,\cdots,\rho$。

したがって，

$$\sum_{i=2}^{\rho}\tilde{b}_i=\sum_{i=2}^{\rho}b_i[1+\sum_{j\in I(i)}(b_j/b_i)]=\sum_{i=2}^{n}b_i\leqq a_1$$

$$\tilde{c}_i=[c_i+\sum_{j\in I(i)}(c_j b_j)/b_i]/d_i\leqq[1+\sum_{j\in I(i)}(b_j/b_i)]d_i^{-1}$$

$$\max_{k\in I(i)+\{i\}}c_k\leqq a_i,\quad i=2,\ \cdots,\ \rho$$

より $\tilde{A}\in M_a^\rho$ となることがわかる。また（$\tilde{A}$，e_1）が可制御なのは，補題４－２－３から明らかである。$k\neq 1$ の場合も同様な方法で示すことができる。

つぎに，可観測分解についても同じ結果が成立する。

［補題４－２－５］　$A\in M_a^n$，$e_l'(sI-A)^{-1}e_k\not\equiv 0$　とする。

rank $[e_l, A'e_l, \cdots, (A')^{n-1}e_l]=\rho$ $(2\leqq\rho\leqq n)$ ⇨ 適当な $\tilde{A}\in M_a^\rho$，$\tilde{l}$，$\tilde{k}\in[1,\cdots,\rho]$ と $c>0$ があって式４．９が成立し，かつ（$e_{\tilde{l}}$，$\tilde{A}$）は可観測。

（証明）　この場合も $l=1$ の場合について示しておく。補題４－２－３で示した相対を考えると，始めから $c_2,\cdots,c_\rho>0$，かつ　$\{a_i\}_{i=2}^{\rho}$ は相異なり，それ以外の a_i は必ず $\{a_i\}_{i=2}^{\rho}$ のどれかと重複し，$I(i)\triangleq\{j:a_j=a_i,\ j\neq i\}$，$i=2,\ \cdots,\ \rho$ とすると，$\max_{k\in I(i)}c_k\leqq c_i$　と仮定できる。そこで，新しい状態 $\tilde{x}=\mathrm{col}[\tilde{x}_1,\cdots,\tilde{x}_n]$ をつぎのように定める。

$$\widetilde{x}_i = \begin{cases} x_i & i=1,\ \rho+1,\ \cdots,\ n \\ x_i + \sum_{j\in I(i)} \dfrac{c_j x_j}{c_i}, & i=2,\ \cdots,\ \rho \end{cases} \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (4.11)$$

このような新しい状態を用いると元の方程式と零状態等価な方程式として次式を得る。

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} \widetilde{x}_1 \\ \widetilde{x}_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ \widetilde{x}_\rho \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} -a_1 & c_2 & \cdots & c_\rho \\ b_2 & -a_2 & & \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ \vdots & & & \\ \widetilde{b}_\rho & & & -a_\rho \end{pmatrix}}_{\widetilde{A}} \begin{pmatrix} \widetilde{x}_1 \\ \widetilde{x}_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ \widetilde{x}_\rho \end{pmatrix} + c\, e_{\widetilde{k}}\, u$$

$$y = \widetilde{x}_1$$

ここに，$\widetilde{k}$，c はそれぞれ $k\in[1,\cdots,\rho]$ のときには $\widetilde{k}=k$，$c=1$，$k\notin[1,\cdots,\rho]$ のときは $k\in I(\widetilde{k})$，$c=c_k/c_{\widetilde{k}}$ として定まり，

$$\widetilde{b}_i = \sum_{j\in I(i)} \{(c_j b_j)/c_i\} + b_i, \quad i=2,\cdots,\rho \quad \text{である。}$$

そこで

$$\sum_{i=2}^{\rho} \widetilde{b}_i = \sum_{i=2}^{\rho} \left(b_i + \sum_{j\in I(i)} (c_j b_j)/c_i\right) \leqq \sum_{i=2}^{n} b_i \leqq a_1$$

なる関係があるから $\widetilde{A}\in M_a^\rho$ は明らかである。また，$(e_1,\widetilde{A})$ が可観測なことは，補題４－２－３から示される。$l\neq 1$ の場合も全く同様に証明することができる。（補題４－２－４，４－２－５は M_{a+} としても成立する。）

さて，以上の補題４－２－４，４－２－５は，式４．３のマミラリーシステムから可制御，可観測部分が取り出せ，そのシステムマトリクスを M_a とすることができることを示している。

そこで，いま与えられた有理関数 $\widehat{h}(s)$ に対して

$$\widehat{h}(s) = c\cdot e_l'(sI-A)^{-1}e_k \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (4.12)$$

となる $A\in M_a(M_{a+})$，$c>0$ があるとき，$\widehat{h}(s)$ は $M_a(M_{a+})$ －実現可能，または $M_a(l,k)(M_a+(l,k))$ －実現可能と呼ぶことにすれば，つぎの定理が得られる。

［定理４－２－１］ $\widehat{h}(s)$ が $M_a(M_{a+})$ －実現可能なら，$\widehat{h}(s)$ は必らずその McMillan 次数で $M_a(M_{a+})$ －実現可能であり，可制御性と可観測性が成立する。

この結果は，マミラリー構造であることが分っているシステムではその伝達関数が与えられた時，伝達関数の次数に等しい数のコンパートメントを持ったマミラリーシステムとしてモデル化

できることを示している。また定理４－２－１，補題４－２－１，４－２－２，４－２－３から$M_{\alpha+}$システムの入出力部位が等しい伝達関数は，正実RC駆動点インピーダンス関数の性質をもつことがわかる。一般にこの逆も成立することをつぎに示す。

４－２－２　実現可能な伝達関数

４－２－２では，M_a－実現可能な伝達関数のクラスを明確にし，マミラリー構造によって伝達関数の極と零がどのような制限を受けるかについて検討する。

まず入出力部位が等しい場合について考察する。

［定理４－２－２］$\hat{h}(s)$が$M_a(k,\ k)$－実現可能である必要十分条件は

(i)　分母と分子の次数の差が１

(ii)　$\hat{h}(s)$が正実RC駆動点インピーダンス関数である。

（証明）　必要性：$\hat{h}(s)=e_k'(sI-A)^{-1}e_k$，　$A\in M_a$　ということから(i)は明らかであるので[34](ii)を示すことにする。定理４－２－１から（e_k, A, e_k）は 可制御，可観測と仮定でき，$\deg[\hat{h}]=n$ としたとき　$A\in M_a^n$ である。ところで補題４－２－３の直接の結果として

$k=1$の時，$i\in[2,\cdots,n]$に対して$b_i>0$かつa_iは相異なる。

$k\neq 1$の時，$c_k>0$，$i\in[2,\cdots,n]-\{k\}$に対して，$b_i>0$であり，かつa_i　は相異なる。

ことが導かれるので，これと補題４－２－１，４－２－２から(ii)が成立する。

十分性：　$k=1$の時：$A\in M_a^n$とすると，

$$[e_1'(sI-A)^{-1}e_1]^{-1}=s+a_1-\sum_{i=2}^{n}\frac{b_ic_i}{s+a_i} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (4.13)$$

が一般に成立する。また，(i), (ii)を満足する$\hat{h}(s)$は　$s=\infty$　における留数を１とすると，つぎのように展開できる。[33]

$$h(s)^{-1}=s+k_1+\sum_{i=2}^{n}\frac{k_is}{s+\alpha_i}$$

$$=s+\sum_{i=1}^{n}k_i-\sum_{i=2}^{n}\frac{k_i\alpha_i}{s+\alpha_i} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (4.14)$$

ここで，$k_1\geqq 0$，k_i，$\alpha_i>0$，$i=2,\cdots,n$,　$n=\deg[\hat{h}(s)]$

式４．13，４．14を比較して，$a_1=\sum_{i=1}^{n}k_i$，$a_i=c_i=\alpha_i$，$b_i=k_i$，$i=2,\cdots,n$とすれば，$A\in M_{\alpha+}^n$で求める実現が得られる。

$k\neq 1$の時：$k=n$としても一般性は失われない。そこで$A\in M_a^n$とすれば，次式が成立する。

$$[\,e_n'(sI-A)^{-1}e_n\,]^{-1}=s+a_n-b_nc_ne_1'(sI-A(1\cdots n-1))^{-1}e_1 \quad \cdots\cdots(4.15)$$

一方，式4．14の最後の項は正実RC駆動点インピーダンス関数だから式4．14 はつぎのように展開できる。

$$\widehat{h}(s)^{-1}=s+\sum_{i=1}^{n}k_i-\{\,h_\infty s+\sum_{i=1}^{n-1}h_i-\sum_{i=2}^{n-1}\frac{h_i\beta_i}{s+\beta_i}\,\}^{-1} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots(4.16)$$

ここに$h_\infty>0$，$h_i>0$（$i=1, 2, \cdots, n-1$），$\beta_i>0$（$i=2, \cdots, n-1$），

$h_1=(\sum_{i=2}^{n}k_i)^{-1}$ である。さきほどと同様に式4．15と4．16を比較して，

$a_1=(\sum_{i=1}^{n-1}h_i)/h_\infty$，$a_i=c_i=\beta_i>0$，$b_i=h_i/h_\infty$，$i=2, \cdots, n-1$，$a_n=c_n$

$=\sum_{i=1}^{n}k_i$，$b_n=(h_\infty\cdot\sum_{i=1}^{n}k_i)^{-1}$ とすれば，$A\in M_{a+}^{n}$となり求める実現が得られる。

以上から，マミラリーシステムの入出力が等しい場合の伝達関数は，正実RC駆動点インピーダンス関数の性質をもち，それはM_{a+}^{n}システムで実現できることがわかる。

つぎに，入出力部位が異なる場合について考察を加える。

［定理4－2－3］ $k\neq 1$として

(a) $\widehat{h}(s)$が$M_a(1, k)$－実現可能である必要十分条件は

(i) 分母と分子の次数の差が2

(ii) 適当な$\alpha>0$があって，$(s+\alpha)\widehat{h}(s)$ が正実RC駆動点インピーダンス関数になることである。

(b) $\widehat{h}(s)$が$M_a(k, 1)$－実現可能である必要十分条件は，上述の(i)，(ii)と，さらに(iii)$\widehat{h}(s)$に重複した極があるのは，すべての極が負のときに限ることである。

（証明） (a)の必要性：$\widehat{h}(s)=e_1'(sI-A)^{-1}e_k$，$A\in M_a^n$として一般性を失うことなく$k=n=\deg[\widehat{h}(s)]$ とできる。また，補題4－2－3から$\{a_i\}_{i=2}^{n}$は相異なり，$c_2, \cdots, c_n>0$，$b_2, \cdots, b_{n-1}>0$，$b_n\geq 0$ と仮定できる。いま$\alpha=a_n\geq c_n>0$ とすると，

$$(s+\alpha)\widehat{h}(s)=\begin{cases} c_ne_1'(sI-A)^{-1}e_1 & (b_n>0) \\ c_ne_1'(sI-A(1\cdots n-1))^{-1}e_1 & (b_n=0) \end{cases} \quad \cdots\cdots\cdots(4.17)$$

となることが簡単な計算によって示される。式4.17の右辺より(i)が成立することは明らかである。また，補題4－2－1から$(s+\alpha)\widehat{h}(s)$は正実RC駆動点インピーダンス関数である。

(a)の十分性：$\widehat{h}(s)$に重複極がなければ(ii)のαとして $\deg[(s+\alpha)\cdot\widehat{h}(s)]=\deg[\widehat{h}(s)]$ $\triangleq n$ と選べる。そこで

$$[(s+\alpha)\widehat{h}(s)]^{-1}=s+k_1+\sum_{i=2}^{n}\frac{k_i s}{s+\alpha_i}\quad,\ \alpha_n=\alpha \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (4.18)$$

と展開し，定理４－２－２の $k=1$ の場合と同じに，

$$a_1=\sum_{i=1}^{n}k_i,\quad a_i=c_i=\alpha_i,\quad b_i=k_i,\quad i=2,\cdots,n$$

とすると，$A\in M_{a+}^{n}$ かつ $e_1'(sI-A)^{-1}e_n=e_1'(sI-A)^{-1}e_1\cdot(c_n/(s+a_n))$

$=c_n\widehat{h}(s)$ で求める実現となる。重複極がある場合，$-\alpha$ をそれに選んで式 4.18 の形に展開し，$A(1,\cdots,n-1)$ を求め，$b_n=0$，$a_n=c_n=\alpha$ とすればよい。

(*b*)の必要性：(*a*)と同様で，$A\in M_a^n$ として $\{a_i\}_{i=2}^{n}$ は相異なり，$b_2,\cdots,b_n>0$，$c_2,\cdots c_{n-1}>0$，$c_n\geqq 0$ を考える。$a_n>0$ のとき，$\alpha=a_n$ とすれば式 4.17 で $c_n\to b_n$，$b_n\to c_n$ とした式が成立し，条件(i)，(ii)が成立する。$a_n=0$（したがって $c_n=0$）のときは $b_n>0$ と補題４－２－１(i)から $-\max\lambda_i[A(1\cdots n-1)]>\alpha>0$ なる α が存在する。そこで

$$(s+\alpha)\widehat{h}(s)=b_n\frac{(s+\alpha)\prod_{i=2}^{n-1}(s+\alpha_i)}{s\det(sI-A(1\cdots n-1))} \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (4.19)$$

は式４．６から明らかに正実 RC 駆動点インピーダンス関数であり，また条件(i)が成立している。

定理の条件(iii)については，重複極の可能性は $c_n=0$ のときである（補題４－２－１(ii)）。そのとき，$\det(sI-A)=(s+a_n)\det(sI-A(1\cdots n-1))$ で，かつ $\lambda_i[A(1,\cdots,n-1)]$ は負であるから $a_n=0$ は重複極にはなり得ない。すなわち $a_n>0$ であり，(iii)が成立する。

(*b*)の十分性：$\widehat{h}(s)$ に重複極がない場合は(*a*)で示したのと同じ実現法によって，$A\in M_{a+}^{n}$ で $\widehat{h}(s)=e_1'(sI-A)^{-1}\cdot e_n/c_n=e_n'(sI-A)^{-1}\cdot e_1/b_n$ であるから求めるものになっている。

重複極がある場合は，$-\alpha$ をそれに選ぶと $\alpha>0$ である。そこで

$$[(s+\alpha)\widehat{h}(s)]^{-1}=s+k_1+\sum_{i=2}^{n-1}\frac{k_i s}{s+\alpha_i} \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (4.20)$$

と展開する。条件(iii)を使うと，式 4.20 の $k_1>0$ であることが容易に示される。

つぎに，$a_1=\sum_{i=1}^{n-1}k_i$，$a_i=c_i=\alpha_i$，$b_i=k_i$，$i=2,\cdots,n-1$，$a_n=\alpha$，$b_n=k_1$，$c_n=0$ とすれば，$A\in M_a^n$ かつ

$$e_n'(sI-A)^{-1}e_1=\{b_n/(s+\alpha)\}\cdot e_1'(sI-A(1\cdots n-1))^{-1}e_1=b_n\widehat{h}(s)$$

となる。

(注1) 条件(ii)から$\widehat{h}(s)$ は原点に高々1位の極を持ち，零点は極と極の間に高々1個存在することが判る。

(注2) $M_a(1, k)$－実現可能なクラスは，$M_a(k, 1)$－実現可能なクラスよりも広い。たとえば，$\widehat{h}(s)=(s+1)/\{s(s+2)^2\}$は

$$A=\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

として$M_a(1, 3)$－実現できるが，$M_a(3, 1)$－実現はできない。しかし，$\widehat{h}(s)$ の極が1位であれば，このような差は生じない。すなわちM_{a+}に限って云えば，補題4－2－1から$M_{a+}(1, k)$ ($M_{a+}(k, 1)$) －実現可能な伝達関数の極は1位である。したがって，つぎの系が得られる。

［系］ $\widehat{h}(s)$が$M_{a+}(1, k)$－実現可能$\Longleftrightarrow M_{a+}(k, 1)$実現可能$\Longleftrightarrow$定理3の条件(i)(ii)と(iii)として，$\widehat{h}(s)$の極は1位である。

最後に，周囲のコンパートメント間の伝達関数について考察する。

［定理4－2－4］ $l \neq k$, l, $k \neq 1$ とする。$\widehat{h}(s)$が$M_a(l, k)$－実現可能である 必要十分条件は

(i) 分母と分子の次数の差が3

(ii) 適当なα, $\beta > 0$があって$(s+\alpha)(s+\beta)\widehat{h}(s)$が正実$RC$駆動的インピーダンス関数

(iii) $\widehat{h}(s)$に3位の極があるのは，すべての極が負のときに限る

ことである。

(証明) 必要性：$\widehat{h}(s)=e_l'(sI-A)^{-1}e_k$ とする。定理4－2－1から一般性を失うことなく $n=\deg[\widehat{h}(s)]$, $l=2$, $k=n$, $b_i>0$, $i \in [2, \cdots, n-1]$, $c_i>0$, $i \in [3, \cdots, n]$, $\{a_i\}_{i=3}^{n}$, $\{a_i\}_{i=2}^{n-1}$ は相異なると仮定できる。そこで$\widehat{h}(s)$は つぎのように表される。

$$\frac{(s+a_2)(s+a_n)\widehat{h}(s)}{b_2 c_n}=\begin{cases} e_1'(sI-A)^{-1}e_1 & (b_n>0 \quad c_2>0) \qquad \cdots\cdots(4.21.a) \\ e_1'(sI-A(1, 3, \cdots, n))^{-1}e_1 & (b_n>0 \quad c_2=0) \qquad \cdots\cdots(4.21.b) \\ e_1'(sI-A(1, 2, \cdots, n-1))^{-1}e_1 & (b_n=0 \quad c_2>0) \qquad \cdots\cdots(4.21.c) \\ e_1'(sI-A(1, 3, \cdots, n-1))^{-1}e_1 & (b_n=0 \quad c_2=0) \qquad \cdots\cdots(4.21.d) \end{cases}$$

この式から(i)が成立することは明らかである。

つぎに(ii)であるが，$\beta=a_n \geq c_n>0$とおくことにする。まず$a_2>0$であれば，$\alpha=a_2$ と

おくことにより式4.21から(ii)が成立することがわかる。つぎに$a_2=0$のときは$c_2=0$　となる。したがって式4.21 b, d　のみを考えればよい。$b_2>0$であるから，式4.21 b　の場合，$-\lambda_i[A(1,3,\cdots,n)]>\alpha>0$ を満足するαが存在する。したがって

$$(s+\alpha)(s+\beta)\widehat{h}(s)=b_2c_n\cdot\{(s+\alpha)/s\}e_1'(sI-A(1,3,\cdots,n))^{-1}e_1$$

は正実RC駆動点インピーダンス関数となる。

式4.21 d の場合も同様にαとして $-\lambda_i[A(1,3,\cdots,n-1)]>\alpha>0$　を満足するものを選んでやればよい。

(iii)であるが，$\widehat{h}(s)$に3重極が生じる可能性があるのは，$b_n=c_2=0$ かつ $a_2=a_n$ の場合である。ここで $a_2=a_n=0$ であれば，$-\lambda_i[A(1,3,\cdots n-1)]>0$ であったから3重複極にはなり得ない。すなわち $a_2=a_n>0$　でなければならない。これは(iii)が成立することを意味する。

十分性：　まず$\widehat{h}(s)$の極がすべて1位の場合を考える。このとき，α，βとして(ii)を満足し，かつ $\deg[(s+\alpha)(s+\beta)\widehat{h}(s)]^{-}=\deg[\widehat{h}(s)]\triangleq n$　とできる。そこで，これをつぎのように展開する。

$$[(s+\alpha)(s+\beta)\widehat{h}(s)]^{-1}=s+k_1+\sum_{i=2}^{n}\frac{k_i s}{s+\alpha_i}\quad\cdots\cdots\cdots\cdots(4.22)$$

ここで，$\alpha_2=\alpha$, $\alpha_n=\beta$, $a_1=\sum_{i=1}^{n}k_i$，$a_i=c_i=\alpha_i$，$b_i=k_i$，$i=2,\cdots,n$ とすれば $A\in M_{\alpha+}^{n}$ であり，かつ

$$e_2'(sI-A)^{-1}e_n=\{b_2c_n/(s+\alpha_2)(s+\alpha_n)\}\cdot e_1'(sI-A)^{-1}e_1=b_2c_n\widehat{h}(s)$$

となり，求める実現となる。

つぎに $\widehat{h}(s)$が2位の極をもつときは，$-\beta$ を重複極に一致させ，αを適当に選んで(ii)を満たし，かつ $\deg[(s+\alpha)(s+\beta)\widehat{h}(s)]=n-1$　とできる。そこで，つぎのような展開を考える。

$$[(s+\alpha)(s+\beta)\widehat{h}(s)]^{-1}=s+k_1+\sum_{i=2}^{n-1}\frac{k_i s}{s+\alpha_i}\quad\cdots\cdots\cdots\cdots(4.23)$$

そこで，$\alpha_2=\alpha$, $a_1=\sum_{i=1}^{n-1}k_i$，$a_i=c_i=\alpha_i$，$b_i=k_i$，$i=2,\cdots,n-1$, $a_n=\beta$, $c_n=\beta$, $b_n=0$ とすれば，$A\in M_a^n$ であり，かつ

$$e_2'(sI-A)^{-1}e_n=\{b_nc_n/(s+a_2)(s+a_n)\}e_1'(sI-A(1,2,\cdots,n-1))^{-1}e_1$$

$$=b_2c_n\widehat{h}(s)$$

となり，求める実現となる。

また，$\widehat{h}(s)$が３位の極をもつときは，$-\alpha=-\beta$　をこの３位の極にあわせると，条件(iii)から $\alpha=\beta>0$　となる。そこで

$$[(s+\alpha)^2\widehat{h}(s)]^{-1}=s+k_1+\sum_{i=3}^{n-1}\frac{k_i s}{s+\alpha_i} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (4.24)$$

と部分分数展開をすると，$k_1>0$，$k_i, \alpha_i>0$，$i=3, \cdots, n-1$　である。ここで，

$a_1=\sum_{i=3}^{n-1}k_i$，$b_i=k_i$，$a_i=c_i=\alpha_i$，$i=3, \cdots, n-1$，$b_2=k_1>0$，$a_2=\alpha>0$，$c_2=0$，

$a_n=c_n=\alpha$，$b_n=0$ とすれば，$A\in M_a^n$　であり，かつ

$$e_2'(sI-A)^{-1}e_n=\{b_2c_n/(s+\alpha)^2\}e_1'(sI-A(1, 3, \cdots, n-1))^{-1}e_1$$

$$= b_2c_n\widehat{h}(s)$$

となり，求める実現となる。

（注１）　条件(ii)より$\widehat{h}(s)$の極は 原点に高々１個であり，零点は極と極の間に高々１個である。

（注２）　$\widehat{h}(s)$の極がすべて１位であれば，$M_{\alpha+}(l, k)$－実現できる。逆に，$M_{\alpha+}(l, k)$－実現できれば，補題４－２－２によって$\widehat{h}(s)$の極はすべて１位になる。したがって，次の系が成立する。

（系）　$\widehat{h}(s)$が$M_{\alpha+}(l, k)$－実現可能な必要十分条件は，定理４－２－４の(i)，(ii)と(iii)すべての極が１位，ということになる。

［例題］　$\widehat{h}(s)=(s+2)/\{(s+1)^2(s+3)(s+5)\}$　を考える。$\alpha=4$，$\beta=1$とすると，

$$(s+\alpha)(s+\beta)\widehat{h}(s)=\frac{(s+2)(s+4)}{(s+1)(s+3)(s+5)}$$

となり，つぎのような展開ができる。

$$[(s+4)(s+1)\widehat{h}(s)]^{-1}=s+\frac{15}{8}+\frac{3}{8}\frac{s}{s+4}+\frac{3}{4}\frac{s}{s+2}$$

そこで，定理４の構成法を用いると，つぎのような実現が得られる。

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-3&4&2&1\\3/8&-4&0&0\\3/4&0&-2&0\\0&0&0&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\0\\0\\1\end{bmatrix}u$$

$$y=\frac{8}{3}x_2$$

以上，マミラリーシステムの伝達関数について論議を行ったが，これまでの結果をまとめるとつぎのようになる。

(i) 分母と分子の次数の差は高々３までである。

(ii) 零点は負の実軸上にあって１位，かつ極と極の間に高々１個である。

(iii) 極は原点を含む負の実軸上にあって，重複極はもしあれば１種類で高々３位までである。

(iv) 原点に極があれば，それは１位である。

４－３　カテナリーシステム[35]

カテナリーシステムC_aとは図４－２のようにコンパートメントが鎖状に連結したものである。各コンパートメントに端から順に１，２，…，nと番号をつけていって，入力部位をk，出力部位をlとすると，その状態方程式は

$$\dot{x}=Ax+e_k u,\quad y=e_l' x \quad \cdots(4.25)$$

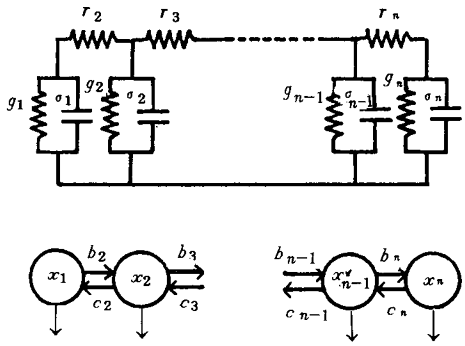


図４－２　カテナリーシステムと等価なＲＣ回路

となる。但し，ここで

$$A=\begin{bmatrix} -a_1 & c_2 & & & & \\ b_2 & -a_2 & c_3 & & & \\ & b_3 & -a_3 & \ddots & & \\ & & b_4 & \ddots & \ddots & \\ & & & \ddots & \ddots & c_n \\ & & & & b_n & -a_n \end{bmatrix} \qquad e_k=\begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \leftarrow k \quad \cdots\cdots\cdots(4.26)$$

であり，かつa_i，b_i，c_iはすべて非負実数でつぎの条件をみたす。

$$a_1 \geqq b_2 \quad , \quad a_n \geqq c_n$$

$$a_k \geqq b_{k+1}+c_k\ , \ k=2,\ 3,\ \cdots,\ n-1 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(4.27)$$

式　4.26　のマトリクスの形で，条件4.27 を満たすマトリクスの全体をC_a^nとくに$b_i, c_i>0$，$i=2,\cdots,n$（したがって$a_i>0$，$i=1,\cdots,n$）のときをC_{a+}^nと表わして 以下の論議を進める。

さて，$A\in C_{a+}^n$なるマトリクスについては，つぎのことがすでに知られている。

［補題４－３－１］[27][29]　式4.26 で与えられる$A\in C_{a+}^n$を考える。このとき，

(i) 固有値$\lambda_i=\lambda_i[A]$，$i=1,\cdots,n$　は非正の実数で互に相異なる。

(ii) 最大固有値が０であるのは式4.27の等号がすべて成立するときである。

この4－3－1と$A\in C_a$なら，一般にその特性多項式はC_{a+}のマトリクスの特性多項式の積で与えられることから，つぎの補題が導かれる。

［補題4－3－2］　式4.26で与えられる$A\in C_a^n$ を考える。このとき

(i)　$\lambda_i[A]\leqq 0$，(ii)　$b_2, \cdots, b_n>0$ ($c_2, \cdots, c_n>0$) ならば，$\lambda_i[A(1, \cdots, n-1)]<0$，($\lambda_i A(2, \cdots, n)<0$) である。

そこで，図4－2のRC回路について考える。但し，図中の$\gamma_i>0$，$g_i\geqq 0$　はコンダクタンス，$\sigma_i>0$　はエラスタンスである。コンデンサの電荷を変数にとると，よく知られているように，その回路方程式は　$\dot{x}=Ax$　で

$$
A=\begin{pmatrix}
-\sigma_1(\gamma_2+g_1) & \sigma_2\gamma_2 & & & \\
\sigma_1\gamma_2 & -\sigma_2(\gamma_2+\gamma_3+g_2) & \ddots & & \\
 & \sigma_2\gamma_3 & \ddots & \ddots & \\
 & & \ddots & \ddots & \sigma_n\gamma_n \\
 & & & \sigma_{n-1}\gamma_n & -\sigma_n(\gamma_n+g_n)
\end{pmatrix}\quad\cdots(4.28)
$$

と与えられ，明らかに$A\in C_{a+}^n$である。逆に，$\dot{x}=Ax$，$A\in C_{a+}^n$ は図4－2の回路で回路定数を　$\sigma_i=(c_i\sigma_{i-1})/b_i$，$i=2, \cdots, n$，$\gamma_i=c_i/\sigma_i$，$i=1, \cdots, n$，$\sigma_1 g_1=a_1-b_2\geqq 0$，$\sigma_n g_n=a_n-c_n\geqq 0$，$\sigma_i g_i=a_i-(c_i+b_{i+1})$，$i=2, \cdots, n-1$ として模擬できる。こうして，$A\in C_{a+}^n$ は図4－2のRC回路と完全に対応づくことがわかる。

したがって，つぎの補題が成立する。

［補題4－3－3］　$A\in C_{a+}$なら　$e_k'(SI-A)^{-1}e_k$　は正実RC駆動点インピーダンス関数であり，かつ　$\lim_{s\to\infty} s\, e_k'(SI-A)^{-1}e_k=1$である。

4－3－1　実現可能な伝達関数

マミラリーシステムと同様に伝達関数$h(s)$に対して

$$h(s)=c\cdot e_k'(SI-A)^{-1}e_k \quad\cdots\cdots\cdots\cdots(4.29)$$

なる　$A\in C_a$（またはC_{a+}）と　$c>0$　があるとき，$h(s)$は　$C_a(C_{a+})$－実現可能と呼ぶことにする。

まず，入出力の部位が等しい場合には，つぎの定理が成立する。

［定理4－3－1］　$h(s)$が$C_a(k, k)$－実現可能な必要十分条件は

(i)　$\lim_{s\to\infty} s\,h(s)=c>0$

(ii)　$h(s)$が正実RC駆動点インピーダンス関数である。

（証明） 必要性： $\lim_{s\to\infty} s h(s) = \lim_{s\to\infty} s c \cdot e_1'(sI-A)^{-1} e_k = c > 0$ から明らかである。いま，$A \notin C_{a+}$として実現できたものと仮定すると，b_i，c_iのうちに零のものがあることになり，それより両端に至るコンパートメントは $e_1'(sI-A)^{-1} e_k$ の値に影響しないことになる。したがって$A \in C_{a+}$としてもよいので，補題４－３－３から(ii)が成立する。

十分性： (i)を満足する正実RC駆動点インピーダンス関数に対しては，それを連分数展開して図４－２のRC回路構成が可能である。実際つぎのような一つの実現が可能である。

$$h(s) = \frac{c}{|s+a_0} + \frac{b_2}{|1} + \frac{c_2}{|s} + \cdots\cdots + \frac{c_n}{|s} \qquad \cdots\cdots(4.30)$$

ここで，$a_0 = c h^{-1}(0)$，$c = \lim_{s\to\infty} s h(s)$，$a_1 = a_0 + b_2$，$a_n = c_n$，$a_k = c_k + b_{k+1}$，$k=2$，$\cdots$，$n-1$である。但し $n = \deg[h(s)]$。

この実現は $C_{a+}(1,1)$，$C_{a+}(n,n)$－実現を意味する。

つぎに，$1 < k < n$なるkに対して$C_a(k,k)$－実現できることを示す。いま，定理の条件を$c=1$として，それを満たす$h(s)$を考えれば，

$$h^{-1}(s) = \underbrace{s + h_1 + \sum_{i=2}^{k} \frac{s h_i}{s+u_i}}_{h_a^{-1}} + \underbrace{\sum_{i=k+1}^{n} \frac{s h_i}{s+u_i}}_{h_b^{-1}} \qquad \cdots\cdots(4.31)$$

と分解できる。ここで，$n = \deg[h]$，h_i，$u_i > 0$，$i=2,\cdots,n$，$h_1 > 0$ である。h_a，h_bもまた正実RC駆動点インピーダンス関数であるから，それぞれ連分数展開によってRC回路が構成できる。それを接続すれば，合成回路は，図４－２のRC回路で $h = (h_a \cdot h_b)/(h_a + h_b)$であるから，$C_{a+}(k,k)$－実現できたことになる。具体的な係数は

$$\left.\begin{aligned}
&h_a^{-1} = s + \frac{c_k}{|1} + \frac{b_k}{|s} + \cdots + \frac{c_2}{|1} + \frac{c_n}{|s+a_0} \\
&h_b^{-1} = \frac{b_{k+1}}{|1} + \frac{c_{k+1}}{|s} + \cdots + \frac{b_n}{|1} + \frac{c_n}{|s} \\
&a_1 = b_2 + a_0, \quad a_n = c_n, \quad a_i = c_i + b_{i+1}, \quad i=2, \ \cdots, \ n-1
\end{aligned}\right\} \qquad \cdots\cdots(4.32)$$

で与えられる。なお，4.32 で得られる実現では $h_a(s)$の分子＝$\det[sI-A(1,\cdots,k-1)]$，$h_b(s)$の分子＝$[sI-A(k+1 \ \cdots \ n)]$が成立する。また，$h(s)$が安定（すべての極が左開半平面内にある）なら $h^{-1}(0) > 0$したがって式(4.30),(4.32)で $a_0 > 0$ となり，ここで実現された$A \in C_{a+}^{n}$の第１列に関する列和は負となる。

［例４－３－１］ $h(s) = \{(s+2)(s+4)\}/\{(s+1)(s+3)(s+5)\}$を $C_{a+}(2,2)$

一実現する。式4.31，4.32によって

$$h_a^{-1} = s + \frac{15}{8} + \frac{3}{4} \cdot \frac{s}{s+2} = s + \frac{21/8 \,\big/}{\big/\, 1} + \frac{4/7 \,\big/}{\big/\, s + 10/7}$$

$$h_b^{-1} = \frac{3}{8} \cdot \frac{s}{s+4} = \frac{3/8 \,\big/}{\big/\, 1} + \frac{4 \,\big/}{\big/\, s}$$

と分解される。したがって求めるC_{a+}マトリクスは

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 21/8 & 0 \\ 4/7 & -3 & 4 \\ 0 & 3/8 & -4 \end{pmatrix}$$

となる。

つぎに，入力がカテナリーシステムの両端のいずれかとして実現できる条件を検討する。この場合，一般性を失うことなく入力端を1番目のコンパートメントとしてもよい。

［定理4－3－2］　次の条件はたがいに等価である。

［A］ $h(s)$が，$1 < \ell \leqq \deg[h]$ なるℓに対して $C_{a+}(\ell, 1)$－実現可能

［B］ (i) $\lim_{s \to \infty} s^{\ell} h(s) = c > 0$

(ii) 適当な $\gamma(s) = \prod_{i=1}^{\ell-1}(s+\alpha_i)$，$\alpha_i > 0$ があって $\gamma(s)h(s)$ が正実RC駆動点インピーダンス関数

［C］ $h(s)$ の分母子の最高次数の係数は正で，

(i) 分母と分子の次数の差がℓ

(ii) 極は原点を含む負の実軸上にあって原点には高々1位

(iii) 零点がある場合，それは負の実軸上で1位であり，極を分離する。

（証明）　［A⇨B］；$h(s) = e_\ell'(sI-A)^{-1}e_1$，$A \in C_a^n$ と実現できたとする。これよりB(i)は明らかである。B(ii)について，いま $b_i = 0$ のものがあるものとすると，それより先のコンパートメントは伝達関数に影響しない。したがって，$b_i > 0$，$i = 2, \cdots, n$ と仮定できる。そこで $\gamma(s) = \det[sI - A(1, \cdots, \ell-1)]$ とすれば，補題4－3－2(ii)からB(ii)が成立する。

［B⇨C］；　Bの(i)，(ii)より明らかである。

［C⇨A］；　$h(s) = q(s)/p(s)$，$p(s) = \prod_{i=1}^{\nu}(s+p_i)^{m_i}$，$q(s) = \prod_{i=1}^{n-\ell}(s+q_i)$，$p_1 < p_2 < \cdots < p_\nu$，$n = \sum_{i=1}^{\nu} m_i$ とする。$\{-p_i\}$の区間でその中に零点$-q_i$を含まない個数θは $\theta = (\nu-1)-(n-\ell)$である。いま，その区間内で $-\gamma_i$ を選ぶ，すなわち $p_i < \gamma_i < p_{i+1}$ とする。そこで，$\gamma(s) = \prod_{i=1}^{\nu}(s+p_i)^{m_i-1}\prod_{i=1}^{\theta}(s+\gamma_i)$ とすると，γhは正実RC駆

動点インピーダンス関数であり，$\deg[\gamma h]=\nu$ となることは容易にわかる。つぎに $k=\theta+1$ として式4.31の分解を行い，$(\gamma h)^{-1}=g_a^{-1}+g_b^{-1}$ とする。但し，g_a の分子$=\prod_{i=1}^{\theta}(s+\gamma_i)$，$g_b$ の分子$=\prod_{i=1}^{n-\ell}(s+q_i)$。この分解にもとづき定理４－３－１の構成法を適用すると，$\gamma h=e_k'(sI-A_2)e_k$，$A_2\in C^{\nu}_{a+}$ となり，明らかに $\det(sI-A_2)=\prod_{i=1}^{\nu}(s+p_i)$，$\det(sI-A_2(k+1\ \cdots\ \nu))=\prod_{i=1}^{n-\ell}(s+q_i)$ が成立する。いま $\prod_{i=1}^{\nu}(s+p_i)^{m_i-1}=\prod_{i=1}^{n-\nu}(s+\beta_i)$ として

$$A=\left(\begin{array}{cccc|c}
-\beta_1 & & & & \\
\beta_1 & -\beta_2 & & & \\
 & \beta_2 & & & \\
 & & & -\beta_{n-\nu} & \\
\hline
 & & & \beta_{n-\nu} & \\
 & & & & A_2
\end{array}\right)\quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(4.33)$$

を構成すれば，$A\in C^n_a$ で求めるものとなることが簡単な計算によって示される。なお，ここで与えた実現は最小実現である。

さて，$h(s)$ が $C_{a+}(\ell,1)$－実現できると，補題４－３－１からその極はすべて１位となる。また，その時には定理４－３－２の構成法から $A\in C_a$ として実現できることもわかる。これより次の系が得られる。

［系］ $h(s)$ が $C_{a+}(\ell,1)$－実現できる必要十分条件は，定理４－３－２の［C］で(ii)を

(ii)′ 極は原点を含む負の実軸上にあって１位

と置きかえたものになる。

［例４－３－２］ $h(s)=(s+1)/\{s(s+2)^3\}$ を $C_a(3,1)$－実現する。

$\gamma(s)=(s+2)^2$ とすると，$\gamma h=(s+1)/s(s+2)$ したがって求めるマトリクスは

$$A=\left(\begin{array}{cc|cc}
-2 & 0 & & \\
2 & -2 & & \\
\hline
 & 2 & -1 & 1 \\
 & & 1 & -1
\end{array}\right)$$

となる。

さて，$A\in C^n_{a+}$ なら，$D=\mathrm{diag}\{1,\ c_2/b_2,\ \cdots,\ c_2\cdots\cdots c_n/b_2\cdots\cdots b_n\}$ として

$DAD^{-1}=A'$ となることから，

$$c\cdot e_l'(sI-A)^{-1}e_1=\tilde{c}\,e_1'(sI-A)^{-1}e_l \quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (4.34)$$

ここで，$\tilde{c}=c\cdot(b_l\cdots b_n/c_l\cdots c_n)$ が成立する。これは $C_{a+}(\ell,1)-$ 実現可能なクラスと $C_{a+}(1,\ell)-$実現可能なクラスは同一で，その条件は上の系を満たすものである。

ところで，C_{a+}より広いクラスC_a について，$C_a(1,\ell)$の実現条件はつぎのようになる。

［定理4－3－3］ つぎの3条件はたがいに等価である。

［A］ $h(s)$が，$1<\ell\leqq\deg[h]$なるℓに対して$C_a(1,\ell)-$実現可能

［B］ (i) $\lim_{s\to\infty}s^l h(s)=\mathrm{const.}>0$

(ii) 適当な$\gamma(s)=\prod_{i=1}^{l-1}(s+\alpha_i)$, $\alpha_1\geqq 0$, α_2, $\cdots$, $\alpha_{l-1}>0$ があって，$\gamma(s)h(s)$ は正実RC駆動点インピーダンス関数としうる。とくに $h(s)$ に重複極があるときは，γh は安定であること。

［C］ $h(s)$の分母子の最高次数の係数は正で，

(i) 分母子の次数の差はℓ

(ii) 極は原点を含む負の実軸上にあって原点に高々1位。

(iii) 零点は，もしあれば負の実軸上にあって1位で，極を分離する。

(iv) 原点に極があり，しかも重複極があるときは，原点の左隣には零点は存在しえない。

（証明） ［A］⇨［B］： $h(s)=e_1'(sI-A)^{-1}e_l$ と実現できたものとする。ここで，$A\in C_a^n$ で，$C_i>0$，$i=2$，$\cdots$，n と仮定できる。定理4－3－2と同様に $\gamma(s)=\det[sI-A(1,\cdots,\ell-1)]$ とすれば，補題4－3－2(ii)と定理4－3－1から［B］の(i)と(ii)の前半が示される。重複極があれば，補題4－3－1(i)からb_2，$\cdots$，b_l のうち零のもの $b_{l_0}=0$がある。すると，$\gamma h=\det[sI-A(\ell_0\cdots\ell-1)]\det[sI-A(\ell+1,\cdots n)]/\det[sI-A(\ell_0\cdots n)]$ となり，補題4－3－2の(ii)から γh は安定となる。

［B］⇨［C］： 明らかである。

［C］⇨［A］： $h(s)$の極が1位のとき，定理4－3－3の条件は，定理4－3－2の系の条件と一致するので，$A\in C_{a+}^n$があって$C_{a+}(\ell,1)-$実現できる。

つぎに $h(s)$ に重複極がある場合の考察を加える。定理4－3－2と同様に，

$\gamma(s)=\prod_{i=1}^{\nu}(s+p_i)^{m_i-1}\cdot\prod_{i=1}^{\theta}(s+\gamma_i)$ とする。ここで，とくに $-\gamma_i$ として，極と極のなす区間の右側の極を選ぶと，γhは正実RC駆動点インピーダンス関数であり，かつ，$\deg[\gamma h]=\nu-\theta=n-\ell+1$ が成立し，しかも条件［C］の(iv)からγhは安定となる。

そこで，定理4－3－1の実現法によって $\gamma h=e_1'(sI-A_2)^{-1}e_1$，$A_2\in C_{a+}^{n-l+1}$と実現すると，$\det(sI-A_2)=\prod_{i=1}^{\nu}(s+p_i)/\prod_{i=1}^{\theta}(s+\gamma_i)$，$\det[sI-A_2(2\ \cdots\ n-l+1)]$

$= \prod_{i=1}^{n-\ell} (s+q_i)$ で，A_2 の第1列和は負となる。いま $\prod_{i=1}^{\nu} (s+p_i)^{m_i-1} \cdot \prod_{i=1}^{\theta} (s+\gamma_i)$
$= \prod_{i=1}^{\ell-1} (s+\beta_i)$，$\beta_1 \geqq 0$，$\beta_2, \cdots, \beta_{\ell-1} > 0$ とおき，$\beta_{\ell+1} > 0$ を十分小さくとって

$$A = \left[\begin{array}{cccc:c} -\beta_1 & \beta_2 & & & \\ & -\beta_2 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & \beta_{\ell-1} & \\ & & & -\beta_{\ell-1} & \beta_\ell \\ \hdashline & & & & A_2 \end{array}\right] \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (4.35)$$

とすれば，$A \in C_a^n$ で求めるマトリクスとなる。

なお，ここで求めた実現は最小実現である。また，$C_a(\ell, 1)$と $C_a(1, \ell)$ －実現可能のクラスを比較すると，前者の方が後者より広いクラスであることがわかる。事実，先の例題4－3－2の伝達関数は $C_a(1, \ell)$ －実現できない。

つぎに，入出力部位を限定しない一般的なカテナリーシステムの性質について述べる。

［定理4－3－4］$h(s)$が C_a－実現可能である必要十分条件は，$h(s)$の 分母子の最高次数の係数は正で，

(i) 分母子の次数の差は1に等しいか，またはそれより大。

(ii) 極は原点を含む負の実軸上にあって，原点には高々1位。

(iii) 零点は極と極の間の負の実軸上にあって高々2位，かつ極と極の間に重複度を含めて高々2個。

(iv) 極と極の間に2個の零点があれば，その区間は零点を含まない区間を分離する。なお重複極も零点を含まない区間に数える。

（証明） 必要性： $k=\ell$ や $k, \ell=1$ の時は，これまでの結果より明らかである。したがって $h(s)=e_\ell'(sI-A)^{-1}e_k$，$1<\ell<k$で $A(1\cdots\ell)$，$A(k\cdots n) \in C_{a+}$，$C_{\ell+1}, \cdots C_k > 0$ と仮定できる。そこで，$g(s)=\det[sI-A(1\cdots\ell-1)]/\det[sI-A(1\cdots k-1)]$，$m=k-\ell$ とすると，$g(s)$ は $C_a(m, 1)$－実現可能，$\lim_{s\to\infty} s g^{-1} h = 1$ で，$g^{-1}h$ が正実RC駆動点インピーダンス関数となることは容易に示される。いま，(ii)または(iii)が成立しないものとすると，$\lim_{s\to\infty} s g^{-1} h = 1$ および $g^{-1}h$ が正実RC駆動点インピーダンス関数であることから，$g(s)$ には極を分離しない零点が存在することになり，g が $C_a(m, 1)$－実現可能であることに反する。したがって(ii)，(iii)が成立する必要がある。(i)が成立することは補題4－3－2より導かれる。

十分性： 定理の条件を満たす $h(s)=g(s)/p(s)$，$p(s)=\prod_{i=1}^{\nu}(s+p_i)^{m_i}$，
$0 \leqq p_1 < p_2 < \cdots < p_\nu$，$\sum_{i=1}^{\nu} m = \deg[h]=n$，$q(s)=\prod_{i=1}^{q}(s+q_i)$，$q_i > 0$ を考える。

極$[-p_{i+1}, -p_i]$の区間をI_iとして，零点を含まない区間の数をθ，零点を2個含む区間の数をσとすると，$\theta=\nu-1-q+\sigma$ が成立する。零点を含まない区間として重複極も入れると，その総数θ'は $\theta'=n-\nu+\theta$ で与えられる。

$q=n-1$ の場合は，もし零点を2個含む区間があったとすると，$1\leqq\sigma\leqq\theta'-1$，したがって $n-q\geqq 2$ となり矛盾するから$\sigma=0$である。$\sigma=0$なら$0\leqq\theta=\nu-n\leqq 0$ であるから，$\theta=0$，$\nu=n$であり，定理4－3－4の条件は定理4－3－1の条件に一致する。したがって$C_{\alpha+}(1,1)$－実現可能となる。

$q\leqq n-2$ の時はつぎのように考えることができる。いま $n(s)=\prod_{i=1}^{\sigma}(s+q_i)$，$d(s)=\prod_{i=1}^{\nu}(s+p_i)^{m_i-1'}\prod_{i=1}^{\theta}(s+\gamma_i)$ として $\tilde{g}(s)=n(s)/d(s)$ とする。ここで，$\prod_{i=1}^{\sigma}(s+q_i)$ は零点を2個含む区間があるとき，その一方を取り出したもので，$\prod_{i=1}^{\theta}(s+\gamma_i)$ は零点を含まない区間$[-p_{i+1}, -p_i]$の右側の極$-p_i$ を取り出したものとする。ここで，$\deg[\tilde{g}(s)]=n-\nu+\theta=\theta'$ で，$\tilde{g}(s)$ は $C_\alpha(n-q-1, 1)$－実現可能。また，$\deg[\tilde{g}^{-1}h]=\nu-\theta$ で $\tilde{g}^{-1}h$ はRC駆動点インピーダンス関数，$\lim_{s\to\infty} s\tilde{g}^{-1}h=1$ であることは容易に示しうる。$\tilde{g}^{-1}h$ が安定なら $g=\tilde{g}$ とする。$\tilde{g}^{-1}h$ が原点に極をもてば $p_1=0$ で$\tilde{g}(s)$ は安定，しかも$I_1=[-p_2, -p_1]$ にはhの零点が1個のみ存在することになる。その零点を $-\alpha<0$ として $g(s)=(s+\alpha)\tilde{g}/s$ とすると，$\deg[g]=\theta'+1$ で g は$C_\alpha(n-q-1, 1)$－実現可能，$\deg[g^{-1}h]=\nu-\theta-1$ で $C_\alpha(1, 1)$－実現可能となる。いずれの場合も，$\deg[g^{-1}h]=n_2$，$\deg[g]=n_1$ とすると，$n_1+n_2=n$ で $g=ce_l'(sI-A_1)^{-1}e_{n_1}$, $A_1\in C_\alpha^{n_1}$，$g^{-1}h=e_1'(sI-A_2)^{-1}e_1$，$A_2\in C_{\alpha+}^{n_2}$ と実現され，A_2 の第1列の列和は負とできる。そこで，$k=n_1+1$，$\ell=(g$の分子の次数$)+1$，また，βを十分小さくして

$$A=\left[\begin{array}{c|c} A_1 & \beta \\ \hline & A_2 \end{array}\right] \quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(4.36)$$

とすると，$A\in C_\alpha^n$ で求める実現となる。なお，ここで求めた実現も最小実現である。

［例4－3－3］ $h(s)=\{(s+0.5)(s+2)^2\}/\{s(s+1)(s+3)^2\}$ は C_α－実現不可能である。

定理4－3－4の(iv)を満足していないから実現できない。

［例4－3－4］ $h(s)=(s+2)^2/\{s(s+1)(s+3)^2\}$ は C_α－実現可能である。

定理4－3－4の構成法にしたがうと，$\tilde{g}(s)=(s+2)/\{s(s+1)(s+3)\}$，$\tilde{g}^{-1}h=(s+2)/\{(s+1)(s+3)\}$ となり，$\tilde{g}^{-1}h$ は安定である。そこで

$$[\widetilde{g}^{-1}h]=s+1.5+\frac{0.5\,/}{/\,1}+\frac{2\,/}{/\,s},\quad \gamma(s)=s+0.5 \text{ として}$$

$$[\gamma\widetilde{g}]^{-1}=s+\frac{2.5}{s}\,\frac{s}{s+0.5}+\frac{1}{1.5}\,\frac{s}{s+2}$$

$$=\left(s+\frac{2.5/3\,/}{/\,1}+\frac{0.5\,/}{/\,s}\right)+\left(\frac{1/1.5\,/}{/\,1}+\frac{2\,/}{/\,s}\right)$$

よって求めるマトリクスは，$0<\beta\leqq 1.5$ として

$$A=\left(\begin{array}{ccc:cc}
-2 & 2/3 & 0\ \ 0 & & \\
0 & -3/2 & 1/2 & & \\
0 & 5/6 & -1/2 & \beta & \\
\hdashline
 & & & -2 & 2 \\
 & & & 1/2 & -2
\end{array}\right)$$

となる。

この定理は入出力データから伝達関数が求まった場合，それがカテナリー実現できるかどうか判断できることを示している。但し，この際カテナリー以外の実現ができないことを意味するのではなく，他の等価なシステムによる実現の可能性がある。

そこで，つぎに４－２で述べたマミラリーシステムとカテナリーシステムのシステム論的な対応づけを行っておくことにする。

４－２，４－３の結果よりつぎの定理が導かれる。

［定理４－３－５］

$1°\ M_a(k,k)=C_a(k,k)$,　　$2°\ M_a(1,k)=C_a(2,1)$

$3°\ M_a(k,1)=C_a(1,2)$,　　$4°\ C_a(1,3)\subset M_a(\ell,k)\subset C_a(3,1)$

$\ell\neq k,\quad \ell,k\neq 1$

また M_{a+}，C_{a+} に限ると，

(i) $M_{a+}(k,k)=C_{a+}(k,k)$,　(ii) $M_{a+}(1,k)=M_{a+}(k,1)=C_{a+}(2,1)=C_{a+}(1,2)$

(iii) $C_{a+}(1,3)=C_{a+}(3,1)=M_{a+}(\ell,k)$,　$\ell\neq k$,　$\ell,k\neq 1$

したがって，マミラリーシステムの伝導関数はすべてカテナリーシステムで実現できることがわかる。この意味でカテナリーシステムはマミラリーシステムより一般的であるといえる。

４－４　より一般的なコンパートメントシステムの実現条件[36)]

４－２，４－３では実用性は高いが，しかし特殊なコンパートメント配列をもつマミラリー，

カテナリーシステムについて述べた。ここでは入出力部位が等しい場合について，より一般的なコンパートメントシステムの実現条件について考察を加えることにする。

以下の論議を進めるためにコンパートメントマトリクスと関係の深いM（M_0）マトリクスの性質について触れておく。[37]

Mマトリクスとは非対角成分が非正の正方マトリクスで，つぎのいずれかを満足するものをいう。

(a) $Re\lambda_i[A]>0$

(b) 左隅主座行列式が正

(c) 適当な正の対角マトリクスDがあって $e'DA>0$, $e=\mathrm{col}[1,1\ \cdots\ ,1]$

(d) 適当な$x>0$があって，$Ax>0$ （$x'A>0$）

(e) $A^{-1}\geqq 0$

M_0 マトリクスとは非対角成分が非正の正方マトリクスで，つぎの(a), (b)いずれかを満足するものをいう。

(a)′ $A+\varepsilon I\in M$, $\forall\varepsilon>0$

(b)′ $Re\lambda_i[A]\geqq 0$

また，M_0 マトリクスは，つぎのような性質をもっている。

(c)′ 分解不能であれば，適当な$x>0$があって $Ax\geqq 0$, （$x'A\geqq 0$）

(d)′ 分解不能なら，主座行列はMマトリクス

このようなM（M_0）マトリクスについては，コンパートメントマトリクスとつぎのような関係が得られる。

［補題４－４－１］ (i) $A\in C$ なら $-A\in M_0$，逆にAが分解不能で $-A\in M_0$なら，適当な対角マトリクスDがあって $DA\in C$ (ii) $A\in C$かつ漸近安定（$Re\lambda_i[A]<0$）なら $-A\in M$, 逆に $-A\in M$ なら適当な正の対角マトリクスDがあって $DA\in C$

（証明） (i) $A\in C$ なら補題４－１－２より $Re\lambda_i[A]\leqq 0$ これと(b)′より$-A\in M_0$，逆にAが分解不能で $-A\in M_0$なら(c)′より$x>0$, $x'A\geqq 0$, したがって$D=\mathrm{diag}\{x_1\ \cdots\ x_n\}$ とすればよい。(ii)も全く同様である。

以下の議論とは直接的に関係がないが，コンパートメントシステムの一つの特徴である次数の性質を導いておく。

［補題４－４－２］ $A\in C$で分解不能とする。$\forall b$, $c\geqq 0$に対して $\hat{g}(s)=c'(sI-A)^{-1}b$ は最大のAの実固有値$\lambda_{\max}\leqq 0$をその極としてもつ。すなわち，右辺の分母子で（$s-\lambda_{\max}$）という共通因子は生じない。

（証明） 補題４－１－３の(ii)から $Av=\lambda_{\max}v$, $v>0$, 同様に $u'A=\lambda_{\max}u'$, $u>0$なる固有ベクトルu, $v>0$が存在する。従って，$u'b\neq 0$, $c'v\neq 0$となり，これが$\lambda_{\max}$に対するモードは可制御かつ可観測であることを示していることから成立する。

さて，一般性を失うことなく，入出力の位置として第１番目のコンパートメントが採用できる。この時の駆動点における入出力応答は，$\dot{x}=Ax+e_1u_1$，$y=e_1'x$ にしたがい，零状態におけるインパルスレスポンスは $h(t)=e_1'\exp[At]e_1$，伝達関数は $\hat{h}(s)=e_1'(sI-A)^{-1}e_1$ と与えられる。ここで $e=\mathrm{col}[1,0,\cdots,0]$ なる単位ベクトルである。これらは$A\in C$と言うことから，次の性質を満たす。

［定理４－４－１］ $A\in C$，$\hat{h}(s)=e_1'(sI-A)^{-1}e_1$，$h(t)=e_1'\exp[At]e_1$ とすると，$\hat{h}(s)$ は真にプロパーな有理関数で

(i) $\hat{h}(s)$ は正実関数

(ii) $h(0)\geqq h(t)\geqq 0$，$\forall t\geqq 0$

(iii) $\dot{h}(0)\leqq 0$ ($\deg[\hat{h}(s)]\geqq 2$ なら $\dot{h}(0)<0$)

（証明） まず，Aが分解不能と仮定できることに注意する。もし分解可能ならある順列マトリクスPによって式４．１のごとく分解できる。すると$Pe_1=e_k$となるが，もし番号kがA_2に属するものであれば(e_k, A) は不可観測で，$e_1'(sI-A)^{-1}e_1=e_k'(sI-A_1)^{-1}e_k$ となり，はじめからA_1 について考えればよいことになる。全く同様にkがA_2 に属しておれば，(A, e_k) は不可制御となり，はじめからA_2 を考えればよいことになる。このような分解を繰り返すことによって，いずれはある分解不能マトリクス$\tilde{A}$とある単位ベクトルe_l について，$\tilde{h}(s)=e_l'(sI-\tilde{A})^{-1}e_l$ となる。こうして，はじめからAが分解不能と仮定できるから，補題４－１－５によって４．２式が成立する。ここでVの第１成分は１と仮定できるので，$Ve_1=e_1$ も成立する。この二つの式は $\hat{h}(s)$が正実関数であることを示している。[38] (ii)も式４．２ を用いて示される。いま$E=x'Vx$ とすると，$\dot{x}=Ax$, $x(0)=e_1$ の解に沿ってEを微分すると，４．２式から$\dot{E}\leqq 0$，これは$E(0)\geqq E(t)\geqq|x_1(t)|^2=|h(t)|^2$，一方 $E(0)=h^2(0)$ であるから(ii)の不等式が導かれる。(iii)は $\dot{h}(0)=e_1'Ae_1=-a_{11}\leqq 0$で，もし $\deg[h]\geqq 2$ で $a_{11}=0$ なら$A\in C$と言うことからAの第１列は０ベクトルである。するとAが分解不能と言うことに反する。

以上は，入出力部位が等しいコンパートメントシステムとして実現できるための必要条件である。十分条件としては，すでに述べたように$h(s)$が正実RC－駆動点インピーダンス関数 の性質をもっていれば，入出力部位が等しいコンパートメントシステムとして実現できることが知られている。また，この時必要で最小のコンパートメント数は伝達関数の次数に一致することも分っている。

以下では，実現可能な伝達関数のクラスを正実RC－駆動点インピーダンス関数より広げることを考える。そのために次の結果を導いておく。

まず，真にプロパーな有理関数 $\hat{g}(s)$ がある適当な$-A\in M$と $c\geqq 0$，$b\geqq 0$ に対して

$$\hat{g}(s)=c'(sI-A)^{-1}b \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (4.37)$$

となるとき，$\hat{g}(s)$ はM－実現可能と言うことにする。

［定理４－４－２］ $\widehat{h}(s)$ が，入出力部位が等しいコンパートメントシステムとして実現できるための必要十分条件は

$$\widehat{h}^{-1}(s)=s+a-\widehat{g}(s) \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots (4.38)$$

と分解したとき（ただし，$\widehat{g}(s)$ は真にプロパーとする）

(i) $a \geqq \widehat{g}(0) \geqq 0$ で

(ii) $\widehat{g}(s)$ がM－実現可能であること

（証明） 必要性： $\widehat{h}(s)=e_1'(sI-A)^{-1}e_1$, $A \in R^{N\times N}$, $A \in C$ とする。明らかに

$$\widehat{h}^{-1}(s)=s+a_{11}-c'(sI-A_2)^{-1}b \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots (4.39)$$

が成立する。[39] ここに $c=\mathrm{col}\,[a_{12}\ \cdots\ a_{1N}]$, $b=\mathrm{col}\,[a_{21}\ \cdots\ a_{N1}]$, A_2はAから第１行１列を取り除いた $(N-1)\times(N-1)$ マトリクスである。式４．３９の分解が一意的であるから，$a=a_{11}$, $\widehat{g}(s)=c'(sI-A_2)^{-1}b$ である。さて$-A$は補題４－４－１から$-A \in M_0$，しかもAは分解不能と仮定できるから，M_0 マトリクスの性質$(d)'$から $-A_2 \in M$ となる。これより(ii)が成立する。Mに関する(e)から$(-A_2)^{-1} \geqq 0$で $\widehat{g}(0) \geqq 0$ は成立する。また $a-\widehat{g}(0)$ $=\lim_{s\to\infty}\widehat{h}^{-1}(s) \geqq 0$ は定理４－４－１の(i)から導かれる。

十分性： $\widehat{g}(s)=c'(sI-A_2)^{-1}b$, $c \geqq 0$, $b \geqq 0$, $-A_2 \in M$ と実現する。そこで

$$\widetilde{A}=\begin{pmatrix} -a & c' \\ b & A_2 \end{pmatrix} \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots (4.40)$$

とすれば，$-\widetilde{A} \in M_0$ となることが次のようにして示される。それは任意の$\varepsilon>0$に対して，式4.40 のaを $a+\varepsilon$ と置き換えたマトリクスについては，$-A_2 \in M$であり，行列式$=a-c'(-A_2)^{-1}b+\varepsilon \geqq \varepsilon > 0$ であることから，Mの性質(b)よりMマトリクスとなる。従って$-\widetilde{A}+\varepsilon I$ もMマトリクスとなるから(a)より $-\widetilde{A}=M_0$ となる。明らかに $\widehat{h}(s)=e_1'(sI-\widetilde{A})^{-1}e_1$ が成立するので，残る問題は $\widetilde{A} \in C$ であるかどうかである。必要なら４．１７を４．１式のごとく分解して，$\widetilde{A}$をはじめから分解不能と仮定できる。すると補題４－４－１の(i)から適当な正の対角マトリクスDがあって，$D\widetilde{A} \in C$，すなわち $D\widetilde{A}D^{-1} \in C$。$D$の第１成分を１として $D\widetilde{A}D^{-1}=A \in C$ とすると，$e_1'(sI-A)^{-1}e_1=e_1'D(sI-\widetilde{A})D^{-1}e_1=\widehat{h}(s)$。

この結果は，伝達関数の次数を一つ落して実現問題を考察できることを示している。すなわち一つ次数の低い有理関数のM－実現可能問題を考察すれば十分であることになる。

つぎに，M－実現可能の一つの十分条件を与える。

［定理４－４－３］ $\widehat{g}(s)$ を真にプロパーな有理関数で，しかもその極は負の実軸上にあり，

$$\widehat{g}(s)=\frac{c_1}{s+\delta_n}+\frac{c_2}{(s+\delta_n)(s+\delta_{n-1})}+\cdots+\frac{c_n}{(s+\delta_n)(s+\delta_{n-1})\cdots(s+\delta_1)} \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots (4.41)$$

$c_1 \geqq 0 \cdots\cdots\cdots c_n \geqq 0$ と分解できれば，$\hat{g}(s)$ はM－実現可能である。

（証明）

$$A=\begin{pmatrix} -\delta_n & & & & \\ 1 & -\delta_{n-1} & & & \\ & 1 & \ddots & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & 1 & -\delta_n \end{pmatrix} \quad b=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \quad c'=[\,c_1 \ c_2 \cdots \ c_n\,] \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (4.42)$$

とすれば，これが一つの実現になっていることは真接 $c'(sI-A)^{-1}b$ を計算することによってチェックできる。

［系］ $\hat{g}(s)$ を真にプロパーな有理関数で，その極は負の実軸上にあり１位とする。すなわち，部分分数展開によって，

$$\hat{g}(s)=\frac{h_1}{(s+\delta_1)}+\frac{h_2}{(s+\delta_2)}+\cdots+\frac{h_n}{(s+\delta_n)} \qquad \delta<\delta_1<\delta_2<\cdots\cdots<\delta_n \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (4.43)$$

と与えられ，しかも

(i) $c_1=h_1+h_2+\cdots+h_n \geqq 0$

(ii) $c_2=h_1(\delta_n-\delta_1)+h_2(\delta_n-\delta_2)+\cdots+h_{n\,1}(\delta_n-\delta_{n-1}) \geqq 0$

(iii) $c_3=h_1(\delta_n-\delta_1)(\delta_{n-1}-\delta_1)+h_2(\delta_n-\delta_2)(\delta_{n-1}-\delta_2)+\cdots$

$+h_{n\,2}(\delta_n-\delta_{n-2})(\delta_{n-1}-\delta_{n-2}) \geqq 0$

$\vdots$

(n) $c_n=h_1(\delta_n-\delta_1)(\delta_{n-1}-\delta_1)\cdots(\delta_2-\delta_1) \geqq 0$

が成立するから，M－実現可能で，一つの実現として 4.19 が与えられる。

以上の定理４－４－３およびその系による実現では deg［$\hat{g}(s)$］がその実現に必要なコンパートメント数になっている。

さて，一般に真にプロパーなRC－駆動点インピーダンス関数$\hat{h}(s)$では，$\hat{h}^{-1}(s)$を式４．38 の形に分解すると，$\hat{g}(s)$ も正実RC－駆動点インピーダンス関数となる。したがって式 4.43 の如く部分分数展開すると，$h_i>0 \quad i=1,2,\cdots,n$ で，系の条件(i)～(n)が自動的に成立する。従って$\hat{g}(s)$ はM－実現可能となり，しかも $\hat{h}^{-1}(0)=a-\hat{g}(0) \geqq 0$ ということから定理４－４－２によってコンパートメントシステムの入力と出力が等しい場合の伝達関数として実現できることになる。この場合，係数マトリクスは４．44式（次頁掲載）なる形になり，カテナリー構造とマミラリー構造の両方の特徴をもったマトリクスとなる。

以上，正実RC－駆動点インピーダンス関数よりは一般的で，しかも最小実現の次数が伝達関数の次数に等しくなるといったある伝達関数のクラスが存在することを示した。

$$A=\begin{bmatrix} * & * & \cdots\cdots & * \\ * & * & & \\ 0 & & & \\ \vdots & & & \\ 0 & & * & * \end{bmatrix} \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (4.44)$$

4－5　最小実現について[37)]

実現可能条件が一般的には，まだ明確になっていないのと同様に，最小実現に関する性質も明確になっていない。ただ伝達関数の次数が低い場合については，その性質，とくに最小実現の次数はつぎのようにして明確にできる。そして一般には実現可能な有理関数は，かならずしもその次数に等しい次元でコンパートメント実現できるとは限らないことを示す。

［定理４－５－１］　$\hat{h}(s)$を実現可能とする。$\deg[\hat{h}(s)]\leqq 3$　であれば，最小実現の次数は$\deg[\hat{h}(s)]$に等しい。またその時，実現可能の必要十分条件はつぎのように与えられる。

(a)　$\deg[\hat{h}(s)]=1$：　$\hat{h}^{-1}(s)=s+a,\quad a\geqq 0$

(b)　$\deg[\hat{h}(s)]=2$：　$\hat{h}^{-1}(s)=s+a-\dfrac{h}{s+\delta},\quad \delta,\ h>0,\quad a-\dfrac{h}{\delta}\geqq 0$

(c)　$\deg[\hat{h}(s)]=3$：　$\hat{h}^{-1}(s)=(s+a)-\left[\dfrac{h_1}{s+\delta_2}+\dfrac{h_2}{(s+\delta_1)(s+\delta_2)}\right]$

$$h_1\geqq 0,\quad h_2>0,\quad 0<\delta_1\leqq\delta_2,\quad a\geqq\frac{h_1}{\delta_2}+\frac{h_2}{\delta_1\delta_2}$$

（証明）　$\deg[\hat{h}(s)]=1$　のとき(a)であることは明らかである。$\deg[\hat{h}(s)=2,\ 3$　の場合を示す。定理４－４－２から$\hat{h}^{-1}(s)=s+a-\hat{g}(s)$と分解したとき，$\deg[\hat{g}(s)]=1$，２として　$\hat{g}(s)$がM－実現可能の必要十分条件を導けばよい。$\deg[\hat{g}(s)]=1$　のとき，$\hat{g}(s)=h/s+\delta,\ h>0,\ \delta>0$が$M$－実現可能の必要十分条件であることは明らかである。$\deg[\hat{g}(s)]=2$　の場合を示す。$\hat{g}(s)$がM－実現可能なら，$g(t)=L^{-1}[\hat{g}(s)]\geqq 0$，$t>0$であることから，$\hat{g}(s)$　の極は負の実軸上になくてはならない。従って　$\hat{g}(s)=(k_1s+k_2)/(s+\delta_1)(s+\delta_2)$，　$0<\delta_1\leqq\delta_2$　と表わされる。さて，

$$g(t)=\begin{cases}\dfrac{k_2-k_1\delta_1}{\delta_2-\delta_1}e^{-\delta_1 t}-\dfrac{k_2-k_1\delta_2}{\delta_2-\delta_1}e^{-\delta_2 t} & (\delta_1<\delta_2)\\ k_1e^{-\delta t}+(k_2-k_1\delta)\,t\,e^{-\delta t} & (\delta_1=\delta_2=\delta)\end{cases}\qquad\cdots\cdots\cdots(4.45)$$

であり，$\hat{g}(t) \geqq 0$，$t \geqq 0$ から $k_1 \geqq 0$，$k_2 - k_1\delta_1 > 0$ でなくてはならない。そこで，$h_1 = k_1 \geqq 0$，$h_2 = k_2 - k_1\delta > 0$ とおくと

$$\hat{g}(s) = \frac{h_1}{(s+\delta_2)} + \frac{h_2}{(s+\delta_1)(s+\delta_2)}, \quad h_1 \geqq 0,\ h_2 > 0 \quad \cdots\cdots (4.46)$$

と与えられる。こうして $\hat{g}(s)$ が M－実現可能の必要条件として式 4.46 が導かれた。逆に，$\hat{g}(s)$ が式 4.46 で与えられれば M－実現可能なのは定理 4－4－3 から分る。こうして(c)が示される。このいずれも実現するのに deg $[\hat{h}(s)]$ に等しい個数のコンパートメントでよいことは定理 4－4－3 の実現法を採用すれば明らかである。

なお，この定理の(b)の条件は，$\hat{h}(s)$ が RC－駆動点インピーダンス関数であることと等価である。また，(c)の条件は Shoenfeld[40] が入出力部位が等しい場合，3 コンパートメントシステムの伝達関数が満たすべき必要十分条件として導いたものと一致している。しかし，この定理の主張は，deg $[\hat{h}(s)] = 3$ の実現可能な $\hat{h}(s)$（何次のコンパートメントで実現されるかは問わないで）は，それを実現するのに 3 コンパートメントで十分であることを示している点である。

以上で deg $[\hat{g}(s)] \leqq 2$ の場合の M－実現可能の必要十分条件が明らかにされたが，deg $[\hat{g}(s)] \geqq 3$ になると，その具体的な表現は未だ得られていない。ただ deg $[\hat{g}(s)] = 3$ の場合について，次の結果が示される。

［補題 4－5－1］

$$\hat{g}(s) = \frac{K_1 s + K_2}{(s+\lambda_1)\{(s+\lambda_1+\rho)^2 + \omega^2\}} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (4.47)$$

が 3 次の M マトリクスで M－実現可能であるための一つの条件として

$$\left| \frac{\omega}{\rho} \right| \leqq \frac{1}{\sqrt{3}}$$

がある。

（証明）　これは $(s+\lambda_1) = p$ とおいて，$p\{(p+\rho)^2 + \omega^2\} = \det[(p-\lambda_1)I - A]$

より　　$2\rho = \mathrm{trace}[A] - 3\lambda_1$，　$\rho^2 + \omega^2 = 3\lambda_1^2 - 2\lambda_1 \mathrm{trace}[A] + \Sigma \Delta i$

が導かれるので，

$$a_{11} + a_{22} + a_{33} = 2\rho + 3\lambda_1,\ a_{11}a_{22} + a_{22}a_{33} + a_{33}a_{11} \geqq \rho^2 + \omega^2 + 3\lambda_1^2 + 4\rho\lambda_1$$

が成立しなければならない。これらが a_{11}，a_{22}，$a_{33} \geqq 0$ として矛盾がないためには $\omega/\rho \leqq 1/\sqrt{3}$ が必要である。ここで Δi は 2 次の主座行列式である。

この結果を用いると，最小実現の次数 $\neq$ deg $[\hat{h}]$ が成立する例が構成できる。

［例4－5－1］

$$\hat{h}(s)=\frac{s^3+5s^2+9s+5}{s^4+7s^3+19s^2+23s+9}$$

はC実現可能な伝達関数である。それは$A\in C$として

$$A=\begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

を採用すれば，確かに実現できている。ただし$A\in R^{5\times 5}$ である。一方

$$\hat{h}^{-1}(s)=(s+2)-\frac{1}{(s+1)\{(s+2)^2+1\}}$$

であるから，補題4－5－1によって上式第2項は3×3のM－マトリクスでは実現できない。すなわち，$\hat{h}(s)$は4×4のコンパートメントマトリクスでは実現できない。

［例4－5－2］　3次のマトリクスでM－実現可能であるためには　$c'\,\mathrm{adj}(sI-A)b=b_0s^2+b_1s+b_2$　の各係数b_0，b_1，b_2は非負実数でなくてはならないことが，実際にそれを計算することによって示されるので，3次の $\hat{g}(s)$の分子多項式の各係数も非負実数であることが必要である。これを用いると $\hat{g}(s)$が負の極だけからなる場合にも，最小実現の次数が$\deg[\hat{g}(s)]$に一致しない例が作られる。

いま

$$\hat{g}(s)=\frac{0.3s^2-0.6s+31.1}{(s+1)(s+5)(s+9)}=\frac{1}{s+1}-\frac{2.6}{s+5}+\frac{1.9}{s+9}+\frac{0}{s+18}$$

とする。$\deg[\hat{g}(s)]=3$　で，うえに述べた理由から3次のM－マトリクスでは実現できない。しかし，定理4－4－3の系による構成法により

$$A=\begin{pmatrix} -18 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -9 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}\qquad b=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\qquad c'=[\,0.3\quad 0.3\quad 0.8\quad 544\,]$$

として，4次でM－実現可能であることがわかる。

これは入出力部位が等しい場合でも4次の伝達関数のうちに最小実現の次数が5であるものが存在することを示している。

4－6　小　　　括

実現可能条件については，いまなお一般的な必要十分条件は得られていないが，本章では，医学的に頻用されるマミラリー，カテナリーシステムについて，新しい知見を加えた必要十分条件を示した。また，入出力が等しい場合のコンパートメントシステムの実現問題をそれと等価で次数がそれよりも１つ少ないM－実現可能問題に変更することによってより広い十分条件を提示した。さらに最小実現の次数は，必ずしも伝達関数の次数に一致しないことを二つの具体的な例を示すことによって明らかにした。

第五章　コンパートメントアナリシスの医学応用

生体内の臓器や組織の機能を知るためには，生体のふるまいを直接観測するのも一方法ではあるが，既知の入力を加えた場合の応答（出力）から生体内部の状態を推察することも多い。とくに循環や排泄に関する臓器機能を把握するためには，対象となる物質を入力して，その応答を観測することが多い。たとえば，腎機能を表す指標として重要である Van Slyke のクリアランスの概念，色素やRIを用いた心拍出量や脳血流量の推定などは，いずれも入出力応答を解析しているものである。

このような生体解析に対してコンパートメントアナリシスは理論的な背景を与えるものであり，医学分野では，臓器機能や局所血液測定，薬剤の体内動態解析などに広く用いられているほか，経過のシステム論的な解析[41]にも応用可能な方法と考えられている。以下筆者らの具体的な臨床応用結果について述べることにする。

5－1　PSP試験のコンパートメントアナリシス[42]

まずコンパートメントアナリシスの臨床応用の一例として，日常ルーチンに行われる腎機能検査であるＰＳＰ試験について考察を加えてみよう。

ＰＳＰ試験の標準的方法は６㎎のＰＳＰを瞬時に静脈内に注入，以後経時的に尿中排泄量を測定するものであり，尿中排泄量の多寡（多くは15分間の排泄量で評価する）によって腎機能の程度を推定するものである。この際ＰＳＰの体内動態は，すべての症例で等しいとの仮定がおかれる。そこで，このような仮定の妥当性を検討し，さらにＰＳＰの経時排泄量を測定することによってより多くの情報の抽出が可能ではないかと考えて，つぎのようなコンパートメントアナリシスを行った。

すなわち，健常人，腎疾患，肝疾患患者についてＰＳＰ試験を実施し，経時的尿中ＰＳＰ排泄量を測定した。ついで，これより体内残存率を計算して指数関数の同定を行うと，ほとんど例外なく２項の指数関数の和で表わされることが明らかになった。(図５－１)。 したがって，これらの結果よりＰＳＰ体内動態のモデルとして図５－２のようなコンパートメントシステムが考えられる。このようなモデルにおいて血液相および第２分布相におけるＰＳＰ量を $Q_1(t), Q_2(t)$, 血液相から腎へ排泄される率をk_1，血液相から第２相への移行率をk_2，その逆方向をk_3 とすれば，

$$\frac{dQ_1}{dt} = -(k_1+k_2)Q_1(t)+k_3Q_2(t)$$
$$\frac{dQ_2}{dt} = k_2Q_1(t)-k_3Q_2(t) \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots (5.1)$$

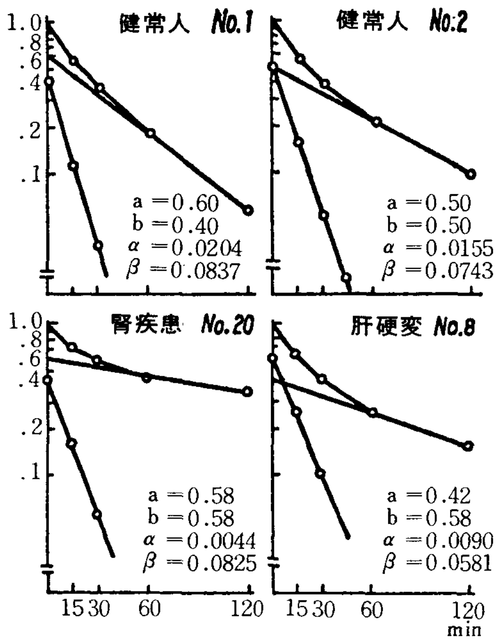


図5－1　健常人，腎疾患，肝硬変例におけるPSP体内残存率のコンパートメントアナリシス
$(Q_1(t)+Q_2(t)=ae^{-\alpha t}+be^{-\beta t})$

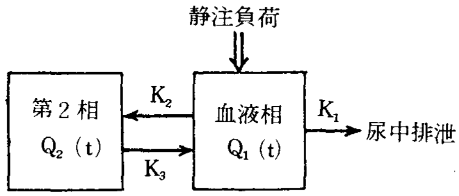


図5－2　PSP体内動態モデル

なる式が成立し，尿中ＰＳＰ排泄量$E(t)$ は

$$E(t)=\int_0^t k_1 Q_1(t)\,dt$$

のように表すことができる。

また，ＰＳＰ体内残存率を示す指数関数を

$R(t)=a\,e^{-\alpha t}+b\,e^{-\beta t}$　とおけば，

$R(t)=Q_1(t)+Q_2(t)$

が成立するので，５．１式をラプラス変換後，連分数展開し両者を比較することにより移行率

k_1，k_2，k_3 はそれぞれ次のように求められる。

$$k_1=\alpha+\beta-(\alpha b+\beta a)$$

$$k_2=(\alpha b+a\beta)-k_3$$

$$k_3=\frac{\alpha\beta}{\alpha+\beta-(\alpha b-\beta a)} \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots(5.2)$$

そこで５．２式を用いて 図に示した４症例の移行率を求めた結果，腎疾患例においては腎よりの排泄率k_1 の低下とともに第２相より血液相への移行率k_3 の著しい低下が認められた。一方肝硬変患者においては，血液相より第２相への移行率k_2 の低下が明らかであり，同時にk_1，k_2も低下を示した（表５－１）。

このようにＰＳＰの経時排泄曲線から移行率を算出することは，単に半減期や一定時間

移行率＼病例	健　常 No. 1	健　常 No. 2	腎疾患 No. 20	肝硬変 No. 8
k_1	0.046	0.045	0.037	0.038
k_2	0.021	0.025	0.040	0.016
k_3	0.037	0.020	0.010	0.014

表５－１　健常人，腎疾患，肝硬変患者のＰＳＰの各コンパートメント間の移行率

排泄量のみに注目するよりも生理的な裏づけを臨床医学に与えることになるものと期待される。

なお，肝硬変疾患における移行率の変化は，ＰＳＰ体内分布の第２相として肝が関与していることが窺われる。

5－2　レノグラムのシミュレーション[43)]

レノグラムは ^{131}I-Hippuran を肘静脈よりパルス状に負荷した後，腹背部の腎に相当する部位で体外的経時的なアイソトープのカウントを行うものである。したがって腎血行動態ならびに尿排泄動態の間接的把握法としてすぐれた特性を有しており，腎血管性高血圧，腎実質障害，尿路死腔の診断はもとより，腎摘出の適応判断や移植腎の管理など数多くの臨床応用がなされている。

しかし，その反面，アイソトープの体内拡散，再循環，腎よりの除去率の経時的変動，尿量による影響などのため，腎血流量などの既存のパラメータとの１対１の対応づけは必ずしも容易でない。

そこではコンパートメントアナリシスの立場よりレノグラムの成り立ちを解析し，その結果得られるモデルによってシミュレーション実験を行った。

ヒトやイヌに single injection された ^{131}I-Hippuran の血中放射能消失曲線を１～２時間追跡し，指数関数を描出すると，ほとんど例外なく３個の指数関数が得られる（図５－３）。したがって，体内における ^{131}I-Hippuran 動態は，３コンパートメントモデルで実現できると考えられる。

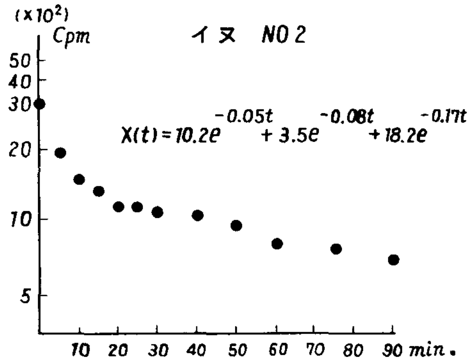


図5－3　イヌに ^{131}I-Hippuran をを投与した場合の血中消失曲線とそのコンパートメントアナリシス

つぎに，腎以外の部位で体表測定曲線より血液内放射能を差引いた，いわゆる tissue body surface counting rate による曲線の存在は ^{131}I-Hippuran が血管外に拡散しうることを意味するものと思われる。また ^{131}I-Hippuran は，ＲＰＦ物質であるから，腎も１個の独立したコンパートメントと考えるべきであろう。

したがって， ^{131}I-Hippuran の体内動態モデルとして血管，血管外，腎よりなる３相モデルが想定される。

レノグラムとして計測される放射能は，腎のほか腎周囲の血管および血管外分布相を back ground として含み，さらに尿路の放射能が加わる。これらの結果より，図５－４のようなレノグラムモデルが設定される。

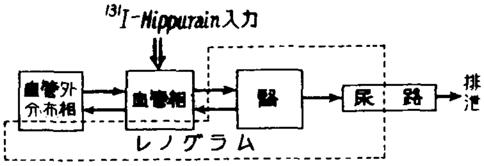


図5－4　レノグラムのコンパートメントモデル

そこで，このモデルを用いて尿量，尿路死腔量を種々変化させた場合のシミュレーションを行ってみると，尿路死腔の増大あるいは尿量の減少にしたがって正常パターンから単調増加を示すパターンまで臨床的に観察される種々のパターンが模擬される。したがってこれらのシミュレーション結果と，臨床データと比較することによって診断の指標を得ることができる（図5－5）。

5－3　腎の機能分布イメージ（functional image）の評価[45)]

近年，放射性物質を用いた臓器機能検査の発展は目覚ましいものがあるが，臓器の局所機能をイメージしディスプレーする方法である“ functional image ”法は最近の一つの話題である。

functional image 法はRI計測系に連結されたRIデータ処理装置により一画面をいくつかの画素よりなるマトリクスで表わし，各画素ごとの時系列データを磁気テープに記録格納し，後に再生して処理を行うものである。

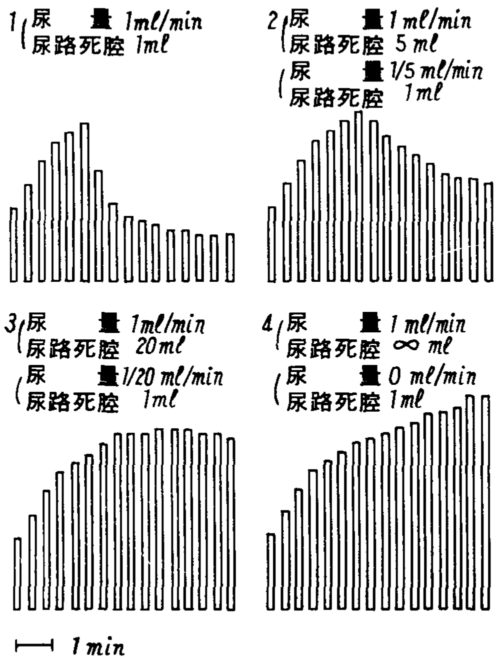


図5－5　尿量と尿路死腔を変化させた場合のレノグラムパターンのシミュレーション結果

筆者らは，RI投与後の腎のイメージを$64 \times 64 = 4096$の画素に分け，各画素ごとに経時的な動態曲線を取り出し，局所腎機能を表現する試みを行っている。

このような各画素ごとの動態曲線の解析法として，理論的には前述の同定方法でコンパートメントアナリシスを行うことは可能であるが，計算機の容量および演算時間などの制約のため現実的ではない。

そこで，London[44)]によって提案された方法にしたがい，1方向カテナリーモデルを想定して，各画素ごとに先行コンパートメントの数を求め局所腎機能の指標とした（図5－6）。

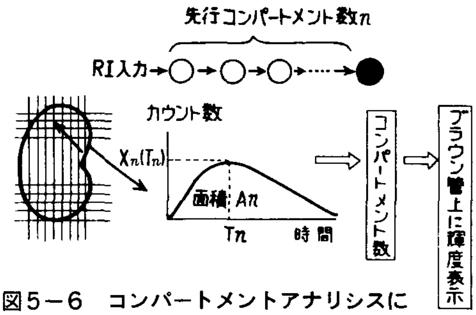


図5－6　コンパートメントアナリシスによる腎の functional image の表現

London　らの方法の結果のみについて述べると，

動態曲線がピークに達する時間：　T_n

T_n におけるピーク値：　$x_n(T_n)$

動態曲線と時間軸が囲む面積：　A_n

とすれば，先行コンパートメント数 n は

$$R_{n-1} < T_n x_n(T_n) / A_n < R_n$$

という不等式を満足する。

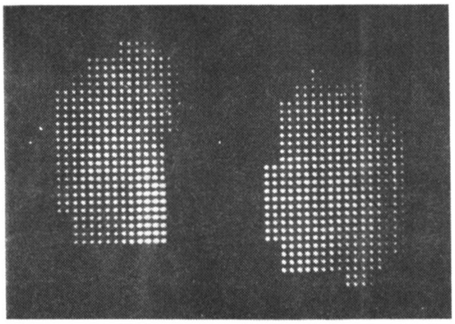
ただし

$$R_n = \frac{(n-1)^n}{(n-1)!} \exp[-(n-1)]$$

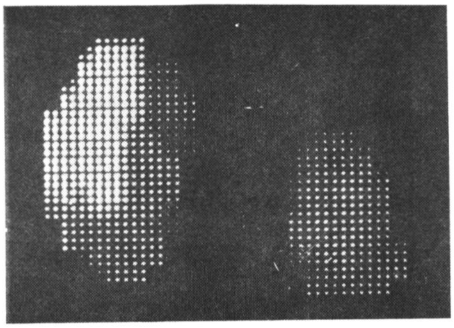
したがって，動態曲線より T_n，$x_n(T_n)$，A_n を求めれば，先行コンパートメント数が簡単な計算で決定出来る。

このようにして求めた各画素毎のコンパートメント数を，コンパートメントの少いものからコンパートメントの多いものへ10段階に分けてブラウン管上に輝度表示した。

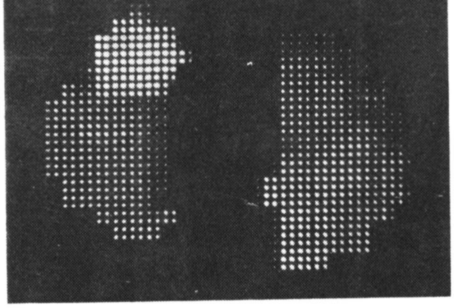
そこで，本法の臨床応用として腎嚢胞，腎結核などの腎 functional image を描いたところ，嚢胞部および結核部では，いずれも高い輝度を示し，正常腎との判別を容易に行い得た（図5－7）。



(a)　腎機能正常例



(b)　水腎症例



(c)　腎結核例

図5－7　コンパートメントアナリシスによる腎の functional image 臨床例

5－4 小　　括

複雑な生体系の解析法としては，生化学などのように現象をミクロ化して把握していこうとする立場と，個々の要因のつながりを構成的に理解していこうとする生体システム生理学的な立場の二通りに大別される。

コンパートメントアナリシスは，このうちの後者に属する解析法であり，マクロな立場にたって，生体内の動きを解析しようとするものである。したがって臨床的に診断や疾病の重症度の推定に用いられるし，基礎医学的には，トレーサの動きより，トレーサの関与する要因の数を推定することによって，未知の要因の生化学的あるいは生理学的性質を研究する動機づけを与えたり，トレーサの動きに対するこれまでの作業仮説の検定などに応用される。

しかし，生体系は，コンパートメントシステムのような線形システムで表現される現象より，むしろ，非線形現象の方が多いことも事実である。したがって，厳密な意味でコンパートメントアナリシスが適用できる分野は限られるが，筆者らの経験や諸家の報告より判断すると，方法論的な限界を考慮したうえで，本法を用いると，有効な生体情報を得ることが多い。

今後さらに，本法の応用面，基礎面での発展が望まれる。

謝　辞

この研究を遂行するにあたり，終始御指導御援助をいただきました阪大電子工学児玉慎三教授に深甚の謝意を表します。また，コンパートメントアナリシスの研究の動機づけをいただき，医学応用面での御指導をいただきました阪大医学部阿部裕教授，井上通敏講師，東大医学部古川俊之教授に厚く御礼申し上げます。

本研究のうち，コンパートメントシステムのシステム論的考察に御助力いただいた阪大電子工学前田肇講師，実際の計算面で御協力いただいた阪大電子工学学生川越恭二氏に心より感謝いたします。

同時に，日頃御指導，御激励いただいている阪大電子工学尾崎弘教授，電気工学藤井克彦教授，本研究をまとめるにあたって御指導いただいた鈴木胖教授に多謝いたします。

阪大電子工学児玉研究室，医学部第一内科情報科学研究室の諸氏には，種々の面で御協力いただき，ここに謝意を表します。

参　考　文　献

第　二　章

1) P. Manchini & A Pilo; *A computer program for multiexponential fitting by the peeling method,* Comp. Biomed. Res., 3, 1(1970)

2) I. Isenberg & R. D. Dyson; *The analysis of fluorescence decay curve by the method of moments,* Biophys. J., 9, 1337 (1969)

3) D. W. Marquard; *An algorithm for least square estimation of non-linear parameters*, J. Soc. Indust. Appl. Math., 11, 431 (1963)

4) S. Sander & N. H. Hollenberg; *The application of the method of maximum likelihood to the analysis of a tracer kinetic data* , Math. Biosc., 9, 149 (1970)

5) T. G. Gardner; *Method for the analysis of multicomponent exponential decay curves* , J. Chem. Phys., 31, 978 (1959)

6) F. B. Hilderband; *Introduction to numerical analysis,* McGrow Hill, N.Y. (1956)

7) R. T. Lacoss; *Data adaptive spectral analysis method,* Geophys., 36, 661 (1971)

8)* 梶谷文彦，山野芳治，堀正二，稲田紘，古川俊之「コンパートメントアナリシスにおけるコンパートメント数および指数関数の推定」 行動計量学，2,1 （1975）

9) J. A. Nelder & R. Mead; *A simplex method for function minimization,* Comp. J., 7, 308 (1965)

10) H. Akaike; *A new look at the statistical model identification,* IEEE Trans. AC-19, 716 (1974)

11) H. Akaike; *Information theory and an extention of the maximum likelihood method principle,* 2nd Int. Symp. Inf. Theory, 267 (1973)

12)* F. Kajiya, K. Kawagoe, S. Kodama, M. Hori & M. Inoue ; *A Method of the study of radioactive tracer kinetics* , Math. Biosc., 投稿中

13)* 梶谷文彦，川越恭二，前田肇，児玉慎三，堀正二，稲田紘，井上通敏：「コンパートメントシステムの次数およびパラメータ推定法について」 信学論(D)，3月号，印刷中

14)* 梶谷文彦，川越恭二，前田肇，児玉慎三：「コンパートメントシステムの次数およびパラメータ推定法について」 信学会研究会資料 CST，76－21，63 （1976）

15)* 川越恭二，梶谷文彦，前田肇，児玉慎三：「コンパートシステムの同定問題」 信学会研究会資料，MBE 76－7，33（1976）

16)* 梶谷文彦，川越恭二，児玉慎三，井上通敏，堀正二，阿部裕：「最尤法によるコンパートメントアナリシスの一手法」 医用電子生体工学 14，特別号，94 （1976）

17) R. H. Davis & J. H. Ottaway; *Application of optimization procedure to tracer kinetic data,* Math. Biosc., 13, 265 (1972)

第　三　章

18) R. A. Fisher; *Theory of statistical estimation,* Proc. Cambridge Phyl. Soc., 22, 700 (1925)

19) C. R. Rao; *Linear statistical inferance and its application,* John Wiley & Sons Inc., N.Y.(1965)

20)* 梶谷文彦，川越恭二，児玉慎三，堀正二，稲田紘，井上通敏：「コンパートメントシステムの同定問題における観測値の最適サンプリングについて」 信学論（c），59－c（8），490（1976）

21)* T. Nishimura, M. Hori, F. Kajiya & K. Kimura; *Optimal sampling in RI kinetic study applying compartmental analysis,* Proc. 1st Asia & Oceania Gong. of Nuclear Med., 316 (1976)

22)* M. Hori, M. Inoue & F. Kajiya; *Optimal sampling in radio-active tracer kinetic study,* Digest of 11th ICMBE, 620 (1976)

23)* 梶谷文彦，川越恭二，児玉慎三，井上通敏，阿部裕：「RＩ動態解析における最適サンプリング条件の設定」 医用電子生体工学 14，特別号，95（1976）

24)* 堀正二，井上通敏，阿部裕，川越恭二，梶谷文彦：「コンパートメントアナリシスを用いたRＩ動態解析における最適サンプリング条件の検討」 医用電子生体工学，印刷中

25) P. E. Bergner, K. Takeuchi & Y. Y. Lui; *The recognition problem : application to sum of exponentials,* Math. Biosc., 17, 315 (1973)

第 四 章

26) C. W. Sheppard & A. S. Houshlder; *The mathematical basis of the interpretation of tracer experiments in closed steady state system,* , J. Appl. Physics, 22, 4, 510 (1951)

27) J. Z. Hearon; *Theorems on Linear system;* Ann. N. Y. Acad. Socie., 108, 36 (1963)

28) R. E. Berman; *Introduction to matrix analysis,* McGraw Hill, N. Y. (1960)

29) H. Minc & Markus; *A survey of matrix theory and matrix inequality,* Prindle, Weber & Schmidt, Boston (1964)

30) 二階堂副包：「現代経済学の数学的方法」 岩波（1959）

31)* 前田肇，児玉慎三，梶谷文彦：「コンパートメントアナリシスのシステム論的考察：マミラリーシステムの伝達関数について」 信学論（D），59－D（5），347（1976）

32) J. Z. Hearon; *On the roots of a certain type of matrix,* Bull. Math. Biophys., 23, 217 (1961)

33) 尾崎弘，黒田一之：「回路網理論」，共立（1959）

34) J. Z. Hearon; & W. P. London; *Path length and initial conditions in arbitary and Hessenberg compartmental system,* Math. Biosc., 14, 121 (1972)

35)* 前田肇，児玉慎三，梶谷文彦：「コンパートメントアナリシスのシステム論的考察：カテナリーシステムの伝達関数について」 信学論（D）投稿中

36)* H. Maeda, S. Kodama, & F. Kajiya; *Compartmental system analysis: realization of a class of linear systems with physical constraints,* IEEE Trans. Circuits & Systems, CAS-24,(1), 8, (1977)

37) M. Fiedler & V. Patak; *On the matrices non-positive off diagonal elements and positive principal minors,* Czech. Math. J, 12 (3), 382 (1962)

38) B. D. O. Anderson; *A system theory criterion for positive real matrices,* SIAM J. Cont., 5 (2), 171 (1967)

39) R. W. Brockett; *Poles, zeros and feedback: state space interpretation,* IEEE Trans., AC-10 (2), 129 (1965)

40) R. L. Schoenfeld & M. Belman; *An electrical network analogy for isotope kinetics,* IRE. Nat.

Conv. Record Pt(4), 84 (1957)

第 五 章

41)* 児玉慎三，梶谷文彦，前田肇：「線形システム理論とその医学応用(1)システムダイナミクスの表現法」 綜合臨床，24(12)，2959 (1975)

42)* 稲田紘，古川俊之，加藤俊夫，梶谷文彦，林隆一，伊藤勝啓，阿部裕：「Simulation によるPSP排泄動態の解析」 日内会誌，60，616 (1971)

43)* 桜井晟，梶谷文彦，木村和文：「尿路通過障害におけるＲＩ腎機能検査」 日泌会誌，66 (11)，761 (1975)

44) W. P. London & J. Z. Hearon; *Estimation of the number of precursors in a sequence of the first order reaction*, Math. Biosc., 14, 281 (1972)

45)* 西村恒彦，木村和文，梶谷文彦：「functional image による腎内ＲＩ動態の解析と臨床応用」 核医学 13(5)，632 (1976)

(＊印は本研究に関して，筆者および協同研究者が発表した論文である。)