

Title	クリープき裂挙動に関する力学的研究
Author(s)	久保, 司郎
Citation	大阪大学, 1976, 博士論文
Version Type	VoR
URL	https://hdl.handle.net/11094/2580
rights	
Note	

Osaka University Knowledge Archive : OUKA

<https://ir.library.osaka-u.ac.jp/>

Osaka University

クリープき裂挙動に関する力学的研究

昭和50年11月

久保 司 郎

目次

主要記号

第1章	序論	1
第2章	クリーブき裂挙動に対する力学的解析の基礎	9
2.1	クリーブ応力・ひずみ解析における基礎事項	9
2.1.1	クリーブ則および「クリーブ応力解析における弾性相似則」	9
2.1.2	き裂先端近傍の応力・ひずみ	13
	(i) モードⅢ型き裂の場合	14
	(ii) モードⅠ型き裂の場合	20
2.2	修正J積分	23
2.2.1	定常クリーブ則のもとにおける修正J積分	23
2.2.2	硬化型のクリーブ則のもとにおける修正J積分	27
	(i) 時間硬化説を用いた場合	27
	(ii) ひずみ硬化説を用いた場合	29
2.2.3	修正J積分と応力拡大係数との関係	31
	(i) モードⅢ型き裂の場合	32
	(ii) モードⅠ型き裂の場合	34
2.2.4	修正J積分の実験的求め方	35
2.3	クリーブ損傷則と破壊の条件	43
2.3.1	単軸引張りの場合の損傷則	43

2・3・2	縦せん断負荷の場合の損傷則	47
2・3・3	多軸応力状態の場合の損傷則	49
2・3・4	切欠きクリープ破壊問題に対する損傷則 の適用	49
第3章	力学的解析方法	52
3・1	縦せん断負荷の場合	52
3・1・1	き裂発生	52
3・1・2	き裂成長	54
3・1・3	き裂成長速度	57
3・2	引張り負荷の場合	58
3・2・1	き裂発生	58
3・2・2	き裂成長	59
3・2・3	き裂成長速度	59
3・3	結言	60
第4章	縦せん断およびねじりクリープ下における切 欠き強度	61
4・1	縦せん断クリープ下の切欠き強度	61
4・2	ねじりクリープ下の切欠き強度	66
4・3	結言	69
第5章	特異応力場の仮定に基づく近似的き裂成長解 析	71
5・1	モードⅢ型き裂の成長挙動	71

5.2	モード I 型き裂の成長挙動	78
5.3	結言	79
第 6 章	縦せん断負荷のもとにおける双曲線切欠きを有する柱のクリープき裂挙動に対する力学的解析	81
6.1	応力・ひずみ解析	81
6.2	き裂発生挙動解析	84
6.3	双曲線き裂材のき裂成長挙動解析	87
6.4	双曲線き裂材のき裂成長速度	89
6.4.1	き裂成長速度と各種力学量との関係	90
6.4.2	き裂成長速度に及ぼす履歴の影響	96
6.4.3	き裂成長速度に及ぼす破壊様式の影響	97
6.5	結言	101
第 7 章	縦せん断負荷のもとにおける半無限体内のクリープき裂挙動に対する力学的解析	102
7.1	応力・ひずみ解析	102
7.2	き裂成長速度	105
7.2.1	き裂成長速度に及ぼす力学量および履歴の影響	106
7.2.2	き裂成長速度に及ぼす他の各種因子の影響	110
7.3	結言	113

第8章	環状双曲線切欠き丸棒のねじりクリーフ破壊 に対する力学的解析	115
8・1	応力・ひずみ解析	115
8・2	き裂発生挙動解析	118
8・3	き裂成長挙動解析	121
8・4	環状双曲線き裂材のき裂成長速度	123
8・5	結言	125
第9章	切欠き材およびき裂材のねじりクリーフ破断 試験	126
9・1	ねじりクリーフ試験機	126
9・2	供試材および試験片	127
9・3	無酸素銅・切欠き材の破断試験および中断試 験結果	130
9・4	S10C低炭素鋼・切欠き材の破断試験結果	136
9・5	S15CK低炭素鋼・き裂材の破断試験結果	138
9・6	結言	141
第10章	考察	142
10・1	切欠き強化および弱化	142
10・2	ねじりクリーフ破壊に対する解析結果と実験 結果との比較	145
10・3	特異応力場を仮定して求めたき裂成長速度の 近似解と第6章および第7章のき裂解析結果 との比較	151

10・4	引張りにおけるクリーブき裂成長速度のデータと解析結果との比較	157
10・4・1	モードⅢ型き裂とモードⅠ型き裂との間の相似則	158
10・4・2	引張りにおけるクリーブき裂成長速度の整理の現状	158
10・4・3	モードⅢ型き裂成長解析結果によるモードⅠ型き裂成長速度のデータの解釈	164
10・4・4	き裂成長速度の支配力学量について	165
10・5	き裂成長速度における寸法効果	169
10・6	進展するクリーブき裂解析および弾性ひずみの寄与について	171
10・7	結言	173
第11章 ・ 結論		175
参考文献		179
付録Ⅰ	連続体の不変積分（J積分の拡張）	188
I・1	応力境界条件のもとにおける経路不変積分	188
I・2	変位境界条件のもとにおける経路不変積分	198
I・3	三次元問題の不変積分	200
I・4	考察	202
I・5	結言	207

付録Ⅱ	$E_k(\lambda_2)$ (定義式(6-14)あるいは(8-14)) の解析解	209
Ⅱ・1	縦せん断の場合	209
Ⅱ・2	ねじりの場合	214
付録Ⅲ	χ_j (定義式(7-6))の数値計算方法	217
	付録の参考文献	220
	謝辞	222
	発表論文	223

主要記号

- A_n : 式(2-75)および(2-78)中の定数
- A_s : 式(2-120)中の定数
- A_T : 式(2-99a)中の定数
- a : き裂底断面半幅あるいはき裂底断面半径
- a_0 : 切欠き底断面半幅あるいは切欠き底断面半径
- a^* : 試験片の基準寸法
- B : き裂先端の長さ. たとえば板材の場合は板厚
- b : リガメント長さ
- b_1 : クリーフ損傷則(式(2-99a)あるいは(2-120))
中の指数
- b_s : 式(6-36)中の指数
- d : 試験片の径(= $2a_0$)
- E : ヤング率
- $E_k(\lambda_2)$: 式(6-14)あるいは(8-14)で定義される積分
値
- e_i^* : 試験片形状を定める寸法
- e_{ijk} : 交代記号
- $F(\lambda_2)$: 式(6-5)あるいは(8-6)で定義される関数
- $F_1(s_{ij})$: 式(2-1)あるいは(2-2)において応力とひず
みあるいは応力とひずみ速度を関係づける関数
- $F_2(J_2, J_3)$: 式(2-5)中の J_2 および J_3 のみの関数
- g^{ij} : Euclid の計量テンソル
- I, I_c : 経路不変積分

- I_2 : ひずみの二次不変量
 J : J積分
 J' : 修正J積分
 J_c' : コンフリメンタリ修正J積分
 J_2, J_3 : 偏差応力の二次および三次不変量
 J_e : 弾性体のJ積分値
 K : Boltzman 定数
 $K_e, K_I, K_{II}, K_{III}$: 弾性の応力拡大係数
 K_0, K_ϵ : 塑性の応力拡大係数およびひずみ拡大係数
 l : き裂長さ
 dl/dt : き裂成長速度
 $(dl/dt)_s$: 試験片の基準き裂成長速度
 l_0 : 初期き裂長さ
 M : 曲げモーメント
 M_c : 表面偶力ベクトル
 M_t : ねじりモーメント
 m : 式(2-3a)中の定数
 N : 要素の総数
 n : クリープ指数
 n_b : 式(2-106)あるいは(2-126)中の指数
 n_∞ : 式(2-36)あるいは(2-40)によって定義される定数
 P : 荷重
 p : 静水圧
 $R(\gamma)$: 式(2-34)で定義される関数

- R_{t_i} : き裂発生時間比. すなわち切欠き材のき裂発生時間と平滑材のそれとの比
 R_{t_r} : 破断時間比, すなわち切欠き材の破断時間と平滑材のそれとの比
 r : き裂先端あるいは切欠き底からの距離
 r_0 : 切欠き半径
 r_i : i 番目の要素の軸中心からの距離
 S : 単位厚さあたりのせん断力
 S_u, S_σ : 変位. あるいは応力が規定されている境界面
 S_{ij} : 偏差応力テンソル
 T : 温度
 T_i : 応力ベクトル
 t : 時間
 t_0 : 時間の単位を持つ定数
 t_1 : 時間の単位を持つ定数
 $t_i, (t_i)_s$: 切欠き材および平滑材のき裂発生時間
 $t_p, (t_p)_s$: 切欠き材および平滑材のき裂成長時間
 t_{p_j} : き裂が第 $(j-1)$ 点から第 j 点まで成長するのに要する時間
 $t_r, (t_r)_s$: 切欠き材および平滑材の破断時間
 U : 系のポテンシャル・エネルギー
 U' : 式(2-83)で定義されるポテンシャル
 U_c : 系のコンフリメンタリ・ポテンシャル・エネルギー
 U_c' : 式(2-83)で定義されるポテンシャル

- U_i : 変位境界値
- u_i : 変位ベクトル
- \dot{u}_i : 変位速度ベクトル
- V_i : 変位速度の境界値
- W : ひずみエネルギー密度
- W_c : コンフリメンタリひずみエネルギー密度
- W, W_c' : 式(2-45)で定義されるポテンシャル
- W_s' : 定常クリープ則のもとにおけるポテンシャル W'
- w : 板厚(z)方向変位あるいは接線方向変位
- $X(\gamma)$: 式(2-34)で定義される関数
- x, y, z x_i : 直角座標系
- β : 式(10-14)で定義される定数
- β_s : 切欠き底面と無限遠方との相対的変位速度
- β_T : 切欠き底面と無限遠方との相対的角変位速度
- Γ : 積分経路あるいはガンマ関数
- γ : せん断ひずみ
- $\dot{\gamma}$: せん断ひずみ速度
- γ_0 : 式(2-13)中の定数
- γ_b : 粒界ひずみ
- γ_{bf} : 限界粒界ひずみ
- $\dot{\gamma}_c$: 式(2-9)中の定数
- γ_f : 限界ひずみ
- $\dot{\gamma}_{min}$: 最小クリープひずみ速度
- $\dot{\gamma}_n$: 式(10-15)で定義されるひずみ速度
- $\dot{\gamma}_\infty$: 無限遠方におけるクリープひずみ速度

- δ : 変位
- δ_{ij} : Kronecker のデルタ
- $\varepsilon, \varepsilon_{ij}$: ひずみ
- $\dot{\varepsilon}, \dot{\varepsilon}_{ij}$: ひずみ速度
- ε_0 : 式 (2-11) あるいは (2-12) 中の定数
- ε_b : 粒界ひずみ
- ε_{bf} : 限界粒界ひずみ
- $\dot{\varepsilon}_c$: 式 (2-7) あるいは (2-8) 中の定数
- ε_e : 等価ひずみ
- ε_f : 限界ひずみ
- $\hat{\varepsilon}_{ij}(\theta), \hat{\varepsilon}_e(\theta)$: 式 (2-41) および (2-42) で定義される
偏角 θ のみの関数
- ζ : Riemann のツェータ関数
- γ : クリーフ損傷
- $\gamma_{kj}, \dot{\gamma}_{kj}$: き裂が第 $(j-1)$ 点まで進んだときの第 k 点の
損傷値およびその時間的变化率
- θ : き裂先端前方からの偏角
- φ : 角変位
- κ_{ij} : 曲率
- λ, μ : Lamé の定数
- $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$: 楕円-双曲線座標系
- λ_s : 双曲線切欠き表面上の λ_2 の値
- μ_1, μ_2 : 偶応カテンソルの導入に伴う新材料定数
- μ_{ij} : 偶応カテンソル
- ν : ポアソン比

- ν_i : 外向き単位法線ベクトル
 ξ : 式(7-1)で定義される無次元ひずみ
 ρ : 密度
 ρ_s, ρ_i : 材料組織および破壊様式によって定まる特性寸法
 $\sigma, \sigma_{ij}, \sigma^{ij}$: 応力
 σ_0 : 式(2-11)あるいは(2-12)中の定数
 σ_c : 式(2-7)あるいは(2-8)中の定数
 σ_e : 等価応力
 $\tilde{\sigma}_{ij}(\theta), \tilde{\sigma}_e(\theta)$: 式(2-41)および(2-42)で定義される偏角 θ のみの関数
 σ_n : 正味断面公称応力
 σ_{n0} : σ_n の初期値
 τ : せん断応力
 τ_0 : 式(2-13)中の定数
 τ_c : 式(2-9)中の定数
 τ_e : 弾性応力分布を仮定したときの最大せん断応力
 τ_n : 正味断面公称応力
 τ_{n0} : τ_n の初期値
 τ_{sc} : 定常クリープ則のもとにおける平滑材の最大せん断応力
 ϕ : ひずみ面内で図2-1のようにとった偏角
 χ : 式(9-2)中の指数. 応力-破断時間線図の傾き
 χ_j : 式(7-6)で定義される定数

- ψ : ひずみ面内におけるポテンシャル
- Ψ : ポテンシャル ψ の無次元量
- ω : 局所的破壊の進展の尺度
- ω_i : 回転

第1章 序論

本論文の主目的は、破壊力学 (Fracture Mechanics) の概念をクリープき裂問題に導入し、クリープき裂挙動に対するひとつの力学的解析手法を提案することにある。

高温においても実用に供されている構造部材あるいは機械要素は、多くの場合、何らかの機械的切欠きを持ち、また先天的あるいは後天的な幾何学的ないし金属組織学的欠陥を有している。したがって、このような部材の破損寿命を推定するためには、これら応力集中源や欠陥を起点とする破損の特性を知る必要がある。このため、たとえば、切欠きクリープ破断問題について、個々の材料の破断寿命に対する切欠き形状、温度、応力など種々の因子の影響を調べた多くの研究⁽¹⁾⁽²⁾がすでになされている。これらの研究成果は、不十分とはいえ、この問題に関する若干の情報を提供しており、高温機器の設計にも利用されている。

しかしながら、個々の材料についての試験片の初期状態 (切欠き形状、温度、応力など) と破断寿命の関係が与える情報量はきわめて限られたものである。過去十数年間の主として常温あるいは低温における破壊問題研究の発展の歴史からもわかるように、破壊の研究のすう勢は、上記のような試験片の初期状態を破断点と結びつける、いわば「点の研究」から、き裂または破壊核の発生、成長さらにそれらの最終不安定破壊への移行に至る全過程を研究対象とする、いわば「線の研究」へと移行している。これらのより豊かな情報が、単に機器の初期設計にとどまらず、それらの保守点検規準の作成や残存寿命の正確な把握などを含めた、機器の全寿命に対する総合的

な安全設計に大きく寄与している。高温強度のように、本質的に強い時間依存性と高い非線形性を持つ現象で、かつ外的条件の変動性の高い場合には、常温または低温における破壊の場合と同等またはそれ以上に、破壊に至る全過程の研究を必要とする性格を持っている。しかしながら、現状は現象の多様性・複雑ささらには解析や実験の困難さのため、このような観点からの研究は、他の分野に比べ大幅に遅れている。

切欠きクリーブ破壊におけるき裂挙動に関する実験的研究として、Manjoine⁽³⁾は、破断していない Cr-Mo-V 鋼・切欠き試験片の縦割り顕微鏡観察を行ない、き裂の発生点の位置および破壊の様式について調べている。Goldhoff と Brothers⁽⁴⁾は、Cr-Mo-V 鋼・切欠き材におけるき裂発生および成長を観察するとともに、酸化層の厚さよりき裂の発生時期を推定している。また、大路ら⁽⁵⁾⁽⁶⁾は、Ni-Cr-Mo 鋼および Cr-Mo-V 鋼の切欠き材において、切欠きの鋭さ、応力の大きさを変えることにより、切欠き強化より弱化へ移行することを確認したうえで、き裂の発生および成長の挙動を観察し、き裂の発生時期は切欠き形状と密接に関連しているが、切欠き強化あるいは弱化とは直接結びつかないことを明らかにしている。

さらに、ここ一・二年、クリーブき裂の成長に関する実験が活発化している^{(7)~(30)}。たとえば、Harrison ら⁽⁷⁾は Cr-Mo-V 鋼・中央切欠き板試験片、大谷ら⁽⁹⁾は SUS 304 鋼・中央切欠き板試験片、Nicholson ら⁽¹²⁾は SUS 316 鋼・片側切欠き板試験片および中央に円孔を有する板試験片を用いた試験をそれぞれ行ない、き裂成長速度が正味断面公称応力によりよく整理できると報告している。これに対し、Siverns ら^{(13)~(15)}は Cr-Mo 鋼および Cr-Mo-V 鋼の片

側切欠き試験片のき裂成長速度が応力拡大係数とよく相関することを報じている。小寺沢ら⁽¹⁶⁾は、SUS304鋼のクリーブき裂成長に関して、正味断面公称応力を用いるよりも応力拡大係数を用いるほうが、両側切欠き板試験片の結果と環状切欠き丸棒試験片による結果との差が小さくなり、より良い整理ができると主張している。

Landesら⁽¹⁷⁾は、CT試験片および中央切欠き板試験片を用いてDiscaloyの試験を行ない、き裂成長速度が修正J積分によりよく表わされると報告している。また、大路ら⁽¹⁸⁾⁽¹⁹⁾は、片側切欠き板試験片、両側切欠き板試験片、中央切欠き板試験片およびCT試験片によるSUS304鋼試験結果を、正味断面公称応力、弾性応力拡大係数いずれを用いて整理しても同じ線上には乗らないと報じている。

以上のように、クリーブき裂挙動に関する実験的研究の量は、本研究の開始後次第に増加しつつあり、資料の蓄積も進んでいるが、現象を支配するパラメータについてすらなお論争中であり、クリーブき裂挙動に関する何らかの統一的結論が引出されるまでにはかなりの距離があるものと思われる。このような研究の遅れの原因としては、実験資料の量的不足もさることながら、脆性破壊、疲れ破壊、さらには環境破壊の研究の発展過程で果した線形破壊力学の理論体系の役割の重要性を考えれば、クリーブき裂の発生および成長過程に対する解析的研究、あるいはもっと広く非線形破壊力学の理論体系の展開の立遅れが大きな要因となっていることが考えられる。

クリーブ破壊に対する破壊力学的解析手法の適用の可能性は、線形破壊力学の発展とそれの脆性破壊問題、疲れき裂問題および環境

き裂問題に対する適用の大きな成功を背景に、1972年に小倉・大路⁽³¹⁾によって指摘され、その前後から現在に至る二、三年の間に、本研究をも含め以下に示すような解析的研究がなされている。

坂田ら⁽²⁰⁾は、小規模降伏の概念をクリーフき裂問題に導入し、弾性変形に比べてクリーフ変形の著しい領域が比較的小さい場合のき裂成長速度について簡単な考察を行なっている。また、To⁽³²⁾は、(i) 応力分布は、完全弾塑性の仮定に基づく Dugdale モデルにおけるそれで近似できる、(ii) 材料の破壊は Kachanov のクリーフ損傷則に従う、(iii) き裂は塑性域の長さずつ段階的に成長する、という仮定のもとに、無限板内のモード I 型クリーフき裂成長の解析を行なっている。

これら二つの研究は、弾性き裂の応力解析に基づき従来線形破壊力学の延長上にあるものであり、材料非線形性の顕著なクリーフ変形が問題に大きく関与している場合、すなわちクリーフ変形の支配的な領域が大きな場合には、適用できないものと考えられる。

クリーフ変形が支配的な場合に対する解析例としては、まず、大谷ら⁽⁸⁾⁽¹⁰⁾の報告があげられる。大谷ら⁽⁸⁾は、有限要素法により切欠き材の定常クリーフ応力・ひずみ解析を行ない、これを局所限界(破壊)ひずみの条件と組み合わせることにより、切欠き材におけるき裂挙動を解析している。この解析結果をもとに $1Cr-1M_0-1/4V$ 鋼における切欠き強化・弱化に対する定量的評価を試み、成功を納めている。その後さらに、同じ解析手法を用いて、き裂材におけるき裂成長を解析し、実験結果の整理法に関する議論を行なっている⁽¹⁰⁾。大谷らの用いている解析手法の特徴としては、応力解析に有限要素法を用いているため、任意形状の切欠きあるいはき裂が取

扱えるとともに、構成式として多少複雑なものも採用でき、たとえば、クリーブき裂の発生および成長挙動に対する弾性ひずみの影響も調べることができる反面、力学的諸因子、材料因子、熱力学的因子等が現象に及ぼす影響がそのままではわかりにくく、また鋭い切欠きあるいはき裂を対象とする場合には、解が計算のパラメータに敏感になり、信頼性の高い解が得られにくいことがあげられる。

一方、Barnby⁽³³⁾は、引張りを受ける片側き裂材におけるき裂成長の解析を試みている。しかしながら、この解析の基礎となっているき裂の応力解析⁽³⁴⁾において、(i) 定常クリーブ状態におけるき裂先端近傍の特異応力場を弾性におけるき裂解析結果より解析的に類推し、その特異性を $r^{-1/2n}$ (r : き裂先端からの距離, n : クリーブ指数) としており^(注)、また、(ii) 特異応力場の強さの計算に際して、外力をき裂先端前方の特異応力のみと釣合せるという不合理な仮定が設けられている。したがって、このような特異応力場の近似式を基礎とするき裂成長解析結果は、この解析ではき裂先端前方の損傷(ひずみ)の蓄積が必ずしも正当に評価されていないこととあいまって、十分信頼のおけるものとは言い難い。

以上のように、クリーブき裂挙動に関する解析的研究は、その重要性にもかかわらず、現時点においても研究がようやく緒に付いた段階である。特に、クリーブ変形が十分進行している場合を扱った評価に値する研究としては、世界的に見ても、本研究を除けば上述の大谷らの数値解析結果⁽⁸⁾⁽¹⁰⁾があるのみであり、これにはすでに述べたように数値解析という解析手法からくる、(i) 各種因子の影

(注) この特異性は、2・1節で詳論するように、本来 $r^{-1/(n+1)}$ となるはずのものである。

響が明確でないこと、および(ii)クリーフ破壊全般に対する見通しが得られにくいことなどの必然的欠点があるため、それだけでは、クリーフき裂挙動の実験的研究に対する指針を得るには不十分であると言わざるを得ない。

本研究は、クリーフき裂挙動研究に対するひとつの指針と見通しを得ることを目標に、上述のほとんどすべての研究に先がけて開始され、その後一部の研究⁽⁸⁾⁽¹⁰⁾とは競合しながら発展させられてきた、クリーフき裂の発生および成長に対する非線形破壊力学的な解析に関する研究である。

本論文で提案する力学的解析手法の特長は、クリーフき裂の発生と成長に関する問題の単純化と同時に普遍化を計り、かつ出来る限り解析的に演算を進めているため、(i)クリーフ変形の支配的な場合に適用でき、(ii)各種因子の影響が抽出し易く、また(iii)クリーフ破壊全般に対する見通しが得られ易い、という点にある。解析の簡単のため、構成式としてはNorton型の定常クリーフ則を採用し、弾性ひずみは無視し、微小変形理論を用いる。解析の対象を、主として、解析が比較的簡単で非線形弾性解がいくつか得られている縦せん断型切欠きまたはき裂とし、Hoffによって指摘されている「クリーフ応力解析における弾性相似則」⁽³⁵⁾⁽³⁶⁾を用いることにより、これらに対する定常クリーフ応力解を解析的に求める。次に、破壊条件については、今までに提案されている多種多様の破壊条件あるいは破壊の物理的ないし力学的モデルの多くを包含し、かつ非常に平易な形を有する、統一的なクリーフ損傷則を提案・採用する。そして、これらの応力解析結果ならびにクリーフ損傷則を組み合わせることにより、き裂の発生・成長の挙動を解析する。

なお、本論文では解析の主対象をモードⅢ型（縦せん断型）き裂または切欠きとしたが、実用性の面からはモードⅠ型き裂が重要であり、モードⅠ型き裂に対する解析的研究が望ましいことはいまでもない。しかしながら、モードⅠ型き裂を解析的に取扱うのは一般に非常に困難であり、現状では事実上不可能に近い。一方、モードⅢ型き裂は、モードⅠ型き裂に比べると解析が格段に容易であり、かつ、破壊力学においてしばしば用いられているモードⅠ型き裂とモードⅢ型き裂の間の経験的相似則を用いれば、モードⅢ型き裂解析結果からモードⅠ型き裂挙動に及ぼす各種因子の影響を類推できるものと考えられる。したがって、モードⅢ型き裂を主対象とする本研究は、クリーフき裂挙動研究に対するひとつの指針と見通しを得るといふ目的のためには十分役立つと考えられる。また、本論文で展開する解析は、非線形破壊力学の発展ならびに応用面にも、大きく貢献するものと考えられる。

最後に、本論文の各章の内容を簡単に述べておく。

第2章では、クリーフき裂挙動解析における基礎事項について記述する。すなわち、2・1節では、構成式について説明し、本研究で用いるNorton型の定常クリーフ則を示すとともに、応力・ひずみ解析において用いる「クリーフ応力解析における弾性相似則」を引用・記述する。また、この相似則を用いてクリーフき裂先端近傍における応力・ひずみを求める。2・2節では、クリーフき裂先端近傍における応力の指標のひとつである修正J積分 J' を提案し、 J' と塑性の応力拡大係数との関係、 J' の実験的求め方について言及する。2・4節では、本論文において応力解析結果と組み合わせる一般化されたクリーフ損傷則を提案し、その物理的意味を吟味する。

第3章では、以下の章で行なう力学的解析の具体的手順を説明するとともに、次元解析を利用して、き裂挙動に関する諸量に影響を及ぼす因子および解析結果の整理に関する議論を行なう。

第4章では、縦せん断およびねじりクリーフ下における切欠き材の破断強度、すなわち切欠き強化・弱化的問題を力学的解析に基づいて論ずる。

第5章では、以下の章で取扱っている具体的き裂形状を有する試験片の力学的解析に対するひとつの見通しを得るため、応力がき裂先端近傍の特異応力場で表わされる場合のき裂成長速度の近似解を求める。

第6章、第7章および第8章では、具体的解析例を扱う。まず、第6章では、縦せん断負荷のもとにおける無限に深い切欠きあるいはき裂におけるき裂発生・成長挙動を、双曲線切欠きあるいはき裂を用いて解析する。第7章では、逆に浅いき裂の挙動を、半無限体内のき裂によって解析する。また、第8章では、実験的に実現しやすい問題として、ねじりクリーフ下における環状双曲線切欠き丸棒のき裂挙動を解析する。

第9章においては、第8章の解析結果と比較する実験資料を得るため行なった、切欠き材およびき裂材に関するねじりクリーフ試験結果について述べる。

第10章では、以上の章で得られた結果を相互に比較検討することにより、本解析の妥当性の評価を行なうとともに、工学上重要と考えられる幾つかの事項について考察を行なう。

第11章は、本論文の総括である。

第2章 クリーフき裂挙動に対する力学的解析の基礎

本章においては、本論文のクリーフき裂挙動解析において用いる基礎事項について述べる。まず、2・1節ではクリーフ応力・ひずみ解析に用いる構成式および「クリーフ応力解析における弾性相似則」について説明を加え、この構成式のもとにおけるき裂先端近傍の応力・ひずみを求める。2・2節においては、き裂先端近傍の応力状態を代表するひとつの指標である修正J積分を提案し、その実験的求め方、塑性の応力拡大係数との関係等について議論する。

2・3節においては、応力・ひずみ解析結果と組み合わせべき破壊の条件について論じ、今までに提案されている種々のクリーフ破壊機構のモデルから導かれる破壊則を包含するようなクリーフ損傷則を提案する。

2・1 クリーフ応力・ひずみ解析における基礎事項

2・1・1 クリーフ則および「クリーフ応力解析における弾性相似則」

非圧縮性等方性材料の多軸応力下の塑性変形に対する一般式として、

$$\varepsilon_{ij} = F_1(\delta_{ij}) \equiv \alpha_1(J_2, J_3^2) [\alpha_2(J_2, J_3^2) J_3 t_{ij} + \alpha_3(J_2, J_3^2) \delta_{ij}] \quad (2-1)$$

が提案されている⁽³⁷⁾。ただし、 ε_{ij} はひずみテンソル、 δ_{ij} は偏差応力テンソル、 J_2 および J_3 は δ_{ij} の二次および三次不変量である。また、 t_{ij} は、 δ_{ij} をKroneckerのデルタ、 v_{ij} を、 δ_{ij} と同じ主軸を持ち、主値として δ_{ij} の主値 $\delta_1, \delta_2, \delta_3$ の二乗値 $\delta_1^2, \delta_2^2,$

Δ_3^2 をとるテンソルとすれば、次のように表わされる。

$$t_{ij} = v_{ij} - 2 J_2 \delta_{ij} / 3$$

関数 α_1, α_2 および α_3 は J_2 および J_3^2 の関数で、 α_2 は α_3 より偏差応力成分について四次だけ低次の、偏差応力成分に関する同次式である。

塑性変形に対する式 (2-1) の中のひずみ ϵ_{ij} をひずみ速度 $\dot{\epsilon}_{ij}$ に置換することにより、定常クリープに対する関係式が形式的に得られる⁽³⁵⁾。すなわち、

$$\dot{\epsilon}_{ij} = F_1(\Delta_{ij}) / t_0 \text{ ----- (2-2)}$$

ここに、 t_0 は時間の単位を持つ定数であり、「 \cdot 」は時間 t に関する微分を表わす。

一般のクリープ変形に対する式 (2-1) または (2-2) のひとつの拡張形として次式が考えられる。

$$\epsilon_{ij} = F_1(\Delta_{ij}) Q_1(t) \text{ ----- (2-3)}$$

ただし、 Q_1 は時間 t のみの関数である。特別な場合として、 $Q_1(t) = (t/t_0)^m$ と置いた。

$$\epsilon_{ij} = F_1(\Delta_{ij}) (t/t_0)^m \text{ ----- (2-3a)}$$

がよく用いられる。ここに、 m は非負の定数で、(i) $m=0$ のとき塑性変形、(ii) $0 < m < 1$ のとき遷移クリープ、(iii) $m=1$ のとき定常クリープ、および (iv) $m > 1$ のとき加速クリープの各過程を代表することができる。

ここで、以下で用いる、式 (2-3) あるいは (2-3a) に基づく時間硬化説およびひずみ硬化説の式を導いておく。式 (2-3) および (2-3a) を時間 t について微分すると、

$$\dot{\epsilon}_{ij} = F_1(\Delta_{ij}) \dot{Q}_1(t) \text{ ----- (2-4)}$$

および

$$\dot{\epsilon}_{ij} = F_1(\Delta_{ij}) \frac{m}{t_0} \left(\frac{t}{t_0}\right)^{m-1} \text{----- (2-4a)}$$

が得られる。式(2-4)および(2-4a)は、それぞれ式(2-3)および(2-3a)をもとにした時間硬化説の式となる。

ひずみ硬化説の式は、式(2-3)と(2-4)、あるいは式(2-3a)と(2-4a)から t を消去すれば得られる。いま、ひずみの二次の不変量 I_2 を硬化を表わす変数として用いることにし、式(2-3)の中の ϵ_{ij} および Δ_{ij} が主ひずみ、主応力で表わされているものとする⁽³⁶⁾。式(2-3)より、 I_2 は偏差応力の二次および三次不変量、 J_2 および J_3 を用いて次のように表わされる。

$$I_2 = F_2(J_2, J_3) [Q_1(t)]^2 \text{----- (2-5)}$$

ここに、 F_2 は J_2 および J_3 の関数である。 $Q_1(t)$ の具体的な形が与えられなければ、これ以上演算を進めることはできないので、式(2-3a)をもとにした、

$$I_2 = F_2(J_2, J_3) (t/t_0)^{2m} \text{----- (2-5a)}$$

を式(2-5)の代りに用い、式(2-4a)および(2-5a)から t を消去すると、

$$\dot{\epsilon}_{ij} = \frac{m}{t_0} \left[\frac{F_2(J_2, J_3)}{I_2} \right]^{\frac{1-m}{2m}} F_1(\Delta_{ij}) \text{----- (2-6)}$$

が得られる。これが式(2-3a)をもとにしたひずみ硬化説の式である。

本論文の応力・ひずみ解析においては、構成式の基本形として、簡単のため、Norton型のクリープ則を採用する。すなわち、単軸引張りに対して、

$$\dot{\epsilon} = \dot{\epsilon}_c (\sigma/\sigma_c)^n \text{ ----- (2-7)}$$

一般の場合には、式(2-7)を一般化した

$$\dot{\epsilon}_{ij} = \frac{3}{2} \dot{\epsilon}_c \left(\frac{\sigma_e}{\sigma_c}\right)^{n-1} \frac{\Delta_{ij}}{\sigma_c} \text{ ----- (2-8)}$$

が成立すると仮定する。ここに、 $\dot{\epsilon}_c$ 、 σ_c および n は材料定数であり、 σ_e は Mises 型の等価応力である。式(2-8)は、一般式(2-2)において、関数 $F_i(\Delta_{ij})$ が $J_2^{\frac{n-1}{2}} \Delta_{ij}$ の定数倍で与えられると仮定することと等価である。

せん断ひずみ成分しか存在しないような縦せん断問題、あるいはねじり問題においては、式(2-8)より、

$$\dot{\gamma} = \dot{\gamma}_c (\tau/\tau_c)^n \text{ ----- (2-9)}$$

となる。ただし、 $\dot{\gamma}$ はせん断ひずみ速度、 τ はせん断応力であり、 $\dot{\gamma}_c$ および τ_c は次式で与えられる定数である。

$$\left. \begin{aligned} \dot{\gamma}_c &= \sqrt{3} \dot{\epsilon}_c \\ \tau_c &= \sigma_c / \sqrt{3} \end{aligned} \right\} \text{ ----- (2-10)}$$

さて、クリーブ応力解析においては、問題をそのまま解く代りに、弾性応力解に相似則を適用してクリーブ解を求めることが多いので、以下ではこの相似則についてふれておく。Hoff⁽³⁵⁾ は、構成式(2-1)のもとにおける応力・ひずみ解が求められておれば、この解においてひずみ ϵ_{ij} をひずみ速度 $\dot{\epsilon}_{ij}$ に置換することにより、クリーブ則・式(2-2)のもとにおける応力・ひずみがただちに求められることを指摘し、この事実を「クリーブ応力解析における弾性相似則」と名付けている。さらに、大路⁽³⁶⁾ は この相似則をクリーブ曲線が一般式(2-3)あるいは(2-3a)で表わされる場合に拡張している。大路によれば、時間硬化説(式(2-4)あるいは(2-4a))が

仮定できる場合には、境界条件の時間的変動の有無に無関係に簡単な相似則が成立する。また、材料がひずみ硬化説（式(2-6)）に従う場合、境界条件が時間的に変動しないとき、変動しても荷重が比例負荷的に変化するとき、あるいは、変位が相互に比例的に変化するときには相似則が成立する。

この相似則を用いれば、クリープ則(2-7)、(2-8)および(2-9)のもとにおける応力およびひずみ速度は、応力・ひずみ関係式が以下の式で与えられる非線形弾性体の応力およびひずみから簡単に求められることになる。

$$\varepsilon = \varepsilon_0 (\sigma / \sigma_0)^n \text{ ----- (2-11)}$$

$$\dot{\varepsilon}_{ij} = \frac{3}{2} \varepsilon_0 \left(\frac{\sigma_e}{\sigma_0} \right)^{n-1} \frac{\dot{\sigma}_{ij}}{\sigma_0} \text{ ----- (2-12)}$$

$$\gamma = \gamma_0 (\tau / \tau_0)^n \text{ ----- (2-13)}$$

ただし、 ε_0 および σ_0 は材料定数であり、 γ_0 および τ_0 はそれぞれ ε_0 および σ_0 を用いて次式のように表わされる。

$$\left. \begin{array}{l} \gamma_0 = \sqrt{3} \varepsilon_0 \\ \tau_0 = \sigma_0 / \sqrt{3} \end{array} \right\} \text{ ----- (2-14)}$$

2.1.2 き裂先端近傍の応力・ひずみ

ここでは、定常クリープ則（式(2-8)あるいは(2-9)）に従う物体内における、モードⅢ型およびモードⅠ型き裂先端近傍の応力・ひずみを求める。まず、非線形弾性（式(2-12)あるいは(2-13)）のもとにおけるき裂先端近傍の応力・ひずみを求め、これに前述の「クリープ応力解析における弾性相似則」を適用することにより、定常クリープ下のき裂先端近傍の応力およびひずみ速度を求める。

(i) モードⅢ型き裂の場合

まず、縦せん断問題における基礎式について説明する。零でない変位成分は、 x 軸および y 軸に垂直な z 方向成分 $w(x, y)$ だけである。したがって、零でないひずみ成分は γ_{xz} および γ_{yz} のみであり、これらは次式で与えられる。

$$\gamma_{xz} = \partial w / \partial x, \quad \gamma_{yz} = \partial w / \partial y \quad \text{----- (2-15)}$$

式(2-15)より適合条件式は、

$$\partial \gamma_{xz} / \partial y - \partial \gamma_{yz} / \partial x = 0 \quad \text{----- (2-16)}$$

零でない応力成分は、 τ_{xz} および τ_{yz} だけである。よって、釣合いの式は、

$$\partial \tau_{xz} / \partial x + \partial \tau_{yz} / \partial y = 0 \quad \text{----- (2-17)}$$

いま、応力 τ がひずみ γ のみの関数として与えられる、すなわち、 τ と γ の関係が全ひずみ理論で与えられる場合を考える。応力・ひずみ関係式が非線形である場合、式(2-16)および(2-17)から物理面 (x, y) における支配方程式を導くと、これは非線形偏微分方程式となる。しかるに、物理面内の位置 x および y をひずみの関数として取扱うと、支配方程式は線形化できる。このひずみ面(図2-1)内における支配方程式は以下のように表わされる⁽³⁸⁾。

$$\frac{\tau}{\gamma} \frac{d\tau/d\gamma}{d\gamma} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \gamma^2} + \frac{1}{\gamma} \frac{\partial \psi}{\partial \gamma} + \frac{1}{\gamma^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \phi^2} = 0 \quad \text{----- (2-18)}$$

$$\left. \begin{aligned} x &= -\sin \phi \frac{\partial \psi}{\partial \gamma} - \frac{\cos \phi}{\gamma} \frac{\partial \psi}{\partial \phi} \\ y &= \cos \phi \frac{\partial \psi}{\partial \gamma} - \frac{\sin \phi}{\gamma} \frac{\partial \psi}{\partial \phi} \end{aligned} \right\} \text{----- (2-19)}$$

ここに ψ はポテンシャルであり、 ϕ は図2-1のようにとるものと

する。この手法は、Rice により、き裂を有する半無限体の弾塑性
 応力解析⁽³⁸⁾、および切欠きを有する帯板の完全弾塑性解析⁽³⁹⁾に用
 いられている。

基礎式が得られたので、非線形弾性のもとにおけるき裂先端近
 傍の応力・ひずみを求める。非線形弾性(式(2-13))のもとでは、
 $\tau / \{\gamma \cdot d\tau / d\gamma\}$ は n に等しいので、式
 (2-18) は、

$$n \frac{\partial^2 \psi}{\partial \gamma^2} + \frac{1}{\gamma} \frac{\partial \psi}{\partial \gamma} + \frac{1}{\gamma^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \phi^2} = 0$$

----- (2-20)

となる。図2-2 に示すモードⅢ型き裂に
 においては、対称性よりき裂先端前方の
 γ_{xz} は零に等しい。また、き裂面上では
 γ_{yz} は零である。したがって、物理面(図
 2-2)における境界条件は、

$$\left. \begin{array}{l} y=0, x>0 \text{ で、} \\ \gamma_{xz} = 0 \\ y=0, x<0 \text{ で、} \\ \gamma_{yz} = 0 \end{array} \right\}$$

----- (2-21)

と表わされる。式(2-19)を用
 いれば、式(2-21)からひずみ
 面(図2-1)における境界条件
 が求められる。すなわち、

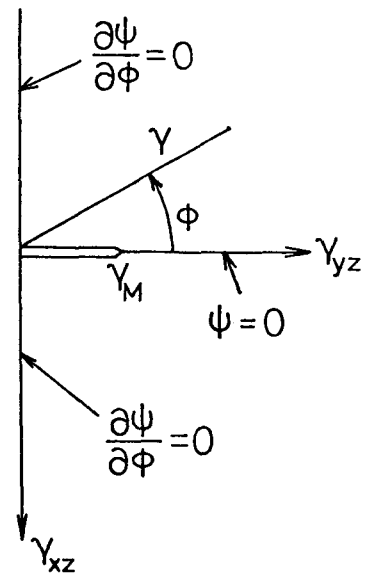


図2-1 ひずみ面

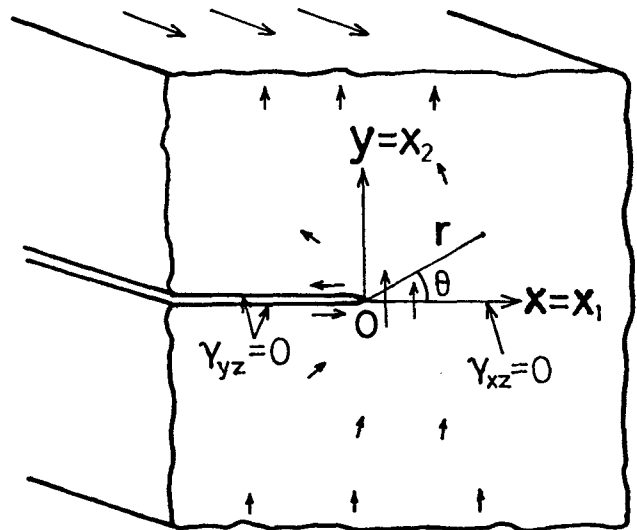


図2-2 モードⅢ型き裂

$$\left. \begin{array}{l} \phi = 0, \gamma > \gamma_M \text{ で, } \quad \partial\psi/\partial\gamma = 0 \\ \phi = \pm\pi/2 \text{ で, } \quad \partial\psi/\partial\phi = 0 \end{array} \right\} \text{----- (2-22)}$$

ここに γ_M はある有限確定値である。式(2-22)の第1式は、 $\phi = 0, \gamma > \gamma_M$ で ψ が一定値をとることを表わしており、この値は任意であるので簡単のため零とおく。すなわち、

$$\phi = 0, \gamma > \gamma_M \text{ で, } \quad \psi = 0 \text{ ----- (2-22a)}$$

き裂先端近傍における ψ の漸近解を求めてみよう。いま、き裂先端近傍において、換言すれば " $\gamma \rightarrow \infty$ のとき、 ψ が γ のみの関数 $H(\gamma)$ と ϕ のみの関数 $G(\phi)$ との積で与えられると仮定する。

$$\psi = H(\gamma) G(\phi), \quad \gamma \rightarrow \infty \text{ ----- (2-23)}$$

式(2-23)を式(2-20)に代入し、整理すると、

$$\frac{n(d^2H/d\gamma^2) + (dH/d\gamma)/\gamma}{H/\gamma^2} = - \frac{d^2G/d\phi^2}{G} \text{ ----- (2-24)}$$

となる。式(2-24)の両辺は定数でなければならぬので、いまこれを κ と置くと、次の二つの式が得られる。

$$d^2G/d\phi^2 + \kappa G = 0 \text{ ----- (2-25)}$$

$$n(d^2H/d\gamma^2) + (dH/d\gamma)/\gamma - \kappa H/\gamma^2 = 0 \text{ ----- (2-26)}$$

式(2-23)を式(2-22)の第2式および(2-22a)に代入すると、

$$G(0) = 0, \quad \left. \frac{dG}{d\phi} \right|_{\phi=\pm\pi/2} = 0 \text{ ----- (2-27)}$$

境界条件式(2-27)のもとにおける、式(2-25)の解は、

$$G(\phi) = B_k \sin(2k-1)\phi, \quad \kappa = (2k-1)^2 \text{ ----- (2-28)}$$

で与えられる。ここに、 B_k は定数、 k は自然数である。このとき、式(2-26)の解は、

$$H(\gamma) = C_{k+} \gamma^{\alpha_{k+}} + C_{k-} \gamma^{\alpha_{k-}} \text{----- (2-29)}$$

$$\alpha_{k\pm} = \frac{n-1 \pm \sqrt{(n-1)^2 + 4n(2k-1)^2}}{2n} \text{----- (2-30)}$$

さて、き裂先端において、ひずみ γ は特異性を持っている。したがって、

$$\gamma \rightarrow 0 \text{ のとき, } \gamma \rightarrow \infty$$

となる。しかるに、式(2-19)より、 r は、

$$r^2 = x^2 + y^2 = \left(\frac{\partial \psi}{\partial \gamma}\right)^2 + \frac{1}{\gamma^2} \left(\frac{\partial \psi}{\partial \phi}\right)^2$$

で与えられるので、

$$\gamma \rightarrow \infty \text{ のとき, } \left(\frac{\partial \psi}{\partial \gamma}\right)^2 + \frac{1}{\gamma^2} \left(\frac{\partial \psi}{\partial \phi}\right)^2 = G^2 \left\{ \left(\frac{dH}{d\gamma}\right)^2 + \frac{1}{\gamma^2} \left(\frac{\partial H}{\partial \phi}\right)^2 \right\} \rightarrow 0$$

となる。よって、 $H(\gamma)$ は、 γ に関する一次より低次の関数でなければならぬ。しかるに、式(2-29)より、 $H(\gamma)$ は $\gamma^{\alpha_{k+}}$ と $\gamma^{\alpha_{k-}}$ の一次結合で表わされており、式(2-30)より、 $\alpha_{k+} \geq 1$ 、 $\alpha_{k-} < 0$ である。したがって、式(2-29)における $\gamma^{\alpha_{k+}}$ に対応する係数 C_{k+} は零でなければならぬ。前述のように、き裂先端近傍では $\gamma \rightarrow \infty$ であるので、 α_{k-} のうちで一番大きな値である $\alpha_{1-} = -1/n$ に対応する項が、他の項に比べて十分大きくなり、これがき裂先端近傍の挙動を決定づける。したがって、き裂先端近傍では、

$$\psi = -D_1 \gamma^{-1/n} \sin \phi \text{----- (2-31)}$$

ただし、

$$D_1 = -C_{1-} \cdot B_1 \text{----- (2-32)}$$

式(2-31)を式(2-19)に代入し、 ϕ を消去すると、

$$\{x - X(\gamma)\}^2 + y^2 = \{R(\gamma)\}^2 \text{ ----- (2-33)}$$

ここに、

$$R(\gamma) = \frac{1+n}{2n} \frac{D_1}{\gamma^{\frac{n+1}{2n}}}, \quad X(\gamma) = \frac{n-1}{n+1} R(\gamma) \text{ ----- (2-34)}$$

式(2-33) および (2-34)より、き裂先端近傍における ひずみ γ 一定の線は、図2-3に示すような円となる。また、 γ はき裂先端からの距離の $-n/(n+1)$ 乗に比例する。このことは、Riceら⁽³⁸⁾⁽⁴⁰⁾、Hutchinson⁽⁴¹⁾⁽⁴²⁾および Neuber⁽⁴³⁾の結果と一致する。特に、線形弾性($n=1$)の場合には、式(2-19)および(2-31)より、

$$\left. \begin{aligned} \gamma_{xz} &= -\sqrt{D_1/r} \sin(\theta/2) \\ \gamma_{yz} &= \sqrt{D_1/r} \cos(\theta/2) \end{aligned} \right\} \text{----- (2-35)}$$

となり、よく知られた結果と一致する。ここに、 r および θ は、図2-2に示すように、それぞれき裂先端からの距離およびき裂先端前方からの偏角である。

Hutchinson⁽⁴¹⁾⁽⁴²⁾は、モードI型き裂先端近傍の応力・ひずみを、Airyの応力関数に関する非線形偏微分方程式を数値的に解くことにより求めている。これと同様の手法を、モードIII型き裂に対して用いることにより、き裂先端近傍の応力・ひずみ挙動を求めても、

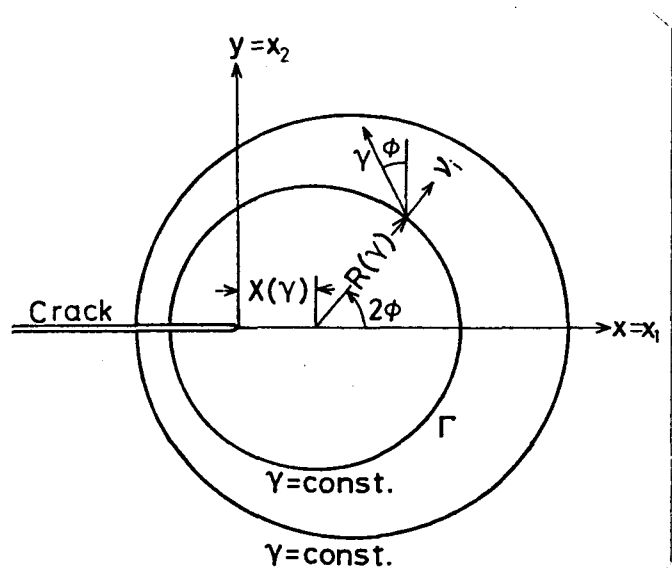


図2-3 モードIII型き裂先端近傍におけるひずみ一定線

上記の解析解とまったく同じ結果が得られる。

次に、応力・ひずみ関係が、一般の全ひずみ形関係式 $\tau = \tau(\gamma)$ で与えられる場合における、き裂先端近傍の応力・ひずみ挙動について議論しよう。前述のように、ひずみ面内の基礎方程式は、式(2-18)、(2-19)および(2-22)である。これらの式において、応力・ひずみ関係は、式(2-18)の左辺第一項の係数 $\tau / \{\gamma (d\tau/d\gamma)\}$ としてのみ関与している。前述のように、非線形弾性(式(2-13))のもとでは、この係数は n に等しい。いま、

$$n_{\infty} = \lim_{\gamma \rightarrow \infty} \left\{ \frac{\tau}{\gamma (d\tau/d\gamma)} \right\} = \lim_{\gamma \rightarrow \infty} \frac{d(\ln \gamma)}{d(\ln \tau)}$$

----- (2-36)

で定義される n_{∞} を考えると、き裂先端近傍、すなわち $\gamma \rightarrow \infty$ における支配方程式は、式(2-20)において n を n_{∞} に置換した式に帰着する。したがって、一般の全ひずみ形関係式 $\tau = \tau(\gamma)$ が成立する場合における、き裂先端近傍の応力・ひずみ挙動は、 n_{∞} によって決まり、本論文のように非線形弾性(式(2-13))の場合の挙動を求めておけば、これから直ちに求められることになる。

一例として、応力・ひずみ関係が次のように2本の直線で表わされる場合を考える。

$$\left. \begin{array}{l} \tau \leq \tau_0 \text{ のとき, } \quad \gamma = \tau / G' \\ \tau > \tau_0 \text{ のとき, } \quad \gamma = \tau / G' + (\tau - \tau_0) / G'' \end{array} \right\}$$

----- (2-37)

ここに、 G' 、 G'' および τ_0 は材料定数である。式(2-37)を(2-36)に代入すると、

$$\left. \begin{array}{l} G'' = 0 \text{ のとき, } n_{\infty} = \infty \\ G'' \neq 0 \text{ のとき, } n_{\infty} = 1 \end{array} \right\} \text{----- (2-38)}$$

したがって、 $G'' = 0$ の場合 および $G'' \neq 0$ の場合の き裂先端近傍の応力・ひずみ分布形は、それぞれ、非線形弾性で $n = \infty$ の場合 および線形弾性の場合の応力分布形と一致することになる。

非線形弾性のもとにおける き裂先端近傍の応力・ひずみが求まったので、これに「クリーブ応力解析における弾性相似則」を用いることにより、定常クリーブ則(式(2-9))のもとにおける き裂先端近傍の応力およびひずみ速度が求められる。すなわち、き裂先端近傍の応力およびひずみ速度は、き裂先端からの距離のそれぞれ $1/(n+1)$ 乗 および $n/(n+1)$ 乗に逆比例し、応力あるいはひずみ速度が一定の線は図2-3のような円となる。

(ii) モード I 型き裂の場合

Hutchinson⁽⁴¹⁾⁽⁴²⁾ は、材料が Ramberg-Osgood 型の構成式、すなわち、

$$\varepsilon = \sigma / E + \varepsilon_0 (\sigma / \sigma_0)^{n_0} \text{----- (2-39)}$$

に従う場合における、モード I 型き裂先端近傍の応力・ひずみ分布形を数値的に求めている。

一方、モード II 型き裂の場合の結果から類推すると、モード I 型き裂の場合においても、応力・ひずみ関係が異なっているとしても、

$$n_{\infty} = \lim_{\varepsilon \rightarrow \infty} \frac{d(\ln \varepsilon)}{d(\ln \sigma)} \text{----- (2-40)}$$

によって与えられる n_{∞} が同じであれば、き裂先端近傍の応力・ひずみ分布形は同じであると考えられる。Ramberg-Osgood 型の構成式(式(2-39))のもとでは、 $n_{\infty} = n_0$ であり、非線形弾性(式

(2-11)のもとでは、 $n_{\infty} = n$ である。したがって、Hutchinsonの解析結果より、ただちに非線形弾性におけるき裂先端近傍の応力・ひずみが求められ、応力 σ_{ij} 、等価応力 σ_e 、ひずみ ε_{ij} および等価ひずみ ε_e は次のように表わされる。

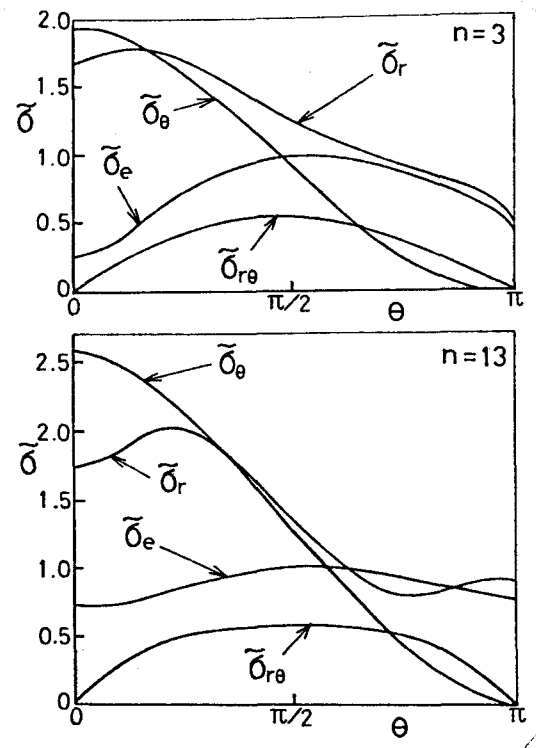
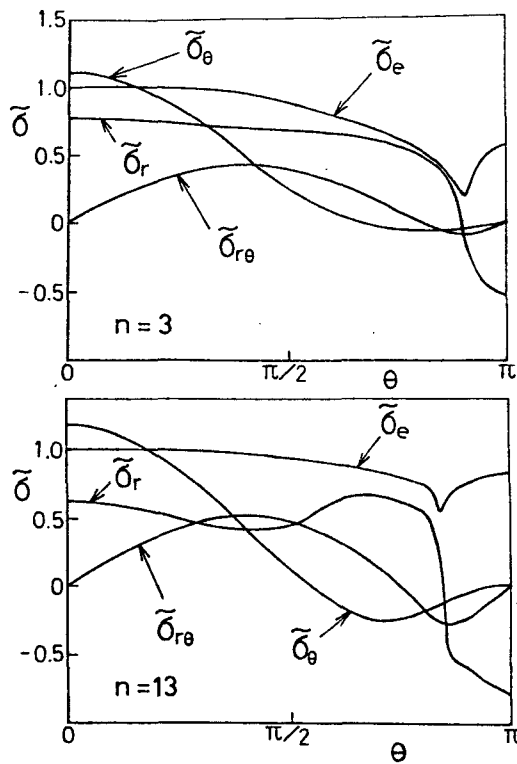
$$\left. \begin{aligned} \sigma_{ij}(r, \theta) &= K_{\sigma} r^{-\frac{1}{n+1}} \tilde{\sigma}_{ij}(\theta) \\ \sigma_e(r, \theta) &= K_{\sigma} r^{-\frac{1}{n+1}} \tilde{\sigma}_e(\theta) \\ \varepsilon_{ij}(r, \theta) &= K_{\varepsilon} r^{-\frac{n}{n+1}} \tilde{\varepsilon}_{ij}(\theta) \\ \varepsilon_e(r, \theta) &= K_{\varepsilon} r^{-\frac{n}{n+1}} \tilde{\varepsilon}_e(\theta) \end{aligned} \right\} \text{----- (2-41)}$$

ここに、 K_{σ} および K_{ε} はそれぞれ塑性の応力拡大係数およびひずみ拡大係数、 $\tilde{\sigma}_{ij}$ 、 $\tilde{\sigma}_e$ 、 $\tilde{\varepsilon}_{ij}$ および $\tilde{\varepsilon}_e$ はき裂先端前方からの偏角 θ のみの関数であり、

$$\max_{0 \leq \theta \leq \pi} \tilde{\sigma}_e(\theta) = 1, \quad \max_{0 \leq \theta \leq \pi} \tilde{\varepsilon}_e(\theta) = 1 \text{ ----- (2-42)}$$

の関係が成立するものとする。 $\tilde{\sigma}_{ij}(\theta)$ および $\tilde{\sigma}_e(\theta)$ の数値計算結果の例をHutchinson⁽⁴¹⁾の論文から引用して図2-4に示す。

モードI型き裂の場合においても、以上の非線形弾性の結果に「クリーブ応力解析における弾性相似則」を適用すれば、ただちに定常クリーブ(式(2-7)あるいは(2-8))のもとにおける、き裂先端近傍の応力およびひずみ速度が求められる。すなわち、モードI型クリーブき裂においても、き裂先端近傍の応力およびひずみ速度は、き裂先端からの距離のそれぞれ $1/(n+1)$ 乗および $n/(n+1)$ 乗に逆比例し、応力分布形は図2-4で与えられる。



(a) 平面応力

(b) 平面ひずみ

図2-4 モードI型き裂先端近傍の応力分布形⁽⁴¹⁾

2.2 修正J積分

Rice の提案したJ積分⁽⁴⁴⁾は、弾性・塑性（非線形弾性）を通じての破壊力学におけるひとつの重要な力学的パラメータとして、最近、脚光を浴びつつある。たとえば、破壊じん性試験におけるJの実験的決定法が開発され^{(45)~(49)}、それに基づいて決定された平面ひずみ条件下のき裂発生に対するJの限界値 J_{IC} は、小規模降伏条件が満足されていないような試験片を用いて実験しても、小規模降伏条件下の値とよく一致することが示されている⁽⁴⁷⁾。また、疲れき裂伝播において、き裂成長速度が低サイクル側・高サイクル側のいかに問わずJの変動幅 ΔJ によってよく整理されるという報告⁽⁵⁰⁾がある。このほか、Jは、広く非線形破壊力学における重要なパラメータとして用いられつつある^{(51)~(53)}。

本節では、このJ積分の概念をクリーブ問題に導入することにより得られる修正J積分 J' を提案し、 J' の有する性質、 J' の実験的求め方、さらには J' と応力拡大係数との関係について議論する。

なお、本節においては、式の表示を簡単化するため、Einsteinの総和規約を用いる。

2.2.1 定常クリーブ則のもとにおける修正J積分

図2-5に示すような、二次元物体内のき裂のJ積分は次式で与えられる⁽⁴⁴⁾。

$$J = \int_{\Gamma} (W dy - T_i \frac{\partial u_i}{\partial x} dc) \text{ ----- (2-43)}$$

ここに、 W はひずみエネルギー密度、 T_i は応力ベクトル、 u_i は変

位であり、 Γ はき裂先端のまわりをき裂下面上の一点からき裂上面上の一点に向う経路、 dc は Γ の線素をそれぞれ表わしている。J積分の特徴としては、(i)積分経路独立性を有すること⁽⁴⁴⁾、(ii)き裂先端近傍の特異応力場に対するひとつの尺度を与えること⁽⁴⁴⁾、および(iii)ポテンシャル・エネルギーの解放率に等しいこと⁽⁵⁴⁾があげられる。

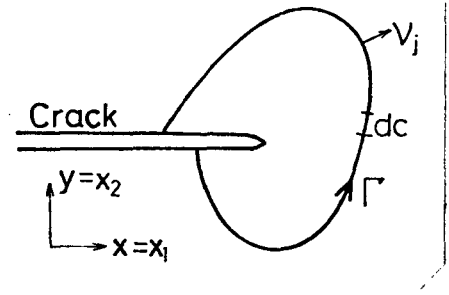


図2-5 き裂を有する二次元物体

クリーフ問題においても、これと同様の特徴を有し、J積分と対応づけられる力学量が以下のようにして導入できる。すなわち、「クリーフ応力解析における弾性相似則」を用いて、J積分における変位場を変位速度場に置換することにより、次のような修正J積分 J' およびこれと相補な関係にあるコンプリメンタリ修正J積分 J_c' ^(注) が得られる。

$$\left. \begin{aligned} J' &= \int_{\Gamma} (W' dy - T_i \frac{\partial \dot{u}_i}{\partial x} dc) \\ J_c' &= \int_{\Gamma} (-W_c' dy + \dot{u}_i \frac{\partial \sigma_{ji}}{\partial x} \nu_j dc) \end{aligned} \right\} \text{----- (2-44)}$$

ここに、

$$W' = \int_0^{\dot{\epsilon}_{ij}} \sigma_{ij} d\dot{\epsilon}_{ij}, \quad W_c' = \int_0^{\sigma_{ij}} \dot{\epsilon}_{ij} d\sigma_{ij} \text{ ---- (2-45)}$$

であり、 ν_j は外向き法線ベクトルである。 W' あるいは W_c' の存在性が示されれば、弾性および塑性(非線形弾性)におけるJ積分の積分経路独立性の証明⁽⁴⁴⁾とまったく同様にして、 J' あるいは J_c'

(注) J_c' の導出については、付録I参照のこと。

の積分経路独立性が導かれる^(注)。

なお、 W' および W_c' については、ひずみ速度成分が、

$$\dot{\epsilon}_{ij} = L(J_2) s_{ij}$$

で与えられる場合に、これらのポテンシャルの存在することが示されている⁽⁵⁵⁾。ここに、 L は偏差応力 s_{ij} の二次不変量 J_2 のみの関数である。たとえば、関数 L がバキ関数である、換言すると Norton 型の関係式 (2-8) が成立する場合には、 W' および W_c' は存在し、

$$W' = \frac{n}{n+1} G_e \dot{\epsilon}_e, \quad W_c' = \frac{1}{n+1} G_e \dot{\epsilon}_e \quad \text{-----(2-4b)}$$

で与えられる⁽⁵⁶⁾。

次に、弾性体の J がすでに求まっている場合に、「クリーブ応力解析における弾性相似則」を用いて J から J' を求める方法について考えてみよう。クリーブ体には、体積力として φ_i 、表面 S_0 に表面力 T_i が作用し、残りの表面 S_u は速度 V_i で変形しているものとする。クリーブ体と比較させる弾性体では、応力・ひずみ関係は式 (2-1) で与えられ、体積力 φ_i 、 S_0 上で表面力 T_i が作用し、 S_u 上の変位 U_i が $t_1 V_i$ になっているものとする。ここに、 t_1 は時間の単位を有する定数である。

き裂問題においては、き裂面上で $T_i=0$ であるので、この問題は応力境界値問題、あるいは混合境界値問題となる。

まず、応力境界値問題となる場合を考えよう。弾性応力解および変位解をそれぞれ g_{ij} および u_{gi} と置き、これに対応する J 積分値を J_g で表わすことにする。このとき、「クリーブ応力解析にお

(注) 積分経路独立性については、付録 I で詳論している。

ける弾性相似則」より、クリープ解は、

$$\Delta_{ij} = g_{ij}, \quad \dot{\epsilon}_{ij} = \frac{F_1(g_{ij})}{t_0}, \quad \dot{u}_i = \frac{u_{gi}}{t_0} \quad \text{---(2-47)}$$

で与えられる。式(2-47)および(2-45)を式(2-44)に代入し、整理すると、

$$J' = J_G / t_0 \quad \text{----- (2-48)}$$

となる。

また、表面 S_0 上で $T_i = 0$ であり、 S_u 上で変位が規定されているような混合境界値問題を考えると、構成式中の関数 F_1 が偏差応力 Δ_{ij} に関する n 次同次式であり、かつ $\varphi_i = 0$ であれば、クリープ解は、

$$\Delta_{ij} = \frac{h_{ij}}{(t_1/t_0)^{1/n}}, \quad \dot{\epsilon}_{ij} = \frac{F_1(h_{ij})}{t_1} \quad \text{----- (2-49)}$$

で表わされる。ここに、 h_{ij} は弾性応力解である。弾性解 h_{ij} に対応する J 積分値を J_H で表わすと、 J' は前と同様にして次式で与えられる。

$$J' = (t_0/t_1)^{1/n} J_H / t_1 \quad \text{----- (2-50)}$$

以上の議論においては、き裂は進展しないものと仮定して論じてきたが、定常クリープ則のもとでは、き裂が進展する場合にも同様にして積分経路独立性を有する J' および J_c' が定義できる。すなわち、定常クリープ則(式(2-2))のもとでは、履歴に依らず応力とひずみ速度との間に関数 F_1 で表わされる一対一の対応関係がある。したがって、たとえき裂が成長することにより新しいき裂面すなわち自由表面ができる場合においても W' および W_c' が定義でき、 J' および J_c' は存在する。この W' および W_c' の存在性

を用いることにより、上述の静止き裂の場合と同様にして、進展するき裂の J' および J_c' の積分経路独立性が証明される。

積分経路独立性を用いれば、き裂先端近傍の応力・ひずみに関する情報が、き裂先端から十分離れた経路に沿った積分値により求められることになる。この積分値は、有限要素法などを用いれば比較的簡単に、しかも精度良く求められると期待される。

なお、本論文で提案した修正 J 積分 J' は、本研究とは独立に Landes ら⁽¹⁷⁾ によっても提案され、 C^* 積分と名付けられている。

2.2.2 硬化型のクリーブ則のもとにおける修正 J 積分

ここでは、硬化型のクリーブ則のもとにおける修正 J 積分 J' の存在性、および J' と J との間の変換則について論ずる。

(i) 時間硬化説を用いた場合

まず、時間硬化説 (式 (2-4) あるいは (2-4a)) のもとにおける修正 J 積分 J' の存在性について考えよう。すでに述べたように、積分経路独立性を有する J' が定義できるか否かは、位置に無関係なポテンシャル W' が存在するか否かに依存している。

いま、ひずみ速度が 時間のみの関数 $f(t)$ と関数 $F_i(\Delta\epsilon_{ij})$ との積で表わされる場合を考える。すなわち、

$$\dot{\epsilon}_{ij} = f(t) F_i(\Delta\epsilon_{ij}) \text{ ----- (2-51)}$$

このような場合のポテンシャル W' は、定常クリーブ則 (式 (2-2)) のもとにおけるポテンシャル W_s' を用いて、次のように表わされる。

$$W' = t_0 f(t) W_s' \text{ ----- (2-52)}$$

しかるに、時間硬化説の式は、式 (2-4) あるいは (2-4a) で与えられ、これらは式 (2-51) の特別な場合である。したがって、式 (2-

52)より、

$$W' = t_0 \dot{Q}_1 W_s' \text{ ----- (2-53)}$$

あるいは、

$$W' = m (t/t_0)^{m-1} W_s' \text{ ----- (2-53a)}$$

となり、 J' はつねに存在する。

次に、時間硬化型のクリーブ則のもとにおける J' と弾性体の J との間の関係を求める。

まず、応力境界値問題の場合について述べる。2・2・1項と同様に、クリーブ解は、弾性応力解 q_{ij} および変位解 u_{Gi} を用いて、

$$\Delta_{ij} = q_{ij}, \quad \dot{\epsilon}_{ij} = \dot{Q}_1 F_1(q_{ij}), \quad \dot{u}_i = \dot{Q}_1 u_{Gi} \text{ ----- (2-54)}$$

で与えられることが、大路⁽³⁶⁾によって示されている。よって、式(2-54)より、この場合の J' は、弾性解に対応する J 積分値 J_G を用いて、

$$J' = \dot{Q}_1 J_G \text{ ----- (2-55)}$$

と表わされる。

次に、表面 S_σ 上で $T_i = 0$, S_u 上で変位が規定されているような混合境界値問題を考える。2・2・1項と同様に、 F_1 が偏差応力に関する n 次同次式であり、かつ $\varphi_i = 0$ であれば、クリーブ解は、弾性応力解 k_{ij} を用いて、

$$\Delta_{ij} = \frac{k_{ij}}{(t_1 \dot{Q}_1)^{1/n}}, \quad \dot{\epsilon}_{ij} = \frac{F_1(k_{ij})}{t_1} \text{ ----- (2-56)}$$

と書ける⁽³⁶⁾。よって、この場合の J' は、非線形弾性体の J 積分値 J_H を用いて、次式で与えられる。

$$J' = J_H / [t_1^{1+1/n} (\dot{Q}_1)^{1/n}] \text{ ----- (2-57)}$$

(ii) ひずみ硬化説を用いた場合

ひずみ硬化説の式は、式(2-6)であり、式(2-6)中の $[F_2(J_2, J_3)/I_2]^{(1-m)/2m}$ は履歴の影響を受け一般に場所により異なる。したがって、この場合は、時間硬化説を用いた場合とは異なり、式(2-51)は成立せず一般に W' 、したがって J' を定義することはできない。そこで、 $[F_2(J_2, J_3)/I_2]^{(1-m)/2m}$ が場所に依らず一定なスカラー量になり、式(2-51)が成立し、したがって W' が存在するような条件を求めてみよう。

まず、応力境界値問題について述べる。いま体積力 φ_i および表面力 T_i が次式で与えられる場合を考える。

$$\varphi_i = \varphi_{i0} g_i(t), \quad T_i = T_{i0} g_i(t) \quad \text{----- (2-58)}$$

ここに、 φ_{i0} および T_{i0} は位置のみの関数であり、 g_i は時間 t のみの関数であるとする。体積力および表面力がそれぞれ、 φ_{i0} および T_{i0} で与えられるときの弾性応力解を g'_{ij} とし、 g'_{ij} に対応する J 積分値を J_{g0} で表わすことにする。このとき、クリープ解は

$$\frac{F_2(J_2, J_3)}{I_2} = \frac{t_0^{2m} \{g_i(t)\}^{2n}}{\left[\int_0^t \{g_i(t)\}^{n/m} dt \right]^{2m}} \quad \text{----- (2-59)}$$

$$\left. \begin{aligned} \Delta_{ij} &= g_i(t) g'_{ij} \\ \dot{\epsilon}_{ij} &= \frac{m \{g_i(t)\}^{n/m} F_1(g'_{ij})}{t_0^m \left[\int_0^t \{g_i(t)\}^{n/m} dt \right]^{1-m}} \end{aligned} \right\} \quad \text{----- (2-60)}$$

となる⁽³⁶⁾。よって、この場合には $[F_2(J_2, J_3)/I_2]^{(1-m)/2m}$ は時間 t のみの関数となり、 W' 、したがって J' が存在する。式(2-60)より、 J' は次式で与えられる。

$$J' = \frac{m \{g_1(t)\}^{1+n/m}}{t_0^m \left[\int_0^t \{g_1(t)\}^{n/m} dt \right]^{1-m}} J_{G0} \quad \text{----- (2-61)}$$

特に、 φ_i および T_i が時間的に変化しない場合には、 $g_1(t) = 1$ と置いて、

$$J' = (m/t_0) (t_0/t)^{1-m} J_{G0} \quad \text{----- (2-61a)}$$

次に、表面 S_0 上で $T_i = 0$ であり、 S_u 上で変位が規定されているような混合境界値問題について論ずる。特別な場合として、 U_i および V_i が次式のように与えられる場合を考える。

$$U_i = U_{i0} g_2(t), \quad V_i = V_{i0} g_2(t) \quad \text{----- (2-62)}$$

ただし、

$$U_{i0} = t_1 V_{i0} \quad \text{----- (2-63)}$$

ここに、 U_{i0} および V_{i0} は位置のみの関数であり、 g_2 は時間 t のみの関数であるとする。表面 S_u 上で $u_i = U_{i0}$ である場合の弾性応力解を h'_{ij} とし、 h'_{ij} に対応する J 積分値を J_{H0} で表わす。このとき、構成式中の関数 F_1 が偏差応力に関する n 次同次式であり、かつ $\varphi_i = 0$ であれば、クリーフ解は、

$$\frac{F_2(J_2, J_3)}{I_2} = \left[\frac{t_0 g_2(t)}{m \int_0^t g_2(t) dt} \right]^{2m} \quad \text{----- (2-64)}$$

$$\left. \begin{aligned} \Delta_{ij} &= \left[\frac{g_2(t)}{m} \frac{t_0}{t_1} \left\{ \frac{m \int_0^t g_2(t) dt}{t_0 g_2(t)} \right\}^{1-m} \right]^{1/n} h'_{ij} \\ \dot{\epsilon}_{ij} &= \frac{g_2(t)}{m} F_1(h'_{ij}) \end{aligned} \right\} \quad \text{(2-65)}$$

となる⁽³⁶⁾。よって、この場合には $[F_2(J_2, J_3)/I_2]^{(1-m)/2m}$ は時間

t のみの関数となり、 J' は存在する。式(2-65)より J' は、

$$J' = \frac{g_2(t)}{t_1} \left[\frac{1}{m} \frac{t_0}{t_1} g_2(t) \left\{ \frac{m \int_0^t g_2(t) dt}{t_0 g_2(t)} \right\}^{1-m} \right]^{\frac{1}{n}} J_{H0} \quad \text{----- (2-66)}$$

で与えられる。特に、 Π_i および V_i が時間的に変動しない場合には、 $g_2(t) = 1$ と置くことにより、

$$J' = \frac{1}{t_1} \left[\frac{t}{t_1} \left(\frac{t_0}{m t} \right)^m \right]^{\frac{1}{n}} J_{H0} \quad \text{----- (2-66a)}$$

となる。

なお、2・2・1項と同様にして、硬化型のクリープ則のもとにおける J' の積分経路独立性を示すことができる。

以上、進展しないき裂の J' について述べてきたが、ここで進展き裂の J' について簡単にふれておく。まず、時間硬化説のもとでは、ポテンシャル W' は式(2-53)あるいは(2-53a)で与えられる場所に依存しない。よって、定常クリープ則の J' の場合と同様に、進展き裂に対しても J' が存在する。ひずみ硬化説を採用した場合には、前述のように、境界条件が時間的に変化しないか、荷重が比例負荷的に変化するか、あるいは変位が相互に比例的に変化するときに J' が定義できた。したがって、き裂が成長することにより新たにき裂面(自由表面)ができ応力境界面そのものが変化するような進展き裂の問題においては、一般に J' は存在しないことになる。

2・2・3 修正 J 積分と応力拡大係数との関係

ここでは、修正 J 積分の積分経路として、き裂先端近傍の経路をとることにより、修正 J 積分と き裂先端近傍の応力場の強さを表

わす塑性の応力拡大係数 K_G との関係を求めてみよう。なお、簡単のため、以後の議論と関連のある Norton型の定常クリープ状態に問題を限定して論ずる。

(i) モードⅢ型き裂の場合

Norton型の定常クリープ則(式(2-9))のもとにおけるモードⅢ型き裂先端近傍の応力・ひずみは、2・1・2項で求められている。そこで、この結果を用いて修正J積分 J' と塑性の応力拡大係数 K_G との間関係を求める。

まず、非線形弾性(式(2-13))におけるJ積分と塑性の応力拡大係数 K_G あるいはひずみ拡大係数 K_E との関係を求める。J積分の積分経路 Γ は任意であるので、いま、 Γ として図2-3に示すようなき裂先端近傍のひずみ γ 一定線を選ぶことにする。ひずみエネルギー密度はひずみ γ のみの関数であるので、 Γ 上で W は一定となる。したがって、J積分の定義式(2-43)の第一項は、線積分をとれば零になる。経路 Γ の外向き法線ベクトルを ν_i とすれば、式(2-43)の被積分関数の第二項は、

$$-T_i \frac{\partial u_i}{\partial x} = -T_3 \frac{\partial u_3}{\partial x} = -(b_{13} \nu_1 + b_{23} \nu_2) \frac{\partial u_3}{\partial x} \quad \text{----- (2-67)}$$

一方、2・1・2項の結果および図2-3より、次の関係が成立する。

$$b_{13} = \tau_{xz} = -\tau_0 (\gamma/\gamma_0)^{1/n} \sin \phi$$

$$b_{23} = \tau_{yz} = \tau_0 (\gamma/\gamma_0)^{1/n} \cos \phi$$

$$\nu_1 = \cos 2\phi, \quad \nu_2 = \sin 2\phi$$

$$\partial u_3 / \partial x = \partial W / \partial x = \gamma_{xz} = -\gamma \sin \phi$$

これらの式を用いて、式(2-67)を変形すると、

$$-T_i \frac{\partial u_i}{\partial x} = \tau_0 \left(\frac{\gamma}{\gamma_0}\right)^{\frac{1}{n}} \gamma \sin^2 \phi \quad \text{----- (2-68)}$$

また、図2-3より、

$$dc = 2R(\gamma) d\phi \quad \text{----- (2-69)}$$

式(2-68)および(2-69)を式(2-43)に代入すると、

$$J = \frac{\tau_0}{\gamma_0^{1/n}} \frac{(n+1)\pi}{2n} D_1 \quad \text{----- (2-70)}$$

次に、 D_1 と 塑性の応力拡大係数 K_σ あるいはひずみ拡大係数 K_ε との関係を求める。2.1.2項の結果より、モードⅢ型き裂においては、式(2-41)中の $\tilde{\varepsilon}_e(\theta)$ は $\theta = 0$ で最大値をとる。 $\theta = 0$ 、すなわち $y=0, x>0$ においては、式(2-33)および(2-34)より、

$$r = x = X(\gamma) + R(\gamma) = D_1 / \gamma^{1+1/n} \quad \text{---- (2-71)}$$

よ、て、

$$\sqrt{3} \varepsilon_e = \gamma = (D_1 / r)^{n/(n+1)} \quad \text{----- (2-72)}$$

となる。ここで、式(2-41)を用いると、

$$K_\varepsilon = D_1^{n/(n+1)} / \sqrt{3} \quad \text{----- (2-73)}$$

式(2-12)、(2-41)および(2-73)より、

$$K_\sigma = \sqrt{3} (\tau_0 / \gamma_0^{1/n}) D_1^{1/(n+1)} \quad \text{----- (2-74)}$$

式(2-73)、(2-74)および(2-14)を式(2-70)に代入すると、

$$J = A_n K_\varepsilon K_\sigma = A_n \frac{\sigma_0}{\varepsilon_0^{1/n}} K_\varepsilon^{1+1/n} = A_n \frac{\varepsilon_0}{\sigma_0^n} K_\sigma^{n+1} \quad \text{(2-75)}$$

ここに

$$A_n = (n+1)\pi / 2n \quad (\text{モードⅢ型き裂}) \quad \text{(2-76)}$$

特に、線形弾性 ($n=1$) の場合には、式 (2-75) および (2-76) より、

$$J = \pi (\epsilon_0 / 6_0) K_0^2 \text{ ----- (2-77)}$$

となり、これは Rice の結果⁽⁴⁴⁾ と一致する。

以上述べてきた、非線形弾性における J と K_0 との関係に「クリープ応力解析における弾性相似則」を用いれば、Norton 型のクリープ則のもとにおける、 J' と K_0 の間の関係が得られる。すなわち、

$$J' = A_n (\dot{\epsilon}_c / 6_c^n) K_0^{n+1} \text{ ----- (2-78)}$$

ここに、 A_n は式 (2-76) で与えられる。

(ii) モード I 型き裂の場合

2.1.2 項と同様に、Ramberg-Osgood 型の構成式のもとにおける Hutchinson の解析結果⁽⁴¹⁾⁽⁴²⁾ より、ただちに非線形弾性のもとにおける結果、さらには Norton 型のクリープ則のもとにおける結果が得られる。すなわち、非線形弾性のもとでは式 (2-75) が、Norton 型の定常クリープ則のもとでは式 (2-78) がそれぞれ成立する。モード I 型き裂に対する係数 A_n の値を Hutchinson の論文⁽⁴¹⁾ より引用して表 2-1 に示す。

表 2-1 モード I 型き裂の A_n 値⁽⁴¹⁾

n	3	5	9	13
Plane stress	3.86	3.41	3.03	2.87
Plane strain	5.51	5.01	4.60	4.40

以上より、き裂がモードⅠ型であるとモードⅢ型であるとを問わず、Norton型のクリーブ則のもとにおける J' と K_0 との間には式(2-78)が成立する。係数 A_n はクリーブ指数 n とき裂の型に依存する。 A_n の解析結果をまとめて、図2-6に示す^(注)。

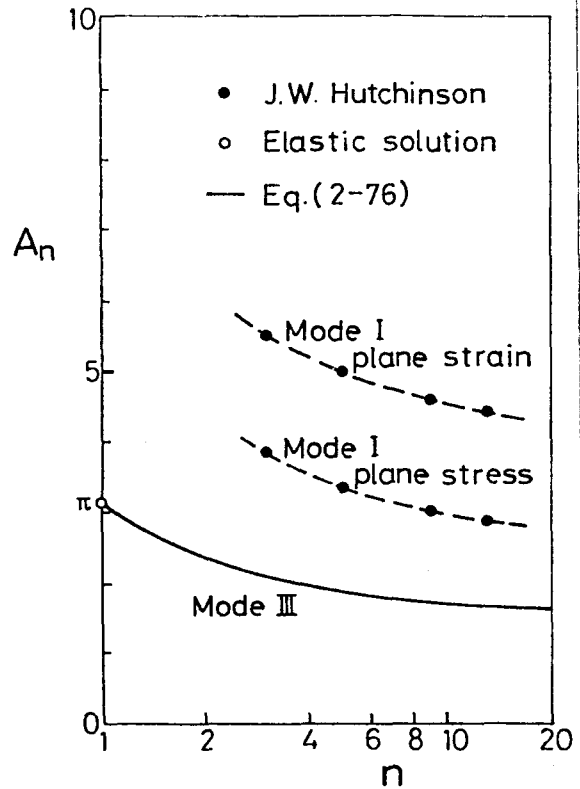


図2-6 A_n 値

2.2.4 修正J積分の実験的求め方

J積分の求め方については、Landesら⁽⁴⁹⁾およびRiceら⁽⁵⁷⁾の方法がよく知られており、この方法は特に実験的にJを求める際に有効である。ここでは、この方法に「クリーブ応力解析における弾性相似則」を用いることにより、荷重 P と変位速度 \dot{u} の関係より

(注) 線形弾性におけるき裂解析結果を用いれば、モードⅠ型き裂・平面応力状態の場合、 $n=1$ のとき $A_n = 3\pi/2$ 、平面ひずみ状態の場合、 $n=1$ のときに $A_n = 2\pi$ となる。これら線形弾性の場合の結果と図2-6に示したHutchinsonによる解析結果⁽⁴¹⁾とは、モードⅢの場合のような単純な線では結ばない。したがって、Hutchinsonの解析結果は、いま少しく検討する必要があると考えられる。

修正J積分 J' を求める方法について述べる。

Rice⁽⁵⁴⁾ は J 積分が次式により求められることを示している。

$$J = - \frac{1}{B} \frac{\partial U}{\partial l} \quad \text{-----} \quad (2-79)$$

ここに、 l はき裂長さ、 B はき裂先端の長さで板材では板厚に等しい。 U はポテンシャル・エネルギーで、次式で与えられる。

$$U = \int_V w dV - \int_V \varphi_i u_i dV - \int_{S_0} T_i u_i dS \quad \text{-----} \quad (2-80)$$

ただし、右辺第一項および第二項は物体の体積全体に関する体積積分であり、第三項は応力境界面 S_0 に関する面積積分である。また、 J は次式によっても与えられることが示されている⁽⁵⁷⁾。

$$\left. \begin{aligned} J &= \frac{1}{B} \int_0^{\delta} \left(- \frac{\partial P}{\partial l} \right)_{\delta} d\delta \\ \text{あるいは、} \\ J &= \frac{1}{B} \int_0^P \left(\frac{\partial \delta}{\partial l} \right)_P dP \end{aligned} \right\} \text{-----} \quad (2-81)$$

定常クリープ問題においても、Rice⁽⁵⁴⁾ および Bui⁽⁵⁸⁾ の取扱いとまったく同様にして、式(2-79)に対応する次式が得られる。

$$J' = - \frac{1}{B} \frac{\partial U'}{\partial l} = \frac{1}{B} \frac{\partial U_c'}{\partial l} = J_c' \quad \text{-----} \quad (2-82)$$

ここに

$$\left. \begin{aligned} U' &= \int_V w' dV - \int_V \varphi_i \dot{u}_i dV - \int_{S_0} T_i \dot{u}_i dS \\ U_c' &= \int_V w_c' dV - \int_{S_u} T_i \dot{u}_i dS \end{aligned} \right\} \quad (2-83)$$

また、式(2-81)に対応する式として次式が得られる。

$$\left. \begin{aligned}
 J' &= \frac{1}{B} \int_0^{\dot{\delta}} \left(-\frac{\partial P}{\partial l} \right)_{\dot{\delta}} d\dot{\delta} \\
 \text{あるいは、} \\
 J' &= \frac{1}{B} \int_0^P \left(\frac{\partial \dot{\delta}}{\partial l} \right)_P dP
 \end{aligned} \right\} \text{----- (2-84)}$$

弾塑性(非線形弾性)における J の実験的求め方⁽⁴⁹⁾と同様にして、式(2-82)を用いることにより、定常クリープにおける J' を荷重一定試験あるいは変位速度一定試験から実験的に求めることができる。

まず、荷重一定試験より J' を求める方法について述べる。図2-7(a)に示すように、種々のき裂長さを有する試験片に対し、一定荷重下における荷重 P と定常クリープ変位速度 $\dot{\delta}$ との関係を求める。この場合、 $-U'$ は $P-\dot{\delta}$ 曲線の左側の面積に等しい。そこで、荷重を固定したときの $-U'$ をき裂長さ l の関数として表わす(図2-7(b))。このとき、式(2-82)より、この曲線の傾きからただちに BJ' が求められる。

次に、変位速度一定試験から J' を求める方法について述べる。この場合も種々のき裂長さを有する試験片を用意し、一定の変位速度 $\dot{\delta}$ で変形したときの荷重 P を求める(図2-8(a))。この場合、 U' は $P-\dot{\delta}$ 曲線の下側の面積に等しい。そこで、この変位速度が一定の場合の U' をき裂長さ l の関数として表わすと(図2-8(b))、前と同様にして、曲線の傾きから $-BJ'$ が求められることになる。

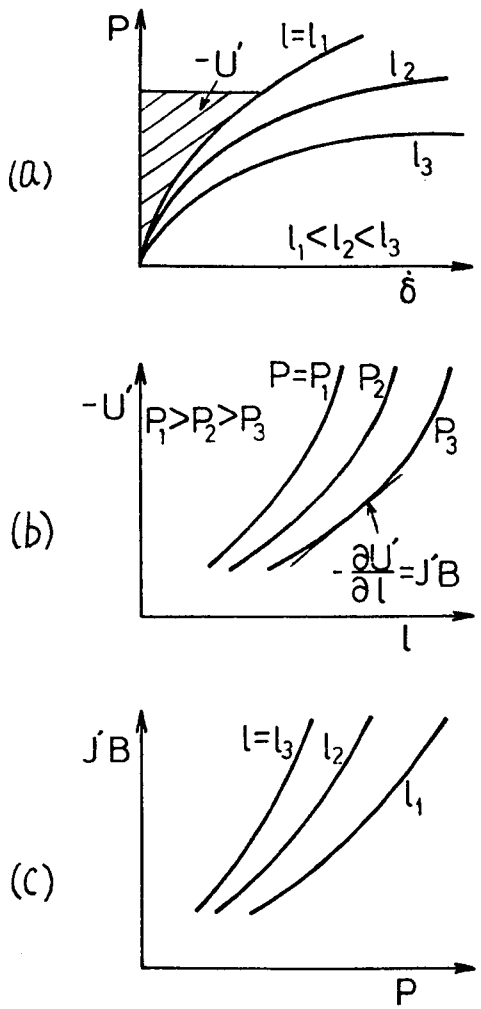


図2-7 荷重一定試験より
J'を求める方法

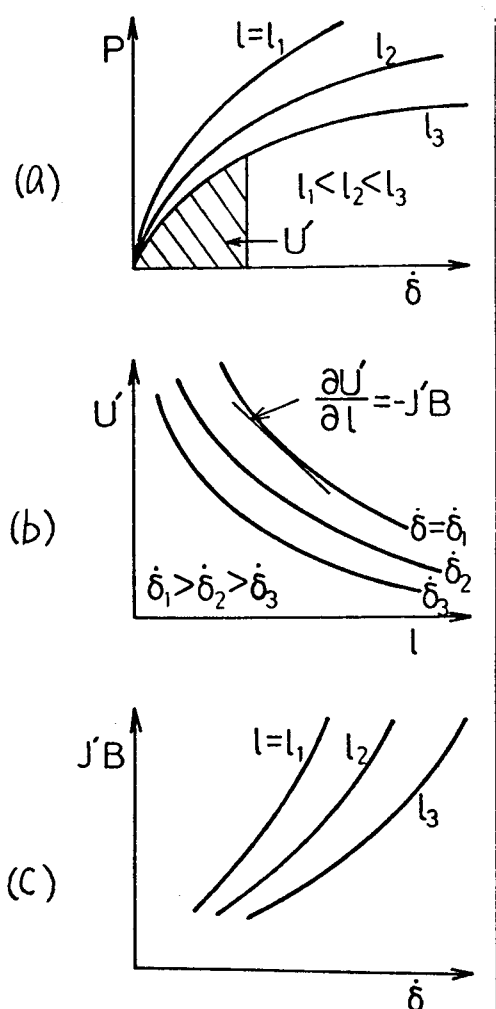


図2-8 変位速度一定試験より
J'を求める方法

Norton型のクリープ則(式(2-8))のもとでは、式(2-84)はさらに簡単になる。すなわち、式(2-8)が成立するときには、

$$\dot{\delta} \propto P^n \text{ ----- (2-85)}$$

となる。式(2-85)を用いて式(2-84)を変形すると、次式が得られる。

$$J' = \frac{n}{n+1} \frac{1}{B} \left(-\frac{\partial P}{\partial l} \right)_{\dot{\delta}} \dot{\delta} \text{ ----- (2-86)}_1$$

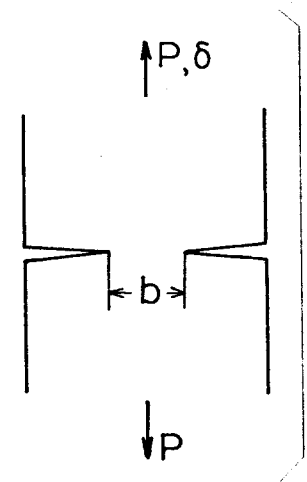
あるいは

$$J' = \frac{1}{n+1} \frac{1}{B} \left(\frac{\partial \dot{\delta}}{\partial l} \right)_P P \text{ ----- (2-86)}_2$$

本項の最後に、Riceらの手法⁽⁵⁷⁾に倣い、深いき裂材の J' の簡便的求め方について述べる。

(i) 両側き裂材(引張り)

図2-9に示すように、荷重 P を受け、リガメント長さ b 、板厚 B の両側き裂板試験片を考える。荷重点の変位速度 $\dot{\delta}$ は、き裂がないときの変位速度 $\dot{\delta}_{no\ crack}$ とき裂が存在することによる変位速度 $\dot{\delta}_{crack}$ の和として表わすことができる。すなわち、



$$\dot{\delta} = \dot{\delta}_{no\ crack} + \dot{\delta}_{crack} \text{ ----- (2-87)}$$

図2-9 引張りを受ける両側き裂材

いま、き裂が十分深く、 b が板幅および荷重点間距離に比べて十分小さい場合を考えると、次元解析より次式が得られる。

$$\dot{\delta} \approx \dot{\delta}_{crack} = b \dot{\epsilon}_c f \left(\frac{P}{B b \sigma_c} \right) \text{ ----- (2-88)}$$

ここに、 f は $P/(B b \sigma_c)$ のみの関数である。式(2-85)および(2-88)より、

$$\dot{\delta} = C_1 b \dot{\epsilon}_c \left(\frac{P}{B b \sigma_c} \right)^n \text{ ----- (2-89)}$$

となる。ここに、 C_1 は定数である。式(2-89)を(2-86)に代入すると、 J' は次式のように表わされる。

$$J' = \frac{n-1}{n+1} \frac{P \dot{\delta}}{B b} \text{ ----- (2-90)}$$

特に、クリーブ指数 n が 1 に比べて十分大きければ、

$$J' = P \dot{\delta} / (B b) \text{ ----- (2-90a)}$$

(ii) 中央き裂材(引張り)

図 2-10 に示すような、荷重 $2P$ を受ける中央き裂材を考える。(i) の場合と同様の取扱いより、き裂が十分深くリガメント長さ b が板幅および荷重点間距離に比べて十分小さければ、この場合にも式(2-90)あるいは(2-90a)が成立する。

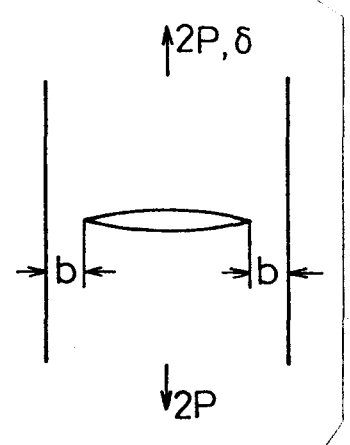


図 2-10 引張りを受ける中央き裂材

(iii) 環状き裂丸棒(引張り)

図 2-11 に示すような、深い環状き裂を有する丸棒を考える。(i) の場合と同様にして、

$$\dot{\delta} = C_2 a \dot{\epsilon}_c \left(\frac{P}{6ca^2} \right)^n \text{ ----- (2-91)}$$

ここに、 C_2 は定数、 a はき裂底断面半径である。この場合のき裂先端の長さ B は、

$$B = 2\pi a \text{ ----- (2-92)}$$

である。式(2-91)および(2-92)を式(2-86)に代入すると、

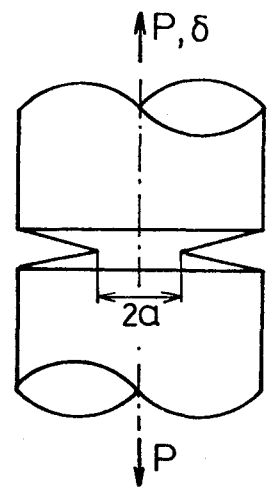


図 2-11 引張りを受ける環状き裂丸棒

$$J' = \frac{2n-1}{2n+2} \frac{P \dot{\delta}}{\pi a^2} \text{-----} (2-93)$$

となる(注)。特に、 n が1に比べて十分大きければ、

$$J' = P \dot{\delta} / (\pi a^2) \text{-----} (2-93a)$$

(iv) 片側き裂材(曲げ)

(i) の場合と同様にして、図2-12(a)に示すような曲げを受ける片側き裂材に対しては、

$$\dot{\psi} = C_3 \dot{\epsilon}_c \left(\frac{M}{\sigma_c b^2 B} \right)^n \text{-----} (2-94)$$

が成立する。ここに、 ψ は曲げモーメント M による角変位、 C_3 は定数である。この場合は、式(2-86)中の P を M に、 $\dot{\delta}$ を $\dot{\psi}$ に置換した式が成立し、この式に式(2-94)を代入すると、

$$J' = \frac{2n}{n+1} \frac{M \dot{\psi}}{B b} \text{-----} (2-95)$$

n が1に比べて十分大きければ、

(注) この場合の J' の積分表示形は、付録Iより、

$$J' = \frac{1}{2\pi a} \int_S (w' v_i - \sigma^{ji} u_{i,j} v_j) ds$$

となる。ただし、座標系としては円柱座標 $\theta^1, \theta^2, \theta^3$ をとり、 θ^1 は半径方向軸とする。また、 $u_{i,j}$ は u_i の共変導関数であり、積分面 S はき裂先端を包み込むような任意の曲面である。

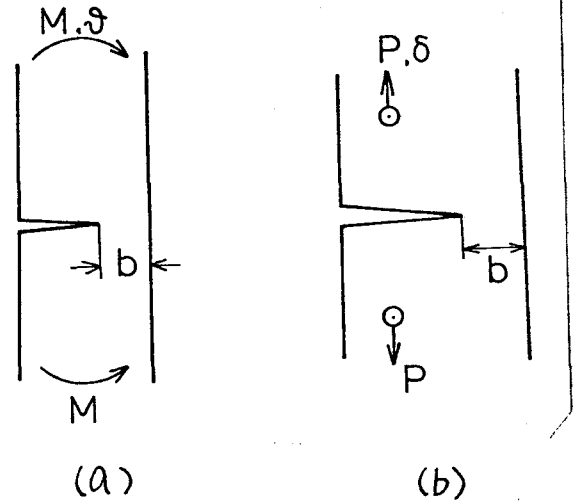


図2-12 曲げを受ける片側き裂材

$$J' = 2 M \dot{\vartheta} / (B b) \text{ ----- (2-95a)}$$

図2-13(b)のように、負荷が引張り力 P によって加わる場合には、

$$J' = \frac{2n}{n+1} \frac{P \dot{\delta}}{B b} \text{ ----- (2-96)}$$

$$J' = 2 P \dot{\delta} / (B b) \quad (n \gg 1 \text{ の場合}) \text{ (2-96a)}$$

となる。

(v) 環状き裂丸棒(ねじり)

(i) の場合と同様にして、図2-13に示すようなねじりを受ける環状き裂丸棒に対しては、

$$\dot{\vartheta} = C_4 \dot{\epsilon}_c \left(\frac{M_t}{6_c a^3} \right)^n \text{ (2-97)}$$

が成立する。ここに、 ϑ はねじりモーメントによる角変位、 C_4 は定数である。式(2-86)中の P を M_t に δ を ϑ に置換した式に、式(2-97)を代入すると、

$$J' = \frac{3n}{2n+2} \frac{M_t \dot{\vartheta}}{\pi a^2} \text{ (2-98)}$$

特に、 n が1に比べて十分大きければ、

$$J' = 3 M_t \dot{\vartheta} / (2 \pi a^2) \text{ ----- (2-98a)}$$

以上のように、Norton型の定常クリープ則に従う深いき裂材の J' は、荷重とそれに対応する変位速度の一对の実験値から簡単に計算できる。

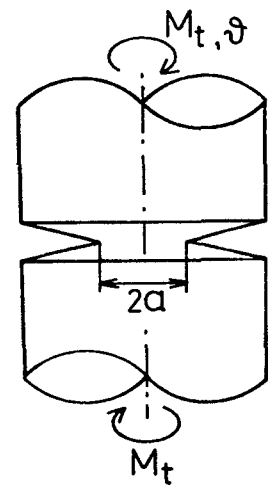


図2-13 ねじりを受ける環状き裂丸棒

2.3 クリーフ損傷則と破壊の条件

き裂発生および成長を解析的に取扱うには、応力・ひずみ解析を行なうとともに、これを適当な破壊条件と組み合わせる必要がある。本節では、後の議論の簡単化を計り、またクリーフ破壊全般に対する見通しが得られ易いようにするため、いままでに提案されている種々の破壊の条件を包含し、かつ非常に簡単な形を有する、一般化されたクリーフ損傷則を導入する。

2.3.1 単軸引張りの場合の損傷則

今までに提案されている、単軸引張りによる破壊に対するクリーフ損傷則、あるいはクリーフ破壊の物理的・力学的モデルの多くが、次式のクリーフ損傷則と等価になることを示そう。

$$d\eta/dt = k_1(\sigma) \text{ ----- (2-99)}$$

あるいは、

$$d\eta/dt = A_T \sigma^{b_1} \text{ ----- (2-99a)}$$

ここに、 η はクリーフ損傷、 k_1 は応力 σ のみの関数、 A_T および b_1 は定数である。

いま、局所的破壊の進展の程度を表わす尺度を ω で表わすことにする。尺度 ω の時間的变化率 $d\omega/dt$ が、 ω のみの関数 $k_2(\omega)$ 、 σ のみの関数 $k_3(\sigma)$ 、および時間 t のみの関数 $k_4(t)$ の三つの関数の積で与えられる場合を考える。すなわち、

$$d\omega/dt = k_2(\omega) k_3(\sigma) k_4(t) \text{ ----- (2-100)}$$

ここで、新たに、

$$\Omega = \int \frac{d\omega}{k_2(\omega)}, \quad T_t = \int k_4(t) dt \text{ ----- (2-101)}$$

と置く。Ωは、処女材においてはΩ₀、破壊したときはΩ_cをとるものとする。このとき、クリーブ損傷ηとして、

$$\eta = \frac{\Omega - \Omega_0}{\Omega_c - \Omega_0} \quad \text{-----} \quad (2-102)$$

をとれば、クリーブ損傷ηは、処女材でη=0、破壊した時点でη=1となるように規格化される。しかも、式(2-100)、(2-101)および(2-102)より、

$$\frac{d\eta}{dT_c} = \frac{k_3(\sigma)}{\Omega_c - \Omega_0} \quad \text{-----} \quad (2-103)$$

となり、dη/dT_cは応力σのみの関数として表わされる。

以上より、dω/dtが式(2-100)のようにω, σおよびtに関する変数分離形で表わされる場合には、式(2-99)で与えられるようなクリーブ損傷則が導かれる。以下にその具体例を示そう。

(i) 限界ひずみ条件(粒内破壊)

ひずみεがある限界値ε_fに達したとき、粒内破壊が起こると考え、定常クリーブ則(式(2-7))のもとでは、次のような損傷則が得られる。

$$\omega = \varepsilon, \quad \eta = \varepsilon / \varepsilon_f \quad \text{-----} \quad (2-104)$$

$$\frac{d\eta}{dt} = \frac{\dot{\varepsilon}}{\varepsilon_f} = \frac{\dot{\varepsilon}_c}{\varepsilon_f} \left(\frac{\sigma}{\sigma_c} \right)^n \quad \text{-----} \quad (2-105)$$

(ii) 限界粒界ひずみ条件(粒界破壊)

Williams⁽⁵⁹⁾⁽⁶⁰⁾に従い、粒界におけるくさび形き裂が粒界破壊を起こす場合について論ずる。Cottrell⁽⁶¹⁾は、応力に関係なく、粒界すべりと微視的くさび形き裂の長さとの間には一対一の対応関係が存在することを示している。したがって、いま、微視的くさび形

き裂の長さが隣接三重点間距離に達したとき巨視的破壊が起こると仮定すると、このような破壊条件は、粒界すべり量 ε_b にある限界値 ε_{bf} を設けることに相当する。これは、粒界破壊に対し、大谷ら⁽⁶²⁾が用いている限界(破壊)粒界ひずみの条件と一致する。大谷ら⁽⁶²⁾に従い、粒界ひずみ速度が

$$\dot{\varepsilon}_b = A_B \sigma^{n_b} \text{ ----- (2-106)}$$

で与えられると仮定すると、この場合の損傷則は次のようになる。

$$\omega = \varepsilon_b, \quad \eta = \varepsilon_b / \varepsilon_{bf} \text{ ----- (2-107)}$$

$$\frac{d\eta}{dt} = \frac{\dot{\varepsilon}_b}{\varepsilon_{bf}} = \frac{A_B}{\varepsilon_{bf}} \sigma^{n_b} \text{ ----- (2-108)}$$

(iii) ボイド成長による破壊 (Hull と Rimmer⁽⁶³⁾による)

Hull と Rimmer のボイド成長解析⁽⁶³⁾によれば、ボイド半径の時間的变化率は、

$$d\rho_v / dt = D_0 \sigma / \rho_v \text{ ----- (2-109)}$$

で与えられる。ここに、 ρ_v はボイド径、 D_0 は定数である。初期ボイド半径を ρ_0 とし、さらにボイド直径 $2\rho_v$ がボイド間隔 d_v に達したときに破壊が起こると考えると、式 (2-101), (2-102) および (2-103) を用いることにより、次の損傷則が得られる。

$$\omega = \rho_v, \quad \eta = \frac{\rho_v^2 - \rho_0^2}{d_v^2/4 - \rho_0^2} \text{ ----- (2-110)}$$

$$\frac{d\eta}{dt} = \frac{2 D_0 \sigma}{d_v^2/4 - \rho_0^2} \text{ ----- (2-111)}$$

(iv) クリーフ破壊に対する確率論的取扱い (Lindborg⁽⁶⁴⁾⁽⁶⁵⁾による)

Lindborg⁽⁶⁴⁾⁽⁶⁵⁾ は、粒界き裂成長に対し確率論的手法を導入し、

次の基礎式を得ている。

$$\frac{dk_c}{dt} = C_5 \dot{n}_1(\sigma) e^{C_6(k_c-1)} \text{----- (2-112)}$$

ここに、 k_c は破壊を引起すき裂の長さを結晶面の数で表わしたものであり、 $\dot{n}_1(\sigma)$ は単位長さ（一結晶面）のき裂が単位時間当りに成長する確率、 C_5 および C_6 は定数である。この場合も、式 (2-101)、(2-102) および (2-103) を用いると、

$$\omega = k_c, \quad \eta = 1 - e^{-C_6(k_c-1)} \text{----- (2-113)}$$

$$\frac{d\eta}{dt} = C_5 C_6 \dot{n}_1(\sigma) \text{----- (2-114)}$$

(V) Kachanov - Odqvist の損傷則

Kachanov⁽⁶⁶⁾ と Odqvist⁽⁶⁷⁾ は、材料の劣化あるいは断面減少を考慮し、次式で与えられる損傷則を提案した。

$$\frac{dD}{dt} = C_7 \frac{\sigma^{b_5}}{(1-D)^{b_5}} \text{----- (2-115)}$$

ここに、 D は損傷、 C_7 および b_5 は材料定数である。この場合も、新たに損傷として次のような η をとれば、式 (2-99) が成立する。

$$\eta = 1 - (1-D)^{b_5+1} \text{----- (2-116)}$$

$$\frac{d\eta}{dt} = (b_5+1) C_7 \sigma^{b_5} \text{----- (2-117)}$$

(vi) 核生成論的取扱い (横堀⁽⁶⁸⁾による)

横堀⁽⁶⁸⁾ によれば、試験片の破壊を引起すき裂の発生確率は

$$C_8 K T \exp\left[-\frac{\Delta f^*}{KT}\right] \sigma^{b_4}$$

で与えられる。K は Boltzmann 定数、T は温度、 Δf^* は転位の運

動の活性化エネルギー, C_8 および b_4 は定数である。よって、この場合は、損傷の時間的变化率として、

$$\frac{d\eta}{dt} = C_8 K T \exp\left[-\frac{A\sigma^*}{KT}\right] \sigma^{b_4} \text{----- (2-118)}$$

をとればよいと考えられる。

このほか、クリープ変形が交さすべりによって律速されている場合の粒界ポイド成長モデル⁽⁶⁹⁾などを考えても、上記のようなクリープ損傷則が導かれる。

以上、種々のクリープ破壊の物理的・力学的モデル、あるいはクリープ損傷則が、式(2-99)と等価であることを示した。特に注目すべき点は、ほとんどの場合 $d\eta/dt$ が式(2-99a)のように応力のべき関数で与えられることである。したがって、式(2-99a)のクリープ損傷則のもとにおけるクリープ破壊挙動を調べておけば、種々のクリープ破壊に対する力学的モデルを用いた場合の挙動は、適当な変換をほどこすことにより たちちに求められる。

なお、クリープ損傷則が式(2-99a)で与えられるときの、平滑材の破断時間 $(t_r)_s$ は、この式を積分することにより求められる。すなわち、

$$(t_r)_s = 1 / (A_T \sigma^{b_1}) \text{----- (2-119)}$$

よって、平滑材の破断時間と応力との間には べき乗の関係があることになるが、これは多くの実験結果により支持されている。逆に、 $\ln(t_r)_s - \ln \sigma$ 曲線より指数 b_1 を求めることができる。

2.3.2 縦せん断負荷の場合の損傷則

2.3.1項の場合と同様に、この場合も、クリープ破壊モデルの

多くは、次式のクリーフ損傷則と等価になる。

$$\frac{d\eta}{dt} = A_s \tau^{b_1} \text{-----} (2-120)$$

ここに、 A_s は定数である。平滑材の破断時間は、2.3.1項と同様にして次式で与えられる。

$$(t_r)_s = 1 / (A_s \tau^{b_1}) \text{-----} (2-121)$$

ここで、後の議論のため、限界ひずみ条件および限界粒界ひずみ条件と等価なクリーフ損傷則を示しておく。

(i) 限界ひずみ条件 (粒内破壊)

2.3.1項の(i)と同様にして、

$$\eta = \gamma / \gamma_f \text{-----} (2-122)$$

$$\frac{d\eta}{dt} = \frac{\dot{\gamma}_c}{\gamma_f} \left(\frac{\tau}{\tau_c} \right)^n \text{-----} (2-123)$$

ここに、 γ_f は限界ひずみであり、クリーフ則として式(2-9)が成立していると仮定した。式(2-123)は式(2-120)で $b_1 = n$ と置いた場合に相当する。

(ii) 限界粒界ひずみ条件 (粒界破壊)

2.3.1項の(ii)と同様にして、

$$\eta = \gamma_b / \gamma_{bf} \text{-----} (2-124)$$

$$\frac{d\eta}{dt} = \frac{\dot{\gamma}_b}{\gamma_{bf}} = \frac{A_b}{\gamma_{bf}} \tau^{n_b} \text{-----} (2-125)$$

ここに、 γ_b は粒界ひずみ、 γ_{bf} は限界粒界ひずみであり、粒界ひずみ速度 $\dot{\gamma}_b$ は次式で与えられると仮定した。

$$\dot{\gamma}_b = A_b \tau^{n_b} \text{-----} (2-126)$$

2.3.3 多軸応力状態の場合の損傷則

Hayhurstら⁽⁷⁰⁾⁽⁷¹⁾、Kachanov⁽⁷²⁾⁽⁶⁶⁾およびOdqvist⁽⁷³⁾は、多軸応力状態における損傷則として、それぞれ式(2-127)、(2-128)および(2-129)を提案している。

$$\frac{dD}{dt} = C_H \left(\frac{\sigma_I - \sigma_{III}}{1-D} \right)^{b_5} \text{-----} (2-127)$$

$$\frac{dD}{dt} = C_K \left(\frac{\sigma_I}{1-D} \right)^{b_5} \text{-----} (2-128)$$

$$\frac{dD}{dt} = C_0 \left(\frac{\sigma_e}{1-D} \right)^{b_5} \text{-----} (2-129)$$

ここに、 D は損傷、 C_H 、 C_K および C_0 は定数であり、 σ_I 、 σ_{II} および σ_{III} は主応力で相互に $\sigma_I \geq \sigma_{II} \geq \sigma_{III}$ の関係がある。式(2-127)、(2-128)および(2-129)のいずれの式においても、損傷の時間的变化率 dD/dt は、応力テンソル σ_{ij} のみの関数と損傷 D のみの関数との積で表わされる。したがって、2.3.1項の場合と同様にして、これらの損傷則はすべて、

$$\frac{d\eta}{dt} = h_M (\sigma_{ij}) \text{-----} (2-130)$$

に帰着させることができる。ここに、 h_M は応力テンソル σ_{ij} に関する同次式である。

2.3.4 切欠きクリーフ破壊問題に対する損傷則の適用

以上述べてきたクリーフ損傷則は、応力勾配のない場合にはそのままの形で適用でき、破壊挙動を予測することができる。しかしながら、切欠き材やき裂材のクリーフ破壊問題においては、応力

が均一でないため、この損傷則をそのまま適用することはできない。何らかの別の仮定を設ける必要がある。本項では、この点について議論する。

切欠き底やき裂先端部では、応力およびひずみの集中がある。特に、き裂先端では応力およびひずみの特異性がある。したがって、局部的最大値に限界値を与えて破壊の条件とすることは不合理である。なんらかの形で、応力あるいはひずみの分布の影響を考慮に入れる必要がある。これに対しては幾つかの方法がある。たとえば、(i) 適当な領域内の平均値をとる、(ii) 応力拡大係数に相当するクリープ下の応力またはひずみ場の強度を代表するパラメータを用いる、(iii) 応力またはひずみのひとつの積分的性質を表わす開口変位やJ積分に対応する量を用いる方法などが考えられる。しかし、現状ではこの方面の研究が十分でなく、合理的な基準が確立されていない。本論文では、計算の簡単のため、特に断らない限り^(注)、切欠き底あるいはき裂先端から ρ_s だけ内部に入った位置の損傷値 η が 1 に等しくなったとき、その部分に破壊が起こると考える。換言すれば、 ρ_s 程度のき裂が発生するか、あるいは、き裂がさらに ρ_s だけ進むと考える。ここに、 ρ_s は材料組織および破壊機構に依存するある特性寸法である。 ρ_s の具体的な大きさとしては、破壊が粒界におけるくさび形き裂によって起こる場合には、隣接三重点間距離をとることもできよう。また、粒内で破壊が起こる場合には、 ρ_s として平均結晶粒径をとればよいと考えられる。

なお、材料の破壊挙動解析に際して、微小領域内の平均値を採用

(注) 後述するように、第4章では、ある領域内の平均値をとる方法を採用している。

する方法は Neuber⁽⁷⁴⁾⁽⁷⁵⁾ により提案されており、たとえば、ねじりにおける疲れき裂成長にも適用されている⁽⁷⁶⁾⁽⁷⁷⁾。また、McClintock⁽⁷⁸⁾⁽⁷⁹⁾ は、き裂先端より特性寸法だけ前方の値に着目することにより、不安定破壊に先行する安定的延性き裂成長を解析している。

第3章 力学的解析方法

本章では、以下の第4章～第8章で行なう力学的解析の手法および解析における共通事項に関する、一般的議論を行なう。すなわち、クリープ則が式(2-9)で与えられクリープ損傷則が式(2-120)で与えられる縦せん断負荷の場合、クリープ則が式(2-8)で与えられクリープ損傷則が式(2-130)で与えられる引張りを含めた一般の場合のそれぞれについて、き裂挙動解析の具体的手順を説明するとともに、次元解析を用いてき裂挙動を表わす種々の特性量(たとえば、き裂成長速度)に影響を及ぼす因子、結果の整理方法、無次元化などについて論ずる。

3・1 縦せん断負荷の場合

3・1・1 き裂発生

クリープ則が式(2-9)で、また損傷則が式(2-120)でそれぞれ与えられているとする。試験片の適当な断面における公称応力を τ_{no} 、試験片の基準寸法、たとえば切欠き底断面半幅を a^* 、試験片形状を定める他の寸法、たとえば切欠き半径、切欠き深さ等を e_1^* 、 e_2^* 、……で表わすことにする。このとき、切欠き底より r 前方の点の応力値では、次元解析より次式で与えられる。

$$\tau = \tau_{no} f_1 \left(n, \frac{r}{a^*}, \frac{e_1^*}{a^*}, \frac{e_2^*}{a^*}, \frac{e_3^*}{a^*}, \dots \right) \quad (3-1)$$

ここに、 f_1 はクリープ指数 n 、 r/a^* および e_i^*/a^* ($i=1, 2, \dots$)のみの関数である。いま、 e_1^* が切欠き半径を表わしているとする。平滑材の応力分布は、

$$(\tau)_s = \tau_{no} f_1 \left(n, \frac{r}{a^*}, \infty, \frac{e_2^*}{a^*}, \frac{e_3^*}{a^*}, \dots \right) \quad (3-2)$$

で与えられる。2・3節で述べたように、切欠き底より特性寸法 ρ_s 入った点Bのクリーフ損傷が1になったとき、き裂が発生すると仮定する。切欠き材および平滑材のB点における応力を、それぞれ τ_B および $(\tau_B)_s$ で表わす。このとき、切欠き材のき裂発生時間 t_i および平滑材のそれ $(t_i)_s$ は、クリーフ損傷則(式(2-120))より次のように与えられる。

$$t_i = 1 / \{ A_s \tau_B^{b_1} \} \quad \text{-----} \quad (3-3)$$

$$(t_i)_s = 1 / \{ A_s (\tau_B)_s^{b_1} \} \quad \text{-----} \quad (3-4)$$

同じ公称応力 τ_{no} のもとにおける、 t_i と $(t_i)_s$ の比をき裂発生時間比 R_{t_i} とすると、式(3-1)~(3-4)より、

$$\begin{aligned} R_{t_i} &\equiv \frac{t_i}{(t_i)_s} = \left\{ \frac{(\tau_B)_s}{\tau_B} \right\}^{b_1} \\ &= \left\{ \frac{f_1(n, \rho_s/a^*, \infty, e_2^*/a^*, \dots)}{f_1(n, \rho_s/a^*, e_1^*/a^*, e_2^*/a^*, \dots)} \right\}^{b_1} \quad \text{-----} \quad (3-5) \end{aligned}$$

となる。よって、 R_{t_i} は $n, b_1, \rho_s/a^*$, および $e_i^*/a^* (i=1, 2, \dots)$ のみの関数となる。特に、 $b_1 = n$ (限界ひずみ条件, 式(2-123))を用いた場合の R_{t_i} を $(R_{t_i})_{b_1=n}$ とすると、式(3-5)より、

$$R_{t_i} = \left\{ (R_{t_i})_{b_1=n} \right\}^{b_1/n} \quad \text{-----} \quad (3-6)$$

が成立する。したがって、限界ひずみ条件を採用した場合の R_{t_i} を求めておけば、他の場合の R_{t_i} は式(3-6)より簡単に求められる。

3.1.2 き裂成長

2.3節で述べたように、き裂成長に対してもクリーフ損傷則(式(2-120))を用い、き裂先端から特性寸法 ρ_s だけ内部に入った点の損傷値が1になったとき、き裂が ρ_s だけ進むと考える。切欠き底から $k\rho_s$ (k :自然数)だけ内部に入った点を第 k 点と呼ぶことにする。図3-1に示すように、上述のき裂成長条件を、第1点、第2点、第3点……に対してこの順に適用することにより、き裂成長挙動解析ができる。なお、特に断らない限り ρ_s は一定であるとする。

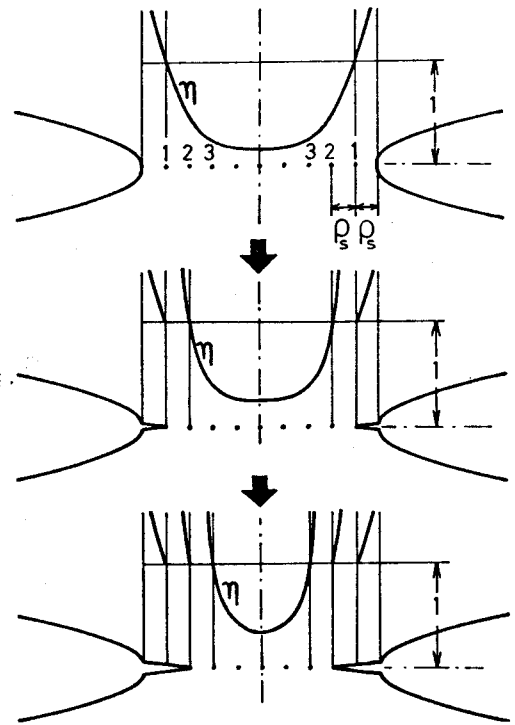


図3-1 き裂成長挙動解析

き裂が第 $(j-1)$ 点から第 j 点まで進むのに要する時間を t_{pj} とする。さらに、き裂が第 $(j-1)$ 点まで進んだ時点の、第 k 点の損傷値およびその時間的变化率をそれぞれ η_{kj} および $\dot{\eta}_{kj}$ で表わす。このとき、 t_{pj} は次式で与えられる。

$$t_{pj} = (1 - \eta_{jj}) / \dot{\eta}_{jj} \quad \text{-----} \quad (3-7)$$

また、 $t = \sum_{j=1}^k t_{pj}$ において、き裂が第 k 点まで進展するための条件は、第 k 点のクリーフ損傷の累積値が1となることより、

$$\sum_{j=1}^k \dot{\eta}_{kj} t_{pj} = 1 \quad \text{-----} \quad (3-8)$$

と書表わされる。この式を行列を用いて書直すと次式が得られる。

$$\begin{pmatrix} \dot{\eta}_{11} & 0 & \dots & 0 \\ \dot{\eta}_{21} & \dot{\eta}_{22} & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & & 0 \\ \dot{\eta}_{j1} & \dot{\eta}_{j2} & \dots & \dot{\eta}_{jj} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t_{p1} \\ t_{p2} \\ \vdots \\ t_{pj} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{----- (3-8a)}$$

式(3-8a)を t_{pj} に関して解くと、

$$t_{pj} = \frac{(-1)^{j+1}}{\dot{\eta}_{jj}} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & \dot{\eta}_{21}/\dot{\eta}_{11} & & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & & & 1 \\ 1 & \dot{\eta}_{j1}/\dot{\eta}_{11} & \dots & \dots & \dot{\eta}_{j(j-1)}/\dot{\eta}_{(j-1)(j-1)} \end{vmatrix} \quad \text{----- (3-9)}$$

となる。式(3-7)および(3-9)より、

$$1 - \eta_{jj} = (-1)^{j+1} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & \dot{\eta}_{21}/\dot{\eta}_{11} & & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & & & 1 \\ 1 & \dot{\eta}_{j1}/\dot{\eta}_{11} & \dots & \dots & \dot{\eta}_{j(j-1)}/\dot{\eta}_{(j-1)(j-1)} \end{vmatrix} \quad \text{----- (3-10)}$$

式(3-10)の値は履歴の影響を表わす項である。式(3-10)の行列式中では $\dot{\eta}$ はつねに比の形で現われている。したがって、 $1 - \eta_{jj}$ は $\dot{\eta}$ の絶対値には依存せず、その分布形のみ依存する。

さて、切欠き材に長さ l のき裂が入っている場合のき裂先端前方 r の点の応力は、3・1・1項と同様にして次式で与えられる。

$$\tau = \tau_{no} f_{\tau} \left(n, \frac{l}{a^*}, \frac{r}{a^*}, \frac{e_1^*}{a^*}, \frac{e_2^*}{a^*}, \dots \right) \quad (3-11)$$

ここに、 f_{τ} は $n, l/a^*, r/a^*$ および e_i^*/a^* ($i=1, 2, \dots$) のみの関数である。式(2-120) および (3-11) より、 $\dot{\gamma}_{kj}$ は、

$$\dot{\gamma}_{kj} = A_s \tau_{no}^{b_1} \left\{ f_{\tau} \left(n, \frac{(j-1)\rho_s}{a^*}, \frac{(k-j+1)\rho_s}{a^*}, \frac{e_1^*}{a^*}, \frac{e_2^*}{a^*}, \dots \right) \right\}^{b_1} \quad (3-12)$$

で与えられる。式(3-12)を式(3-10)に代入すると、

$$1 - \eta_{jj} = f_R \left(n, b_1, \frac{\rho_s}{a^*}, \frac{(j-1)\rho_s}{a^*}, \frac{e_1^*}{a^*}, \frac{e_2^*}{a^*}, \dots \right) \quad (3-13)$$

すなわち、履歴の影響項 $(1 - \eta_{jj})$ は、 $n, b_1, \rho_s/a^*, (j-1)\rho_s/a^*$ ($= l/a^*$) および e_i^*/a^* ($i=1, 2, \dots$) のみの関数となる。さらに、式(3-12)および(3-13)を式(3-7)に代入すると、

$$t_{pj} = \frac{f_R \left(n, b_1, \frac{\rho_s}{a^*}, \frac{(j-1)\rho_s}{a^*}, \frac{e_1^*}{a^*}, \frac{e_2^*}{a^*}, \dots \right)}{A_s \tau_{no}^{b_1} \left\{ f_{\tau} \left(n, \frac{(j-1)\rho_s}{a^*}, \frac{\rho_s}{a^*}, \frac{e_1^*}{a^*}, \frac{e_2^*}{a^*}, \dots \right) \right\}^{b_1}} \\ = f_2 \left(n, b_1, \frac{\rho_s}{a^*}, \frac{(j-1)\rho_s}{a^*}, \frac{e_1^*}{a^*}, \frac{e_2^*}{a^*}, \dots \right) / \{ A_s \tau_{no}^{b_1} \} \quad (3-14)$$

ここに、 f_2 は $n, b_1, \rho_s/a^*, (j-1)\rho_s/a^*$ ($= l/a^*$) および e_i^*/a^* ($i=1, 2, \dots$) のみの関数である。

次に破断時間 t_r について考える。破断時間は き裂発生時間と き裂成長時間との和で表わされる。すなわち、

$$t_r = t_i + \sum_{j>1} t_{pj} = \sum_{j \geq 1} t_{pj} \quad (3-15)$$

式(3-14)を式(3-15)に代入すると、

$$t_r = f_3 \left(n, b_1, \frac{\rho_s}{a^*}, \frac{e_1^*}{a^*}, \frac{e_2^*}{a^*}, \dots \right) / \{ A_s \tau_{no}^{b_1} \} \quad (3-16)$$

ここに、 f_3 は $n, b_1, \rho_s/a^*$ および e_i^*/a^* ($i=1, 2, \dots$) のみの関数である。前と同様に、 e_i^* が切欠き半径を表わしているとする。式 (3-16) より平滑材の破断時間 $(t_r)_s$ は、

$$(t_r)_s = f_3 \left(n, b_1, \frac{\rho_s}{a^*}, \infty, \frac{e_1^*}{a^*}, \dots \right) / \{ A_s \tau_{no}^{b_1} \} \quad (3-17)$$

となる。同じ公称応力のもとにおける t_r と $(t_r)_s$ の比を破断時間比 R_{t_r} とすれば、式 (3-16) および (3-17) より、

$$R_{t_r} \equiv \frac{t_r}{(t_r)_s} = f_4 \left(n, b_1, \frac{\rho_s}{a^*}, \frac{e_1^*}{a^*}, \frac{e_2^*}{a^*}, \dots \right) \quad (3-18)$$

ここに、 f_4 は $n, b_1, \rho_s/a^*$ および e_i^*/a^* ($i=1, 2, \dots$) のみの関数である。

3.1.3 き裂成長速度

本解析の仮定によれば、き裂は特性寸法 ρ_s ずつ段階的に成長する。そこで、き裂が一段階で進む長さ $\Delta l = \rho_s$ を一段階進むのに要する時間 $\Delta t = t_{p_j}$ で除した値をき裂成長速度 dl/dt と考えることにする。このとき、式 (3-14) より、

$$\begin{aligned} \frac{dl}{dt} &\equiv \frac{\rho_s}{t_{p_j}} \\ &= (A_s \tau_{no}^{b_1} a^*) \frac{\rho_s/a^*}{f_2(n, b_1, \rho_s/a^*, l/a^*, e_1^*/a^*, e_2^*/a^*, \dots)} \\ &= \left(\frac{dl}{dt} \right)_s f_5 \left(n, b_1, \frac{\rho_s}{a^*}, \frac{l}{a^*}, \frac{e_1^*}{a^*}, \frac{e_2^*}{a^*}, \dots \right) \quad \text{-----} (3-19) \end{aligned}$$

ここに、

$$\left(\frac{dl}{dt}\right)_s = A_s \tau_{no}^{b_1} a^* \text{-----} (3-20)$$

である。 $(dl/dt)_s$ は、き裂成長速度と同じ次元をもち、試験片形状、試験条件および荷重により定まり、試験片の基準き裂成長速度とでも呼ぶべき量である。式(3-19)より、き裂成長速度は $(dl/dt)_s$ で割ることにより無次元化することができ、無次元化されたき裂成長速度は、 n 、 b_1 、 ρ_s/a^* 、 l/a^* および e_i^*/a^* ($i=1, 2, \dots$) のみの関数となる。試験片の初期形状、材料、試験温度等が与えられれば、式のうえでは、 A_s 、 a^* 、 n 、 b_1 、 ρ_s および e_i^*/a^* ($i=1, 2, \dots$) が与えられたことになる。したがって、種々の応力レベル τ_{no} のもとにおけるき裂成長速度のデータは、無次元き裂成長速度 $-l/a^*$ の関係でマスター・カーブ上に整理されることになる。

3・2 引張り負荷の場合

3・2・1 き裂発生

引張り負荷の場合を考え、クリーフ則が式(2-8)で、損傷則が式(2-130)で与えられているものとする。また、式(2-130)の関数 R_M が応力テンソル σ_{ij} に関する b_1 次の同次式であると仮定する。試験片の適当な断面における公称応力を σ_{no} で表わすと、3・1・1項と同様にして、切欠き底より r 前方の応力 σ_{ij} は σ_{no} に比例し、 σ_{ij}/σ_{no} は n 、 r/a^* および e_i^*/a^* ($i=1, 2, \dots$) のみの関数となる。このことを用いると、3・1・1項と同様にして、以下の結果が得られる。

(1) き裂発生時間は σ_{no} の b_1 乗に逆比例する。

(2) き裂発生時間比 R_{t_i} は、 n , ρ_s/a^* および e_i^*/a^* ($i=1, 2, \dots$) のみの関数の b_1 乗で表わされ、式 (3-6) が成立する。

3.2.2 き裂成長

3.1.2 項と同様に、引張りにおいても式 (3-7) ~ (3-10) が成立する。また、切欠き材に長さ l のき裂が入っているときの、き裂前方 r の点の応力 σ_{ij} は、 σ_{no} に比例し、 σ_{ij}/σ_{no} は n , l/a^* , r/a^* および e_i^*/a^* ($i=1, 2, \dots$) のみの関数となる。この性質と式 (3-7) ~ (3-10) を用いると以下の結果が得られる。ただし、 A'_T は $1/(\sigma^{b_1} t)$ の次元をもつ定数である。

(1) $(1-\eta_{ij})$ は、 n , b_1 , ρ_s/a^* , l/a^* および e_i^*/a^* ($i=1, 2, \dots$) のみの関数となる。

(2) $A'_T \sigma_{no}^{b_1} t_{p_j}$ は、 n , b_1 , ρ_s/a^* , l/a^* および e_i^*/a^* ($i=1, 2, \dots$) のみの関数となる。

(3) $A'_T \sigma_{no}^{b_1} t_r$ は、 n , b_1 , ρ_s/a^* および e_i^*/a^* ($i=1, 2, \dots$) のみの関数となる。

(4) R_{t_r} は、 n , b_1 , ρ_s/a^* および e_i^*/a^* ($i=1, 2, \dots$) のみの関数となる。

3.2.3 き裂成長速度

3.1.3 項と同様にして、き裂成長速度 dl/dt は $(dl/dt)_s$ ($= A'_T \sigma_{no}^{b_1} a^*$) で割ることにより無次元化することができ、無次元化されたき裂成長速度は、 n , b_1 , ρ_s/a^* , l/a^* および e_i^*/a^* ($i=1, 2, \dots$) のみの関数となる。したがって、この場合も、試験片形状、材料および試験温度が与えられれば、種々の応力レベル

σ_{no} のもとにおける き裂成長速度のデータは、無次元き裂成長速度 $- \dot{a} / a^*$ の関係でマスター・カーブ上に整理されることになる。

3.3 結言

Norton 型のクリーブ則 (式 (2-8) あるいは (2-9))、および本論文で提案したクリーブ損傷則 (式 (2-130) あるいは (2-120)) のもとにおける、き裂発生・成長挙動解析の方法について論じた。また、次元解析を用いることにより、き裂発生挙動、き裂成長挙動および破断挙動に影響を及ぼす因子を抽出した。さらに、き裂成長のデータが、無次元き裂成長速度と無次元き裂長さの関係でマスター・カーブ表示できることを示した。

第4章 縦せん断およびねじりクリープ下における切欠き強度

本章では、前章で述べた力学的解析手法を用いることにより、縦せん断負荷およびねじり負荷のもとにおける切欠き材の破断挙動、すなわち、切欠き強化あるいは弱化について議論する。

4.1 縦せん断クリープ下の切欠き強度

本節では、図4-1に示すような切欠き底面に関して対称な切欠きを有する柱体に縦せん断力が加わる場合を取扱う。

切欠き底面を N 個の要素に分割する。ここで、 i 番目の要素の幅、すなわち特性寸法を ρ_i で表わすこと

にする。本章では、特性寸法については一般化し試験片中の位置により異なる値をとりうるとして取扱う。

切欠き材あるいはき裂材の破壊問題に対するクリープ損傷則の適用については、2・3・4項において論じており、切欠き底あるいはき裂先端より特性寸法だけ内部の点の応力により損傷を評価する方法を提案しているが、本章では数式化の簡単のため、平均値をとる方法を採用する。すなわち、おのおのの要素の損傷は要素内の平均応力を用いてクリープ損傷則・式(2-120)により評価する。要素に蓄積されたクリープ損傷が1に等しくなったとき、局所的破壊が

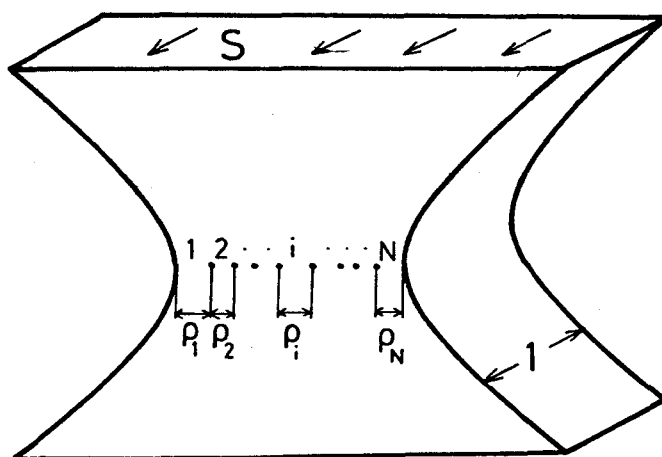


図4-1 縦せん断を受ける切欠き柱

起こり、き裂が特性寸法だけ成長すると仮定する。

き裂の発生および成長は、つねに切欠き底面内で起こると仮定すると、切欠き底面に作用する応力成分のうち零でないものは、厚さ方向に向うせん断応力のみである。時刻 t における i 番目の要素に加わる縦せん断応力の平均値を $\tau(i, t)$ で表わすと、釣合いの式は次のようになる。

$$\sum_{i=1}^N \rho_i \tau(i, t) = S, \quad 0 \leq t \leq t_r \quad (4-1) \quad (\text{注1})$$

ここに、 S は柱体に作用する単位厚さ当りのせん断力であり、 t_r は切欠き材の破断時間^(注2) である。変形中、切欠き底断面寸法は変化しないものと仮定すると、式(4-1)中の ρ_i は時間的に変化しない。式(4-1)を $t=0$ から $t=t_r$ まで積分し、積分と総和の順序を交換すると、

$$\sum_{i=1}^N \rho_i \int_0^{t_r} \tau(i, t) dt = S t_r \quad \text{-----} \quad (4-2)$$

すべての要素のクリープ損傷は、 $t=0$ において零であり、

(注1) き裂が発生あるいは成長した時点、すなわち、いくつかの要素がすでに破壊している時点では、外力 S は破壊していない要素に関する $\rho_i \tau(i, t)$ の総和と釣合っている。しかしながら、すでに破壊している要素は荷重を受持たない。換言すれば $\tau(i, t)$ は零である。したがって、式(4-1)に示すように、 S を形式的にすべての要素に関する総和と等置することができる。

(注2) ここでいう破断時間は、き裂発生に要する時間とき裂成長に要する時間を加え合わせた、切欠き材全体としての破断時間である。

$t = t_r$ において 1 である^(註)ので、クリープ損傷則・式 (2-120) を $t=0$ から $t=t_r$ まで積分して次式が得られる。

$$\int_0^{t_r} A_s \{\tau(i, t)\}^{b_1} dt = 1, \quad i=1, 2, \dots, N \quad (4-3)$$

ここで、以降の演算に用いる Hölder の不等式⁽⁸⁰⁾を引用しておく。

$$\left| \int_{z_1}^{z_2} y_1(z) y_2(z) dz \right| \leq \left(\int_{z_1}^{z_2} |y_1(z)|^{p_1} dz \right)^{\frac{1}{p_1}} \left(\int_{z_1}^{z_2} |y_2(z)|^{p_2} dz \right)^{\frac{1}{p_2}}$$

$$p_1, p_2 > 0, \quad 1/p_1 + 1/p_2 = 1 \quad \text{-----} \quad (4-4)$$

ここに、 y_1 および y_2 は任意関数である。

以下においては、 b_1 が 1 より大きい場合、1 に等しい場合、1 より小さい場合の三つの場合に分け、それぞれの場合について式 (4-2)、(4-3) および Hölder の不等式 (4-4) を用いて演算を進める。

(i) $b_1 > 1$ の場合

Hölder の不等式 (4-4) より、次の関係が得られる。

$$\int_0^{t_r} \tau(i, t) dt \leq \left[\int_0^{t_r} \{\tau(i, t)\}^{b_1} dt \right]^{\frac{1}{b_1}} \left[\int_0^{t_r} dt \right]^{1 - \frac{1}{b_1}}$$

----- (4-5)

式 (4-2) および (4-3) を式 (4-5) に代入すると次の不等式が得

(註) 前頁の脚注 1 で述べたように、要素の中には柱体の破断に先行してすでに破壊している要素もあると考えられる。このような要素の破壊後の応力 $\tau(i, t)$ は零となるので、式 (2-120) より、要素の破壊後においては損傷値は変化しない。すなわち、 $t = t_r$ における損傷値は 1 に等しいことになる。

られる。

$$t_r \leq \left\{ \left(\sum_{i=1}^N \rho_i \right) / S \right\}^{b_1} / A_s \quad \text{----- (4-6)}$$

一方、切欠き底における公称応力 τ_n は次式で与えられる。

$$\tau_n = S / \sum_{i=1}^N \rho_i \quad \text{----- (4-7)}$$

また、式(2-120)より、平滑材の破断時間 $(t_r)_s$ は、 τ_n を用いて、

$$(t_r)_s = 1 / (A_s \tau_n^{b_1}) \quad \text{----- (4-8)}$$

のように表わされる。

式(4-7)および(4-8)を式(4-6)に代入すると、

$$t_r \leq (t_r)_s \quad \text{----- (4-9)}$$

が得られる。式(4-6)あるいは(4-9)の等号は $\{\tau(i, t)\}^{b_1}$ が t に依存せず位置 i のみの関数である場合にのみ成立する⁽⁸⁰⁾。すなわち、

$$\{\tau(i, t)\}^{b_1} = C(i) \quad \text{----- (4-10)}$$

ここに、 $C(i)$ は位置 i のみの関数である。しかして、式(4-10)を式(4-3)に代入すると、

$$A_s t_r C(i) = 1$$

したがって、 $C(i)$ ($= \{\tau(i, t)\}^{b_1}$) は $1 / (A_s t_r)$ ($=$ 一定) となって位置 i に依存しない。よって、式(4-6)あるいは(4-9)の等号が成立し、与えられた公称応力のもとで破断時間 t_r が一番大きくなるのは、応力勾配のない平滑材の場合であり、この場合に限る。以上まとめると、縦せん断負荷のもとでは、 $b_1 > 1$ であれば、つねに切欠き弱化となる。

(ii) $b_1 = 1$ の場合

式(4-2)、(4-3)、(4-7)および(4-8)より、次の関係が得られる。

$$t_r = \left\{ \left(\sum_{i=1}^N \rho_i \right) / S \right\}^{b_1} / A_s = (t_r)_s \quad (4-11)$$

したがって、 $b_1 = 1$ の場合には、切欠き強化も弱化も起こらないことになる。

(iii) $0 < b_1 < 1$ の場合

Hölderの不等式(4-4)より次式が導かれる。

$$\int_0^{t_r} \{\tau(i,t)\}^{b_1} dt \leq \left[\int_0^{t_r} \tau(i,t) dt \right]^{b_1} \left[\int_0^{t_r} dt \right]^{1-b_1}$$

----- (4-12)

(i) の場合と同様にして、式(4-12)、(4-2)および(4-3)から、

$$t_r \geq \left\{ \left(\sum_{i=1}^N \rho_i \right) / S \right\}^{b_1} / A_s = (t_r)_s \quad \text{----- (4-13)}$$

が得られる。等号が成立するのは、応力勾配の存在しない平滑材の場合であり、この場合に限る。式(4-13)より、 $0 < b_1 < 1$ の場合にはつねに切欠き強化となる。

以上の結果をまとめると、縦せん断負荷のもとでは、 $b_1 > 1$ の場合には切欠き材の破断時間は平滑材のそれよりつねに小さく、 $b_1 = 1$ の場合、両者は等しくなり、逆に $b_1 < 1$ の場合には前者は後者より大きくなる。金属材料の場合、通常 $b_1 > 1$ であるので、切欠き弱化が支配的となることになる。

以上の取扱いにおいては、特性寸法 ρ_i として有限の値を想定し

た。いま、 ρ_i が無限に小さい場合を考えると、式(4-1)、(4-2)、(4-6)、(4-7)、(4-11) および(4-13)中の総和は積分に置直す必要があるが、上記と同様の演算より、以上の結果と同じ結果が得られる。

なお、本解析において用いている仮定は、主として、き裂がつねに切欠き底面内で発生・成長すること および式(2-120)で表わされるクリープ損傷則の二点であり、構成式についてはなんら特別な仮定を設けていない。したがって、いかなる構成式のもとにおいても、たとえば弾塑性ひずみとクリープひずみとを同時に考慮しなければならない場合においても、上記の結果が成立することになる。

4・2 ねじりクリープ下の切欠き強度

本節では、図4-2に示すような、環状切欠き丸棒のねじりクリープ破断強度について解析する。本節で用いる解析手法は、前節で用いたものと本質的には同じである。

ねじりの場合の釣合い式は、

$$\sum_{i=1}^N 2\pi r_i^2 \rho_i \tau(i, t) = M_t$$

----- (4-14)

と表わされる。ここに、 r_i は要素 i の中心軸からの距離、 ρ_i は要素 i の幅、 N は要素の数であり、 M_t

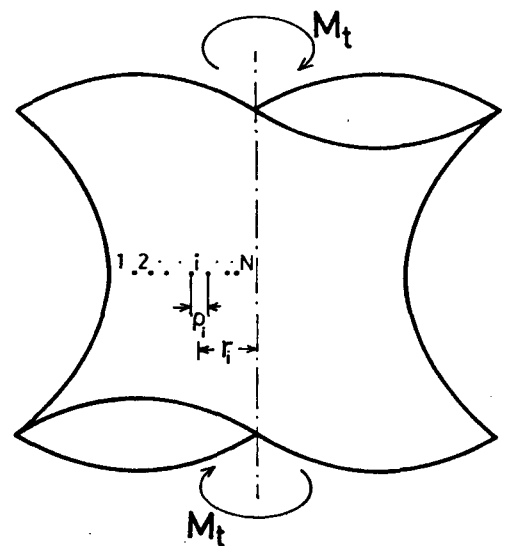


図4-2 ねじりを受ける切欠き丸棒

は丸棒に加わるねじりモーメントである。式(4-3), Hölderの不等式(4-4), および(4-14)を用い, 前節と同じ取扱いをすると以下に示す関係が得られる。

$$b_1 > 1 \text{ の場合} \quad t_r \leq t^* \quad \text{----- (4-15)}$$

$$b_1 = 1 \text{ の場合} \quad t_r = t^* \quad \text{----- (4-16)}$$

$$b_1 < 1 \text{ の場合} \quad t_r \geq t^* \quad \text{----- (4-17)}$$

ここに

$$t^* = \left\{ \left(\sum_{i=1}^N 2\pi r_i^2 \rho_i \right) / M_t \right\}^{b_1} / A_s \quad \text{---- (4-18)}$$

式(4-15)および(4-17)の等号は, 丸棒内に応力勾配の存在しない場合にのみ成立する。

ねじり負荷のもとでは, 平滑材においても応力勾配が存在し, 一般に t^* と平滑材の破断時間 $(t_r)_s$ とは等しくない。そこで, 次にこの t^* と $(t_r)_s$ との間の差について論ずる。

定常クリープ則・式(2-9)のもとにおいては, 平滑材の最大せん断応力は試験片表面で現われ, その値は,

$$\tau_{sc} = \frac{3n+1}{4n} \tau_e \quad \text{----- (4-19)}$$

で与えられる。ここに, τ_e は弾性応力分布を仮定したときの最大せん断応力であり, これは M_t および断面半径 a_0 を用いて,

$$\tau_e = \frac{2M_t}{\pi a_0^3} \quad \text{----- (4-20)}$$

で表わされる。したがって, 式(2-120)より, 平滑材のき裂発生時間 $(t_i)_s$ は次式のようになる。

$$(t_i)_s \doteq \frac{1}{A_s} \left(\frac{2\pi n}{3n+1} \frac{a_0^3}{M_t} \right)^{b_1} \text{----- (4-21)}$$

通常、平滑材の応力勾配は小さいので、 $(t_i)_s$ は平滑材の破断時間 $(t_r)_s$ に近似的に等しい。すなわち、

$$(t_i)_s \doteq (t_r)_s \text{----- (4-22)}$$

また、式(4-18)中の総和は ρ_i が十分小さければ、

$$\sum_{i=1}^N 2\pi r_i^2 \rho_i \doteq \int_0^{a_0} 2\pi x^2 dx = \frac{2\pi}{3} a_0^3 \text{--- (4-23)}$$

となる。式(4-18)、(4-21)、(4-22)および(4-23)より

$(t_r)_s / t^*$ は

$$\frac{(t_r)_s}{t^*} \doteq \frac{(t_i)_s}{t^*} \doteq \left(\frac{3n}{3n+1} \right)^{b_1} \text{----- (4-24)}$$

となる。

(i) $b_1 > 1$ の場合

一例として、限界ひずみ条件(粒内破壊、式(2-123))を採用した場合について考える。この場合、式(2-123)より $b_1 = n$ であるので、式(4-24)の値は、

$$\frac{(t_r)_s}{t^*} \doteq \left(\frac{3n}{3n+1} \right)^n \doteq 0.72 \sim 0.75, n > 1 \text{----- (4-24a)}$$

となる。限界粒界ひずみ条件(粒界破壊)を採用した場合には、式(2-125)より $b_1 = n_b$ となる。通常、 n_b は n より小さい⁽⁸⁾ので、 $(t_r)_s / t^* \doteq \{3n / (3n+1)\}^{n_b}$ の値は式(4-24a)の値よりさらに1に近い。

また、上記の事実は、 $b_1 > 1$ の場合、応力勾配が大きくなるほど

ど破断時間が短くなることを示すものであると解釈できよう。したがって、切欠き材と平滑材とを比較した場合、応力勾配の小さい平滑材の方が破断時間が大きいと考えられる。

以上より、式(4-15)は、事實上 次のように書直すことができる。

$$t_r \leq (t_r)_s \quad \text{----- (4-25)}$$

同様にして、式(4-16)および(4-17)も次のように書直せる。

(ii) $b_1 = 1$ の場合

$$t_r = (t_r)_s \quad \text{----- (4-26)}$$

(iii) $b_1 < 1$ の場合

$$t_r > (t_r)_s \quad \text{----- (4-27)}$$

前述のように、通常 b_1 は 1 より大きい。したがって、特別な金属学的強化の機構が作用しなければ、ねじり負荷のもとでは切欠き弱化が支配的となる。

第9章で後述するように、著者は本解析と並行して、ねじりクリープ下における切欠き材の破断試験を行なっている。この試験結果によれば、無酸素銅(200°C)およびニツの低炭素鋼(450°C)については、切欠き弱化が支配的である。この事実は、本解析結果と一致している。

4.3 結言

縦せん断負荷およびねじり負荷のもとにおける切欠き材のクリープ破断に対する力学的解析を行なった。その結果、切欠きクリープ破断特性、すなわち切欠き強化、弱化いずれを呈するかは、金属学的強化および弱化の機構が作用しなければ、本研究で採用したクリ

一不傷則(式(2-120))中の応力の指数 b_1 のみに依存し、
 $b_1 > 1$ の場合はつねに切欠き弱化、 $b_1 < 1$ の場合には切欠き強化と
なり、 $b_1 = 1$ の場合には強化も弱化も起こらないことが明らかとな
った。通常の金属材料では $b_1 > 1$ となるので、切欠き弱化が現れる
ことになる。このことは、実験事実と一致している。

第5章 特異応力場の仮定に基づく近似的き裂成長解析

本章では、き裂成長挙動に対する近似的取扱いを示す。すなわち、応力としては、2・1・2項で得られているき裂先端近傍の特異応力場を仮定し、これをクリーフ損傷則と組み合わせる力学的解析を行ない、き裂成長速度の近似式を求める。本章の解析結果は、後述する具体的形状を有する試験片のき裂挙動解析に対する理解を助けるだけでなく、クリーフき裂成長全般に対する理解にも役立つと期待される。

5・1 モードⅢ型き裂の成長挙動

式(2-41)より、モードⅢ型き裂先端近傍の応力は次式で与えられる。

$$\left. \begin{aligned} \tau &= \frac{K_6}{\sqrt{3}} r^{-\frac{1}{n+1}} \tilde{\sigma}_e(\theta) \\ \max_{0 \leq \theta \leq \pi} \tilde{\sigma}_e(\theta) &= \tilde{\sigma}_e(0) = 1 \end{aligned} \right\} \text{--- (5-1)}$$

ここに、 r および θ は図5-1のようにと、た量であり、 K_6 は塑性の応力拡大係数である。以下においては、応力が式(5-1)で表わされる場合のき裂挙動を解析する。式(5-1)を式(2-120)に代入すると、き裂先端前方における損傷値の時間的変化率は、

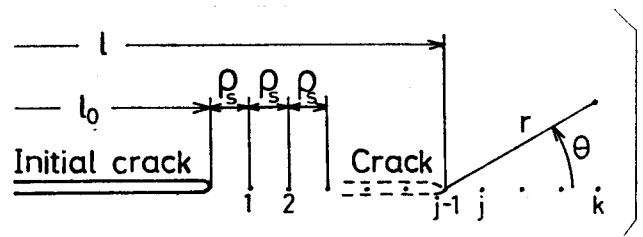


図5-1 き裂先端近傍

$$\dot{\eta} = A_s \left(\frac{K_6}{\sqrt{3}} \right)^{b_1} / r^{\frac{b_1}{n+1}} \quad \text{----- (5-2)}$$

となる。第3章と同様に、初期き裂より $k P_s$ (k : 自然数) だけ前方の点を第 k 点と呼ぶことにする。また、き裂が第 $(j-1)$ 点まで成長した時点における第 k 点の損傷値およびその時間的变化率をそれぞれ η_{kj} および $\dot{\eta}_{kj}$ とする。式 (5-2) より $\dot{\eta}_{kj}$ は

$$\dot{\eta}_{kj} = A_s \left(\frac{K_6}{\sqrt{3}} \right)^{b_1} / \{(k-j+1) P_s\}^{\frac{b_1}{n+1}} \quad \text{----- (5-3)}$$

で与えられる。

さて、式 (3-8) より、

$$\sum_{j=1}^k \dot{\eta}_{kj} t_{Pj} = 1 \quad \text{----- (5-4)}$$

となる。式 (5-4) に式 (3-7) を代入すると、

$$\sum_{j=1}^k (1 - \eta_{jj}) \dot{\eta}_{kj} / \dot{\eta}_{jj} = 1 \quad \text{----- (5-5)}$$

が得られる。式 (5-5) に式 (5-3) を代入すると、

$$\sum_{j=1}^k (1 - \eta_{jj}) / (k-j+1)^{\frac{b_1}{n+1}} = 1 \quad \text{----- (5-6)}$$

また、 η_{kj} の定義および式 (5-3) より

$$\begin{aligned} \eta_{kk} &= \eta_{kj} + \sum_{i=j}^{k-1} (1 - \eta_{ii}) \dot{\eta}_{ki} / \dot{\eta}_{ii} \\ &= \eta_{kj} + \sum_{i=j}^{k-1} (1 - \eta_{ii}) / (k-i+1)^{\frac{b_1}{n+1}} \quad \text{----- (5-7)} \end{aligned}$$

となる。

一方、式 (3-7) および (3-19) より、き裂成長速度 dl/dt は、

$$\frac{dl}{dt} = \frac{\rho_s \dot{\eta}_{jj}}{1 - \eta_{jj}} \quad \text{----- (5-8)}$$

で与えられる。式(5-8)右辺の中の $\dot{\eta}_{jj}$ は式(5-3)により求められるので、式(5-6)から $(1 - \eta_{jj})$ の近似解を求め、これらの値を用いて dl/dt の近似解を求めてみよう。なお、 $b_1/(n+1)$ が1より大きいか、1に等しいか、あるいは1より小さいかに応じて、 $(1 - \eta_{jj})$ が異なる挙動を示すので、これら三つの場合に分けて論ずることとする。

(i) $b_1/(n+1) > 1$ の場合

近似として、 $j \gg 1$ のとき、 η_{jj} の変化が小さいと仮定すると、式(5-6)より、

$$(1 - \eta_{jj}) \sum_{i=1}^j i^{-b_1/(n+1)} = 1 \quad \text{----- (5-9)}$$

$\sum_{i=1}^j i^{-b_1/(n+1)}$ は、 $j \rightarrow \infty$ のとき Riemann のツェータ関数 $\zeta(\frac{b_1}{n+1})$ に漸近する⁽⁸⁾。よって、

$$1 - \eta_{jj} \doteq \frac{1}{\zeta(\frac{b_1}{n+1})}, \quad j \gg 1 \quad (5-10)$$

となる。式(5-10)より、き裂が十分進めばき裂先端前方 ρ_s の点の損傷値は一定値に漸近し、このことは最初に用いた近似仮定と矛盾しない。 $\zeta(\frac{b_1}{n+1})$ の値を図5-2に示す。

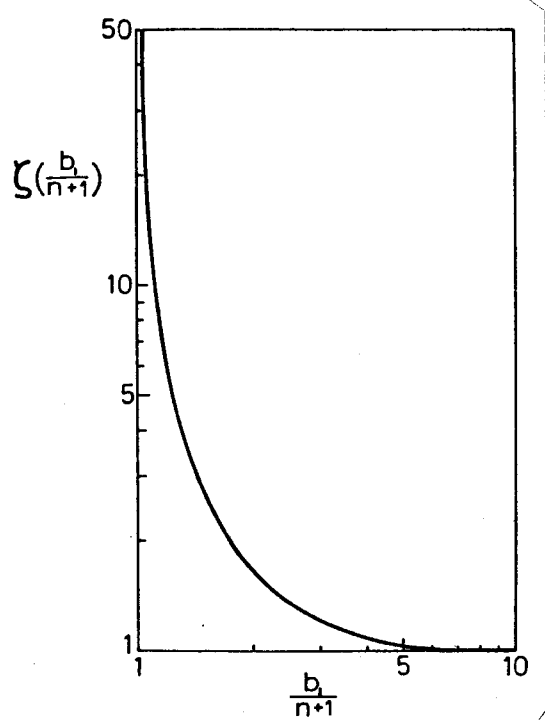


図5-2 $\zeta(\frac{b_1}{n+1})$ の値

式(5-10)を式(5-7)に代入すると、

$$1 - \eta_{kj} = (1 - \eta_{jj}) \sum_{i=1}^{k-j+1} i^{-b_1/(n+1)} = \left(\sum_{i=1}^{k-j+1} i^{-b_1/(n+1)} \right) / \zeta\left(\frac{b_1}{n+1}\right),$$

$$k \geq j \gg 1 \quad \text{----- (5-11)}$$

となる。また、式(5-3)および(5-10)を式(5-8)に代入すると、き裂成長速度の近似式が得られる。すなわち、

$$\frac{dl}{dt} = 3^{-\frac{b_1}{2}} A_s \zeta\left(\frac{b_1}{n+1}\right) \rho_s^{1-\frac{b_1}{n+1}} K_0^{b_1}, \quad l - l_0 \gg \rho_s$$

$$\text{----- (5-12)}$$

ここに、 l_0 は初期き裂長さである。 K_0 と修正J積分 J' との間には式(2-78)で表わされる一対一の対応関係があるので、式(5-12)は J' を用いて書直すことができる。すなわち、

$$\frac{dl}{dt} = 3^{-\frac{b_1}{2}} A_s \zeta\left(\frac{b_1}{n+1}\right) \left(\frac{6c^n}{A_n \dot{\epsilon}_c} \right)^{\frac{b_1}{n+1}} \rho_s^{1-\frac{b_1}{n+1}} (J')^{\frac{b_1}{n+1}}, \quad l - l_0 \gg \rho_s$$

$$\text{----- (5-13)}$$

(ii) $b_1 / (n+1) = 1$ の場合

(i) の場合と同様の近似を行なうと、

$$1 - \eta_{jj} \cong 1 / \sum_{i=1}^j (1/i) \quad \text{----- (5-14)}$$

式(5-14)中の総和は次式で与えられる⁽⁸²⁾。

$$\sum_{i=1}^j (1/i) = \gamma_E + \ln j + \frac{1}{2j} + O(j^{-2}) \quad (5-15)$$

ここに、 γ_E は Euler の定数である。式(5-15)を式(5-14)に代入すると、

$$1 - \eta_{jj} \cong 1 / \ln j, \quad j \gg 1 \quad \text{----- (5-16)}$$

となる。

式(5-16)を式(5-7)に代入し近似処理を施すと次式が得られる。

$$1 - \eta_{kj} = (1 - \eta_{jj}) \sum_{i=1}^{k-j+1} (1/i), \quad k \geq j \gg 1 \quad (5-11a)$$

式(5-3)および(5-16)を式(5-8)に代入し、き裂成長量 $(l - l_0)$ が $(j-1)\rho_s$ に等しいことを用いると、 dl/dt は、

$$\frac{dl}{dt} = 3^{-\frac{b_1}{2}} A_s \ln\left(\frac{l-l_0}{\rho_s}\right) K_6^{b_1}, \quad l - l_0 \gg \rho_s \quad (5-17)$$

で近似的に表わされる。また、式(2-78)を式(5-17)に代入すると、

$$\frac{dl}{dt} = 3^{-\frac{b_1}{2}} A_s \frac{\sigma_c^n}{A_n \dot{\epsilon}_c} \ln\left(\frac{l-l_0}{\rho_s}\right) J', \quad l - l_0 \gg \rho_s$$

----- (5-18)

となり、 dl/dt が J' を用いて表わされる。

(iii) $b_1 / (n+1) < 1$ の場合

(i) の場合と同様にして、 $(1 - \eta_{jj})$ の第一次近似式を求めると、

$$1 - \eta_{jj} \cong 1 / \sum_{i=1}^j i^{-b_1/(n+1)} \cong 1 / \int_1^j x^{-\frac{b_1}{n+1}} dx$$

$$\cong \left(1 - \frac{b_1}{n+1}\right) j^{\frac{b_1}{n+1} - 1}, \quad j \gg 1 \quad \text{----- (5-19)}$$

次に、 $(1 - \eta_{jj})$ の第一次近似解・式(5-19)をもとに、第二次近似解を求める。式(5-19)より、 $(1 - \eta_{jj})$ はほぼ $j^{b_1/(n+1) - 1}$ に比例する。したがって、

$$1 - \eta_{ii} = (1 - \eta_{jj}) \left(\frac{j}{i}\right)^{1 - \frac{b_1}{n+1}} \quad \text{----- (5-20)}$$

式(5-20)を式(5-6)に代入すると

$$(1 - \eta_{jj}) j^{1 - \frac{b_1}{n+1}} \sum_{i=1}^j i^{\frac{b_1}{n+1} - 1} (j - i + 1)^{-\frac{b_1}{n+1}} = 1$$

----- (5-21)

となる。式(5-21)中の総和は、これを積分で近似した後変数変換し、さらにガンマ関数 $\Gamma(x)$ の性質⁽⁸³⁾⁽⁸⁴⁾を用いると、

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^j i^{\frac{b_1}{n+1} - 1} (j - i + 1)^{-\frac{b_1}{n+1}} &\approx \int_1^j x^{\frac{b_1}{n+1} - 1} (j - x + 1)^{-\frac{b_1}{n+1}} dx \\ &\approx \int_0^1 x^{\frac{b_1}{n+1} - 1} (1 - x)^{-\frac{b_1}{n+1}} dx = \Gamma\left(\frac{b_1}{n+1}\right) \Gamma\left(1 - \frac{b_1}{n+1}\right), \quad j \gg 1 \end{aligned}$$

----- (5-22)

となる。式(5-22)を式(5-21)に代入すると、次式が得られる。

$$1 - \eta_{jj} = \frac{j^{\frac{b_1}{n+1} - 1}}{\Gamma\left(\frac{b_1}{n+1}\right) \Gamma\left(1 - \frac{b_1}{n+1}\right)}, \quad j \gg 1$$

----- (5-23)

式(5-23)より、 $(1 - \eta_{jj})$ は $j^{-1 + b_1/(n+1)}$ に比例する。これは第二次近似で設けた仮定と矛盾しない。式(5-23)からわかるように、 $b_1/(n+1) < 1$ の場合には、応力として特異応力場を仮定しても、履歴の影響項である $(1 - \eta_{jj})$ は、き裂成長に伴い減少し続け零に近づいていくことになる。

式(5-23)を式(5-7)に代入し、近似処理を施すと、

$$1 - \eta_{kj} = (1 - \eta_{jj}) \sum_{i=1}^{k-j+1} i^{-\frac{b_1}{n+1}}, \quad k \geq j \gg 1$$

(5-11b)

となる。式(5-3)および(5-23)を式(5-8)に代入すると、次式で表わされるき裂成長速度の近似式が得られる。

$$\frac{dl}{dt} = 3^{-\frac{b_1}{2}} A_s \Gamma\left(\frac{b_1}{n+1}\right) \Gamma\left(1 - \frac{b_1}{n+1}\right) (l-l_0)^{1-\frac{b_1}{n+1}} K_6^{b_1},$$

$$l-l_0 \gg \rho_s \quad \text{----- (5-24)}$$

式(2-78)を式(5-24)に代入すると、き裂成長速度が J' によって表示される。すなわち、

$$\frac{dl}{dt} = 3^{-\frac{b_1}{2}} A_s \Gamma\left(\frac{b_1}{n+1}\right) \Gamma\left(1 - \frac{b_1}{n+1}\right) \left(\frac{\sigma_c^n}{A_n \dot{\epsilon}_c}\right)^{\frac{b_1}{n+1}} (l-l_0)^{1-\frac{b_1}{n+1}} (J')^{\frac{b_1}{n+1}},$$

$$l-l_0 \gg \rho_s \quad \text{----- (5-25)}$$

図5-3に、き裂先端前方の u が式(5-2)で与えられる場合における $(1-\eta_{jj})$ の推移の数値計算結果と、近似式(5-10)、(5-16)あるいは(5-23)との比較を示す。図中の実線は数値計算結果、破線は近似式をそれぞれ表わしている。図より、 $b_1/(n+1)=1$ の場合を除けば、 $(1-\eta_{jj})$ の挙動は 近似式により非常に良く表わされている。

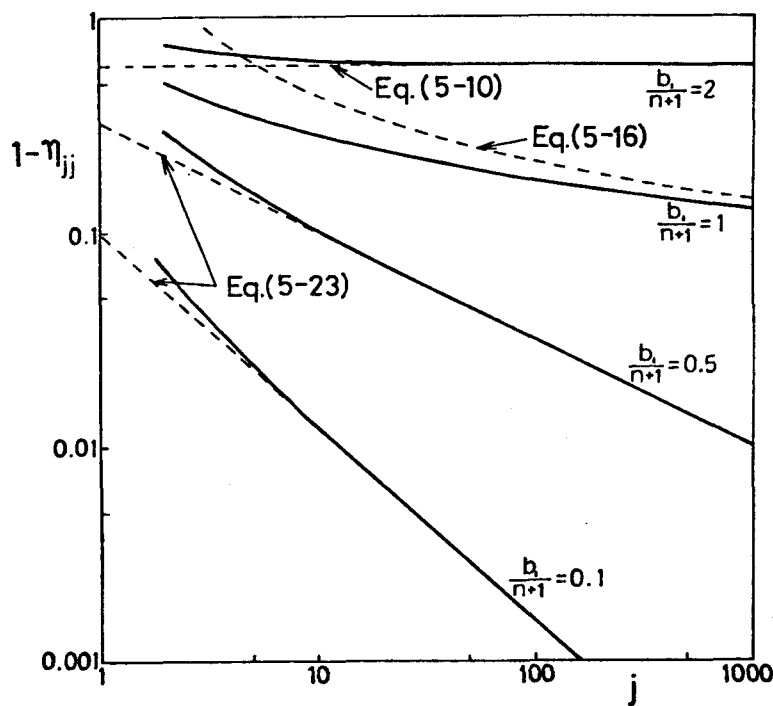


図5-3 $(1-\eta_{jj})$ の推移

したが、て、これらの近似式(5-10)あるいは(5-23)に基づき
 き裂成長速度の近似式(5-12), (5-24)等は、十分な近似度を有し
 ていると考えられる。

き裂先端近傍の損傷値分布形は、式(5-11), (5-11a)あるいは
 (5-11b)で与えられている。そこで、き裂先端近傍の損傷値を1
 から引いた値、すなわち(1- η)を、き裂先端前方 r_s の点におけ
 るその値(1- $\eta_{r=r_s}$)で割り、この値をき裂先端からの距離の関数
 として図5-4に示す。き裂がある程度成長すれば、損傷値分布形
 は図のような形になるので、この分布形を損傷値の定常分布形と呼
 ぶことにする。

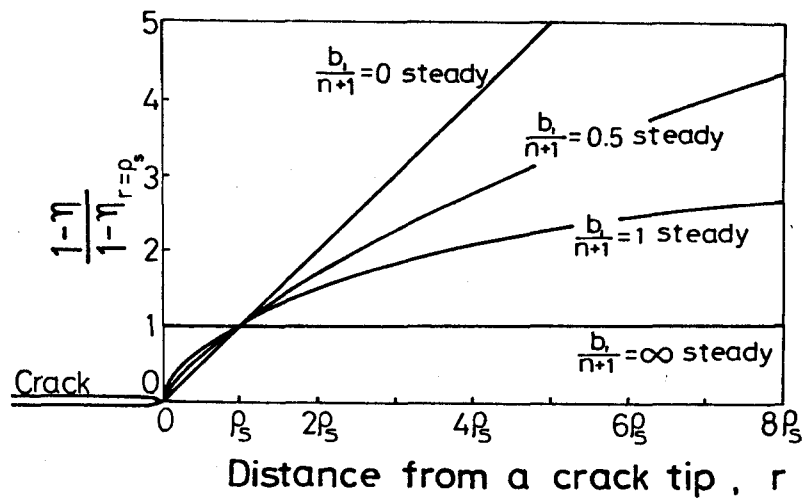


図5-4 き裂先端近
 傍の損傷値の定常分
 布形

5・2 モードI型き裂の成長挙動

モードI型き裂先端近傍の応力は、式(2-41)より、次式で与えら
 れる。

$$\sigma_{ij}(r, \theta) = K_0 r^{-\frac{1}{n+1}} \tilde{\sigma}_{ij}(\theta) \text{ ----- (5-26)}$$

ここに、 $\tilde{\sigma}_{ij}(\theta)$ は、応力・ひずみの状態(たとえば、平面応力状態
 あるいは平面ひずみ状態)およびクリーフ指数 n に依存する。クリ
 ーフ損傷則・式(2-130)中の関数 h_M が、応力テンソル σ_{ij} に関す

る b_1 次の同次式であるとする、き裂先端前方における損傷値の時間的变化率は、式(5-26)を式(2-130)に代入することにより、

$$\dot{r} = A_T'' K_6^{b_1} r^{-b_1/(n+1)} \text{----- (5-27)}$$

で与えられる。ここに、 A_T'' は、 $\tilde{\sigma}_{ij}(\theta)$ と式(2-130)中の関数 f_M とにより、定まるある定数であり、 $1/(6^{b_1} \tau)$ と同じ次元を持つ。式(5-27)より、 \dot{r} は、モードIII型き裂の場合(式(5-2))と同形で係数のみ異なる式で与えられる。したがって、応力が式(5-26)で与えられるモードI型き裂の成長速度は、5・1節のモードIII型き裂に対する解析結果より簡単に求められる。すなわち、 $b_1/(n+1) > 1$ の場合には式(5-12)あるいは(5-13)、 $b_1/(n+1) = 1$ の場合には式(5-17)あるいは(5-18)、 $b_1/(n+1) < 1$ の場合には式(5-24)あるいは(5-25)のそれぞれの式の中の係数 $3^{-b_1/2} A_s$ を A_T'' に置換することにより、モードI型き裂成長速度の近似式が得られる。

5・3 結言

応力として2・1節で求めたき裂先端近傍の特異応力場を仮定し、これをクリーブ損傷則と組み合わせる力学的解析を行ない、き裂成長速度の近似式を求めた。その結果、モードIII型き裂、モードI型き裂いずれについても、き裂が十分に成長すれば、その成長速度 dl/dt は以下に示すような量に比例することが明らかとなった。

$$\begin{aligned} \frac{b_1}{n+1} > 1 \text{ の場合} \quad \frac{dl}{dt} &\propto \rho_s^{1-\frac{b_1}{n+1}} K_6^{b_1} \\ &\propto \rho_s^{1-\frac{b_1}{n+1}} (\sigma')^{\frac{b_1}{n+1}} \text{----- (5-28)} \end{aligned}$$

$$\frac{b_1}{n+1} = 1 \text{ の場合} \quad \frac{dl}{dt} \propto \ln\left(\frac{l-l_0}{\rho_s}\right) K_\sigma^{b_1}$$

$$\propto \ln\left(\frac{l-l_0}{\rho_s}\right) J' \quad \text{----- (5-29)}$$

$$\frac{b_1}{n+1} < 1 \text{ の場合} \quad \frac{dl}{dt} \propto (l-l_0)^{1-\frac{b_1}{n+1}} K_\sigma^{b_1}$$

$$\propto (l-l_0)^{1-\frac{b_1}{n+1}} (J')^{\frac{b_1}{n+1}} \quad \text{----- (5-30)}$$

ここに、 b_1 は損傷則中の指数、 n はクリーフ指数、 l はき裂長さ、 l_0 は初期き裂長さ、 ρ_s は材料の特性寸法、 K_σ は塑性の応力拡大係数であり、 J' は修正J積分値である。

第6章 縦せん断負荷のもとにおける双曲線切欠きを有する柱の フリーボディ挙動に対する力学的解析

本章では、力学的解析の具体例のひとつとして、深い切欠き材の極限状態であると解釈できる双曲線切欠き材の縦せん断負荷のもとにおけるき裂挙動を解析し、種々の因子がき裂発生・き裂成長にどのような影響を与えるかという点について系統的に調べる。

6.1 応力・ひずみ解析

力学的解析の対象とした双曲線切欠きを図6-1に示す。直角座標系 x, y, z との間に関係が成立する。二次元楕円双曲線座標系 $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ を導入する。

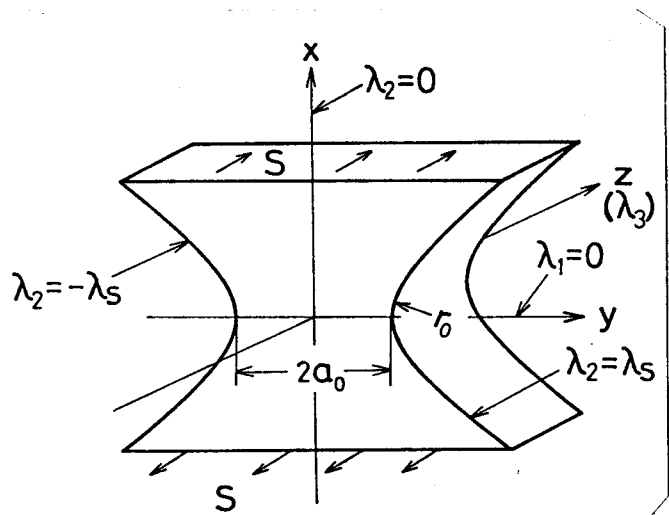


図6-1 双曲線切欠き

$$\left. \begin{aligned} x &= C \cdot \sinh \lambda_1 \cdot \cos \lambda_2 \\ y &= C \cdot \cosh \lambda_1 \cdot \sin \lambda_2 \\ z &= \lambda_3 \end{aligned} \right\} (C: \text{定数}) \quad \text{-----} \quad (6-1)$$

自由面は λ_2 が一定値 $\pm \lambda_s$ をとる面として表わされる。わい曲係数は、

$$\begin{aligned} h_1^2 &= \left(\frac{\partial x}{\partial \lambda_1} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \lambda_1} \right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \lambda_1} \right)^2 \\ &= C^2 (\sinh^2 \lambda_1 + \cos^2 \lambda_2) \quad \text{-----} \quad (6-2)_1 \end{aligned}$$

$$h_2^2 = h_1^2 \quad \text{-----} \quad (6-2)_2$$

$$h_3^2 = 1 \quad \text{-----} \quad (6-2)_3$$

切欠き半径 r_0 と切欠き底断面半幅 a_0 との間には次式が成立する。

$$\frac{a_0}{r_0} = \tan^2 \lambda_s \quad \text{-----} \quad (6-3)$$

零でない応力成分は τ_{13} のみであるとする^(注)、自明でない平衡方程式として次式が得られる。

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{h_1} \frac{\partial}{\partial \lambda_3} (\tau_{13} h_1^2 h_2) &= 0 \\ \frac{1}{h_3} \frac{\partial}{\partial \lambda_1} (\tau_{13} h_3^2 h_2) &= 0 \end{aligned} \right\} \text{-----} \quad (6-4)$$

式(6-4)の第一式より τ_{13} が λ_3 の関数でないことに留意すれば、式(6-4)の第二式より、 $F(\lambda_2)$ を λ_2 のみの関数として、

$$\tau_{13} h_3^2 h_2 = F(\lambda_2) \quad \text{-----} \quad (6-5)$$

となる。したがって、 τ_{13} は

$$\tau_{13} = \frac{F(\lambda_2)}{h_3^2 h_2} \quad \text{-----} \quad (6-6)$$

と表わされる。単位厚さ当りのせん断力 S は、 $F(\lambda_2)$ を用いて次

(注) この仮定は、 $n=1$ の場合には厳密に成立するが、 $n \neq 1$ の場合には一般に成立しない。この点についてはなお検討を要するが、このような仮定はよく用いられており⁽⁸⁵⁾、また物理的にみても少なくとも零でない他の応力成分 τ_{23} に比して τ_{13} が大きいと考えられるので、悪い近似ではないと考えられる。本論文では簡単のため、この仮定に基づく解析解を用いて、種々の因子の影響を調べる。なお、以下の解析結果からわかるように、本章の解析結果は、第4章および第5章の結果と少なくとも定性的に矛盾しない。

式で与えられる。

$$S = 2 \int_0^{\lambda_3} F(\lambda_2) d\lambda_2 \quad \text{----- (6-7)}$$

また、 λ_3 方向変位を w とすれば、全ひずみ γ_{13} は、

$$\gamma_{13} = \frac{h_3}{h_1} \cdot \frac{\partial}{\partial \lambda_1} \left(\frac{w}{h_3} \right) \quad \text{----- (6-8)}$$

となる。これを λ_1 について積分すると、

$$\frac{w}{h_3} = \int_{\infty}^{\lambda_1} \gamma_{13} \frac{h_1}{h_3} d\lambda_1 \quad \text{----- (6-9)}$$

が得られる。切欠き底面に関する w の対称性より、

$$(w)_{\lambda_1=0} = - \int_0^t \beta_s dt \quad \text{----- (6-10)}$$

が成立する。ただし、 β_s は $\lambda_1=0$ 面の $\lambda_1=\infty$ に対する相対的変位速度である。

簡単のため、定常クリープ状態を考え、構成式としては、前述のように Norton 則 (式 (2-9)) を用いる。

式 (6-6)、(6-9)、(6-10) および (2-9) より 応力およびひずみ速度が求められる。すなわち、

$$F(\lambda_2) = C \tau_c \left(\frac{\beta_s}{\dot{\gamma}_c C E_{\frac{n-1}{2}}(\lambda_2)} \right)^{\frac{1}{n}} \quad \text{----- (6-11)}$$

$$\tau_{13} = \tau_c \left(\frac{\beta_s}{\dot{\gamma}_c C E_{\frac{n-1}{2}}(\lambda_2)} \right)^{\frac{1}{n}} (\sinh^2 \lambda_1 + \cos^2 \lambda_2)^{-\frac{1}{2}} \quad \text{----- (6-12)}$$

$$\dot{\gamma}_{13} = \frac{\beta_s}{C} \frac{1}{E_{\frac{n-1}{2}}(\lambda_2) (\sinh^2 \lambda_1 + \cos^2 \lambda_2)^{n/2}} \quad \text{----- (6-13)}$$

ただし、

$$E_R(\lambda_2) \equiv \int_0^\infty \frac{d\lambda_1}{(\sinh^2 \lambda_1 + \cos^2 \lambda_2)^k} \text{----- (6-14)}$$

付録Ⅱで述べるように、 $E_R(\lambda_2)$ は、 k が自然数である場合には、複素関数論を用いることにより解析的に求められる。

解の一例として、 $n=7$ の場合の応力およびひずみ速度を以下に示す。

$$\tau_{13} = \frac{\tau_c}{\sqrt{\sinh^2 \lambda_1 + \cos^2 \lambda_2}} \left\{ \frac{\beta_s}{\gamma_c C} \frac{\sin^5 2\lambda_2}{(8\lambda_2 + 4\lambda_2 \cos 4\lambda_2 - 3 \sin 4\lambda_2)} \right\}^{\frac{1}{7}} \text{----- (6-15)}$$

$$\dot{\gamma}_{13} = \frac{\beta_s}{C} \frac{\sin^5 2\lambda_2}{(8\lambda_2 + 4\lambda_2 \cos 4\lambda_2 - 3 \sin 4\lambda_2) (\sinh^2 \lambda_1 + \cos^2 \lambda_2)^{7/2}} \text{----- (6-16)}$$

6・2 き裂発生挙動解析

6・1節の応力解析結果と2・3・2項の式(2-120)で表わされているクリーブ損傷則とを組み合わせることにより、縦せん断負荷のもとにおける双曲線切欠き材のき裂発生が取扱える。解析方法については3・1節で詳述したので、本節ではこれに関する記述を省略し、3・1節で得られた結果より、き裂発生に関する諸量に影響を及ぼすパラメータを抽出し、これをもとに計算結果を整理してみよう。

双曲線切欠き材においては、切欠き底断面半幅 a_0 と切欠き半径 r_0 が決まれば、すべての形状が決定される。そこで、3・1節の議論で用いた公称応力 τ_{n0} として切欠き底断面における公称応力、試験片の基準寸法 a^* として a_0 、試験片形状を定める他の寸法

として r_0 をとることとする。このとき、式 (3-1) および (3-3) より、切欠き材のき裂発生時間 t_i は τ_{n_0} の b_1 乗に逆比例し、 $t_i \tau_{n_0}^{b_1}$ はクリーフ指数 n 、損傷則中の指数 b_1 、材料の特性寸法 ρ_s と a_0 との比 ρ_s/a_0 および切欠き半径 r_0 と a_0 との比 r_0/a_0 のみの関数となる。平滑材のき裂発生時間 $(t_i)_s$ は同時に破断時間 $(t_r)_s$ でもあり、式 (2-120) より、

$$(t_r)_s = (t_i)_s = 1 / (A_s \tau_{n_0}^{b_1}) \quad \text{----- (6-17)}$$

となる。式 (3-5) より、 t_i と $(t_i)_s$ の比、すなわちき裂発生時間比 R_{t_i} は、

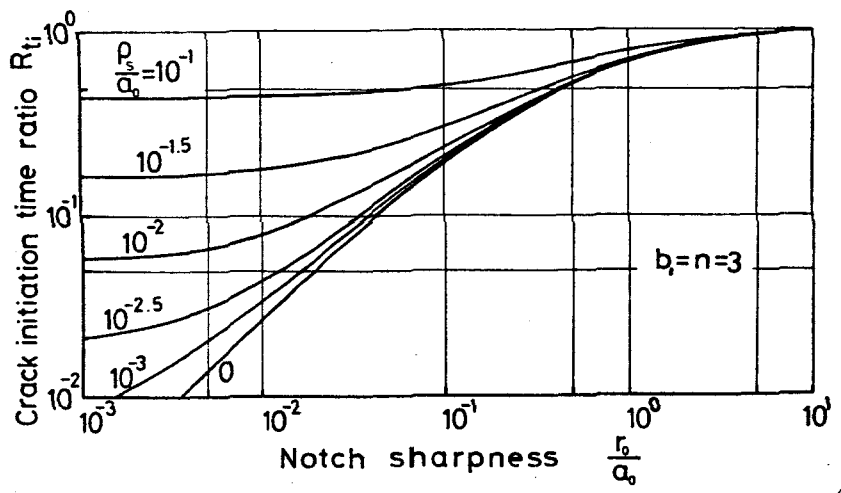
$$R_{t_i} = R_{t_i}(n, b_1, \rho_s/a_0, r_0/a_0) \quad \text{----- (6-18)}$$

となる。また、式 (3-6) より、一般の場合の R_{t_i} 値は、 $b_1 = n$ の場合、すなわち限界ひずみ条件 (式 (2-123)) を用いた場合の R_{t_i} 値、 $(R_{t_i})_{b_1=n}$ より簡単に求められる。すなわち、

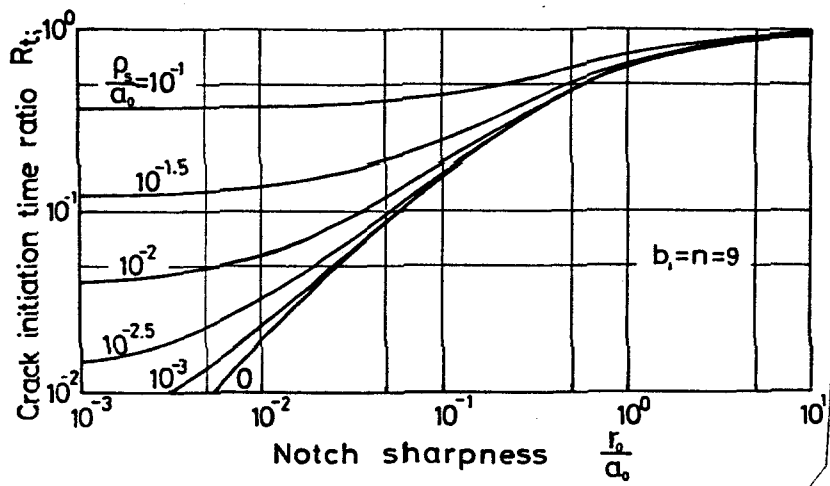
$$R_{t_i} = \left\{ (R_{t_i})_{b_1=n} \right\}^{b_1/n} \quad \text{----- (6-19)}$$

$b_1 = n$ の場合の R_{t_i} の計算結果例を図 6-2 に示す。図中の横軸は、切欠きの鋭さの尺度として切欠き半径を切欠き底断面半幅 a_0 で除した値をとっている。 $r_0/a_0 \rightarrow \infty$ は平滑材に、 $r_0/a_0 \rightarrow 0$ はき裂材にそれぞれ対応している。図より、一般に切欠きが鋭くなるにつれて、すなわち r_0/a_0 が小さくなるにつれて、き裂発生時間比 R_{t_i} は小さくなるが、ある程度き裂が鋭くなると R_{t_i} は一定値に近づく傾向を示している。

式 (6-19) より、たとえば図 6-3 に示したように、 $\log R_{t_i}$ を b_1/n の関数として表わすと直線関係が得られる。図 6-3 より、 n を固定したとき b_1/n は R_{t_i} に対し著しい影響を及ぼすが、



(a) $b_1 = n = 3$



(b) $b_1 = n = 9$

図6-2 き裂発生時間比に及ぼす切欠きの鋭さの影響

b_1/n が固定されておれば、 R_{t_i} に対する n の影響は小さい。

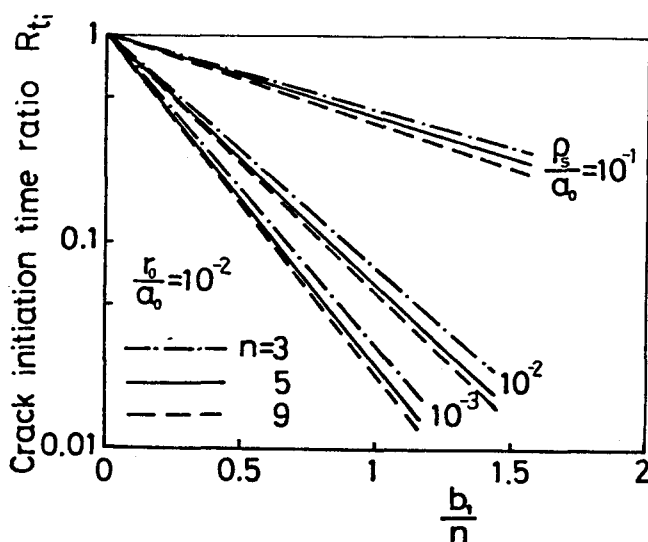


図6-3 き裂発生時間比に及ぼす b_1/n および n の影響

6・3 双曲線き裂材のき裂成長挙動解析

図6-1において $\lambda_s = \pi/2$ とおけば、深いき裂、すなわち双曲線き裂の問題が6・1節の応力・ひずみ解析により取扱える。さらに、変形は λ_3 (z) 方向のみであるので、き裂が初期き裂底面内にある限り、き裂が発生・成長しても外形はつねに初期形状と相似となる。したがって、き裂成長中の応力も同じ解析結果より求められる。この応力解析結果とクリ

フーブ損傷則とを組み合わせることにより、双曲線き裂の成長が解析できる。解析手法は3・1・2項で述べた通りである。

以下においては、3・1・2項で得られた結果を用いて、計算結果の整理を試みる。

図6-4に、限界ひずみ条件(式(2-120))を採用した場合、

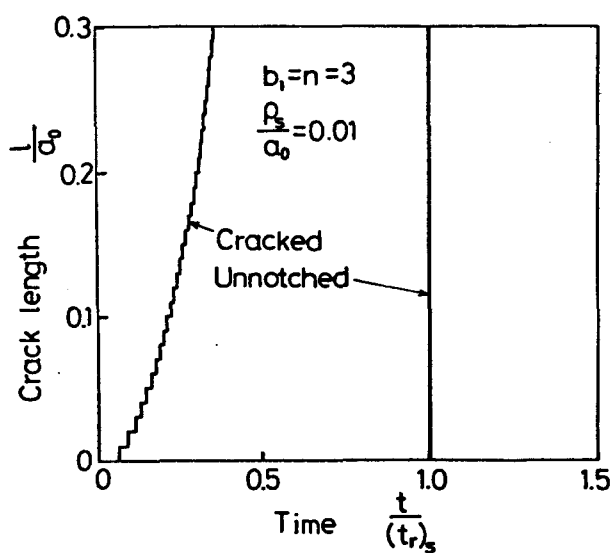
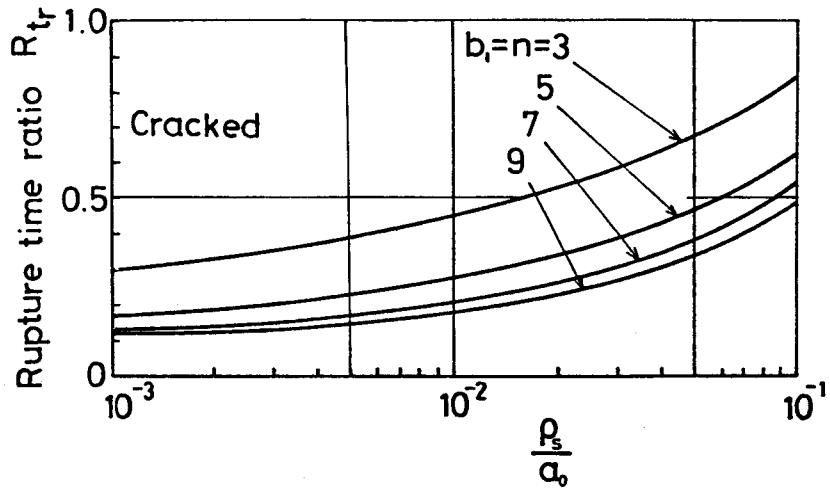


図6-4 き裂成長挙動

図6-5

双曲線き裂材の破断時間比に及ぼす ρ_s/a_0 の影響



すなわち $b_1 = n$ の場合における双曲線き裂の成長挙動の解析例を示す。縦軸は無次元化したき裂長さ l/a_0 であり、横軸は経過時間を平滑材の破断時間 $(t_r)_s$ で割った値である。なお、平滑材においては、特性寸法 ρ_s 程度の大きさのき裂が発生すると、いたる所で7リーフ損傷が1となり、時を移さず破断に至ると考えられる。この平滑材の挙動も、比較のため同じ図中に示した。

次に、双曲線き裂材の破断時間 t_r と平滑材のそれ $(t_r)_s$ との比 R_{tr} について論じてみよう。3・1・2項の結果より、双曲線き裂材の R_{tr} に影響を及ぼす因子は、 b_1 、 n および ρ_s/a_0 の三つである。 R_{tr} に及ぼす ρ_s/a_0 の影響を図6-5に示す。図6-5より、 ρ_s/a_0 が小さいほど R_{tr} は小さくなるようである。 R_{tr} に及ぼす b_1 および n の影響

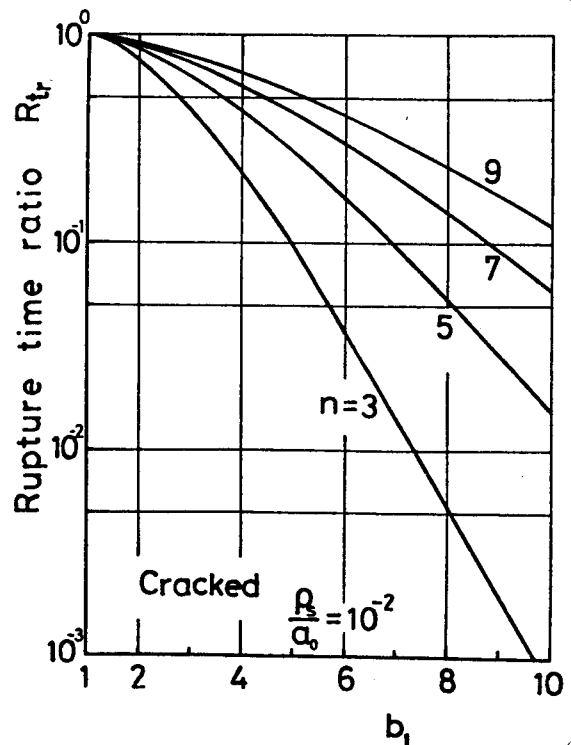


図6-6 R_{tr} に及ぼす b_1, n の影響

響の一例を図6-6に示す。図より、 $b_1 = 1$ の場合の R_{tr} はほぼ1に等しく、 $b_1 > 1$ の場合には R_{tr} は1より小さくなる。このことは4.1節の結果と一致する。また、図より、 n が同じであれば b_1 が大きいほど R_{tr} は小さくなり、 b_1 が同じであれば n が小さいほど R_{tr} は小さくなる傾向がある。

6.4 双曲線き裂材のき裂成長速度

3.1.3項で示したように、6.3節のき裂成長解析結果よりき裂成長速度を求めることができる。3.1.3項の結果によれば、き裂成長速度は $(dl/dt)_s = A_s T_{no}^{b_1} a_0$ で割ることにより無次元化でき、無次元化されたき裂成長速度は、クリーフ指数 n 、損傷則中の指数 b_1 、 ρ_s/a_0 、および l/a_0 のみの関数となる。式(6-17)からもわかるように、この場合の $(dl/dt)_s$ は $a_0/(tr)_s$ となり、平滑材の平均き裂成長速度とも言うべき量である。ただし、前述のように、平滑材においてはき裂発生と同時に破断するので、上の量は仮想的な成長速度に過ぎない。試験片の初期形状、材料、負荷条件および試験条件が与えられれば、 a_0 、 ρ_s 、 n 、 b_1 、 T_{no} および A_s が与えられていることになる。これらの値は試験中不変であると考えれば^(注)、3.1.3項で述べたように、試験中に変化するパラメータは l/a_0 のみとなる。したがって、試験条件、試験片形状および材料が同じで負荷条件 T_{no} のみの異なるき裂成長のデータは、無次元き裂成長速度 - l/a_0 の関係でマスター・カーブ表示できることになる。

(注) たとえば、微小変形理論を用いた場合、また、ねじりや縦せん断の場合もこの仮定に有利である。

以下においては、き裂成長速度に及ぼす、力学的パラメータ、履歴および破壊様式の影響について、個別に議論しよう。

6.4.1 き裂成長速度と各種力学量との関係

上述の無次元き裂成長速度のマスター・カーブ表示は、 l/a_0 の代りにこれと一対一の対応関係にあるどのような量をとっても成立する。たとえば、正味断面公称応力 T_n とその初期値 T_{n0} (以下初期値には添字 0 を付ける) の比 T_n/T_{n0} は、双曲線き裂材の場合、

$$T_n / T_{n0} = (1 - l/a_0)^{-1} \quad \text{----- (6-20)}$$

となる。弾性の応力拡大係数 K_e については、

$$K_e = 2 T_n \sqrt{a_0 - l} / \sqrt{\pi} \quad \text{----- (6-21)}$$

であるから⁽⁸⁶⁾、次の無次元表示がとれる。

$$K_e / K_{e0} = (1 - l/a_0)^{-1/2} \quad \text{----- (6-22)}$$

さらに、弾性の J 積分値 J_e は、 E を縦弾性係数、 ν をポアソン比として、

$$J_e = (1 + \nu) K_e^2 / E \quad \text{----- (6-23)}$$

で表わされるから⁽⁴⁴⁾、

$$J_e / J_{e0} = (1 - l/a_0)^{-1} \quad \text{----- (6-24)}$$

となる。簡単な考察より、双曲線き裂材の塑性の応力拡大係数 K_σ は次式で与えられる。

$$K_\sigma = (\text{定数}) T_n (a_0 - l)^{1/(n+1)} \quad \text{----- (6-25)}$$

したがって、

$$K_\sigma / K_{\sigma 0} = (1 - l/a_0)^{-n/(n+1)} \quad \text{----- (6-26)}$$

となる。式(6-25)と(2-78)より、修正 J 積分 J' については、

$$J' / J'_0 = (K_\sigma / K_{\sigma 0})^{n+1} = (1 - l/a_0)^{-n} \quad \text{(6-27)}$$

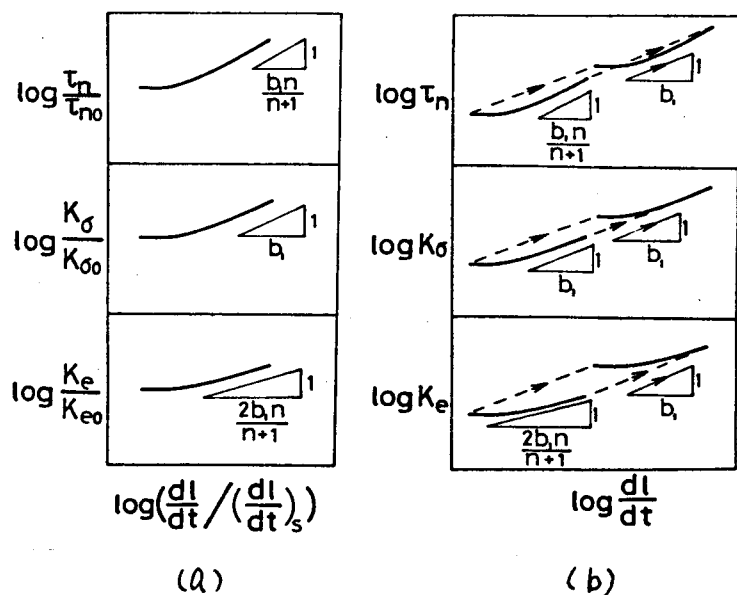
式(6-20)、(6-22)、(6-24)、(6-26)および(6-27)より明らか
 なように、 l/a_0 の代りに、 T_n/T_{n0} 、 $K_\sigma/K_{\sigma 0}$ 、 J_e/J_{e0} 、
 $K_\sigma/K_{\sigma 0}$ あるいは J'/J'_0 を用いても、無次元き裂成長速度のマ
 スター・カーブ表示が可能である。

図6-7(a)に、双曲線き裂材の無次元き裂成長速度の T_n/T_{n0} 、
 $K_\sigma/K_{\sigma 0}$ あるいは K_e/K_{e0} によるマスター・カーブ表示の模式
 図を示す。なお、式(6-23)あるいは(2-78)より、 K_e と J_e 、
 あるいは K_σ と J' との間にはつねにべき乗の関係が成立している
 ので、 J_e/J_{e0} あるいは J'/J'_0 による整理結果は省略した。ま
 た、第5章の解析結果によれば、 $b_1/(n+1)$ の値に応じて dl/dt
 の挙動が異なるはずであるが、双曲線き裂の成長速度のマスター・
 カーブ表示においては、見かけ上その差が顕著でないため、ここ
 では $b_1/(n+1)$ の値による場合分けはせず、ひとつにまとめて図示し
 ている。

次に、上記の諸力学変数を用いて表わされたき裂成長速度線図
 の両対数線図上での傾斜について議論しておく。式(5-8)の対数を

図6-7

き裂成長速度の無
 次元表示および応力
 レベルを変えた場合
 のき裂成長速度



とったのち、その微小変化量をとると、

$$\Delta \left[\log \left(\frac{dl}{dt} \right) \right] = \Delta \left[\log (\eta_{ij}) \right] - \Delta \left[\log (1 - \eta_{ij}) \right] \quad \text{----- (6-28)}$$

式(6-28)右辺第一項および第二項は、それぞれき裂先端近傍の応力および履歴の影響項である。き裂先端前方 ρ_s の点の応力が特異応力場の式(5-1)で近似できる場合、式(6-28)は、

$$\Delta \left[\log \left(\frac{dl}{dt} \right) \right] = b_1 \Delta \left[\log K_0 \right] - \Delta \left[\log (1 - \eta_{ij}) \right] \quad \text{----- (6-29)}$$

となる。式(6-29)および(2-78)より、

$$\Delta \left[\log \left(\frac{dl}{dt} \right) \right] = \frac{b_1}{n+1} \Delta \left[\log J' \right] - \Delta \left[\log (1 - \eta_{ij}) \right] \quad \text{----- (6-30)}$$

式(6-29)および(6-30)において、履歴の影響による変化量が小さい場合、すなわち、

$$\Delta \left[\log (1 - \eta_{ij}) \right] \ll b_1 \Delta \left[\log K_0 \right] \quad \text{----- (6-31)}$$

が成立する場合を考えれば^(注)、き裂成長速度 dl/dt と K_0 あるいは J' との関係は、両対数線図上で傾きがそれぞれ b_1 および $b_1/(n+1)$ の直線で表わされる。 n および b_1 は構成式および破壊条件中の特性指数であるので、式(6-31)が成立する場合のき裂成長速度線図の傾きは、試験片形状、負荷によらず材料の性質のみに依存する。これに対し、 T_n 、 K_e あるいは J_e を変数とした場合には、一般には試験片形状が与えられなければ、き裂成長速度曲線

(注) たとえば、双曲線き裂・負荷一定の場合には、き裂成長に伴い正味断面公称応力、したがって K_0 が加速度的に増大し、履歴の影響の大きい $b_1/(n+1) < 1$ の場合においても、ほぼ式(6-31)が成立するものと考えられる。

の傾きは定まらない。この点で、これら3種類の力学量の採用は、一般にき裂先端近傍の応力場を代表するパラメータである K_{σ} または J' の採用に比べ不利である。

さて、双曲線き裂のモードIII型負荷においては、式(6-20)、(6-22)、(6-24)、(6-26)および(6-27)からわかるように、無次元化された各力学量間には l/a_0 を介して一定の関係があり、たとえば、

$$\Delta[\log K_{\sigma}] = \left\{ n/(n+1) \right\} \Delta[\log \tau_n] \quad \text{---- (6-32)}$$

式(6-32)を式(6-29)に代入すると、

$$\Delta[\log (dl/dt)] = \frac{b_1 n}{n+1} \Delta[\log \tau_n] - \Delta[\log (1-\eta_{ij})] \quad \text{----- (6-33)}$$

同様にして、

$$\Delta[\log (dl/dt)] = \frac{2b_1 n}{n+1} \Delta[\log K_e] - \Delta[\log (1-\eta_{ij})] \quad \text{----- (6-34)}$$

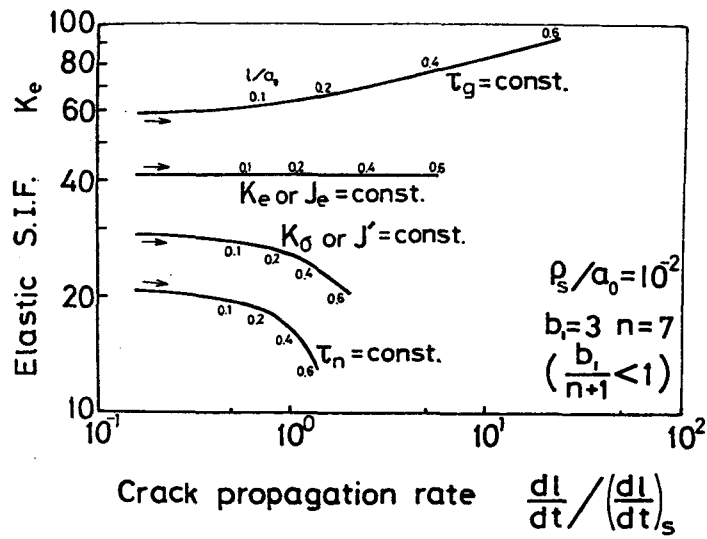
$$\Delta[\log (dl/dt)] = \frac{b_1 n}{n+1} \Delta[\log J_e] - \Delta[\log (1-\eta_{ij})] \quad \text{----- (6-35)}$$

したがって、両対数線図上において、双曲線き裂材の dl/dt を τ_n 、 K_e あるいは J_e の関数として表わすと、履歴の影響による変化量が小さい場合には、その傾きがそれぞれ $b_1 n/(n+1)$ 、 $2b_1 n/(n+1)$ あるいは $b_1 n/(n+1)$ の直線で表わされることになる。図6-7(a)にはこれらの勾配が三角形表示で示されている。図からもわかるように、双曲線き裂材においては、き裂がある程度成長するとき裂成長速度曲線の傾きは上記の予測値に近づきほぼ一致する。

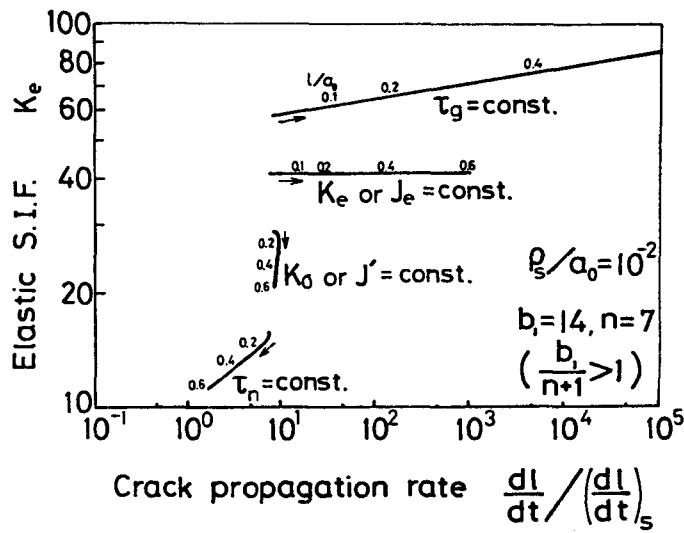
図6-7(a)において、 $(dl/dt)_s$ は τ_{n0} の b_1 乗に比例し、 $K_{\sigma 0}$ および K_{e0} は τ_{n0} に比例する。したがって、図6-7(a)より、有次

元化したき裂成長速度を T_n , K_0 あるいは K_e で表わすと、図6-7(b) のようになり、応力レベル T_{n0} の異なる場合のき裂成長速度は適当な方向に平行移動することにより得られる。図6-7(b)より、 dl/dt を K_0 で表わせばき裂成長初期を除きほぼ一本の直線上にのる。 T_n についても、通常 $n \gg 1$ であるから $b_1 n / (n+1) \approx b_1$ となり、 T_n で双曲線き裂材の dl/dt を整理しても實際上ほぼ一本の直線上にのることになる。

これら力学変数とき裂成長速度との間の関係をより明確にするため、双曲線き裂材において T_n , K_e , J_e , K_0 あるいは J' を一定に保った場合のき裂成長速度について調べる。計算結果を図6-8に示す。荷重が一定(初期形状をもとにして定めた公称応力 T_0 が一定)の場合の結果も比較のため示した。曲線に沿って示した値は各位置での l/a_0 の値であり、時間経過とともに dl/dt は矢印の方向に変化する。5・1節の解析結果に基づき推察通り、図6-8(b)のように $b_1/(n+1) > 1$ の場合には、き裂成長初期を除けば履歴の影響はきわめて小さく、き裂先端近傍の応力場を代表する K_0 が一定の場合には dl/dt はほぼ一定となるようである。これに対し、図6-8(a)のように $b_1/(n+1) < 1$ の場合には、履歴の影響を表わす $(1-\eta_{ij})$ はき裂の成長とともに単調に減少し、その変化は特にき裂成長の初期において著しいようである。式(6-29)によれば、 $K_0 = \text{一定}$ の場合の dl/dt の増加は主として $(1-\eta_{ij})$ の減少に起因すると考えられ、力学変数のみならず履歴の影響も著しいことがわかる。 $T_n = \text{一定}$ の場合には、 l/a_0 の増加により K_0 が減少するので、式(6-29)右辺第一項は負となり、これが履歴の効果(式(6-29)右辺第二項、正)と一部相殺し、結果的にはき裂成長速度



(a) $b_1=3, n=7$ ($\frac{b_1}{n+1} < 1$)



(b) $b_1=14, n=7$ ($\frac{b_1}{n+1} > 1$)

図6-8 $\tau_n, K_s, J', K_e, J_e$ あるいは τ_g が一定の場合のき裂成長速度

の変化を小さくしているものと考えられる。 τ_n は破壊力学的に必ずしも明確な意味をもった量ではないが、 n が大きい場合の K_0 との関連性や上記の相殺効果などのため、結果的にはこの場合のクリープき裂成長速度に関する見かけ上良い力学的パラメータとなっているものと考えられる。

6.4.2 き裂成長速度に及ぼす履歴の影響

特に $b_s/(n+1) < 1$ の場合においては履歴がき裂成長速度に大きな影響を及ぼしていることが前項で明らかとなった。本項では履歴の影響に焦点を絞ってさらに議論しよう。

5.1 節の解析結果より、き裂先端近傍の損傷値分布形は、式(5-11)、(5-11a)、(5-11b)あるいは図5-4に示した定常分布形に近づくと予想される。事実、計算結果によれば、き裂が十分進展したのちの分布形はこのような形になる。

いま、履歴の影響を調べるため、第 k 点の初期履歴 η_{k1} が式(5-11)と同形の次式で与えられる場合を考える。

$$1 - \eta_{k1} = (1 - \eta_{11}) \sum_{i=1}^k i^{-b_s} \text{----- (6-36)}$$

$b_s = b_s/(n+1)$ であれば、式(6-36)は損傷値の定常分布形・式(5-11)と一致し、この場合には式(5-6)からもわかるように、 η_{ij} がほぼ一定となる。したがって、この場合き裂成長速度はほぼ力学変数のみによって記述でき、き裂成長初期におけるき裂成長速度曲線の曲りがなくなることになる。これに対し、 $b_s < b_s/(n+1)$ の場合には、初期き裂の先端近傍に定常分布形よりも鋭い損傷値集中

があり^(注)、き裂成長初期の dl/dt は大きく、その後 dl/dt の加速が鈍るか、あるいは減速するよう傾向がみられると予想される。逆に $b_s > b_i / (n+1)$ の場合は、たとえば処女材のようにき裂先端近傍の損傷値集中が無い、あるいは小さく、したがってき裂成長初期の dl/dt は小さくなり、その後 dl/dt が加速される効果があると予想される。双曲線き裂に対する計算結果の一例を図6-9に示す。明らかに上述の傾向が認められ、履歴の影響の大きいことがわかる。

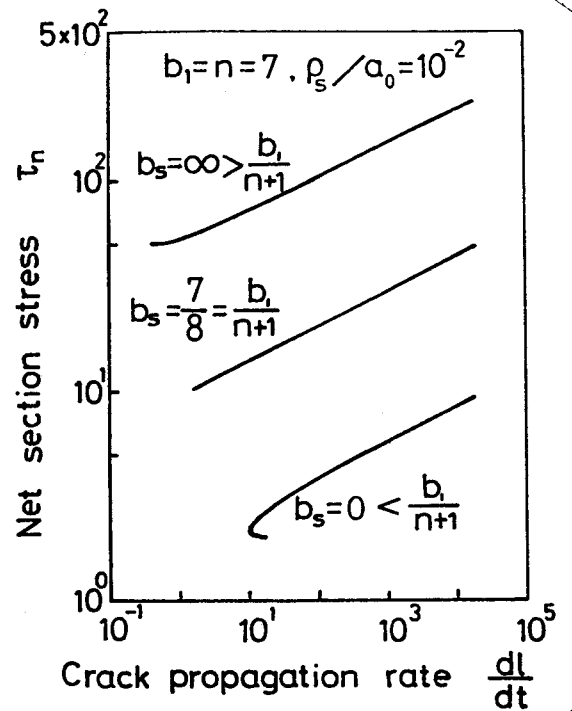


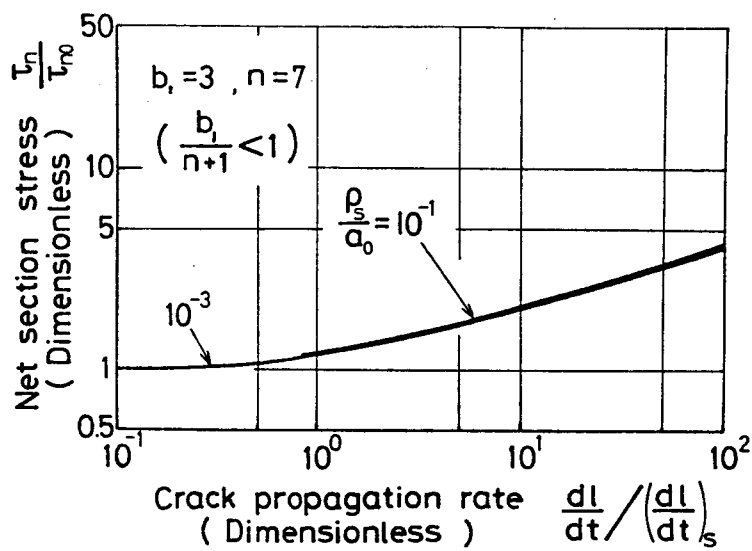
図6-9 き裂成長速度に及ぼす初期履歴の影響

6.4.3 き裂成長速度に及ぼす破壊様式の影響

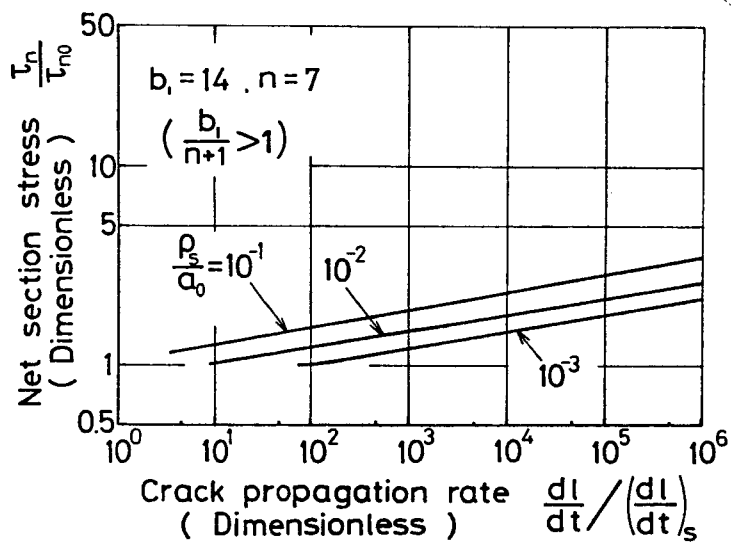
試験片形状が同じで、しかもフリーフ変形の指標であるフリーフ指数が同じであっても、破壊の様式が異なれば損傷則中の指数 b_i および特性寸法 ρ_s の値が異なり、したがって、き裂成長速度も違ったものになると考えられる。本項では、これら b_i および ρ_s の影響を分離して調べてみる。

まず、 ρ_s / α_0 の影響について述べる。 ρ_s / α_0 を 10^{-1} 、 10^{-2} および 10^{-3} の3通りに変えた場合の双曲線き裂の成長速度の計算例を図

(注) 後述するように、著者は、疲労によって初期き裂を導入するという条件がこの一例になるのではないかと考えている。



(a) $b_1 = 3, n = 7$ ($\frac{b_1}{n+1} < 1$)



(b) $b_1 = 14, n = 7$ ($\frac{b_1}{n+1} > 1$)

図6-10 き裂成長速度に及ぼす p_s/a_0 の影響

6-10に示す。図6-10(a)のように $b_1/(n+1) < 1$ の場合には ρ_s/a_0 の影響は小さいようである。これに対し、図6-10(b)のように $b_1/(n+1) > 1$ となる場合には、 ρ_s/a_0 の影響が著しく ρ_s/a_0 の異なる場合の曲線はまったく一致しないようである。

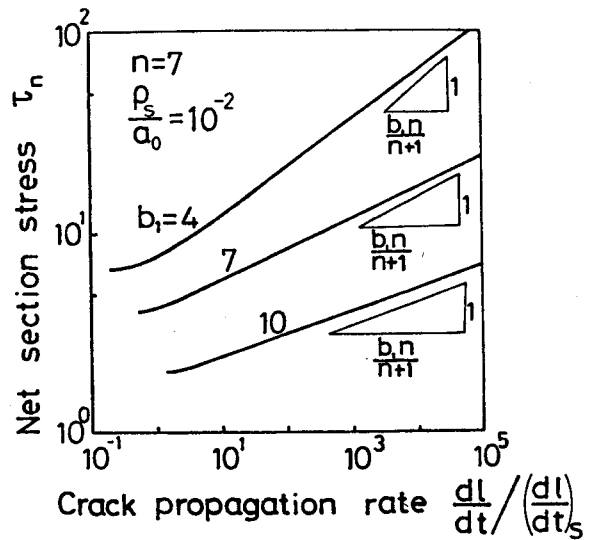


図6-11 き裂成長速度に及ぼす b_1 の影響

次に、損傷則中の指数 b_1 の影響について述べる。 b_1 を3通

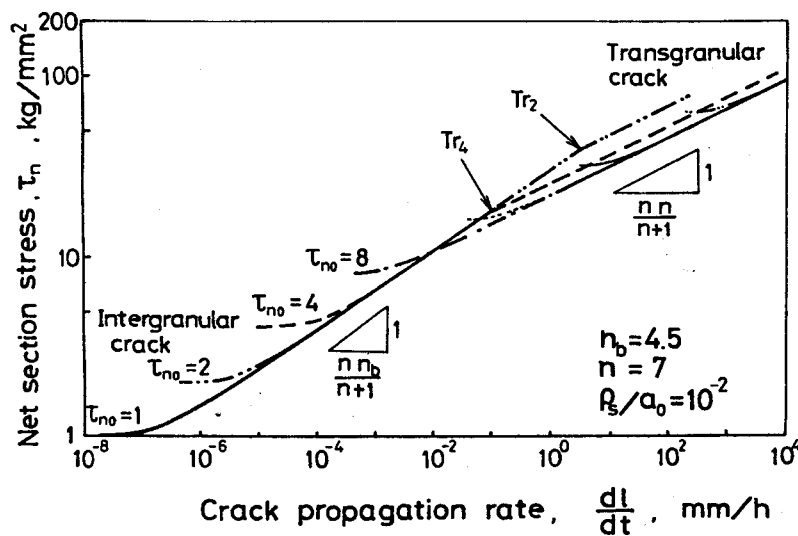
りに変えた場合の双曲線き裂材に対するき裂成長速度の計算例を図6-11に示す。図より、き裂成長速度曲線の傾きは b_1 の顕著な影響を受け、き裂成長初期の部分を除きほぼ $b_1 n / (n+1)$ となり、これは6.4.1項の予想と一致している。

本節の最後に、ひとつの興味深い例として、破壊様式に遷移がある場合のき裂成長速度の挙動について調べる。一例として、粒界破壊[限界粒界ひずみ条件、式(2-125), $b_1 = n b_0$]から粒内破壊[限界ひずみ条件、式(2-123), $b_1 = n$]への遷移がある場合を考える。すなわち、式(2-125)により損傷 η_I を、式(2-123)により損傷 η_{II} をそれぞれ計算し、 η_{II} よりも η_I のほうが早く1になったとき そのような部分では粒界破壊が起こり、 η_I よりも η_{II} のほうが早く1に達したとき粒内破壊が起こっているとしてき裂成長を取扱う。また、通常観察されるように⁽⁸⁾ $n b_0 < n$ と仮定し、特性寸法 ρ_s の値は両破壊様式について同じでかつ変化しないもの

としてき裂成長速度を計算した。計算結果の一例を図6-12に示す。図において、初期断面公称応力 τ_{no} が最も低い場合 ($\tau_{no} = 1 \text{ kg/mm}^2$ 実線) には、粒界破壊によるき裂しか現れない。 $\tau_{no} = 2 \text{ kg/mm}^2$ (2点鎖線) の場合になると、正味断面公称応力 τ_n が低い間は粒界破壊によるき裂が成長し、き裂成長速度は $\tau_{no} = 1 \text{ kg/mm}^2$ の場合の結果をほぼ直線部の傾きの方向に平行移動したものに一致するが、 τ_n が上昇して Tr_2 点に達すると粒界破壊より粒内破壊への遷移が起こり、これに伴いき裂成長速度の傾きも $n_b n / (n+1)$ 程度から $n^2 / (n+1)$ 程度に変わり、見かけ上 き裂成長速度曲線は折れ線状となる。 τ_{no} がさらに高い 4 kg/mm^2 (破線) の場合においても同様の遷移がみられるが、遷移点 Tr_4 は Tr_2 より幾分 τ_n の低い位置に移動する。 $\tau_{no} = 8 \text{ kg/mm}^2$ (1点鎖線) の場合になると、もはや遷移はみられず終始粒内破壊によりき裂が成長することになる。 τ_{no} が 8 kg/mm^2 より大きい場合のき裂成長速度曲線は、 $\tau_{no} = 8 \text{ kg/mm}^2$ の場合の結果をほぼ直線部の傾きの方向に平行移動したものに一致する。

図6-12

粒界破壊より粒内破壊への遷移がある場合のき裂成長速度



6・5 結言

縦せん断負荷をうける双曲線切欠き材の定常クリープ応力解析を行ない、これをクリープ損傷則と組合わせることにより、双曲線切欠き材のき裂発生および双曲線き裂材のき裂成長を取扱い、各種因子の影響について議論し、その定量的評価を試みた。その結果、クリープ下のき裂成長には、き裂先端近傍の応力場の強さとともに履歴および破壊の様式が大きな影響を及ぼしていることが明らかとなった。

第7章 縦せん断負荷のもとにおける半無限体内のクリーフ き裂挙動に対する力学的解析

本章では、第6章で取扱った双曲線切欠き材とは反対に、浅いき裂の極限である半無限体中のき裂の挙動を解析し、き裂挙動に及ぼす種々の因子の影響について検討を加える。

7.1 応力・ひずみ解析

図7-1に示すような、き裂を有する半無限体の非線形弾性解は、Amazigo⁽⁸⁷⁾によって求められている。本節では、この解を引用し、これに「クリーフ応力解析における弾性相似則」を適用することにより、定常クリーフ解を求める。

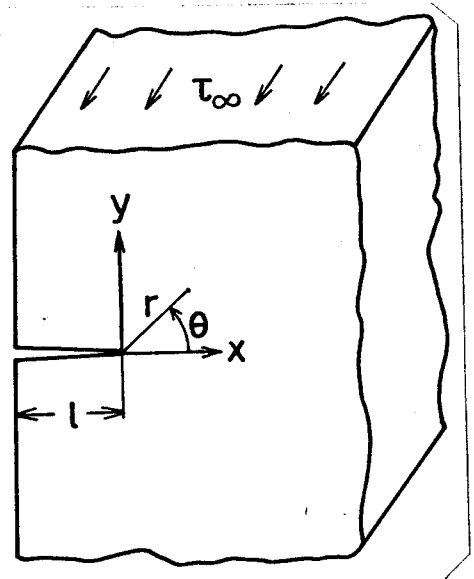


図7-1 き裂を有する半無限体

まず、非線形弾性解について述べる。

2.1.2項と同様に、問題を図7-2に示すようなひずみ面内で取扱うことにより、支配方程式の線形化を計る。このとき、基礎式は式(2-19)および(2-20)である。ここで、以下に示すような無次元化されたひずみ ξ およびポテンシャル Ψ を導入する。

$$\xi = \frac{y}{\gamma_{\infty}} \quad , \quad \Psi = \frac{\psi}{l \gamma_{\infty}} \quad \text{-----} \quad (7-1)$$

ここに、 l はき裂長さ、 τ_{∞} および γ_{∞} はそれぞれ無限遠方における

る応力およびひずみである。ξおよびφを用いると、ひずみ面内における支配方程式(2-20)は次のようになる。

$$\eta \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \xi^2} + \frac{1}{\xi} \frac{\partial \Psi}{\partial \xi} + \frac{1}{\xi^2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \phi^2} = 0$$

$$\xi > 0, \quad -\pi/2 < \phi < \pi/2$$

----- (7-2)

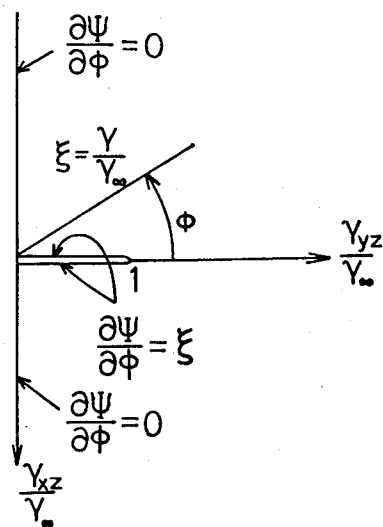


図7-2 ひずみ面

次に境界条件を求める。図7-1より、

$y = 0, -l < x < 0$ において $\gamma_{yz} = 0$,

すなわち、 $\phi = \pm \pi/2$ である。また、

$x = -l$ において $\gamma_{xz} = 0$ 、かつ $0 \leq \gamma_{yz} \leq \gamma_\infty$ 、すなわち、 $\phi = 0$

かつ $0 \leq \xi \leq 1$ である。この条件を、式(2-19)および(7-1)を

用いて、ひずみ面内の境界条件にひき直すと、

$$\partial \Psi / \partial \phi = 0, \quad \phi = \pm \pi/2, \quad \xi > 0 \quad \text{----- (7-3)}$$

$$\partial \Psi / \partial \phi = \xi, \quad \phi = \pm 0, \quad 0 < \xi < 1 \quad \text{----- (7-4)}$$

が得られる。

支配方程式(7-2)および境界条件式(7-3), (7-4)から構成されるこの問題は、Wiener-Hopf法を用いて解を求めることができる。Amazigo⁽⁸⁷⁾による解析結果を以下に示す^(注)。

$$\Psi(\xi, \phi) = \sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j \xi^{-e_j} \sin(2j-1)\phi, \quad \xi > 1$$

----- (7-5)

(注) Amazigoの論文に記載されている解には誤りがある。式(7-5)~(7-9)が正解である。

$$\chi_j = \frac{(-1)^j 2^{\sqrt{n}(e_j+1)+1}}{\pi e_j (e_j+1)} \frac{\prod_{k=1}^{\infty} (\gamma_{2k-1}^+ + a_{2k-1}) \exp(-\frac{n+1}{2n} a_{2k-1})}{\prod_{k=1}^{\infty} (\gamma_{2k}^+ + a_{2k}) \exp(-\frac{n+1}{2n} a_{2k})}$$

$$\left/ \left\{ a_{2j-1} \exp(a_{2j-1} \bar{e}_j) \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^{\infty} (\gamma_{2k-1}^+ - a_{2k-1} e_j) \exp(a_{2k-1} \bar{e}_j) \right. \right.$$

$$\left. \times \prod_{k=1}^{\infty} (a_{2k} e_j - \gamma_{2k}^-) \exp(-a_{2k} \bar{e}_j) \right\} \dots\dots\dots (7-6)$$

ここに、

$$\gamma_k^{\pm} = \frac{\sqrt{n} \{1/n - 1 \pm \sqrt{(1/n - 1)^2 + 4k^2/n}\}}{2k} \quad (7-7)$$

$$a_k = \sqrt{n} / k \quad \dots\dots\dots (7-8)$$

$$e_k = (2k-1) \gamma_{2k-1}^+ / \sqrt{n}, \quad \bar{e}_k = e_k + (n-1)/2n \quad \dots\dots\dots (7-9)$$

式(7-5)~(7-9)および(7-1)から得られるポテンシャル ψ を式(2-19)に代入し数値計算することにより、各点のひずみが求められる^(注)。特にき裂先端近傍においては、

$$\frac{\gamma}{\gamma_{\infty}} = \left\{ (-\chi_1) \frac{l}{r} \right\}^{\frac{n}{n+1}}, \quad \frac{\tau}{\tau_{\infty}} = \left\{ (-\chi_1) \frac{l}{r} \right\}^{\frac{1}{n+1}} \quad \dots\dots\dots (7-10)$$

また、式(7-10)と(2-41)を組み合わせると

$$K_G = \sqrt{3} \tau_{\infty} (-\chi_1 l)^{\frac{1}{n+1}} \quad \dots\dots\dots (7-11)$$

となる。

(注) χ_j の計算方法については 付録Ⅲを参照のこと。

定常クリーブ則 (式 (2-9)) のもとにおける 応力・ひずみは、以上の非線形弾性解に「クリーブ応力解析における弾性相似則」を用いることにより求められる。図7-3にき裂前方のひずみ速度を示す。図中の横軸はき裂先端からの距離をき裂長さで割った値であり、縦軸はひずみ速度を無限遠方のひずみ速度 $\dot{\gamma}_\infty$ で割った値である。図中の破線は、ひずみ速度がき裂先端近傍の特異場・式(7-10)で表わされると仮定したときの解である。図より、 $x/l < 0.1$ の範囲では、応力・ひずみは 特異項のみでかなり良く近似できる。

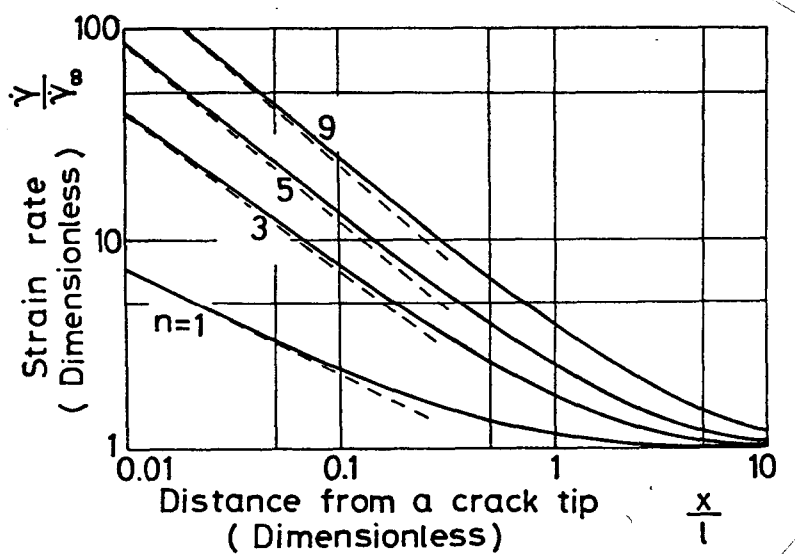


図7-3
き裂前方のひずみ
速度

7.2 き裂成長速度

7.1節で得られた応力解析結果をクリーブ損傷則と組み合わせることにより、き裂成長挙動を解析することができる。図7-4に解析結果の一例を示す。図の縦軸は、き裂長さをその初期値 l_0 で割って無次元化した値であり、横軸は、経過時間を平滑材の破断時間 $(t_r)_s$ で割った値である。 $(t_r)_s$ は、式(2-120)より次式で与えられる。

$$(t_r)_s = 1 / (A_s \cdot \tau_\infty^{b_1}) \quad \text{----- (7-12)}$$

次に、3・1節の結果を用いることにより、き裂成長速度に及ぼす各種パラメータの影響について調べる。3・1節の議論で用いた試験片の基準寸法 a^* として初期き裂長さ l_0 をとり、公称応力 T_{n0} として T_{∞} をとることにする。このとき、3・1・3項の結果より、き裂成長速度 dl/dt は $(dl/dt)_s$ $= A_s T_{\infty}^{b_1} l_0$ で割ることにより

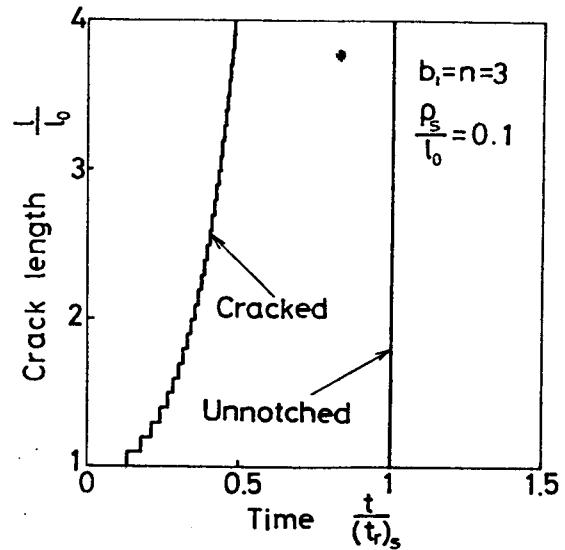


図7-4 き裂成長挙動

無次元化でき、無次元化されたき裂成長速度は、 n , b_1 , ρ_s / l_0 および l / l_0 のみの関数となる。これら無次元化き裂成長速度の影響因子のうちで試験中変化するのは l / l_0 だけである。よって、半無限体内を進展するき裂の成長速度は、無次元き裂成長速度 - 無次元き裂長さ l / l_0 の関係でマスター・カーブ表示することができる。

7・2・1 き裂成長速度に及ぼす力学量および履歴の影響

き裂を有する半無限体の弾性応力拡大係数 K_e は、

$$K_e = T_{\infty} \sqrt{\pi l} \quad \text{----- (7-13)}$$

で与えられる。よって、 K_e とその初期値 K_{e0} との比は、

$$K_e / K_{e0} = \sqrt{l / l_0} \quad \text{----- (7-14)}$$

となる。式(7-14)と(6-23)より、次式が得られる。

$$J_e / J_{e0} = l / l_0 \quad \text{----- (7-15)}$$

また、塑性の応力拡大係数 K_p は式(7-11)で与えられているので、

$K_{\sigma}/K_{\sigma 0}$ は次のようになる。

$$K_{\sigma}/K_{\sigma 0} = (l/l_0)^{1/(n+1)} \text{ ----- (7-16)}$$

式(7-16)を式(2-78)に代入すると、初期値で無次元化した修正J積分値 J'/J_0' が得られる。すなわち、

$$J'/J_0' = l/l_0 \text{ ----- (7-17)}$$

以上のように、 l/l_0 と $K_{\sigma}/K_{\sigma 0}$, J_e/J_{e0} , $K_{\sigma}/K_{\sigma 0}$ あるいは J'/J_0' との間には一対一の対応関係がある。したがって、き裂成長速度のマスター・カーブ表示に際して、 l/l_0 の代りにこれらの無次元化した力学量をとることもできる。図7-5 (a) および (c) に、き裂成長速度の τ_n/τ_{n0} , $K_{\sigma}/K_{\sigma 0}$ あるいは K_e/K_{e0} によるマスター・カーブ表示の模式図を示す。なお、本問題においては、正味断面公称応力 τ_n に相当する量は τ_{∞} であり、この値は試験中一定に保たれている。また、式(2-78)および(6-23)より、 K_{σ} と J' 、あるいは K_e と J_e の間にはべき乗の関係が成立する。よって、 J' あるいは J_e によるき裂成長速度の整理結果は、 K_{σ} あるいは K_e を用いた場合の整理結果から簡単に求められるので、ここでは省略している。

さて、双曲線き裂材のき裂成長速度を取扱った6.4節と同様にして、履歴の影響が比較的小さい場合には、式(6-29)および(7-16)より、両対数線図上における dl/dt と K_{σ} 、および dl/dt と l の関係は、傾きがそれぞれ b_1 および $b_1/(n+1)$ の直線で表わされることになる。たとえば、図7-5において、 $b_1/(n+1) > 1$ となる(c)の場合には、 dl/dt を K_{σ} で整理したときの曲線の傾きは、き裂成長初期を除きほぼ b_1 になっている。これに対し、 $b_1/(n+1) < 1$ となる(a)の場合の傾きは、 b_1 とかなり異なるようである。

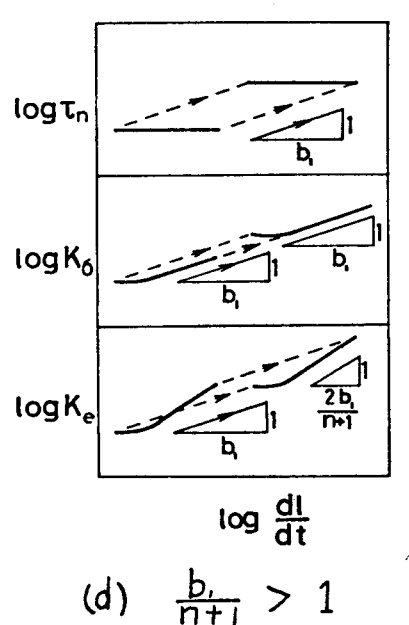
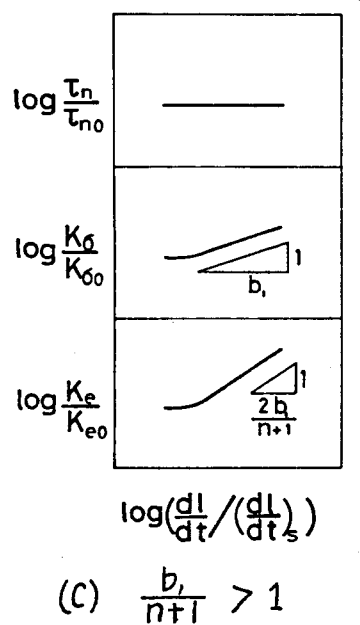
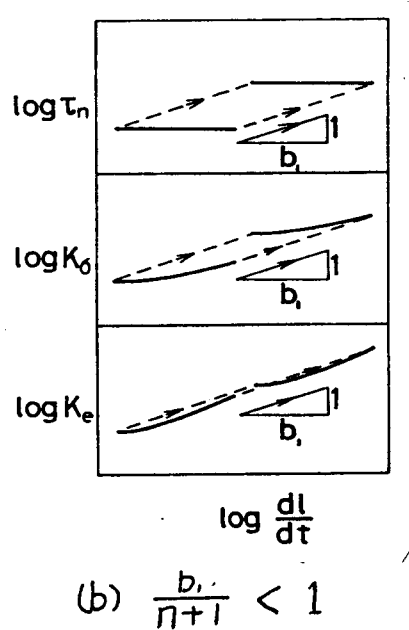
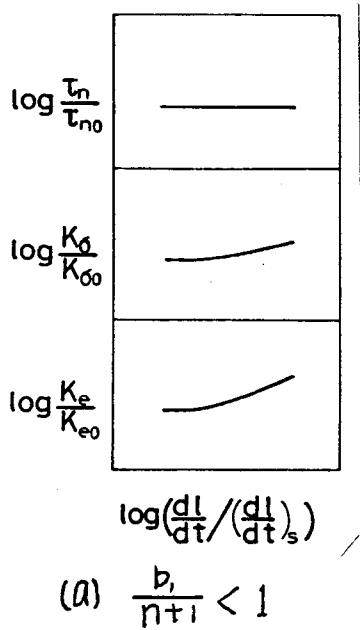


図7-5 き裂成長速度の無次元表示および応力レベルを変えた場合のき裂成長速度

これは、5・1節で述べたように、 $b_1/(n+1) < 1$ の場合には履歴の影響が無視できないことに起因するものと考えられる。

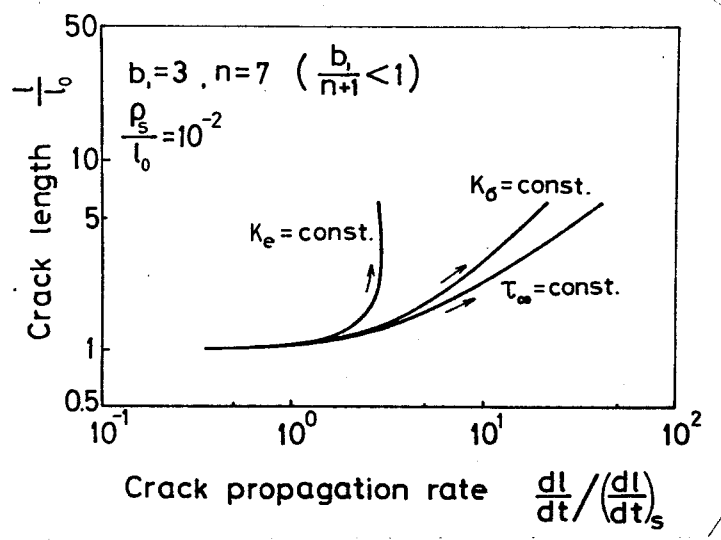
図7-5 (a) および (c) のマスター・カーブ表示において、 $(dl/dt)_s$ は $T_{n0} = T_{\infty}$ の b_1 乗に比例し、 K_{60} および K_{e0} は $T_{n0} = T_{\infty}$ に比例する。したがって、図7-5 (a) および (c) より、 $\log(dl/dt)$ を $\log T_n$ 、 $\log K_6$ あるいは $\log K_e$ の関数として表わすと図7-5 (b) および (d) が得られる。図7-5 (d) のように $b_1/(n+1) > 1$ の場合には、き裂成長速度を K_6 で整理すればほぼ一本の直線になるが、 K_e あるいは T_n で整理するとデータは帯状になる。これに対し、 $b_1/(n+1) < 1$ の場合には、き裂成長速度を K_6 で整理しても、個々の曲線の持つ傾きが b_1 よりかなり大きくなるため、種々の応力レベルのもとにおける結果をひとつの両対数線図上に描くと、データは帯状になる。これは、5・1節の議論より、履歴の影響によるものであると考えられる。図7-5 (d) のように、 b_1 と n の組合せが適当な場合には^(注)、 $\log(dl/dt)$ と $\log K_e$ との間に見かけ上の直線関係が成立することもある。き裂成長速度を T_n を用いて整理すると、 $b_1/(n+1) > 1$ の場合と同様にデータに幅があるようになる。なお、第6章で取扱った双曲線き裂の成長速度に対する解析結果(図6-7)の特徴を比較のため簡単に記すと、き裂成長速度は K_6 だけでなく T_n によっても見かけ上よく整理できるが、 K_e で整理するとデータに幅があるようになり、このことは本章の無限体内を進展するき裂の挙動の特徴と対照的である。

(注) 図7-5 (a) および (b) は $b_1 = n = 3$ の場合、(c) および (d) は $b_1 = 6, n = 3$ の場合の解析結果である。

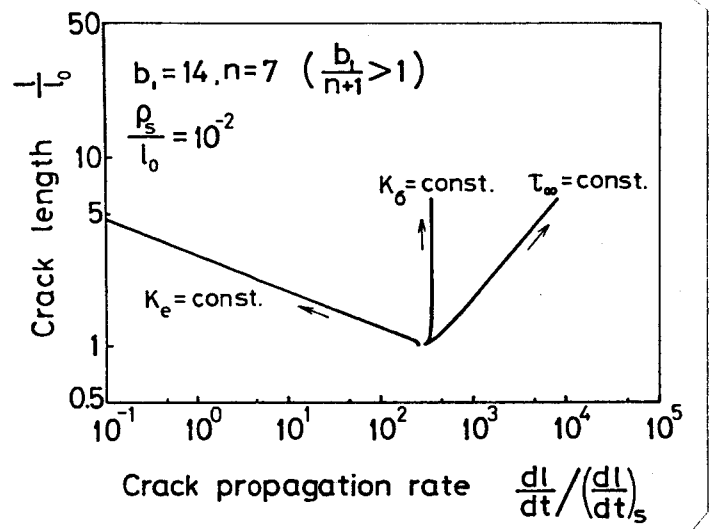
次に、6.4.1項同様、 K_e , J_e , K_G , J' あるいは $T_n (=T_\infty)$ が一定の場合のき裂成長速度を調べてみよう。計算結果の一例を図7-6に示す。図の縦軸はき裂長さであり、初期き裂長さで割ることにより無次元化している。図中の矢印は、き裂の成長に伴う dl/dt の変化の方向を示している。なお、式(2-78) および(6-23)より K_G と J' , および K_e と J_e との間にはバキ乗の関係があるので、 $K_G = \text{一定}$ および $K_e = \text{一定}$ の場合の結果は、同時にそれぞれ $J' = \text{一定}$ および $J_e = \text{一定}$ の場合の結果でもある。図7-6(b)のように $b_1/(n+1) > 1$ の場合には、き裂先端近傍の特異応力場の強さを表わす K_G が一定に保たれておれば、き裂がある程度成長すると dl/dt はほぼ一定となる。これに対し、図7-6(a)のように $b_1/(n+1) < 1$ となる場合には、 K_G が一定に保たれていても dl/dt は一定にはならず増加していく傾向があり、むしろ K_e を一定に保った場合のほうが dl/dt の変化が小さい。これは、第6章で取扱った双曲線き裂の場合と同様に、履歴の影響によるものであると考えられる。なお、第6章で取扱った双曲線き裂材に対する解析結果(図6-8)の特徴を比較のため記すと、 $b_1/(n+1) > 1$ の場合は、 K_G を一定に保てば dl/dt はほぼ一定となるが、 $b_1/(n+1) < 1$ の場合には、 K_G を一定に保ても dl/dt は増大し、 T_n を一定にしたときの dl/dt の変化が比較的小さくなる。

7.2.2 き裂成長速度に及ぼす他の各種因子の影響

まず、特性寸法 ρ_s の影響について述べる。 ρ_s/l_0 を3通りに変えた場合の計算例を図7-7に示す。図7-7(a)のように $b_1/(n+1) < 1$ の場合には ρ_s/l_0 の影響は小さいのに対し、図

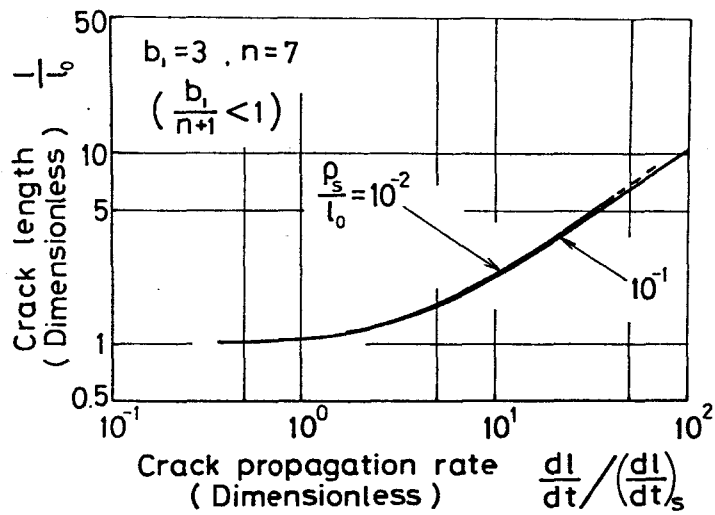


(a) $b_1 = 3, n = 7 \left(\frac{b_1}{n+1} < 1 \right)$

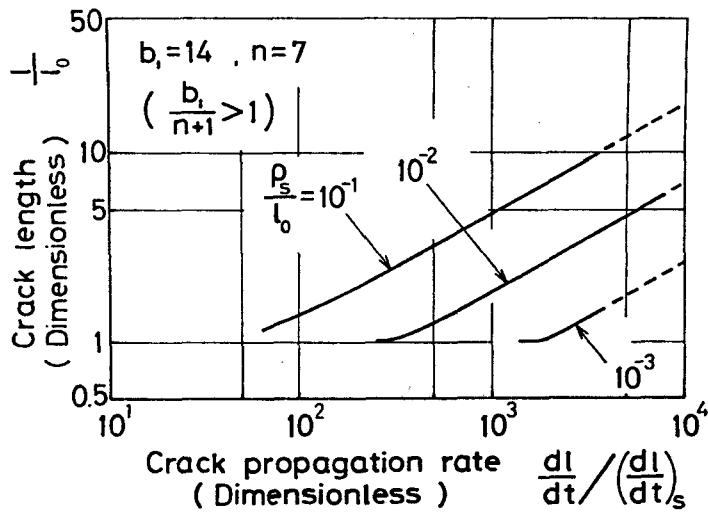


(b) $b_1 = 14, n = 7 \left(\frac{b_1}{n+1} > 1 \right)$

図7-6 K_e, K_σ あるいは T_∞ が一定の場合の
き裂成長速度



(a) $b_1=3, n=7$ ($\frac{b_1}{n+1} < 1$)



(b) $b_1=14, n=7$ ($\frac{b_1}{n+1} > 1$)

図7-7 き裂成長速度に及ぼす p_s/l_0 の影響

7-7(b) のように $b_1/(n+1) > 1$ となる場合には、 ρ_s/l_0 の影響は大きく、 ρ_s/l_0 が小さいほど無次元化き裂成長速度は大きくなる傾向がある。これは、第6章の双曲線き裂の場合と同傾向である。

次に、損傷則中の指数 b_1 の影響について述べる。 b_1 を3通りに変えた場合のき裂成長速度の計算例を図7-8に示す。前述のように、 $b_1/(n+1) > 1$ の場合には、曲線の傾きは履歴の影響が小さいという仮定に基づく予想値 $b_1/(n+1)$ に近い値をとり b_1 に比例して大きくなるが、 $b_1/(n+1) < 1$ の場合の傾きはこの予想値よりずれおき、 $b_1/(n+1)$ が小さくなるほどこのずれは顕著になる傾向がある。このずれは、幾たびか述べたように、履歴の影響によるものであると考えられる。

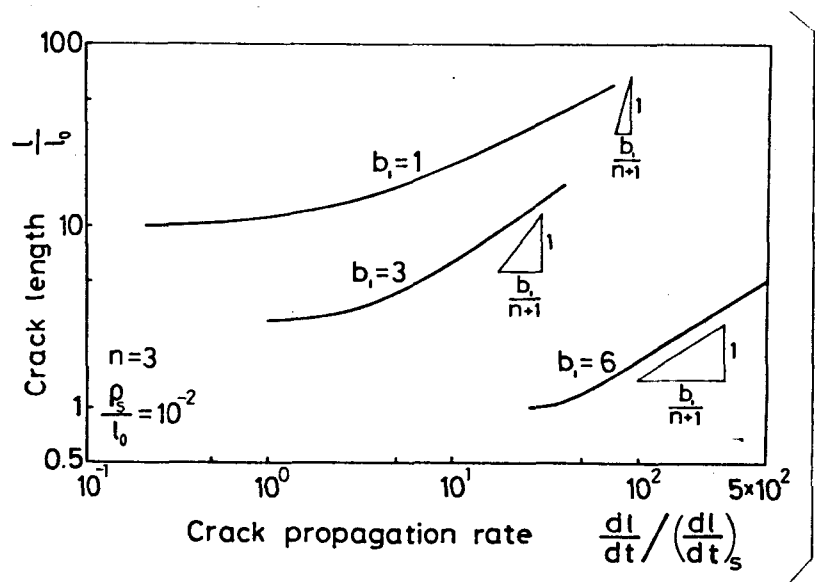


図7-8

き裂成長速度に
及ぼす b_1 の影響

7.3 結言

き裂を有する半無限体が縦せん断力をうける場合を取扱、た Amazigo の非線形弾性解に、「クリーフ応力解析における弾性相似則」を適用することにより、この場合の定常クリーフ解を求めた。この応力・ひずみ解析結果とクリーフ損傷則とを組み合わせることに

より、半無限体内のクリーブき裂の成長挙動を解析し、その結果を第3章および第5章の結果を参照して整理し、挙動に影響を及ぼす因子について議論した。

第8章 環状双曲線切欠き丸棒のねじりクリーフ破壊 に対する力学的解析

本章では、実験と直接比較の行なえる問題として、環状双曲線切欠き丸棒のねじりクリーフ破壊を取上げ、き裂発生および成長挙動を解析する。

8.1 応力・ひずみ解析

図8-1 に示すような環状双曲線切欠き丸棒のねじりにおける弾塑性解は Tuba⁽⁸⁵⁾ によって数値的に求められている。本節では、Tuba の手法を用いて非線形弾性解を求め、これに「クリーフ応力解析における弾性相似則」を適用することにより、定常クリーフ解を求める。

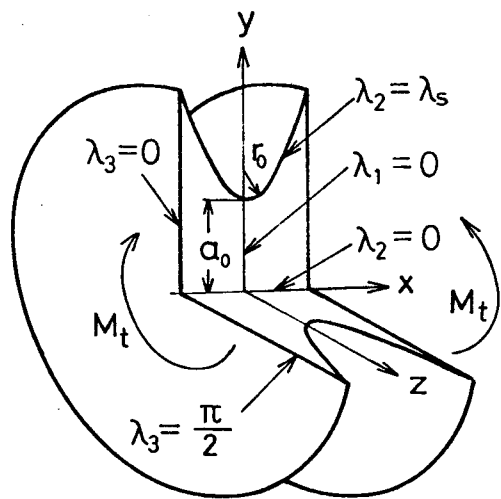


図8-1 環状双曲線切欠き丸棒

座標系としては、図8-1に示すような楕円-双曲線座標系 $\lambda, \lambda_2, \lambda_3$ を導入する。直角座標系 x, y, z との間には次式が成立する。

$$\left. \begin{aligned} x &= C \sinh \lambda, \cos \lambda_2 \\ y &= C \cosh \lambda, \sin \lambda_2 \cos \lambda_3 \\ z &= C \cosh \lambda, \sin \lambda_2 \sin \lambda_3 \end{aligned} \right\} \text{----- (8-1)}$$

ここに、 C は長さの次元を有する定数である。境界面は λ_2 が一定

値 λ_s をとる面として表わされる。座標系 $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ のわい曲係数は次式で与えられる。

$$\left. \begin{aligned} h_1^2 &= \left(\frac{\partial x}{\partial \lambda_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \lambda_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \lambda_1}\right)^2 \\ &= c^2 (\sinh^2 \lambda_1 + \cos^2 \lambda_2) \\ h_2^2 &= h_1^2 \\ h_3 &= c \cosh \lambda_1 \sin \lambda_2 \end{aligned} \right\} \text{----- (8-2)}$$

切欠き底における切欠きの曲率半径 r_0 と切欠き底断面半径 a_0 との間には、

$$a_0 / r_0 = \tan^2 \lambda_s \text{----- (8-3)}$$

の関係が成立する。また定数 C は a_0 と λ_s を用いて、

$$C = a_0 / \sin \lambda_s \text{----- (8-4)}$$

と表わされる。

Tuba⁽⁸⁵⁾ に従い、零でない応力成分は τ_{13} のみであると仮定すると^(注)、自明でない平衡方程式として次式が得られる。

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{h_1} \frac{\partial}{\partial \lambda_3} (\tau_{13} h_1^2 h_2) &= 0 \\ \frac{1}{h_3} \frac{\partial}{\partial \lambda_1} (\tau_{13} h_3^2 h_2) &= 0 \end{aligned} \right\} \text{----- (8-5)}$$

式(8-5)の第一式より、 τ_{13} は λ_3 の関数ではない。よって、式(8-5)の第二式を積分して、

$$\tau_{13} h_3^2 h_2 = F(\lambda_2) \text{----- (8-6)}$$

(注) 線形弾性理論(微小変形)では、この仮定が厳密に成立する。

となる。ここに F は λ_2 のみの関数である。トルク M_t は関数 F を用いて次式で与えられる。

$$M_t = 2\pi \int_0^{\lambda_s} F(\lambda_2) d\lambda_2 \quad \text{-----} \quad (8-7)$$

λ_3 方向変位、すなわち接線方向変位を w とすれば、全ひずみ γ_{13} は、

$$\gamma_{13} = \frac{h_2}{h_1} \frac{\partial}{\partial \lambda_1} \left(\frac{w}{\lambda_3} \right) \quad \text{-----} \quad (8-8)$$

となる。式 (8-8) を λ_1 について積分する。

$$\frac{w}{h_3} = \int_{\infty}^{\lambda_1} \gamma_{13} \frac{h_1}{h_3} d\lambda_1 \quad \text{-----} \quad (8-9)$$

w は切欠き底面に関して対称性を有しているので、次式が得られる。

$$(w)_{\lambda_1=0} = - \int_0^t \beta_T C \sin \lambda_2 dt \quad \text{-----} \quad (8-10)$$

ここに、 β_T は $\lambda_1=0$ で表わされる切欠き底面と、 $\lambda_1=\infty$ で表わされる無限遠方との間の相対的ねじり角速度である。本節においても、簡単のため、定常クリープ状態を考え、構成式としては Norton 型のクリープ則 (式 (2-9)) を用いることにする。

式 (8-6)、(8-9)、(8-10) および (2-9) より、以下の結果が得られる。

$$F(\lambda_2) = C^3 \tau_c \left(\frac{\beta_T \sin \lambda_2}{\dot{\gamma}_c E_{n_2}(\lambda_2)} \right)^{\frac{1}{n}} \sin^2 \lambda_2 \quad \text{-----} \quad (8-11)$$

$$\tau_{13} = \tau_c \left(\frac{\beta_T \sin \lambda_2}{\dot{\gamma}_c E_{n_2}(\lambda_2)} \right) / \left(\sqrt{\sin^2 \lambda_1 + \cos^2 \lambda_2} \cosh^2 \lambda_1 \right) \quad \text{-----} \quad (8-12)$$

$$\dot{\gamma}_{13} = \frac{\beta_T \sin \lambda_2}{(\sinh^2 \lambda_1 + \cos^2 \lambda_2)^{n/2} \cosh^{2n} \lambda_1} E_{\frac{n-1}{2}}(\lambda_2) \quad \text{----- (8-13)}$$

ただし、

$$E_k(\lambda_2) = \int_0^\infty \frac{d\lambda_1}{(\cosh \lambda_1)^{4k+3} (\sinh^2 \lambda_1 + \cos^2 \lambda_2)^k} \quad \text{(8-14)}$$

なお、式(8-11) ~ (8-13)中の定数 β_T は、式(8-7)を用いることにより M_t から求められる。付録IIで述べるように、 $E_k(\lambda_2)$ は k が自然数の場合には複素関数論を用いて解析的に求められる。

解の一例として、 $n=3$ の場合の応力およびひずみ速度分布を以下に示す。

$$\tau_{13} = \tau_c \left\{ \frac{2^9 \beta_T \sin \lambda_2 \cos \lambda_2 \times \cos^8(\lambda_2/2)}{\pi \dot{\gamma}_c (16 + 29 \cos \lambda_2 + 20 \cos^2 \lambda_2 + 5 \cos^3 \lambda_2)} \right\}^{\frac{1}{3}} / (\sqrt{\sinh^2 \lambda_1 + \cos^2 \lambda_2} \cosh^2 \lambda_1) \quad \text{----- (8-15)}$$

$$\dot{\gamma}_{13} = \frac{2^9}{\pi} \frac{\beta_T \sin \lambda_2 \cos \lambda_2}{\cosh^6 \lambda_1 (\sinh^2 \lambda_1 + \cos^2 \lambda_2)^{3/2}} \times \frac{\cos^8(\lambda_2/2)}{16 + 29 \cos \lambda_2 + 20 \cos^2 \lambda_2 + 5 \cos^3 \lambda_2} \quad \text{----- (8-16)}$$

8・2 き裂発生挙動解析

8・1節において双曲線切欠き丸棒の応力・ひずみが解析できたので、本節ではこの結果とクリーフ損傷則とを組合わせ、き裂発生挙動を解析的に取扱う。

切欠き底と同径の平滑棒の弾性ねじりにおける最大せん断応力を公称応力 τ_{no} とする。すなわち、

$$\tau_{n0} = 2M_t / (\pi a_0^3) \text{ ----- (8-17)}$$

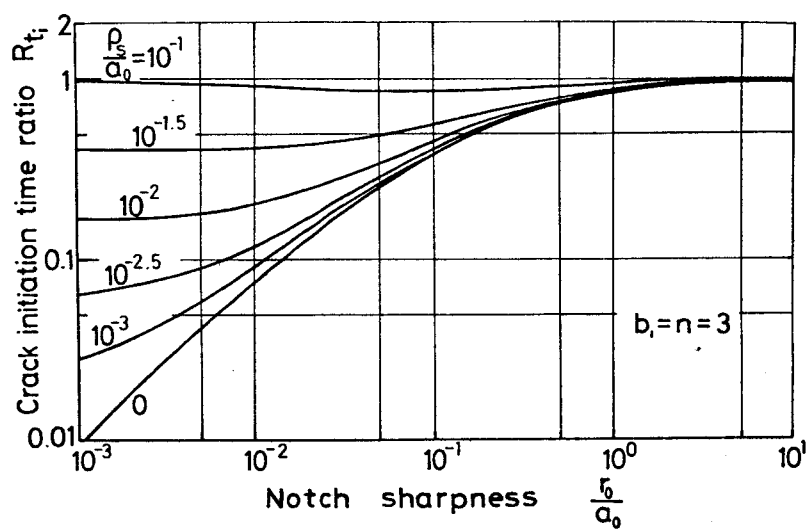
定常クリーフ則(式(2-9))のもとでは、平滑棒の各点のせん断応力は棒中心からの距離の $1/n$ 乗に比例し、最大せん断応力は試験片表面で現われ、その値は $(3n+1)\tau_{n0}/(4n)$ で与えられる。したがって、式(2-120)を用いると、平滑材のき裂発生時間 $(t_i)_s$ は次式で与えられる。

$$(t_i)_s = \frac{1}{A_s} \left\{ \frac{4n}{(3n+1)\tau_{n0}} \right\}^{b_1} \left(\frac{a_0}{a_0 - \rho_s} \right)^{b_1/n} \text{ ----- (8-18)}$$

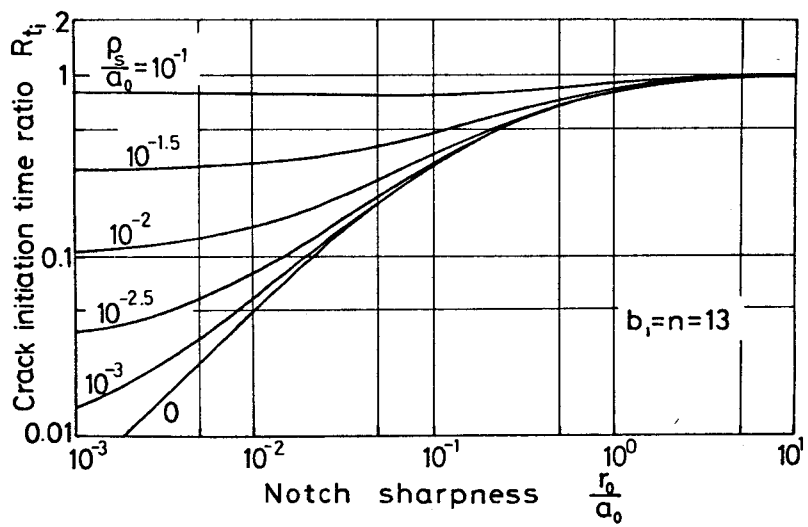
双曲線切欠き丸棒の形状は、 a_0 と r_0 が与えられれば決まる。いま、3・1節の議論で用いた試験片の基準寸法 a^* として a_0 をとると、3・1節の結果より切欠き材のき裂発生時間 t_i と $(t_i)_s$ との比 R_{t_i} は、クリーフ指数 n 、損傷則中の指数 b_1 、 r_0/a_0 および ρ_s/a_0 のみの関数となる。また、 $b_1=n$ の場合、すなわち限界ひずみ条件(式(2-123))を用いた場合の R_{t_i} を $(R_{t_i})_{b_1=n}$ で表わすと、3・1節の結果より、

$$R_{t_i} = \left\{ (R_{t_i})_{b_1=n} \right\}^{b_1/n} \text{ ----- (8-19)}$$

となる。したがって、 $b_1=n$ の場合の R_{t_i} を求めておけば、 $b_1 \neq n$ の場合を含む一般の場合の R_{t_i} が式(8-19)からただちに求められる。図8-2に $b_1=n=3$ および $b_1=n=13$ の場合の R_{t_i} 値を示す。図の横軸には、切欠きの鋭さを表わす r_0/a_0 をとっている。 $r_0/a_0 \rightarrow \infty$ は平滑材に、 $r_0/a_0 \rightarrow 0$ はき裂材にそれぞれ対応している。図より、一般に切欠きが鋭くなるにつれて、すなわち r_0/a_0 が小になるにつれて、 R_{t_i} は小さくなるが、ある程度切欠きが鋭くなり r_0 が ρ_s に比べて小さくなると R_{t_i} は一定値に



(a) $b_1 = n = 3$



(b) $b_1 = n = 13$

図 8-2 双曲線切欠き丸棒のき裂発生時間比

近づいていく傾向がある。このことは、 r_0/a_0 がある限度以下になれば、その切欠き材は実質上き裂材とみなしても差支えないことを意味していると解釈でき、「鋭い切欠き」と呼ぶことができよう。

8・3 き裂成長挙動解析

き裂の成長過程における応力・ひずみが求まれば、これをクリープ損傷則と組み合わせることにより、き裂の成長が解析できる。8・1節の解析において $\lambda_s = \pi/2$ とおけば、ただちに環状双曲線き裂材の応力・ひずみが求まる。変形は周方向のみでありき裂は軸直角方向に同心円状に成長すると考えているので、環状双曲線き裂材においては、き裂成長中も外形は初期のそれと相似であり、したがってき裂成長中の応力・ひずみも8・1節の結果より求められ、環状双曲線き裂材のき裂成長解析が行なえる。

これに対し、平滑材のき裂成長には上記の方法は使えないので、以下のように近似的手法により応力・ひずみを求め、成長挙動の概略的様相について調べる。まず、応力としては、き裂先端近傍の特異項のみを考えることにする。2・1・2節の結果より、き裂先端近傍の応力は、き裂先端からの距離 r の $1/(n+1)$ 乗に逆比例するが、平滑材に環状き裂が入った場合の塑性応力拡大係数 K_e はいまだ求められていない。そこで、き裂先端前方 r の点の応力が、 $r^{-1/(n+1)}$ の特異性を持ち、かつよく知られた線形弾性($n=1$)のき裂解析結果を含むような形として、

$$\tau = \tau_n \left(\frac{K_e^2}{2\pi r \tau_n^2} \right)^{\frac{1}{n+1}} \quad \text{----- (8-20)}$$

で与えられると仮定する。ここに、 τ_n は正味断面公称応力、 K_e

は弾性応力拡大係数であり、 K_e は次式で与えられる⁽⁸⁸⁾。

$$K_e = \tau_n \sqrt{\pi l} \cdot \frac{3}{8} \sqrt{\frac{a}{a_0}} \cdot \left\{ 1 + \frac{1}{2} \frac{a}{a_0} + \frac{3}{8} \left(\frac{a}{a_0}\right)^2 + \frac{5}{16} \left(\frac{a}{a_0}\right)^3 + \frac{35}{128} \left(\frac{a}{a_0}\right)^4 + 0.208 \left(\frac{a}{a_0}\right)^5 \right\} \quad \text{----- (8-21)}$$

ただし、 a_0 は平滑棒の断面半径、 a はき裂底断面半径、 l はき裂長さである。

以上のような仮定をおけば、式(8-20)および(8-21)より平滑材のき裂成長過程における応力が計算される。これを前述のクリープ損傷則と組み合わせることにより、平滑材のき裂成長解析を行なうことができる。なお、以下の計算結果をみても明らかなように、平滑材の場合にはき裂成長寿命が破断寿命に占める割合は小さいので、近似解すなわち式(8-20)を用いて破断寿命を推定しても、ほとんど誤差を生じないものと考えられる。

環状双曲線き裂材および平滑材のき裂発生・成長挙動の計算結果例を図8-3に示す。

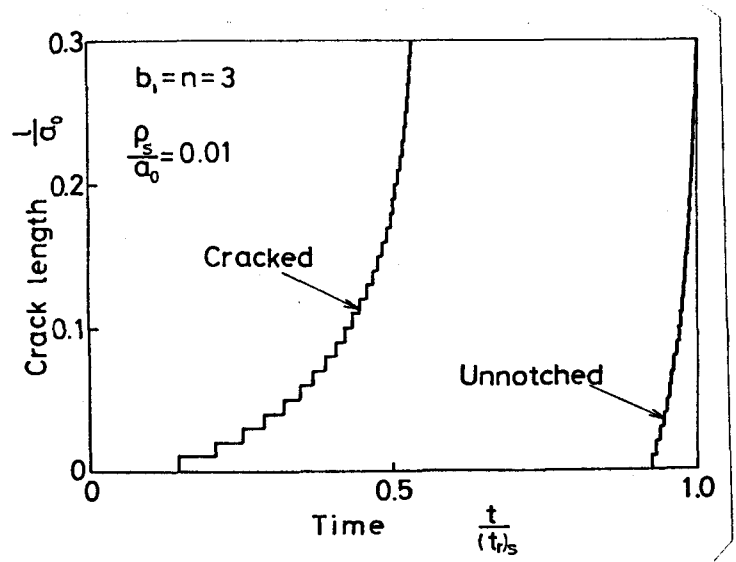


図8-3

環状双曲線き裂材および平滑材におけるき裂発生・成長の様相

3・1・2項の結果より、環状双曲線き裂材の破断時間 t_r と平滑材のそれ $(t_r)_s$ との比、すなわち破断時間比 R_{t_r} は、 n 、 b_1 および ρ_s/a_0 のみの関数になる。限界ひずみ条件 ($b_1=n$) を用いた場合の R_{t_r} に及ぼす ρ_s/a_0 の影響を図8-4に示す。図より ρ_s/a_0 が小さいほど R_{t_r} は小さくなる傾向がある。 R_{t_r} に及ぼす b_1 および n の影響を図8-5に示す。図より、 $b_1=1$ のとき $R_{t_r} \doteq 1$ であり、 $b_1 > 1$ のとき $R_{t_r} < 1$ となる。このことは、4・2節の結果と一致する。また、同じ図より、 b_1 が大きいほど、また n が小さいほど R_{t_r} は小さくなる。

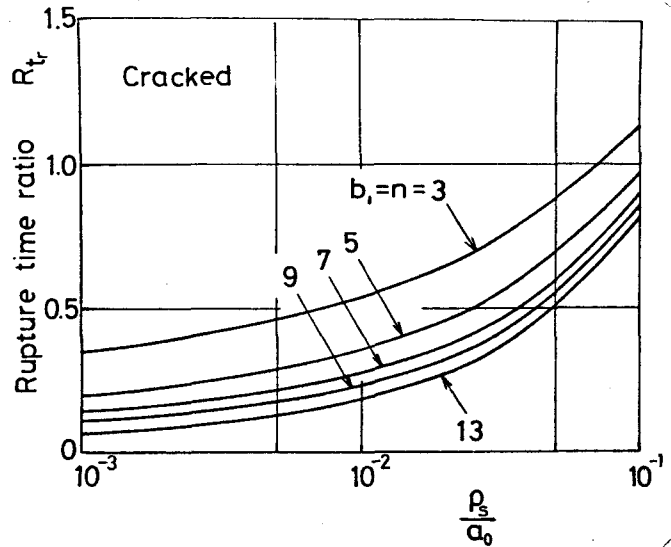


図8-4 環状双曲線き裂材の破断時間比に及ぼす ρ_s/a_0 の影響

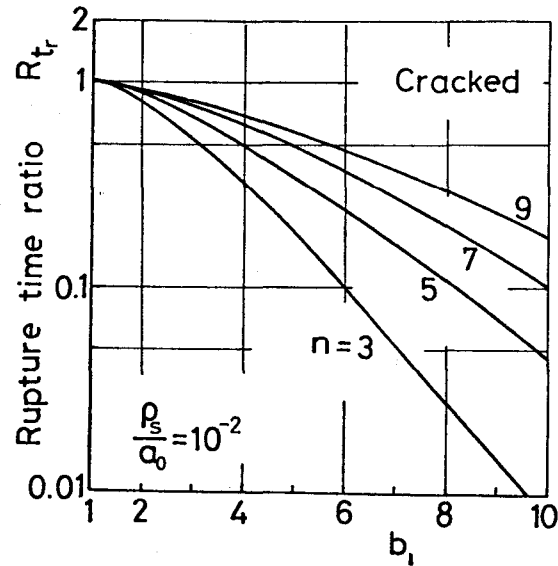
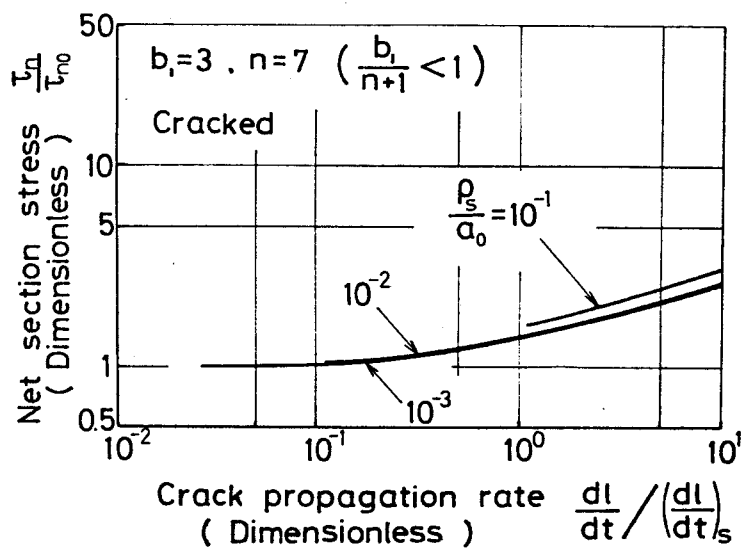


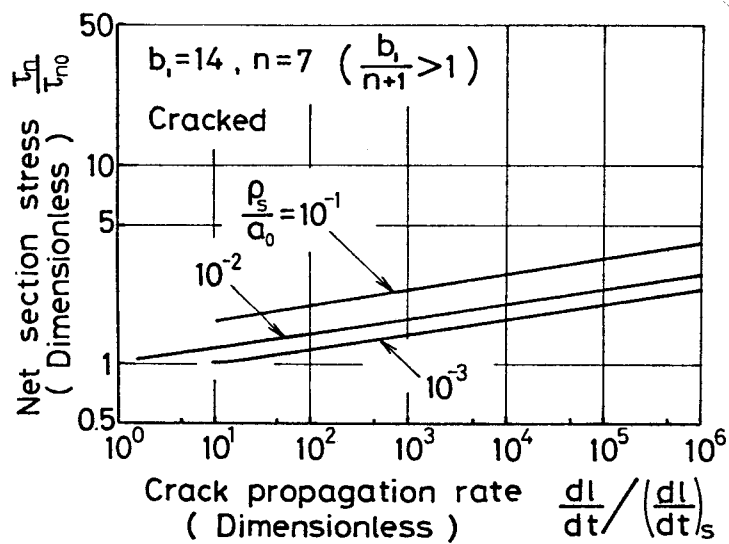
図8-5 環状双曲線き裂材の破断時間比に及ぼす n および b_1 の影響

8・4 環状双曲線き裂材のき裂成長速度

3・1・3項の結果より、環状双曲線き裂材のき裂成長速度は $(dl/dt)_s = A_s T_{no}^{b_1} a_0$ で割ることにより無次元化され、無次元



(a) $b_1=3, n=7$ ($\frac{b_1}{n+1} < 1$)



(b) $b_1=14, n=7$ ($\frac{b_1}{n+1} > 1$)

図8-6 環状双曲線き裂材のき裂成長速度

化されたき裂成長速度は、 n , b , ρ_s/a_0 および l/a_0 のみの関数となる。よって、同一形状、同一材料の試験片に関するき裂成長のデータは、無次元き裂成長速度 - l/a_0 の関係でマスター・カーブ上に整理されることになる。ところで、正味断面公称応力 T_n と初期断面公称応力との比 T_n/T_{n0} は、

$$T_n/T_{n0} = (1-l/a_0)^{-3}$$

で与えられる。したがって、マスター・カーブ表示において、 l/a_0 の代わりに T_n/T_{n0} を用いることもできる。図8-6にき裂成長速度の計算例を示す。図より、初期の部分を除き、 T_n/T_{n0} とき裂成長速度（無次元）との間には両対数線図上でよい直線関係が成立する。

き裂成長速度に及ぼす力学量、履歴および破壊様式の影響については、6・4節の縦せん断負荷のもとにおける双曲線き裂材のき裂成長速度のところで十分議論した。本節で取扱っている環状双曲線き裂材の場合もこれとほぼ同じ結果となるので、重ねて議論することを差控える。

8・5 結言

実験的に実現できる問題として、環状双曲線切欠き丸棒のねじりクリーフ破壊を解析的に取扱った。すなわち、「クリーフ応力解析における弾性相似則」を利用して定常クリーフ解を求め、これをクリーフ損傷則と組み合わせることにより、き裂の発生・成長・破断に関する挙動の予測を試み、各種因子の影響を調べた。その結果、ねじりにおいては切欠き弱化が支配的となることが明らかとなった。これは、4・2節の解析結果と一致する。

第9章 切欠き材およびき裂材のねじりクリープ破断試験

第4章では、ねじりクリープ下の切欠き破断強度に関する考察を提示するとともに、第8章においては、ねじりを受ける環状双曲線切欠き丸棒におけるき裂挙動に対する力学的解析を行なった。本章では、これら解析結果に対する比較資料を得るため行なった、環状切欠き材およびき裂材のねじりクリープ試験結果について述べる。

9.1 ねじりクリープ試験機

ねじりクリープ試験機は、本研究のため特に製作したものである。図9-1にその外観を示す。装置は試験機本体、炉および温度調節装置からなる。

まず、試験機本体について説明する。図9-2にその概略図を示す。トルクは、上方に位置する回転ドラム(a)にワイヤロープを巻き付け重錘により発生させる方法を採用している。最大トルクは6000 kg-mmである。試験片(e)は下部軸(g)および上部軸(d)によって保持され、下部軸(g)は固定されている。上部軸(d)は縦に並べられた2個のボールフッシュ(c)によって支えられているので、昇温時の熱膨脹および試験中の試験片の軸方向寸法変化による拘束力の影響が除かれる構造になっている。試験片より上方にある上部軸等の重量は釣合い重りによって補償されている。炉(f)は、試験片の着脱が容易なように、割り型とした。巻線は上・中・下の三層に分割し、発熱比が調節できる構造としている。容量は3.5 kW、最高使用温度は700°Cである。温度の検出には白金抵抗体を用い、電力制御部にはサイリスタ(またはトライアック)二個

を逆並列接続し、サイリスタ(またはトライアック)の点弧位相制御による電圧制御方式で温度調節を行なった。

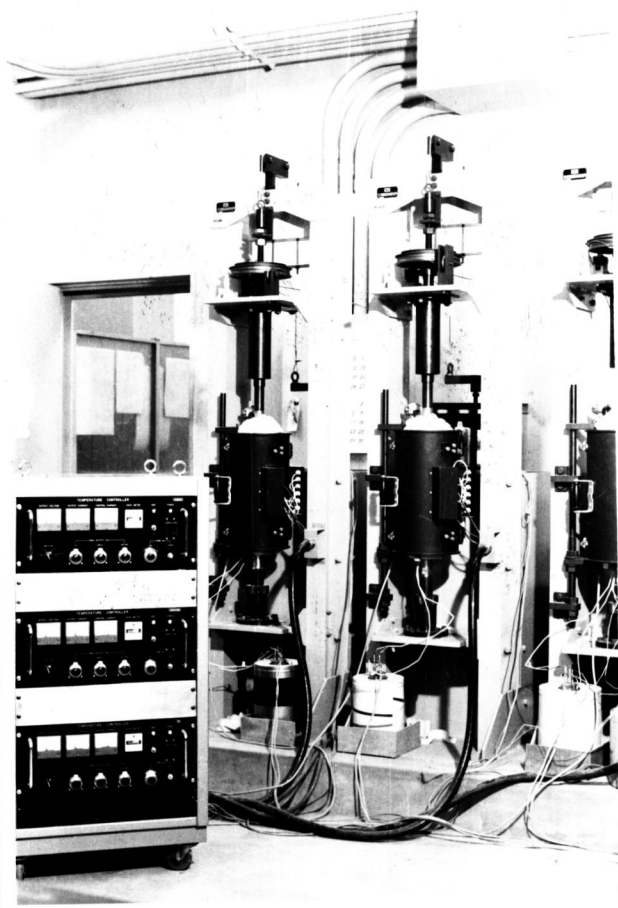


図9-1 ねじりクリープ試験装置外観

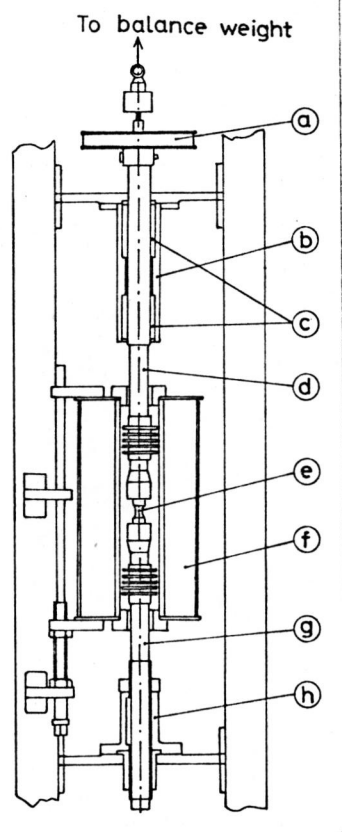


図9-3 ねじりクリープ試験機本体

9.2 供試材および試験片

供試材は、無酸素銅および低炭素鋼(S10CおよびS15CK)である。材料の化学成分および熱処理を表9-1に示す。なお、無酸素銅、S10CおよびS15CK低炭素鋼の焼なまし処理は、試験片の加工や人工き裂導入に伴う影響を除去するため、試験片の加工後施したものである。熱処理後の各材料の機械的性質を表9-2に示す。

表 9-1 供試材の化学成分

(a) OFHC copper (ppm)

Fe	Pb	Sn	Bi	Ni	Co	Ag	As	Sb	O ₂	H ₂	S
7	1	0	1	1	0	2	1	0	4.2	0.14	7.2

Heat treatment ; 600°C x 1hr Anneal

(b) Carbon steel (%)

	C	Si	Mn	P	S	Cu	Ni	Cr
S 10 C	0.09	0.24	0.36	0.013	0.023	—	—	—
S 15 CK	0.14	0.25	0.40	0.014	0.009	0.12	0.04	0.14

Heat treatment ; 910°C x 1hr Anneal

表 9-2 供試材の機械的性質

	Tensile strength (kg/mm ²)	Yield strength (kg/mm ²)	Elongation (%)	Reduction in area (%)	Vickers hardness Hv
OFHC copper	21.9	—	72.1	90.7	—
S 10 C carbon steel	35.6	23.4	—	75.6	105
S 15 CK carbon steel	42.3	32.6	41.6	68.6	109

平滑試験片形状を図 9-3 (a) および (b) に、切欠き試験片形状を図 9-3 (c) に、また人工き裂試験片形状を図 9-3 (d) にそれぞれ示す。切欠き部形状は、加工の便宜上 60°-V 形環状切欠きとした。第 8 章の解析結果と比較するため、切欠きの深さは、V 形切欠きの応力集中係数⁽⁸⁹⁾とこれと同じ切欠き半径を有する双曲線切欠きの応力集中係数がほぼ等しくなるように決定した。切欠き試験片の応力集中係数は図中に示されている。人工き裂の導入には圧着法を用いた。すなわち、素材からまず切欠き半径が 0.02 mm 以下の 45°V

形環状切欠きを有する人工き裂導入用試験片を加工し、これを治具を用いて万能試験機により圧縮し、切欠き部を部分的に圧着させて人工き裂とした。圧縮荷重は、切欠き底が密着し、かつ試験片の弾性応力拡大係数の推定値が第8章で解析した双曲線き裂材のそれとほぼ等しくなり、したがって双曲線き裂材と力学的に等価であるとみなせるような、最小の荷重を採用した。圧着後、試験片のつかみ部を加工し、その後に圧着および加工の影響を取除くため、完全焼なまし処理を施した。焼なまし後のき裂先端近傍の顕微鏡組織観察結果によれば、焼なまし処理によりき裂先端近傍の組織は回復している。

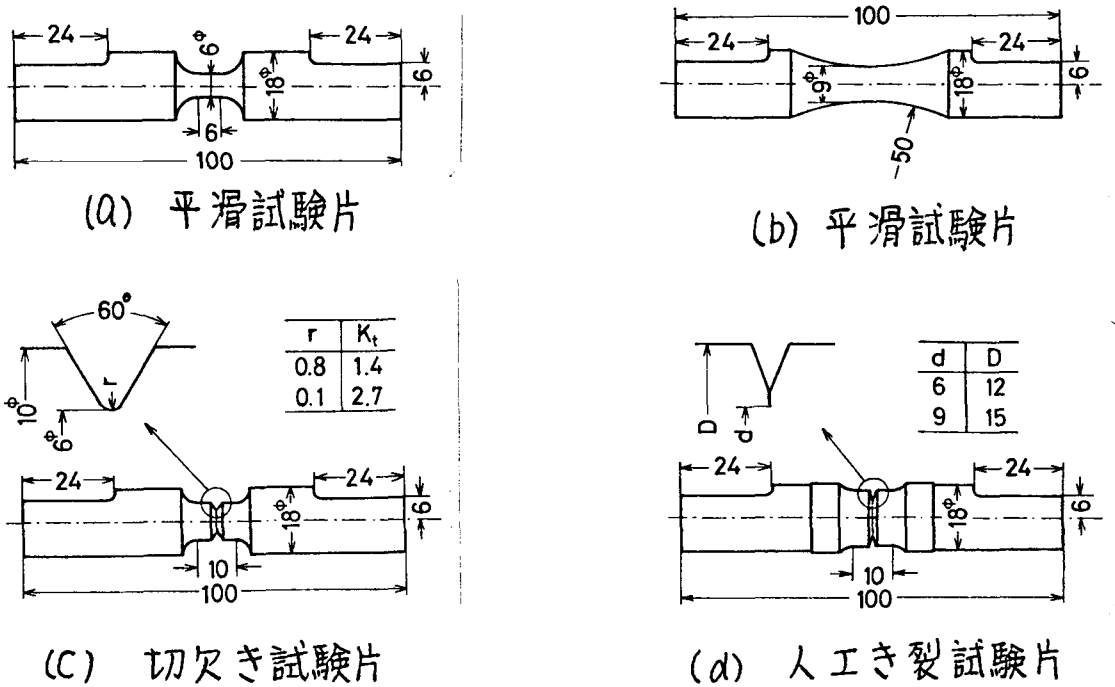


図9-3 試験片形状

9・3 無酸素銅・切欠き材の破断試験および中断試験結果

試験温度は200°Cとした。試験片としては、図9-3(a)に示した平滑試験片および同じく(c)に示した切欠き試験片を用いた。切欠き半径は0.1mmおよび0.8mmの2種類を採用した。

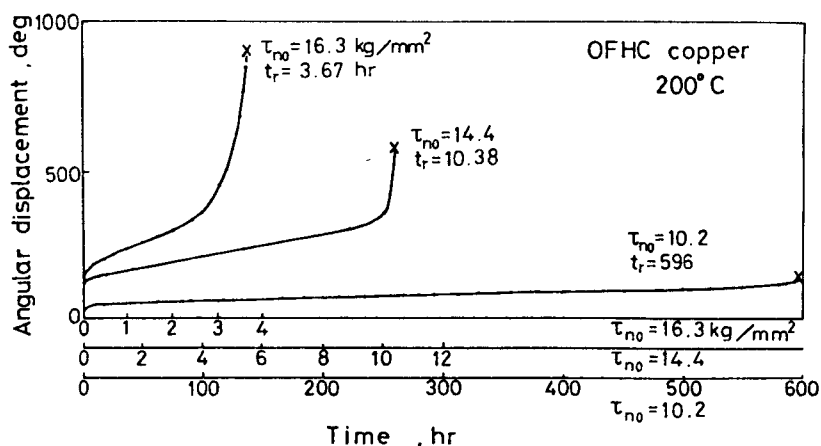
図9-4に平滑材のクリーフ曲線の例を示す。縦軸の角変位は試験片肩間の値であり、図9-2中のドラム(a)に取付けられた角度目盛による測定値より算定したものである。種々の破断時間に対するクリーフ曲線相互の比較を容易にするため、横軸の時間目盛を破断時間に応じて変えている。角変位とせん断ひずみ間には近似的に直線関係が成立し、実測によれば、角変位160°がほぼせん断ひずみ1に相当する。図中の公称応力 τ_{no} は、同径の平滑棒の弾性ねじりにおける最大せん断応力である。図より、低応力になると破断延性の著しい低下がみられる。

図9-5はクリーフ曲線より求めた最小角変位速度と公称応力の関係を示したものである。角変位速度とクリーフひずみ速度とは比例関係にあるので、図より、

$$\dot{\gamma}_{min} \propto \tau_{no}^n \quad \text{----- (9-1)}$$

図9-4

無酸素銅・平滑材
のクリーフ曲線



の関係が成立する。ここに、 $\dot{\gamma}_{min}$ は最小クリープひずみ速度である。図より n の値はほぼ 14 である。なお、切欠き材の実験結果も同じ図中に示したが、平滑材とほぼ平行な関係を示している。

図 9-6 は平滑材および切欠き材の応力-破断時間線図である。図からわかるように、切欠き半径 0.1 mm の切欠き材は切欠き弱化を呈している。切欠き半径 0.8 mm の切欠き材の実験結果は少ないが、その破断時間は平滑材のそれと切欠き半径 0.1 mm の切欠き材のそれとの中間にあり切欠き弱化の傾向を示している。また、図より、

図 9-5
無酸素銅における
応力と最小角変位
速度の関係

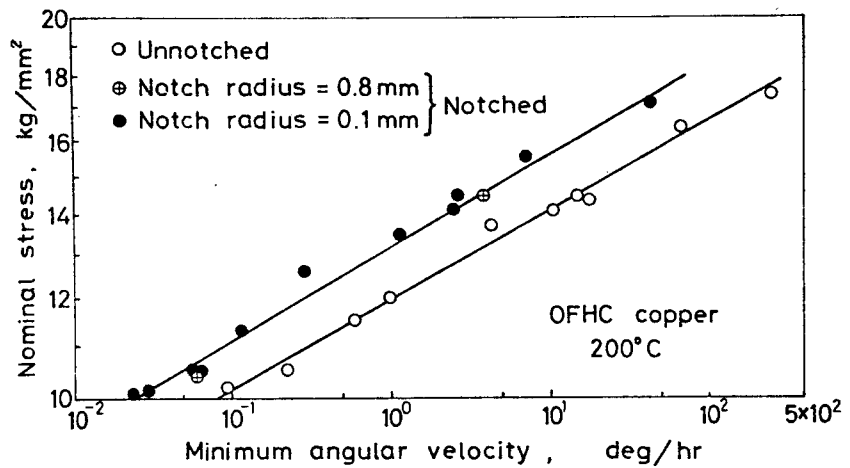
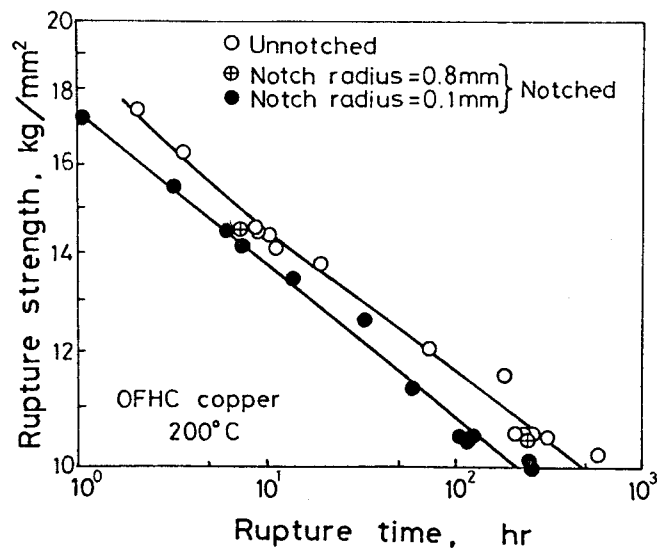


図 9-6
無酸素銅のねじりクリー
プ破断試験結果



平滑材、切欠き材いずれについても、破断時間 t_r と応力 T_{no} との間には両対数線図上でほぼ直線関係が存在する。したがって、

$$t_r \propto T_{no}^{-\lambda} \text{----- (9-2)}$$

が成立することになる。無酸素銅、 200°C の場合の λ の値は、図 9-6 の曲線の傾きから求められ、ほぼ 10 である。

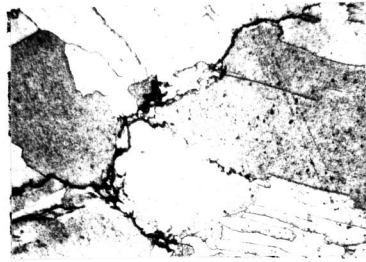
次に、破壊様式の観察結果を示す。図 9-7 (a) および (b) は、無酸素銅・平滑材の破断面近傍の縦割り断面の例を示したものである。また、(c) および (d) は、クリーフ試験を中断して得た切欠き半径 0.1mm の無酸素銅・切欠き材の切欠き底近傍の縦割り断面を示したものである。図の横方向が試験片の半径方向である。図より、無酸素銅においては、応力の低下あるいは破断寿命の増加に伴い、粒内破壊型のき裂から粒界破壊型のき裂への移行がみられる。この傾向は引張負荷の場合⁽⁹⁰⁾ とほぼ同様である。

次に、き裂の発生および成長挙動を調べるため行なった、中断試験結果について述べる。上記のように、公称応力 T_{no} の大小によって破壊の様式が異なるので、粒内破壊型のき裂が支配的な $T_{no} = 14.5\text{ kg/mm}^2$ の場合と、粒界破壊型のき裂が支配的な $T_{no} = 10.5\text{ kg/mm}^2$ の場合のそれぞれについて、切欠き半径が 0.1mm および 0.8mm の切欠き材を適当な時間クリーフ変形させた後、試験を中断し、き裂の有無、き裂長さ等について調べた。

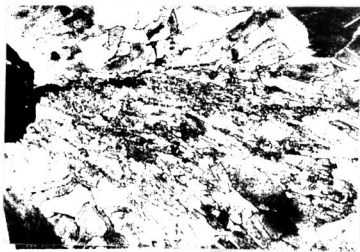
切欠き底におけるき裂の有無は、浸透探傷剤を用いて調べた。浸透探傷剤で検出できる最小き裂長さは、平均き裂長さにして数十 μm 程度であった。中断時のき裂長さは、周方向に一様ではなく、かなりのばらつきが認められた。このため、中断した試験片の縦割り観察よりき裂長さを求めることは不適当であると考え、本実験に



(a) 平滑材
 $\times 100$
 $\tau_{no} = 16.3 \text{ kg/mm}^2$
 $t_r = 3.67 \text{ hr}$



(b) 平滑材
 $\times 400 \times \frac{2}{3}$
 $\tau_{no} = 10.2 \text{ kg/mm}^2$
 $t_r = 596 \text{ hr}$



(c) 切欠き材
 $r_0 = 0.1 \text{ mm}$
 $\times 100 \times \frac{2}{3}$
 $t/t_r = 0.860$
 $(t_r \doteq 6 \text{ hr})$
 $\tau_{no} = 14.5 \text{ kg/mm}^2$



(d) 切欠き材
 $r_0 = 0.1 \text{ mm}$
 $\times 100 \times \frac{2}{3}$
 $t/t_r = 0.955$
 $(t_r \doteq 120 \text{ hr})$
 $\tau_{no} = 10.5 \text{ kg/mm}^2$

図9-7 無酸素銅におけるき裂の観察

おいては、中断した試験片を常温にて引張り破断させ、その破断面よりき裂長さを測定し、これから平均き裂長さを求めた。常温引張りによる断面収縮は十分小さく、またクリープき裂面と常温引張り破面の間には明瞭な差異があり、容易に識別できた。

本研究で用いた切欠き材においては、後述するように全寿命中のかなりの部分がき裂発生までの寿命によって占められている。したがって、き裂長さを中断時までのなまの負荷時間 (Exposure time) の関数として表わした場合には、個々の試験片のもつばらつきのため、き裂長さ-負荷時間のデータのばらつきが大きくなると考えられる。本研究では、このばらつきをより小さくするため、試験片肩間の角変位 ψ により負荷時間を補正する方法を採用した。すなわち、破断時間で無次元化した負荷時間 t/t_r と角変位 ψ との間には試験片によらずかなり良い対応関係がみられるので、図 9-8 に示すように、破断試験から $\psi - t/t_r$ の関係を求めておき、中断時の角変位 ψ からその時点の t/t_r を求めた。

以上のようにして求めた、き裂長さ l と負荷時間 t/t_r の関係を図 9-9 に示す。図より、本実験の条件のもとでは、き裂成長寿命が破断寿命に占める割合は小さく、この傾向は鋭い切欠き材 (a) 切欠き半径 0.1mm) よりも鈍い切欠き材 (b) 切欠き半径 0.8mm) のほうが著しい。なお、図中の実線は、第 8 章の力学的解析を用いてき裂の挙動を推定した結果であ

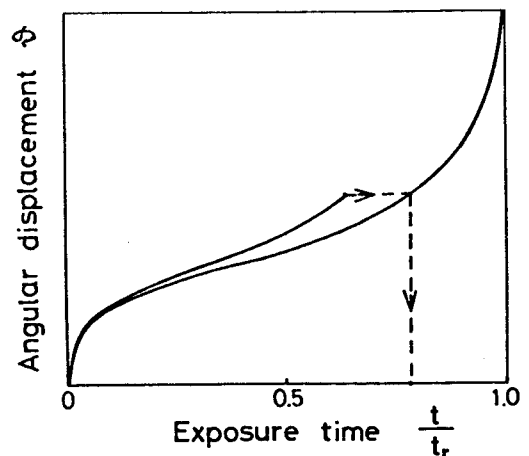
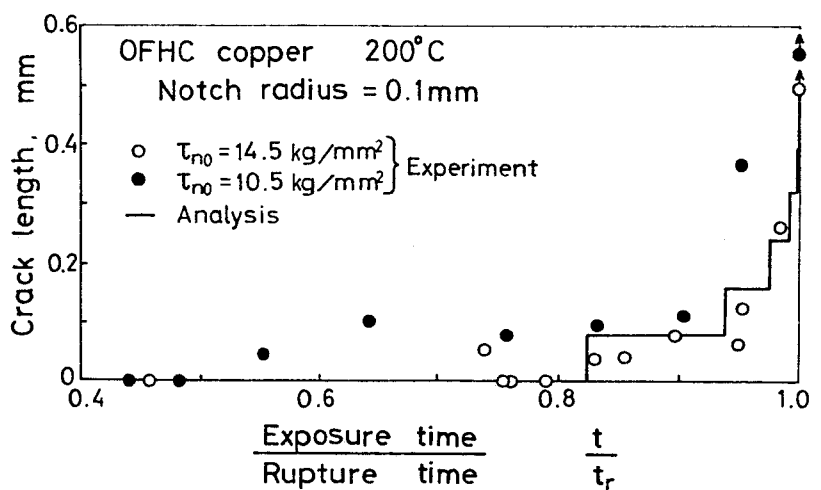
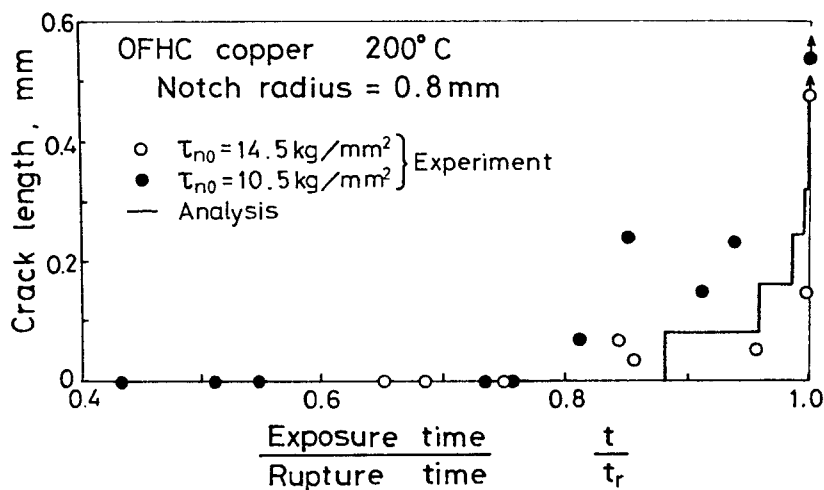


図 9-8 t/t_r 算出方法



(a) 切欠き半径 0.1 mm



(b) 切欠き半径 0.8 mm

図 9-9 無酸素銅・切欠き材におけるき裂成長

る。解析で用いた仮定および数値、ならびに実験結果との比較については、第10章でまとめて論ずる。

9・4 S10C 低炭素鋼・切欠き材の破断試験結果

S10C 低炭素鋼の試験温度としては、 450°C を採用した。図9-3(a)の平滑試験片および同じく(c)の切欠き試験片を用い、切欠き半径は 0.1mm および 0.8mm の2種類とした。

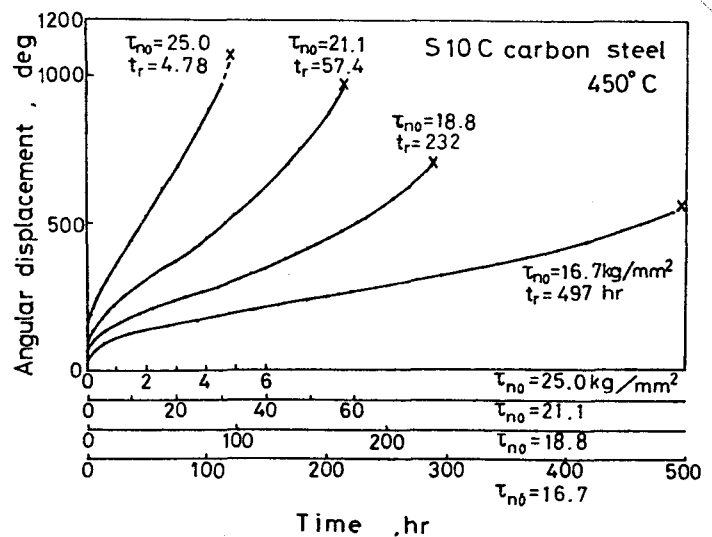
図9-10に平滑材のクリーブ曲線の例を示す。無酸素銅の場合と同じく、縦軸は試験片肩間の角変位である。図より、低応力になるほど、破断延性が低下していく傾向がみられる。

図9-11は、公称応力 τ_{no} と最小角変位速度の関係を示したものである。無酸素銅の場合と同様に、S10C 低炭素鋼においても式(9-1)が近似的に成立する。図より、 n はほぼ15である。

S10C 低炭素鋼の応力-破断時間線図を図9-12に示す。図より、切欠き半径が 0.1mm の鋭い切欠き材の破断寿命は、平滑材のそれに比べてかなり小さい。切欠き半径が 0.8mm の鈍い切欠き材の寿

図9-10

S10C 低炭素鋼・平滑材のクリーブ曲線



命は平滑材のそれとほぼ同じである。S10C低炭素鋼においても切欠き弱化が支配的である。また、同じ図より、応力と破断時間の間にはべき乗の関係式(9-2)が近似的に成立する。べき指数 n はほぼ14である。

また、顕微鏡観察結果によれば、粒内破壊型のき裂が支配的であった。このことは、引張負荷の場合⁽⁹⁰⁾と同傾向である。

図9-11

S10C低炭素鋼における応力と最小角変位速度の関係

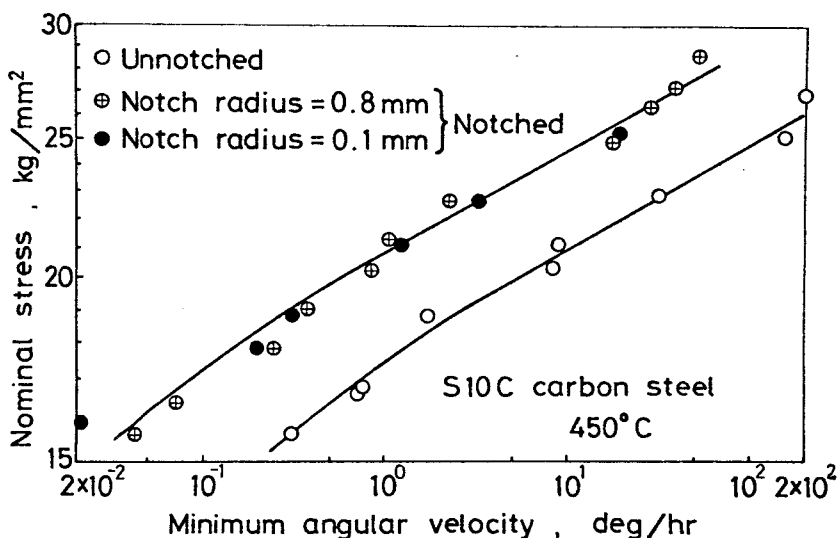
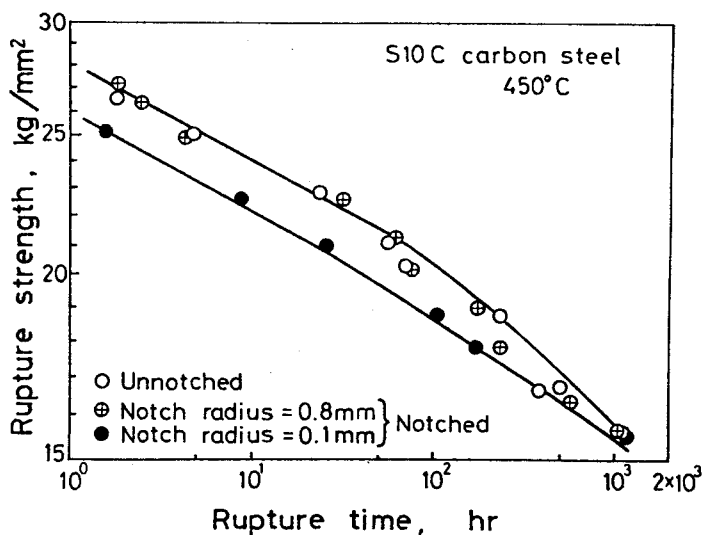


図9-12

S10C低炭素鋼のねじりクリープ破断試験結果



9.5 S15CK低炭素鋼・き裂材の破断試験結果

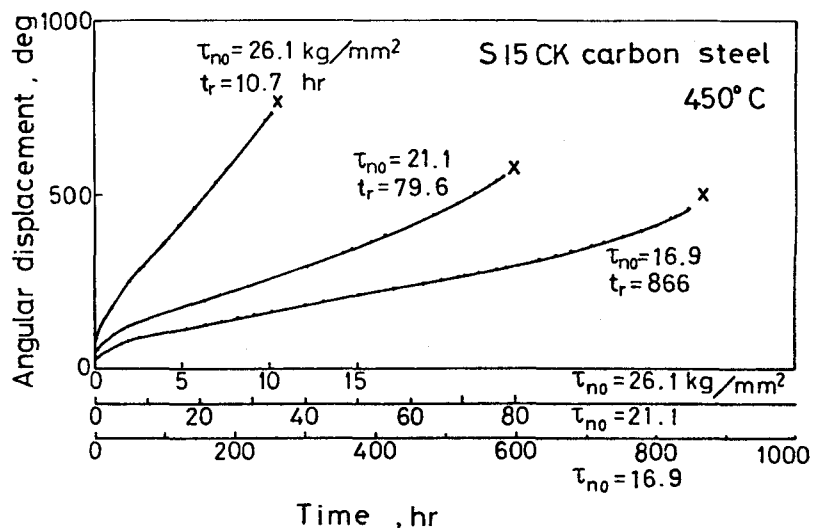
試験温度は、S10C低炭素鋼と同じく450°Cとし、試験片は、図9-3(a)および(b)の平滑試験片および同じく(d)の人工き裂試験片を用いた。人工き裂試験片のき裂底径としては、6mmおよび9mmの2種類を用いた。

平行部の径が6mmの平滑材のクリープ曲線の例を図9-13に示す。クリープ曲線より求めた平滑材の肩間の最小角変位速度と公称応力との関係を図9-14に示す。図より、S15CK低炭素鋼においても式(9-1)が成立し、 n の値はほぼ13である。

破断試験結果を図9-15に示す。なお、図中の黒い菱形印は、試験中において初期き裂面上で生ずる摩擦の影響を調べるため、試験片を圧着して人工き裂を導入した後、引張り力を加え初期き裂先端を鈍化させることにより、き裂を開口させた試験片の結果である。図より明らかなように、黒丸印で表わした鋭い初期き裂を有する試験片の破断時間と黒い菱形印で表わした開口している初期き裂を有する試験片の破断時間との間に差異は認められず、したがって

図9-13

S15CK低炭素鋼・
平滑材のクリープ
曲線



この場合の初期き裂面上の摩擦力の影響は小さいものと考えられる。図より、平滑材およびき裂底径 9 mm のき裂材における応力-破断時間の関係は式(9-2)で表わされ、この場合の n の値はほぼ 11 である。き裂底径 6 mm のき裂材の実験結果はかなりばらついているが、平滑材とき裂底径 9 mm のき裂材の結果の間に入っている。図より明らかのように、き裂材はすべて切欠き弱化的傾向を示している。

図 9-14

S15CK 低炭素鋼
における応力と最
小角変位速度との
関係

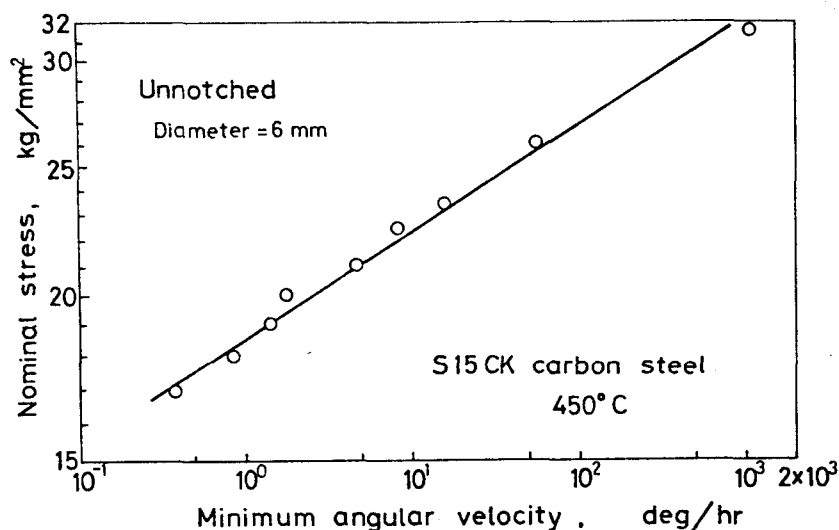
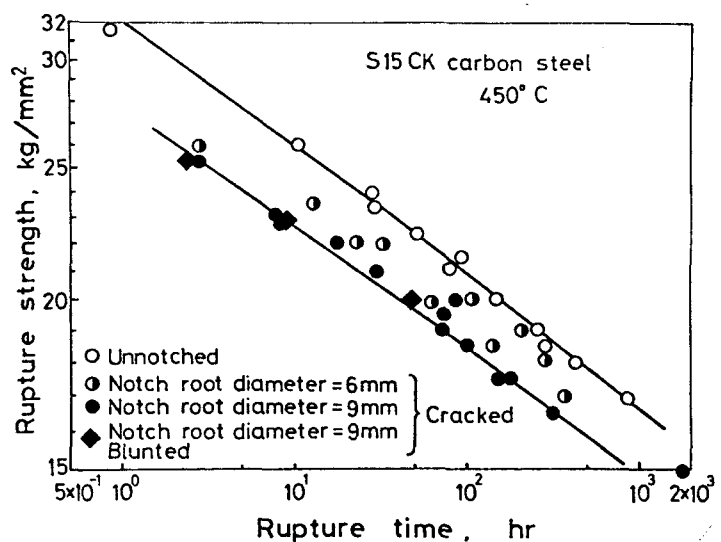


図 9-15

S15CK 低炭素鋼のね
じりクリーフ破断試験
結果



次に、負荷初期、すなわち き裂が成長していない時点の修正J積分値 J' を用いて き裂材の破断時間を整理した結果を図9-16に示す。本実験で用いたような深いき裂材の修正J積分値 J' は式(2-98)を用いて求められる。なお、第8章の解析結果によれば、き裂が成長を開始するのは全寿命の半分位の時点であり、また実験結果によれば角変位速度は寿命の2~4割のところではほぼ一定であり全寿命中の最小値をとるので、 J' の計算式(2-98)中の角変位速度としては、この最小角変位速度の値を用いた。図9-16より、負荷後初期の J' と破断時間との間には良い相関関係が成立し、初期の J' が同じであれば、き裂底径6mmのき裂材の破断時間のほうがき裂底径9mmのき裂材のそれより小さくなっている。負荷後初期の J' は初期き裂先端近傍の応力・ひずみの代表値であるので、 J' が同じであれば き裂発生時間は同じであると考えられる。したがって、径の異なる両試験片の破断時間の差異は、き裂成長時間

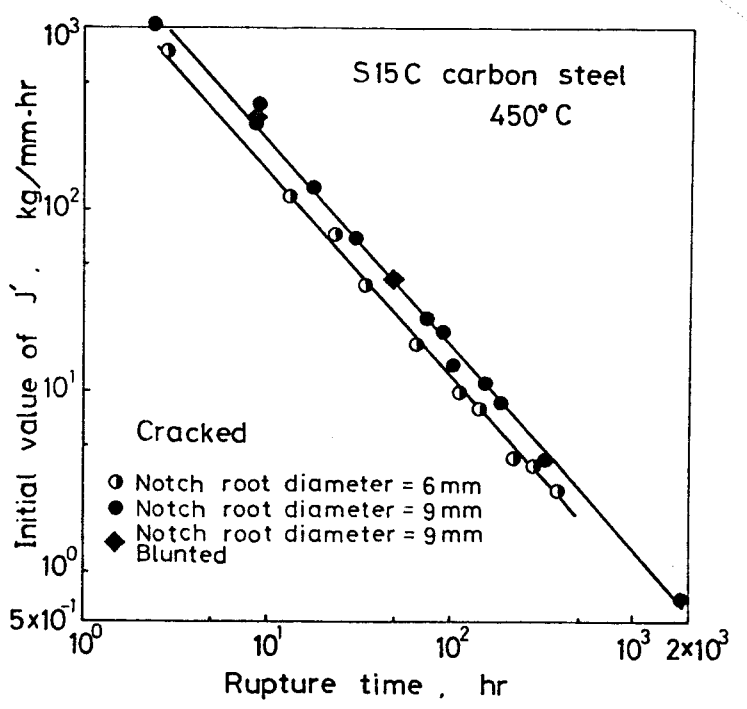


図9-16
S15CK低炭素鋼・き裂材における初期の修正J積分値と破断時間との関係

の差異によるものであると解釈することもできるが、今後詳細な検討が必要である。

9・6 結言

解析結果の比較検討資料を得るため、ねじりクリーブ試験を行ない以下の結果を得た。

- (1) 200°Cにおいて無酸素銅の平滑材および切欠き材のクリーブ破断試験を行ない、切欠き弱化が支配的であることを示した。また、切欠き材の中断試験を行なうことにより、き裂の発生・成長を観察した。
- (2) 450°CにおいてS10C低炭素鋼の平滑材および切欠き材のクリーブ破断試験を行ない、鋭い切欠き材においては切欠き弱化が支配的となることを明らかにした。
- (3) 450°CにおいてS15CK低炭素鋼の平滑材および人工き裂材の破断試験を行ない、人工き裂材においても切欠き弱化となることを示した。

第10章 考察

本章では、前章までの結果を総合的に比較検討し、本研究で用いた力学的解析手法の妥当性について調べるとともに、引張り負荷のもとにおける切欠き強化・弱化の力学的要因、引張りにおけるき裂成長速度のデータの傾向とその解釈、き裂成長速度における寸法効果、き裂成長挙動に対する弾性ひずみ成分の寄与等、工学上重要と思われる種々の事項について議論する。

10・1 切欠き強化および弱化

第4章で述べたように、切欠き材のねじりクリーブ破断に対する力学的解析結果によれば、金属学的強化の機構が作用しなければ、通常の金属材料においては切欠き弱化が支配的となる。この結果は第9章のねじりクリーブ破断試験結果とよく対応している。

これに対し、ねじりクリーブ破断試験で用いた材料のうち無酸素鋼およびS10C低炭素鋼については、引張り負荷のもとにおいて切欠きの極限状態と考えられるき裂材が切欠き強化を呈することがすでに明らかにされている⁽⁹⁰⁾⁽⁹¹⁾。特にS10C低炭素鋼においてはその傾向が顕著である。このような負荷形態の相違によって生じた切欠き破断特性の食違いは、切欠き強化および弱化の本質に関する力学的側面からの重要な知見を与えると期待されるので、本節では特にこの点に焦点を絞って議論する。

引張り負荷とねじり負荷によって起こる大きな相違点のひとつは、切欠き底近傍における多軸引張り応力状態の有無である。すなわち、有限要素法を用いた切欠き材の応力・ひずみ解析結果^{(62)(92)~(94)}

によれば、引張り負荷では切欠き底近傍で多軸引張り応力状態となるのみならず、時間の経過とともにその部分の相当応力が減少する。その結果、切欠き部の形状に応じて、切欠き部の相当応力が切欠き底断面の公称応力値、換言すれば、この場合の比較の基準となる平滑材の応力値(公称)を下回ることになる。したがって、もし材料の延性が充分大きければ、充分の時間の経過の後には、切欠き部のクリープひずみが平滑材のそれよりも小さくなる。もし適当な限界ひずみで破壊の条件を与えるなら、材料の延性が大きい場合には切欠き強化が生じ、逆に材料が延性に欠け限界ひずみが小さい場合には切欠き弱化の傾向を示すことになり、平ら⁽⁸⁾の指摘の通りである。これに対し、第4章および第8章の解析結果によれば、ねじり負荷のもとでは、多軸引張り応力状態が生ずることはなく、したがって上記のような塑性拘束も生ずることがない。

引張りとねじりによる他の重要な相違点は変形の進行に伴う試験片形状の変化の有無である。上記の議論は微小変形理論に基づく計算結果を基礎としているが、高延性材の破壊に対しては、当然有限変形の影響を考慮しなければならない。ねじり負荷の場合には、変形が大きくても試験片の形状変化がほとんどなく、これに対する修正を加える必要が事実上ない。これに対し、引張り負荷の場合には、変形に伴う著しい形状変化が認められる。この形状変化としては、切欠き底の曲率半径の変化で代表される切欠き形状の変化と、切欠き・平滑試験片に共通である変形に伴う断面積の減少のふたつが考えられる。これら形状変化の試験片の応力またはひずみへの影響を正確に評価することは現在の段階では困難であり、今後の有限変形理論に基づく解析の進歩にまたねばならない。しかしながら、これ

らの影響の概略の見当は、いくつかの実験結果を参照してつけることができる。まず、切欠き底の曲率半径は時間の経過とともに増大することが報告されており⁽⁹⁵⁾⁽⁹⁶⁾、応力集中が緩和される。つぎに断面積減少は切欠き試験片に比べ変形の容易な平滑試験片のほうが大きく⁽⁹⁶⁾、延性のある材料では平滑試験片の真応力が加速度的に増大する。このため、平滑試験片の寿命が相対的に短くなる。よって断面積減少は結果的には切欠き強化に寄与すると考えられる。延性の大きい材料の切欠き強化にはこの効果が非常に大きな役割を果たしていると思われる。

引張り負荷とねじり負荷の違いによって生ずる他のひとつの相違点は、破壊ひずみ（あるいは、より抽象的な概念として延性と言ってもよいが、）およびひずみ速度に対する多軸引張り応力状態、すなわち正の静水圧応力成分の影響であろう。これについても正確な情報はないが、高圧下（負の静水圧応力成分）では破断ひずみが増加し⁽⁹⁷⁾、クリープひずみ速度が減少する^{(98)~(101)}という実験結果があり、延性破壊における静水圧応力成分の影響とその機構⁽¹⁰²⁾⁽¹⁰³⁾を考慮すれば、当然クリープの場合にも正の静水圧応力成分によって破壊ひずみが増加しクリープひずみ速度の増大することが予想される。ねじり負荷の場合には多軸引張り応力状態はなく静水圧応力成分は零であるからこのような影響はないが、引張り負荷では正の静水圧応力成分があるので上述のような効果があり、切欠き強化を減らす方向に作用するものと思われる。しかし、定量的議論については今後の研究にまたねばならない。

要するに、力学的観点から見れば引張り負荷の場合には塑性拘束と大変形に伴う形状変化、特に断面減少の効果のため、延性が充分

あれば切欠き強化となる。正の静水圧応力成分の影響については、幾分強化を減らす方向に作用しているものと考えられる。ねじり負荷ではこれら三つの影響がすべて作用しないので、たとえ材料の延性が充分高くても、切欠き弱化が支配的になると考えられる。

以上のような力学的因子以外で切欠き強化および弱化に影響を及ぼす因子としては、金属組織学的因子をはじめいくつかのものが考えられる。破壊形態もそのひとつである。たとえば、平・大谷⁽⁸⁾は、引張りにおいて適当な条件のもとでは粒内破壊より粒界破壊への破壊形態の変化に伴い、切欠き強化より弱化への移行が起こりうることを示し、1Cr-1Mo-1/4V鋼の実験結果の説明としている。しかし、本実験結果のように、ほとんど粒内・粒界の破壊形態のいかんにかかわらず力学的条件によって切欠きクリーフ破断特性が決定される場合もある。結局、力学的条件と、破壊形態の著しい影響を受ける破壊条件との組合せによって、見かけ上の切欠き強化あるいは弱化の現象が左右されると考えられる。

10・2 ねじりクリーフ破壊に対する解析結果と実験結果との比較

本節では、第9章で述べたねじりクリーフ試験結果と、第8章の力学的解析による推定結果との比較を行なう。

まず、解析に用いる種々の数値を求めておく。材料の特性寸法 ρ_s としてはいろいろな量が考えられようが、本研究では仮りに平均結晶粒径をとることにする。また、クリーフ指数としては、応力-最小角変位速度間の関係式(9-1)の中のべき指数 n を用いる。式(2-121)からわかるように、クリーフ損傷則(式(2-120))中の

指数 b_1 は応力-破断時間線図から求められ、式(9-2)中の λ に等しいと考えられる。このとき、

$$\left. \begin{array}{l} \text{無酸素鋼} : \rho_s = 0.08 \text{ mm} \\ n = 14, \quad b_1 = 10 \end{array} \right\} \text{----- (10-1)}$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{S10C低炭素鋼} : \rho_s = 0.02 \text{ mm} \\ n = 15, \quad b_1 = 14 \end{array} \right\} \text{----- (10-2)}$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{S15CK低炭素鋼} : \rho_s = 0.03 \text{ mm} \\ n = 13, \quad b_1 = 11 \end{array} \right\} \text{----- (10-3)}$$

ここで、無酸素鋼およびS10C低炭素鋼で用いた2種類の切欠き(切欠き半径0.1mm および0.8mm)の「鋭さ」について議論しよう。2種類の切欠き材の切欠き半径 r_0 と切欠き底断面半径 a_0 との比は、

$$\left. \begin{array}{l} r_0 = 0.1 \text{ mm} : r_0/a_0 = 0.1/3 = 0.033 \\ r_0 = 0.8 \text{ mm} : r_0/a_0 = 0.8/3 = 0.267 \end{array} \right\} \text{----- (10-4)}$$

で与えられる。また、式(10-1)および(10-2)より、

$$\left. \begin{array}{l} \text{無酸素鋼} : \rho_s/a_0 = 0.0267 \\ \text{S10C低炭素鋼} : \rho_s/a_0 = 0.0067 \end{array} \right\} \text{(10-5)}$$

計算結果によれば、 $b_1 = n$ の場合のき裂発生時間比 $(R_{t_i})_{b_1=n}$ は、 $b_1 = n$ が大きければほとんど変化しない。したがって、式(10-1)あるいは(10-2)のように、 n が10を越えるような非常に大きな値

をとる場合の R_{t_i} は、 $b_i = n = 13$ の場合の結果と式 (8-19) より次のようにして求めることができる。

$$R_{t_i} = \left\{ (R_{t_i})_{b_i=n} \right\}^{b_i/n} \doteq \left\{ (R_{t_i})_{b_i=n=13} \right\}^{b_i/n} \quad (10-6)$$

図 8-2 (b) と式 (10-6) からわかるように、 ρ_s/a_0 が 0.0267 という大きな値をとる無酸素鋼においては、切欠き半径 0.1 mm ($r_0/a_0 = 0.033$) の切欠き材の R_{t_i} は、 $r_0/a_0 \rightarrow 0$ 、すなわちき裂材の R_{t_i} に近い値を示すので、この切欠きは 8.2 節で述べた「鋭い切欠き」と考えてよい。同様にして、S10C 低炭素鋼の切欠き半径 0.1 mm の切欠き材もほぼ「鋭い切欠き」の条件を満足している。これに対し、図 8-2 (b) および式 (10-6) からわかるように、切欠き半径 0.8 mm の切欠きは、平滑材 ($r_0/a_0 \rightarrow \infty$) に近い R_{t_i} 値を示しているので、十分「鈍い切欠き」と判断される。このことは、図 9-12 において切欠き半径 0.1 mm と 0.8 mm の切欠き材の破断時間の間に大きな差異があったことと結びつけて考えることができる。

「鋭い切欠き材」、すなわち切欠き半径 0.1 mm の切欠き材の破断時間比 R_{t_r} を求めてみよう。簡単のため、平滑材のき裂成長時間 $(t_p)_s$ が全寿命 $(t_r)_s = (t_i)_s + (t_p)_s$ に占める割合はきわめて小さいのでこれを無視し、さらに「鋭い切欠き材」のき裂成長時間はき裂材のそれにほぼ等しいと考える。式 (10-1)、(10-2)、(10-4) および (10-5) の値を用いると、図 8-2 (b)、式 (10-6) およびき裂成長解析結果より、破断時間比 R_{t_r} は次のようになる。

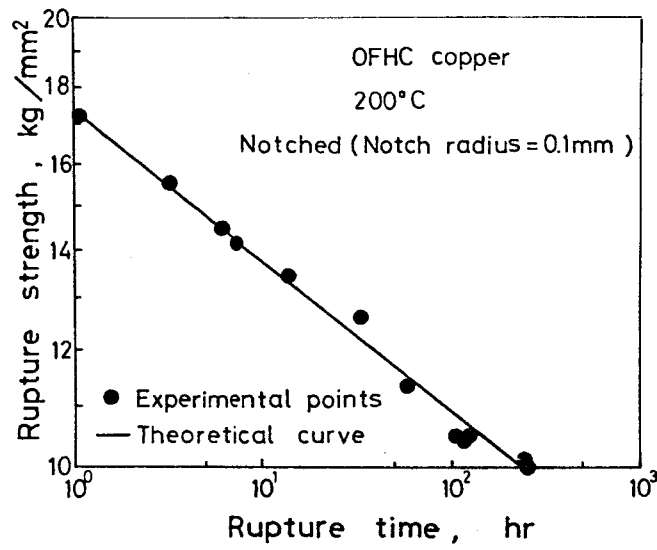
$$R_{t_r} = \frac{t_r}{(t_r)_s} \doteq \frac{t_i + t_p}{(t_i)_s} = R_{t_i} + \frac{t_p}{(t_i)_s}$$

$$\cong \left\{ (R_{t_i})_{b_i=n=13} \right\}^{b_i/n} + \frac{t_p}{(t_i)_s} \text{-----} (10-7)$$

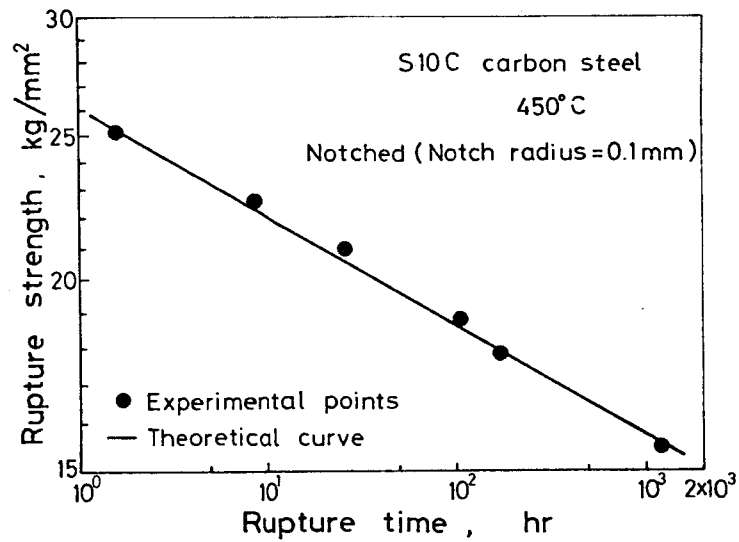
$$\left. \begin{array}{l} \text{無酸素銅} \quad : R_{tr} = 0.56 \\ S10C \text{ 低炭素鋼} : R_{tr} = 0.32 \end{array} \right\} \text{-----} (10-8)$$

平滑材の応力-破断時間線図を直線で近似し、これと式(10-8)に示した R_{tr} の解析値から求めた、切欠き半径 0.1 mm の切欠き材の応力-破断時間の関係と実験値との比較を図10-1(a) および (b) に示す。図より、解析に基づく推定曲線と実験値とは良く一致している。

次に、 R_{tr} の推定で用いたと同じ仮定をもとにして、無酸素銅の切欠き材のき裂の挙動を解析する。ただし、「き裂成長時間がき裂材のそれにほぼ等しい」という仮定は、切欠き半径 0.8 mm の「鈍い切欠き材」に対しては非現実的であると考えられるが、他にこれに代る適当な方法がないので、本研究では便宜上この仮定を用いることにする。解析結果は、実験結果と一緒にすでに図9-9に示されている。図より、粒内破壊の支配的である高応力側の実験結果は解析結果と比較的良く一致していると思われるのに対し、主として粒界型の破壊がみられる低応力側では両者の間に差があるように見える。これは、応力レベルの高低によって破壊様式が変化するにもかかわらず、解析で用いたクリーフ損傷則中の指数 b_i として一定の値を採用したことによると考えることもできる。しかし、現状ではデータ量が不足しており、詳細な議論は今後の研究にまたねばならない。



(a) 無酸素銅



(b) S10C低炭素鋼

図10-1 切欠き材の破断時間推定結果と実験値との比較

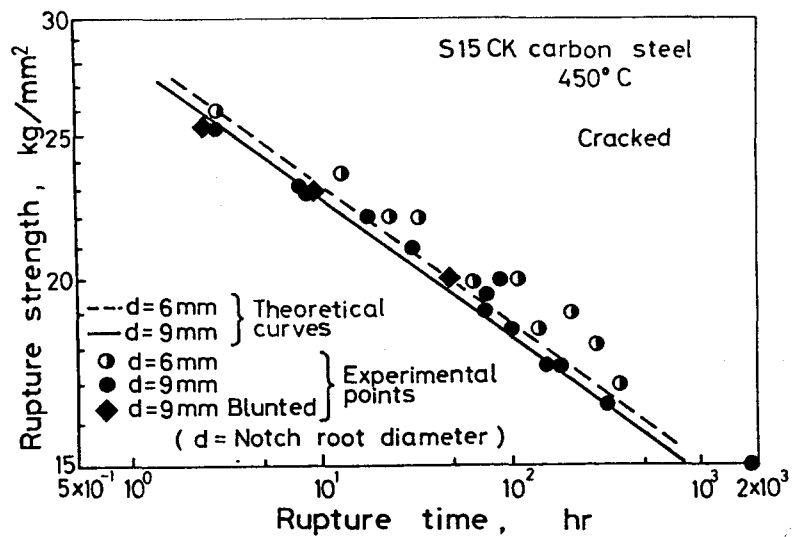
最後に、S15CK低炭素鋼のき裂材の R_{tr} を解析的に推定してみよう。き裂材の解析は、そのままの形で第8章で行なっているのので、切欠き材の R_{tr} の推定で用いたような仮定を設けなくても、式(10-3)の値を用いることによりただちに R_{tr} が求まる。すなわち、

$$\left. \begin{array}{l} \text{S15CK低炭素鋼} \quad d=2a_0 = 9\text{mm} : R_{tr} = 0.23 \\ \quad \quad \quad \quad \quad d=2a_0 = 6\text{mm} : R_{tr} = 0.28 \end{array} \right\} \text{----- (10-9)}$$

この R_{tr} 値と平滑材の破断試験結果より求めた、き裂材の応力-破断時間線図を図10-2に示す。図より、初期き裂底径9mmのき裂材の実験結果は解析結果(実線)とよくあっている。初期き裂底径6mmのき裂材の実験結果は9mmのき裂材のそれより長寿命側にある。この点に関しては上記解析結果と定性的に一致するが、定量的には解析と実験の両結果の間には若干の差があり、解析結果は実験結果の下限值を与えているようにみえる。

図10-2

S15CK低炭素鋼の
き裂材の破断時間推
定結果と実験値との
比較

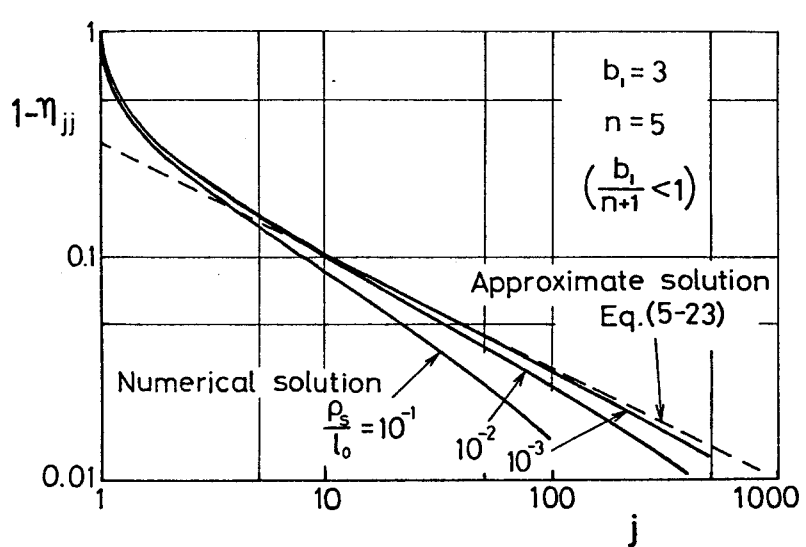


10・3 特異応力場を仮定して求めたき裂成長速度の近似解と 第6章および第7章のき裂解析結果との比較

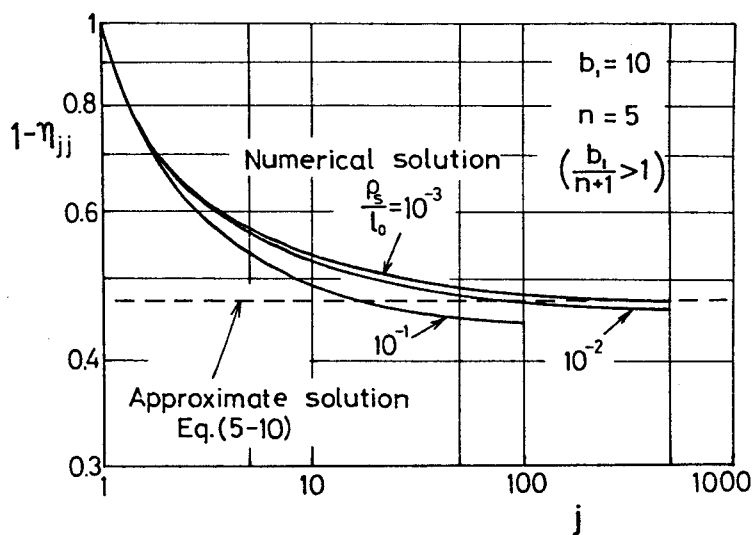
第5章においては、応力としてき裂先端近傍の特異応力場を仮定することにより、クリーフ損傷の蓄積を考慮したき裂成長速度の近似式を求めた。本節では、この解を用いて、縦せん断力を受ける双曲線き裂材および半無限体内を進展するき裂の挙動を求め、これを第6章および第7章の解析結果と比較する。

まず、半無限体内を進展するき裂について述べる。き裂が初期き裂より $(j-1) \rho_s$ だけ成長した時点、換言すれば、き裂先端が第 $(j-1)$ 点にあるときのき裂先端前方 ρ_s の点(第 j 点)のクリーフ損傷を η_{jj} で表わす。 η_{jj} の推移の例を図10-3に示す。図の実線は第7章の解析結果であり、破線は特異応力場を仮定したときの近似解(式(5-23)あるいは(5-10))である。図よりわかるように、近似解と数値解析結果はよく一致している。 $b_1/(n+1) < 1$ となる(a)の場合には、き裂成長量 $(j-1) \rho_s$ がほぼ $0.1 l_0$ より小さい部分、すなわち、 $\rho_s/l_0 = 10^{-3}$ の場合には $j < 100$ の部分においては、近似解と数値解析結果はとくに良く一致する。このことは、図7-3からわかるようにき裂先端前方 $0.1 l$ (l : き裂長さ)の部分の応力が特異応力場で近似できること、および図5-3のように式(5-23)あるいは(5-10)が特異応力場のもとにおけるき裂先端近傍のクリーフ損傷値の変化を良く表わしていることの2点から十分予想されることである。

次に、特異応力場の仮定に基づくき裂成長速度の近似式を用いて、半無限体内のき裂の成長速度を求める。まず、 $b_1/(n+1) < 1$ の場合について述べる。式(5-24)で与えられるき裂成長速度 dl/dt



(a) $b_1 = 3, n = 5 \left(\frac{b_1}{n+1} < 1\right)$



(b) $b_1 = 10, n = 5 \left(\frac{b_1}{n+1} > 1\right)$

図10-3 半無限体内を進展するき裂の前方における
損傷値推移の近似解と数値解との比較

を基準き裂成長速度 $(dl/dt)_s = A_s \tau_{no}^{b_1} l_0$ で除し、式(7-11)を用いると、

$$\frac{dl}{dt} / \left(\frac{dl}{dt} \right)_s = \Gamma \left(\frac{b_1}{n+1} \right) \Gamma \left(1 - \frac{b_1}{n+1} \right) (-\chi_1)^{\frac{b_1}{n+1}} (l/l_0 - 1)^{1 - \frac{b_1}{n+1}} \times (l/l_0)^{\frac{b_1}{n+1}} \text{----- (10-10)}$$

同様にして、 $b_1 / (n+1) > 1$ の場合には、

$$\frac{dl}{dt} / \left(\frac{dl}{dt} \right)_s = \zeta \left(\frac{b_1}{n+1} \right) (-\chi_1)^{\frac{b_1}{n+1}} (l_s/l_0)^{1 - \frac{b_1}{n+1}} (l/l_0)^{\frac{b_1}{n+1}} \text{----- (10-11)}$$

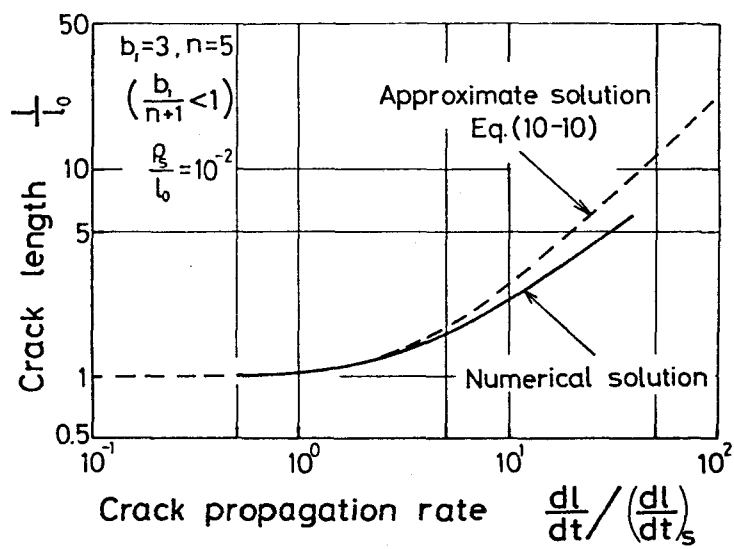
となる。

図10-4に近似解(式(10-10)あるいは(10-11), 破線)と第7章の数値計算結果(実線)との比較を示す。図より、近似解はき裂成長速度の挙動をかなり良く表わしているが、 $b_1 / (n+1) < 1$ の場合にはき裂成長量が大きくなると近似度が悪くなる。これは、図10-3(a)からも予想されるように、応力の特異項以外の項によるクリーフ損傷の蓄積の影響が顕著になるためであると考えられる。

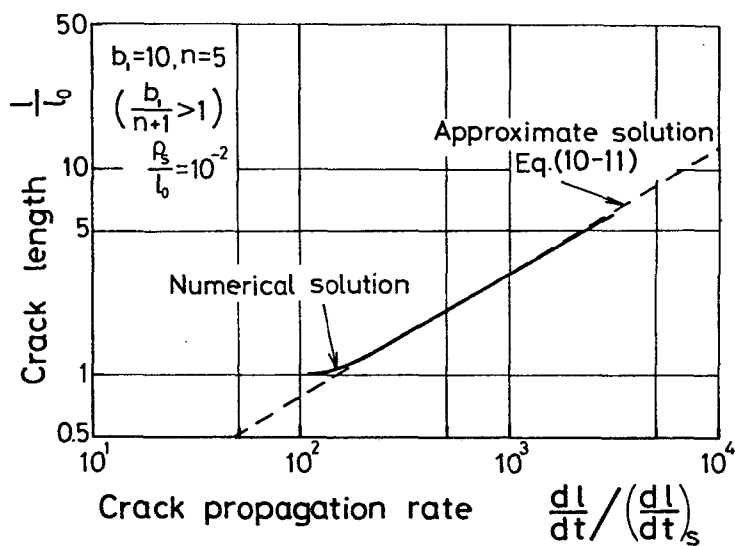
縦せん断力を受ける双曲線き裂材についても同様の取扱いができる。まず、き裂先端近傍の応力・ひずみの代表値である修正J積分 J' を求めよう。ここでは、式(2-82)を用いて J' を求める。系のポテンシャル U' は、第6章の結果を式(2-83)に代入して、

$$U' = -4 \frac{a^2 \tau_c \gamma_c}{n+1} \left(\frac{S}{2a\tau_c} \right)^{n+1} \left[\int_0^{\pi/2} \left\{ E_{\frac{n}{2}}(\lambda_2) \right\}^{-1/n} d\lambda_2 \right]^{-n} \text{----- (10-12)}$$

で与えられる。式(2-82)および(10-12)より、



(a) $b_1=3, n=5 \quad \left(\frac{b_1}{n+1} < 1\right)$



(b) $b_1=10, n=5 \quad \left(\frac{b_1}{n+1} > 1\right)$

図10-4 半無限体内を進展するき裂の成長速度の近似解と数値解との比較

$$2J' = \frac{\partial \Pi'}{\partial a} = \beta a \tau_n \dot{\gamma}_n \text{ ----- (10-13)}$$

ここに、

$$\beta = \frac{4(n-1)}{n+1} \left[\int_0^{\pi/2} \left\{ E_{\frac{n-1}{2}}(\lambda_2) \right\}^{-1/n} d\lambda_2 \right]^{-n} \text{ ----- (10-14)}$$

$$\dot{\gamma}_n = \dot{\gamma}_c (\tau_n / \tau_c)^n \text{ ----- (10-15)}$$

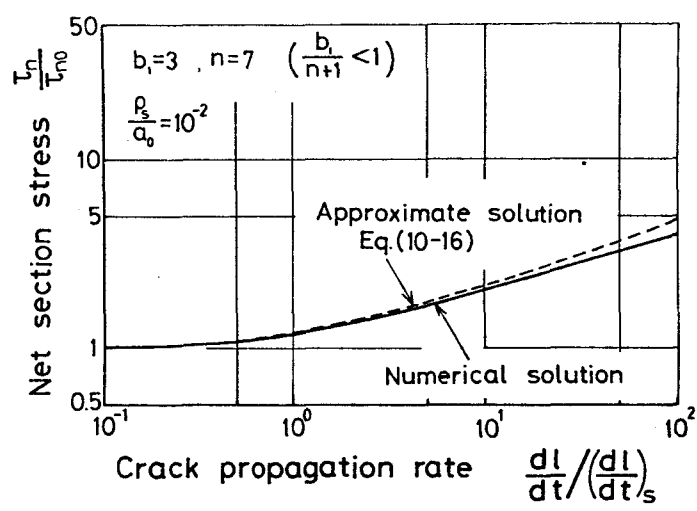
$b_1 / (n+1) < 1$ の場合、き裂成長速度 dl/dt を基準き裂成長速度 $(dl/dt)_s = A_s \tau_{n0}^{b_1} a_0$ で割った値は、式 (5-25)、(10-13)、(2-76) および (2-78) より、

$$\begin{aligned} \frac{dl}{dt} / \left(\frac{dl}{dt} \right)_s &= \Gamma\left(\frac{b_1}{n+1}\right) \Gamma\left(1 - \frac{b_1}{n+1}\right) \left\{ \frac{\beta n}{\pi(n+1)} \right\}^{\frac{b_1}{n+1}} \\ &\quad \times \left(\frac{a_0}{a} \right)^{b_1-1} \left(\frac{a_0}{a} - 1 \right)^{1 - \frac{b_1}{n+1}} \text{ ----- (10-16)} \end{aligned}$$

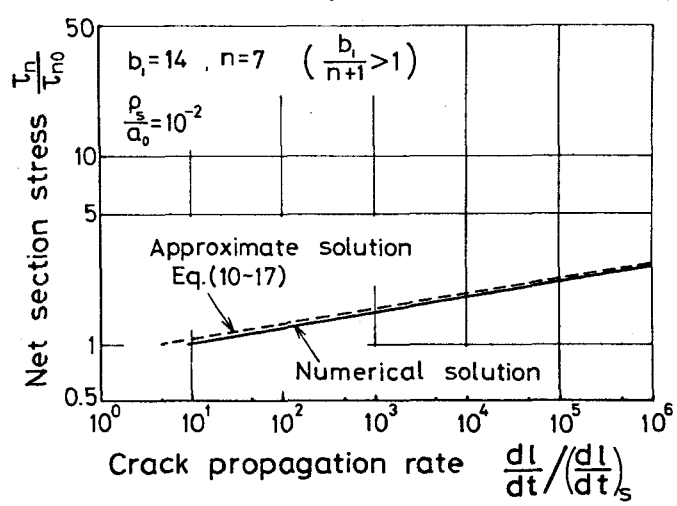
となる。同様にして、 $b_1 / (n+1) > 1$ の場合には、

$$\frac{dl}{dt} / \left(\frac{dl}{dt} \right)_s = \zeta\left(\frac{b_1}{n+1}\right) \left\{ \frac{\beta n}{\pi(n+1)} \right\}^{\frac{b_1}{n+1}} \left(\frac{\rho_s}{a_0} \right)^{1 - \frac{b_1}{n+1}} \left(\frac{a_0}{a} \right)^{\frac{n}{n+1} b_1} \text{ ----- (10-17)}$$

図10-5 に近似解 (式(10-16) あるいは (10-17), 破線) と第6章の数値解析結果 (実線) との比較を示す。図のように、第5章で求めたき裂成長速度の近似解は、数値解析結果と傾向的によく似た挙動を示している。なお、特に $b_1 / (n+1) > 1$ の場合、近似解と数値解とは必ずしも定量的には一致していない。このことの一因は、第6章の応力解析が近似を含んでいることにあると考えられ、今後



(a) $b_1=3, n=7 \quad \left(\frac{b_1}{n+1} < 1 \right)$



(b) $b_1=14, n=7 \quad \left(\frac{b_1}{n+1} > 1 \right)$

図10-5 双曲線き裂材のき裂成長速度の近似解と数値解との比較

検討が必要である^(注)。

以上より、特異応力場の影響の小さい浅いき裂材の極限であると考えられる半無限体内のき裂の成長速度は、第5章の特異応力場を基礎とした近似式により、ある程度定量的に評価できる。また、深いき裂材の極限であると考えられる双曲線き裂材のき裂成長速度の傾向も、同じ近似式の傾向と一致する。このように、第5章の近似解を用いることにより、き裂の深浅を問わず、種々のき裂の成長速度の様相を調べることができる。

10・4 引張りにおけるクリープき裂成長速度のデータと解析結果との比較

本研究においては、主として縦せん断型（モードⅢ型）き裂の挙動を解析した。しかしながら、実験の容易なこと、実用的価値等の点から、実験結果としては引張り型（モードⅠ型）き裂に関するものが圧倒的に多い^{(7)～(30)}。そこで、本節では、モードⅠ型き裂挙動に及ぼす諸パラメータの影響はモードⅢ型き裂におけるそれと類似であると考え、モードⅢ型き裂に対する第6章および第7章の解析結果を用いてモードⅠ型き裂成長速度のデータに影響を及ぼす因子について議論し、データの整理法について検討を加える。

(注) 第6章の解析結果によれば、 $n=3, 5, 7$ および9の場合におけるき裂先端近傍の応力は $r^{-1/n}$ (r : き裂先端からの距離) の特異性を有し、これは2・1・2項で結論された本来の特異性 $r^{-1/(n+1)}$ とは $n \rightarrow \infty$ の極限を除き食違ふ。この原因は、 τ_{13} のみが零でない応力成分である仮定したためであると考えられる。82頁脚注を参照のこと。

10.4.1 モードⅢ型き裂とモードⅠ型き裂との間の相似則

モードⅢ型き裂からモードⅠ型き裂への相似則は、特別な場合を除き厳密には成立しないが⁽¹⁰⁴⁾、破壊力学における経験則としてしばしば用いられている。たとえば、線形破壊力学においては、き裂先端近傍の塑性域寸法の影響の見積りに際して、この相似則が利用されている。McClintock⁽⁷⁸⁾は、不安定破壊に先行する安定的き裂成長を取扱うに際して、モードⅢの解析結果よりモードⅠの結果を推定し、推定値が実験値と定量的に一致することを見出だしている。弾性体中を進展するき裂の解析においても、この種の相似則の存在が示されている⁽¹⁰⁵⁾。また、石田⁽¹⁰⁶⁾は、直線上に分布するき裂群の弾性問題において、モードⅠ型き裂の応力拡大係数とモードⅢ型き裂のそれとの間に簡単な相似則が存在することを示している。

10.4.2 引張りにおけるクリープき裂成長速度の整理の現状

モードⅢ型き裂挙動解析に基づくモードⅠ型き裂成長速度のデータの解釈について述べる前に、モードⅠ型き裂成長速度の整理の現状についてふれておこう。現在よく用いられている整理法としては、(i) 正味断面公称応力 σ_n を用いる方法、(ii) 弾性の応力拡大係数 K_I を用いる方法があげられる。また、(iii) 修正J積分を用いる方法が Landesら⁽¹⁷⁾ および著者によって提案され、最近、(iv) 基準応力 (Skeletal point stress) を用いる方法⁽¹⁰⁷⁾ および (v) 完全塑性体を仮定したときのき裂部の応力 $(\sigma_n)_p$ を用いる方法が提案されている。

弾性の応力拡大係数 K_I を用いることを主張するものには、以下のようなものがある。Sivernsら^{(13)~(15)}は、焼入れ処理を施し延性

の低い $2\frac{1}{4}$ Cr-1Mo 鋼について片側切欠き平板試験片を用いた実験を行なっている。結果を図10-6に示す。図からわかるように、正味断面公称応力で整理するより弾性の応力拡大係数で整理したほうがばらつきは少ない。延性の大きな材料についても実験を行なっているが、その場合は正味断面公称応力で整理したほうが幾分良い結果が得られている⁽¹⁵⁾⁽¹⁰⁷⁾。また、小寺沢ら⁽¹⁶⁾は SUS304 ステンレス鋼の環状切欠き丸棒試験片および両側切欠き板試験片のき裂成長速度を求め、弾性応力拡大係数による整理法のほうが正味断面公称応力による整理法よりも両試験片間のき裂成長速度の差が小さい

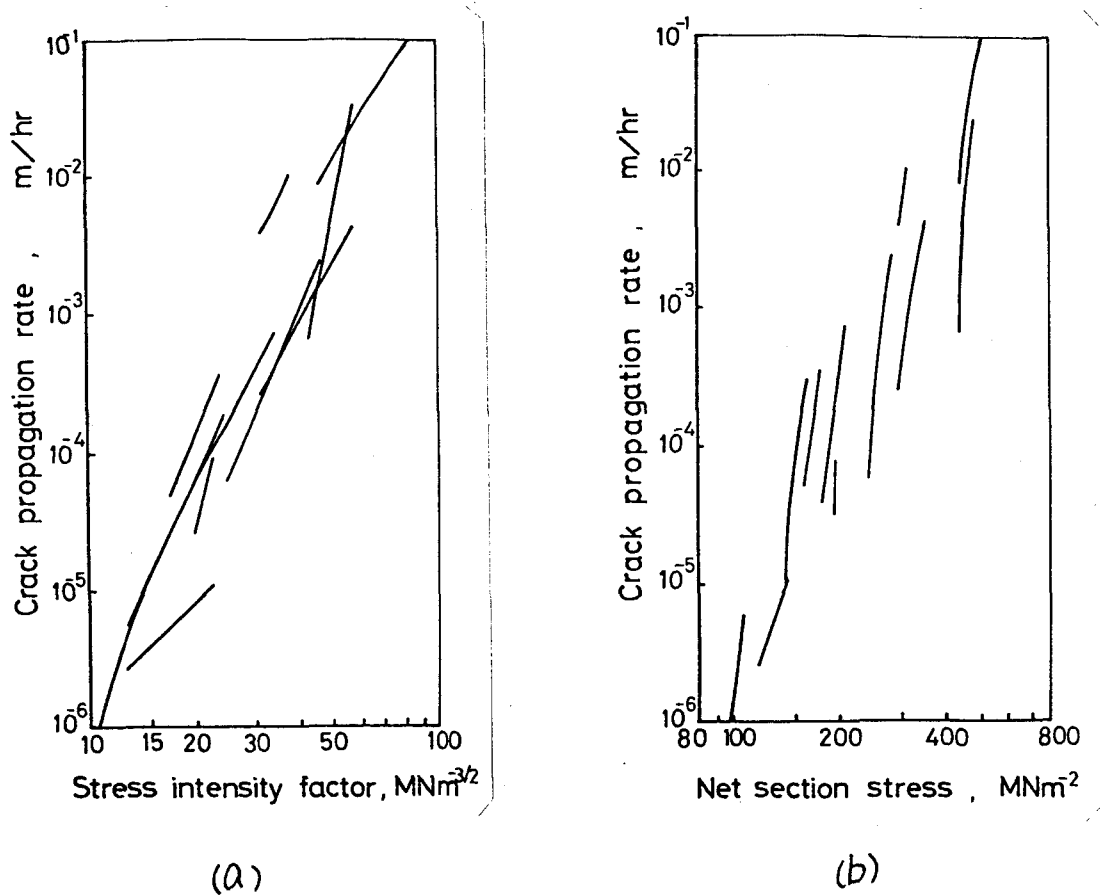
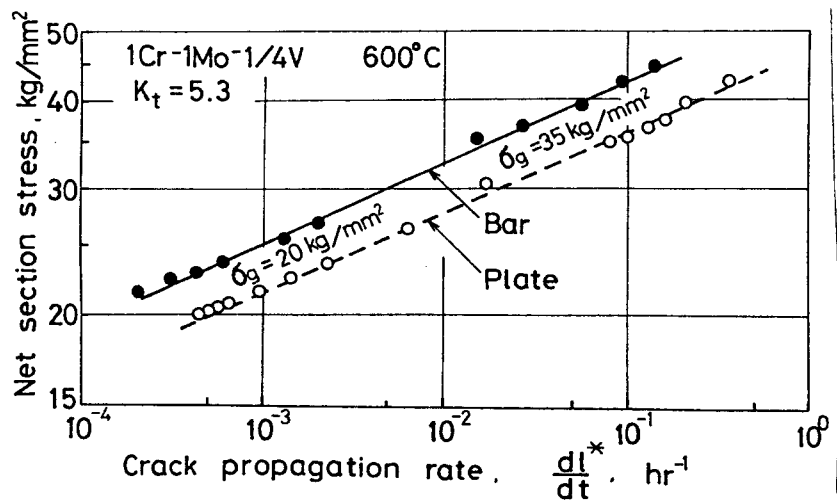


図10-6 モードI型き裂成長速度と K_I あるいは σ_n との関係 ($2\frac{1}{4}$ Cr-1Mo 鋼)⁽¹⁴⁾

と報告している。弾性の応力拡大係数 K_I による整理法は、このほか、銅のCT試験片について実験した坂田ら⁽²⁰⁾、アルミニウム合金のCT試験片を用いた Kashiwaya ら⁽²⁸⁾、炭素鋼のCT試験片および片側切欠き試験片におけるき裂成長を調べた Robson⁽²³⁾ によっても採用されている。また、Turner ら⁽²⁴⁾⁽²⁵⁾ は、改良形の二重片持ばり試験片を用いてアルミニウム合金 RR58 における弾性応力拡大係数一定の試験を行ない、き裂成長速度はき裂成長初期および最終破断近くでは一定にはならず、これらの中間の領域でのみほぼ一定になるという結果を得ている。

正味断面公称応力 σ_n による整理法を主張するものとして、まず Harrison ら⁽⁷⁾ は延性に富んだ 1Cr-1Mo-1/4V 鋼の中央切欠き板試験片に関する試験を行ない、 σ_n による整理法のほうが K_I を用いたものより優れていると報告している。大谷ら⁽⁸⁾⁽⁹⁾⁽¹¹⁾ によれば、図10-7 および 10-8 に示すように、1Cr-1Mo-1/4V 鋼の環状切欠き丸棒試験片と両側切欠き板試験片および SUS 304 ステンレス鋼の中央切欠き板試験片のき裂成長実験結果は、正味断面

図10-7
モードI型き裂
成長速度と σ_n と
の関係(1Cr-
1Mo-1/4V鋼)⁽⁸⁾



公称応力 σ_n を用いてよく整理できる。Nicholson ら⁽¹²⁾ は、片側切欠き板試験片と円孔を有する板試験片を用いて SUS304 ステンレス鋼を試験しており、 K_I による整理法を用いると両試験片のき裂成長速度曲線の傾きが異なりはらつきも大きいのに対し、 σ_n による整理法では両試験片の結果がほぼ一本の直線上に乗ると報告している。

このほか、大路ら⁽¹⁸⁾ は、1Cr-1Mo-1/4V 鋼の中央切欠き板試験片について試験を行ない、図10-9に示すような結果を得ている。図10-10は、同じく大路ら⁽¹⁹⁾ が、片側切欠き試験片 (SEN)、両側切欠き試験片 (DEN)、中央切欠き試験片 (CN) および CT 試験片を用いて SUS304 ステンレス鋼に対して行なった試験結果を弾性応力拡大係数 K_I および正味断面公称応力で整理したもの

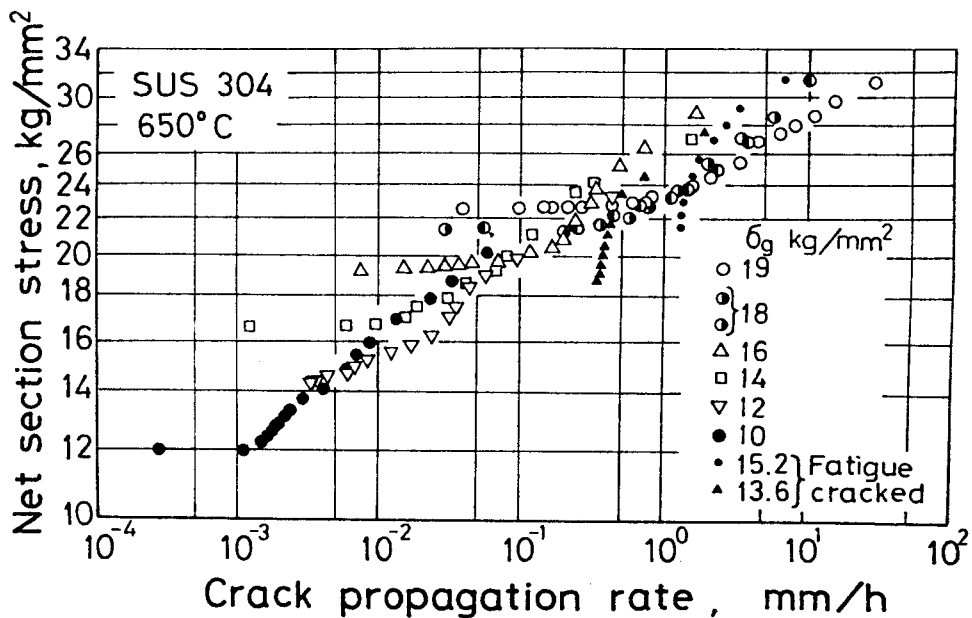


図10-8 モードI型き裂成長速度と σ_n との関係 (SUS304 ステンレス鋼)⁽⁹⁾

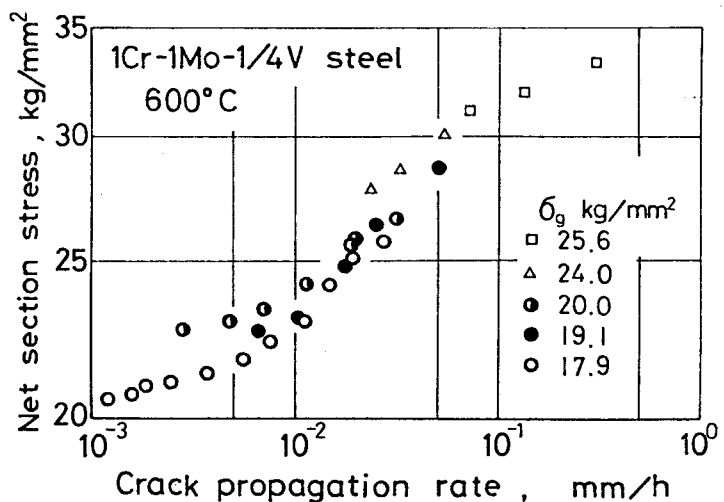
である。なお、SENおよびCT試験片については、正味断面公称応力として曲げと引張りの公称応力の和をとっている。また、図中の l_0 は試験片に導入したスリットの長さである。図より、正味断面公称応力、弾性応力拡大係数いずれを用いて整理しても、同じ型の試験片によるデータのばらつきは小さいが、型の違う試験片、たとえばCNとCT試験片の結果は同一線上にはのらない。

また、Landesら⁽¹⁷⁾は、Discaloyの中央切欠き試験片およびCT試験片を650°Cで実験し、 K_I あるいは σ_n による整理法よりも修正J積分 J' による整理法のほうが優れていると主張している。

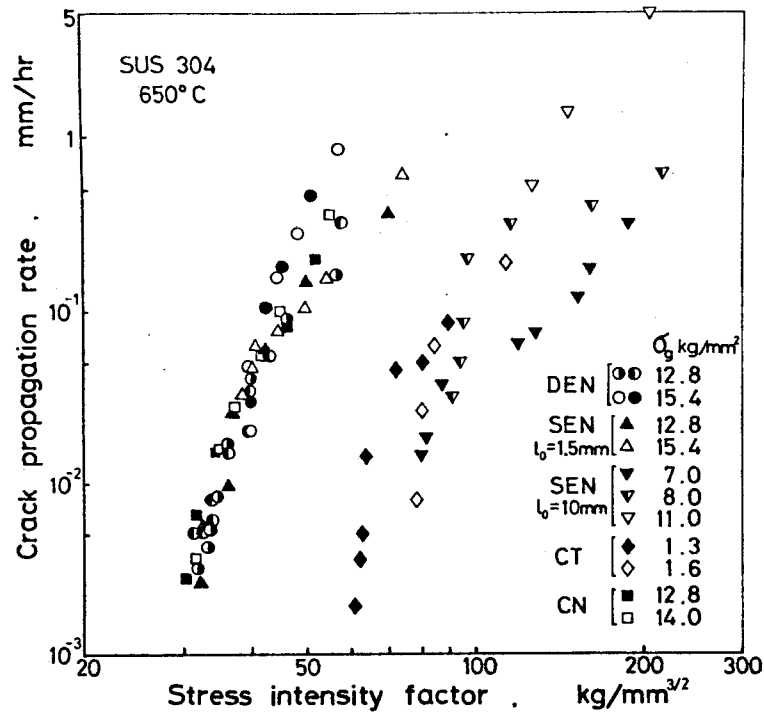
以上まとめると、 K_I による整理法が優れているとするものに、Sivernsら^{(13)~(15)}、小寺沢ら⁽¹⁶⁾、 σ_n による整理法を支持するものにHarrisonら⁽⁷⁾、大谷ら⁽⁸⁾⁽⁹⁾⁽¹¹⁾、Nicholsonら⁽¹²⁾、 J' を用いる整理法を主張するものにLandesら⁽¹⁷⁾があり、大路ら⁽¹⁸⁾⁽¹⁹⁾は、いずれの整理法が良いかは、にわかには判じ難いとしている。

図10-9

モードI型き裂成長速度と σ_n の関係(1Cr-1Mo-1/4V鋼)⁽¹⁸⁾



(a)



(b)

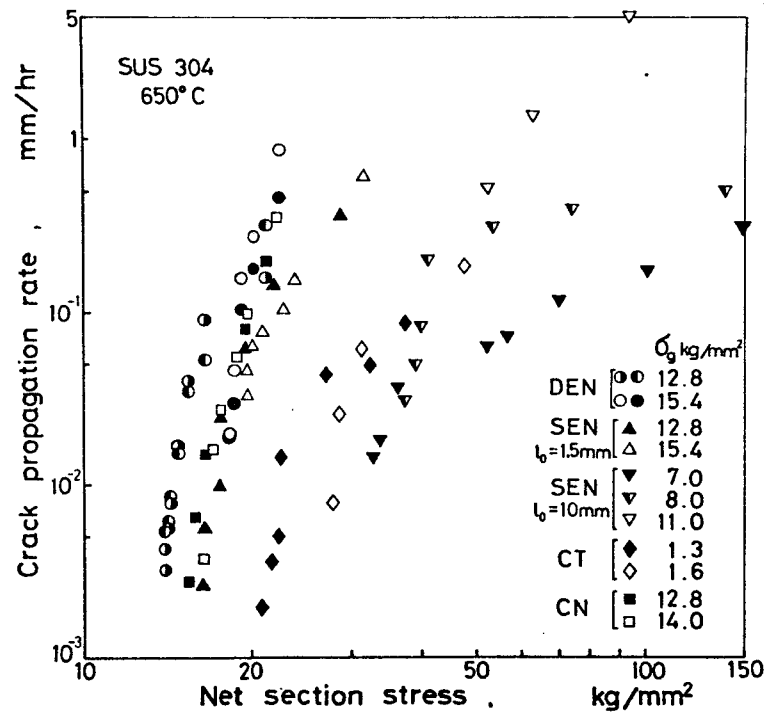


図10-10 モードI型き裂成長速度と K_I あるいは σ_n との関係 (SUS 304 ステンレス鋼)⁽¹⁴⁾

10.4.3 モードⅢ型き裂成長解析結果によるモードⅠ型き裂成長速度のデータの解釈

本項では特にき裂成長速度曲線にみられる特徴的傾向に着目し、その合理的解釈を試みる。

10.4.2項に示した実験結果の特徴のひとつは、き裂成長初期のき裂成長速度は非常に小さく、そしてき裂成長とともに加速され、その結果き裂成長速度曲線がわん曲しているように見えることである。このことは、図6-10あるいは図7-7の曲線の様相と同じであり、履歴が影響を及ぼしているものと考えられる。

次に、試験片形状および寸法が同じで応力レベルのみが互いに異なる実験に関するき裂成長速度曲線は、相互によく似た形をしており、適当な方向に平行移動すればちょうど重なり合うように見える。これは、たとえば図6-7(b)の様相と似ている。そこで、図6-7(a)のき裂成長速度に関するマスター・カーブ表示から図6-7(b)のなまのき裂成長速度と各種力学量間の関係を求めたときちょうど反対の過程をたどり適当な無次元化を行なえば、モードⅠ型き裂成長速度のデータはマスター・カーブ上に整理できると考えられる。これは、3.2節における指摘と一致する。大谷ら⁽¹⁰⁾⁽¹¹⁾は無次元表示によりき裂成長速度を整理し、マスター・カーブ表示が有効であることを示している。

図10-8に示した中央切欠きを有する板試験片に関する試験結果においては、正味断面公称応力 $\sigma_n = 23 \text{ kg/mm}^2$ 付近で曲線の勾配に大きな変化がみられる。これは、第6章の図6-12に示した破壊様式の遷移がある場合のき裂成長速度の挙動と同様の様相を呈している。事実、平ら⁽⁹⁾は上記応力付近で粒界破壊より粒内破壊への遷

移のあることを観察している。

さらに、図10-8における $\sigma_g = 15.2$ および 13.6 kg/mm^2 の場合の結果は、疲れ予き裂試験片を用いて得られたものであり、その様相は他の試験片による実験結果の様相と異なり、き裂成長初期におけるき裂成長速度の加速はみられず、図6-9の $b_s < b_1/(n+1)$ の場合の様相、すなわち初期切欠きあるいはき裂先端近傍の損傷値集中が第5章で述べた定常分布形よりも著しい場合の様相と似ている。弾性と塑性応力場のき裂先端からの距離 r に対する依存性を考慮すれば、近似的に弾性特異応力分布が実現していると思われる常温疲れによって初期き裂を導入することにより、このような著しい損傷値集中がもたらされたと考えられ、実験結果の合理的解釈が可能である。なお、同じく疲れで初期き裂を導入した試験片を用いて行なった S15C 低炭素鋼の実験結果⁽¹¹⁾ も上記と同じ傾向を示している。

以上のように、モードⅢ型き裂に対する解析結果より、モードⅠ型き裂の実験結果における各種因子の影響を合理的に説明づけることはある程度可能である。

10・4・4 き裂成長速度の支配力学量について

10・4・2項では、き裂成長速度がある場合には正味断面公称応力 σ_n で、別の場合には応力拡大係数 K_I でそれぞれよく整理できることを述べた。本項ではモードⅢ型き裂成長解析結果をもとに、モードⅠ型クリープき裂の成長速度を支配する力学量に関する議論を行なう。

第5章～第7章の結果によれば、 $b_1/(n+1)$ が1より大きいか、

あるいは小さいかによってき裂成長速度 dl/dt の様相がかなり異なる。すなわち、 $b_1/(n+1) > 1$ の場合には、き裂がある程度成長すると、 dl/dt は塑性の応力拡大係数 K_G のみで表わされ、見かけ上履歴の影響はない^(注)。これに対し、 $b_1/(n+1) < 1$ の場合には、たとえき裂による応力集中が大きく試験片各点の応力が特異項のみで近似できると仮定しても、き裂成長に伴い履歴の影響(式(5-30)の $(l-l_0)^{1-b_1/(n+1)}$ に対応する)が顕著となる。実際の金属材料においては、限界ひずみ条件(式(2-105)あるいは(2-123))を採用しようと($b_1/(n+1) = n/(n+1) < 1$)、限界粒界ひずみ条件(式(2-108)あるいは(2-125))を採用しようと($b_1/(n+1) = n_b/(n+1) < n/(n+1) < 1$)、 $b_1/(n+1) < 1$ になるものと考えられる。そこで、以下では $b_1/(n+1) < 1$ として解析結果と実験データとを比較する。

まず、履歴の影響が大きい $b_1/(n+1) < 1$ の場合には、実験に供する試験片の形状によって、 dl/dt が K_I でよく整理できたり、 G_n でよく整理できたりすることがありうることを指摘しておく。実際に実験に使用される試験片の寸法は有限であるため、そのき裂成長挙動は、第6章で取扱ったような無限に深い切欠き材あるいはき裂材と、第7章で取扱ったようにリガメント長さが無限大であるような極度に浅い切欠き材あるいはき裂材との中間的特性を示すと考えられる。しかも、ひとつの試験片のき裂成長挙動においても、き

(注) 半無限体内のき裂のように、応力が特異項で近似できる領域が狭い場合には、特異項以外による損傷が蓄積され次第に履歴の影響も現われてくるが、図10-4(b)から推察する限りではこの影響はさほど大きくない。

裂の成長に伴い、き裂先端近傍の応力場の強さを表わす K_I の変化が小さく、したがって履歴の影響が相対的に大きい浅いき裂に近い特性から、正味断面減少により K_I が著しく変化し履歴の影響が相対的に小さくなるような深いき裂に近い特性に変化していく。試験中、き裂長さ²と板幅の比が 0.16 から最高 0.5 まで変化するような図 10-8 の実験結果などにおいては、き裂成長挙動はどちらかと言えは、深いき裂材の解析結果(図 6-7)と同様の様相を呈し dL/dt は σ_n でよく整理できると考えられ、また事実そのような傾向を示している。これに対し、試験中のき裂長さ²と板幅の比が 0.1 から 0.2 程度ぐらいにしか変化しない図 10-6 の場合のき裂の様相は、浅いき裂材の様相(図 7-5)に近いと予想され、 σ_n よりも K_I でよく整理できることもありうると思われる。

なお、図 10-6 に示した Siverns らの実験結果において、 K_I による整理のほうが σ_n による整理よりばらつきが小さくなる理由としては、上記の試験片形状のほか以下のような曲げ応力の影響があげられる。すなわち、Siverns らが実験で用いた試験片は片側切欠き試験片であり、き裂の成長に伴い、曲げ応力が引張り応力に比べて大きくなっていく。したがって、Siverns らが行なっているように曲げ応力を考慮していない単なる正味断面公称応力 σ_n を用いることは不合理であり、何らかの形で曲げ応力を考慮する必要がある。大路ら⁽¹⁹⁾は、引張りにおける正味断面公称応力は完全塑性体におけるき裂部の応力を表わしているという解釈に立ち、たとえば曲げ応力が加わるような片側切欠きあるいは CT 試験片では引張りの σ_n に対応する力学量として単なる正味断面公称応力ではなく前述の $(\sigma_n)_p$ を用いるべきであると指摘している。片側き裂材

においては、試験中の $(\sigma_n)_p$ の変化量は単なる正味断面公称応力 σ_n の変化量より大きいと考えられ、したがって図10-6(b)より、 dl/dt を $(\sigma_n)_p$ で整理したときのばらつきは σ_n で整理したときのそれより小さくなると考えられる。

以上のように、 $b_1/(n+1) < 1$ となる場合のクリーフき裂成長速度には力学量と履歴の影響が交錯しているので、定常クリーフの仮定に基づく本解析結果のようにき裂先端近傍の応力が K_I で代表されるような場合においても、き裂成長速度がある場合には σ_n によって、また別の場合には K_I によってよく整理できるように見えることがある。したがって、10・4・2項に示した従来の報告にみられるような、き裂成長速度を単に K_I , σ_n 等で整理した結果からただちにき裂成長速度の支配力学量を求めることはできない。何らかの形で履歴の影響を取除いておく必要がある。

これには現在のところ以下に示すような二・三の方法が考えられる。まず、第5章の特異応力場の仮定に基づくき裂成長挙動解析の結果によれば、き裂成長速度に及ぼす履歴の影響は、き裂成長量 $(l-l_0)$ の $(1-b_1/(n+1))$ 乗に比例する。そこで、実際の試験片に及ぼす履歴の影響もこれと同じであると仮定すれば、き裂成長速度を $(l-l_0)^{1-b_1/(n+1)}$ で除した値と種々の力学量との間の相関をとることにより、支配力学量に関する検討が行なえるものと考えられる。

次に、深いき裂材においては、正味断面減少によりき裂先端近傍の応力場の強さが著しく増大する。したがって、き裂成長速度に及ぼす履歴の影響が著しいき裂成長初期を除けば、履歴の影響は相対的に小さくなり、き裂成長速度の変化はき裂先端近傍の応力場の強

さの変化とほぼ対応づけられると考えられる。このように、深いき裂材の実験資料（ただし、き裂成長初期を除く）をもとに支配力学量に関する議論が行なえる。この場合、有力な力学量のひとつである修正J積分 J' は 2.2.4 項の結果を用いれば簡単に求められるので、この点においても有利である。

なお、本論分で提案している修正J積分 J' および塑性の応力拡大係数 K_G の解析値はほとんど得られていないが、有限要素法を用いることにより、任意形状の試験片の K_G および J' を求めることができる⁽¹⁰⁸⁾⁽¹⁰⁹⁾。たとえば、平面ひずみ状態における中央き裂板試験片の K_G は Goldman ら⁽¹¹⁰⁾ によって求められている。

したがって、今後、 dl/dt の力学面の支配量として、 K_I 、 G_n 、 $(G_n)_p$ 、 K_G あるいは J' いずれが適当であるかが実験的に吟味され、ひいては本研究の当否の検討が可能な状態に近い将来なるものと期待される。

10.5 き裂成長速度における寸法効果

き裂成長速度における寸法効果は、実験室で行なわれる限られた寸法の試験片に対する試験結果から実際に使用される部材の強度を推定するうえで重要である。本節では、この点について、第3章、第5章、第6章および第7章の結果を基礎にして、力学的解析の立場より論じてみよう。

まず、 $b_1/(n+1) > 1$ の場合について述べる。この場合のき裂成長速度 dl/dt は ほぼ式(5-28) で与えられる。試験片の基準寸法を a^* とする。 ρ_s は材料固有の特性値であるので a^* が変化しても一定である。式(6-25) および(7-11) に例が示されているよ

うに、塑性の応力拡大係数 K_{σ} は a^* の $1/(n+1)$ 乗に比例する。したがって、相似な試験片に加わる公称応力が同じであれば、 dl/dt は試験片寸法 a^* の $b_1/(n+1)$ 乗に比例することになる。

次に、 $b_1/(n+1) < 1$ の場合を考える。応力として特異応力場を仮定すれば、 dl/dt は式(5-30)で表わされる。 dl/dt を基準き裂成長速度 $(dl/dt)_s$ で除した値を考えると、引張りにおいては、

$$\frac{dl}{dt} / \left(\frac{dl}{dt}\right)_s \propto \left(\frac{l}{a^*} - \frac{l_0}{a^*}\right)^{1 - \frac{b_1}{n+1}} \left\{ \frac{K_{\sigma}}{\sigma_{no} (a^*)^{1/(n+1)}} \right\}^{b_1}$$

----- (10-18)

となる^(注)。ここに、 σ_{no} は初期断面公称応力である。式(10-18)右辺の中の $K_{\sigma} / \{ \sigma_{no} (a^*)^{1/(n+1)} \}$ は試験片形状が定まれば、 l/a^* のみの関数として書表わすことができる。したがって、無次元化したき裂成長速度 $dl/dt / (dl/dt)_s$ は l/a^* のみの関数となり、特性寸法による影響項 P_s/a^* には依存しない。よって、試験片寸法 a^* の異なる、すなわち P_s/a^* の異なる試験片を用いて試験を行っても、そのデータは一本の $dl/dt / (dl/dt)_s - l/a^*$ のマスター・カーブ上に整理できることになる。これは近似解(5-30)を用いて得られた結果であるが、双曲線き裂材に対する解析結果(図6-10(a))および半無限体内のき裂に対する解析結果(図7-7(a))はこれを支持している。このように、 $dl/dt / (dl/dt)_s$ は P_s/a^* に依存せず、 l/a^* のみの関数となる。したがって、

(注) 縦せん断負荷の場合には、式(10-18)の中の σ_{no} を τ_{no} で置換すればよい。

$(dl/dt)_s$ が a^* に比例することに留意すれば、公称応力が同じ相似試験片の dl/dt は a^* に比例する。

以上まとめて、 $b_1/(n+1) > 1$ の場合には、 dl/dt は試験片の基準寸法 a^* の $b_1/(n+1)$ 乗に、 $b_1/(n+1) < 1$ の場合には、 dl/dt は a^* にそれぞれ比例することになる。

10・6 進展するクリーフき裂解析および弾性ひずみの寄与について

本研究で提案した力学的解析においては、き裂は段階的に特性寸法 ρ_s が成長し、き裂が成長する瞬間を除いてはき裂は静止していると考えている。そこで、いまき裂が動いているとして取扱った場合について考えてみよう。

一般に静止き裂 (Standing crack) の応力・ひずみ解析と進展き裂 (Propagating crack あるいは Travelling crack) の解析結果との間には差異のあることが指摘されている⁽⁷⁸⁾⁽¹¹¹⁾。しかしながら、本解析で用いているような定常クリーフ則 (式(2-7)~(2-9)) のもとではき裂成長に伴う残留応力はなく、したがって、進展き裂の応力は各時点の負荷および外部形状のみで決まり、静止き裂に対する解がそのまま使える。よって、McClintockの手法⁽⁷⁹⁾に倣い、き裂が絶えず連続的に成長し、き裂先端より特性寸法 ρ_s だけ前方の点のクリーフ損傷がつねに1に等しくなるような速さでき裂が成長するという仮定に基づくき裂成長解析を行なっても、き裂が段階的に進むとする本解析の結果とほとんど違わない結果が得られると予想される。

定常クリーフ則 (式(2-7)~(2-9)) の代りに、弾性ひずみをも

考慮した構成式を用いると多少様子が変わってくる。すなわち、応力に特異性のあるき裂先端近傍においては、き裂の進展に伴い急激な負荷あるいは除荷が起こり、これにより、弾性ひずみが著しい変化をみせ、弾性ひずみによるひずみ速度が全ひずみ速度中の大きな部分を占めると思われる。しかし、厳密な議論はできないが、弾性ひずみによるひずみ速度とクリープによるひずみ速度の特異性を比較すれば、このような弾性ひずみの支配的な領域は、き裂成長速度が十分遅ければ、き裂先端近傍の非常に限られた範囲であると考えられる。ここで、小規模降伏と同様の考え方を適用すれば、弾性ひずみが大きなき裂先端のごく近傍の応力・ひずみは、この領域を囲む領域の塑性の応力拡大係数 K_0 によって支配されると考えられる^(註)。したがって、き裂先端近傍の弾性ひずみの寄与を考慮したき裂成長解析を行っても、本解析結果とほぼ同じ結果が得られると考えられる。

次に、上記のことと関連して、弾性ひずみがき裂成長挙動に大きな影響を及ぼすと考えられるもうひとつの場合、すなわち、クリープき裂先端近傍のクリープ変形の著しい領域の大きさが、試験片寸法に比べて十分小さい場合を考える。この場合は、ちょうどき裂の弾塑性解析における小規模降伏に相当し、き裂先端近傍の応力・ひずみは弾性の応力拡大係数によって代表させることができる。したがって、この場合のき裂成長速度は、第5章の解析において $n=1$ とおいた場合のそれにほぼ相当する。一般に、クリープ損傷則中の指数 b_1 は大きいので、 $b_1/(n+1) = b_1/2 > 1$ が満足さ

(註) これは小規模弾性とでも呼ぶべき概念であろう。

れていると考えられる。よって、第5章の結果より、この場合のき裂成長速度は弾性の応力拡大係数の b 乗に比例することになり、坂田ら⁽²⁰⁾の指摘と一致する。

10・7 結言

本章では、第2章～第9章で得られた結果を総合的に比較・検討し、以下の結論を得た。

- (1) 引張り負荷のもとにおいては、切欠き試験片はしばしば切欠き強化を呈するが、強化の力学的要因は、切欠き底における塑性拘束、および大変形に伴う形状変化（特に断面積減少）のふたつである。
- (2) 切欠き材あるいはき裂材の破断特性およびき裂成長特性をねじりクリープ破壊に対する力学的解析を用いて推定し、これを実験値と比較した結果、解析による推定結果は実験値をよく反映していることが明らかとなった。
- (3) 特異応力場の仮定に基づく近似的き裂成長解析結果（第5章）は、第6章で扱った双曲線き裂材および第7章で扱ったき裂を有する半無限体におけるき裂成長挙動をよく表わしており、き裂成長挙動を把握するうえで簡便かつ有用であることが明らかとなった。
- (4) モードⅢ型き裂とモードⅠ型き裂との間の経験的相似則を用いて、第5章～第7章のモードⅢ型き裂を主対象とするき裂挙動解析結果をもとに、モードⅠ型き裂の実験結果に及ぼす各種因子の影響の合理的解釈を示すとともに、実験データの整理方法についても議論した。

- (5) 相似な試験片に同じ公称応力が加わっているときのき裂成長速度は、 $b_1/(n+1) > 1$ の場合は試験片寸法の $b_1/(n+1)$ 乗に、 $b_1/(n+1) < 1$ の場合は試験片寸法にそれぞれ比例すると予想される。

第11章 結論

本論文は、クリーフき裂挙動を解析的に予測するひとつの手法を提案し、この手法に基づいて、主として縦せん断およびねじり負荷のもとにおける切欠き材およびき裂材のクリーフき裂挙動を解析・議論したものである。

本手法の基本は、切欠き材およびき裂材の定常クリーフ応力・ひずみ解析に、一般性のある破壊条件を組合わせたものである。構成式としては、「ひずみ速度が応力の n 乗に比例する」とするNorton型の定常クリーフ則を用いた。破壊条件としては、今までに提案されている破壊の条件あるいは破壊の物理的・力学的モデルの多くを形式的に包含し、かつ非常に簡単で解析に用い易い形を有する、すなわち「損傷の時間的変化率が応力の b 乗に比例する」とするクリーフ損傷則を提案し、これを用いた。

解析の対象としては、主として (i) 深いき裂(切欠き)挙動を代表する 縦せん断負荷のもとにおける双曲線き裂(切欠き)を有する柱、(ii) 浅いき裂挙動を代表する 縦せん断負荷のもとにおけるき裂を有する半無限体、および (iii) 実験的に実現しやすく実用性のある ねじり負荷のもとにおける環状双曲線切欠き(き裂)丸棒、の三つを取上げた。

本研究の結果、以下のことが明らかとなった。

- (1) 縦せん断あるいはねじり負荷のもとにおける切欠き材の破断強度に関する一般的議論より、き裂が最小断面上で発生・成長して破断に至る場合には、金属学的な強化あるいは弱化の機構が作用しなければ、切欠きクリーフ破断強度は本研究で用いた

クリーフ損傷則中の指数 b_1 のみに依存し、 $b_1 > 1$ の場合には切欠き弱化、 $b_1 < 1$ の場合には切欠き強化となり、 $b_1 = 1$ の場合には強化も弱化も起こらないことが解析的に証明される。通常材料では $b_1 > 1$ であるので、切欠き弱化が支配的になることになる。

また、縦せん断およびねじり負荷と引張り負荷とによる力学的相違点に関する議論より、引張りによる切欠きクリーフ破断における切欠き強化の力学的要因は、切欠き底における塑性拘束および大変形に伴う形状変化(断面減少)であることが明らかとなった。

(2) 次元解析により、き裂発生および成長に影響を及ぼす因子を抽出するとともに、解析結果の表示法を示した。同一形状の試験片によるき裂成長速度の資料については、適当な無次元化量をとることによりマスター・カーブ表示ができることを明らかにした。

(3) き裂先端の非線形特異応力場に基づく近似的き裂成長解析を行なった結果、き裂成長速度は、クリーフ指数 n とクリーフ損傷則中の指数 b_1 によって定まる $b_1/(n+1)$ の値に応じて異なった特性を示すことが明らかとなった。すなわち、

$b_1/(n+1) > 1$ の場合には、き裂が十分成長すれば履歴の影響はある定常状態に収束し、き裂成長速度は塑性の応力拡大係数 K_0 あるいは本論文で提案した修正J積分 J' のみの関数として表現できる。これに対し、 $b_1/(n+1) < 1$ の場合にはき裂成長速度は、き裂先端近傍の特異応力場の強さを表わす K_0 あるいは J' のみの関数とはならず、き裂先端近傍の損傷

の蓄積に基づく履歴が顕著な影響を及ぼす。

同一公称応力下の相似試験片のき裂成長速度に対する寸法効果については、 $b_1/(n+1) > 1$ の場合にはき裂成長速度は試験片基準寸法の $b_1/(n+1)$ 乗に、 $b_1/(n+1) < 1$ の場合には試験片基準寸法に比例する。

- (4) 縦せん断負荷のもとにおける双曲線き裂(切欠き)および半無限体内のき裂に対する解析を行ない、(2)および(3)の結果を参照して解析結果を整理し、各種因子の影響を明らかにした。

前項のき裂先端近傍の特異応力場を仮定した解析結果は、本項の解析結果の傾向を少なくとも定性的にはよく表わしており、高温クリーフき裂挙動の解析にもこのような近似手法の有効なことが明らかとなった。

- (5) 環状双曲線切欠き材およびき裂材のき裂発生および成長解析を行ない、種々の因子の影響を明らかにした。これらの解析結果をもとにクリーフ破断寿命とクリーフき裂成長挙動を予測し、切欠き弱化が支配的となることを示した。

- (6) 本解析手法の有効性を実証するため、切欠き材およびき裂材のねじりクリーフ破断試験を、無酸素銅および2種類の低炭素鋼を用いて実施した。実験の結果、これらの材料は引張り応力下では切欠き強化を呈することが報告されているにもかかわらず、ねじり負荷のもとでは理論的予測通り切欠き弱化が支配的となることが明らかとなった。さらに、前項の環状双曲線切欠き材およびき裂材に対する力学的解析から予測したそれらの破断寿命推定値ならびにき裂成長特性は、実験結果とよく一致した。

(7) 本解析の有効性の検討の他のひとつの方法として、モードI型き裂とモードIII型き裂の挙動間の経験的相似則を援用することにより、モードIII型き裂挙動解析結果とモードI型き裂の実験結果との比較を試みた。本研究の解析結果から予測される各種因子の影響は実験結果とよく対応することが示された。

以上のことから、本論文で提案したクリーブき裂挙動に対する力学的解析手法は、実際の現象を定量的あるいは定性的によく表わしており実用的にきわめて有効であるのみならず、基礎となる仮定が単純かつ一般性を持ち、また解析的に利用し易い形が採用されているため、クリーブき裂挙動全般に対する見通しを得るうえでも有効であると考えられる。

参考文献

- (1) New Investigations Relating to Stress Concentrations Under Creep Conditions, Trans. ASME, Ser. D, 84 (1962), 207.
- (2) Symposium on Strength and Ductility of Metals at Elevated Temperature, ASTM STP 128, (1952).
- (3) Manjoine, M. J., Joint International Conference on Creep, IME, (1963), 7-37.
- (4) Goldkoff, R.M. and Brothers, A. J., Trans. ASME, Ser. D, 90 (1968), 37.
- (5) 大路・小倉・康, 日本機械学会論文集, 40-333 (昭49-5), 1279.
- (6) Ohji, K., Ogura, K. and Kang, S.R., Proc. of the 1971 International Conference on Mechanical Behavior of Materials, Vol. III, (1972), 114.
- (7) Harrison, C.B. and Sandor, G.N., Engng. Frac. Mech., 3-4 (1971-12), 403.
- (8) Taira, S. and Ohtani, R., International Conference on Creep and Fatigue in Elevated Temperature Applications, Philadelphia 1973, (1974), Paper C213/73.
- (9) Taira, S., Ohtani, R. and Nitta, A., Proc. of the 1973 Symposium on Mechanical Behavior of

- Materials, (1974), 211.
- (10) 中村・新田・大谷・平, 日本機械学会講演論文集, No. 740-8 (昭49-6), 103.
 - (11) 大谷・新田・中村・米倉, 第12回高温強度シンポジウム前刷集, (昭49-10), 87.
 - (12) Nicholson, R.D. and Formby, C.L., Int. J. Frac., 11-4 (1975-8), 595.
 - (13) Siverns, M. J. and Price, A. T., Nature, 228(1970) 760.
 - (14) Siverns, M. J. and Price, A. T., Int. J. Frac., 9-2 (1973-6), 199.
 - (15) Neate, G. J. and Siverns, M. J., International Conference on Creep and Fatigue in Elevated Temperature Applications, Philadelphia 1973, (1974), Paper C234/73.
 - (16) 小寺沢・岩田, 日本材料学会第24期定時総会講演会前刷集. (昭50-5), 21.
 - (17) Landes, J. D. and Begley, J. A., Proc. of the Eighth National Symposium on Fracture Mechanics, Brown Univ., (1974).
 - (18) 大谷・小倉・竹本・井上, 第18回材料研究連合講演会前刷集. (昭49-9), 31.
 - (19) 大谷・小倉・中島, 日本機械学会講演論文集, No. 750-13 (昭50-10), 57.
 - (20) 坂田・Finnie, 日本機械学会論文集, 41-344 (昭50-4),

1089.

- (21) 坂田, 日本機械学会誌, 78-678 (昭50-5), 389.
- (22) James, L. A., Int. J. Frac. Mech., 8-3 (1972-9), 347.
- (23) Robson, K., International Conference on Creep Resistance in Steel, Verein Deutscher Eisenhüttenleute, (1972).
- (24) Turner, C. E. and Webster, G. A., Int. J. Frac., 10-3 (1974-9), 455.
- (25) Kenyon, J. L., Webster, G. A., Radon, J. C. and Turner, C. E., International Conference on Creep and Fatigue in Elevated Temperature Applications, Philadelphia 1973, (1974), Paper C156/73.
- (26) Ellison, E. G. and Walton, D., International Conference on Creep and Fatigue in Elevated Temperature Applications, Philadelphia 1973, (1974), Paper C173/73.
- (27) 川崎・堀口, 日本機械学会講演論文集, No. 740-2 (昭49-4), 219.
- (28) Kashiwaya, H., Ishimatsu, M., Yanuki, T., Arima, N. and Arii, M., Proc. of the 1974 Symposium on Mechanical Behavior of Materials, Vol. 1, (1974), 467.
- (29) 深倉・柏谷・有井, 日本材料強度学会講演論文集, (昭50),

77.

- (30) 佐々木・幡谷・志賀・高橋, 第13回高温強度シンポジウム前刷集, (昭50-10), 72.
- (31) 小倉・大路, 日本機械学会誌, 75-642 (昭47-7), 1099.
- (32) To, K. C., *Int. J. Frac.*, 11-4 (1975-8), 641.
- (33) Barnby, J. T., *Engng. Frac. Mech.*, 7-2 (1975-6), 299.
- (34) Barnby, J. T., *Engng. Frac. Mech.*, 6-4 (1974-12), 627.
- (35) Hoff, N. J., *Quart. Appl. Math.*, 12 (1954), 49.
- (36) 大路, 日本機械学会論文集, 33 (昭42), 1909; 正誤表, 34 (昭43), 211.
- (37) Prager, W., *J. Appl. Phys.*, 16 (1945), 837.
- (38) Rice, J. R., *J. Appl. Mech.*, 34 (1967), 287.
- (39) Rice, J. R., *Int. J. Frac. Mech.*, 2 (1966), 426.
- (40) Rice, J. R. and Rosengren, G. F., *J. Mech. & Phys. Solids*, 16 (1968), 1.
- (41) Hutchinson, J. W., *J. Mech. & Phys. Solids*, 16 (1968), 13.
- (42) Hutchinson, J. W., *J. Mech. & Phys. Solids*, 16 (1968), 337.
- (43) Neuber, H., *J. Appl. Mech.*, 28 (1961), 544.
- (44) Rice, J. R., *J. Appl. Mech.*, 35 (1968), 379.
- (45) Bucci, R. J., Paris, P. C., Landes, J. D. and Rice,

- J. R., ASTM STP 514, (1972), 40.
- (46) Begley, J. A. and Landes, J. D., ASTM STP 514, (1972), 1.
- (47) Landes, J. D. and Begley, J. A., ASTM STP 560, (1974), 170.
- (48) Yoder, G. R. and Griffis, C. A., NRL Report 7662, (1974).
- (49) Landes, J. D. and Begley, J. A., ASTM STP 514, (1972), 24.
- (50) Dowling, N. E. and Begley, J. A., Scientific Paper 74-1E7-CREEP-P1, Westinghouse Research Laboratories, Pittsburgh, (1974).
- (51) Broberg, K. B., J. Mech. & Phys. Solids, 19-6 (1971-11), 407.
- (52) Broberg, K. B., Abstract of Lecture, Lund University of Technology, Sweden, (1974).
- (53) Kobayashi, A. S., Chiu, S. T. and Beeuwkes, R., Engng. Frac. Mech., 5 (1973), 293.
- (54) Rice, J. R., Fracture (ed. by Liebowitz, H.), Vol. II, Chap. 3, (1968), 191, Academic Press.
- (55) Rice, J. R., J. Appl. Mech., 37-3 (1970-9), 728.
- (56) Odqvist, F. K. G. and Hult, J., クリープ強さの理論, (昭42), 50, 培風館.
- (57) Rice, J. R., Paris, P. C. and Merkle, J. G.,

- ASTM STP 536, (1973), 231.
- (58) Bui, H. D., *Engng. Frac. Mech.*, 6-2 (1974-9), 287.
- (59) Williams, J. A., *Phil. Mag.*, 15 (1967), 1289.
- (60) Williams, J. A., *Phil. Mag.*, 20 (1969), 635.
- (61) Cottrell, A. H., *Trans. AIME*, 212 (1958), 192.
- (62) 大谷・土井・中村・新田, *材料*, 22-234 (昭48-3), 291.
- (63) Hull, D. and Rimmer, D. E., *Phil. Mag.*, 4 (1959), 673.
- (64) Lindborg, U., *J. Mech. & Phys. Solids*, 16 (1968), 323.
- (65) Lindborg, U., *Acta Metallurg.*, 17 (1969), 157.
- (66) Kachanov, L. M., *Izv. Akad. Nauk. USSR OTN*, (1958), No. 8, 26.
- (67) Odqvist, F. K. G., *Mathematical Theory of Creep and Creep Rupture*, (1966), 12, Clarendon Press.
- (68) Yokobori, T., *J. Phys. Soc. Japan*, 7 (1952), 48.
- (69) 川崎・堀口, *材料*, 22-234 (昭48-3), 298.
- (70) Hayhurst, D. R. and Leckie, F. A., *J. Mech. & Phys. Solids*, 21-6 (1973-11), 431.
- (71) Leckie, F. A. and Hayhurst, D. R., *Proc. Roy. Soc. Lond., Ser. A*, 340-1622 (1974), 323.
- (72) Kachanov, L. M., *Advances in Creep Design*

(ed. by Smith, A. I. and Nicolson, A. M.),
Chap. 2, (1971), 21, Applied Science
Publishers.

- (73) 文献(67)の31頁.
- (74) Neuber, H., Kerbspannungslehre, Zweite
Auflage, (1958), Springer-Verlag.
- (75) Neuber, H., Proc. of the IUTAM Symposium,
Freudenstadt · Stuttgart, (1967), 109.
- (76) Hult, J. A. H., J. Mech. & Phys. Solids, 6 (1957),
47.
- (77) McClintock, F. A., Proc. of the International
Conference on Fatigue of Metals, (1956), 538.
- (78) McClintock, F. A., J. Appl. Mech., 25 (1958),
582.
- (79) McClintock, F. A., Proc. Roy. Soc. Lond., Ser.
A, 285 (1965), 58.
- (80) 森口・宇田川・一松, 数学公式 I, (昭31), 58, 岩波書店.
- (81) 森口・宇田川・一松, 数学公式 II, (昭32), 39, 岩波書店.
- (82) 文献(81)の7頁.
- (83) 文献(80)の220頁.
- (84) 森口・宇田川・一松, 数学公式 III, (昭35), 2, 岩波書店.
- (85) Tuba, I. S., Int. J. Mech. Sci., 8 (1966),
683.
- (86) 石田, 日本機械学会誌, 75-642 (昭47-7), 1129.
- (87) Amazigo, J. C., Int. J. Solids & Struct., 10-9

- (1974-9), 1003.
- (88) Tada, H., Paris, P. C. and Irwin, G., The Stress Analysis of Cracks Handbook, (1973), Del Research Corporation.
- (89) Neuber, H., Theory of Notch Stresses, (1958), 283, Springer - Verlag.
- (90) 大谷・小倉・康, 材料, 22-234 (昭48-3), 285.
- (91) 大谷, 材料, 20-210 (昭46-3), 368
- (92) 大谷・小倉・中野, 日本機械学会論文集, 39-319 (昭48-3), 822.
- (93) 大谷・伊藤, 材料, 20-214 (昭46-7), 864.
- (94) 大南・梅田, 材料, 22-234 (昭48-3), 278.
- (95) Suezawa, Y. and Hōjō, H., Trans. ASME, Ser. D, 84 (1962), 214.
- (96) 間島・宮野・宮川, 日本機械学会論文集, 38-315 (昭47-11), 2733.
- (97) 大南・元家・山蔭, 材料, 20-210 (昭46-3), 395.
- (98) McCormick, P. G. and Ruoff, A. L., The Mechanical Behavior of Materials under Pressure (ed. by Pugh, H. L. D.), (1970), 355, Elsevier.
- (99) Butcher, B. M. and Ruoff, A. L., J. Appl. Phys., 32 (1961), 2036.
- (100) 大南・山蔭, 材料, 21-222 (昭47-3), 225.
- (101) DeVries, K. L., Baker, G. S. and Gibbs, P.,

- J. Appl. Phys. , 34 (1963), 2258
- (102) McClintock, F. A. , J. Appl. Mech. , 35 (1968), 363.
- (103) Thomason, P. F. , J. Inst. Metals , 96 (1968), 360.
- (104) McClintock, F. A. , Fracture of Solids (ed. by Drucker , D. C. and Gilman , J. J.), (1963), 65, Interscience Publication.
- (105) McClintock, F. A. and Sukhatme, S. P. , J. Mech. & Phys. Solids , 8 (1960), 187.
- (106) 石田, 日本機械学会講演論文集, No. 730-2 (昭48-4) 95.
- (107) Williams, J. A. and Price, A.T. , Trans. ASME , Ser. H , 97-3 (1975-7), 214.
- (108) Hilton, P. D. , Int. J. Frac. , 9-2 (1973-6), 149.
- (109) Hilton, P. D. and Hutchinson, J. W. , Engng. Frac. Mech. , 3 (1971), 435.
- (110) Goldman, N. L. and Hutchinson, J. W. , Int. J. Solids & Struct. , 11-5 (1975-5), 575.
- (111) Chitaley, A. D. and McClintock, F. A. , J. Mech. & Phys. Solids , 19-3 (1971-6), 147.

付録 I 連続体の不変積分 (J積分の拡張)

Rice の提案した J 積分⁽¹⁾は、破壊力学におけるひとつの力学的パラメータとして脚光を浴びつつある。J 積分の最大の利点のひとつは積分経路に依存しないことである。この性質を用いれば、たとえばき裂先端近傍や鋭い切欠き底等における応力およびひずみに関する情報が、これらから十分離れた経路に沿った積分によって得られ、破壊力学全般における利用価値は大きい。しかしながら、J 積分の適用範囲にはいくつかの制約がある。すなわち、まず (i) J 積分は弾性体あるいは塑性体 (非線形弾性体) に対してのみ定義されていること、(ii) き裂や切欠きの問題のように、境界上で応力ベクトルが零となる問題を取扱っていること、(iii) 二次元物体を対象としていることなどである。ここでは、J 積分と同じく積分経路独立性を有しながら、これら制約条件の緩和された、より一般性のある積分を提案し、その物理的意味を議論することにより、J 積分のひとつの拡張を試みる。

なお、ここでは、式の表示の簡略化のため、Einstein の総和規約を用いる。

I・1 応力境界条件のもとにおける経路不変積分

本節では、主として前述の構成式に関する制約条件 (i)、部分的には境界条件に関する制約条件 (ii) を緩和することによる J 積分の拡張について述べる。

まず、経路不変積分の求め方について論ずる。いま、二次元物体内に直角座標系 x_1, x_2 をとる (図 I-1)。ある関数 Q を考え、物

体内の任意閉経路に沿った Q の積分が、

$$\oint Q \, dc = 0 \quad \text{----- (I-1)}$$

となり、かつ境界 B_1 および B_2 上で、

$$Q = 0 \quad \text{----- (I-2)}$$

であると仮定する。このとき、閉経路として 図 I-1 に示すような $\Gamma_1 + \Gamma_3 - \Gamma_2 + \Gamma_4$ をとれば、式 (I-1) および (I-2) より、

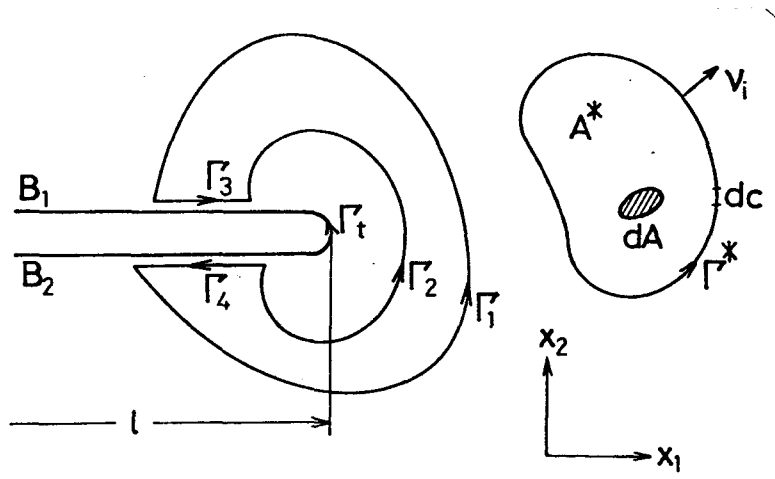
$$\int_{\Gamma_1} Q \, dc = \int_{\Gamma_2} Q \, dc$$

が得られ、 B_2 上の 1 点から B_1 上の 1 点に至る経路 Γ に沿った次式の積分は、積分経路に依存しないことになる。

$$I = \int_{\Gamma} Q \, dc \quad \text{----- (I-3)}$$

以下においては、式 (I-1) および (I-2) を同時に満足する関数 Q を求めることにより、種々の条件下における経路不変積分 I を求めることにしよう。

図 I-1 積分経路



まず、境界 B_1 および B_2 が x_1 軸に平行であり、さらに B_1 および B_2 上で応力ベクトル T_i および表面偶力ベクトル M_i がそれぞれ一定値 T_i^B および M_i^B をとる場合について考える。すなわち、境界 B_1 および B_2 上で、

$$\left. \begin{aligned} \nu_1 &= 0 \\ T_i - T_i^B &= \sigma_{ji} \nu_j - \sigma_{2i}^B \nu_2 = 0 \\ M_i - M_i^B &= \mu_{ji} \nu_j - \mu_{2i}^B \nu_2 = 0 \end{aligned} \right\} \text{----- (I-4)}$$

となる。ここに、 σ_{ji} は応力テンソル、 μ_{ji} は偶応力テンソル^(注)、 σ_{2i}^B および μ_{2i}^B はそれぞれ σ_{2i} および μ_{2i} の境界上における値。 ν_j は外向き単位法線ベクトルである。式 (I-3) の中の関数 Q を式 (I-4) 左辺の一次結合とおけば、境界 B_1 および B_2 上で式 (I-2) が満足される。すなわち、

$$Q = Y \nu_1 + \sum_i (\sigma_{ji} \nu_j - \sigma_{2i}^B \nu_2) + X_i (\mu_{ji} \nu_j - \mu_{2i}^B \nu_2) \text{----- (I-5)}$$

領域 A^* を囲む閉経路 Γ^* に沿った Q の積分をとり、Gauss の定理を用いると、

$$\oint_{\Gamma^*} Q \, dC = \int_{A^*} [Y_{,1} + \sum_{i,j} \sigma_{ji} - \sum_i \sigma_{ji,j} - \sum_{i,2} \sigma_{2i}^B + X_{i,j} \mu_{ji} + X_i \mu_{ji,j} - X_{i,2} \mu_{2i}^B] \, dA \text{----- (I-6)}$$

(注) 偶応力は以下の (b) 以外では考慮していない。

ここに、「 \cdot, j 」は x_j に関する偏微分を表わしている。

一方、物体内の支配方程式として、運動量および角運動量の保存則より次式が得られている⁽²⁾。

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{ji, j} &= 0 \\ \mu_{ji, j} + \epsilon_{ijk} \sigma_{jk} &= 0 \end{aligned} \right\} \text{----- (I-7)}$$

ここに、 ϵ_{ijk} は交代記号である。問題を微小変形に限れば、変位 u_i とひずみ ϵ_{ij} 、回転 ω_i 、および曲率 κ_{ij} の間には次の関係がある。

$$\left. \begin{aligned} \epsilon_{ij} &= (u_{i, j} + u_{j, i}) / 2 \\ \omega_i &= \epsilon_{ijk} u_{k, j} / 2 \\ \kappa_{ij} &= \omega_{i, j} \end{aligned} \right\} \text{----- (I-8)}$$

関数 Y , Z_i および X_i として適当な関数を採用し、そのときの式 (I-6) 右辺の被積分関数が式 (I-7) および (I-8) を用いることにより恒等的に零となることが示された場合には、式 (I-1) は満足される。式 (I-2) は前述のようにすでに満たされているので、このような関数 Y , Z_i および X_i を式 (I-3) および (I-5) に代入して得られる積分 I は経路不変積分である。以下では各材料モデルに対し経路不変積分を求めてみよう。

(a) 弾性(非線形を含む)の場合

応力とひずみとの間に一対一の対応関係がある弾性体では、ひずみエネルギー密度 W およびコンフリメンタリひずみエネルギー密度 W_c が存在し⁽⁶⁾、

$$\sigma_{ij} = \frac{\partial W}{\partial \varepsilon_{ij}}, \quad \varepsilon_{ij} = \frac{\partial W_c}{\partial \sigma_{ij}} \quad \text{----- (I-9)}$$

$$W(\varepsilon_{ij}) = \int_0^{\varepsilon_{ij}} \sigma_{ij} d\varepsilon_{ij}, \quad W_c(\sigma_{ij}) = \int_0^{\sigma_{ij}} \varepsilon_{ij} d\sigma_{ij} \quad \text{----- (I-10)}$$

が成立する。いま、関数 Y , Z_i および X_i として、

$$\left. \begin{aligned} Y &= W - \sigma_{2i}^B u_{i,2} \\ Z_i &= -u_{i,1} \\ X_i &= 0 \end{aligned} \right\} \text{----- (I-11)}$$

を採用すると、式 (I-7)、(I-8) および (I-9) より式 (I-6) の右辺の被積分関数は零となり、式 (I-1) は満足される。よって、この場合、式 (I-11) および (I-5) を式 (I-3) に代入して得られる次の積分は経路不変積分である。

$$I = \int_{\Gamma} [(W - \sigma_{2i}^B u_{i,2}) \nu_1 - (\sigma_{ji} \nu_j - \sigma_{2i}^B \nu_2) u_{i,1}] dc \quad \text{----- (I-12)}$$

特に、境界上に力が作用していない場合、すなわち $T_i^B = \sigma_{2i}^B \nu_2$ が零の場合、式 (I-12) は Rice の J 積分 (式 (2-43)) に一致する。

(b) 偶応力を考慮した線形弾性の場合

Mindlin の偶応力理論を用いた場合、等質等方性体の構成方程式は、

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{ij}^s &= 2\mu \varepsilon_{ij} + \lambda \varepsilon_{kk} \delta_{ij} \\ \mu_{jic} &= 2\mu_1 \kappa_{ij} + 2\mu_2 \kappa_{jic} \end{aligned} \right\} \text{----- (I-13)}$$

と書くことができる⁽²⁾。ここに、 σ_{ij}^s は σ_{ij} の対称部分、 μ および λ は Lamé の定数、 μ_1 および μ_2 は新材料定数であり、 δ_{ij} は Kronecker のデルタである。この場合のひずみエネルギー密度 W および コンフリメンタリひずみエネルギー密度 W_c は次式で与えられる⁽²⁾。

$$W = W_c = \frac{\lambda}{2} (\varepsilon_{kk})^2 + \mu \varepsilon_{ij} \varepsilon_{ij} + \mu_1 \kappa_{ij} \kappa_{ij} + \mu_2 \kappa_{ij} \kappa_{jic} \text{----- (I-14)}$$

このとき、

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{ij}^s &= \frac{\partial W}{\partial \varepsilon_{ij}} & \mu_{ij} &= \frac{\partial W}{\partial \kappa_{ji}} \\ \varepsilon_{ij} &= \frac{\partial W_c}{\partial \sigma_{ij}^s} & \kappa_{ij} &= \frac{\partial W_c}{\partial \mu_{jic}} \end{aligned} \right\} \text{----- (I-15)}$$

(a) の場合と同様にして、式 (I-7)、(I-8) および (I-15) を用いることにより、次式で与えられる積分 I が経路不変積分であることを示すことができる。

$$I = \int_{\Gamma} \left[(W - \sigma_{2i}^B \mu_{i,2} - \mu_{2i}^B \kappa_{i2}) \nu_1 - (\sigma_{ji} \nu_j - \sigma_{2i}^B \nu_2) \right. \\ \left. \times u_{i,1} - (\mu_{ji} \nu_j - \mu_{2i}^B \nu_2) \kappa_{i1} \right] dc \quad \text{(I-16)}$$

本論文では、Mindlin の偶応力理論を用いたが、マイクロポーラ理論⁽³⁾を用いた場合にも、まったく同様にして経路不変積分が

得られると考えられる。

なお、Atkinsonら⁽⁴⁾は、著者とは独立に、境界上で応力が作用していない場合の経路不変積分を、マイクロポラ理論および偶応力理論を用いて求めている。得られた積分は、式(I-16)の特別な場合である。

(C) 粘弾性(非線形を含む)の場合

応力・ひずみ関係が、

$$\sigma_{ij}(t) = p_1(\varepsilon_{ij}(t)) + \int_0^t p_2(\varepsilon_{ij}(t)) p_3(t-t') dt' \quad \text{----- (I-17)}$$

で与えられる場合を考えてみよう。 p_1 、 p_2 および p_3 は任意関数である。式(I-17)の両辺を Laplace 変換すると、

$$\bar{\sigma}_{ij}(s) = \bar{p}_1(\bar{\varepsilon}_{ij}(s)) + \bar{p}_2(\bar{\varepsilon}_{ij}(s)) p_3(s) = \bar{\sigma}_{ij}(\bar{\varepsilon}_{ij}(s)) \quad \text{----- (I-18)}$$

ここに、上にバーのついた関数は Laplace 変換後の関数である。

(a) および (b) に示した弾性体以外では、経路不変積分が存在するか否かは、 \bar{W} あるいは \bar{W}_c に相当するポテンシャルの存在いかんにかかっている。そこで、いま次式のようなポテンシャル \bar{W} および \bar{W}_c が存在すると仮定する。

$$\bar{W} = \int_0^{\bar{\varepsilon}_{ij}} \bar{\sigma}_{ij} d\bar{\varepsilon}_{ij}, \quad \bar{W}_c = \int_0^{\bar{\sigma}_{ij}} \bar{\varepsilon}_{ij} d\bar{\sigma}_{ij} \quad \text{----- (I-19)}$$

このとき、

$$\bar{\sigma}_{ij} = \frac{\partial \bar{W}}{\partial \bar{\epsilon}_{ij}}, \quad \bar{\epsilon}_{ij} = \frac{\partial \bar{W}_c}{\partial \bar{\sigma}_{ij}} \quad \text{----- (I-20)}$$

が成立する。このようなポテンシャル \bar{W} あるいは \bar{W}_c を用いれば、(a) の場合と同様にして、次式のような経路不変積分 \bar{I} が得られる。

$$\bar{I} = \int_{\Gamma} [(\bar{W} - \bar{\sigma}_{2i}^B \bar{u}_{i,2}) \nu_1 - (\bar{\sigma}_{ji} \nu_j - \bar{\sigma}_{2i}^B \nu_2) \bar{u}_{i,1}] dc \quad \text{----- (I-21)}$$

特に、線形粘弾性でかつ境界上で応力が零 ($\bar{\sigma}_{2i}^B = 0$) の場合、式 (I-21) は Nilsson の提案している経路不変積分⁽⁵⁾ と一致する。

(d) 定常クリープの場合

定常クリープの条件下では、応力 σ_{ij} とひずみ速度 $\dot{\epsilon}_{ij}$ との間に一対一の対応関係があると考えられる。ここで、次式のようなポテンシャル W' および W_c' が存在すると仮定する。

$$W' = \int_0^{\dot{\epsilon}_{ij}} \sigma_{ij} d\dot{\epsilon}_{ij}, \quad W_c' = \int_0^{\sigma_{ij}} \dot{\epsilon}_{ij} d\sigma_{ij} \quad \text{----- (I-22)}$$

ひずみ速度成分が 偏差応力の二次不変量のみ関数と偏差応力成分との積で与えられるような等方性材料、たとえば Norton 型のクリープ則に従う材料においては、このようなポテンシャル W' および W_c' の存在を示すことができる⁽⁷⁾。式 (I-22) より、

$$\sigma_{ij} = \frac{\partial W'}{\partial \dot{\epsilon}_{ij}}, \quad \dot{\epsilon}_{ij} = \frac{\partial W_c'}{\partial \sigma_{ij}} \quad \text{----- (I-23)}$$

このとき、(a) の場合と同様にして、次のような経路不変積分 I が

得られる。

$$I = \int_P [(W' - \sigma_{2i}^B \dot{u}_{i,2}) \nu_1 - (\sigma_{ji} \nu_j - \sigma_{2i}^B \nu_2) \dot{u}_{i,1}] dc \quad \text{----- (I-24)}$$

ここに、 \dot{u}_i は変位速度である。式 (I-24) で $\sigma_{2i}^B = 0$ とおくと、これは著者が第2章で提案した修正J積分 (式 (2-44)₁) と一致する。

次に、前と同じく境界 B_1 および B_2 上において T_i および M_i が一定である場合を考え、境界条件としては、式 (I-4) の代りにこれを χ_i で偏微分して得られる次式を用いることにする。

$$\left. \begin{aligned} \nu_1 &= 0 \\ T_{i,1} &= \sigma_{ji,1} \nu_j = 0 \\ M_{i,1} &= \mu_{ji,1} \nu_j = 0 \end{aligned} \right\} \text{----- (I-25)}$$

このとき、前と同様にして、たとえば以下に示すような経路不変積分 I_c が得られる。

(a) 弾性 (非線形を含む) の場合

$$I_c = \int_P [(W_c - \alpha_{1i} \sigma_{2i}) \nu_1 - (U_c - \alpha_{1i} \chi_2 - \alpha_{2i}) \sigma_{ji,1} \nu_j] dc \quad \text{----- (I-26)}$$

ここに、 α_{ji} は任意定数である。式 (I-26) において $\alpha_{ji} = 0$ とおくと、これは Bui⁽⁸⁾ が著者と独立に提案している経路不変積分と本質的に一致する。

(b) 偶応力を考慮した線形弾性の場合

$$I_c = \int_{\Gamma} \left[(\overline{W}_c - \alpha_{1c} \overline{\sigma}_{2c}) \nu_1 - (\overline{u}_c - \alpha_{1c} \overline{x}_2 - \alpha_{2c}) \overline{\sigma}_{jic,1} \nu_j - \omega_c \mu_{jic,1} \nu_j \right] dC \quad \text{----- (I-27)}$$

(c) 粘弾性の場合

$$\overline{I}_c = \int_{\Gamma} \left[(\overline{W}_c - \overline{\alpha}_{1c} \overline{\sigma}_{2c}) \nu_1 - (\overline{u}_c - \overline{\alpha}_{1c} \overline{x}_2 - \overline{\alpha}_{2c}) \overline{\sigma}_{jic,1} \nu_j \right] dC \quad \text{----- (I-28)}$$

(d) 定常クリープの場合

$$I_c = \int_{\Gamma} \left[(W_c' - \alpha_{1c} \sigma_{2c}) \nu_1 - (\dot{u}_c - \alpha_{1c} \dot{x}_2 - \alpha_{2c}) \sigma_{jic,1} \nu_j \right] dC \quad \text{----- (I-29)}$$

本節の最後に、境界面に静水圧 p がかかっている場合の経路不変積分を求めてみよう。境界条件式は、

$$\left. \begin{aligned} \nu_1 &= 0 \\ \sigma_{jic} \nu_j + p \nu_i &= 0 \end{aligned} \right\} \text{----- (I-30)}$$

と書ける。前と同様の手法を用いると以下の経路不変積分が得られる。

(a) 弾性(非線形を含む)の場合

$$I = \int_{\Gamma} \left[(W + p \epsilon_{ii}) \nu_1 - (\sigma_{jic} \nu_j + p \nu_i) u_{ic,1} \right] dC \quad \text{----- (I-31)}$$

(b) 偶応力を考慮した線形弾性の場合

$$I = \int_{\Gamma} \left[(W + p \varepsilon_{ii}) \nu_i - (\sigma_{ji} \nu_j + p \nu_i) u_{i,1} - \mu_{ji} \nu_j \kappa_{i1} \right] dc \quad \text{----- (I-32)}$$

(c) 粘弾性 (非線形を含む) の場合

$$\bar{I} = \int_{\Gamma} \left[(\bar{W} + \bar{p} \bar{\varepsilon}_{ii}) \nu_i - (\bar{\sigma}_{ji} \nu_j + \bar{p} \nu_i) \bar{u}_{i,1} \right] dc \quad \text{----- (I-33)}$$

(d) 定常クリープの場合

$$I = \int_{\Gamma} \left[(W' + p \dot{\varepsilon}_{ii}) \nu_i - (\sigma_{ji} \nu_j + p \nu_i) \dot{u}_{i,1} \right] dc \quad \text{----- (I-34)}$$

I・2 変位境界条件のもとにおける経路不変積分

前節では、弾性体以外の粘弾性体やクリープ体でも経路不変積分が存在することを示すとともに、境界上で応力が一定値をとる、あるいは静水圧 p が加わっている場合の経路不変積分を示すことにより、 J 積分の部分的拡張を行なった。本節では、境界条件に関する J 積分の制約をさらに緩和するため、特に境界上で変位が規定されている場合について論ずる。

境界 B_1 および B_2 が x_1 軸に平行で、かつ B_1 および B_2 上でそれぞれ変位 u_i が一定である場合を取扱う。このとき、境界条件は、 α_{ji} を適当な定数として、次のように表わすことができる。

$$\nu_i = 0 \quad \text{----- (I-35)}$$

$$u_i - \alpha_{1i} x_2 - \alpha_{2i} = 0 \quad \text{----- (I-35)}_2$$

$$\omega_i = 0 \quad \text{----- (I-35)}_3$$

この場合の経路不変積分は、I・1節の場合と同様にして求められ、これはI・1節の式(I-26)～(I-29)のI_cと一致する。ただし、定常クリープにおいては、境界B₁およびB₂上で変位速度一定とし、境界条件式としては、式(I-35)の代りに次式を用いた。

$$\left. \begin{array}{l} v_i = 0 \\ \dot{u}_i - \alpha_{1i} x_2 - \alpha_{2i} = 0 \end{array} \right\} \text{----- (I-35a)}$$

これと同じ問題、すなわち境界上で変位が一定の場合の境界条件として、式(I-35)の代りにこれをx₁で偏微分した次式を用いることもできる。

$$\left. \begin{array}{l} v_i = 0 \\ u_{i,1} = 0 \\ \omega_{i,1} = \kappa_{i1} = 0 \end{array} \right\} \text{----- (I-36)}$$

この場合の経路不変積分を求めると、これは式(I-12)、(I-16)、(I-21)あるいは(I-24)で与えられる積分Iと一致する。なお、前述のように、定常クリープにおいては、境界条件式(I-36)の代りに次式を用いた。

$$\left. \begin{array}{l} v_i = 0 \\ u_{i,1} = 0 \end{array} \right\} \text{----- (I-36a)}$$

I・3 三次元問題の不変積分

緒言で述べた J 積分の制約条件のうち、構成式に関する制約 (i) および境界条件に関する制約 (ii) については、I・1 節および I・2 節でこれを緩和し、この方面における J 積分の拡張を行なった。本節では制約条件 (iii) を緩和するため、三次元問題における不変積分を取扱うことにする。

三次元物体内に曲線座標系 $\theta^1, \theta^2, \theta^3$ をとり、応力テンソルを σ^{ij} 、ひずみテンソルを ε_{ij} 、変位ベクトルを u_i とする。微小変形問題においては、 ε_{ij} は u_i を用いて次のように表わされる。

$$\varepsilon_{ij} = (u_i|_j + u_j|i) / 2 \quad \text{----- (I-37)}$$

ここに、 $u_i|_j$ は u_i の共変導関数である。平衡方程式は、偶応力を考えなければ、

$$\sigma^{jk}|_j = 0, \quad \sigma^{ji} = \sigma^{ij} \quad \text{----- (I-38)}$$

で与えられる。

いま、二次元弾性体の不変積分、式 (I-12) および (I-26) において、それぞれ $\sigma_{2i}^B = 0$ および $\alpha_{ji} = 0$ とおくと、次のような経路不変積分が得られる。

$$I = \int_{\Gamma} (W \nu_1 - \sigma_{jk} u_{i,1} \nu_j) dc \quad \text{----- (I-39)}$$

$$I_c = \int_{\Gamma} (W_c \nu_1 - \sigma_{ji,1} u_i \nu_j) dc \quad \text{----- (I-40)}$$

式 (I-39) の積分 I は前述のように Rice の J 積分である。式 (I-40) の積分 I_c の符号を変えたもの、すなわち $-I_c$ は J 積分

とちょうど相補な関係にあり、コンフリメンタリJ積分とも呼ぶべき量であろう。

一例として、式 (I-39) および (I-40) に対応するような、三次元問題における不変積分を求めてみよう。そこで、式 (I-39) および (I-40) とよく似た形を持つ次のような面積分を考えてみることにする。

$$I = \int_S (W \nu_i - \sigma^{ji} u_{i|_1} \nu_j) dS \quad \text{----- (I-41)}$$

$$I_c = \int_S (W_c \nu_i - \sigma^{ji}|_1 u_i \nu_j) dS \quad \text{----- (I-42)}$$

S として物体内の任意の閉曲面をとると、Gaussの定理、式 (I-37)、(I-38) および (I-9) より、 I および I_c は零に等しくなることが示される。境界面が θ' 軸に沿っていて、境界上で応力ベクトル T_i が零の場合の境界条件式は、

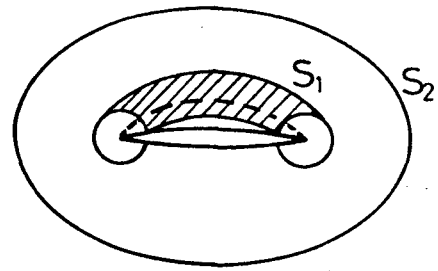
$$\left. \begin{array}{l} \nu_i = 0 \\ \sigma^{ji} \nu_j = 0 \quad \text{あるいは} \quad \sigma^{ji}|_1 \nu_j = 0 \end{array} \right\} \text{----- (I-43)}$$

となる。したがって、境界面 S を適当に選べば、たとえば、き裂問題では S としてき裂先端を包み込むような面をとれば、積分 I および I_c は積分面 S に依存しない。

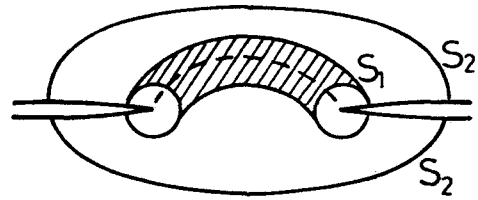
以上のように、曲線座標系を導入し、I・1節およびI・2節で求めた二次元問題における経路不変積分の線積分を面積分に変え、偏微分を共変微分に置換することにより、ただちに三次元問題の不変積分が得られる。

本節の最後に、積分面 S に関する興味深い点について述べておこ

う。いま、図 I-2 (a) に示すような円盤状き裂を考えた場合、積分面 S としては、図のようなドーナツ面 S_1 をとることができる。このドーナツ面を軸中心方向に伸ばしていくと、ドーナツ面の穴が塞がり、円盤状き裂をすっぽり包む球状の積分面 S_2 が得られる。この S_2 上で不変積分を評価しても、 S_1 上で評価したのと同じ結果が得られる。また、図 I-2 (b) に示すような環状き裂に対しては、図 I-2 (b) に示すようなドーナツ面 S_1 上で不変積分を評価してもよいが、円盤状き裂の場合と同じ理由から、環状き裂を上下でふたをするような面 S_2 上でこれを評価しても同じ結果が得られることになる。



(a)



(b)

図 I-2 円盤状き裂および環状き裂に対する積分面

なお、三次元的き裂の不変積分については、本論文とは違った方法で Strifors⁽⁹⁾ が取扱っている。

I・4 考察

以上求めてきた不変積分 I および I_c は積分経路あるいは積分面に依存しないので、き裂先端近傍、ポイド周辺、切欠き底あるいは介在物周辺の応力・ひずみを代表するパラメータとして用いることができる。簡単のため、弾性体を扱うこととし、積分 I および I_c

を他の力学的諸量で書表わすことにする。

まず、き裂問題を考える。二次元弾性体に対する積分I (式(I-12)あるいは(I-31))をき裂先端近傍の経路に沿って評価すると、 $\sigma_{2i}^B u_{i,2} \nu_1$ および $\sigma_{2i}^B u_{i,1} \nu_2$ 、あるいは $p \varepsilon_{ii} \nu_1$ および $p \nu_{ii} u_{i,1}$ は他の項に比べて十分小さくなり、これらの項は積分Iに寄与しない。したがって、式(I-12)あるいは(I-31)の積分Iはき裂先端近傍では形式的にJ積分と一致し、RiceのJ積分と応力拡大係数あるいはひずみ拡大係数との間の関係が積分Iに対してもそのまま成立する。たとえば、線形弾性あるいは小規模降伏のもとでは、Riceの結果⁽¹⁾より、

$$\left. \begin{aligned} I &= \frac{1-\nu^2}{E} (K_I^2 + K_{II}^2) + \frac{1+\nu}{E} K_{III}^2 \quad (\text{平面ひずみ}) \\ I &= \frac{1}{E} (K_I^2 + K_{II}^2) \quad (\text{平面応力}) \end{aligned} \right\} \text{----- (I-44)}$$

ここに、 K_I 、 K_{II} および K_{III} はそれぞれモードI、IIおよびIIIの弾性応力拡大係数、 E はヤング率、 ν はポアソン比である。また、非線形弾性のもとでは、 I は塑性の応力拡大係数 K_0 およびひずみ拡大係数 K_ε を用いて、

$$I = A_n K_0 K_\varepsilon \text{----- (I-45)}$$

となる⁽¹⁰⁾⁽¹¹⁾。特に、モードIII型き裂の場合の A_n は解析的に求められており、式(2-76)より、

$$A_n = \frac{n+1}{2n} \pi \quad (\text{モードIII型き裂}) \text{----- (I-46)}$$

Rice⁽¹²⁾は、二次元問題の経路不変積分 I の特殊な場合である J 積分が、ポテンシャル・エネルギー Π の変化率として次式で与えられることを示している。

$$J = -\frac{1}{B} \frac{\partial \Pi}{\partial l} \quad \text{----- (I-47)}$$

ここに、 l はき裂長さ、 B はき裂先端の長さであり、二次元物体では板厚に等しい。この Rice の証明と同じ手順を踏むことにより、

$$I = -\frac{1}{B} \frac{\partial \Pi}{\partial l} \quad \text{----- (I-48)}$$

の成立を示すことができる。また、Bui⁽⁸⁾ は、式 (I-26) で $\alpha_{ji} = 0$ とおいた場合の積分 I_c (式 (I-40)) が、コンフリメンタリ・ポテンシャル・エネルギー Π_c を用いて次式のように表わされることを示している。

$$I_c = -\frac{1}{B} \frac{\partial \Pi_c}{\partial l} \quad \text{----- (I-49)}$$

ただし、

$$\Pi_c = \int_V W_c dV - \int_{S_u} T_i u_i dS \quad \text{----- (I-50)}$$

ここに、 S_u は変位が規定されている境界面である。

さて、ポテンシャル・エネルギー Π とコンフリメンタリ・ポテンシャル・エネルギー Π_c の間には次の関係がある。

$$\Pi + \Pi_c = 0 \quad \text{----- (I-51)}$$

式 (I-48)、(I-49) および (I-51) より、

$$I_c = -I \quad \text{----- (I-52)}$$

が得られる。式 (I-52) を式 (I-44) あるいは (I-45) に代入することにより、 I_c と応力拡大係数あるいはひずみ拡大係数との間の関係を求めることができる。

次に、三次元的き裂の不変積分 I および I_c について考える。いま、き裂面が θ' 軸に沿っており、かつき裂の成長方向が θ' 方向であるとすると、前述と同様にして、き裂の単位成長によるポテンシャル変化は、

$$-\frac{\partial U}{\partial \theta'} \sqrt{g''} = I \sqrt{g''} = \frac{\partial U_c}{\partial \theta'} \sqrt{g''} = -I_c \sqrt{g''} \quad \text{----- (I-53)}$$

で与えられる。ここに g'' は Euclid 空間の計量テンソル⁽¹³⁾ である。したがって、半径 R_s の円盤状き裂のように軸対称なき裂が半径方向に成長する場合のポテンシャル変化は、

$$-\frac{\partial U}{\partial R_s} = I = \frac{\partial U_c}{\partial R_s} = -I_c \quad \text{----- (I-54)}$$

となる。よって、この場合には、式 (I-44) あるいは (I-45) 中の I の代わりに $I \sqrt{g''} / B = I / (2\pi R_s)$ を入れた式が成立すると考えられる。

次に、切欠きあるいはボイドの問題について考える。二次元物体の経路不変積分 I あるいは I_c の経路として、図 I-1 に示すようなボイド表面あるいは切欠き底に沿った Γ_t をとれば、式 (I-12) の積分 I 、式 (I-26) の積分 I_c および式 (I-31) の積分 I はそれぞれ次のようになる。

$$I = \int_{\Gamma_t} (W - \sigma_{2i}^B u_{i,2}) \nu_i \, dc \quad \text{----- (I-55)}$$

$$I_c = \int_{\Gamma_t} (W_c - \alpha_{ii} \sigma_{2i}) v_i dc \quad \text{----- (I-56)}$$

および

$$I = \int_{\Gamma_t} (W + p \varepsilon_{ii}) v_i dc \quad \text{----- (I-57)}$$

したがって、積分 I および I_c は、ボイド周辺あるいは切欠き底の応力・ひずみのひとつの代表値である。また、Rice⁽¹²⁾によれば、 J 積分は、ボイドあるいは切欠きの成長によるポテンシャル・エネルギーの変化を表わしている。前と同様にして、これを拡張すれば、I・2節の積分 I および I_c がそれぞれ $-(\partial \Pi / \partial l) / B$ および $-(\partial \Pi_c / \partial l) / B$ に等しいことを示すことができる。ここに、 l はボイドあるいは切欠きの長さである。同様にして、三次元的ボイドあるいは切欠きの θ' 方向の単位成長に伴うポテンシャル・エネルギーの変化は、 $I \sqrt{g''}$ あるいは $-I_c \sqrt{g''}$ で与えられる。たとえば、球形のボイドが球状を保ちながら成長する場合のポテンシャル・エネルギー変化は、球の中心を原点とする球座標をとり θ' として原点からの距離をとったときの $I \sqrt{g''}$ あるいは $-I_c \sqrt{g''}$ で与えられる。また、球形のボイドが横方向に成長する場合のポテンシャル・エネルギー変化は、球の中心を原点とする円柱座標をとり、 θ' として軸中心からの距離をとったときの $I \sqrt{g''}$ あるいは $-I_c \sqrt{g''}$ として求められる。

介在物の問題においては、たとえば介在物が剛体的挙動をする場合には、介在物と母材の境界面上で変位が規定されていると考えられるので、I・2節の結果を用いることができる。積分経路 Γ として、図 I-1 に示すような Γ_t をとれば、この場合にも式

(I-55)、(I-56)あるいは(I-57)が成立することになる。したがって、 I および I_c は介在物周辺の応力・ひずみのひとつの代表値となる。

さて、粘弾性体の不変積分のひとつは、式(I-21)で与えられるが、平衡方程式(式(I-7)の第一式)の中に慣性項を入れたときの不変積分 \bar{I} は、被積分関数にさらに $\frac{1}{2} \rho s^2 \bar{u}_i \bar{u}_i \nu_i dC$ を付加えることによりただちに得られる。ここに、 ρ は密度である。この \bar{I} は、動的効果を考慮したときのき裂先端近傍の応力およびひずみの指標になると考えられる。弾性体においても、たとえば式(I-12)あるいは(I-31)の積分 I の代りに、Laplace変換した量に基づく積分 \bar{I} を考え上記の項を付加すれば、動的効果が取扱えるものと考えられる。

I・5 結言

種々の場合における経路不変積分を求めることにより、 J 積分の拡張を試みた。まず、 J 積分で取扱っている弾性(非線形を含む)体だけでなく、偶応力を考慮した線形弾性体、粘弾性(非線形を含む)体、定常クリープ体などにおいても経路不変積分が存在することを示した。また、き裂問題および切欠き問題などのように境界(き裂面あるいは切欠き表面)上で応力が規定されている場合だけでなく、境界上で変位が規定されている場合の経路不変積分を示した。経路不変積分としては、 J 積分を特別な場合として含み、かつ J 積分と類似の形をもつ経路不変積分の群と、これとちょうど相補的關係にある経路不変積分の群が得られた。また、三次元問題における不変積分を提案した。

これら種々の場合の不変積分は、き裂先端、ボイド周辺、切欠き底あるいは介在物周辺における応力・ひずみの代表値である。特に、き裂、ボイドあるいは切欠きの問題においては、これら不変積分はき裂等の成長に伴う系のポテンシャル・エネルギーの変化率を用いて書表わすことができる。

付録Ⅱ $E_k(\lambda_2)$ (定義式(6-14)あるいは(8-14))
の解析解

Ⅱ・1 縦せん断の場合

式(6-14)より、

$$E_k(\lambda_2) = \int_0^\infty \frac{d\lambda_1}{(\sinh^2 \lambda_1 + \cos^2 \lambda_2)^k} \quad (\text{II-1})$$

式(II-1)より、

$$E_k(\lambda_2) = \int_0^\infty \frac{2^{2k} d\lambda_1}{[\exp(2\lambda_1) + \exp(-2\lambda_1) + 2\cos 2\lambda_2]^k} \quad \text{----- (II-2)}$$

となる。ここで、 $x = \exp(-2\lambda_1)$ と置けば、

$$E_k(\lambda_2) = 2^{2k-1} \int_0^1 \frac{x^{k-1} dx}{(x^2 + 2x \cos 2\lambda_2 + 1)^k} \quad \text{----- (II-3)}$$

が得られる。また、式(II-2)で $x = \exp(2\lambda_1)$ と置くと、

$$E_k(\lambda_2) = 2^{2k-1} \int_1^\infty \frac{x^{k-1} dx}{(x^2 + 2x \cos 2\lambda_2 + 1)^k} \quad \text{----- (II-4)}$$

となる。式(II-3)および(II-4)より、

$$E_k(\lambda_2) = 2^{2k-2} \int_0^\infty \frac{x^{k-1} dx}{(x^2 + 2x \cos 2\lambda_2 + 1)^k} \quad \text{----- (II-5)}$$

ここで、次式で定義される複素関数 $H_k(z)$ を考える。

$$H_k(z) = \frac{z^\nu}{(z^2 + 2z \cos 2\lambda_2 + 1)^k} \quad 2k-1 > \nu > -1, \quad k: \text{自然数} \quad \text{(II-6)}$$

図 II-1 のように、半径 R_1 および R_2 の同心円 C' および C'' で囲まれた環状領域を実軸上で切断して得られる単一連結領域内では、

$$0 \leq \arg z < 2\pi$$

であるので z^ν は一価である。

図 II-1 に示された閉曲線 $A'B'C'B''A''C''$ に沿った $H_k(z)$ の積分は、留数の定理より⁽¹⁴⁾、

$$\begin{aligned} & \int_{C'} H_k(z) dz + \int_{B''A''} H_k(z) dz \\ & + \int_{C''} H_k(z) dz + \int_{A'B'} H_k(z) dz \\ & = 2\pi i \cdot (\underbrace{z = -\cos 2\lambda_2}_{\pm i \sin 2\lambda_2 \text{ の留数}}) \\ & \text{----- (II-7)} \end{aligned}$$

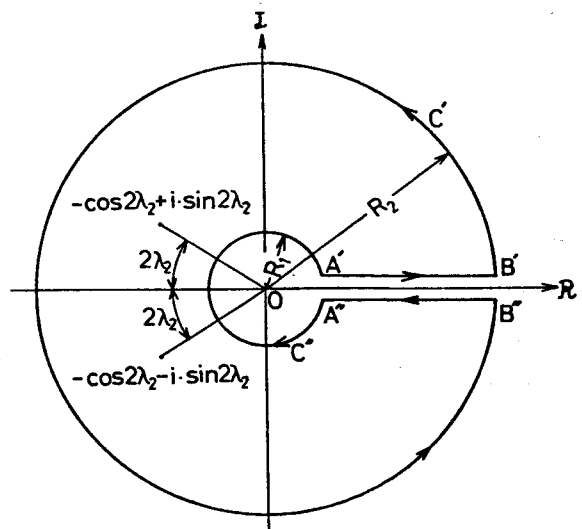


図 II-1 積分経路

$R_1 \rightarrow 0, R_2 \rightarrow \infty$ のとき.

$$\left. \begin{aligned} \left| \int_{C'} H_k(z) dz \right| &\leq \frac{R_2^\nu \cdot 2\pi R_2}{(R_2^2 + 2R_2 \cos 2\lambda_2 + 1)^k} \rightarrow 0 \\ \left| \int_{C''} H_k(z) dz \right| &\leq \frac{R_1^\nu \cdot 2\pi R_1}{(R_1^2 + 2R_1 \cos 2\lambda_2 + 1)^k} \rightarrow 0 \end{aligned} \right\} \text{(II-8)}$$

また経路 $B''A''$ においては,

$$\text{arc } z = 2\pi$$

であるので,

$$\int_{A'B'} H_k(z) dz + \int_{B''A''} H_k(z) dz = \int_0^\infty \frac{x^\nu dx}{(x^2 + 2x \cos 2\lambda_2 + 1)^k} (1 - e^{2\pi\nu i})$$

----- (II-9)

ここで,

$$z_{\pm} = -\cos 2\lambda_2 \pm i \sin 2\lambda_2$$

と置く。まず, $z = z_+$ の留数 R_+ を求める。

$$\begin{aligned} R_+ &= \frac{1}{(k-1)!} \left[\frac{d^{k-1}}{dz^{k-1}} (z - z_+)^k H_k(z) \right]_{z=z_+} \\ &= \frac{1}{(k-1)!} \left[\frac{d^{k-1}}{dz^{k-1}} \left\{ \frac{z^\nu}{(z - z_-)^k} \right\} \right]_{z=z_+} \end{aligned} \quad \text{(II-10)}$$

式 (II-10) 中の微分は次式で与えられる。

$$\frac{d^{k-1}}{dz^{k-1}} \left\{ \frac{z^\nu}{(z-z_-)^k} \right\} = \frac{1}{(z-z_-)^{2k-1}} \sum_{j=0}^{k-1} (-1)^j z^{\nu-j} {}_{k-1}C_j z_-^j$$

$$\cdot \{ \nu(\nu-1) \cdots (\nu-j+1) \} \{ (\nu-2k+2)(\nu-2k+3) \cdots$$

$$\cdots (\nu-k-j) \} \quad \text{----- (II-11)}$$

したがって、

$$R_+ = \frac{1}{(k-1)! (z_+ - z_-)^{2k-1}} \sum_{j=0}^{k-1} (-1)^j z_+^{\nu-j} z_-^j {}_{k-1}C_j$$

$$\cdot \{ \nu(\nu-1) \cdots (\nu-j+1) \} \{ (\nu-2k+2)(\nu-2k+3) \cdots$$

$$\cdots (\nu-k-j) \} \quad \text{----- (II-12)}$$

$z = z_-$ の留数 R_- も同様にして求めらる。その結果、

$$R_+ + R_- = \sum_{j=0}^{k-1} \frac{(-1)^j {}_{k-1}C_j e^{\pi\nu i} z_i \sin(2\lambda_2(z_j - \nu))}{(k-1)! (2i \sin 2\lambda_2)^{2k-1}}$$

$$\cdot \{ \nu(\nu-1) \cdots (\nu-j+1) \} \{ (\nu-2k+2)(\nu-2k+3) \cdots$$

$$\cdots (\nu-k-j) \} \quad \text{----- (II-13)}$$

が得られる。式 (II-7)、(II-8)、(II-9) および (II-13) より、

$$\int_0^\infty \frac{x^\nu dx}{(x^2 + 2x \cos 2\lambda_2 + 1)^k} \cdot (1 - e^{2\pi\nu i})$$

$$= -\frac{2\pi i}{(k-1)!} \sum_{j=0}^{k-1} (-1)^j {}_{k-1}C_j \frac{e^{\pi v i} 2i \sin(2\lambda_2(2j-v))}{(2i \sin 2\lambda_2)^{2k-1}}$$

$$\cdot \{v(v-1) \cdots (v-j+1)\} \{ (v-2k+2)(v-2k+3) \cdots (v-k-j) \}$$

----- (II-14)

$\int_0^\infty x^\nu dx / (x^2 + 2x \cos 2\lambda_2 + 1)^k$ は、少なくとも ν が $(k-1)$ 近傍の値をとる場合には存在し、しかも ν に関して連続である。よって、 $\nu \rightarrow k-1$ の極限をとることにより、この積分値は求められ、 $E_k(\lambda_2)$ は、

$$E_k(\lambda_2) = \lim_{\nu \rightarrow k-1} \frac{2\pi i}{(k-1)!} \sum_{j=0}^{k-1} (-1)^{j+1-k} {}_{k-1}C_j \frac{e^{\pi v i} \sin(2\lambda_2(2j-v))}{(\sin 2\lambda_2)^{2k-1} (1 - e^{2\pi v i})}$$

$$\cdot \{v(v-1) \cdots (v-j+1)\} \{ (v-2k+2)(v-2k+3) \cdots (v-k-j) \}$$

----- (II-15)

で与えられる。

式(II-15)を用いて求めた $E_k(\lambda_2)$ の解析解を以下に示す。

$$E_1(\lambda_2) = \frac{2\lambda_2}{\sin 2\lambda_2} \quad \text{----- (II-16)}$$

式(II-16)は、Bierens de Haan⁽¹⁵⁾の結果と一致する。

$$E_2(\lambda_2) = \frac{2 \sin 2\lambda_2 - 4\lambda_2 \cos 2\lambda_2}{\sin^3 2\lambda_2} \quad \text{----- (II-17)}$$

$$E_3(\lambda_2) = \frac{8\lambda_2 + 4\lambda_2 \cos 4\lambda_2 - 3 \sin 4\lambda_2}{\sin^5 2\lambda_2} \quad \text{(II-18)}$$

$$E_4(\lambda_2) = \frac{27 \sin 2\lambda_2 - 108 \lambda_2 \cos 2\lambda_2 + 11 \sin 6\lambda_2 - 12 \lambda_2 \cos 6\lambda_2}{3 \sin^7 2\lambda_2}$$

----- (II-19)

$$E_9(\lambda_2) = (161280 \lambda_2 \cos 16\lambda_2 + 10321920 \lambda_2 \cos 12\lambda_2 + 126443520 \lambda_2 \cos 8\lambda_2 + 505774080 \lambda_2 \cos 4\lambda_2 + 395136000 \lambda_2 - 219168 \sin 16\lambda_2 - 8220672 \sin 12\lambda_2 - 60060672 \sin 8\lambda_2 - 113799168 \sin 4\lambda_2) / \{ 8! \cdot (\sin 2\lambda_2)^{17} \}$$

----- (II-20)

II・2 ねじりの場合

式(8-14)より、

$$E_k(\lambda_2) = \int_0^\infty \frac{d\lambda_1}{(\cosh \lambda_1)^{4m+3} (\sinh^2 \lambda_1 + \cos^2 \lambda_2)^k}$$

----- (II-21)

ここで、 $x = \sinh \lambda_1$ とおけば、

$$E_k(\lambda_2) = \int_0^\infty \frac{x^{-2k-2}}{(x^2+1)^{-2k-2} (x^2+\cos^2\lambda_2)^{-k}} dx \quad (\text{II-22})$$

となる。いま、次式で定義される複素関数 $G_k(z)$ を導入する。

$$G_k(z) = (z^2+1)^{-2k-2} (z^2+\cos^2\lambda_2)^{-k} \quad (\text{II-23})$$

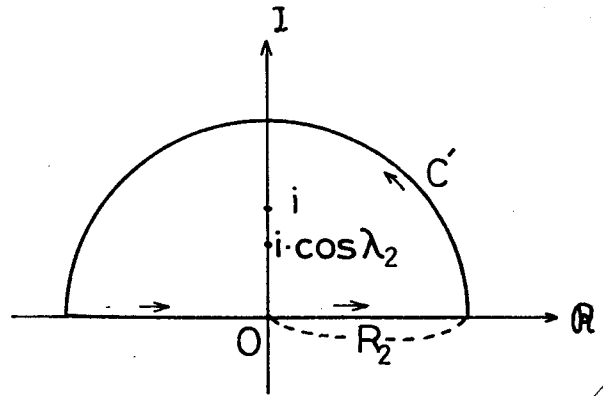
図II-2に示したような、半径 R_2 の半円 C' と実軸からなる閉経路に沿って $G_k(z)$ を積分すると、留数の定理より、

$$\int_{-R_2}^{+R_2} G_k(x) dx + \int_{C'} G_k(z) dz$$

$$\begin{aligned}
 &= 2\pi i \cdot (\sum = i \text{ と } \sum \\
 &= i \cos \lambda_2 \text{ の留数の和}) \\
 &\text{----- (II-24)}
 \end{aligned}$$

しかるに、 $R_2 \rightarrow \infty$ のとき、

$$\left| \int_{C'} G_k(z) dz \right|$$



図II-2 積分経路

$$\leq \frac{R_2}{(R_2^2 + 1)^{2k+1} (R_2^2 + \cos^2 \lambda_2)^k} \rightarrow 0$$

したがって、

$$E_k(\lambda_2) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} G_k(x) dx$$

$$= \pi i (\sum = i \text{ と } \sum = i \cos \lambda_2 \text{ の留数の和}) \text{----- (II-25)}$$

k が零あるいは自然数であれば、式(II-25)より $E_k(\lambda_2)$ の解析解が求められる。以下に、その例を示す。なお、式の簡単のため、 $\cos \lambda_2 = \alpha$ と置く。

$$E_0(\lambda_2) = \pi / 4 \text{----- (II-26)}$$

$$\begin{aligned}
 E_1(\lambda_2) &= \pi (16 + 29\alpha + 20\alpha^2 + 5\alpha^3) / \{ 2^9 \alpha \\
 &\cdot \cos^8(\lambda_2/2) \} \text{----- (II-27)}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 E_2(\lambda_2) &= \pi (128 + 896\alpha + 1920\alpha^2 + 2107\alpha^3 \\
 &+ 1309\alpha^4 + 441\alpha^5 + 63\alpha^6) / \{ 2^{16} \alpha^3 \cos^{16}(\lambda_2/2) \} \\
 &\text{----- (II-28)}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
E_3(\lambda_2) = & \pi (768 + 7680\alpha + 32512\alpha^2 + 71680\alpha^3 \\
& + 96768\alpha^4 + 85689\alpha^5 + 50490\alpha^6 + 19206\alpha^7 + 4290\alpha^8 \\
& + 429\alpha^9) / \{2^{22}\alpha^5 \cos^{20}(\lambda_2/2)\} \quad (\text{II-29})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
E_4(\lambda_2) = & 5\pi (4096 + 53248\alpha + 311296\alpha^2 \\
& + 1064960\alpha^3 + 2334720\alpha^4 + 3514368\alpha^5 \\
& + 3784704\alpha^6 + 2968823\alpha^7 + 1693835\alpha^8 \\
& + 687830\alpha^9 + 189046\alpha^{10} + 31603\alpha^{11} + 2431\alpha^{12}) \\
& / \{2^{30}\alpha^7 \cos^{26}(\lambda_2/2)\} \quad \text{-----} \quad (\text{II-30})
\end{aligned}$$

付録Ⅲ χ_j (定義式(7-6))の数值計算方法

χ_j の定義式(式(7-6))中には無限乗積が4個含まれている。この無限乗積を計算する一番簡単な方法は、無限乗積の各項をそのまま掛合わせて有限項までの積で近似する方法である。しかしながら、この方法を用いた場合には解の収束性は著しく悪い。そこで、著者は以下に示す方法により収束性の改善を試みた。

式(7-6)中の4個の無限乗積はすべて同様の形をしているので、 $\prod (\gamma_{2k-1}^+ + a_{2k-1}) \exp\{- (n+1) a_{2k-1} / (2n)\}$ の計算法について述べる。まず、 $k \rightarrow \infty$ における $(\gamma_{2k-1}^+ + a_{2k-1}) \exp\{- (n+1) a_{2k-1} / (2n)\}$ の挙動について調べる。式(7-7)より、

$$\gamma_k^\pm = \pm 1 + \frac{\frac{1}{n} - 1}{2k} \sqrt{n} \pm \frac{n(\frac{1}{n} - 1)^2}{8k^2} + O(k^{-3}), \quad k \rightarrow \infty$$

----- (Ⅲ-1)

式(7-8)および(Ⅲ-1)より、

$$\gamma_{2k-1}^+ + a_{2k-1} = 1 + \frac{\sqrt{n}(1 + \frac{1}{n})}{2(2k-1)} + \frac{n(1 - \frac{1}{n})^2}{8(2k-1)^2} + O(k^{-3}), \quad k \rightarrow \infty$$

----- (Ⅲ-2)

また、 $\exp\{- (n+1) a_{2k-1} / (2n)\}$ は、式(7-8)を用いれば、次式のように展開できる⁽¹⁶⁾。

$$\exp\left(-\frac{n+1}{2n} a_{2k-1}\right) = 1 - \frac{\sqrt{n}(1 + \frac{1}{n})}{2(2k-1)} + \frac{n(1 + \frac{1}{n})^2}{8(2k-1)^2} + O(k^{-3}), \quad k \rightarrow \infty$$

----- (Ⅲ-3)

式(Ⅲ-2)および(Ⅲ-3)より、

$$(\gamma_{2k-1}^+ + a_{2k-1}) \exp\left(-\frac{n+1}{2n} a_{2k-1}\right) = 1 - \frac{1}{2(2k-1)^2} + O(k^{-3}), \quad k \rightarrow \infty$$

----- (III-4)

一方、森口ら⁽¹⁷⁾によれば、

$$\prod_{k=1}^{\infty} \left\{ 1 - \frac{1}{2(2k-1)^2} \right\} = \cos \frac{\pi}{2\sqrt{2}}$$

----- (III-5)

したがって、上記の無限乗積は、

$$\begin{aligned} & \prod_{k=1}^{\infty} (\gamma_{2k-1}^+ + a_{2k-1}) \exp\left(-\frac{n+1}{2n} a_{2k-1}\right) \\ &= \cos \frac{\pi}{2\sqrt{2}} \prod_{k=1}^{\infty} (\gamma_{2k-1}^+ + a_{2k-1}) \exp\left(-\frac{n+1}{2n} a_{2k-1}\right) / \left\{ 1 - \frac{1}{2(2k-1)^2} \right\} \end{aligned}$$

----- (III-6)

と書直せる。式(III-6)右辺の無限乗積の項は、

$$\begin{aligned} & (\gamma_{2k-1}^+ + a_{2k-1}) \exp\left(-\frac{n+1}{2n} a_{2k-1}\right) / \left\{ 1 - \frac{1}{2(2k-1)^2} \right\} \\ &= 1 + O(k^{-3}), \quad k \rightarrow \infty \end{aligned}$$

----- (III-7)

となる。式(III-4)および(III-7)より、式(III-6)右辺は、左辺よりも収束性が良いと考えられる。

次に、数値計算結果を参照して、式(III-6)右辺および左辺の収束性を定量的に比較する。

特に $n=1$ の場合には、弾性き裂応力場解析結果より、 χ_j は次式で与えられる⁽¹⁸⁾。

$$\chi_j = (-1)^j \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2j-1)}{j! 2^j}$$

----- (III-8)

$j = 1$ の場合、

$$\lambda_1 = -\frac{1}{2} \text{----- (III-9)}$$

数値計算結果によれば、たとえば式(III-6)左辺のように無限乗積の各項を変形せずそのまま掛合わせる方法を採用した場合には、第1項から第3万項まで掛合わせて無限乗積の近似値を求め、これから λ_1 を計算しても、 λ_1 の数値解は厳密解(式(III-9))と上位4桁しか合合わなかった。これに対し、たとえば式(III-6)右辺のように変形して得られる各項を掛合わせた場合には、第1項から第62項まで掛合わせただけで、厳密解と上位6桁まで一致する λ_1 の近似的数値解が得られた。このように式(III-6)右辺は、左辺に比べて著しく収束性が良い。

本論文では、式(III-6)右辺を用いることにより、無限乗積については λ_j を精度良く、しかも短時間に求めた。

付録の参考文献

- (1) Rice, J. R., *J. Appl. Mech.*, 35 (1968), 379.
- (2) 竹内, 静岡大学工学部研究報告, 22 (昭46), 1.
- (3) たとえば, Eringen, A. C. and Suhubi, E. S., *Int. J. Engng. Sci.*, 2 (1964), 189.
- (4) Atkinson, C. and Leppington, F. G., *Int. J. Frac.*, 10 (1974), 599.
- (5) Nilsson, F., *Int. J. Solids & Struct.*, 9 (1973), 1107.
- (6) Ponter, A. R. S. and Martin, J. B., *J. Mech. & Phys. Solids*, 20 (1972), 281.
- (7) Rice, J. R., *J. Appl. Mech.*, 37-3 (1970-9), 728.
- (8) Bui, H. D., *Engng. Frac. Mech.*, 6-2 (1974-9), 287.
- (9) Strifors, H. C., *Int. J. Solids & Struct.*, 10-12 (1974-12), 1389.
- (10) Hilton, P. D. and Hutchinson, J. W., *Engng. Frac. Mech.*, 3-4 (1971-12), 435.
- (11) Hilton, P. D., *Int. J. Frac.*, 9-2 (1973-6), 149.
- (12) Rice, J. R., *Fracture* (ed. by H. Liebowitz), Vol. II, Chap. 3, (1968), 191, Academic Press.
- (13) Fung, Y. C., 固体の力学/理論, (昭45), 培風館.
- (14) 城, 応用数学解析, (昭31), 193, 養賢堂.
- (15) Bierens de Haan, D., 定積分表 (*Nouvelles Tables D'Intégrales Définies*), (1935), 岩波書店.

- (16) 森口・宇田川・一松, 数学公式Ⅱ, (昭32), 141, 岩波書店.
- (17) 文献(16)の86頁
- (18) 石田, 私信.

謝 辞

終りに臨み、本研究を遂行するにあたり終始懇切なる御指導と御鞭撻を賜りました大阪大学 大路清嗣教授、小倉敬二助教授に対し心より謝意を表します。また本論文作成に際して御教示を賜りました大阪大学 菊川 眞教授、栗谷 丈夫教授、決田 実教授、ならびに本研究の発端である Tuba の弾塑性ねじり解の存在を御指摘いただきました大阪大学 北川 浩 助教授に対し謝意を表します。大阪大学 斉藤正克助手、原田昭治助手、武藤睦治氏をはじめ大路研究室の諸氏には多大なる御助言、御援助をいただきました。特に、山蔭久明、大石弘志、坂本晴彦、中嶋洋一の諸氏には実験および解析の遂行にあたり直接御協力いただきました。深く感謝いたします。文献調査をはじめ幾多の点に関し便宜をはかっていただきました石谷研究室の諸氏に厚く感謝いたします。

発表論文

- (1) 大路西清嗣, 小倉敬二, 久保司郎, 山蔭久明,
「銅および低炭素鋼のねじりにおける切欠きクリープ破壊」,
材料, 23-246 (昭49-3), 196.
- (2) 大路西清嗣, 小倉敬二, 久保司郎,
「縦せん断下における切欠きクリープ破壊に対する力学的解析」,
材料, 23-246 (昭49-3), 202.
- (3) Ohji, Kiyotsugu, Ogura, Keiji and Kubo, Shiro,
“Creep Stress Analysis of a Notched Body Under
Longitudinal Shear and Its Applications to Crack
Propagation Problems”,
Proc. of the 1974 Symposium on Mechanical
Behavior of Materials, Vol. 1, (1974), 455.
- (4) 大路西清嗣, 小倉敬二, 久保司郎,
「ねじりにおける切欠きクリープ破壊に関する力学的検討」,
機械学会論文集, 42-354 (昭51-2).
- (5) 大路西清嗣, 小倉敬二, 久保司郎,
「主としてモードⅢ型クリープき裂成長に関する力学的検討」,
機械学会論文集, 42-354 (昭51-2).
- (6) 大路西清嗣, 小倉敬二, 久保司郎,
「縦せん断型クリープにおける切欠き強化・弱化」,
機械学会関西支部第50期定時総会講演会講演論文集, No.754
-2 (昭50-3), 64.
機械学会論文集に投稿中.

- (7) 大 路 清 嗣, 小 倉 敬 二, 久 保 司 郎, 大 石 弘 志,
「銅の収じりクリーフ下におけるき裂成長」,
第18回材料研究連合講演会前刷集, (昭49-9), 33.
- (8) 大 路 清 嗣, 小 倉 敬 二, 久 保 司 郎,
「クリーフき裂問題におけるJ積分の応用」,
機械学会講演論文集, No. 740-11 (昭49-11), 207.
- (9) 大 路 清 嗣, 久 保 司 郎,
「連続体問題における不変積分 (J積分の拡張)」
機械学会講演論文集, No. 750-1 (昭50-4), 199.
- (10) 大 路 清 嗣, 小 倉 敬 二, 久 保 司 郎,
「遷移クリーフ状態における経路不変積分 (修正J積分)」,
機械学会講演論文集, No. 750-13 (昭50-10), 65.
- (11) 大 路 清 嗣, 小 倉 敬 二, 久 保 司 郎,
「半無限板内のモードⅢ型クリーフき裂挙動に関する力学的解
析」,
機械学会 第53期通常総会学術講演会講演論文集, (昭51-4),
掲載予定.