

Title	計算機シミュレーションによるトカマク・プラズマの安定性の研究
Author(s)	徳田, 伸二
Citation	大阪大学, 1984, 博士論文
Version Type	VoR
URL	https://hdl.handle.net/11094/2603
rights	
Note	

Osaka University Knowledge Archive : OUKA

<https://ir.library.osaka-u.ac.jp/>

Osaka University

計算機シミュレーションによる
トカマク・プラズマの安定性の研究

1984年

徳田 伸二

計算機シミュレーションによるトカマク・プラズマ
の安定性の研究

徳 田 伸 二

線形理想磁気流体安定性解析コード ERATO によってトカマク・プラズマの安定性を解析した。ポロイダル座標が任意の磁束座標系を選択できる高精度の写像法を開発し、成長率の低いモードについても ERATO コードで信頼性の高い安定性解析ができるようにした。

トカマク・プラズマの中性粒子入射加熱実験において、軟 X 線の信号が鋸歯振動から高周波の連続振動に変化することが観測されている。ERATO コードを用い、 $m=1$ 内部キンク・モードの安定性を解析した。主として、ポロイダル・ベータ値、磁場のシアが安定性に与える影響を調べ、鋸歯振動から高周波振動に変化するプラズマのパラメーター領域と $m=1$ 内部キンク・モードが不安定になるパラメーター領域とが定性的に一致することを示した。また、 $m=1$ 内部キンク・モードの第二安定領域を見つけ、シアおよび楕円度に対する第二安定領域の依存性を調べた。そして、将来の強い加熱実験において予想される MHD 現象について考察した。

目 次

1. 序 論	1
1.1 トカマクによるプラズマの閉じ込め	1
1.2 プラズマのMHD 安定性	1
1.3 本研究の目的と意義	2
2. 理想電磁流体モデル	4
2.1 基礎方程式	4
2.2 境界条件	5
2.3 線形理想 MHD 方程式	7
2.4 エネルギー原理	11
3. 軸対称トロイダル・プラズマの平衡	13
3.1 グラッド・シャフラノフ方程式	13
3.2 演算子 Δ^* について	15
3.3 座標系	17
3.4 磁気面量	19
3.5 スケーリング則	20
3.6 Solovév 平衡	21
3.7 グラッド・シャフラノフ方程式の数値計算法	23
3.8 FCT 平衡	25
3.9 第3章の要約	26
4. ERATOコード	28
4.1 物理量の規格化	28
4.2 軸対称トロイダル系でのエネルギーの表式	29
4.3 真空磁場エネルギーの表式	32
4.4 境界条件	34
4.5 有限要素近似	35
4.6 第4章の要約	39
5. 写 像	41
5.1 写像の必要性	41
5.2 スプライン補間を用いた写像法	43
5.3 新写像法のテスト	45
5.4 第5章の要約	47
6. ERATOコードによる内部キック・モードの安定性解析	54
6.1 トカマクにおける MHD 安定性	54
6.2 トカマク・プラズマにおける内部キック・モード	55

6.3	平 衡	59
6.4	ERATOコードによる解析結果	60
6.5	内部キック・モードに対するトロイダル効果	61
6.6	実験との対応	62
7.	結 語	72
	謝 辞	72
	文 献	74
付録1	(2.4-5), (2.4-6)式の導出	78
付録2	(4.2-9)式の導出	81
付録3	(5.2-2)式の導出	82
付録4	(6.2-8)式の導出	84
付録5	dおよびhの導出	86
付録6	$m=1$ 内部キック・モードに対する二次形式	87

1. 序 論

1.1 トカマクによるプラズマの閉じ込め

核融合研究は、地上に制御された核融合反応を実現し、枯渇することのないエネルギーを獲得することを目的とする研究である。現在、重水素(D)と三重水素(T)の間の核融合反応(D-T反応)



を実現することが目標になっている (n: 中性子)。D-T反応でエネルギーを得るには、密度が 10^{20} m^{-3} の重水素と三重水素の混合気体を 10 KeV (約 10^8 K) 程度に加熱し、1秒以上保持することが必要である^{1,2)}。この様な高温状態では原子はイオンと電子に電離し、気体は正電荷と負電荷のほぼ等しい状態、いわゆるプラズマ (完全電離気体) になる。トカマクは、磁場によってプラズマをトーラス状に閉じ込める装置の1つであり^{3,3)}、この方式の装置のうちで、最もよい閉じ込め性能を示している。⁴⁾

トカマクは図1.1に示すような軸対称なトーラス配位をしていて、三種類の磁場でプラズマを閉じ込める。トロイダル磁場は大半径方向 (トロイダル方向) に向いた強い磁場 (1~5 T) であり、外部コイルによって作られる。この磁場は閉じ込めプラズマの安定性を確保する。トカマク自身は変圧器の構造になっていて、一次巻線に電流を立ち上がらせて二次巻線になっているプラズマ中にトロイダル方向の電流を流すことができる。このトロイダル電流 (0.5~3 MA) は小半径方向 (ポロイダル方向) にまわるポロイダル磁場を作る。ポロイダル磁場と外部コイルで作られる垂直磁場とがプラズマの平衡を保つ。また、トロイダル電流はジュール加熱によってプラズマを加熱する。

プラズマの閉じ込め条件は、磁場 \mathbf{B} とプラズマ中を流れる電流 \mathbf{j} とで生じるローレンツ力と圧力との釣り合い、すなわち、

$$\nabla p = \mathbf{j} \times \mathbf{B} \quad (1.1-1)$$

で表わされる。与えられた磁場の強さに対して、閉じ込めるプラズマの密度および温度ができるだけ高いことが望ましい。そのため、装置の閉じ込め性能を表わすパラメータとして、プラズマ圧力と磁場エネルギーの比

$$\beta \equiv \frac{\langle p \rangle}{\langle B^2 \rangle / 2\mu_0} \quad (1.1-2)$$

が定義されている (μ_0 : 真空の透磁率, $\langle \rangle$ はプラズマ体積にわたる平均)。 β -値の高い、そして、安定な平衡配位を求めることが閉じ込め研究の重要な課題の1つである。

1.2 プラズマの MHD 安定性

平衡の方程式 (1.1-1) を解いてプラズマの平衡を求めることは、閉じ込め実験の解析や安定性解析を行う上で前提となる課題である。トカマクのような軸対称トロイダル系では、方程式

(1.1-1) は1つの未知関数に対する非線形の偏微分方程式に帰着し(第3章(3.1-9)式参照), 一般には数値解法で平衡解を求める。

平衡の安定性を論じる場合, まず, 圧力や磁場および電流などの巨視的な物理量の摂動に対する安定性が重要になる。この場合には, プラズマを磁場と相互作用する流体とみなすことがよい近似になり(磁気流体モデル: **Magneto-Hydro-Dynamic model**)^{1, 5)}, この場合, 密度, 圧力, 速度, 電流および温度などがプラズマを特徴づける物理量になる。プラズマは電氣的に中性であるので, 電気力はプラズマに直接働かない。さらに, 電気抵抗や熱伝導や粘性などの散逸効果が全くないとするモデルが理想磁気流体モデル(Ideal MHD model)である。一方, 電気抵抗の効果を考慮するモデルは抵抗性磁気流体モデル(Resistive MHD model)とよばれる。次に, 物理量の摂動についての展開を一次までにすると, 摂動量について線形な運動方程式が得られ, その安定性を解析するのは比較的容易である(線形安定性問題)。特に, 理想MHDモデルでは, いわゆる, エネルギー原理^{5, 6, 7)}が成立する。しかし, 線形近似の範囲で不安定な摂動のプラズマの閉じ込めへの影響を調べるためには(非線形安定問題), 運動方程式を計算機で解いて, 摂動の時間発展を追跡する必要がある^{8, 9, 10)}。

線形理想MHD安定性の解析から, プラズマの圧力分布や電流分布の安定性に与える影響を調べることができ, ベータ値の高い安定な平衡プラズマを得る上での指針が得られる。また, 安定性に対する抵抗の影響や不安定の非線形効果を考える上での基本となる知識が得られる。

線形理想MHD方程式について成立するエネルギー原理に対して有限要素法の手法¹¹⁾を適用すると, 安定性問題が行列の固有値問題に帰着され, 安定性に重要な役割をはたす平衡の幾何学的効果(トロイダル効果)を正確に取り入れた安定性解析が可能になる。有限要素法を用いた線形理想MHD安定性解析は, 最初, 円柱プラズマに対して竹田, 下村らによって始められた¹²⁾。その後, Gruber, Burger, Appertらによって発展され^{13, 14)}, 軸対称トロイダル・プラズマの安定性解析コードERATOが開発された¹⁵⁾。一方, Grim, Green, JohnsonらによってPESTコードが開発されている^{16, 17)}。ERATOコードは, その後, 数値計算法の理論的解析やコードの改良がなされ^{18, 19, 20, 21)}, また, 臨界プラズマ試験装置JT-60の安定性解析²²⁾, 高ベータ・プラズマ平衡の安定性解析^{23, 24)}などに用いられている。

1.3 本研究の目的と意義

今までに述べた様にトカマクなどの磁場閉じ込め装置によってプラズマを閉じ込め, 核融合反応がおこる温度まで加熱するためには, プラズマが安定に閉じ込められることが重要である。プラズマの平衡の安定性を論じる場合, 線形理想MHD安定性がその基本となる。特に, 軸対称トロイダル・プラズマの安定性解析コードERATOを用いると, 現実の閉じ込め装置に対応する空間スケール, 幾何学的条件, およびプラズマ・パラメータでの安定性解析が可能になる。

本論文はERATOコードを用いたトカマク・プラズマの線形理想MHD安定性の研究について述べる。

第2章では理想MHDモデルの基礎方程式と線形安定性を解析する場合に有力な手法となるエネルギー原理について述べる。

第3章で軸対称トロイダル・プラズマの平衡を決める「グラッド・シャフラノフ方程式」の数値解法について詳しく述べる。また、プラズマの平衡およびその安定性を研究する上で有用な、そして、ERATOコードで必要になる、座標系および磁気面量とよばれる平衡を特徴づける量についても論じる。

第4章ではERATOコードで用いられるエネルギー積分を導く。また、有限要素法で安定性解析を行う場合に、スペクトル汚染 (spectral pollution)^{25, 26)}を防ぐために考案された「ハイブリッド有限要素法」¹⁵⁾、および、ERATOコードから計算される成長率の収束特性について述べる。

第5章では、数値計算で求められた平衡からERATOコードに必要な平衡量を正確に計算する写像法について論じ、従来の方法との比較を行う。

第6章では、ERATOコードで、理想MHD不安定の1つである内部キンク不安定を解析する。主として、内部キンク不安定性のベータ値依存性に着目する。また、磁場のシアやプラズマ断面の形状の効果についても調べて終わりに解析結果とトカマク・プラズマの実験との関連について議論する。

最後に、本論文でなされた研究の要約と結論を述べる。

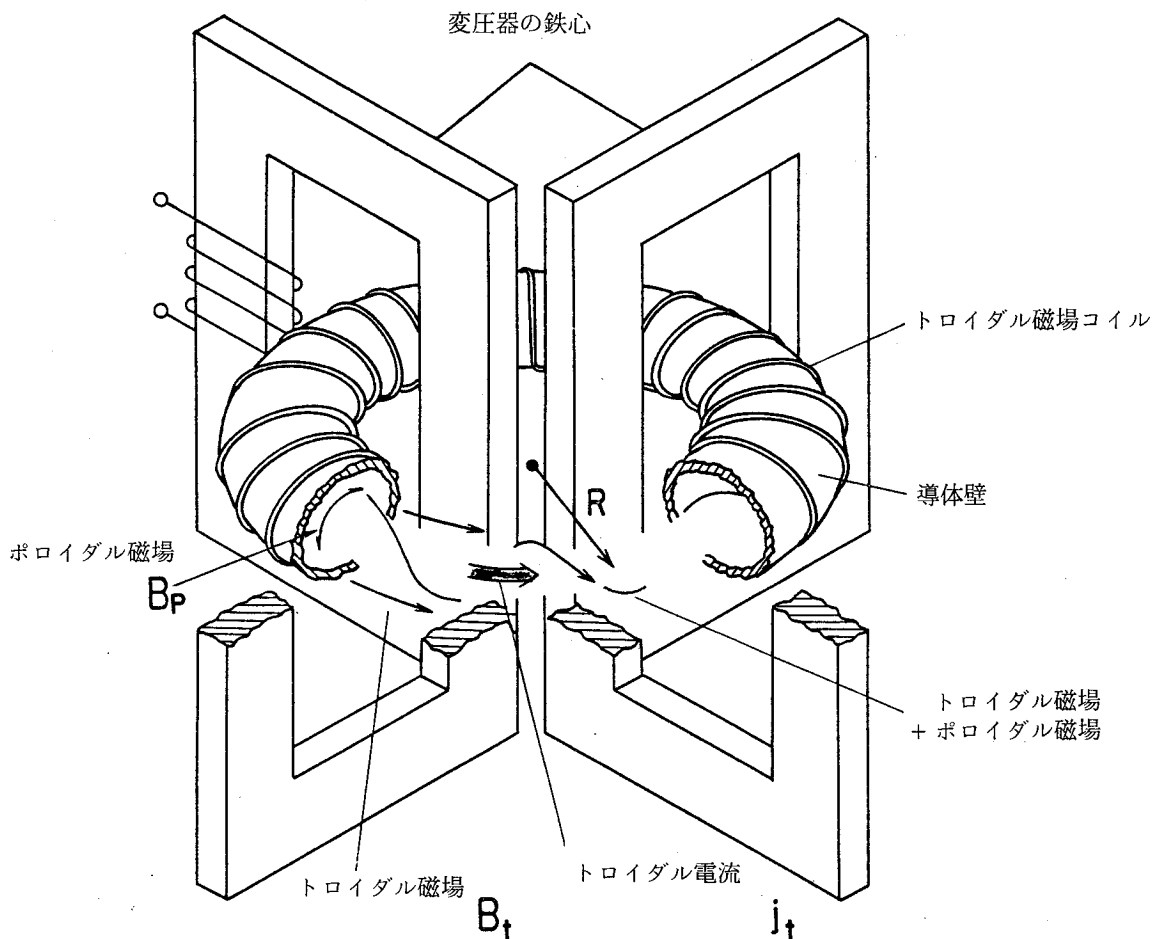


図 1.1 トカマクの概略図

2. 理想電磁流体モデル

本章では、理想電磁流体モデルの基礎方程式と境界条件について述べ、それらを線形化し、線形安定性解析において有力な手法となるエネルギー原理を導く。

2.1 基礎方程式

電磁流体モデル (Magneto hydrodynamic model : MHD model) ではプラズマは電気的中性を保ち、電流を流す伝導流体と扱われ、プラズマの運動は以下の一群の方程式で記述される⁵⁾ :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div} (\rho \mathbf{v}) = 0, \quad (2.1-1)$$

$$\rho \left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \right) \mathbf{v} = - \nabla p + \mathbf{j} \times \mathbf{B}, \quad (2.1-2)$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \right) (p \rho^{-\Gamma}) = 0, \quad (2.1-3)$$

$$\text{rot} \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j}, \quad (2.1-4)$$

$$\text{rot} \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = 0, \quad (2.1-5)$$

$$\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B} = \eta \mathbf{j}, \quad (2.1-6)$$

ここで (2.1-1) 式は密度 ρ に関する連続の方程式、(2.1-2) 式は速度 \mathbf{v} を決めるオイラー方程式である。プラズマは等方的であると仮定しており、したがってプラズマの圧力はスカラー量 p で表わされる。(2.1-2) 式の右辺第2項はプラズマの単位体積あたりに働くローレンツ力である。プラズマは電気的に中性であるので、電場 \mathbf{E} による力は受けない。(2.1-3) 式はプラズマの状態方程式であり、 Γ は理想気体の比熱比 $\frac{5}{3}$ に等しい。(2.1-4) および (2.1-5) 式は電場 \mathbf{E} と磁場 \mathbf{B} についてのマクスウェル方程式 (MKS 単位系: μ_0 は真空透磁率) である。プラズマと電磁場との相互作用は準定常的であると仮定して (2.1-4) 式では変位電流が無視されている。 η はプラズマの抵抗率であり、(2.1-6) 式はオームの法則を表わしている。これらの方程式においては、抵抗を除いて、プラズマの粘性や熱伝導などの散逸効果が無視されている。もし、プラズマの電気伝導が充分大きく抵抗が無視できる場合、オームの法則は

$$\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B} = 0 \quad (2.1-6')$$

で表わされる。方程式系 (2.1-1) - (2.1-5) および (2.1-6') は、プラズマを散逸効果がすべて無視できる理想流体と扱っていることになる (理想電磁流体モデル)。また、(2.1-6') 式から、プラズマ中の磁束 Ψ が保存される、すなわち

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \right) \Psi = 0 \quad (2.1-7)$$

が導かれる（磁力線の凍結）⁵⁾。

(2.1-2) 式より、プラズマが力学的平衡にあるためには、

$$\nabla p = \mathbf{j} \times \mathbf{B} \quad (2.1-8)$$

が成り立たねばならない。(2.1-8) 式から

$$\mathbf{B} \cdot \nabla p = 0, \quad \mathbf{j} \cdot \nabla p = 0 \quad (2.1-9)$$

が導かれる。すなわち、圧力 p は磁力線および電流線に沿って一定である。さらに、 ∇p は等圧面 $p = \text{const}$ に垂直であるから、関係式 (2.1-9) は、磁力線および電流線が等圧面上にあることを意味する。また、(2.1-4) 式より、電流密度 \mathbf{j} に対する連続の方程式

$$\text{div } \mathbf{j} = 0 \quad (2.1-10)$$

が成立し、磁場 \mathbf{B} についても $\text{div } \mathbf{B} = 0$ であるので、一本の磁力線（電流線）は、発生したり、消滅したりすることなく、等圧面を稠密におおうか、自分自身で閉じる。そのため、等圧面は磁気面（magnetic surface）とも呼ばれる。

プラズマを磁場によって壁から離し、ある有限の空間領域に閉じ込めるためには、等圧面の集合が互いに入れ子になった閉曲面によって構成されていて、プラズマ表面に対応する等圧面でプラズマの圧力はゼロでなければならない。この時、プラズマの内部に、等圧面が曲線になる部分があり、これは磁気軸と呼ばれる。プラズマの圧力は、その磁気軸上で最大になる。また、互いに入れ子になった等圧面上に磁力線と電流線があるが、球に同相な閉曲面ではそのような等圧面を作ることができず、等圧面はトーラスに同相な閉曲面でなければならない。(2.1-8) 式にマクスウェル方程式 (2.1-4) を代入すると

$$\nabla \left(p + \frac{B^2}{2\mu_0} \right) = \frac{1}{\mu_0} (\mathbf{B} \cdot \nabla) \mathbf{B} \quad (2.1-11)$$

を得る。さらに、磁場方向の単位ベクトル $\mathbf{h} \equiv \mathbf{B}/B$ を用いると (2.1-11) 式は

$$\nabla p + \nabla_{\perp} \frac{B^2}{2\mu_0} = \frac{B^2}{\mu_0 R} \mathbf{n} \quad (2.1-12)$$

と書ける。ここで $\nabla_{\perp} = \nabla - \mathbf{n} (\mathbf{n} \cdot \nabla)$ は磁力線に垂直な面内における勾配、 \mathbf{n} は磁力線に対する主法線ベクトル、 R は曲率半径である。(2.1-12) 式はローレンツカが磁力線に垂直な面内に働く圧力と、磁力線に凹な方向に働く張力とで表わされることを示している。

2.2 境界条件

プラズマの運動方程式 (2.1-1~6) には境界条件が必要である。MHD モデルでは、プラズマが空間の有限領域に閉じ込められている状態を、プラズマ表面と導体壁との間に真空領域のあるプラズマ平衡によって近似的に表わす。その場合、プラズマ圧力 p がプラズマ表面でゼロになるのが自然である。しかし、プラズマ圧力が表面近くの狭い領域で急激にゼロになる極限の平衡として、圧力が表面で不連続な平衡を考えることができる。この場合、プラズマ表面に流れる表面

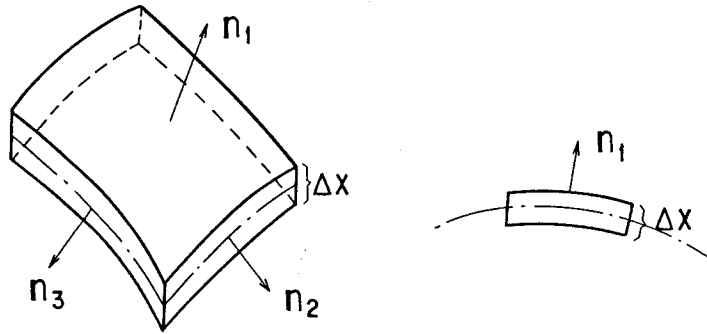
電流と、その作る磁場とのローレンツ力が圧力の飛びと釣り合っており、また、プラズマ表面は等圧面であり、磁力線と電流線はこの等圧面上にある。

プラズマ表面に働く力を考える場合は、応力テンソルを用いるのが便利である。プラズマの運動方程式は

$$\rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} \Delta\tau = \oint \vec{\mathbf{T}} \cdot \mathbf{n} dS \quad (2.2-1)$$

$$\vec{\mathbf{T}} = \frac{1}{\mu_0} \mathbf{B}\mathbf{B} - \left(p + \frac{1}{2\mu_0} B^2 \right) \vec{\mathbf{I}} \quad (2.2-2)$$

と書き直すことができる。ここで \mathbf{n} はプラズマの微小体積 $\Delta\tau$ を囲む面の外向き単位法線ベクトル、 dS は面積素、 $\vec{\mathbf{T}}$ は応力テンソル ($\vec{\mathbf{I}}$: 単位テンソル) である。図 2.1 に示すような圧力の不連続面を含む幅 Δx の微小体積を考える (\mathbf{n}_1 は不連続面の法線ベクトル、 $\mathbf{n}_2, \mathbf{n}_3$ は微小体積 $\Delta\tau$ を囲む残りの面に対する法線ベクトル。)。プラズマの加速度は有限であるので、



不連続面も含むプラズマの微小体積の運動方程式は

$$\rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} \Delta\tau = \oint \vec{\mathbf{T}} \cdot \mathbf{n} dS$$

である。ここで $\vec{\mathbf{T}}$ は応力テンソルで

$$\mathbf{T} = \frac{1}{\mu_0} \mathbf{B}\mathbf{B} - \left(p + \frac{1}{2\mu_0} B^2 \right) \vec{\mathbf{I}}$$

プラズマの加速度は有限であるから

$$\lim (\rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} \Delta\tau) = 0$$

図 2.1 プラズマ表面における境界条件

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left(\rho \frac{d}{dt} \Delta\tau \right) = 0$$

が成り立つ。また磁場 \mathbf{B} の大きさも有限であるから、 $\mathbf{n}_2, \mathbf{n}_3$ 面を通して \mathbf{n}_1 方向に働く力も、 Δx がゼロになると、消える。一方、 \mathbf{n}_1 面を通して \mathbf{n}_1 方向に働く力は、 Δx がゼロになると、

$$\left[\frac{1}{\mu_0} (\mathbf{n} \cdot \mathbf{B}_e)^2 - \frac{1}{2\mu_0} B_e^2 \right] - \left[\frac{1}{\mu_0} (\mathbf{n} \cdot \mathbf{B}_i)^2 - \left(p + \frac{1}{2\mu_0} B_i^2 \right) \right]$$

になる。ここで \mathbf{B}_e および \mathbf{B}_i は、それぞれ、プラズマ表面に外側および内側から近づいた時の磁場である (プラズマ表面の外側では $p=0$)。したがって、プラズマ表面における加速度が有限であるためには、

$$\frac{1}{\mu_0} \mathbf{n} \cdot (\mathbf{B}_e - \mathbf{B}_i) + \left[\left(p + \frac{1}{2\mu_0} B_i^2 \right) - \frac{1}{2\mu_0} B_e^2 \right] = 0 \quad (2.2-3)$$

が成り立たねばならない。プラズマ表面で磁場 \mathbf{B} の法線成分は連続であるので、(2.2-3) 式は全圧力（プラズマ圧力と磁場圧力の和）が連続である条件：

$$p + \frac{1}{2\mu_0} B_i^2 = \frac{1}{2\mu_0} B_e^2 \quad (2.2-4)$$

になる。

次に、プラズマ表面における磁場の境界条件は

$$\mathbf{n} \cdot (\mathbf{B}_e - \mathbf{B}_i) = 0 \quad (2.2-5)$$

$$\mathbf{n} \times (\mathbf{B}_e - \mathbf{B}_i) = \mu_0 \mathbf{K} \quad (2.2-6)$$

である。ここで \mathbf{K} は表面電流である。また、流体の運動に乗った座標系では電場の接線成分が連続であることと、オームの法則 (2.1-6') から、電場の境界条件として

$$\mathbf{n} \times (\mathbf{E}_e + \mathbf{v}_s \times \mathbf{B}_e) = 0 \quad (2.2-7)$$

を得る。ここで \mathbf{v}_s はプラズマ表面の速度、 \mathbf{E}_e はプラズマ表面に外側から近づいた場合の電場である。

2.3 線形理想 MHD 方程式

平衡状態にあるプラズマが摂動を受けても、もとの平衡状態にもどる場合、その平衡は安定であり、摂動が成長して、プラズマが平衡状態から離れていけば、その平衡は不安定である。したがって、(2.1-8) 式を満足する平衡解のうち、安定な平衡だけが存在しうる。

プラズマの安定性を解析する場合、摂動量を一次の微小量として扱うと、基礎方程式 (2.1-1~6) が摂動量に対して線形化されるので解析が容易になる。理想 MHD 方程式 (2.1-1~5)，(2.1-6') を線形化すると次の方程式を得る：

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div} (\rho_0 \mathbf{v}) = 0, \quad (2.3-1)$$

$$\rho_0 \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = -\nabla p + \frac{1}{\mu_0} [\text{rot} \mathbf{B}_0 \times \mathbf{B} + \text{rot} \mathbf{B} \times \mathbf{B}_0], \quad (2.3-2)$$

$$\frac{\partial p}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla p_0 + \Gamma p_0 \text{div} \mathbf{v} = 0, \quad (2.3-3)$$

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \text{rot} (\mathbf{v} \times \mathbf{B}_0), \quad (2.3-4)$$

ここで、添字“0”は平衡状態での量を表わす。したがって、線形安定性問題は、初期条件 $\mathbf{B} = 0$ ， $p = 0$ のもとで、プラズマに任意の小さい速度 \mathbf{v} を与えた場合の安定性問題に定式化される。速度 \mathbf{v} は3つの方程式 (2.3-2, 3, 4) から決定され、密度に関する方程式 (2.3-1) はプラズ

マの安定性には関係しない。

ここで

$$\mathbf{v}(\mathbf{r}, t) = \frac{\partial}{\partial t} \boldsymbol{\xi}(\mathbf{r}, t), \quad \boldsymbol{\xi}(\mathbf{r}, t=0) = 0 \quad (2.3-5)$$

を満足する変位ベクトルを定義すると (2.3-3, 4) 式は積分され、圧力 p と磁場 \mathbf{B} が

$$p = -\boldsymbol{\xi} \cdot \nabla p_0 - \Gamma p_0 \operatorname{div} \boldsymbol{\xi} \quad (2.3-6)$$

$$\mathbf{B} = \operatorname{rot}(\boldsymbol{\xi} \times \mathbf{B}_0) \quad (2.3-7)$$

で表わされる。(2.3-6, 7) 式を運動方程式 (2.3-2) に代入すると、 $\boldsymbol{\xi}$ だけに関する方程式

$$\rho_0 \frac{\partial^2 \boldsymbol{\xi}}{\partial t^2} = F(\boldsymbol{\xi}) \quad (2.3-8)$$

$$F(\boldsymbol{\xi}) = \nabla(\boldsymbol{\xi} \cdot \nabla p_0 + \Gamma p_0 \operatorname{div} \boldsymbol{\xi}) + \frac{1}{\mu_0} \{ \operatorname{rot} \mathbf{B}_0 \times \operatorname{rot}(\boldsymbol{\xi} \times \mathbf{B}_0) \\ + \operatorname{rot} \{ \operatorname{rot}(\boldsymbol{\xi} \times \mathbf{B}_0) \} \times \mathbf{B}_0 \} \quad (2.3-9)$$

を得る。演算子 F は平衡状態におけるプラズマ圧力 p_0 および磁場 \mathbf{B}_0 で決定される、エルミート演算子である⁶⁾。流体に働く力 (2.3-9) に対応するポテンシャル・エネルギー W_p は

$$W_p = -\frac{1}{2} \int_{\text{plasma}} \boldsymbol{\xi} \cdot F(\boldsymbol{\xi}) \, d\tau \quad (2.3-10)$$

で与えられる。ここで、ガウスの公式を使うと W_p は

$$W_p = \frac{1}{2} \int_{\text{plasma}} \left[\frac{1}{\mu_0} \mathbf{B}^2 + \frac{1}{\mu_0} \mathbf{j}_0 \cdot (\boldsymbol{\xi} \times \mathbf{B}) + (\boldsymbol{\xi} \cdot \nabla p_0) \operatorname{div} \boldsymbol{\xi} + \Gamma p_0 (\operatorname{div} \boldsymbol{\xi})^2 \right] d\tau \\ - \frac{1}{2} \int \left[(\boldsymbol{\xi} \cdot \nabla p_0 + \Gamma p_0 \operatorname{div} \boldsymbol{\xi}) \boldsymbol{\xi} + \frac{1}{\mu_0} (\boldsymbol{\xi} \times \mathbf{B}_0) \times \mathbf{B} \right] \cdot \mathbf{n} \, dS \quad (2.3-11)$$

で表わされる。右辺の二番の積分は、平衡状態にあるプラズマ表面全体にわたる表面積分であり、ベクトル \mathbf{n} はプラズマ表面に対して外向きの法線単位ベクトルである。

運動方程式 (2.3-8, 9) に対する境界条件は、(2.2-4) および (2.2-7) 式を線形化して得られる。プラズマ表面は、平衡状態での位置 \mathbf{r}_s から $\mathbf{r}_s + \boldsymbol{\xi}_n \cdot \mathbf{n}$ に移動している。したがって、(2.2-4) 式における圧力は (2.3-6) 式より一次の範囲で

$$p_0(\mathbf{r}_s + \boldsymbol{\xi}_n \cdot \mathbf{n}) + p(\mathbf{r}_s + \boldsymbol{\xi}_n \cdot \mathbf{n}) = p_0(\mathbf{r}_s) + \boldsymbol{\xi}_n \cdot \nabla p_0 + p(\mathbf{r}_s) \\ = p_0 - \Gamma p_0 \operatorname{div} \boldsymbol{\xi}$$

で与えられる (平衡状態では ∇p_0 は等圧面の法線方向に向いている)。磁場に対しても同様に、(2.2-4) 式の線形化された方程式として

$$p_0 - \Gamma p_0 \operatorname{div} \boldsymbol{\xi} + \frac{1}{2\mu_0} \left[(\mathbf{B}_i^2 + \boldsymbol{\xi}_n \cdot \nabla(\mathbf{B}_i^2)) + 2\mathbf{B}_i \cdot \operatorname{rot}(\boldsymbol{\xi} \times \mathbf{B}_i) \right] \\ = \frac{1}{2\mu_0} \left[(\mathbf{B}_e^2 + \boldsymbol{\xi}_n \cdot \nabla(\mathbf{B}_e^2)) + 2\mathbf{B}_e \cdot \tilde{\mathbf{B}}_e \right] \quad (2.3-12)$$

を得る ($\tilde{\mathbf{B}}_e$ は外部磁場の摂動)。そして (2.3-12) 式は、もとの平衡状態でのプラズマ表面で成り立つ。一方、平衡状態における境界条件 (2.2-4) 式より、

$$p_0 + \frac{1}{2\mu_0} B_i^2 = \frac{1}{2\mu_0} B_e^2$$

が成り立つので、結局、運動方程式の境界条件として

$$\begin{aligned} -\Gamma p_0 \operatorname{div} \xi + \frac{1}{\mu_0} \mathbf{B}_i \cdot \operatorname{rot} (\xi \times \mathbf{B}_i) \\ = \frac{1}{\mu_0} \mathbf{B}_e \cdot \tilde{\mathbf{B}}_e + \frac{1}{2\mu_0} \xi_n \mathbf{n} \cdot \nabla (B_e^2 - B_i^2) \end{aligned} \quad (2.3-13)$$

を得る。⁷⁾

次に、電場に関する境界条件 (2.2-7) 式を線形化して、平衡状態でのプラズマ表面で成り立つ関係式

$$\mathbf{E}_t + (\mathbf{v}_s \times \mathbf{B}_e)_t = 0 \quad (2.3-14)$$

(\mathbf{B}_e は平衡状態での外部磁場) を得る。ここで、マックスウェル方程式 (2.1-5) をプラズマ表面で積分すると、

$$\int \frac{\partial \tilde{\mathbf{B}}_e}{\partial t} \cdot \mathbf{n} dS = -\oint \mathbf{E}_t \cdot d\ell$$

を得る。この式に (2-33) を代入すれば

$$\begin{aligned} \int \frac{\partial \tilde{\mathbf{B}}_e}{\partial t} \cdot \mathbf{n} dS &= \oint (\mathbf{v}_s \times \mathbf{B}_e)_t \cdot d\vec{\ell} \\ &= \int \operatorname{rot} (\mathbf{v}_s \times \mathbf{B}_e) \cdot \mathbf{n} dS. \end{aligned}$$

したがって

$$\mathbf{n} \cdot \tilde{\mathbf{B}}_e = \mathbf{n} \cdot \operatorname{rot} (\xi \times \mathbf{B}_e) \quad (2.3-15)$$

を得る。さらに、真空中の磁場の振動 $\tilde{\mathbf{B}}_e$ をベクトル・ポテンシャル \mathbf{A} で表わすと ($\mathbf{B}_e = \operatorname{rot} \mathbf{A}$)、(2.3-15) 式は

$$\mathbf{n} \cdot \operatorname{rot} (\mathbf{A} - \xi \times \mathbf{B}_e) = 0 \quad (2.3-15')$$

になる。これらの面積分をプラズマ表面で行い、ストークスの定理と $\mathbf{n} \cdot \mathbf{B}_e = 0$ を使うと、ベクトル・ポテンシャルの境界条件

$$\mathbf{n} \times \mathbf{A} = -\xi_n \mathbf{B}_e \quad (2.3-16)$$

を得る。⁽⁷⁾

また、導体壁における境界条件、 $\mathbf{n} \cdot \tilde{\mathbf{B}}_e = 0$ 、は

$$\mathbf{n} \times \mathbf{A} = 0, \quad (2.3-17)$$

で表わされる。

プラズマの運動方程式の境界条件 (2.3-13) 式を用いると、ポテンシャル・エネルギー

(2.3-11) 式の表面積分の項は次のように書ける：

$$\begin{aligned}
 & -\frac{1}{2} \int \left[(\boldsymbol{\xi} \cdot \nabla p_0 + \Gamma p_0 \operatorname{div} \boldsymbol{\xi}) \boldsymbol{\xi}_n + \frac{1}{\mu_0} ((\boldsymbol{\xi} \times \mathbf{B}_i) \times \widetilde{\mathbf{B}}_i) \cdot \mathbf{n} \right] dS \\
 & = -\frac{1}{2} \int \left\{ \boldsymbol{\xi}_n^2 \left[\nabla \left(p_0 + \frac{1}{2\mu_0} B_i^2 \right) - \nabla \left(\frac{1}{2\mu_0} B_e^2 \right) \right] \cdot \mathbf{n} - \frac{1}{\mu_0} \mathbf{B}_e \cdot \widetilde{\mathbf{B}}_e \boldsymbol{\xi}_n \right\} dS
 \end{aligned} \tag{2.3-18}$$

さらに, (2.3-16) 式より,

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{2\mu_0} \int \mathbf{B}_e \cdot \widetilde{\mathbf{B}}_e \boldsymbol{\xi}_n dS & = -\frac{1}{2\mu_0} \int (\mathbf{A} \times \operatorname{rot} \mathbf{A}) \cdot \mathbf{n} dS \\
 & = \frac{1}{2\mu_0} \int (\mathbf{A} \times \operatorname{rot} \mathbf{A}) \cdot \mathbf{n}' dS
 \end{aligned} \tag{2.3-19}$$

を得る (\mathbf{n}' は真空領域からプラズマ表面へ向う法線ベクトル)。ここでベクトル公式

$$\operatorname{div} (\mathbf{A} \times \operatorname{rot} \mathbf{A}) = (\operatorname{rot} \mathbf{A})^2 - \mathbf{A} \cdot \operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{A}$$

と (2.3-17) 式および真空中では $\operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{A} = 0$ が成り立つことを用いると,

$$\frac{1}{2\mu_0} \int \mathbf{B}_e \cdot \widetilde{\mathbf{B}}_e \boldsymbol{\xi}_n dS = \frac{1}{2\mu_0} \int (\operatorname{rot} \mathbf{A})^2 d\tau \tag{2.3-20}$$

が成り立つ。ここで (2.3-20) 式の体積積分は, プラズマ表面と導体壁に囲まれた真空領域 (プラズマ外部) で行われる。

以上を要約すると, プラズマのポテンシャル・エネルギー W は次の様に表わされる⁷⁾ (以下, 平衡量を表わす添字 "0" を省略し, 摂動磁場は \mathbf{Q} で表わす: $\mathbf{Q} = \operatorname{rot} (\boldsymbol{\xi} \times \mathbf{B})$)。

$$W = W_p + W_v + W_s, \tag{2.3-21}$$

$$W_p = \frac{1}{2} \int_{\text{plasma}} \left[\frac{1}{\mu_0} \mathbf{Q}^2 + \mathbf{j} \cdot (\boldsymbol{\xi} \times \mathbf{Q}) + (\boldsymbol{\xi} \cdot \nabla p) \operatorname{div} \boldsymbol{\xi} + \Gamma p (\operatorname{div} \boldsymbol{\xi})^2 \right] d\tau, \tag{2.3-22}$$

$$W_v = \frac{1}{2\mu_0} \int_{\text{vacuum}} (\operatorname{rot} \mathbf{A})^2 d\tau, \tag{2.3-23}$$

$$W_s = \frac{1}{2} \oint_{\text{surface}} \boldsymbol{\xi}_n^2 \left[\nabla \left(\frac{1}{2\mu_0} B_e^2 \right) - \nabla \left(p_0 + \frac{1}{2\mu_0} B_i^2 \right) \right] \cdot \mathbf{n} dS \tag{2.3-24}$$

また, 境界条件は,

$$\mathbf{n} \times \mathbf{A} = -\boldsymbol{\xi}_n \mathbf{B}_e \quad \text{プラズマ表面} \tag{2.3-25}$$

$$\mathbf{n} \times \mathbf{A} = 0 \quad \text{導体壁} \tag{2.3-26}$$

で与えられる。

もし, 真空領域がなく, プラズマ表面が導体壁に一致する場合 (固定境界条件) は, ポテンシャル・エネルギー W は (2.3-22) だけになり, また, 境界条件は

$$\xi_n = 0 \quad (2.3-27)$$

で与えられる。

表面積分 (2.3-24) 式において (2.1-12) 式を用いると、

$$\nabla \left(p + \frac{B_i^2}{2\mu_0} \right) \cdot \mathbf{n} = \frac{B_i^2}{\mu_0} \kappa_e \cdot \mathbf{n}, \quad \nabla \frac{B_e^2}{2\mu_0} = \frac{B_e^2}{\mu_0} \kappa \cdot \mathbf{n} \quad (2.3-28)$$

を得る (κ_i , κ_e は、それぞれ、磁場 \mathbf{B}_i , \mathbf{B}_e の曲率)。したがって、プラズマ圧力 p がプラズマ表面でゼロになる場合には、磁力線は表面を通してなめらかに変化し、磁場の大きさも曲率も連続である。この場合、ポテンシャル・エネルギー W への表面積分 (2.3-24) 式の寄与はなくなる。

2.4 エネルギー原理

線形理想 MHD 方程式 (2.3-8) 式の作用素 F がエルミート演算子であるので、プラズマの線形安定性はエネルギー原理を用いて解析できる。

すなわち、 ξ をモード分解 ($\xi \propto e^{-i\omega t}$) すれば、固有値問題

$$-\rho_0 \omega^2 \xi = F(\xi) \quad (2.4-1)$$

を得るが、固有値 ω^2 および固有ベクトル ξ と \mathbf{A} は変分

$$\delta [W - \omega^2 K] = 0, \quad K = \frac{1}{2} \int \rho_0 \xi^2 d\tau \quad (2.4-2)$$

から得られる (ベクトル・ポテンシャル \mathbf{A} には、さらに、境界条件 (2.3-25, 26) が課せられる)。さらに、固有値 ω^2 は、固有ベクトル ξ と \mathbf{A} を用いて計算された W と K からレーリー商

$$\omega^2 = \frac{W}{K} \quad (2.4-3)$$

の関係式を満たす。また、変分 (2.4-2) 式は、 ξ についてのノルムが $K=1$ である制限のもとに、ポテンシャル・エネルギー W を極値にすることと同値である：

$$\delta W = 0 \quad (2.4-4)$$

演算子 $F(\xi)$ がエルミートであるので、 W は実数であり、また K は常に正であるので、固有値 ω^2 は実数である。

そして、 $\omega^2 < 0$ であるならば、プラズマは不安定であり、変位ベクトル ξ は成長率 $\sqrt{-\omega^2}$ で指数関数的に成長する。すなわち、線形理想 MHD モデルの範囲では、振動しながら成長するモードは存在しない。

また、仮想仕事の原理によってプラズマの安定性を解析できる。すなわち、任意の変位 ξ と境界条件 (2.3-25, 26) を満足する任意のベクトル・ポテンシャル \mathbf{A} に対して、ポテンシャル W が正であれば安定であり、ある ξ と \mathbf{A} に対して W が負になれば不安定である。

エネルギー原理 (2.4-2) はプラズマの安定性解析の有力な手段を与える。特に、数値解析の観点からは、いわゆる有限要素法が使える。

ポテンシャル・エネルギーのうち、プラズマ内部の部分 W_p は (2.3-22) 式で与えられるが、ベクトル公式およびガウスの定理を用いて、次の二通りに書き直すことができる^{6, 27, 28)} (付録1 参照)。

$$W_p = \frac{1}{2} \int \left[\frac{1}{\mu_0} \mathbf{Q}_\perp^2 + \frac{1}{\mu_0} \left(\mathbf{Q}_\parallel - \mu_0 \frac{\boldsymbol{\xi} \cdot \nabla p}{B^2} \mathbf{B} \right)^2 + \Gamma p |\operatorname{div} \boldsymbol{\xi}|^2 - \frac{\mathbf{j} \cdot \mathbf{B}}{B^2} \mathbf{Q} \cdot (\boldsymbol{\xi} \times \mathbf{B}) - 2 (\boldsymbol{\xi} \cdot \nabla p) \boldsymbol{\xi} \cdot \boldsymbol{\kappa} \right] d\tau \quad (2.4-5)$$

および、

$$W_p = \frac{1}{2} \int \left[\frac{1}{\mu_0} (\mathbf{Q} + \mu_0 (\boldsymbol{\xi} \cdot \mathbf{n}) \mathbf{j} \times \mathbf{n})^2 + \Gamma p (\operatorname{div} \boldsymbol{\xi})^2 - 2 (\boldsymbol{\xi} \cdot \mathbf{n})^2 (\mathbf{j} \times \mathbf{n}) \cdot (\mathbf{B} \cdot \nabla) \mathbf{n} \right] d\tau \quad (2.4-6)$$

ここで \mathbf{Q}_\parallel および \mathbf{Q}_\perp は、それぞれ、摂動磁場 \mathbf{Q} の平衡磁場 \mathbf{B} に対して平行な成分および垂直な成分、 $\boldsymbol{\kappa}$ は \mathbf{B} の曲率および $\mathbf{n} \equiv -\nabla p / |\nabla p|$ は等圧面の外向き単位法線ベクトルである。

(2.4-5) 式の各項は簡単な物理的意味をもっている。すなわち、第1項は、平衡磁場 \mathbf{B} に垂直な方向の磁場の摂動、すなわち、磁力線が曲がることによって生じるエネルギーを表わしており、アルフヴェン項 (シア・アルフヴェン項) とよばれる。第2項は、平衡磁場 \mathbf{B} の方向の磁場の摂動、すなわち、磁場が圧縮されることによって生じるエネルギーを表わしており、速い磁気音波項 (圧縮アルフヴェン項) とよばれる。第3項は、プラズマの圧縮によって生じるエネルギーで音波項とよばれる。以上の3項は常に正であり、プラズマの安定化に寄与する。残りの2つの項は W へ正にも負にも寄与する、すなわち、不安定の原因になる。第4項は、磁力線に平行な方向の電流成分が寄与しており、キンク項とよばれる。第5項は、プラズマ圧力、そして $\nabla p = \mathbf{j} \times \mathbf{B}$ より磁力線に垂直な方向の電流成分が寄与しており、交換不安定項 (または、バルーニング項) とよばれる。

(2.4-6) 式は、対称な形をしている。また、不安定項が第3項だけにあり、また、変位ベクトルのうち法線方向の変位が不安定の原因になることが分る。そのため、(2.4-6) 式を有限要素法で近似した時、対称行列の二次形になるので、ERATOコードではプラズマのポテンシャル・エネルギーの表式として (2.4-6) 式が用いられている。

3. 軸対称トロイダル・プラズマの平衡

プラズマの力学的平衡の方程式 (2.1-8) から、軸対称トロイダル・プラズマの平衡を記述するグラッド・シャフラノフ方程式を導く。これは、偏微分演算子は線形で非斉次項が非線形な方程式である。この方程式の線形演算子に対するグリーンの定理と非斉次項がゼロである真空磁場を導く。また、平衡と安定性の解析において重要な磁束座標系と磁気面量について述べる。

グラッド・シャフラノフ方程式は非斉次項が非線形であるので、一般には解析的に解けず、反復解法を用いて数値的に解かれる。その数値計算法として自由境界法および FCT 法について述べる。

3.1 グラッド・シャフラノフ方程式

軸対称トロイダル・プラズマの等圧面は、図 3.1 に示す様なトーラス状になっている。このようなプラズマの平衡を解析するには、トーラスの対称軸を Z 軸とする円柱座標系 (R, Z, φ) (この順序で右手系を作る。) を用いるのが便利である。この時、磁気軸の座標が $(R, Z) = (R_0, 0)$ になる様に原点を選ぶ。角 φ の廻る方向をトロイダル方向、また、磁気軸を廻る方向をポロイダル方向と呼ぶ。

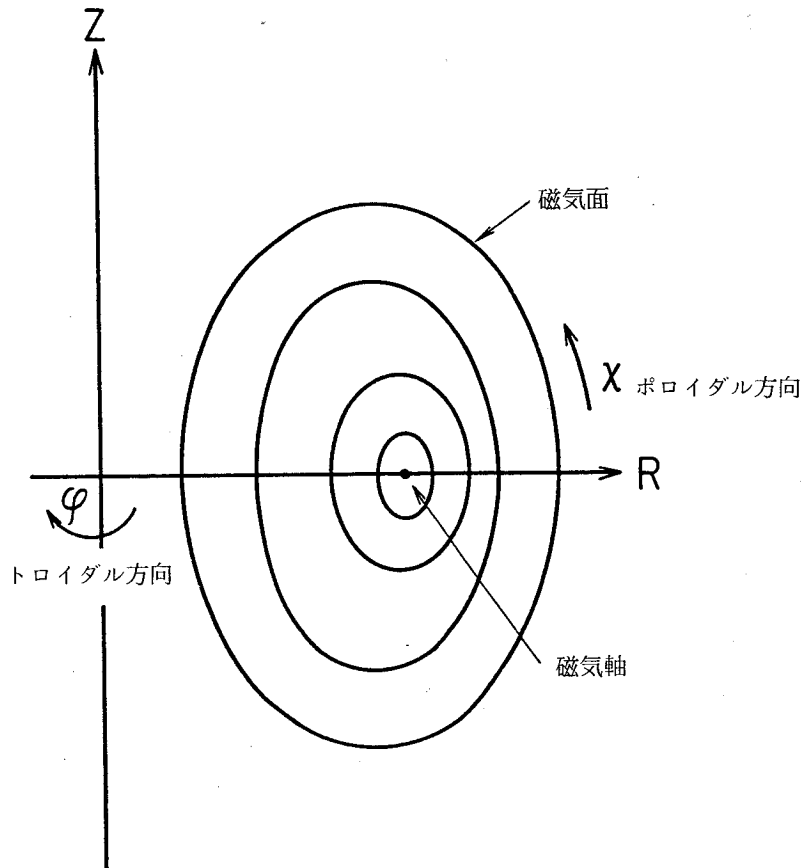


図 3.1 軸対称トロイダル配置

軸対称な平衡プラズマはトロイダル角 φ に依存しないので、 $\text{div } \mathbf{B} = 0$ は

$$\frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} (R B_R) + \frac{\partial B_Z}{\partial Z} = 0 \quad (3.1-1)$$

になる。したがって、ポロイダル磁場 $\mathbf{B}_p = (B_R, B_Z, 0)$ をスカラー関数 $\psi(R, Z)$ で表わすことができる：

$$B_R = -\frac{1}{R} \frac{\partial \psi}{\partial Z} = \frac{1}{R} (\mathbf{e}_\varphi \times \nabla \psi)_R, \quad (3.1-2)$$

$$B_Z = \frac{1}{R} \frac{\partial \psi}{\partial R} = \frac{1}{R} (\mathbf{e}_\varphi \times \nabla \psi)_Z, \quad (3.1-3)$$

ここで、ベクトル \mathbf{e}_φ はポロイダル方向の単位ベクトル。したがって、平衡磁場 \mathbf{B} は

$$\mathbf{B} = \frac{1}{R} \mathbf{e}_\varphi \times \nabla \psi(R, Z) + \frac{T(R, Z)}{R} \mathbf{e}_\varphi \quad (3.1-4)$$

で表わされる。(3.1-4) 式の右辺第2項はトロイダル磁場を表わす。また、磁場 \mathbf{B} を半径 R を一定にして、トロイダル方向に沿って線積分すれば分る様に、関数 $T(R, Z)$ は半径 R の円板を貫ぬく電流を表わしている。磁場 \mathbf{B} をベクトル・ポテンシャル \mathbf{A} で表わすと、

$$B_R = \frac{\partial A_\varphi}{\partial Z}, \quad B_Z = -\frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} (R A_\varphi)$$

であり、これらと、(3.1-1, 2) 式とから

$$\psi = -R A_\varphi \quad (3.1-5)$$

が成り立つ。磁気軸と、曲面 $\psi = \text{const.}$ 上の任意の点から出発してトロイダル方向に一周する曲線とが作るリボン状の曲線を貫ぬく磁束(ポロイダル磁束) Ψ_p は

$$\begin{aligned} \Psi_p &= -2\pi R A_\varphi(R, Z) + 2\pi R_0 A_\varphi(R_0, 0) \\ &= 2\pi (\psi - \psi_0) \end{aligned} \quad (3.1-6)$$

で与えられる (ψ_0 は磁気軸での ψ の値)。すなわち、関数 ψ はポロイダル磁束を与える。このため、 ψ はポロイダル磁束関数とよばれる。

次に、電流 $\mathbf{j} = \frac{1}{\mu_0} \text{rot } \mathbf{B}$ は

$$\mu_0 \mathbf{j} = \frac{1}{R} \Delta^* \psi \mathbf{e}_\varphi + \frac{1}{R} \nabla T \times \mathbf{e}_\varphi \quad (3.1-7)$$

である。ここで演算子 Δ^* は

$$\Delta^* \psi = R^2 \text{div} \left(\frac{\nabla \psi}{R^2} \right) \quad (3.1-8)$$

$$= R \frac{\partial}{\partial R} \left(\frac{1}{R} \frac{\partial \psi}{\partial R} \right) + \frac{\partial^2 \psi}{\partial Z^2} \quad (3.1-8')$$

で定義される。

平衡状態では $\nabla p \cdot \mathbf{B} = 0$ であるので、

$$\mathbf{B} \cdot \nabla p = \frac{1}{R} (\nabla \psi \times \nabla p) \cdot \mathbf{e}_\varphi = 0$$

が成り立つ (圧力 p は φ に依存しない)。したがって、圧力 p は ψ だけの関数である。すなわち、 $\psi = \text{const.}$ 面は磁気面になっている。また、磁気面上で一定な量、すなわち、 ψ だけの関数になっている量を磁気面量とよぶ。

電流 \mathbf{j} についても、 $\mathbf{j} \cdot \nabla p = 0$ であるので、

$$(\nabla T \times \nabla p) \cdot \mathbf{e}_\varphi = 0$$

が成り立ち、関数 T も ψ だけの関数である。(3.1-4), (3.1-7) 式より、平衡の方程式 $\nabla p = \mathbf{j} \times \mathbf{B}$ は

$$\Delta^* \psi = -\mu_0 R^2 p' - TT' \quad (3.1-9)$$

になる (添字“'”は ψ についての微分を表わす)。方程式 (3.1-9) は、平衡状態でのプラズマの圧力分布 $p(\psi)$ とトロイダル磁場の分布 $T(\psi)$ が与えられた場合、平衡を維持するのに必要なポロイダル磁場を決める偏微分方程式であり、「グラッド・シャフラノフ方程式」とよばれる³⁸⁾。この方程式は一般には非線形である。

(3.1-9) 式を用いて、電流 \mathbf{j} の式 (3.1-7) の $\Delta^* \psi$ を消去すると、

$$\mathbf{j} = \frac{T'}{\mu_0 R} \nabla \psi \times \mathbf{e}_\varphi - \left(R p' + \frac{TT'}{\mu_0 R} \right) \mathbf{e}_\varphi \quad (3.1-10)$$

を得る。右辺第一項はポロイダル電流、第二項はトロイダル電流を表わしている。電流 \mathbf{j} を磁場に平行な成分と垂直な成分、すなわち、 $\mathbf{j} = \mathbf{j}_\perp + \alpha \mathbf{B}$ で表わすと、

$$\mathbf{j}_\perp = \frac{\mathbf{B} \times \nabla p}{B^2} \quad (3.1-11)$$

$$\alpha = -\frac{p'}{B^2} T - \frac{T'}{\mu_0} \quad (3.1-12)$$

を得る。(3.1-11) 式は、いわゆる、反磁性電流 (diamagnetic current) であり、(3.1-12) 式は、キック型不安定の原因となる force-free 電流である。(3.1-12) 式を用いて、トロイダル電流 j_φ を表わすと、

$$j_\varphi = -R p' \frac{B_p^2}{B^2} + \alpha B_t \quad (3.1-13)$$

を得る (B_t : トロイダル磁場の大きさ)。プラズマの平衡においては、一般に $p' \leq 0$ であるので、(3.1-13) の右辺第一項は常に非負である。

3.2 演算子 Δ^* について

線形演算子 Δ^* に対するグリーンの定理は (3.1-8) 式より

$$\int_{\mathcal{Q}} \frac{1}{R} (u \Delta^* v - v \Delta^* u) dR dZ = \oint_{\partial \mathcal{Q}} \frac{1}{R} (u \nabla v - v \nabla u) \cdot \mathbf{n} d\ell \quad (3.2-1)$$

である。ここで、 Ω は閉曲線 $\partial\Omega$ で囲まれる、 (R, Z) 面内の領域であり、ベクトル \mathbf{n} は領域 Ω から外へ向いた単位法線ベクトル、 $d\ell$ は閉曲線 $\partial\Omega$ の長さ線素を表わす。また、 Δ^* に対するグリーン関数 $G(\mathbf{r}, \mathbf{r}^*)$ は、第1種および第2種の完全楕円積分 $K(k)$ 、 $E(k)$ を用いて、

$$G(\mathbf{r}, \mathbf{r}^*) = -\frac{1}{2\pi} \frac{\sqrt{RR^*}}{k} [(2-k^2)K(k) - E(k)] \quad (3.2-2)$$

で与えられる。²⁹⁾ $k = 4RR^* / [(R+R^*)^2 + (Z-Z^*)^2]$ 。したがって、プラズマ表面を $\psi = 0$ に選んでおくと、プラズマ外部におけるポロイダル磁束関数 ψ はプラズマ表面に沿った線積分

$$\psi(R, Z) = \oint_{\partial\Omega} G(\mathbf{r}, \mathbf{r}^*) B_p(R^*, Z^*) d\ell \quad (3.2-3)$$

で与えられる。

真空中では $p = 0$ 、 $T = \text{const.}$ と考えられる。この場合、グラッド・シャフラノフ方程式は $\Delta^* \psi = 0$ になる。この解は外部コイルを流れるトロイダル電流によって作られる磁場を表わしていると解釈できる。座標 (R, Z) を

$$R = \rho \cos \theta, \quad Z = \rho \sin \theta$$

と変数変換すれば、真空磁場 ψ_V はルジャンドル陪関数 P_n^m を用いて

$$\psi_V(R, Z) = R \rho^{n-1} P_{n-1}^1(\sin \theta) \quad (3.2-4)$$

と表わされ、右辺は R と Z の多項式である。また、

$$R = R_0 + \tilde{\rho} \cos \chi, \quad Z = \tilde{\rho} \sin \chi$$

とおいた時、 $\tilde{\rho}/R_0 \ll 1$ の近似において、主要項が $\tilde{\rho}^n \cos n\chi$ になる真空磁場 ψ_V を、解(3.2-4)の一次結合から作ることができる。 $n=0$ から $n=4$ の真空磁場 ψ_V^n は

$$\psi_V^0 = 1 \quad , \quad (3.2-5a)$$

$$\psi_V^1 = \frac{1}{2R_0 r_p} (R^2 - R_0^2) \quad , \quad (3.2-5b)$$

$$\psi_V^2 = \frac{1}{(2R_0 r_p)^2} [(R^2 - R_0^2)^2 - 4R^2 Z^2] \quad , \quad (3.2-5c)$$

$$\psi_V^3 = \frac{1}{(2R_0 r_p)^3} [8R^2 Z^4 - 12R^2 Z^2 (R^2 - R_0^2) + (R^2 - R_0^2)^3], \quad (3.2-5d)$$

$$\psi_V^4 = \frac{1}{(2R_0 r_p)^4} \left[(R^2 - R_0^2)^4 - \frac{64}{5} R^2 Z^6 + 24R^2 Z^2 (R^2 - R_0^2)^2 - 16R^2 Z^4 (3R^2 - 2R_0^2) \right] \quad (3.2-5e)$$

である。ここで、 ψ_V^n は、プラズマ断面の長さを表わす量 r_p を用いて無次元化されている。真空磁場 \mathbf{B}_V はプラズマ中に流れる電流 \mathbf{j} とのローレンツ力 $\mathbf{j} \times \mathbf{B}_V$ を通じて、平衡プラズマの位置や形状を制御することができる。また、グラッド・シャフラノフ方程式を数値的に解く場合においても、真空磁場(3.2-5)が、この目的のために用いられる。

3.3 座標系

軸対称トロイダル・プラズマの平衡は、グラッド・シャフランフ方程式で与えられ、その平衡が求まれば、エネルギー原理にもとづいて平衡のMHD安定性を解析できる。その場合、座標系を設定することが必要になる。平衡の軸対称性から、変位ベクトル ξ をトロイダル角 φ についてフーリエ展開 ($\xi \propto e^{in\varphi}$) できるため、 φ を座標の一つに選ぶ。次に、磁気面を座標に選ぶことが、数値計算の精度上、必要である。磁気面を表わす量として、ポロイダル磁束関数 ψ 、あるいは、 ψ を独立変数とする任意の単調関数 $f(\psi)$ を用いてもよい。もう一つは、ポロイダル角 χ である (図3.1 参照)。ポロイダル角の定義の方法は任意であり、安定性解析に便利な座標系が何種類もあり、それらは一般には直交していない一般曲線座標である。磁気面を座標の一つに選んだ座標系は磁束座標系 (flux coordinate) とよばれる。磁束座標系 (ψ, χ, φ) の線素 $d\ell^2$

$$d\ell^2 = g_{\psi\psi} d\psi^2 + 2g_{\psi\chi} d\psi d\chi + g_{\chi\chi} d\chi^2 + g_{\varphi\varphi} d\varphi^2 \quad (3.3-1)$$

において、共変メトリック・テンソル g_{ij} ($i, j = \psi, \chi, \varphi$) は次式で与えられる：

$$\left. \begin{aligned} g_{\psi\psi} &= \frac{g}{R^2} |\nabla\chi|^2, \\ g_{\psi\chi} &= -\frac{g}{R^2} \nabla\psi \cdot \nabla\chi, \\ g_{\chi\chi} &= \frac{g}{R^2} |\nabla\psi|^2, \\ g_{\varphi\varphi} &= R^2, \end{aligned} \right\} \quad (3.3-2)$$

および、

$$\frac{1}{\sqrt{g}} = (\nabla\psi \times \nabla\chi) \cdot \nabla\varphi \quad (3.3-3)$$

平衡磁場 \mathbf{B} および平衡電流 \mathbf{j} の反変成分は、(3.1-4) および (3.1-10) 式から、

$$\left. \begin{aligned} B^\psi &= \mathbf{B} \cdot \nabla\psi = 0 \\ B^\chi &= \mathbf{B} \cdot \nabla\chi = \frac{1}{\sqrt{g}} \\ B^\varphi &= \mathbf{B} \cdot \nabla\varphi = \frac{T}{R^2} \end{aligned} \right\} \quad (3.3-4)$$

および

$$\left. \begin{aligned} j^\psi &= \mathbf{j} \cdot \nabla\psi = 0 \\ j^\chi &= -\frac{T'}{\mu_0 \sqrt{g}} \\ j^\varphi &= -p' - \frac{TT'}{\mu_0 R^2} \end{aligned} \right\} \quad (3.3-5)$$

である。

(R, Z) 面において, 等 ψ 線の方程式は, 等 ψ 線の長さを ℓ として,

$$\frac{dR}{d\ell} = -\frac{1}{|\nabla\psi|} \frac{\partial\psi}{\partial Z}, \quad \frac{dZ}{d\ell} = \frac{1}{|\nabla\psi|} \frac{\partial\psi}{\partial R} \quad (3.3-6)$$

であるので,

$$\frac{R}{\sqrt{g}} = \frac{\partial\psi}{\partial R} \frac{\partial\chi}{\partial Z} - \frac{\partial\psi}{\partial Z} \cdot \frac{\partial\chi}{\partial R} = |\nabla\psi| \cdot \left. \frac{d\chi}{d\ell} \right|_{\psi=\text{const.}} \quad (3.3-7)$$

すなわち,

$$\left. \frac{d\chi}{d\ell} \right|_{\psi=\text{const.}} = \frac{1}{\sqrt{g} B_p} \quad (3.3-8)$$

を得る。したがって, ヤコビアン \sqrt{g} を決めれば, 等 ψ 線に沿って(3.3-8)式の線積分を行うことによって, (ψ, χ, φ)座標を構成することができる。等 ψ 線を一周すると, χ は 2π だけ増えるので, ヤコビアン \sqrt{g} には

$$\oint \frac{d\ell}{\sqrt{g} B_p} = 2\pi \quad (3.3-9)$$

という制約条件が課せられる。

ERATOコードで用いられている座標系は2種類ある。1つは, 磁力線の傾き B^φ/B^χ が ψ だけの関数

$$\frac{B^\varphi}{B^\chi} = \frac{\sqrt{g}T}{R^2} = q(\psi) \quad (3.3-10)$$

になる様にヤコビアン \sqrt{g} を選ぶ自然座標系(natural coordinate)である。 $q(\psi)$ は安定係数とよばれ, プラズマの安定性理論において重要な役割をはたす。 $q(\psi)$ 自身は制約条件(3.3-9)より,

$$q(\psi) = \frac{T}{2\pi} \oint \frac{d\ell}{R^2 B_p} \quad (3.3-11)$$

で与えられ, そして

$$\sqrt{g} = \frac{R^2}{T} q \quad (3.3-12)$$

$$\left. \frac{d\chi}{d\ell} \right|_{\psi=\text{const.}, q} = \frac{T}{R^2 B_p} \quad (3.3-13)$$

である。しかしながら, この座標系には, 数値計算上, 不利な一面がある。すなわち, ポロイダル磁場 B_p はトーラスの外側で強く, 内側で弱い傾向にあるため, (3.3-13)式から分るように, 自然座標系は, χ -座標がトーラスの外側で開いた座標系になる。一方, プラズマの不安定なモードの変位ベクトルはトーラスの外側に局在する傾向にある。そのため, 自然座標系において有限のメッシュ数で変位ベクトルを精度よく近似するためにはメッシュ数を増やさねばならない。

(R, Z)座標から見て, 等 χ 線がポロイダル方向にほぼ, 均一になる座標系を構成するためには, χ の増分が等 ψ 線の長さ ℓ の増分に比例する様にヤコビアン \sqrt{g} を選ばばよい(等弧座標)。すなわち,

$$\sqrt{g} = \frac{L(\psi)}{2\pi} \frac{1}{B_p} \quad (3.3-14)$$

$$\left. \frac{d\chi}{d\ell} \right)_{\psi=\text{const.}} = \frac{2\pi}{L(\psi)} \quad (3.3-15)$$

ここで、 $L(\psi)$ は等 ψ 線の長さである。

3.4 磁気面量

関係式(3.3-8)を利用すると、平衡諸量の体積積分や面積積分を等 ψ 線に沿った線積分に変換することができる。たとえば、磁気面 $\psi = \text{const}$ によって囲まれた体積 $V(\psi)$ は

$$V(\psi) = \int \sqrt{g} d\psi d\chi d\varphi \text{ であるので}$$

$$\frac{dV}{d\psi} = 2\pi \int \sqrt{g} d\chi = 2\pi \oint_{B_p} \frac{d\ell}{B_p} \quad (3.4-1)$$

を得る。一般に、ある物理量 X の、2枚の磁気面 ψ と $\psi+d\psi$ に囲まれた領域の平均値 $\langle X \rangle$ は

$$\langle X \rangle \equiv \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta V} \int_{\psi}^{\psi+d\psi} X d\tau = \frac{d}{dV} \int X \sqrt{g} d\psi d\chi d\varphi$$

$$= 2\pi \oint_{B_p} \frac{X}{B_p} d\ell \Big/ \frac{dV}{d\psi} \quad (3.4-2)$$

で与えられる ($d\tau$: 体積素)³⁰⁾。また、 $\psi = \text{const.}$ によって囲まれる断面を貫くトロイダル磁束 Ψ_t は

$$\Psi_t = \int (\mathbf{B} \cdot \nabla \varphi) \sqrt{g} d\psi d\chi = \int \frac{\sqrt{g} T}{R^2} d\psi d\chi \quad (3.4-3)$$

である。したがって

$$\frac{d\Psi_t}{d\psi} = \frac{1}{2\pi} \frac{d\Psi_t}{d\psi} = \frac{T}{2\pi} \oint \frac{d\ell}{R^2 B_p} = q \quad (3.4-4)$$

を得る。また、

$$q = \frac{T}{4\pi^2} \frac{dV}{d\psi} \left\langle \frac{1}{R^2} \right\rangle \quad (3.4-5)$$

$$\frac{d\Psi_t}{dV} = \frac{T}{2\pi} \left\langle \frac{1}{R^2} \right\rangle \quad (3.4-6)$$

が成り立つ。

グラッド・シャフラノフ方程式

$$\text{div} \left(\frac{\psi'}{R^2} \right) = -\mu_0 p' - \frac{TT'}{R^2}$$

を磁気面で平均すると、

$$\int \operatorname{div} \left(\frac{\psi}{R^2} \right) d\tau = \int \frac{|\nabla\psi|^2}{R^2} \sqrt{g} dx d\varphi$$

より、磁気面で平均された平衡方程式

$$\frac{1}{V'} (V' \langle B_p^2 \rangle)' = -\mu_0 p' - TT' \left\langle \frac{1}{R^2} \right\rangle \quad (3.4-7)$$

を得る。(3.4-5, 6, 7) 式は、FCT (Flux Conserving Tokamak) 過程にもとづいて、平衡を求める場合に用いられる。(3.4-7) 式を $\psi_1 = \psi_0$ から $\psi_1 = \psi_2$ まで積分し、 $\langle B_p^2 \rangle_0 = 0$ に注意すると、

$$\begin{aligned} \mu_0 [p(\psi_2) - p_0] + \frac{1}{2} \langle B_p^2 \rangle_{\psi_2} \\ = - \int_{\psi_0}^{\psi_2} TT' \left\langle \frac{1}{R^2} \right\rangle d\psi_1 - \int_{\psi_0}^{\psi_2} \frac{\langle B_p^2 \rangle}{2} [\ell n \langle B_p^2 \rangle V'^2]' d\psi_1 \end{aligned} \quad (3.4-8)$$

を得る。さらに (3.4-8) 式を $\psi_2 = \psi_0$ から $\psi_2 = \psi$ まで体積積分で平均すると、

$$\begin{aligned} \mu_0 [\bar{p} - p(\psi)] = \frac{1}{2} \langle B_p^2 \rangle_{\psi} \\ + \int_{\psi_2}^{\psi} \frac{V(\psi_2)}{V(\psi)} \left\{ TT' \left\langle \frac{1}{R^2} \right\rangle + \frac{\langle B_p^2 \rangle}{2} \left[\ell n \left(\frac{V'^2 \langle B_p^2 \rangle}{V} \right) \right]' \right\} d\psi_2 \end{aligned} \quad (3.4-9)$$

を得る ($\bar{p} = \int p d\tau / V$)。ポロイダル・ベータ, β_p , を

$$\beta_p = \frac{\bar{p}}{\langle B_p^2 \rangle_{\psi_s} / 2\mu_0} \quad (3.4-10)$$

で定義し (ψ_s : プラズマ表面での ψ の値), $p(\psi_s) = 0$ と仮定すると, β_p は

$$\beta_p = 1 + \int_{\psi_0}^{\psi_s} \frac{V(\psi)}{\langle B_p^2 \rangle_{\psi_s} V(\psi_s)} \left\{ 2 TT' \left\langle \frac{1}{R^2} \right\rangle + \langle B_p^2 \rangle \left[\ell n \frac{V'^2 \langle B_p^2 \rangle}{V} \right]' \right\} d\psi \quad (3.4-11)$$

と表わされる²⁹⁾。プラズマ断面が円に近い平衡で, $\beta_p \sim 1$ の範囲では, (3.4-11) 式の被積分関数の第二項は無視することができる。したがって, $T' = 0$, すなわち, プラズマが, トロイダル電流とそれの作るポロイダル磁場だけで閉じ込められている場合は $\beta_p \approx 1$ である。また β_p が 1 より大きい小さいかは T' の符号によって決まる。この場合, プラズマはトロイダル電流とポロイダル電流で閉じ込められる。そして $\beta_p \gg 1$ の場合は, むしろ, プラズマはポロイダル電流で閉じ込められているとみなすことができる。

3.5 スケーリング則

グラッド・シャフラノフ方程式の一つの解 ψ から次のスケーリングによって新しい解 $\tilde{\psi}$ を得る

ことができる：

$$\tilde{\psi} = \sigma \psi \quad (3.5-1)$$

$$\tilde{p}(\tilde{\psi}) = \sigma^2 p(\psi) \quad (3.5-2)$$

$$\tilde{T}^2(\tilde{\psi}) - \tilde{T}^2(\psi_0) = \sigma^2 [T^2(\psi) - T^2(\psi_0)] \quad (3.5-3)$$

この時、新しい解 $\tilde{\psi}$ に対応する安定係数 $\tilde{q}(\tilde{\psi})$ は次のように変化する：

$$\tilde{q}(\tilde{\psi}) = \frac{\tilde{T}(\tilde{\psi})}{T(\psi)} \frac{1}{\sigma} q(\psi) \quad (3.5-4)$$

(3.5-3, 4)式より、スケーリングにおいて磁気軸でのトロイダル磁場を不変にしておけば、磁気軸での安定係数 \tilde{q}_0 はスケーリング前の q_0 の $1/\sigma$ になる。この様に、1つの平衡が得られるとスケーリング則を利用して、 q_0 をパラメータにした一連の安定性解析ができる。しかし、このスケーリングでは、ベータ値($\beta = 2\mu_0 P/B^2$)は変化するが、ポロイダル・ベータ値は不変である。

3.6 Solov'ev 平衡

グラッド・シャフラノフ方程式は一般には非線形であるので解 $\psi(R, Z)$ は反復法を伴う数値計算によって求められる。しかし、 p' と TT' が定数であれば、 $\psi(R, Z)$ の解析形が次式で与えられる：

$$\psi(R, Z) = \frac{\psi_s}{a^2 R_0^2} \left[\frac{(1-d)R^2 + dR_0^2}{E^2} Z^2 + \frac{(R^2 - R_0^2)^2}{4} \right] \quad (3.6-1)$$

この平衡では磁気軸($R = R_0, Z = 0$)およびプラズマ表面における ψ の値が、それぞれ、ゼロおよび ψ_s になっている。また、圧力 p 、トロイダル磁場関数 T は

$$p(\psi) = \frac{1}{\mu_0} \frac{2\psi_s}{a^2 R_0^2} \left(1 + \frac{1-d}{E^2} \right) (\psi_s - \psi) \quad (3.6-2)$$

$$T^2(\psi) = (R_0 B_t)^2 - \frac{2d\psi_s}{a^2 E^2} \psi \quad (3.6-3)$$

である(B_t : 磁気軸でのトロイダル磁場)。(3.6-1, 2, 3)式で与えられる平衡はSolov'ev平衡³¹⁾とよばれ、グラッド・シャフラノフ方程式の数値解法において、反復の初期近似解として用いられる。 p' 、 TT' が一定であるのでトロイダル電流は平坦な分布をし、また、プラズマ表面でゼロにならない。 TT' の符号は $-d$ の符号に一致するから、(3.4-11)式の議論より、 $d > 0$ の時、 $\beta_p < 1$ の、また $d < 0$ の時、 $\beta_p > 1$ の平衡が得られる。

プラズマ表面のR軸上での位置は

$$R_{\pm}^2 = R_0^2 \pm 2aR_0$$

であるから、プラズマの主半径 R_M および小半径 r_p を

$$R_M = \frac{R_+ + R_-}{2}, \quad r_p = \frac{R_+ - R_-}{2} \quad (3.6-4)$$

で定義すると,

$$R_0 = \sqrt{R_M^2 + r_p^2}, \quad a = \frac{R_M r_p}{R} \quad (3.6-5)$$

である。等 ψ 線は補助変数 ϑ ($0 \leq \vartheta \leq 2\pi$) を用いて,

$$R = R_0 \sqrt{1 + 2\epsilon s \cos \vartheta} \quad (3.6-6a)$$

$$Z = \frac{a E s \sin \vartheta}{\sqrt{1 + 2\epsilon s (1-d) \cos \vartheta}} \quad (3.6-6b)$$

で表わされる ($\epsilon = a/R_0$, $s = \sqrt{\psi/\psi_s}$)。したがって, 磁気軸近傍 ($s \ll 1$) では

$$R = R_0 + a s \cos \vartheta$$

$$Z = a E s \left(\sin \vartheta - \frac{1}{2} \epsilon s (1-d) \sin 2\vartheta \right)$$

と展開される。磁気軸近傍で等 ψ 線は詳半径 R_0 , 小半径 a , 楕円度 $\kappa = Z_{\max}/a \simeq E$ の形状をもつ。三角度 δ を $\delta = (R_0 - R_{\max})/a$ で定義すると (R_{\max} , Z_{\max} は等 ψ 線上で $dZ/dR = 0$ になる位置), パラメータ d は

$$d = 1 - \delta / (\epsilon s^2)$$

である。

パラメータ E と d をプラズマ表面での楕円度 ($\kappa = Z_{\max}/r_p$)と三角度 δ ($\delta = (R_M - R_{\max})/r_p$)によって表わすと,

$$E = \frac{2R_0 Z_{\max}}{\sqrt{(R_0^2 - R_{\max}^2)^2 + 4a^2 R_0^2}} \quad (3.6-7)$$

$$d = 1 - \frac{2R^2 (R_0^2 - R_{\max}^2)}{(R_0^2 - R_{\max}^2)^2 + 4a^2 R_0^2} \quad (3.6-8)$$

を得る。

Solov'ev平衡の安定係数 $q(\psi)$ は

$$\begin{aligned} q(\psi) &= \frac{T}{2\pi} \oint \frac{d\ell}{R |\nabla \psi|} = \frac{T}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\frac{dR}{d\vartheta}}{R \left| \frac{\partial \psi}{\partial Z} \right|} d\vartheta \\ &= \frac{T}{2\pi} \frac{a^2 E}{2\psi_s R_0} \int_0^{2\pi} \frac{d\vartheta}{\sqrt{1 + 2\epsilon s (1-d) \cos \vartheta} (1 + 2\epsilon s \cos \vartheta)} \end{aligned} \quad (3.6-9)$$

で与えられる。したがって, 磁気軸での安定係数は

$$q_0 = \frac{a^2 E}{2\psi_s} B_t \quad (3.6-10)$$

である。ゆえに, ψ_s は磁気軸での安定係数 q_0 を用いて

$$\psi_s = \frac{a^2 E}{2q_0} B_t \quad (3.6-11)$$

で表わされる。

以上から、Solov'ev 平衡 (3.6-1, 2, 3) は、プラズマの形状を決定するパラメータ、すなわち、主半径 R_M 、小半径 r_p 、楕円度 κ および三角度 δ と、磁気軸でのトロイダル磁場 B_t と安定係数 q_0 によって決定されることが分る。

3.7 グラッド・シャフラノフ方程式の数値計算法

グラッド・シャフラノフ方程式

$$\Delta^* \psi = -\mu_0 R^2 p' - TT' = f(R, \psi) \quad (3.7-1)$$

を数値的に解く方法として、 p' 、 TT' の分布を与え反復法で解くことが考えられる。以下、電流の単位を $\mu_0 = 1$ になる様に変える (MKSA 単位系で $10/4\pi$ MA の電流がこの単位系では 1 の電流に相当する。)。また、 $\psi(R, Z)$ には定数だけの任意性があるが、プラズマ表面の ψ の値をゼロに選ぶのが、数値計算上、便利である。 p' 、 TT' の分布として、たとえば、

$$p' = -\beta_J [1 - C_1 x^2 - (1 - C_1) x^3] \quad (3.7-2a)$$

$$TT' = -R_M^2 (1 - \beta_J) [1 - C_4 x^5 - (1 - C_4) x^6] \quad (3.7-2b)$$

$$x = \frac{\psi - \psi_0}{\psi_s - \psi_0} = 1 - \frac{\psi}{\psi_0} \quad (3.7-2c)$$

がよく用いられる (C_j , $j=1, \dots, 6$ は定数)。この分布ではトロイダル電流がプラズマ表面 ($\psi = \psi_s = 0$) でゼロであり、また、(3.4-8) 式から (3.4-11) 式までの議論から分るように、パラメータ β_J は作られる平衡の β_p の目安を与える。

(3.7-1) 式を単純な反復法

$$\Delta^* \psi^{n+1} = f(R, \psi^n) \quad (3.7-3)$$

で解こうとすると、 ψ^n は求めるべき解に収束しないで物理的に自明な解 (たとえば $\psi \equiv 0$ が解として存在すれば $\psi \equiv 0$) に収束することが多いことが知られている³²⁾。そこで、解に物理的な制約条件を課し、次の反復スキーム:

$$\Delta^* \hat{\psi} = \lambda_n f(R, \psi^n) \quad (3.7-4)$$

が用いられる。そして (3.7-4) の解 $\hat{\psi}$ に、制約条件を満足する様にスケール・ファクター σ をかけ、同時に λ_n にも σ をかけて、次のステップのための ψ^{n+1} 、 λ_{n+1} を作る:

$$\psi^{n+1} = \sigma \hat{\psi}, \quad \lambda_{n+1} = \sigma \lambda_n \quad (3.7-5)$$

この反復法で用いられる制約条件として、

- (a) 全トロイダル磁束が一定。 $\psi_s = 0$ であるから、これは $\psi_0 = \text{一定}$ という条件に等しい。
- (b) 全トロイダル電流が一定。
- (c) 磁気軸での安定係数 q_0 が一定。

があげられる。

次に、 $\psi^n = \psi^n(R, Z)$ が求まったとして線形偏微分方程式

$$\Delta^* \hat{\psi} = g(R, Z) \quad (3.7-6)$$

$$g(R, Z) \equiv \lambda_n f(R, \psi^n) \quad \text{in } \Omega \quad (3.7-6')$$

を与えられた境界条件のもとで解く必要がある (Ω : プラズマ内部)。プラズマ表面の形状 ($\partial\Omega$) があらかじめ与えられている場合は Dirichlet 型の境界値問題を解くことになる (固定境界法)。

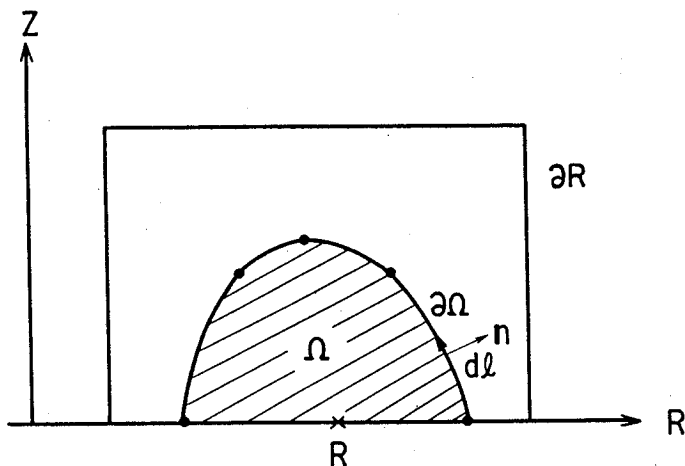


図 3.2 自由境界法で用いられる長方形領域

一方、自由境界法とよばれる方法では図 3.2 に示す様なプラズマ領域 Ω を含む長方形領域 \bar{R} を考える。長方形領域の境界 $\partial\bar{R}$ 上の ψ の値 $h(R, Z)$ は (3.2-3) 式より

$$h(R, Z) = \oint_{\partial\Omega} G(\mathbf{r}, \mathbf{r}^*) B_p(R^*, Z^*) d\ell \quad (3.7-7)$$

で与えられる。もちろん、 $h(R, Z)$ は真の解 ψ が求まった場合のみ計算できるのであるが、 $B_p(R^*, Z^*)$ を反復の前段階の解 ψ^n を使って

$$\tilde{B}_p^n(R^*, Z^*) = \frac{\tilde{I}_p^n}{I_p^n} B_p^n(R^*, Z^*) \quad (3.7-8)$$

($B_p^n = |\nabla\psi^n|/R$) で近似し、 $\psi^n = 0$ の等 ψ 線 $\partial\Omega_n$ に沿った線積分 (3.7-7) を境界値 $h(R, Z)$ として採用する。(3.7-8) 式において I_p^n 、 \tilde{I}_p^n は反復の前後における全トロイダル電流である：

$$I_p^n = \oint_{\partial\Omega_n} B_p^n d\ell \quad (3.7-9a)$$

$$\tilde{I}_p^n = \int \lambda_n f(R, \psi^n) dR dZ \quad (3.7-9b)$$

境界値 $h(R, Z)$ が求まると、次の境界値問題

$$\Delta^* \hat{\psi} = \begin{cases} g(R, Z) & \text{in } \Omega_n \\ 0 & \text{in } \bar{R} - \Omega_n \end{cases} \quad (3.7-10a)$$

$$\hat{\psi} = h(R, Z) \quad \text{at } \partial\bar{R} \quad (3.7-10b)$$

を解くことができる。この場合、境界が長方形であるので double cyclic reduction 法³³⁾ という高速の直接解法を用いることができ、数値計算上有利である。

今までの議論から分る様に、自由境界法では $\psi^{n+1}(R, Z) = 0$ の位置と $\psi^n(R, Z) = 0$ の位置とは一致しない。すなわち、プラズマ表面は反復解 ψ^2 が収束した後で決定される。しかし、3.2節で述べた様に、真空磁場 ψ_v を(3.7-10a)の解 ψ に加えることによってプラズマの形状を制御することができる。たとえば、(3.2-5)式の5種類の真空磁場を用いると、 $\psi^n(R, Z) = 0$ の等 ψ 線が、あらかじめ指定した5点の固定点を常に通る様になる。

3.8 FCT 平衡

前節で述べた反復解法には次のような2つの欠点がある。1つは、トカマク配位($q(\psi)$ が ψ について単調増加関数であり、かつ、等 ψ 線が円に同相)のもとで高 β な平衡解 $\psi(R, Z)$ をもたらず圧力 p およびトロイダル磁場関数 T の分布を見出すことがむづかしいことである。もう1つは、平衡解 ψ が求まってから安定係数 q が与えられることである。平衡の安定性解析では、むしろ、安定係数 q があらかじめ与えられた分布をし、他のパラメータ(たとえば圧力分布やベータ値)の異なる平衡群について一連の安定性解析を行うことが多い。

トロイダル磁場関数 T のかわりに安定係数 q を与えてグラッド・シャフラノフ方程式の解法として、FCT(Flux Conserving Tokamak)過程^{34, 35, 36)}にもとづいた解法がある。これによって $\beta > 10\%$ の平衡を容易に求めることができる。

プラズマ中でおこる輸送過程の特徴的な時間スケールより早い時間スケールでプラズマの加熱や圧縮が行われると、磁力線がプラズマに凍結するため、プラズマとともに動いている座標系ではポロイダル磁束 Ψ_p もトロイダル磁束 Ψ_t も保存される(FCT過程)。したがって、 ψ の関数ともて $\Psi_t(\psi)$ 、 $q(\psi)$ も不変である。さらに、断熱過程では

$$\mu(\psi) = p \left(\frac{dV}{d\Psi_t} \right)^\Gamma \quad (3.8-1)$$

も保存される($\Gamma = 5/3$)³⁶⁾。この様なFCT過程ではトロイダル磁場関数 $T(\psi)$ は(3.4-5, 6, 7)式を用いて常微分方程式

$$\begin{aligned} \frac{T'}{T} \left[\nu K \langle R^{-2} \rangle + \Gamma \mu \left(\frac{\langle R^{-2} \rangle}{2\pi} \right)^\Gamma T^{\Gamma-2} + \langle R^{-2} \rangle \right] \\ = -\nu \langle R^{-2} \rangle K' - \left(\frac{\langle R^{-2} \rangle}{2\pi} \right)^\Gamma \mu' T^{\Gamma-2} \end{aligned} \quad (3.8-2)$$

$$\frac{d\Psi_t}{dV} = \frac{T}{2\pi} \langle R^{-2} \rangle \quad (3.8-2b)$$

で与えられる。ここで

$$\nu = \frac{1}{4\pi^2 q} \quad (3.8-3)$$

$$K = \frac{1}{T} V' \langle B_p^2 \rangle = \frac{1}{q} \left[\oint \frac{d\ell}{R^2 B_p} \right] \left[\oint \frac{d\ell}{B_p} \right] \quad (3.8-4)$$

また、トロイダル磁束 Ψ_t が不変であることから、 Ψ_t について次の境界条件が課せられる。

$$\left. \begin{aligned} \Psi_t(V=V_s) &= \Phi \quad (= \text{一定}) \\ \Psi_t(V=0) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (3.8-5)$$

方程式 (3.8-2) において、 $\langle R^{-2} \rangle$ および K は $\psi(R, Z)$ が求まっていないと計算できないので、これらの方程式とグラッド・シャフラノフ方程式 (3.1-9) とを交互に解く反復法が必要である。したがって、方程式 (3.8-2) では $\langle R^{-2} \rangle$ 、 K および V は ψ について既知の関数である。また、 $\nu(\psi)$ および $\mu(\psi)$ は与えられた不変な関数である。この場合、方程式 (3.8-2) は、境界条件 (3.8-6) を課せられた、トロイダル磁束 Ψ_t についての非線形固有値問題であり、表 3.1 に示す反復法で解かれる (添字 "n" は反復のステップを表わす)。

反復的に求めた $T(\psi)$ と $p(\psi) = \mu(d\Psi_t/dV)^F$ をグラッド・シャフラノフ方程式 (3.1-9) の右辺に代入して、 $\psi(R, Z)$ を求め、 $\langle R^{-2} \rangle$ 、 K および V を更新して再び方程式 (3.8-2) を解く。この反復が収束すれば、与えられた q および μ に対応する平衡が得られたことになる。さらに μ を $\mu + \Delta\mu$ に増大させて反復を行えば、同じ q 分布をした β 値の高い平衡が得られる。

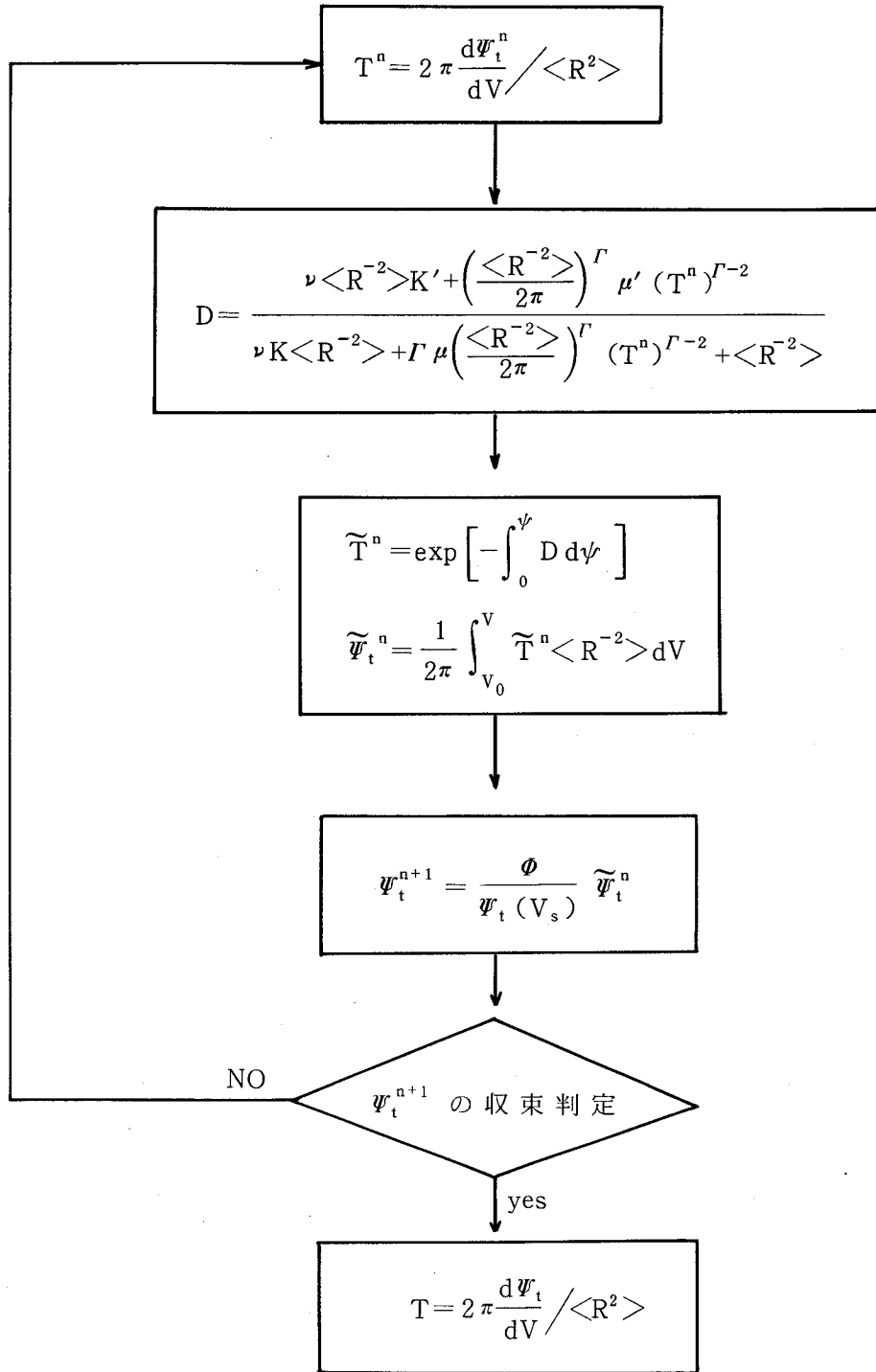
方程式 (3.8-2) とグラッド・シャフラノフ方程式 (3.1-9) を交互に解く反復の過程において、トロイダル磁場関数 T のプラズマ表面での値 T_s は毎回変化する。また μ を増大させて β 値の高い平衡を FCT 過程で作る場合も、得られた平衡の T_s も変化する。しかし、 T_s はトロイダル磁場を作るために外部コイルに流す電流を表わしており、これが、技術的に到達不可能な値になるのは不適切である。さらに、もし、外部コイルに流れる電流が一定であれば、 T がプラズマ表面で不連続になり、その結果、プラズマ表面に表面電流 (トロイダル方向にもポロイダル方向にも) が流れる。この様な現象を避けるために、 T_s が指定した値になる様にプラズマ体積を調整する。実際には、プラズマ表面上の固定点がプラズマの膨張 (ないし圧縮) に対応する位置に来る様に真空磁場 ψ_V が調整される。

3.9 第3章の要約

本章では軸対称トロイダル配位におけるプラズマの平衡を論じた。平衡を決定するグラッド・シャフラノフ方程式を導き、自由境界法とよばれる反復的な数値計算法について述べた。この方法では反復の初期平衡として Solov'ev 平衡が用いられる。また、安定性解析で用いられる磁束座標系と磁気面量を定義して、高ベータ平衡を求める FCT 法について述べた。

平衡は MHD 安定性解析の出発点であり、本章で論じた数値計算法を用いて、安定性解析の対象となる平衡を作っている。

表 3.1 非線形境界値問題 (3.8-2) を解く反復法



4. ERATOコード

本章では、軸対称トロイダル平衡の線形理想MHD安定性をエネルギー原理にもとづいて数值的に解析するERATOコードについて述べる。

MHD安定性の数値解析においては、安定係数 q が有理数の磁気面（有理面）が正確に表現されることが必要であるので磁束座標系が採用される。4.1節で物理量を規格化したのち、4.2節でエネルギー積分を磁束座標系で表わす。数值的な安定性解析では、いわゆる自然座標系を用いるのは必ずしも妥当ではないので、ヤコビアン \sqrt{g} を任意にとれるようにエネルギー積分を表わす。また、トロイダル・モード数が高い場合に用いられる準モード表示についても述べる。

真空中の摂動磁場を表現する方法として、スカラー・ポテンシャルを用いる方法とベクトル・ポテンシャルを用いる方法とがあり、それに応じて、真空磁場エネルギーも二通りの方法で表現される。4.3節では、スカラー・ポテンシャルおよびベクトル・ポテンシャルを用いて真空磁場エネルギーを表わし、それぞれの方法の利害得失を議論する。

4.4節ではERATOコードで用いられる境界条件およびその数値計算上の表現方法について述べる。

4.5節では、ERATOコードで用いられているハイブリッド有限要素について述べるとともに、ERATOコードで安全性解析を行う場合の実際上の注意について述べる。

4.1 物理量の規格化

ERATOコードでは磁気軸の位置 R_0 、磁気軸でのトロイダル磁場関数の値 T_0 、および質量密度 ρ_0 を単位にとって物理量を無次元化する。したがって、磁場、電流、圧力および時間の規格化定数は、それぞれ、

$$B_0 = T_0 / R_0, \quad J_0 = \frac{T_0}{\mu_0 R_0^2}, \quad p_0 = \frac{B_0^2}{\mu_0} = \frac{T_0^2}{\mu_0 R_0^2},$$
$$\tau_0^2 = \omega_A^2 = \frac{B_0^2}{\mu_0 \rho_0 R_0^2} \quad (4.1-1)$$

である。数值的例として、 $R_0 = 1\text{ m}$ 、 $B_0 = 1\text{ T}$ 、 $\rho_0 = 1.67 \times 10^{-7}\text{ kg/m}^3$ （数密度 10^{20} m^{-3} の水素プラズマの質量密度）の場合を考えると、

$$J_0 = 7.96 \times 10^5\text{ A}, \quad p_0 = 7.96 \times 10^5\text{ Pascal} = 7.85\text{ 気圧},$$
$$\tau_0 = 4.58 \times 10^{-7}\text{ s} \quad (4.1-2)$$

である。

4.2 軸対称トロイダル系でのエネルギーの表式

3.3節で述べた様に、ヤコビアン \sqrt{g} を決めると、(3.3-8)式にもとづいて座標系 (ψ, χ, φ) が構成される。この座標系を用いてポテンシャル・エネルギーと運動エネルギーを変位ベクトル ξ の反変成分 $(\xi^\psi, \xi^\chi, \xi^\varphi)$ で表わす。前節の規格化に従って無次元化されたポテンシャル・エネルギー (2.4-6) は

$$W_p = \pi \int \sqrt{g} d\psi d\chi \left[|\text{rot}(\xi \times \mathbf{B}) + (\xi \cdot \mathbf{n}) \mathbf{j} \times \mathbf{n}|^2 + \Gamma p |\text{div} \xi|^2 - 2|\xi \cdot \mathbf{n}|^2 (\mathbf{j} \times \mathbf{n}) \cdot (\mathbf{B} \cdot \nabla) \mathbf{n} \right] \quad (4.2-1)$$

である。変数 X, V, Y を

$$\left. \begin{aligned} X &= \frac{\nu}{T} \xi^\psi \\ V &= \frac{1}{T} (\nu \xi^\chi - \xi^\varphi) \\ Y &= \frac{1}{T} \xi^\varphi \end{aligned} \right\} \quad (4.2-2)$$

と定義する。ここで ν は

$$\nu = \frac{B^\varphi}{B^\chi} \quad (4.2-3)$$

であり、磁力線の局所的な傾きを表わしている。また、自然座標系では安定係数 q に等しい。

(4.2-2) を用いると摂動磁場 $\mathbf{Q} = \text{rot}(\xi \times \mathbf{B})$ は

$$\left. \begin{aligned} Q^\psi &= \frac{T}{\sqrt{g}} \left[\frac{\partial}{\partial \chi} \left(\frac{X}{\nu} \right) + \frac{\partial X}{\partial \varphi} \right] \\ Q^\chi &= \frac{1}{\sqrt{g}} \left[T \frac{\partial V}{\partial \varphi} - \frac{\partial}{\partial \psi} \left(\frac{T}{\nu} X \right) \right] \\ Q^\varphi &= -\frac{1}{\sqrt{g}} \left[\frac{\partial}{\partial \psi} (TX) + T \frac{\partial V}{\partial \chi} \right] \end{aligned} \right\} \quad (4.2-4)$$

である。また、

$$\mathbf{U} = \text{rot}(\xi \times \mathbf{B}) + (\xi \cdot \mathbf{n}) \mathbf{j} \times \mathbf{n}$$

とおくと、絶対値の自乗 $|\mathbf{U}|^2$ は

$$|\mathbf{U}|^2 = \left(g_{\psi\psi} - \frac{(g_{\psi\chi})^2}{g_{\chi\chi}} \right) |U^\psi|^2 + g_{\chi\chi} \left| U^\chi + \frac{g_{\psi\chi}}{g_{\chi\chi}} U^\psi \right|^2 + R^2 |U^\varphi|^2$$

と表わされる。ここで、

$$g_{\psi\psi} g_{\chi\chi} - (g_{\psi\chi})^2 = g g^{\varphi\varphi} = R^2 g$$

と (3.3-2) 式を用いると

$$|\mathbf{U}|^2 = \frac{1}{R^2 B_p^2} |U^\psi|^2 + g B_p^2 |U^\chi - \beta_\chi U^\psi|^2 + R^2 |U^\varphi|^2$$

を得る。ここで、 β_χ は

$$\beta_\chi \equiv \frac{\nabla\psi \cdot \nabla\chi}{|\nabla\psi|^2} \quad (4.2-5)$$

で定義される量であり、座標系 (ψ, χ, φ) の非直交性を表わす。ここで、(3.3-5) および (4.2-4) 式を用いると、

$$\begin{aligned} \sqrt{g} |\mathbf{U}|^2 = & \frac{T^2}{\sqrt{g} R^2 B_p^2} |F(X)|^2 + \frac{R^2 T^2}{\sqrt{g}} \left| \frac{\partial X}{\partial \psi} + \frac{\partial V}{\partial \chi} \right|^2 \\ & + \sqrt{g} B_p^2 T^2 \left| \frac{\partial V}{\partial \varphi} - \frac{1}{T} \frac{\partial}{\partial \psi} \left(\frac{T}{\nu} X \right) + \frac{j_t}{\nu R^2 B_p^2} X - \beta_\chi F(X) \right|^2 \end{aligned} \quad (4.2-6)$$

を得る。ここで、

$$F(X) \equiv \frac{\partial}{\partial \chi} \left(\frac{X}{\nu} \right) + \frac{\partial X}{\partial \varphi} \quad (4.2-7)$$

また、

$$\text{div } \xi = \frac{1}{\sqrt{g}} \left[\frac{\partial}{\partial \psi} (R^2 X) + \frac{\partial}{\partial \chi} (R^2 V) + \frac{\partial}{\partial \chi} (R^2 Y) + \nu \frac{\partial}{\partial \varphi} (R^2 Y) \right] \quad (4.2-8)$$

$$2(\mathbf{j} \times \mathbf{n}) \cdot (\mathbf{B} \cdot \nabla) \mathbf{n} = 2j_t^2 - \frac{j_t}{R} \frac{1}{(RB_p)^2} \nabla\psi \cdot \nabla[(RB_p)^2] - \frac{2}{R} p' \nabla\psi \cdot \nabla R \quad (4.2-9)$$

$$j_t = -Rp' - \frac{TT'}{R} \quad (4.2-9')$$

である (付録2参照)。(4.2-6, 8, 9) 式と $\xi = \xi(\psi, \chi) e^{in\varphi}$ からポテンシャル・エネルギー (4.2-1) は次の様に表わされる:

$$W_p = \pi \int d\psi d\chi [a|I_1|^2 + b|I_2|^2 + c|I_3|^2 + d|I_4|^2 + e|I_5|^2] \quad (4.2-10)$$

$$I_1 = F(X) = \frac{\partial}{\partial \chi} \left(\frac{X}{\nu} \right) + inX$$

$$I_2 = inV - \frac{1}{T} \frac{\partial}{\partial \psi} \left(\frac{T}{\nu} X \right) + \frac{j_t}{\nu RB_p^2} X - \beta_\chi F(X)$$

$$I_3 = \frac{\partial X}{\partial \psi} + \frac{\partial V}{\partial \chi}$$

$$I_4 = \frac{\partial}{\partial \psi} (R^2 X) + \frac{\partial}{\partial \chi} (R^2 V) + \frac{\partial}{\partial \chi} (R^2 Y) + in \nu R^2 Y$$

$$I_5 = X$$

(4.2-11)

および

$$a = \frac{T^2}{\sqrt{g} R^2 B_p^2}, \quad b = \sqrt{g} B_p^2 T^2, \quad c = \frac{R^2 T^2}{\sqrt{g}}, \quad d = \frac{\Gamma p}{\sqrt{g}},$$

$$e = -2 \frac{R^2}{\sqrt{g} B_p^2} \left[j_t^2 - \frac{j_t}{2R} \frac{1}{(RB_p)} \psi \cdot \nabla (RB_p)^2 - \frac{p'}{R} \nabla \psi \cdot \nabla R \right]. \quad (4.2-12)$$

また、運動エネルギー K は

$$K = \pi \int d\psi d\chi \left[\frac{R^2}{\sqrt{g} B_p^2} |X|^2 + \sqrt{g} R^4 B_p^2 |V+Y - \beta_x X|^2 + \sqrt{g} R^2 T^2 |Y|^2 \right] \quad (4.2-13)$$

と表わされる。

変位ベクトル $\xi = \xi(\psi, \chi) e^{in\varphi}$ において、 $\xi(\psi, \chi)$ を準モード表示^{20, 37)}

$$\xi(\psi, \chi) = \hat{\xi}(\psi, \chi) e^{-in\mu(\psi, \chi)} \quad (4.2-14a)$$

$$\mu(\psi, \chi) = \int_0^\chi \nu d\chi \quad (4.2-14b)$$

で表わし、エネルギー積分 (4.2-10, 13) において $\hat{\xi}(\psi, \chi)$ を独立変数にすることができる。この表示では、トロイダル・モード数 n の大きい場合に表われるポロイダル方向の短波長の振動が $e^{-in\mu}$ で表現され、 $\hat{\xi}(\psi, \chi)$ 自身はポロイダル方向にゆるやかに変動する。したがって、準モード表示を用いると、ERATOコードで高 n モードの安定性解析が可能になる²¹⁾。(4.2-14)式を用いるとポテンシャル・エネルギー (4.2-10) の各項は次の様に変更される：

$$\left. \begin{aligned} I_1 &= \frac{\partial \hat{X}}{\partial \chi} - \frac{1}{\nu} \frac{\partial \nu}{\partial \chi} \hat{X} \\ I_2 &= \frac{\partial \hat{X}}{\partial \psi} - in \left(\frac{\partial \mu}{\partial \psi} \hat{X} + \nu \hat{V} \right) + \beta_x \frac{\partial \hat{X}}{\partial \chi} + H \hat{X} \\ I_3 &= D \\ I_4 &= D + \frac{\partial \ln R^2}{\partial \psi} \hat{X} + \frac{\partial \ln R^2}{\partial \chi} (\hat{V} + \hat{Y}) + \frac{\partial \hat{Y}}{\partial \chi} \\ I_5 &= \hat{X} \\ D &= \frac{\partial \hat{X}}{\partial \psi} + \frac{\partial \hat{V}}{\partial \chi} - in \left(\frac{\partial \mu}{\partial \psi} X + \nu \hat{V} \right) \end{aligned} \right\} \quad (4.2-15)$$

$$a = \frac{T^3}{\nu^3 R^4 B_p^2}, \quad b = \frac{T^3}{\nu}, \quad c = \frac{TR^2 B_p^2}{\nu}, \quad d = \Gamma p \cdot \frac{R^2 T}{\nu},$$

$$H = \frac{T'}{T} - \frac{1}{\nu} \left(\frac{\partial \nu}{\partial \psi} + \beta_x \frac{\partial \nu}{\partial \chi} \right) - \frac{j_t}{RB_p^2} \quad (4.2-16)$$

また、 e は準モード表示でも変わらない。

4.3 真空磁場エネルギーの表示

2.3節で述べた様に変位ベクトルが固定境界条件に従う場合、エネルギー積分はポテンシャル・エネルギー (4.2-10) と運動エネルギー (4.2-13) だけである。しかし、プラズマ表面が真空領域によって囲まれている自由境界条件の場合は、積分 (4.2-10, 13) に真空磁場エネルギー

$$\frac{1}{2} \int_{\text{vacuum}} |\mathbf{Q}_e|^2 d\tau \quad (4.3-1)$$

が加わる (\mathbf{Q}_e : 真空領域での摂動磁場)。このエネルギーの表現の仕方として2通りの方法が考えられる。1つは、真空中では $\text{rot } \mathbf{Q}_e = 0$ が成り立つので磁場 \mathbf{Q}_e をスカラー関数 Φ :

$$\mathbf{Q}_e = \nabla \Phi \quad (4.3-2)$$

とそれのグリーン関数を用いる方法である^{15, 38)}。今1つは、ベクトル・ポテンシャル \mathbf{A} を用いて、二次形式

$$\frac{1}{2} \int_{\text{vacuum}} |\text{rot } \mathbf{A}|^2 d\tau \quad (4.3-3)$$

を直接、有限要素近似する方法である²¹⁾。

スカラー関数 Φ を用いる場合、境界条件 (2.3-15, 17) は次の様に表わされる :

$$\frac{\partial \Phi}{\partial n} = \frac{1}{RB_p} \nabla \xi^\psi \cdot \mathbf{B} = \frac{1}{RB_p} \frac{T}{\sqrt{g}} F(X) \quad (\text{プラズマ表面}), \quad (4.3-4)$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial n} = 0 \quad (\text{導体}). \quad (4.3-5)$$

また、 Φ 自身は調和関数 ($\Delta \Phi = 0$) であるので体積積分 (4.3-1) は表面積分

$$W_V = -\frac{1}{2} \int \sqrt{g} \Phi \nabla \Phi \cdot \nabla \psi d\chi d\lambda = -\pi T \int_0^{2\pi} \Phi F(X) d\chi \quad (4.3-6)$$

プラズマ表面

に変換される。そして関数 Φ は次の積分方程式に従う¹⁵⁾ :

$$\begin{aligned} \Phi(\mathbf{r}) = & \int_{\text{プラズマ表面}} \left[\Phi(\mathbf{r}') \frac{\partial G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')}{\partial n} - G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \frac{\partial \Phi}{\partial n} \right] dS \\ & + \sum_i \int_{C_i} \Phi(\mathbf{r}') \frac{\partial G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')}{\partial n} dS \end{aligned} \quad (4.3-7)$$

ここで、 C_i は導体を表わし $G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ はグリーン関数である ($G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = -\frac{1}{4\pi} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}$)。また法線は真空領域からプラズマ表面 (および導体) へ外向きの方向にとる。方程式 (4.3-7) の解は積分核 $G_F(\mathbf{r}_p, \mathbf{r}'_p)$ を用いて形式的に

$$\Phi(\mathbf{r}_p) = \int_0^{2\pi} G_F(\mathbf{r}_p, \mathbf{r}'_p) F(X(\chi')) d\chi' \quad (4.3-8)$$

と書けるので真空磁場エネルギー (4.3-6) は

$$W_V = -\pi T \int_0^{2\pi} d\chi \int_0^{2\pi} d\chi' G_F(\mathbf{r}_p, \mathbf{r}_p') F(X(\chi)) F(X(\chi')) \quad (4.3-9)$$

と表わされる ($\mathbf{r}_p, \mathbf{r}_p'$ はプラズマ表面の位置ベクトル)。この方法では、導体壁の代わりに複数個のコイルがある場合 (シェルなしプラズマ) でも安定性解析ができるという利点がある。しかし次の様な欠点がある。1つは、スカラー関数 ϕ がトロイダル、ポロイダル両方法に対して一価であるため、変位ベクトル ξ を両方向にフーリエ展開した時 ($\xi = \sum_{m,n} \xi_{m,n}(\psi) e^{-im\chi + in\varphi}$), $m = n = 0$ の成分が表現されないことである。また、(4.3-7) 式は $\mathbf{r} = \mathbf{r}'$ で対数的特異性を持ち、その数値計算上の処理がやっかいである³⁸⁾。

ベクトル・ポテンシャルを用いる定式化ではこれらの欠点が解決される。ベクトル・ポテンシャル \mathbf{A} で磁場 \mathbf{Q}_e を表現するためには、ゲージ条件が必要になる。ERATOコードでは、 \mathbf{A} を

$$\mathbf{A} = \xi_V \times \mathbf{C}_V \quad (4.3-10)$$

のように表わす。これはゲージ条件として

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{C}_V = 0 \quad (4.3-11)$$

を選ぶことになる。また \mathbf{C}_V は

$$\mathbf{C}_V = \nabla\phi \times \nabla\psi_V + T_V \nabla\phi \quad (4.3-12)$$

で表わされる定ベクトルである。ここで、 $\psi_V(R, Z)$ は、 $\psi_V = \text{const.}$ の曲面群が真空中でプラズマを囲み、また導体壁が $\psi_V = \text{const.}$ の曲面に一致するように作られる。この場合の境界条件 (2.3-15, 17) は

$$(\mathbf{n} \cdot \xi_V) \mathbf{C}_V = \xi_n \mathbf{B} \quad (\text{プラズマ表面}) \quad (4.3-13)$$

$$\mathbf{n} \cdot \xi_V = 0 \quad (\text{導体壁}) \quad (4.3-14)$$

になる。(4.3-13) 式から

$$\mathbf{n} \cdot \xi_V = \frac{|\nabla\psi|}{|\nabla\psi_V|} \xi_n \quad (4.3-15)$$

$$T_V = \frac{|\nabla\psi|}{|\nabla\psi_V|} T \quad (4.3-16)$$

が得られる。ベクトル・ポテンシャル (4.3-10) を使うと真空磁場エネルギー W_V は

$$W_V = \pi \int |\text{rot}(\xi_V \times \mathbf{C}_V)|^2 d\tau \quad (4.3-17)$$

と表わされる。

以上に述べた定式化から分る様にベクトル・ポテンシャルを用いて真空磁場エネルギーを表現する場合、導体壁がプラズマを囲み、かつ、その形式が単純であることが必要である。しかし、スカラー関数を用いる場合の欠点は表われず、また、有限要素近似した場合に作られる行列も扱いやすい形になる。さらに、準モード表示も容易である。ただし、ゲージ条件として (4.3-11) を使っているため、 $n = 0$ モードは表現されないの、この場合は $\text{div}\mathbf{A} = 0$ をゲージ条件に選ぶ必要がある。

4.4 境界条件

ERATOコードでは独立変数 ψ の代わりに、磁気軸からの距離に相当する

$$s = \sqrt{\psi / \psi_s} \quad (4.4-1)$$

を独立変数に選ぶ。変数 X の磁気軸での境界条件として正則条件 (regularity condition)

$$s \xi^s (s=0, \chi) = 0 \quad (4.4-2)$$

を採用する。 $\xi^\psi = \xi \cdot \nabla \psi = 2 \psi_s s \xi^s$ より (4.4-2) 式は

$$X (s=0, \chi) = 0 \quad (4.4-3)$$

に等価である。また、固定境界条件の場合、

$$X (s=1, \chi) = 0 \quad (4.4-4)$$

が必要である。そして、自由境界条件の場合には、条件式 (4.3-4, 5) あるいは (4.3-13, 14) 式が課せられる。

プラズマの平衡 $\psi (R, Z)$ が $Z=0$ に対して対称性 ($\psi (R, -Z) = \psi (R, Z)$)をもつ場合、 (R, Z) 座標の上半面だけでエネルギー積分を行えばよいので、必要な計算量が半分になる。

$\psi (R, Z)$ が上下対称であるので、エネルギー積分 (4.2-10), (4.2-13) および真空磁場エネルギーに表われる a, b, c などの平衡諸量も上下対称である。一方 (4.2-11, 13) 式に表われる $\nu = \frac{\sqrt{g} T}{R^2}$, β_χ については

$$\nu (\psi, -\chi) = \nu (\psi, \chi) \quad (4.4-5)$$

$$\beta_\chi (\psi, -\chi) = -\beta_\chi (\psi, \chi) \quad (4.4-6)$$

が成り立つ。したがって、平衡が上下対称の場合、固有値 ω^2 は縮退し、その固有値には対称条件

$$X (s, \chi) = -X^* (s, 2\pi - \chi), \quad V (s, \chi) = V^* (s, 2\pi - \chi), \quad Y (s, \chi) = Y^* (s, 2\pi - \chi) \quad (4.4-7)$$

を満たす固有解と対称条件

$$X (s, \chi) = X^* (s, 2\pi - \chi), \quad V (s, \chi) = -V^* (s, 2\pi - \chi), \quad Y (s, \chi) = -Y^* (s, 2\pi - \chi) \quad (4.4-8)$$

を満たす固有解の2つの固有解が属する (X^* は X の共役複素数)。

ERATOコードでは対称条件 (4.4-7) の固有解に限定して、上半面でエネルギー積分を実行している。なお、対称条件 (4.4-7) は X_R, V_I, Y_I (X_I, V_R, Y_I) は上下反対称 (上下対称) であることを表わしている (添字“R”および“I”はそれぞれ実部および虚部を表わす)。

準モード表示

$$(X, V, Y) = (\hat{X}, \hat{V}, \hat{Y}) e^{-in\mu}$$

$$\mu = \int_0^\chi \nu d\chi$$

を用いた場合の $\hat{X}, \hat{V}, \hat{Y}$ の $\chi=0$ および $\chi=\pi$ での境界条件は対称条件 (4.4-7) 式から導かれる^{20, 21)}。たとえば、

$$X_R = \widehat{X}_R \cos n\mu + \widehat{X}_I \sin n\mu$$

$$X_I = \widehat{X}_I \cos n\mu - \widehat{X}_R \sin n\mu$$

であるから、 $\chi=0$ では $\widehat{X}(V, Y)$ の境界条件は $X(V, Y)$ のそれに一致する。また、 $\Delta\chi \ll 1$ で

$$X_R(\pi \pm \Delta\chi) = \widehat{X}_R(\pi) \cos n\pi q + \widehat{X}_I(\pi) \sin n\pi q \pm \Delta\chi \left[\frac{\partial \widehat{X}_R}{\partial \chi}(\pi) \cos n\pi q + \frac{\partial \widehat{X}_I}{\partial \chi}(\pi) \sin n\pi q + n\nu (\widehat{X}_I(\pi) \cos n\pi q - \widehat{X}_R(\pi) \sin n\pi q) \right]$$

$$X_I(\pi \pm \Delta\chi) = \widehat{X}_I(\pi) \cos n\pi q - \widehat{X}_R(\pi) \sin n\pi q \pm \Delta\chi \left[\frac{\partial \widehat{X}}{\partial \chi}(\pi) \cos n\pi q - \frac{\partial \widehat{X}_R}{\partial \chi}(\pi) \sin n\pi q - n\nu (\widehat{X}_R(\pi) \cos n\pi q + \widehat{X}_I(\pi) \sin n\pi q) \right]$$

と展開される(複号同順)。したがって $X_R(\pi + \Delta\chi) = -X_R(\pi - \Delta\chi)$ 、 $X_I(\pi + \Delta\chi) = X_I(\pi - \Delta\chi)$ より、 X_R, X_I の $\chi=\pi$ での境界条件として

$$\left. \begin{aligned} \widehat{X}_R(\pi) \cos n\pi q &= -\widehat{X}_I(\pi) \sin n\pi q \\ \frac{\partial \widehat{X}_R}{\partial \chi}(\pi) \sin n\pi q &= \frac{\partial \widehat{X}_I}{\partial \chi}(\pi) \cos n\pi q \end{aligned} \right\} \quad (4.4-9)$$

が得られる。変数 X, Y についても同様にして、

$$\left. \begin{aligned} \widehat{V}_I(\pi) \cos n\pi q &= \widehat{V}_R(\pi) \sin n\pi q \\ \frac{\partial \widehat{V}_I}{\partial \chi}(\pi) \sin n\pi q &= -\frac{\partial \widehat{V}_R}{\partial \chi}(\pi) \cos n\pi q \\ \widehat{Y}_I(\pi) \cos n\pi q &= \widehat{Y}_R(\pi) \sin n\pi q \\ \frac{\partial \widehat{Y}_I}{\partial \chi}(\pi) \sin n\pi q &= -\frac{\partial \widehat{Y}_R}{\partial \chi}(\pi) \cos n\pi q \end{aligned} \right\} \quad (4.4-10)$$

が得られる。

4.5 有限要素近似

MHD安定性の固有値問題(2.4-2)は有限要素法の手法で数値的に解くことができる。その時、固有値問題(2.4-2)は行列についての一般固有値問題に帰着される。

有限要素法を用いたMHD安定性の固有値問題の数値解法は竹田¹²⁾によって始められた。その後、Gruber, Berger, Appertらローザンス大学のグループが発展させ、また、数値解法の理論的解析を行った^{13, 14, 25, 26)}。その結果によると、変数 (X, V, Y) を基底関数によって展開する場合、ラグランジアン $L = W - \omega^2 K$ ((2.4-2)式参照)に表われる $X, V, Y, \frac{\partial X}{\partial s}, \frac{\partial X}{\partial \chi}, \frac{\partial V}{\partial \chi}, \frac{\partial Y}{\partial \chi}$ を表現する基底関数が共通であることが必要である。この条件が満足されないと、数値計算から求めた固有値と真の固有値が著しく異なったり、低い成長率をもつ不安定固有値と

安定な固有値を精度よく分離できない、いわゆる、スペクトル汚染 (spectral pollution) がおこる。

例として、一次元の場合を考えよう。有限要素法でよく用いられる基底関数は図 4.1 (a) に示す屋根型関数 $d_i(x)$ であり、この基底関数で関数 $f(x)$ は

$$f(x) = \sum_i f_i d_i(x) \quad (4.5-1)$$

で近似的に表現される。ここで f_i は節点 $x = x_i$ での $f(x)$ の値 (節点値) である。 $d_i(x)$ の微分は区分的に定数の関数になるので、 df/dx は図 4.1 (b) に示す基底関数 $e_{i+1/2}$ を使って

$$\frac{df}{dx} = \sum_i \frac{f_{i+1} - f_i}{x_{i+1} - x_i} e_{i+1/2}(x) \quad (4.5-2)$$

で表現されることになる。この様に、通常の有限要素法では、関数 f を表現する基底関数と、その微分 df/dx を表現する基底関数とは異なるため、この方法を、そのまま MHD 安定性解析に適用するとスペクトル汚染が生じる。

基底関数を共通にする一つの方法として、

$$f(x) = \sum_i \frac{f_i + f_{i+1}}{2} e_{i+1/2}(x) \quad (4.5-3)$$

で $f(x)$ を表現し、 $\frac{df}{dx}$ については (4.5-2) 式を用いることが考えられる。この方法は、 f 、 $\frac{df}{dx}$ の値を (4.5-3) および (4.5-2) 式の $e_{i+1/2}(x)$ につく係数で与えられるような差分近似によって評価し、区間 $x_i \leq x \leq x_{i+1}$ で一定であるとみなすことと等価である。このため、この有限要素法はハイブリッド有限要素法とよばれる。

さて、エネルギー積分の有限要素近似に話をもどすと、エネルギー積分に s と x の両方についての微分が現われるのは X だけであり、 Y と V については、その値と x についての微分だけが現われる。そこで、ハイブリッド有限要素法を適用するには、図 4.2 に示すような (s, x) 座標の格子を構成し、節点値を $X_{i,j}$ 、 $V_{i+1/2,j}$ 、 $Y_{i+1/2,j}$ に選び、区分的に定数の基底関数 $e_{i+1/2,j+1/2}$ を用いればよく、この時、 X 、 $\partial X / \partial s$ 、 $\partial X / \partial x$ はそれぞれ、次のように近似的に表現される：

$$X = \sum_{i,j} \frac{X_{i,j} + X_{i+1,j} + X_{i,j+1} + X_{i+1,j+1}}{4} e_{i+1/2,j+1/2} \quad (4.5-3a)$$

$$\frac{\partial X}{\partial s} = \sum_{i,j} \frac{(X_{i+1,j+1} + X_{i+1,j}) - (X_{i,j+1} + X_{i,j})}{2(s_{i+1} - s_i)} e_{i+1/2,j+1/2} \quad (4.5-3b)$$

$$\frac{\partial X}{\partial x} = \sum_{i,j} \frac{(X_{i+1,j+1} + X_{i,j+1}) - (X_{i,j} + X_{i+1,j})}{2(x_{j+1} - x_j)} e_{i+1/2,j+1/2} \quad (4.5-3c)$$

また、 Z で V と Y を代表させると、 Z と $\partial Z / \partial x$ は

$$Z = \sum_{i,j} Z_{i+1/2,j} e_{i+1/2,j} = \sum_{i,j} \frac{Z_{i+1/2,j} + Z_{i+1/2,j+1}}{2} e_{i+1/2,j+1/2} \quad (4.5-4a)$$

$$\frac{\partial Z}{\partial x} = \sum_{i,j} Z_{i+1/2,j} \frac{\partial d_{i+1/2,j}}{\partial x} = \sum_{i,j} \frac{Z_{i+1/2,j+1} - Z_{i+1/2,j}}{x_{j+1} - x_j} e_{i+1/2,j+1/2} \quad (4.5-4b)$$

で表わされる。

(4.5-3) と (4.5-4) をラグランジアンに代入してエネルギー積分を実行すると、有限近似されたラグランジアン

$$L = \langle \mathbf{x}_i | A_{ij} | \mathbf{x}_j \rangle - \omega^2 \langle \mathbf{x}_i | B_{ij} | \mathbf{x}_j \rangle \quad (4.5-5)$$

を得る。この時、エネルギー積分に表われる平衡諸量は各格子内で点 $(s_{i+1/2}, x_{j+1/2})$ の値をとる区分的に一定な関数に近似される。(4.5-5) 式で、ベクトル $\mathbf{x} = (x_i)$ は (X, V, Y) を表わし、行列 $A = (A_{ij})$ および $B = (B_{ij})$ は、それぞれ、ポテンシャル・エネルギーと運動エネルギーを表わしている。そして、 A は対称行列、 B は正値対称行列である。 L の停留条件より、 ω^2 を固有値とする一般固有値問題

$$A\mathbf{x} = \omega^2 B\mathbf{x} \quad (4.5-6)$$

を得る。

固有値問題 (4.5-6) には境界条件が必要である。 s -方向の境界条件は (4.4-3) と、固定境界条件 (4.4-4) あるいは自由境界条件であり、 x -方向の境界条件は対称条件 (4.4-7) あるいは (4.4-8) である。

たとえば、 X に境界条件

$$X_{1,j} = 0 \quad (4.4-3)$$

$$X_{N_x+1,j} = 0 \quad (4.4-4)$$

を課す場合、単に消去法を用いると、行列の対称性が失なわれる。それを避ける方法として、行列 A, B において、 $X_{1,j}, X_{N_x+1,j}$ に対応する非対角要素をゼロにし、 A の対角要素を 1 に、 B の対角要素には、計算機で十分精度よく表現される、非常に小さい値 (たとえば 10^{-20}) を入れる。すると、固有ベクトルの直交性から、固有値が 10^{20} 以外の固有ベクトルは境界条件 (4.4-3) および (4.4-4) を満足する。この方法は、行列の対称性およびブロック構造を保存するので、固有値問題ではよく使われる¹³⁾。

次に、 $(X_{i,j}, V_{i+1/2,j}, Y_{i+1/2,j})$ に対称条件 (4.4-7) を課すと ($Z_{i+1/2,j}$ で $V_{i+1/2,j}, Y_{i+1/2,j}$ を代表させて)

$$X_{i,2} = -X_{i,2}, \quad Z_{i+1/2,1} = Z_{i+1/2,2}$$

$$X_{i,N_x+1} = -X_{i,N_x}, \quad Z_{i+1/2,N_x+1} = Z_{i+1/2,N_x}$$

を得る。新しい変数 $\tilde{X}_{i,j}, \tilde{Z}_{i+1/2,j}$ が

$$\left. \begin{aligned} \tilde{X}_{i,j} &= X_{i,j} \quad j \neq 1, N_x+1 \\ \tilde{X}_{i,1} &= X_{i,1} + X_{i,2}^* \\ \tilde{X}_{i,N_x+1} &= X_{i,N_x+1} + X_{i,N_x}^* \end{aligned} \right\}$$

および

$$\left. \begin{aligned} \tilde{Z}_{i+1/2,j} &= Z_{i+1/2,j} \quad j \neq 1, N_x+1 \\ \tilde{Z}_{i+1/2,1} &= Z_{i+1/2,1} - Z_{i+1/2,2}^* \\ \tilde{Z}_{i+1/2,N_x+1} &= Z_{i+1/2,N_x+1} - Z_{i+1/2,N_x}^* \end{aligned} \right\}$$

になるように、変数変換

$$\tilde{\mathbf{x}} = \mathbf{U}\mathbf{x} \quad (4.5-7)$$

を行うと、もとの固有値問題は

$$\tilde{\mathbf{A}}\tilde{\mathbf{x}} = \omega^2\tilde{\mathbf{B}}\tilde{\mathbf{x}}$$

に変換される。この時、行列の対称性とブロック構造は保存され、境界条件は

$$\begin{aligned} \tilde{X}_{i,1} &= 0, \quad \tilde{X}_{i,N_x+1} = 0 \\ \tilde{Z}_{i+1/2,1} &= 0, \quad \tilde{Z}_{i+1/2,N_x+1} = 0 \end{aligned}$$

に変わるので、すでに述べた方法が適用できる¹⁵⁾。

MHD 安定性解析では、最小固有値を求めるので、逆ベキ法 (inverse iteration method)¹¹⁾ を使って一般固有値問題 (4.5-6) を解く。

有限要素近似によって得られる成長率の自乗、 $r^2 = -\omega^2$ 、は格子点の数 N_s 、 N_x の関数であり ($r^2 = r^2(N_s, N_x)$)、真の成長率は、格子点の数を増やして r^2 を計算し、その収束曲線の外挿から推定される。特に、 $r^2 \rightarrow 0$ になる臨界安定な平衡を求めるためには、収束曲線を注意深く調べる必要がある。

有限要素近似の理論¹¹⁾ から、成長率 r^2 は格子点数 N ($N_s = N_x = N$) に対して二次収束：

$$r^2 = r_\infty^2 + \frac{\alpha}{N^2} \quad (4.5-8)$$

であると期待される (r_∞^2 は収束値、すなわち真の成長率)。しかしながら、成長率の収束に関する詳しい数値実験^{15, 39, 40)} から経験的に以下の事が分っている。すなわち、同程度の大きさの N_s 、 N_x に対して、

- (a) N_x を固定して、 N_s を増やすと r^2 は二次収束を示すが。
- (b) N_s を固定して、 N_x を増やすと r^2 は必ずしも二次収束を示さず、 $1/N_x^4$ の項の係数が大きい。
- (c) 成長率の nq 依存性が理論的予測からずれるスペクトル・シフトが観測される¹⁵⁾。

円柱プラズマの場合についてハイブリッド有限要素近似の固有値へ与える影響が滝塚によって調べられ、上に述べた現象が理論的に明らかにされた¹⁸⁾。その解析によると、格子点の数が有限であるため、ポロイダル・モード数 m が実効的に $m = m \tan(m\Delta\chi/2) / (m\Delta\chi/2)$ に変化し ($\Delta\chi$: 格子幅)、そのため、 $nq = m$ になる特異面がずれてスペクトル・シフトが起こるとともに成長率が N_x に対して二次収束にならない。論文 [18] では、同時に、この影響を低減するためには、トロイダル・モード数 n を

$$\tilde{n} = n \left[1 - 0.8225 \left(\frac{nq}{N_x} \right)^2 - 0.1353 \left(\frac{nq}{N_x} \right)^4 \right] \quad (4.5-9)$$

に修正することは提案している。(4.5-7) 式は、Gruber が数値実験から経験的に得た修正式とほとんど一致している¹⁵⁾。しかし、このため、 $dq/ds > 0$ (トカマク型平衡) では不安定に働き、 $dq/ds < 0$ (逆転磁場配位平衡) では安定に働く。駆動項が新たに生じ、かつ、この効果

はトロイダル・モード数が大きいほど顕著である。この効果も観測されている⁴¹⁾。

以上に述べた様な現象を抑え、二次収束を示す成長率を得るためには、トロイダル・モード数 n が大きいほどポロイダル方向の格子点の数 N_x を多くとる必要がある。しかし、計算機の容量の制限から $N_x \approx 100$ (FACOM M-200の場合) が限度である。これは、準モード表示を使うことによって解決される。この方法で計算された成長率は $n = 100$ の場合でも、 $N_x = 50$ 程度で、(4.5-6) 式で α の小さい二次収束を示す³⁷⁾。

また、成長率の収束は、エネルギー積分に表われる平衡諸量の誤差を敏感に反映し、それらの量の誤差が二次収束からずれる原因になる。これについては次章で述べる。平衡諸量を正確に計算し、 $n > 1$ の固有解については準モード表示を使えば、 $N_s, N_x \leq 100$ の格子点数で成長率の二次収束が得られ、外挿によって真の成長率を推定できる。

4.6 第4章の要約

本章では、軸対称トロイダル・プラズマ平衡のMHD安定性を数値的に解析するERATOコードについて述べた。

ERATOコードは、規格化されたエネルギー積分を有限要素近似によって行列の一般固有値問題に帰着する。

エネルギー積分は磁束座標系を使って表わされるが、その際、ポロイダル角が任意に選べるように考慮された。また、ERATOコードは、真空摂動磁場をスカラー・ポテンシャルおよびベクトル・ポテンシャル、いずれを使っても表現できるように拡張されている。

エネルギー積分の有限要素近似のさい、スペクトル汚染を避けるため、ハイブリッド有限要素が用いられる。また、境界条件は、作り出される行列の対称性を破らないように表現されている。

最後にERATOコードでMHD安定性解析を行う場合の実際的な注意について述べた。臨界安定を同定するためには、固有値(成長率)の注意深い収束解析が必要であり、トロイダル・モード数の高いモードの安定性解析を行うためには準モード表示を用いるのが適切である。

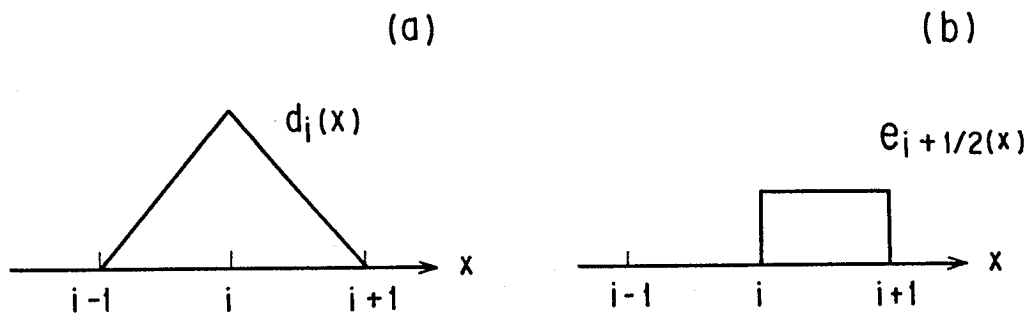


図 4.1 有限要素近似における基底関数 (a) 屋根型関数 $d_i(x)$,
 (b) 区分的定数関数 $e_{i+1/2}(x)$

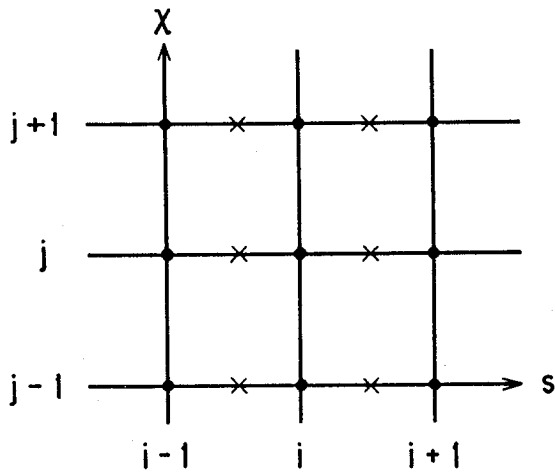


図 4.2 ERATO コードに使われる (s, x) 座標と節点 (\bullet : X, \times : V および Y)

5. 写 像

MHD の安定性解析では、第3章で述べた磁束座標系が用いられる。したがって、数値的に計算された平衡の安定性を ERATO コードで解析する場合、ポロイダル磁束関数 $\psi(R, Z)$ から磁束座標系を構成し、安定性解析に必要ないくつかの平衡量を求める必要がある(写像)。この平衡量には、 ψ についての微分量が含まれ、信頼性のある安定性を行うためには、これらの平衡量が正確に計算されなければならない。

本章では、スプライン補間を用いた写像法について述べる。

5.1 節で、もとの ERATO コードの採用していた写像法のもつ欠点について述べ、5.2 節で、グリッド上で数値的に与えられたポロイダル磁束関数 $\psi(R, Z)$ のスプライン補間を利用する写像法について述べ、次に、5.3 節で新写像法のテストならびに、旧写像との比較を行う。

5.1 写像の必要性

前章で述べた様に、ERATO コードではエネルギー積分に表われる平衡諸量は (s, χ) 座標系 ($s = \sqrt{\psi/\psi_s}$) で計算される。一方、第3章で述べた様に、プラズマの平衡を求める時には、 ψ を (R, Z) 座標上の関数として、グラッド・シャフラノフ方程式 (3.1-9) を数値的に解く。すなわち、ERATO コードで MHD 安定性解析の対象になる平衡 ψ は (R, Z) 座標における格子上に数値データとして与えられる。したがって、このような $\psi(R, Z)$ から (ψ, χ) 座標を構成し、その座標上で平衡諸量を計算することが必要である(写像)。 (ψ, χ) 座標の構成は座標変換

$$R = R(\psi, \chi), \quad Z = Z(\psi, \chi) \quad (5.1-1)$$

を行うことと等価である。また (ψ, χ) 座標から (s, χ) 座標への変換は容易である。

3.3 節で示したように、 χ 座標は、ヤコビアン \sqrt{g} を決めれば関係式

$$\left. \frac{d\chi}{d\ell} \right|_{\psi = \text{const}} = \frac{1}{\sqrt{g} B_p} \quad (5.1-2)$$

から作ることができる。そして \sqrt{g} として次の2つが採用される：

$$\text{自然座標系} \quad \sqrt{g} = \frac{R^2}{T} q \quad (5.1-3)$$

$$\text{等弧座標系} \quad g = \frac{L(\psi)}{2\pi B_p} \quad L: \text{等}\psi \text{線の長さ} \quad (5.1-4)$$

ERATO コードでは (s, χ) 座標の格子

$$\left. \begin{aligned} 0 = s_1 < s_2 < \dots < s_{N_\psi} < s_{N_\psi+1} = 1 \\ \chi_1 < 0 < \chi_2 < \dots < \chi_{N_\chi} < \pi < \chi_{N_\chi+1} \\ \chi_1 = -\chi_2, \quad \chi_{N_\chi+1} = 2\pi - \chi_{N_\chi} \end{aligned} \right\} \quad (5.1-5)$$

を作り，平衡諸量は座標点 $(s_{i+1/2}, \chi_{j+1/2}) = \left(\frac{s_i + s_{i+1}}{2}, \frac{\chi_j + \chi_{j+1}}{2} \right)$ 上で計算される (4.5 節参照)。そして，座標 (s, χ) と平衡諸量は各 $s_{i+1/2}$ ごとに配列 $EQ(k, j)$ ($k=1, \dots, 20$, j は χ 座標格子の番号) へ格納される。表 (5.1) に各 k に対応する量を示す。表 (5.1) において $k=1$ から $k=9$ までは自然座標系，等弧座標系に共通である。また，

$$\left. \frac{\partial f}{\partial \psi} \right|_{\perp} \equiv \frac{1}{|\nabla \psi|^2} \nabla \psi \cdot \nabla f = \frac{\partial f}{\partial \psi} + \beta_z \frac{\partial f}{\partial \chi} \quad (5.1-6)$$

は量 f の磁気面に垂直な方向の微分を表わし， K は

$$\begin{aligned} K &= \frac{2}{|\nabla \psi|^2} (\mathbf{j} \times \mathbf{n}) \cdot (\mathbf{B} \cdot \nabla) \mathbf{n} \\ &= 2 \left[\frac{j_t^2}{|\nabla \psi|^2} - \frac{j_t}{2R} \frac{1}{|\nabla \psi|^2} \frac{\partial}{\partial \psi} (|\nabla \psi|^2)_{\perp} - \frac{p'}{R} \frac{\partial R}{\partial \psi} \right] \end{aligned} \quad (5.1-7)$$

である。また ERATO コードでは，プラズマの閉じ込め効率を表わす量 β, β_p として次式の定義を用いている (I_p はプラズマ断面を貫ぬく全トロイダル電流)：

$$\left. \begin{aligned} \beta &= \frac{2 \iint \frac{\sqrt{g}}{R} p \, d\psi \, d\chi}{\iint \frac{\sqrt{g}}{R} B^2 \, d\psi \, d\chi} \\ \beta_p &= \frac{8\pi \iint \frac{\sqrt{g}}{R} p \, d\psi \, d\chi}{I_p^2} \end{aligned} \right\} \quad (5.1-8)$$

ERATO コードが最初作られた時，次のような方法にもとづいて写像を行っていた。

- (i) (R, Z) 格子上で与えられた ψ の値から線形補間によって等 ψ 線を描き，この近似的な等 ψ 線に沿って線積分を線形近似で計算する。
- (ii) 平衡諸量に現われる各種の微分計算には差分近似と線形補間を用いる。たとえば， (ψ, χ) 格子上で $\partial \psi / \partial R, \partial \psi / \partial Z$ の値を求める場合， $R(\psi, \chi), Z(\psi, \chi)$ が一般に (R, Z) 格子点に一致しないので点 $(R(\psi, \chi), Z(\psi, \chi))$ に最も近い格子点上での $\partial \psi / \partial R, \partial \psi / \partial Z$ を差分近似で評価する。次に，それらの値をもとに線形補間によって $(R(\psi, \chi), Z(\psi, \chi))$ での値を評価する。また， $\partial R / \partial \psi$ については，それを計算する等高線 $\psi = \psi_i$ に相前後する等高線 $\psi_{i\pm 1}$ 上での R の値を用いて差分近似

$$\frac{\psi_i - \psi_{i-1}}{\psi_{i+1} - \psi_{i-1}} \frac{R(\psi_{i+1}, \chi) - R(\psi_i, \chi)}{\psi_{i+1} - \psi_i} + \frac{\psi_{i+1} - \psi_i}{\psi_{i+1} - \psi_{i-1}} \frac{R(\psi_{i-1}, \chi) - R(\psi_i, \chi)}{\psi_{i-1} - \psi_i}$$

で $\partial R / \partial \psi(\psi_i, \chi)$ を評価する。

しかしながら，この方法には以下のような欠点がある。すなわち，

- (i) の方法だと，磁気軸近傍では等高線を描くことができない。そのため，もとの ERATO コードでは磁気軸近傍で最小自乗法による関数あてはめを行って $\psi(R, Z)$ の関数形を与え，それを用いて平衡諸量を計算するという便宜的な操作を使っていた。この操作には，仮定する関数形と，

あてはめの領域に任意性が残り、したがって、それらを変えると当然、固有値も変化する。なによりも、関数あてはめから決められた $\psi(R, Z)$ はグラッド・シャフランド方程式を満足しないので、これはきわめて不満足な方法である。特に、トカマクにおいては $q=1$ の磁気面があてはめ領域に入ることが多く、 $n=1$ モードの安定性解析には不適當である。

(ii)については、一般に (R, Z) の格子点数より (ψ, χ) の格子点数が少ないので、 $\psi(R, Z)$ の精度はよくても差分近似の誤差が大きくなることが予想される。特に $\beta_\chi(\psi, \chi)$ については、差分近似から求めた $\partial R / \partial \psi$ を使って公式

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial R}{\partial \chi} &= -\frac{\sqrt{g}}{R} \frac{\partial \psi}{\partial Z} \\ \beta_\chi &= \left(\frac{\partial R}{\partial \psi} - \frac{1}{|\nabla \psi|^2} \frac{\partial \psi}{\partial R} \right) \frac{\partial R}{\partial \chi} \end{aligned} \right\} \quad (5.1-9)$$

から計算しており、 $\partial R / \partial \psi$ の精度が悪いと $\partial \psi / \partial Z = 0$ になるR軸近傍で β_χ の誤差が著しく増幅される危険がある。また、駆動項(5.1-7)式には ψ のRおよびZの二階偏微分が含まれるので、それらの誤差が固有値へ敏感に反映される。

実際、もとのERATOコードで安定性解析を行った時、 (ψ, χ) の格子点数 N_ψ, N_χ を増加させても、成長率の滑らかな収束曲線が得られず、小規模な不規則性や、さらには、特定の N_ψ, N_χ に対して固有値が収束曲線から大きくずれる共鳴的な現象(図5.6参照)³⁹⁾が観測された。このため、成長率の低い内部モード(たとえば内部キンク・モード)について信頼性のある安定性解析が困難であった。

5.2 スプライン補間を用いた写像法

前節で述べたことから明らかなように、ERATOコードで用いる写像は

- (a) 与えられた (R, Z) の格子点数と、格子上での ψ の値だけで平衡諸量が一意的に、かつ正確にもとまり、それらの精度が (ψ, χ) の格子点数に依存しないこと、
- (b) (R, Z) 格子上だけでなく、 (ψ, χ) 格子上でも、変換 $R=R(\psi, \chi), Z=Z(\psi, \chi)$ を通して、 ψ の微分量が一意的に求まること、

が望ましい。

$\psi(R, Z)$ に二次元スプライン補間⁴²⁾を施すことによって、(a), (b)の条件を満足する写像法を作ることができる。スプライン補間された $\psi(R, Z)$ は、格子上で、もとの ψ に一致し、かつ、 (R, Z) 座標の任意の領域で ψ の二階微分まで連続である。したがって、 $\psi(R, Z) = \psi_i$ なる等高線を微分方程式

$$\frac{dR}{d\ell} = \frac{1}{|\nabla \psi|} \frac{\partial \psi}{\partial Z}, \quad \frac{dZ}{d\ell} = -\frac{1}{|\nabla \psi|} \frac{\partial \psi}{\partial R} \quad (5.2-1)$$

から求めることができる。ここで $d\ell$ は線素である。

ニュートン法で解いた $\psi(R, 0) = \psi_i$ の解 $R(\ell=0)$ と $Z(\ell=0) = 0$ を初期値にして、微分方程式を4次の最適ルンゲ・クッタ法で解けば、磁気軸近傍でも、きわめて正確に等高線を描く

ことができる。したがって、磁気軸近傍で ψ の最小自乗あてはめを行う必要がなくなる。

次に、 ψ に関する偏微分を避けるために、等高線に沿った線積分で定義される関数

$$h(\psi, \chi) = \int f(R, Z) d\ell$$

の ψ に関する垂直方向の微分 $\partial h / \partial \psi$ を線積分

$$\left. \frac{\partial h}{\partial \psi} \right|_{\perp} = \frac{1}{|\nabla \psi|^2} \nabla \psi \cdot \nabla \int f(R, Z) d\ell = \left[\left(\frac{\partial f}{\partial \psi} \right) + f \omega \right] d\ell \quad (5.2-2)$$

$$\omega = \frac{1}{|\nabla \psi|^2} \left[\frac{\partial^2 \psi}{\partial R^2} \left(\frac{\partial \psi}{\partial Z} \right)^2 + \frac{\partial^2 \psi}{\partial Z^2} \left(\frac{\partial \psi}{\partial R} \right)^2 - 2 \frac{\partial \psi}{\partial R} \frac{\partial \psi}{\partial Z} \frac{\partial^2 \psi}{\partial R \partial Z} \right] \quad (5.2-3)$$

で表わす(付録3参照)。

公式(5.2-3)を用いると、線積分で表わされる次の関数

$$L = \oint d\ell$$

$$\chi = \int \frac{d\ell}{g B_p}$$

$$\mu = \int \nu d\chi = T \int \frac{d\ell}{R^2 B_p}$$

$$q = \frac{T}{2\pi} \oint \frac{d\ell}{R^2 B_p}$$

の ψ に関する垂直方向の微分 $dL/d\psi$, $\beta_x, \left. \frac{\partial \mu}{\partial \psi} \right|_{\perp}$, および $\frac{dq}{d\psi}$ は、すべて、線積分で表わされる。微分方程式(5.2-1)から、等高線上の R, Z はその長さ ℓ を独立変数として与えられる($R=R(\ell), Z=Z(\ell)$)ので、線積分はシンプソン公式によって容易に、かつ、正確に数値的に計算することができる。また、 $\partial R / \partial \psi$, $\partial R / \partial \chi$ は座標変換の公式

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial R}{\partial \chi} &= -\frac{\sqrt{g}}{R} \frac{\partial \psi}{\partial Z} \\ \frac{\partial R}{\partial \psi} &= \frac{1}{|\nabla \psi|^2} \frac{\partial \psi}{\partial R} - \beta_x \frac{\partial R}{\partial \chi} \end{aligned} \right\} \quad (5.2-4)$$

から求められる。(5.2-4)式や平衡諸量(特に駆動項 K)に現われる $\psi(R, Z)$ の一階および二階微分は、正確な座標変換 $R=R(\psi, \chi)$, $Z=Z(\psi, \chi)$ を通して、スプライン補間によって局所的に与えられるので、写像に際して誤差の入り込む余地を除くことができる。このように、スプライン補間を用いた写像法は、もとのERATOコード(以下、旧版ERATOと呼ぶ)の写像法と比較して、

- (1) 磁気軸近傍での最小自乗あてはめが不用であり、
- (2) 平衡諸量の精度が (ψ, χ) の格子点数に依存しない

という特徴をもっている。したがって、 (R, Z) の格子点数が十分にあって、 $\psi(R, Z)$ のスプライン補間の精度が保障されていれば、ERATOコードで計算された固有値から写像の誤差を除去することができ、固有値の二次収束を期待できる。

5.3 新写像法のテスト

新写像法のテストのため、デカルト座標系 (R, Z) において等高線が楕円になる関数 $\psi(R, Z) = 2\pi(R^2 + Z^2/4)^2$ を与え、スプライン補間と微分方程式 (5.2-1) とから描いた等高線の精度を検査した。次に、自然座標系において、 $dq/d\psi$, $\partial R/\partial\psi$ および β_x を差分近似および公式 (5.2-3) から求め、それらの解析形と比較した。今の場合、 q に物理的意味はないが、幾何学的量、すなわち、ヤコビアンになっている、

$$q = \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{2\pi\psi}} \quad (5.3-1)$$

で表わされる。また、 χ は円柱座標系を考えた時、 R -座標軸からの回転角に一致し、 $R(\psi, \chi)$, $\beta_x(\psi, \chi)$ は

$$R = \left(\frac{\psi}{2\pi}\right)^{1/4} \cos \chi \quad (5.3-2)$$

$$\beta_x = \frac{3}{8\pi} \frac{\sin 2\chi}{\psi(5+3\cos 2\chi)} \quad (5.3-3)$$

である。

このテストにおいて、 (R, Z) 座標の格子点数 $N_R = N_Z = 60$ 、格子幅を $\Delta_R = \Delta_Z = 2/55$ に選んだ。等高線の高さ ψ_i は $\chi=0$ における R の値 R_i が等間隔になるように選び、

$$R_i = \frac{1-3}{40} \Delta_R i, \quad \psi_i = 2\pi R_i^4 \quad (5.3-4)$$

で与えられる。また、微分方程式 (5.2-1) を最適ルンゲ・クッタ法で解く時の長さ ℓ のきざみ幅は i 番目の等高線に対して $i/160$ である。図 5.1 に、スプライン写像から得られた等高線および等 χ 線を示す。また、図 5.2 は磁気軸 (原点) に最も近い二本の等高線を示している。図 5.2 では、 (R, Z) 座標は格子幅で規格化されている。これらの図に示された等高線に対して、等高線上での ψ のスプライン補間値と真の値との相対誤差は 10^{-4} % 以下である。したがって、等高線が $2\Delta_R$ 以上離れて磁気軸のまわりを廻る限り、微分方程式 (5.2-1) は正確な等高線を描くとみなせる。

図 5.3 に、スプライン写像で用いられる線積分から求めた $dq/d\psi$ の誤差 (破線) と、差分近似から求めた $dq/d\psi$ の誤差 (一点鎖線) を示す。横軸は等高線の番号を表わす。 $dq/d\psi$ は磁気軸で発散し、その様子は実線で示されている。等高線が磁気軸に近い ($i \leq 8$) 場合、差分近似では $dq/d\psi$ が求まらない。一方、線積分から求めた $dq/d\psi$ は、 $i=2$ の等高線に対しても 1% の誤差範囲で正確に計算されており、 $i=8$ については、差分近似と較べて約 1000 倍の精度をもっている。

図 5.4 は、 $i=2$ の等高線上における $\partial R/\partial\psi$ の誤差の χ -依存性を表わしている。実線は $\beta_x(\psi, \chi)$ を公式 (5.2-2) にもとづいて計算し、変換公式 (5.2-4) から $\partial R/\partial\psi$ を求めた場合の誤差を示している。また、点線は、旧版 ERATO コードで使われている差分近似から $\partial R/\partial\psi$ を求めた場合の誤差を示している。たて軸には、 $\sinh^{-1} x$ 目盛が使用されている。差分近似で

は $\partial R / \partial \psi$ に 40% から 80% の誤差があり、したがって、この値をもとに、(5.1-8)式から $\beta_x(\psi, \chi)$ を求めても、全く意味のない値を得る。一方、スプライン写像法から計算される $\partial R / \partial \psi$ は、 χ のすべての領域にわたって 2% の誤差範囲内で正確に求まっている。i = 8 の等高線上では、差分近似で求められた $\partial R / \partial \psi$ の誤差は 5% である。しかし、それでも、(5.1-9) から β_x を計算する際、 $\chi = 0$ の近傍および $\chi = \pi$ の近傍で $\partial R / \partial \psi$ のもつ誤差が著しく増幅されるために、 β_x の正確な値は求まらない。

線積分 (5.2-2) から求められた β_x の誤差を図 5.5 に示す。i = 2 と i = 8 の等高線上における誤差の χ - 依存性が図示されている。図 5.4 と同じく、たて軸は $\sinh^{-1} x$ 目盛である。差分近似から求めた β_x の値は意味がない (その誤差が 100% 以上になっている) ので示していない。

格子点数 $N_R = N_Z = 60$ (・印) の場合、i = 8 で、 β_x の誤差は 1% であるが、磁気軸に近い i = 2 に対しては 20% 程度である。 $N_R = N_Z = 120$ (○印) にすれば i = 2 での β_x の誤差を 10% 以下に抑えることができる。一般的に、磁気面が磁気軸に近いほど、その磁気面上での平衡諸量の精度が低下する。これは、磁気軸に近い等高線の通過する格子の数が少ないため、線積分を行う時に、真の値とスプライン補間値との差が打ち消されずに残るためと考えられる。特に、等高線が磁気軸の最近接の格子内のみ存在する場合、平衡諸量の誤差が最大になる。これを避けるため、等高線をただ 1 つの格子内で描かない様に、 ψ 格子 (すなわち、 ψ の等高線値) を構成することが望ましい。しかしながら、磁気面が磁気軸に近いほど、その磁気面が有理面にならない限り、その面からのエネルギー積分への寄与は小さいので、磁気軸に極端に近い磁気面上の平衡諸量の誤差の固有値へのはねかえりは無視できる。

図 5.6 は、文献 [43] に示されている平衡例について、旧版 ERATO コードおよびスプライン写像を用いた ERATO コードから計算された成長率 γ^2 の (ψ, χ) 格子点数 ($N_\psi = N_\chi = N$) の依存性を示している。磁気軸 ($\psi = 0$) およびプラズマ表面 ($\psi = \psi_s$) での安定係数は、それぞれ、 $q(\psi = 0) = 0.9$ および $q(\psi = \psi_s) = 2.7$ であり、トロイダル・モード数 n は $n = 1$ である。また、自然座標系を用いている。

平衡メッシュ数 $N_R \times N_Z$ が 128×64 の場合 (図 5.6 (a))、旧版 ERATO コードでは、×印で示されているように、明確な収束曲線を得ることができない。そのため、外挿によって真の固有値を推定することは不可能である。一方、スプライン写像を用いた ERATO コードでは、・印で示されているように、滑らかな収束曲線を得ることができる。しかも、 $N \geq 25$ の場合、成長率は二次の収束を示すので、外挿によって真の固有値を推定できる。なお、旧版 ERATO コードでは、磁気軸の近傍で $\psi(R, Z)$ の最小自乗あてはめが必要であるが、その領域は NAN を入力パラメータとして、長方形領域: $|R - R_0| \leq \text{NAN} \cdot \Delta$, $0 \leq Z \leq \text{NAN} \cdot \Delta$ (Δ : 格子幅, ($R_0, 0$): 磁気軸に最近接の格子点) で与えられる。図 5.6(a) では $\text{NAN} = 6$ である。

平衡格子点数 $N_R \times N_Z$ も 512×256 にして、旧版 ERATO コードで成長率を求めた場合を図 5.6(b) に示す (○印: $\text{NAN} = 10$, ×印: $\text{NAN} = 25$)。また、比較のため、 $N_R \times N_Z = 128 \times 64$ でスプライン写像を用いた場合に得られる収束曲線 (・印) も図示している。旧版 ERATO コードでは、平衡の格子点数を 4 倍にしても、滑らかな収束曲線は得られない。さらに、旧版 ERATO コードのもつ 3 つの欠点を指摘できる。1 つは、最小自乗あてはめの領域を決定するパラメータを変えると固有値も変化し、したがって、異なる収束曲線が得られることである。次に

特定の格子点数（ $NAN=10$ に対しては $N=27, 30$, $NAN=25$ については $N=30$ ）の時に、成長率が著しく大きくなる現象がみられる。第3点は、格子点数 N も増大していくと、成長率に小規模の変動が観測され、その精度が向上するとは言えないことである。スプライン写像を用いると、これらの欠点を取り除かれ、成長率の精度が大幅に改善される。そして、成長率の低い内部キック・モードの信頼性のある安定性解析が可能になった。

次に、自然座標系および等弧座標系を採用した場合の成長率の収束について調べた。図 5.7 はスプライン写像によって構成された自然座標系（図 5.7(a)）および等弧座標系（図 5.7(b)）の等 ψ 線、等 χ 線を示している。平衡は円形断面で $q_a/q_0=2.5$, $\beta_p=1$ である（ q_0, q_a はそれぞれ磁気軸およびプラズマ表面での安定係数）。3.3 節で述べた様に、自然座標系は $\chi=0$ の近傍で等 χ 線が疎で、 $\chi=\pi$ の近傍で密な座標系になっている。各々の座標系に対して得られた $n=1$ モードの収束曲線を図 5.8 に示す。 $n=1$ モードが不安定になるように平衡にスケージングをかけて $q_0=0.9$ になっている。また (ψ, χ) 座標の格子点数 N_ψ, N_χ は $N_\psi/N_\chi=4/3$ に固定されている。自然座標系（○印）でも等弧座標系（×印）でも、いずれの場合も、成長率は二次収束であり、外挿値 r_∞^2 として

$$\begin{aligned} r_\infty^2 &= 5.56 \times 10^{-4} && \text{: 自然座標系} \\ r_\infty^2 &= 5.65 \times 10^{-4} && \text{: 等弧座標系} \end{aligned}$$

が得られ、それらは相対誤差 2% の範囲で一致している。また、図 5.8 から自然座標系の方が収束曲線の傾きが大きいことが分る。これは、平衡がトーラス状であるために生じる不安定モードのバルーニング性のため、不安定モードが自然座標系で等 χ 線が疎になっている $\chi=0$ の近傍に局在するためである。すなわち、等弧座標系は自然座標系にくらべて実質的にポロイダル方向の格子点数を増やすことになっている。しかし、これは一般的な結果ではなく、平衡が Z 方向に伸びた非円形断面であると、むしろ、自然座標系のほうが傾きの小さい収束曲線が得られる場合がある。むしろ、対象とするモードの特徴によって、いずれかの座標系を選べばよい。

5.4 第5章の要約

本章では、数値的に計算した平衡をもとにして ERATO コードで必要な平衡諸量を計算する写像法について論じた。安定性解析には、ポロイダル磁束関数 ψ の値自身のみならず、 R と Z に関する ψ の 1 階および 2 階の偏微分、また、それらの関数の等高線に沿った線積分が必要である。これらの諸量を正確に計算し信頼性のある安定性解析が可能になるスプライン写像について述べ、そのテストおよび旧版 ERATO コードとの比較を行い、その有効性を確認した。また、安定性解析の理論では自然座標系がよく用いられるが、数値計算上では自然座標系が必ずしも最適ではなく、等弧座標系も適切であることを示した。

表 5.1 ERATO コードで必要な平衡諸量 EQ (k,j)
 k=1~9 は自然座標・等弧座標に共通

k	EQ(k,j) j=1, ..., N _z
1	s _i
2	χ _j
3	$\begin{cases} s_{i+1} & i \neq N_{\psi} + 1 \\ 0 & i = N_{\psi} + 1 \end{cases}$
4	χ _{j+1}
5	$\begin{cases} s_{i+1/2} & i \neq N_{\psi} + 1 \\ s_{N_{\psi}+1} & i = N_{\psi} + 1 \end{cases}$
6	χ _{j+1/2}
7	ρ ₀
8	Γp
9	T

k	EQ(k, j) j=1, ..., N _z	
	自然座標系	等弧座標系
10	q	ν
11	0.0	$\frac{\partial}{\partial \chi} \log \nu$
12	$\frac{d}{ds} \log q$	$\frac{\partial}{\partial s} \log \nu_{\perp}$
13	χ dq/ds	∂μ/∂s
14	∇ψ ²	∇ψ ²
15	β _s = 2ψ _s s β _χ	β _s = 2ψ _s s β _χ
16	R ²	R ²
17	$\frac{\partial}{\partial s} \log R^2$	$\frac{\partial}{\partial s} \log R^2$
18	$\frac{\partial}{\partial \chi} \log R^2$	$\frac{\partial}{\partial \chi} \log R^2$
19	$2\psi_s s \left(\frac{T'}{T} - \frac{j_t}{RB_p^2} \right) - \frac{\partial}{\partial s} \log q$	$2\psi_s s \left(\frac{T'}{T} - \frac{j_t}{RB_p^2} \right) - \frac{\partial}{\partial s} \log \nu_{\perp}$
20	$\frac{2\psi_s s R^2 T}{q} K$	$\frac{2\psi_s s R^2 T}{\nu} K$

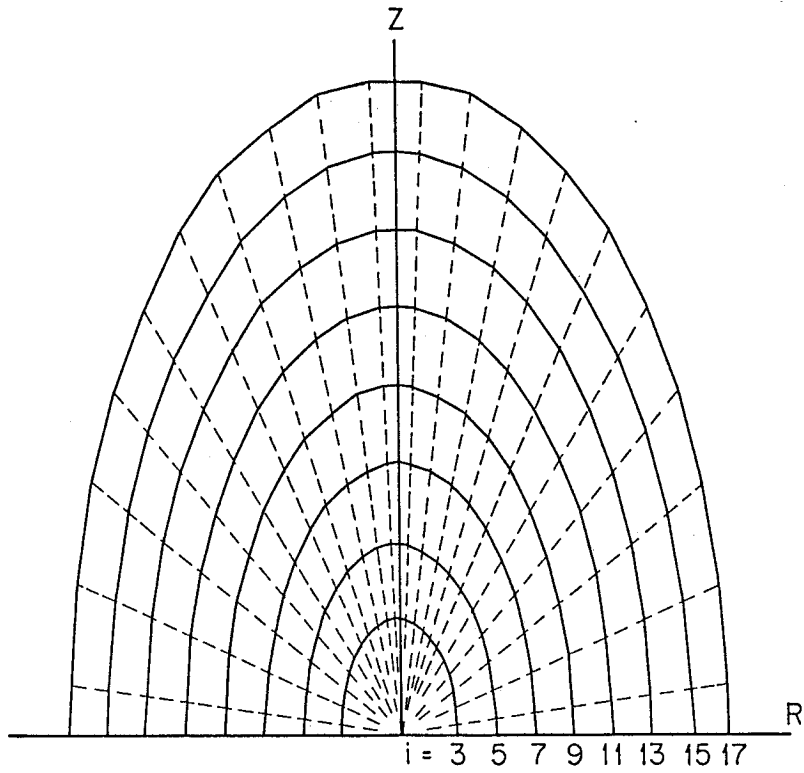


図 5.1 $\psi(R, Z) = 2\pi(R^2 + Z^2/4)^2$ に対する等 ψ 線 (実線) と等 χ 線 (破線)。(R, Z)座標の格子点数 $N_R \times N_Z$ は 60×60 であり, 等 ψ 線の値 ψ_i は $\psi_i = 2\pi R_i^4$, $R_i = (1 - 3\Delta_R)i / 40$ ($i = 1, 2, \dots, 40$), $\Delta_R = 2/55$ である。関数 $\psi(R, Z)$ は 3 次のスプライン関数で補間される。

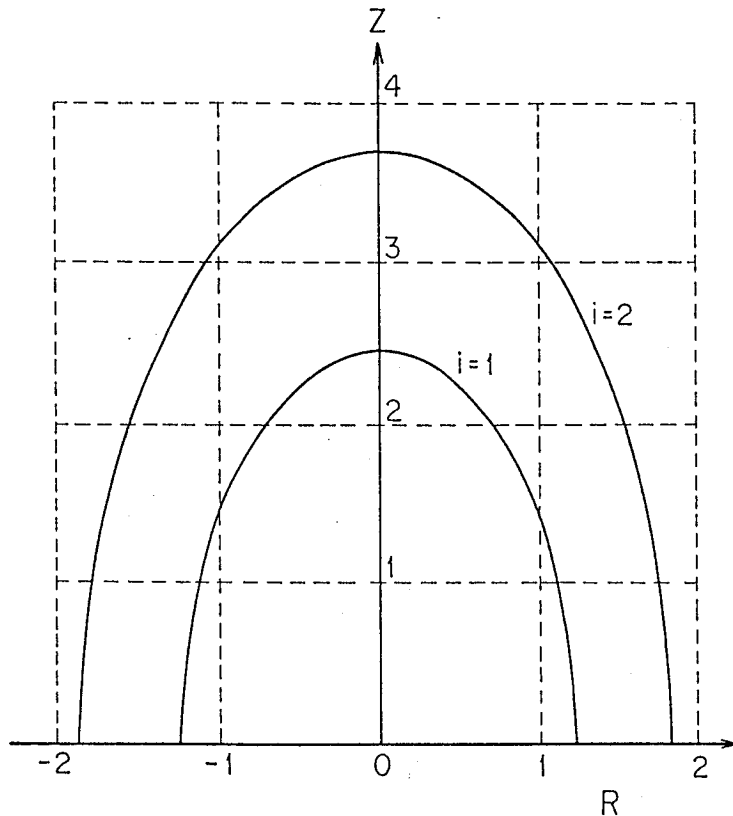


図 5.2 磁気軸 (原点) 近傍の等 ψ 線。(R, Z) 格子は破線で示されている。

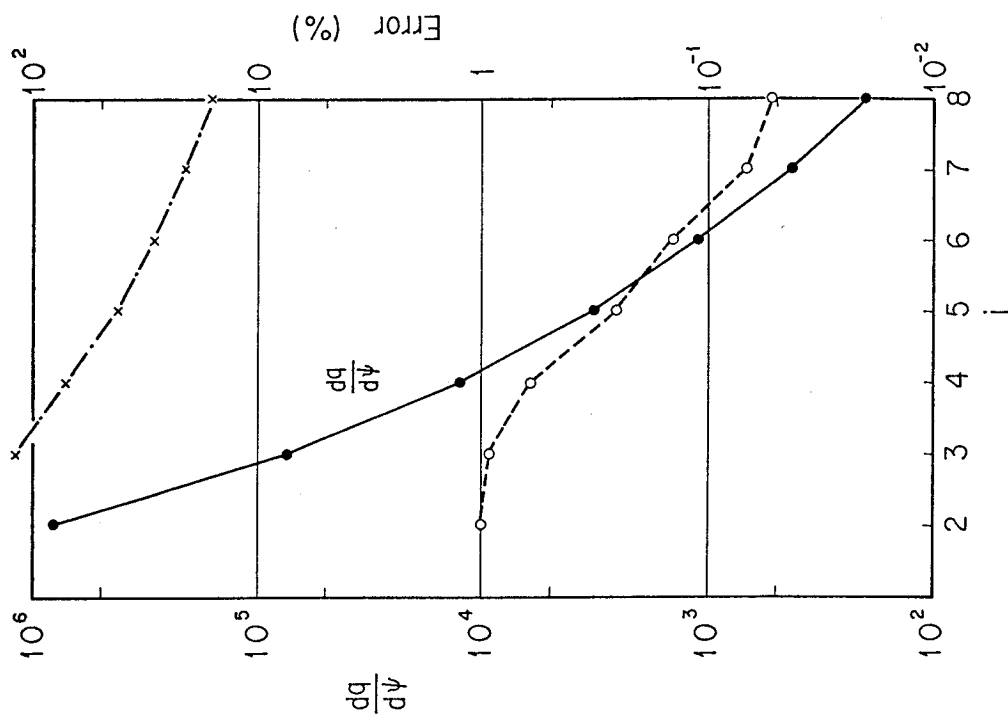


図 5.3 等 ψ 線上での $dq/d\psi$ の相対誤差 (点線: スプライン写像法, 一点鎖線: 差分法)。 $dq/d\psi$ の厳密値は実線で示されている。

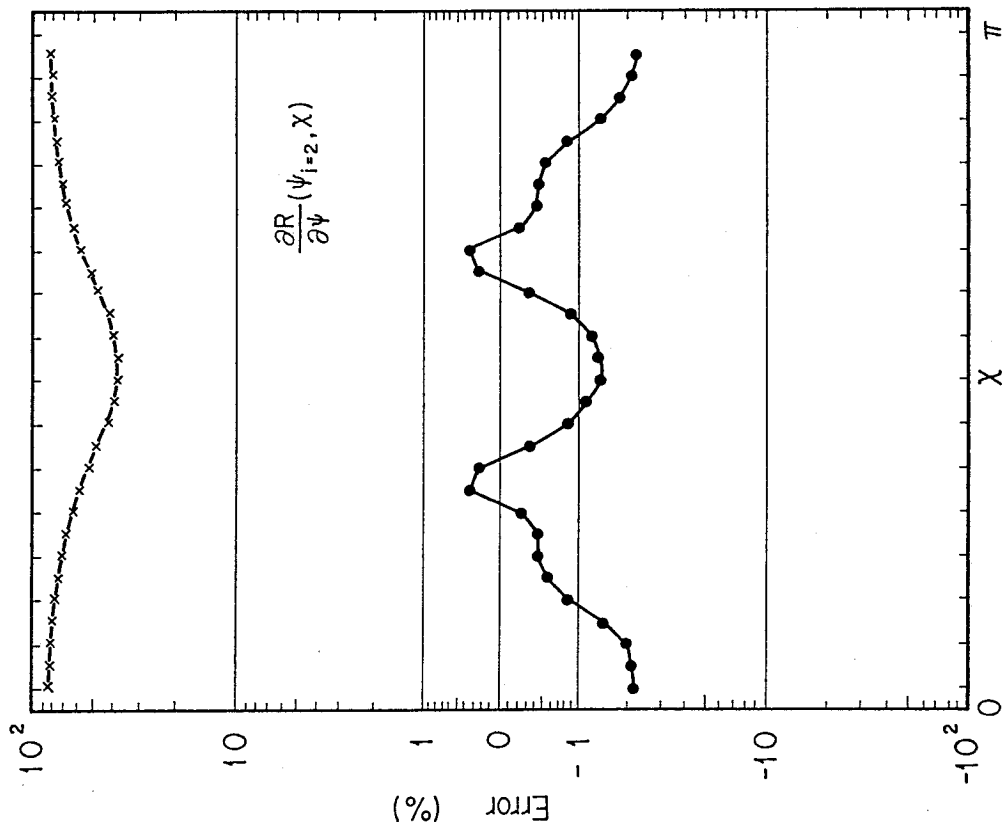


図 5.4 2 番目の等 ψ 線上での $\partial R / \partial \psi$ の相対誤差 (実線: スプライン写像法, 点線: 差分法)。相対誤差は \sinh^{-1} 目盛りで示されている。

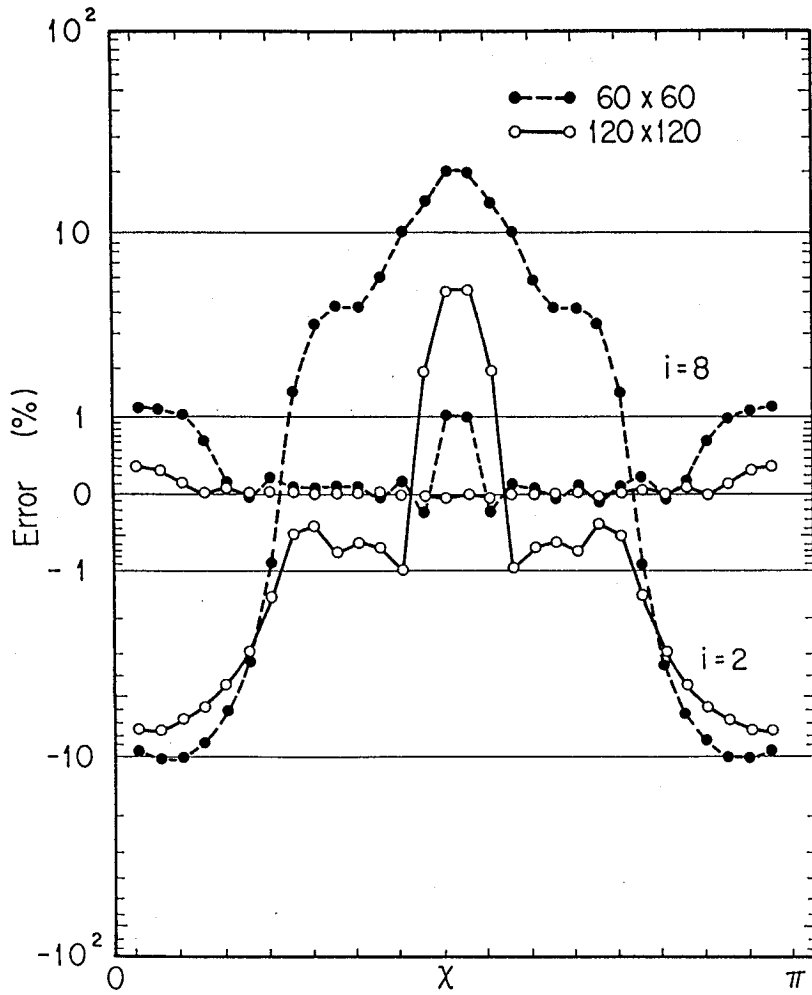


図 5.5 線積分 (5.2-2) から求めた $\beta_\chi(\psi_i, \chi)$ ($i=2, 8$) の相対誤差。格子点数は $N_R \times N_z = 60 \times 60$ (●印) および $N_R \times N_z = 120 \times 120$ (○印) である。相対誤差は \sinh^{-1} 目盛である。

\circ 6.18E-3
 \approx δ 2.32E-3
 \approx δ 2.30E-3

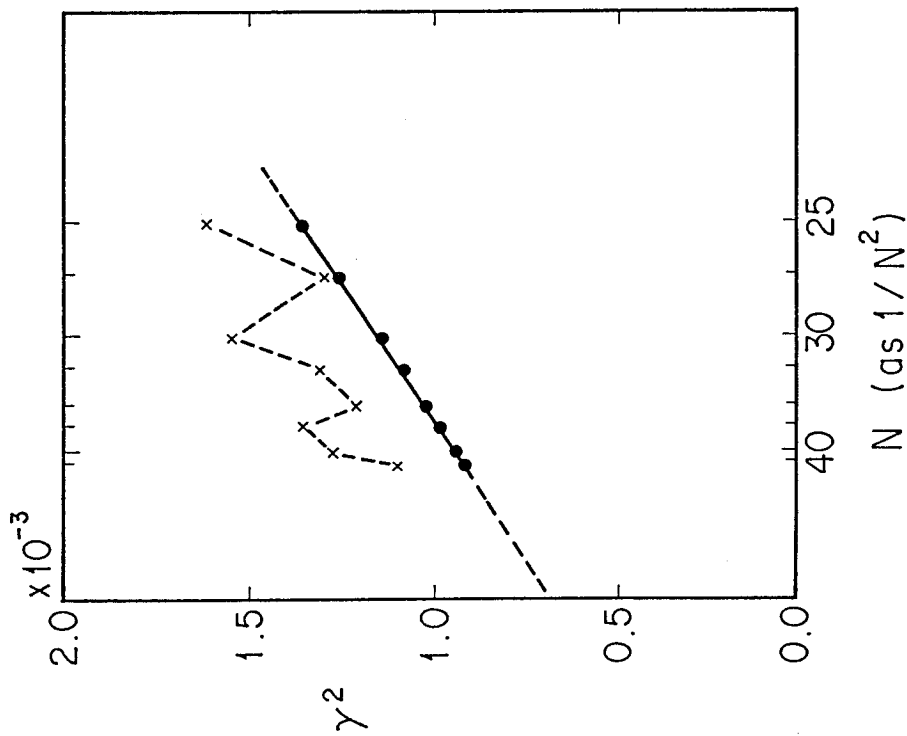


図5.6(a) $n=1$ 内部モードの固有値 γ^2 の (ψ, χ) 格子点数 N ($N_\psi = N_\chi = N$) の依存性。×印は旧版 ERATO コード, ●印はスプライン画像を用いた ERATO コード (改良 ERATO) の場合を示す。平衡の (R, Z) 格子点数 $N_R \times N_Z = 128 \times 64$ であり, ψ の最小自乗あてはめを行う領域 $NAN = 6$ である。

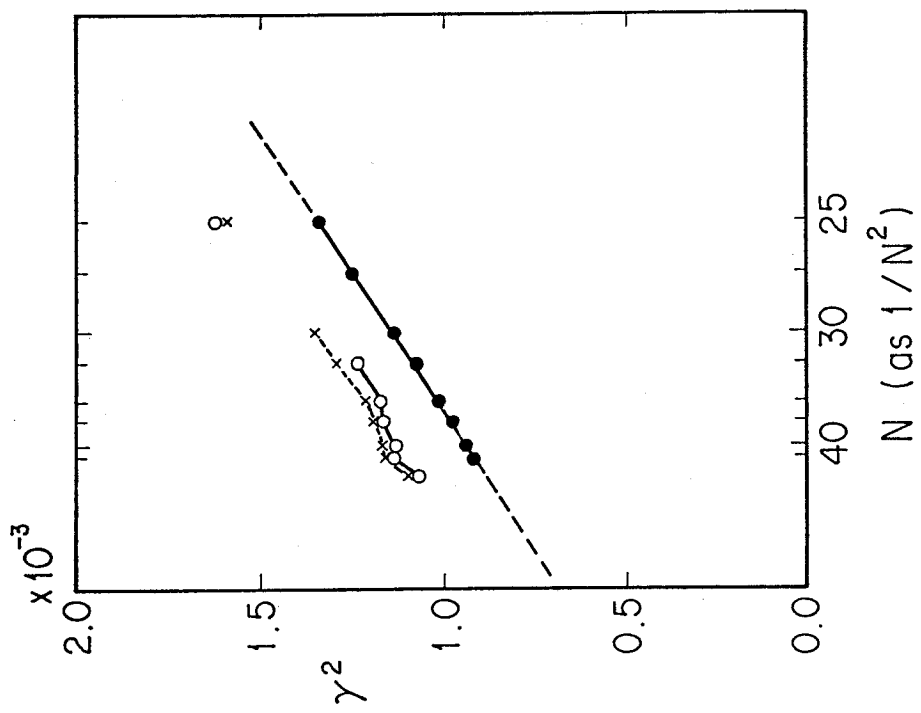


図5.6(b) $N_R \times N_Z = 512 \times 256$ の場合の収束曲線 (○印: $NAN=10$, ×印: $NAN=25$, いずれも旧版 ERATO)。比較のため改良 ERATO コード ($N_R \times N_Z = 128 \times 64$) で求めた収束曲線 (●印) を示す。特定の N の値で固有値が飛ぶことに注意。

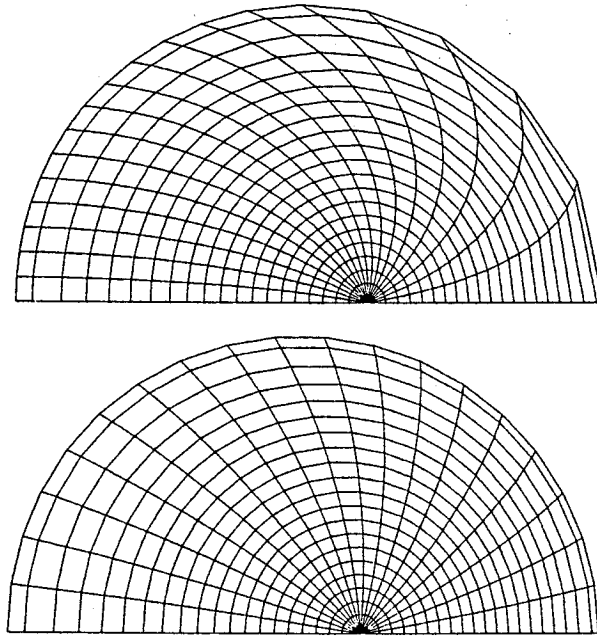


図 5.7 円形断面トカマク ($q_a/q_0=0.9, \beta_p=1$) の磁束座標系: (a) 自然座標系 (b) 等弧座標系

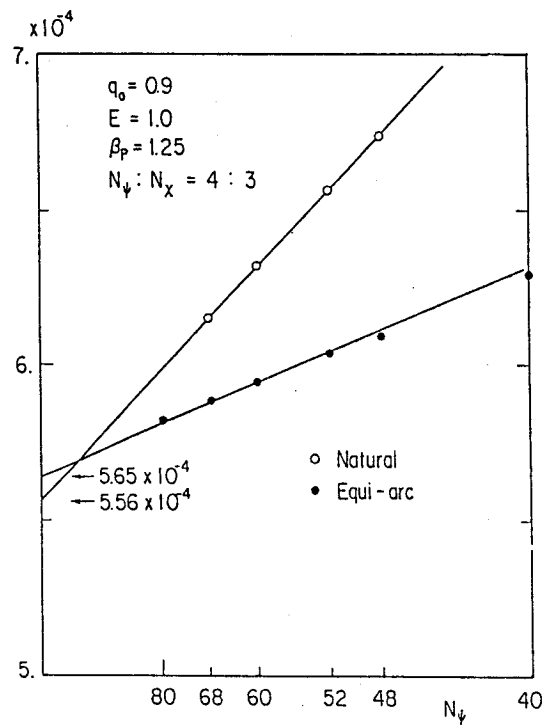


図 5.8 円形断面トカマク平衡 ($q_0=0.9, \beta_p=1.25$) に対する $n=1$ モードの固有値 γ^2 の収束曲線 (○印: 自然座標, ●印: 等弧座標)。(ψ, χ) 座標の格点数 N_ψ, N_χ は $N_\psi/N_\chi = 4/3$ に固定。

6. ERATOコードによる内部キンク・モードの安定性解析

エネルギー原理から決定される固有関数である MHD モードはポロイダル・モード数 m とトロイダル・モード数 n で特徴づけられる。その中で、プラズマ表面が固定された $m=1$ モードは MHD 安定性理論においても、トカマク装置によるプラズマの閉じ込め実験においても特殊な位置を占めており、このモードは内部キンク・モードとよばれている。内部キンク・モードに対しては、磁力線に平行な電流成分も圧力もともに不安定化の原因になっている。トカマク・プラズマでは安定係数 $q(\psi)$ がポロイダル磁束関数 ψ の単調増加関数であるので、磁気軸での安定係数 q_0 が 1 以下になると、 $m=1/n=1$ の内部キンク・モードが不安定になりうる。このモードの安定性はプラズマが加熱された時における軟 X 線信号の変化と関係があると考えられる。

本章では、ERATOコードを用いて内部キンク・モードの安定性解析を行う。

6.1 節でトカマク装置によるプラズマの閉じ込め実験で観測されている MHD 現象と MHD 安定性理論との関係を述べた後、6.2 節で円柱プラズマ近似を用いた $m=1$ 内部キンク・モードの安定性理論から $m=1$ モードの特殊性を明らかにし、次に、トロイダル効果の内部キンク・モードの安定性への影響を論じる。

6.3 節では安定性解析に用いる平衡について述べ、6.4 節で内部キンク・モードの安定性解析を行う。主として、ポロイダル・ベータ値 (β_p 値) に対する内部キンク・モードの成長率の依存性に着目し、第 2 安定領域の存在を示す。また、磁場のシフトおよびプラズマ断面の形状が内部キンク・モードの安定性に与える影響についても調べる。最後に、6.5 節で得られた結果と実験との比較を行う。

6.1 トカマクにおける MHD 安定性

現在、トカマク装置によるプラズマ閉じ込めの実験で観測されている MHD 現象として、

- (1) $m/n=2/1$ 抵抗性モード ($m=2$ tearing mode) が原因になる崩壊不安定 (disruptive instability) と
- (2) $m/n=1/1$ 抵抗性モード ($m=1$ resistive mode) が原因になる内部崩壊不安定 (internal disruption)

とがあげられる⁴⁾。また、将来、バルーニング・モード⁴⁴⁾が重要になると予想されている。バルーニング・モードはプラズマの β 値が高くなると不安定になるので、強力な追加熱で閉じ込めプラズマの高 β 化をめざす時の β 値の上限を与えられると考えられている。高 β トカマク・プラズマのバルーニング・モードに対する安定性が、トロイダル・モード数 n の高い近似で^{44, 45, 46)}、また、 $n \leq 50$ については ERATO コードで解析されており^{20, 24)}、安定係数や圧力分布を最適化すると、一度、不安定になったバルーニング・モードが、 β 値のさらに高い領域で再び安定になる (第二安定領域) ことが見い出されている。

崩壊不安定は、負の電圧スパイクを伴う、磁場エネルギーおよびプラズマ・エネルギーの急激

な損失がおり放電が停止する現象である。壁に甚大な損傷を与えるため、閉じ込めプラズマのエネルギーの大きい大型装置にとって、崩壊不安定を抑えることは重要な課題である。この現象は、 $m=2$ ティアリング・モードの非線形な発展によって起こると考えられており、Waddell, Carreras^{10, 47)}, 安積, 栗田, 田中らによって^{48, 49)} ティアリング・モードの非線形発展の計算機シミュレーションがおこなわれ、崩壊不安定の機構を説明する結果を得ている。

内部崩壊不安定^{50, 51)}は、磁気軸での安定係数 q_0 が1以下になると $m/n=1/1$ の抵抗性モードが不安定に成長し、そして突然に消失する（この時 $q_0 > 1$ に回復する）ことを繰り返す現象である。この現象が起こっている時には、軟X線検出器の信号に、図6.1(a)に示すような鋸歯状の波形（sawtooth oscillation）が観測される⁵¹⁾。内部崩壊不安定は、 q_0 が1以下にとどまることを抑制する。ジュール加熱で電子温度が上昇するが、内部崩壊不安定によって $q < 1$ の内部にあるエネルギーの一部が温度パルスの形で $q > 1$ の外部へはき出される。したがって、内部崩壊不安定は高 q_a (q_a : プラズマ表面の安定係数) のトカマク・プラズマは閉じ込めにほとんど影響しないが、低 q_a のトカマク・プラズマでは閉じ込めに影響する⁵²⁾。 $m=1$ 抵抗性モードによる磁力線の再結合にもとづいた内部崩壊不安定の機構が Kadomtsev によって提案された⁵³⁾。 $m=1$ 抵抗性モードの計算機実験⁹⁾や、Kadomtsev のモデルにもとづいたトカマク・コードの数値計算⁵⁴⁾は、内部崩壊不安定を再現する結果を得ている。

しかし、中性粒子入射（NBI）によって、プラズマを追加熱し β_p をあげていくと、図6.1(b, c)に示すように、軟X線の信号は鋸歯状振動から連続的な高周波振動に変化していく。これは、成長の飽和した $m=1$ モードを観測していると考えられる⁵¹⁾。この現象の原因として $m=1$ 内部キック不安定が考えられる。 $m=1$ 内部キック・モードは電流 \mathbf{j} と圧力 p が、両方とも不安定化に働く理想 MHD モードである。円柱プラズマ近似の範囲では、 $q_0 < 1$ の時、 $m=1$ 内部キック・モードは不安定であるが^{55, 56)}、円形断面トカマクでは β_p 値の低い場合は $q_0 < 1$ でも安定である。そして β_p がある臨界値を越えた時、不安定になる^{57, 58)}。したがって、 β_p が低い場合、 $m=1$ モードは有限抵抗によって不安定になっているが、追加熱によって β_p が上がると、 $m=1$ モードは内部キック・モードの性質を持つ。（抵抗性内部キック・モード（resistive internal kink mode.））。安積らは β_p が有限である効果を組み入れた簡約 MHD 方程式⁵⁹⁾を用いて円柱プラズマにおける $m=1$ 抵抗性内部キック・モードの計算機実験を行い $m=1$ モードが内部崩壊に至らず飽和することを示した。

以上に述べた様に、 β_p が高いトカマク・プラズマにおける $m=1$ モードに関する MHD 現象では内部キック・モードが重要な役割をはたす。次節で、トカマク・プラズマにおける $m=1$ 内部キック・モードの安定性について述べる。

6.2 トカマク・プラズマにおける内部キック・モード

$m=1$ 内部キック・モードの性質を調べるため、いわゆる円柱プラズマ近似を用いて、ポテンシャル・エネルギー積分の最小化を行う。この近似では、磁気面は円形であるので自然座標系は、通常の円柱座標系 (r, χ) (r : 磁気軸からの距離, χ : r -軸から反時計方向にまわる回転角) に一致する。ポテンシャル・エネルギー積分には ξ_ϕ は音波のエネルギー $\Gamma p |\text{div } \xi|^2$ の項にしか

表われないので ((2.4-6) 式参照), ξ_ϕ について最小化すると $\text{div } \xi = 0$ を得る。したがって, 円柱プラズマ近似におけるポテンシャル・エネルギー積分 (4.2-10, 11) は変位ベクトル ξ を $X = \xi \cdot \nabla r$, $V = r (\xi \cdot \nabla \chi - \xi \cdot \nabla \phi / q)$ で定義すると,

$$w_p = \frac{r}{R_0} B_t^2 \left\{ \left| F(X) \right|^2 + \left(\frac{R_0}{r} \right)^2 \left| \frac{\partial V}{\partial \chi} + \frac{\partial}{\partial r} (rX) \right|^2 + \left| \ln V + \frac{1}{q} \frac{\partial}{\partial r} (rX) - \frac{2}{q} X \right|^2 \right\} + 2R_0 \left(\frac{dp}{dr} + B_t \frac{dB_t}{dr} \right) |X|^2 \quad (6.2-1)$$

になる。また, 平衡を表わすグラッド・シャフラノフ方程式は,

$$\frac{1}{r} \frac{d\psi}{dr} \frac{d}{dr} \left(r \frac{d\psi}{dr} \right) = -R_0^2 \left(\frac{dp}{dr} + B_t \frac{dB_t}{dr} \right) \quad (6.2-2)$$

であり, 安定係数 q は

$$q = \frac{r B_t}{d\psi/dr} \quad (6.2-3)$$

で与えられる。

円柱プラズマではポロイダル方向にも変位ベクトルのフーリエ展開ができるので

$$X(r, \chi) = X_m(r) e^{im\chi}, \quad V(r, \chi) = iV_m(r) e^{im\chi} \quad (6.2-4)$$

をおく。エネルギー積分 (6.2-1) には V についての r の微分がないので, V に関して容易に最小化ができ,

$$V_m = \frac{1}{m^2 + (n/R_0)^2 r^2} \left\{ \left[m + \frac{n}{q} \left(\frac{r}{R_0} \right)^2 \right] r \frac{dX_m}{dr} + \left[m - \frac{n}{q} \left(\frac{r}{R_0} \right)^2 \right] X_m \right\} \quad (6.2-5)$$

$$w_Q \equiv \frac{r}{R_0} B_t^2 \left\{ \left(\frac{R_0}{r} \right)^2 \left| r \frac{\partial V}{\partial \chi} + \frac{\partial}{\partial r} (rX) \right|^2 + \left| \ln rV + \frac{1}{q} \frac{\partial}{\partial r} (rX) - \frac{2}{q} X \right|^2 \right\} \\ = \frac{r}{R_0} B_t^2 \frac{1}{m^2 + n^2 r^2 / R_0^2} \left| \left(n - \frac{m}{q} \right)^2 r \frac{dX_m}{dr} + \left(n + \frac{m}{q} \right) X_m \right|^2 \quad (6.2-6)$$

$$W_p = B_t^2 \frac{r}{R_0} \left(\frac{m}{q} - n \right)^2 |X_m|^2 + 2R_0 \left(\frac{dp}{dr} + B_t \frac{dB_t}{dr} \right) |X_m|^2 + w_Q \quad (6.2-7)$$

を得る。

ここで, 低 β 値のトカマク・プラズマでは $B_t \approx$ 一定であること, および $(n/R_0)^2 r^2 \ll 1$ を使い, さらに, $X_m \frac{dX_m}{dr}$ の項を部分積分して, 平衡の関係式 (6.2-2, 3) を用いると, ポテンシャル・エネルギーとして

$$w_p = B_t^2 \left(\frac{r}{R_0} \right) \left(\frac{1}{q} - \frac{n}{m} \right)^2 \left(r \frac{dX_m}{dr} \right)^2 + B_t^2 \frac{r}{R_0} \left\{ \left[(m^2 - 1) + \frac{n^2}{m^2} \left(\frac{r}{R_0} \right)^2 \right] \left(\frac{1}{q} - \frac{n}{m} \right)^2 \right\}$$

$$-2 \frac{n^2}{m^2} \left(\frac{r}{R_0} \right)^2 \left(\frac{1}{q^2} - \frac{n^2}{m^2} \right) + \frac{n^2}{m^2} \left(\frac{r}{R_0} \right)^2 \frac{2R_0^2}{B_t^2 r} \frac{dp}{dr} \left. \right\} X_m^2 \quad (6.2-8)$$

を得る⁷⁾ (付録4参照)。ここで、特徴的なことは、不安定化項 $2R_0 \frac{dp}{dr}$ が安定化項 w_Q の一部と打ち消し、不安定化は $O((nr/mR_0)^2)$ になることである ((6.2-8)式右辺第3, 4項)。そして、 $m \geq 2$ の場合、摂動磁場 Q_r によるアルフヴェン項 (6.2-8)式右辺第2項の安定化効果は $O(1)$ 、であるため、不安定モードは有理面 $q = \frac{m}{n}$ に局在し、また、圧力が主要な不安定化項になる⁷⁾。しかしながら、 $m=1$ モードについては、摂動磁場 Q_r のアルフヴェン安定化効果が打ち消され、ポテンシャル・エネルギー w_p は

$$w_p = B_t \underbrace{\left(\frac{r}{R_0} \right) \left(\frac{1}{q} - n \right)^2}_{\textcircled{1}} \underbrace{\left(r \frac{dX_1}{dr} \right)^2}_{\textcircled{2}} + B_t^2 \left(\frac{r}{R_0} \right)^3 n^2 \left\{ \underbrace{- \left(\frac{1}{q} - n \right) \left(\frac{1}{q} + 3n \right)}_{\textcircled{2}} \right. \\ \left. + \underbrace{\frac{2R_0^2}{B_t^2 r} \frac{dp}{dr}}_{\textcircled{3}} \right\} X_1^2 \quad (6.2-9)$$

になる。この場合、電流 (項②) も圧力 (項③) も $O\left(\left(\frac{r}{R_0}\right)^2\right)$ の不安定化の働きがあるので特に内部キック・モードとよばれる。そして、トカマクのように、安定係数 q が単調増大の場合、有理面 $q = n$ の内部で電流項②は不安定に働き、有理面の外部では安定に働く。また、 $m=1$ の境界条件は

$$\left. \frac{dX_1}{dr} \right)_{r \rightarrow 0} = 0, \quad X_1 (r = \text{プラズマ表面}) = 0$$

であるので (付録4参照)、固有関数 $X_1(r)$ は

$$\left. \begin{array}{ll} X_1(r) \approx \text{const} & ; \quad q(r) < n \\ X_1(r) \approx 0 & ; \quad q(r) > n \end{array} \right\} \quad (6.2-10)$$

の形をもつと (6.2-9) 式右辺第1項による安定化が働かないため、 $m=1$ 内部キック・モードの固有関数 $X_1(r)$ は、 $m \geq 2$ の場合の局在した固有関数とは異なり、図6.2に示すような大域的な形状をもつ。一方、 $X_1(r)$ は $q = n$ 面の前後で急激に変化するため、 $\frac{\partial}{\partial r} (rX) + \frac{\partial V}{\partial \chi} = O\left(\left(\frac{r}{R_0}\right)^2\right)$ より、 V_1 は有理面でピークをもつ⁵⁵⁾。

磁気軸での安定係数 q_0 が $q_0 < n$ を満たすと、 $(m, n) = (1, n)$ の内部キック・モードが不安定になるが、 R_0 を大きくしていく方法によって、2つの場合に別れる。一つは、トロイダル・モード数 n を固定して (たとえば、 $n=1$) R_0 を大きくする場合で、この時は、 $n \frac{r}{R_0} \rightarrow 0$ であるため、内部キック・モードは準安定に近づく。一方、 nr/R_0 を固定しながら R_0 を大きくし、かつ、 $q_0 < n$ を満たすように安定係数 $q(r)$ を、その形状を変えずに下げていく時は不安定のままである。

円柱プラズマ近似のもとでの $m=1$ 内部キック・モードは、プラズマ断面が円形で、プラズマ柱がまっすぐであることからくる特殊なモードである。すなわち、メトリック量の特殊性から、アルフヴェン項と w_Q および不安定化項の間で打ち消しがおこっている。次にトロイダル効果が $m=1$ 内部キック・モードの安定性におよぼす影響を考察する。円柱プラズマ近似との対応をつけるため、プラズマ「半径 r 」を

$$\frac{d\psi}{dr} = \frac{T}{q} \frac{r}{R_0} \quad (6.2-11)$$

で定義し、自然座標系 (r, χ, φ) を用いるとヤコビアン \sqrt{g} は

$$\sqrt{g} = \frac{R^2}{R_0} r \quad (6.2-12)$$

になるので、この座標系におけるグラッド・シャフラノフ方程式は

$$\begin{aligned} \frac{1}{r} \frac{d\psi}{dr} \frac{d}{dr} \left(r \frac{d\psi}{dr} \right) + \left(\frac{d\psi}{dr} \right)^2 \left[\frac{1}{|\nabla r|^2} \frac{\partial |\nabla r|^2}{\partial r} \right]_{\perp} + \frac{\partial \beta_{rx}}{\partial \chi} \\ = \frac{1}{|\nabla r|^2} \left(R^2 \frac{dp}{dr} + T \frac{dT}{dr} \right) \end{aligned} \quad (6.2-13)$$

で与えられる $(\beta_{rx} \equiv \nabla r \cdot \nabla \chi / |\nabla r|^2, \frac{\partial f}{\partial r})_{\perp} \equiv \frac{\partial f}{\partial r} + \beta_{rx} \frac{\partial f}{\partial \chi})$ 。次に、変位ベクトル X, V を

$$\begin{aligned} X &= \xi \cdot \nabla r \\ V &= r (\xi \cdot \nabla \chi - \xi \cdot \nabla \varphi / q) \end{aligned}$$

で定義すると、(4.2-10, 11) 式から $\text{div } \xi = 0$ の場合のポテンシャル・エネルギー積分

$$\begin{aligned} W_p &= \pi \int w_p dr d\chi \text{ として} \\ w_p &= a |F(X)|^2 + b \left| \frac{\partial V}{\partial \chi} + \frac{\partial}{\partial r} (rX) \right|^2 + c \left| \text{in} V + \frac{1}{q} \frac{\partial}{\partial r} (rX) + hX - r \beta_{rx} F(X) \right|^2 \\ &\quad - d |X|^2 \end{aligned} \quad (6.2-14)$$

$$\left. \begin{aligned} a &= \left(\frac{T}{R} \right)^2 \frac{r}{R_0} / |\nabla r|^2, \quad b = \left(\frac{T}{R_0} \right)^2 \frac{R_0}{r}, \quad c = \left(\frac{T}{R_0} \right)^2 \frac{r}{R_0} |\nabla r|^2, \\ h &= \frac{R_0}{T} \left[\frac{r}{R_0} \frac{d}{dr} \left(\frac{T}{q} \right) - \frac{R_{jt}}{|\nabla r|^2} \right] \\ &= -\frac{1}{q} \left(2 + \frac{r}{|\nabla r|^2} \frac{\partial |\nabla r|^2}{\partial r} \right)_{\perp} + r \frac{\partial \beta_{rx}}{\partial \chi} \\ d &= 2R^2 \frac{r}{R_0} \frac{1}{|\nabla r|^2} (\mathbf{j} \times \mathbf{n}) \cdot (\mathbf{B} \cdot \mathbf{n}) \\ &= -\frac{1}{R_0} \left(R^2 \frac{dp}{dr} + T \frac{dT}{dr} \right) \left(2 + \frac{r}{|\nabla r|^2} \frac{\partial |\nabla r|^2}{\partial r} \right)_{\perp} + 2r \frac{\partial \beta_{rx}}{\partial \chi} \\ &\quad - \frac{r}{R_0} \frac{dp}{dr} \frac{\partial R^2}{\partial r} \Big|_{\perp} \end{aligned} \right\} (6.2-15)$$

を得る (h と d の導出については付録 5 参照)。ここで、円柱プラズマ近似

$$R \rightarrow R_0, \quad |\nabla r| \rightarrow 1, \quad \beta_{rx} \rightarrow 0$$

を用いると、(6.2-13) 式は (6.2-2) 式、(6.2-14) 式は (6.2-1) 式に帰着する。次に $\epsilon \equiv r/R_0 \ll 1, \beta_p \lesssim 1$ の円形断面トカマク・プラズマの場合、各磁気面の中心 R_c が磁気軸 R_0 に一致しなくなり、トロイダル・シフト $d(r)$ ($d(r) \equiv R_c - R_0$) が生じる。このシフトによって、

各 f ($f = |\nabla r|^2, d, h$) はその平均値 $\langle f \rangle$ ($\langle f \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f d\chi$) が円柱プラズマの値から $O(\epsilon^2)$ ずれ、また $O(\epsilon)$ のモード間結合 $\tilde{f}(r, \chi) = f(r, \chi) - \langle f(r, \chi) \rangle$ が生じ、 $\beta_{rx} = O(\epsilon)$ になる⁵⁸⁾。

ポテンシャル・エネルギー (6.2-14) を V について最小化すると、オイラー方程式から、

$$\left[-\frac{\partial^2 V}{\partial \chi^2} + n^2 \left(\frac{r}{R_0} \right)^2 |\nabla r|^2 \right] V = \left[\frac{\partial}{\partial \chi} + \frac{in}{q} \left(\frac{r}{R_0} \right)^2 |\nabla r|^2 \right] \frac{\partial}{\partial r} (rX) + in \left(\frac{r}{R_0} \right)^2 |\nabla r|^2 (hX - r\beta_{rx} F(X)) \quad (6.2-16)$$

が得られる。各磁気面上で、この方程式を V について解き、(6.2-14)式に代入すれば、 X だけで表わされたポテンシャル・エネルギーを得る。この時、安定化に働く摂動磁場エネルギーが不安定化項と打ち消しをおこなすが、トロイダル効果によって、円柱プラズマ項 ((6.2-9)式第2, 3項) 以外に、 $O(\epsilon^2)$ の新たな安定化効果が生じる。また、不安定化項 d にもトロイダル効果による $O(\epsilon^2)$ の新たな不安定化効果が生じ、結果として、トロイダル効果と円柱プラズマ項とは同じオーダーになってしまう⁵⁸⁾。したがって、 $m=1$ 内部キルク・モードは、円柱プラズマの場合と円形断面トカマクの場合とで、その固有関数 $X_1(r)$ が大域的な形状をもつという性質は変わらないが、その安定性が全く異なる。また、これまでの議論から、このモードの安定性はプラズマ断面の形状にも敏感であることが分る⁶⁰⁾。

Bussac らは⁵⁷⁾、 $\epsilon \ll 1$, $\beta_p \lesssim 1$ の近似のもとで円形断面トカマクの $m=1$ 内部キルク・モードの安定性を調べ、 $n=1$ の場合、トロイダル効果によって増大する安定効果が円柱プラズマ項を完全に打ち消し、モード間結合^{によって}のみ不安定になりえ、 β_p が低いと、このモードは安定であることを示した。この結果の可否について、議論があったが^{61, 62)}、Zakharov による再計算⁵⁸⁾ および Kerner らによる ERATO コードを用いた数値計算⁶³⁾ によって、正しいことが確認された。

現実のトカマク・プラズマでは、 r_p/R_0 (r_p : プラズマ半径) は、 $1/3 \sim 1/5$ で、1 より充分小さいとは言えず、また、6.1 節で述べたような、高 β_p 領域 ($\epsilon \beta_p \gtrsim 1$) での $m=1$ 内部キルク・モードの安定性を調べるにはトロイダル効果を正確に評価することが本質的であり、そのため、正確なトカマク・プラズマ平衡と ERATO コードによる安定性解析を必要とする。

6.3 平 衡

安定性解析の対象となるトカマク・プラズマの平衡は一連の FCT 過程 (第 3.8 節参照) で作成される。初期平衡は第 3.7 節に述べた方法に従って求める。この時、圧力 $p(\psi)$ およびトロイダル磁場関数 $T(\psi)$ は

$$\frac{dp}{d\psi} = p_0 [1 - \alpha x - (1 - \alpha)x^4] \quad (6.3-1a)$$

$$T \frac{dT}{d\psi} = 0 \quad (6.3-1b)$$

$$x = \frac{\psi - \psi_0}{\psi_s - \psi_0} \quad (6.3-1c)$$

で与えられる（(3.7-2)式参照）。したがって、(3.4-11)式より、初期平衡は、 $\beta_p = 1$ の平衡である。(6.3-1)式のパラメータ p_0 と α は、磁気軸およびプラズマ表面の安定係数 q_0 と q_a がそれぞれ

$$q_0 = 1, \quad q_a = 2.5 \quad (\text{低シヤ平衡}) \quad (6.3-2a)$$

あるいは

$$q_0 = 1, \quad q_a = 4.0 \quad (\text{高シヤ平衡}) \quad (6.3-2b)$$

になるように選定する。

初期平衡を反復解法で求める時、Solov'ev平衡（(3.6-1)式）を使う。そして、プラズマの形状がSolov'ev平衡を設定する時に指定した形状に一致するように、反復時に真空磁場 ψ_V を調整する（3.2, 3.6節参照）。対象とするトカマク・プラズマのアスペクト比 A は3に固定した：

$$A \equiv \frac{R_M}{r_p} = 3 \quad (6.3-3)$$

（6.4節を除く）。

安定係数 $q(\psi)$ の分布を固定したFCT過程で圧力 p を

$$p \rightarrow p + \Delta p \quad ; \quad \Delta p \propto (1 - \psi)^2$$

に従って増大（あるいは減少）させて、 β_p の異なる一連の平衡を作る。図6.3に $q(\psi)$ と $\beta_p = 0.75, 1.0, 1.45$ における $p(\psi)$ の $s (= \sqrt{\psi/\psi_s})$ 依存性を示した。

磁気軸の安定係数 q_0 が任意の値をもつ平衡は $q_0 = 1$ の平衡から、3.5節に述べたスケーリングから得ることができる。この様にして作られた一連の平衡を用いると、 (q_0, β_p) パラメータ平面において内部キック・モードの安定性が解析できる。表6.1に今までに述べた手順を図示する。

6.4 ERATOコードによる解析結果

最初に、円形断面（楕円度 $E = 1$ ）のトカマク・プラズマの内部キック・モードに対する安定性を解析した。図6.4は $q_a/q_0 = 2.5$ （低シヤ）の場合の成長率の自乗 r^2 の β_p -依存性を示している（破線： $q_0 = 0.8$ ，実線： $q_0 = 0.85$ ，一点鎖線： $q_0 = 0.95$ ）。図6.5は $q_a/q_0 = 4.0$ （高シヤ）の場合の r^2 の β_p -依存性を示す（破線： $q_0 = 0.6$ ，実線： $q_0 = 0.8$ ，一点鎖線： $q_0 = 0.9$ ）。 β_p がある臨界値 β_{p1} より低いと、内部キック・モードは安定であり、この点はBussacらの解析と一致している。 β_{p1} は低シヤの場合、 $\beta_{p1} \simeq 0.7$ であり、また、高シヤの場合、 $\beta_{p1} \simeq 0.4$ である。また、高シヤの場合の方が低シヤの場合より、より不安定なのは、高シヤの場合では、集中形の電流分布になって、キック項（(2.4-5)式参照）による不安定化の寄与が増大するためと考えられる⁵⁷⁾。

内部キック・モードは、 β_p -値がさらに増大して、ある臨界値 β_{p2} （低シヤの場合 $\beta_{p2} \simeq 1.4$ 、

高シヤの場合 $\beta_{p2} \simeq 2.4$) を越えると再び安定になる。このことは、図 6.6 に示した (q_0, β_p) 平面での安定図を見ると、一層よく理解される。図 6.6 における曲線は、それぞれ、 $q_a/q_0 = 2.5$ および 4.0 の時の内部キンク・モードの臨界安定曲線を表わしており、曲線および $q_0 = 1$ の直線に囲まれた内部でモードが不安定になる。図 6.6 より、プラズマは、内部キンク・モードに対して不安定でも、加熱されて β_p 値が上がると「第二安定領域」に入ることが分る。

次に、断面が楕円であるトカマク・プラズマの内部キンク・モードに対する安定性を調べる。6.2 節で述べた議論から、トカマク・プラズマの断面が楕円の場合、内部キンク・モードはより不安定になると予想される⁶⁰⁾。

図 6.7 は楕円度 $E = 1.2$ 、 $q_a/q_0 = 2.5$ の平衡に対する成長率の自乗 r^2 の β_p 依存性を示している (破線: $q_0 = 0.7$, 実線: $q_0 = 0.8$, 一点鎖線 $q_0 = 0.9$)。楕円断面平衡では、予想される通り、円形断面平衡より高い成長率を持つが、 β_p が充分低いと、内部キンク・モードは安定であり、また、第二安定領域がある。図 6.8 に楕円平衡の場合の (q_0, β_p) 平面での安定図を示す。比較のため、円形断面平衡 ($E = 1.0$) の場合の臨界安定曲線も示してある。以上の結果より、 β_p 値が充分高いと内部キンク・モードは安定になること、また、高シヤ平衡や楕円平衡の場合、内部キンク・モードの成長率は高く、不安定領域も広いことがわかる。

6.5 内部キンク・モードに対するトロイダル効果

内部キンク・モードについて、第二安定領域が現われる機構について理解を得るため、変位ベクトル $\xi(\mathbf{r}) = \xi(\psi, \chi) e^{im\varphi}$ を、自然座標系において、

$$\xi(\psi, \chi) = \sum_k \xi_m(\psi) e^{im\chi}$$

とトロイダル角 χ についてフーリエ展開し、各モードのポテンシャル・エネルギー W_p への寄与

$$W_{m, m'} = \int d\psi \xi_m^*(\psi) \xi_{m'}(\psi) \int d\chi \hat{L} e^{i(m-m')\chi} \quad (6.4-1)$$

を求めた (L はポテンシャル・エネルギーの演算子)。

$W_{0,0}$ 、 $W_{2,2}$ は正であり、それぞれ、トロイダル・カップリングから生じる $W_{0,1}$ 、 $W_{1,2}$ の絶対値とほぼ等しい:

$$W_{0,1} \simeq -W_{0,0}, \quad W_{1,2} \simeq -W_{2,2} \quad (6.4-2)$$

したがって、ポテンシャル・エネルギー $W_p = W_{0,0} + W_{1,1} + W_{2,2} + 2W_{0,1} + 2W_{1,2} + \dots$ は

$$W_p \simeq W_{1,1} + W_{0,1} + W_{1,2} \quad (6.4-3)$$

と近似的に表わせる (付録 6 参照)

円柱プラズマの場合、変位ベクトル ξ は

$$\xi = \xi_{m,k}(\mathbf{r}) e^{im\chi + ikz}; \quad k = \frac{n}{R_0} \quad (6.4-4)$$

と表わせる。したがって、第 6.2 節で述べたように円形断面トカマク・プラズマのアスペクト比を大きくして、円柱プラズマに近づける場合、二通りの近づけ方、すなわち、

$$nq_0 \text{ と } k \text{ を固定して } A \rightarrow \infty \quad (6.4-5a)$$

にする方法と

$$q_0 \text{ と } n (=1) \text{ を固定して } A \rightarrow \infty \quad (6.4-5b)$$

にする方法とがある。図 6.9 は $\beta_p = 1.0$, $q_a/q_0 = 2.5$ の円形断面プラズマ平衡について, $W_{m,m'}$ のアスペクト比 A に対する依存性を示している。図 6.9(a) は (6.4-5a) の場合であり, 図 6.9(b) は (6.4-5b) の場合である。 $W_{0,0}$, $W_{2,2}$ およびカップリング項 $W_{0,1}$, $W_{1,2}$ は, アスペクト比が大きくなると, いずれの場合についても, 当然ゼロに近づく。しかし, $W_{1,1}$ の A に対する依存性は全く異なる。(6.4-5a) の場合は, アスペクト比が大きい場合, $W_{1,1} < 0$ であり, $A \rightarrow \infty$ の極限では, 有限の負の値

$$W_{1,1} = W_{1,1}^\circ < 0 \quad (6.4-6)$$

をもち, 内部キック・モードは不安定であり, これは, k が有限の値をもつ円柱プラズマの内部キック・モードのポテンシャル・エネルギーに等しい。また, A が小さくなって, トロイダル効果が強くなると $W_{1,1}$ は正に変わり, 安定化に寄与する。すなわち, トロイダル効果は $W_{1,1}$ を通じて強い安定化に働き, 円柱項 $W_{1,1}^\circ$ を打ち消して余りある。一方, (6.4-5b) の場合, $W_{1,1}$ は常に正であり, アスペクト比が大きくなると, 正の側からゼロに近づく。したがって成長率もゼロに近づく。すなわち, $n=1$ に固定されているかぎり, 6.2 節で述べたトロイダル効果による摂動磁場の安定化効果は常に $W_{1,1}^\circ$ を打ち消している。トカマク・プラズマで実際に存在し得るモードは $n=1$ モードであるので, 内部キック・モードではトロイダル効果が本質的な役割をはたす。そして, $W_{1,1}$ は安定化に働き, トロイダル・カップリング項 $W_{0,1}$ と $W_{1,2}$ は不安定化に働き, それらの差し引きで内部キック・モードの安定性が決定される。

次に, 各 $W_{m,m'}$ の β_p 依存性を図 6.10 に示す。 β_p の上昇とともに, トロイダル効果が強くなり, $W_{1,1}$ も $|W_{0,1}|$, $|W_{1,2}|$ も大きくなり, W_p 全体としては負になっている。しかし, $\beta_p > 1.3$ では $W_{1,1}$ の増大が $|W_{0,1}|$, $|W_{1,2}|$ の増大より強くなっている。すなわち, β_p の上昇によって, トロイダル効果による安定化効果がモード間結合による不安定化効果より優勢になって内部キック・モードは第 2 安定領域に入る。

6.6 実験との対応

前節で得られた内部キック・モードについての解析結果がトカマク実験においてどの様に反映されるかを考えるためには, 有限抵抗が安定性に与える影響を考慮しなければならない(抵抗性内部キック・モード)。抵抗の効果は $q=1$ の特異面における内部キック・モードの固有解 ξ の挙動を見ることによって定性的に調べることができる。

図 6.11 は低シヤの円形断面平衡の場合に得られた固有解の $X_I(s, \chi=0)$ と $V_R(s, \chi=0)$ を示している(4.2 節参照)。磁気軸での安定係数 q_0 は $q_0 = 0.8$ であり, また, β_p の値は $\beta_p = 0.75$ (図 6.11a), $\beta_p = 1.14$ (図 6.11b) および $\beta_p = 1.45$ (図 6.11c) である。これらの図から, 第 6.2 節で述べた内部キック・モードの特徴を見ることができる。すなわち, $q=1$ 面の内部で X_I はほぼ直線であり, $q=1$ 面の外部で急速に減少し, $q=2$ 面ですこやかにゼロになる(付録

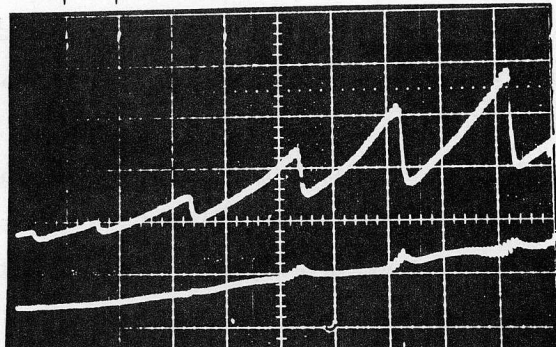
6 参照)。 $\frac{\partial X}{\partial s} + \frac{\partial V}{\partial \lambda} \simeq 0$ であるため、 X_I の変動に対応して V_R に 2 つのピークが現われている。そして、 $\beta_p = 1.14$ の時、成長率が大きいため $q = 1$ での V_R のピーク幅は広く、 $\beta_p = 0.75$ および 1.45 の場合、逆に成長率が小さいのでピーク幅が狭い。成長率が小さいほど、理想 MHD モードである内部キック・モードの $q = 1$ 面でのピーク幅は狭くなり、いわゆる、抵抗層 (resistive layer) の幅 $\Delta \propto S^{-1/3}$ ($S \doteq \tau_R$ (抵抗による散逸時間) / τ_A (アルフヴェン通過時間)) がピーク幅を越えると、抵抗性内部キック・モードは抵抗効果で不安定になる抵抗性モードそのものである。 β_p が高くなって、内部キック・モードの成長率が大きくなると、内部キック・モードのピーク幅が抵抗層の幅より広くなるため、抵抗の線形成長率への影響は少ない。以上の考察から、内部キック・モードの成長率と抵抗性内部キック・モードの成長率の β_p 依存性は概略的に図 6.12 の様になると考えられる。 β_p が低くて、内部キック・モードが安定か成長率がきわめて低い時、 $m = 1$ モードは抵抗性モードであり、実験では鋸歯状振動が観測される。 β_p が上がり内部キック・モードの成長率が高くなると、不安定モードの成長の飽和がおこり、鋸歯状振動から連続的な高周波振動に変わると考えられる。 β_p がさらに上昇して、内部キック・モードが再び安定になると、 $m = 1$ モードは再び抵抗性モードになる。したがって、実験的には鋸歯状振動が再び観測されると期待されるが、この様な β_p の高いしたがってトロイダル効果の強い領域での $m = 1$ 抵抗性モードの非線形解析が行われておらず、また、実験もされていないので鋸歯状振動が現われるかどうかは未知である。また、高シヤ平衡あるいは楕円平衡の場合の方が、低い β_p の値で内部キック・モードが不安定になるため、プラズマを加熱していく時に早い段階で鋸歯状振動から連続的な高周波振動への変化が現われると考えられる。図 6.13 に JFT-2 の NBI 加熱実験で図 6.1 に示した三種類の軟 X 線信号が観測される時のプラズマ表面での安定係数 q_a^* と β_p 値に対する依存性を示す (□ 鋸歯状振動, ▨ 混在振動, ■ 連続振動)。⁶⁵⁾ 安定係数 q_a^* はトロイダル電流 I_p で評価した値である：

$$q_a^* = \frac{2\pi a^2 B_t}{\mu_0 R I_p}$$

磁気軸での安定係数 q_0 は常に $q_0 < 1$ であるから、 q_a^* の大きいプラズマは高シヤとみなせる。 q_a^* が同じ場合、連続信号が観測される時の β_p は常に鋸歯状振動が観測される時の β_p より高い。また、高シヤほど連続振動が観測される β_p 値は低い。これらの結果はすでに述べた抵抗性内部キック・モードの β_p 依存性の議論とよく一致している。

$m = 1$ モードの成長が飽和して連続振動に変化すると、 $q = 1$ 面の内部のプラズマ・エネルギーが温度パルスとして $q = 1$ 面の外部へ掃き出されないので、エネルギーの閉じ込めは改善され、特に低シヤほど、改善は顕著であると期待される。この仮説の当否および第二安定領域での $m = 1$ モードの非線形効果は将来、より強力な加熱実験によって明らかになると期待される。

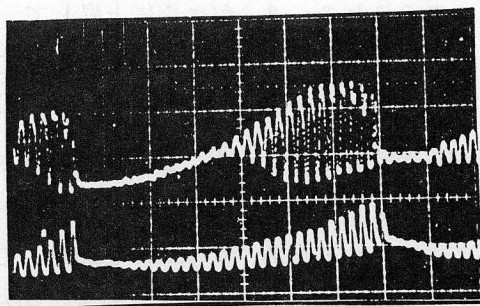
(a) \rightarrow \leftarrow 2 ms



S.X. ①

S.X. ④

(b)

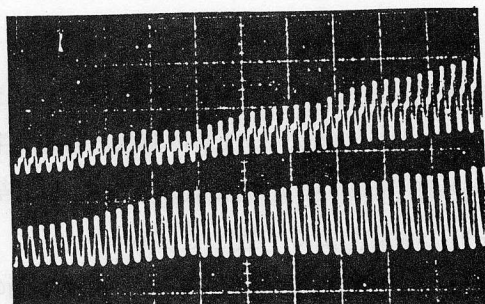


S.X. ②

S.X. ③

\rightarrow \leftarrow 500 μ s

(c)



S.X. ②

S.X. ③

\rightarrow \leftarrow 500 μ s

図 6.1 中性粒子入射加熱実験で観測される軟 X 線信号。S.X. ①, ②などは測定位置を示し①, ②は $q=1$ 面の内側, ③, ④は $q=1$ 面の外側を示す (文献 51 より転載)。

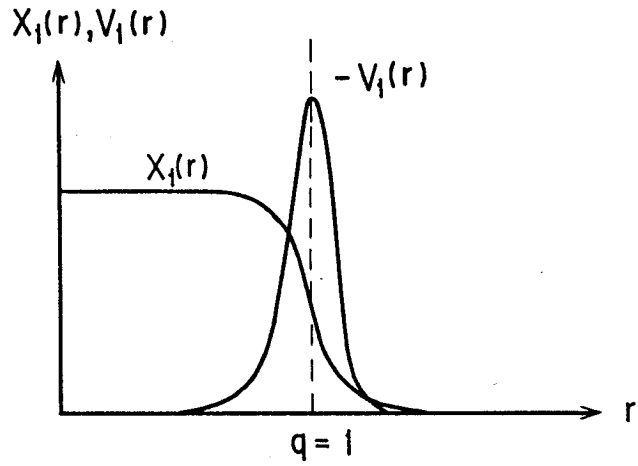


図 6.2 $m=1$ 内部キンク・モードの固有関数の概略図。(X= $\xi \cdot \Delta r, V=r (\xi \cdot \Delta \chi - \xi \cdot \Delta \psi / q)$)

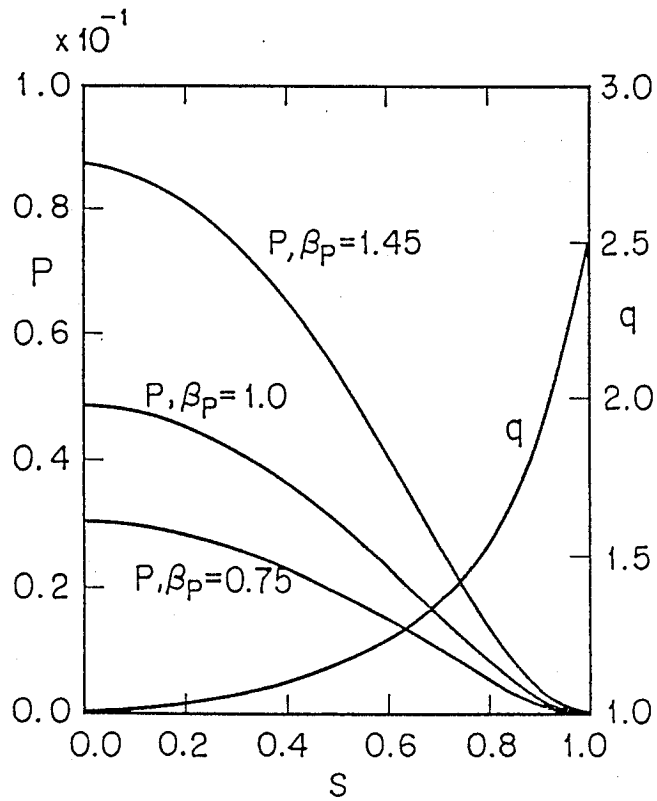
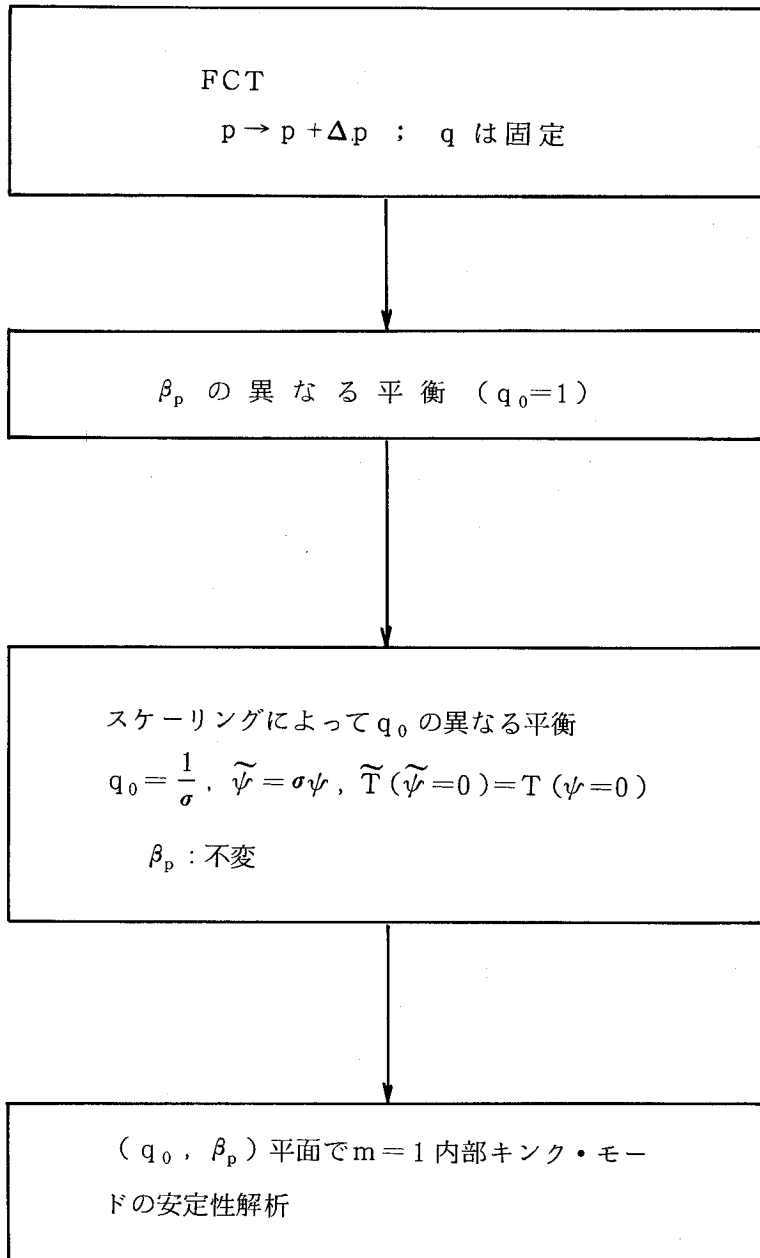


図 6.3 安定係数 q と圧力 p の $s = \sqrt{\psi / \psi_s}$ 依存性。
平衡はアスペクト比 $A=3$ の円形断面 FCT 平衡。

表 6.1 安定性解析の手順.FCT平衡とスケーリング
 (3.5節参照)により (q_0, β_p) パラメータ
 ー平面で $m=1$ 内部キック・モードの安定
 性解析を行なう。



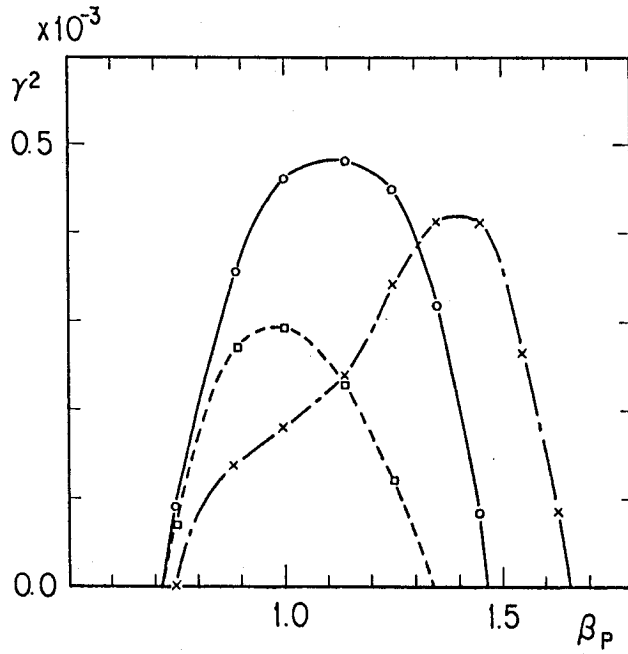


図 6.4 $q_a/q_0 = 2.5$ の場合の成長率の自乗 γ^2 の β_P 依存性 (破線 : $q_0 = 0.8$, 実線 : $q_0 = 0.85$, 一点鎖線 : $q_0 = 0.9$)。

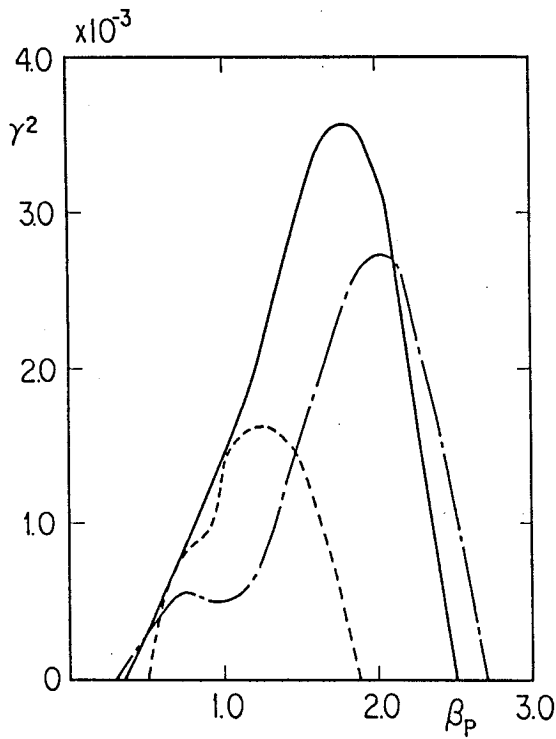


図 6.5 $q_a/q_0 = 4.0$ の場合の成長率の自乗 γ^2 の β_P 依存性 (破線 : $q_0 = 0.6$, 実線 : $q_0 = 0.8$, 一点鎖線 : $q_0 = 0.9$)。

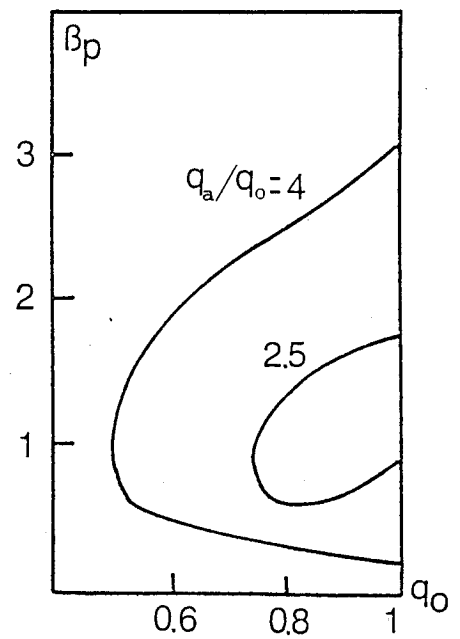


図 6.6 $q_a/q_0 = 2.5$ および 4.0 の場合の $m=1$ 内部キックモードの (q_0, β_P) 平面における安定図。各々の臨界安定曲線の内部でモードは不安定。

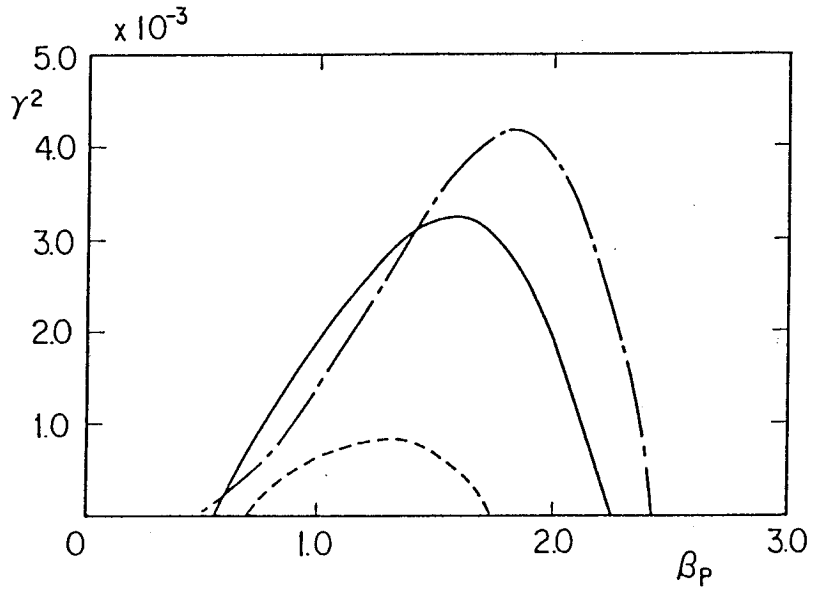


図 6.7 楕円断面平衡 ($E=1.2, q_a/q_0=2.5$) の場合の成長率の自乗 γ^2 の β_p 依存性 (破線: $q_0=0.7$, 実線: $q_0=0.8$, 一点鎖線 $q_0=0.9$)。

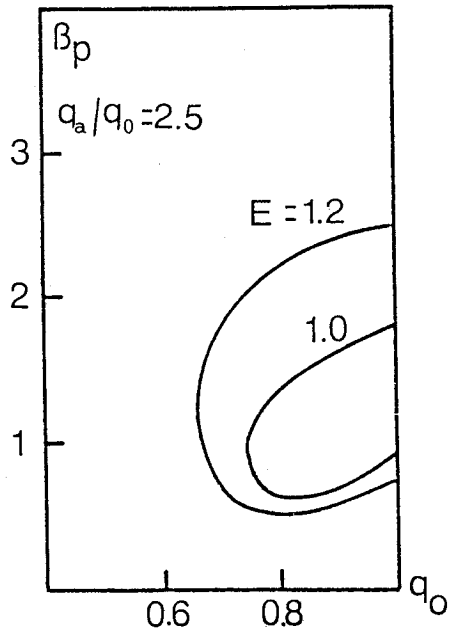


図 6.8 楕円断面平衡 ($E=1.2, q_a/q_0=2.5$) および円形断面平衡 ($E=1.0, q_a/q_0=2.5$) の場合の $m=1$ 内部キンク・モードの安定図。

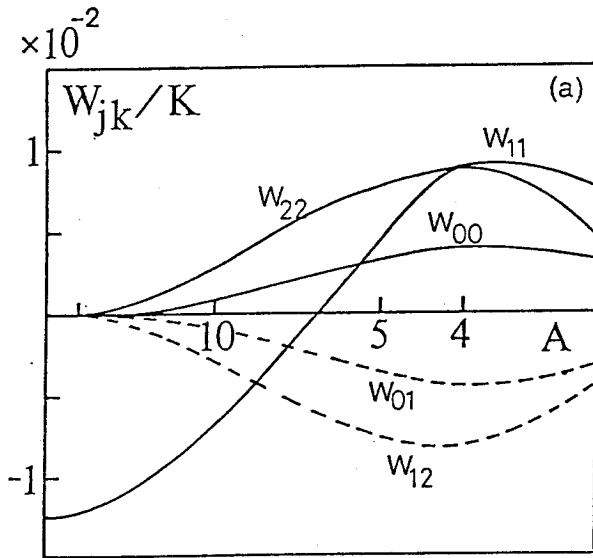


図 6.9(a) 各フーリエ成分のポテンシャル・エネルギーへの寄与 $W_{m,m'}$ のアスペクト比依存性。 nq_0 と $k(=n/R_0)$ を固定した場合 (横軸は $1/A$ 目盛) $1/A \rightarrow 0$ とともに $W_{0,0}$, $W_{2,2}$ は正の側からゼロに $W_{1,1}$, $W_{0,1}$ は負の側からゼロに近づき $W_{1,1}$ は負の有限値に近づき、したがって $m=1$ 内部キック・モードは不安定。平衡は円形断面で $\beta_p=1.0$, $q_a/q_0=2.5$ 。

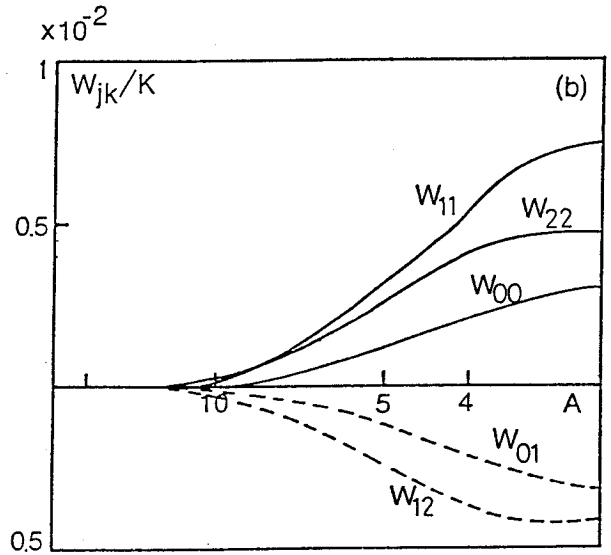


図 6.9(b) q_0 と n を固定した場合の $W_{m,m'}$ のアスペクト比依存性。 $W_{1,1}$ は正の側からゼロに近づき、 $m=1$ 内部キック・モードは臨界安定。

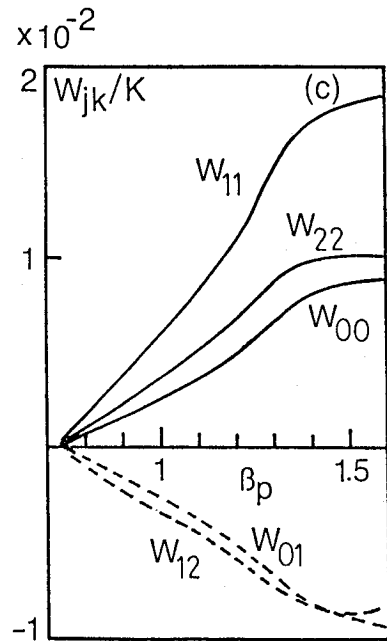


図 6.10 各フーリエ成分のポテンシャル・エネルギーへの寄与 $W_{m,m}$ の β_p 依存性。平衡は円形断面で $A=3$, $q_a/q_0=2.5$ 。

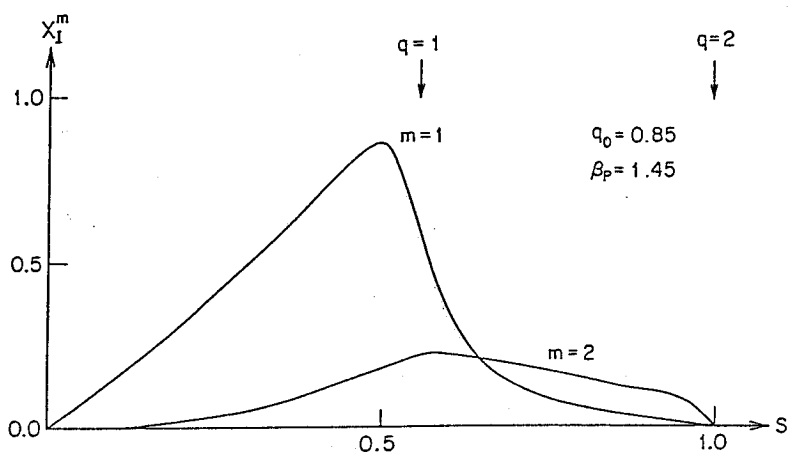
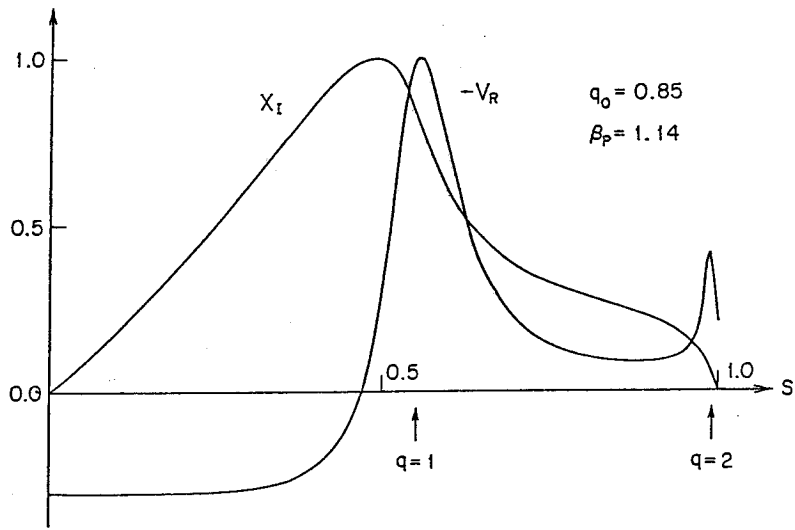
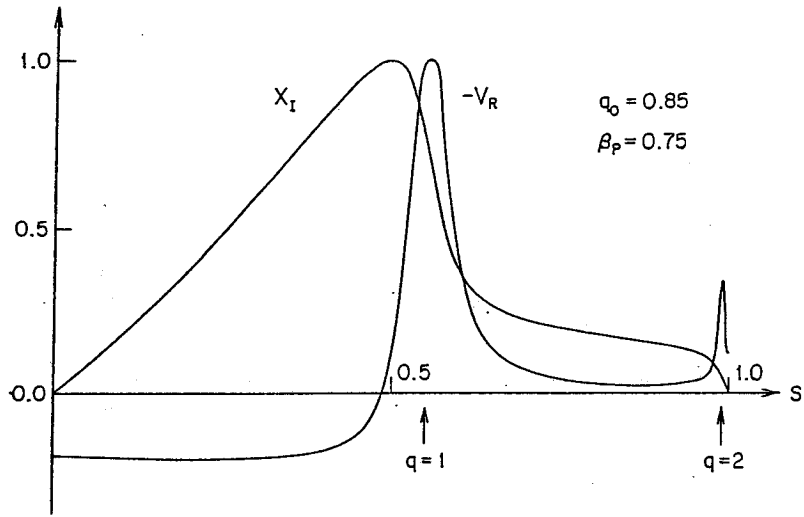


図 6.11 $m=1$ 内部キック・モードの固有関数 $X_I(\infty s \xi^s)$ と $V_R(\infty \xi^x - \xi^y/q)$ の $\chi=0$ 面における s -依存性 (a) $\beta_p=0.75$ (b) $\beta_p=1.14$ (c) $\beta_p=1.45$ 。平衡は円形断面 $q_a/q_0=2.5, q_0=0.85$ 。

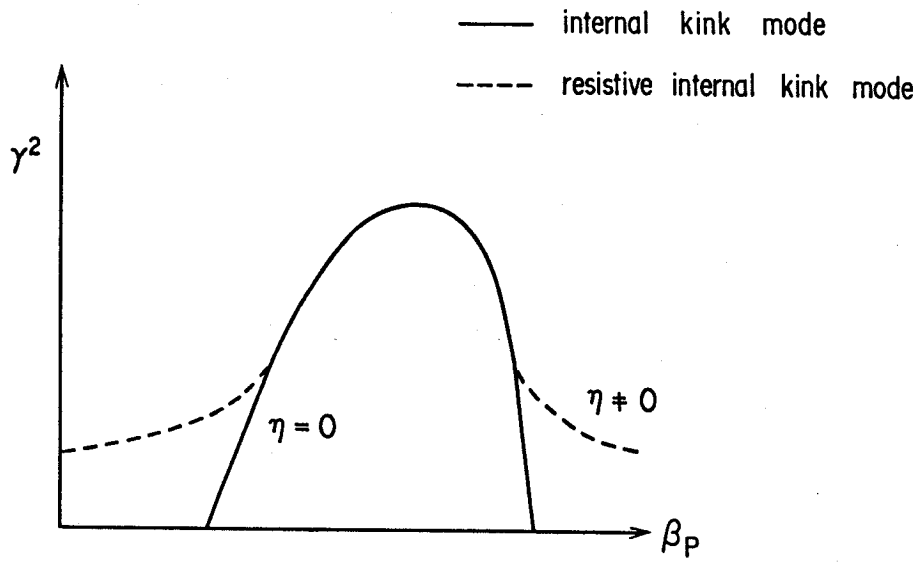


図 6.12 $m=1$ 抵抗性内部キンク・モードの成長率の β_p 依存性 (概略図)。

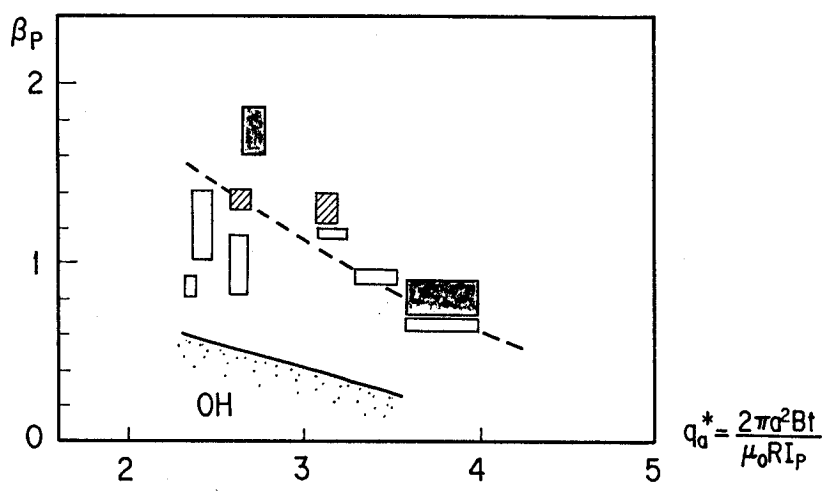


図 6.13 JFT-2 における NBI 加熱実験で観測された軟 X 線信号と q_a および β_p - 依存性。白ぬきの領域 (□) は鋸歯振動, 黒ぬきの領域 (■) は連続振動を表わす。斜線の領域 (▨) は混在振動を示す (文献 [65] より転載)。

7. 結 語

本論文ではトカマク・プラズマの線形理想 MHD 安定性について研究した。

第 2 章で、本研究の基礎となるプラズマの MHD 平衡と線形理想 MHD 安定性理論の定式化を行った。

第 3 章では、トカマク・プラズマのような軸対称トロイダル・プラズマの平衡を決定するグラッド・シャフラノフ方程式を導き、その方程式の性質、および平衡の磁気面量について議論した。また、FCT 平衡を含め、グラッド・シャフラノフ方程式の数値解法について詳しく述べた。

第 4 章では、線形理想 MHD 安定性を数値的に解析する ERATO コードについて述べた。本研究において ERATO コードは以下の 3 点について改良された。

- (1) 自然座標系以外に、ポロイダル角を任意に選んだ磁束座標系が使える、固有関数の形状をよく表現する座標系を選べる。
- (2) 変位ベクトルに準モード表示を採用することにより、安定性を数値的に解析する場合のトロイダル・モード数の制限を除くことができる。
- (3) 真空領域における摂動磁場をベクトル・ポテンシャルで表わし、スカラー・ポテンシャルに対するグリーン関数を用いていた場合の困難を除いた。

第 5 章では、第 3 章で述べた方法に従って数値的に求めた平衡に対して、その MHD 安定性を ERATO コードで解析する時に必要になる写像について論じた。

従来の写像法では信頼性のある安定性解析を不可能にする数値誤差が生じる。それに対して、スプライン補間を用いた写像法を提案し、テストを行った。その結果、高精度の写像が可能になり、内部キック・モードのような成長率の低いモードについても信頼性の高い安定性解析が可能になった。

第 6 章では、第 4 章および第 5 章で論じた ERATO コードを用いて、トカマク・プラズマにおける $m=1$ 内部キック・モードの安定性を解析した。安定性のポロイダル・ベータ値 (β_p -値) 依存性に着目し、 (q_0, β_p) 空間 (q_0 : 磁気軸の安定係数) での安定図を求め、 $m=1$ 内部キック・モードに第 2 安定領域が存在することを明らかにした。また、磁場のシアおよびプラズマ断面の形状が安定性に与える影響を調べ、シアが高い場合や形状が楕円 (楕円度 $E > 1$) の場合は $m=1$ 内部キック・モードはより不安定になることを示した。

安定性の解析結果と実験との対応を論じ、プラズマ加熱実験時に観測される軟 X 線信号の鋸歯状振動から連続振動への変化と $m=1$ 内部キック・モードとの関連について述べた。この仮説の当否および第二安定領域での $m=1$ モードの挙動は将来の実験および理論の協同によって明らかになると期待される。

謝 辞

本論文の作成において、終始、懇切な御指導と御鞭撻を賜りました恩師大阪大学工学部超高温理工学研究施設伊藤博教授に衷心より感謝いたします。

本研究は、日本原子力研究所核融合研究部において、小幡行雄部長、田中正俊次長および竹田辰興理論解析研究室室長の御指導と種々の御配慮の結果達せられたものであります。ここに改めて感謝いたします。また、安積正史、津田孝、滝塚知典、常松俊秀、栗田源一、伊藤公孝および山本新の各氏には、熱心な討論と助言をしていただきましたことを感謝いたします。

また、著者の大学時代より、研究活動の御教示と激励を賜りました名古屋大学プラズマ研究所上村鉄雄助教授に感謝いたします。

文 献

- (1) 関口, 一丸, 「プラズマ物理工学」, オーム社 (1969).
- (2) F.L. Ribe, Rev. of Modern Phys. 47, 7(1975).
- (3) L.A. Artsimovich, Nucl. Fusion 12, 215(1972).
- (4) "Fusion" edited by E. Teller Vol.1 Part A, Academic Press, New York (1981).
- (5) G. Schmidt, "Physics of High Temperature Plasmas", Chap.3, Academic Press, London (1966).
- (6) I.B. Bernstein E.A. Frieman, M.D. Kruskal and R.M. Kulsrud, Proc. Roy. Soc. (London) A244, 17(1958).
- (7) B.B. Kadomtsev, "Hydromagnetic Stability of A Plasma" in Rev. of Plasma Phys. Vol.2, Edited by M.A. Leontovich, Consultants Bureau, New York (1966).
- (8) M.N. Rosenbluth, D.A. Monticello, H.R. Strauss and R.B. White, Phys. Fluids 19, 1987(1976).
- (9) A. Sykes and J.A. Wesson, Phys. Rev. Lett. 37, 140(1976).
- (10) B. Carreras, H.R. Hicks, J.A. Holmes and B. V. Waddell, Phys. Fluids 23, 1181(1980).
- (11) G. Strang and G.J. Fix, "An Analysis of The Finite Element Method", Prentice-Hall, Inc. (1973).
- (12) T. Takeda, Y. Shimomura, M. Ohta and M. Yoshikawa, Phys. Fluids 15, 2193(1972).
- (13) K. Appert, D. Berger, R. Gruber, F. Troyon and K.V. Roberts, Comput. Phys. Commun. 10, 11(1975).
- (14) K. Appert, D. Berger, R. Gruber, F. Troyon and J. Rappaz, ZAMP 25, 229(1974).
- (15) R. Gruber, F. Troyon, D. Berger, L.C. Bernard, S. Rousset, R. Schreiber, W. Kerner, W. Schneider and K.V. Roberts, Comput. Phys. Commun. 21, 323(1981).
- (16) R.C. Grim, J.M. Greene and J.L. Johnson, "Computation of the Magnetohydrodynamic Spectrum in Axisymmetric Toroidal Confinement Systems" in Methods in Computational Physics Vol.16, Academic Press, New York (1976).
- (17) W. Kerner, Nucl. Fusion 16, 643(1976).

- (18) T. Takizuka, S. Tokuda, M. Azumi and T. Takeda, *Comput. Phys. Commun.* 23, 19(1981).
- (19) D.S. Scott and R. Gruber, "Implementing Sparse Matrix Technique in the ERATO Code", Lausanne Report LRP 181/81 (1981).
- (20) R. Gruber, F. Troyon and T. Tsunematsu, *Plasma Phys.* 25, 207(1983).
- (21) 徳田, 常松, 安積, 滝塚, 奈良岡, 竹田, 「改訂版 ERATO-Jによる MHD 安定性解析, JAERI-M 9899 (1982)
- (22) T. Tsunematsu, T. Takeda, G. Kurita, M. Azumi, T. Matsuura, R. Gruber and F. Troyon, "Beta-limit of a large Tokamak with a circular cross section", JAERI-M 9890(1981).
- (23) S. Tokuda, T. Tsunematsu, M. Azumi, T. Takizuka and T. Takeda, *Nucl. Fusion* 22, 661(1982).
- (24) T. Takeda, T. Tsunematsu, T. Tuda, M. Azumi, T. Takizuka, S. Tokuda, G. Kurita, K. Itoh, K. Naraoka, Y. Tanaka and S.I. Itoh, in *Plasma Physics and Controlled Nuclear Fusion Research (19th International Conference, Baltimore, 1982)*, IAEA-CN-41/P-1-3.
- (25) K. Appert, D. Berger, R. Gruber and J. Rappaz, *J. Comput. Phys.* 18, 284(1975).
- (26) J. Rappaz, *Numer. Math.* 28, 15(1975).
- (27) H.P. Furth, J. Killeen, M.N. Rosenbluth and B. Coppi, in *Plasma Physics and Controlled Nuclear Fusion Research Vol.1*, 103(1965).
- (28) J.M. Greene and J.L. Johnson, *Plasma Phys.* 10, 729.
- (29) J. D. Jackson, "Classical Electrodynamics", John Wiley & Sons, Inc., New York (1962).
- (30) J.D. Callen and R.A. Dory, *Phys. Fluids*, 15, 1523(1972).
- (31) L.S. Solov'ev, *JETP* 26, 400(1968).
- (32) K. Lackner, *Comput. Phys. Commun.*, 12, 33(1976).
- (33) J.P. Christiansen and R.W. Hockney, *Comput. Phys. Commun.* 2, 129(1971).
- (34) R.A. Dory and Y.K.M. Peng, *Nucl. Fusion* 17, 1(1977).
- (35) J.F. Clarke and D.J. Sigmar, *Phys. Rev. Lett.* 38, 70(1977).
- (36) D.B. Albert, *Nucl. Fusion* 20, 939(1980).
- (37) T. Tsunematsu, R. Gruber and F. Troyon, "The ideal MHD internal modes spectrum of a Tokamak configuration using

- a quasi-mode representation", Lausanne Report LRP 189/81 (1981).
- (38) F. Troyon, L.C. Bernard and R. Gruber, "An Algorithm to Compute the Vacuum Contribution to the Ideal MHD δW in Axisymmetric Configuration", Lausanne Report LRP 157/79 (1979).
- (39) T. Tsunematsu, T. Takeda, T. Matsuura, G. Kurita and M. Azumi, *Comput. Phys. Commun.* 19, 179(1980).
- (40) M. Azumi, T. Tsunematsu, K. Itoh, T. Tuda, G. Krita, T. Takeda, T. Takizuka, S. Tokuda, T. Matsuura, Y. Tanaka, S. Inoue and M. Tanaka, in *Plasma Physics and Controlled Nuclear Fusion Research (8th International Conference, Brussels 1980)*, IAEA-CN-38/k-1-1.
- (41) P. Gautier, R. Gruber and F. Troyon, *Nucl. Fusion* 21, 1399(1981).
- (42) T.N.E. Greville, "Spline Function, Interpolation and Numerical Quadrature" in *Mathematical Methods for Digital Computers Vol.2*, John Wiley & Sons, INC., New York (1967).
- (43) T. Takeda, K. Itoh, M. Azumi, G. Kurita, T. Takizuka, S. Tokuda, T. Tsunematsu, T. Tuda, S.I. Itoh, T. Matsuura and Y. Tanaka, "Stability Analysis of INTOR", JAERI-M 9466(1981).
- (44) J.W. Connor, R.J. Hastie, J.B. Taylor, *Proc. Roy. Soc. (London)*, A365, 1(1979).
- (45) B. Coppi, A. Ferreira, J.W.-K. Mark and J.J. Ramos, *Nucl. Fusion* 19, 715(1979).
- (46) H.R. Strauss, W. Park, D.A. Monticello, R.B. White, S.C. Jardin, M.S. Chance, A.M.M. Todd, A.H. glasser, *Nucl. Fusion* 20, 639(1980).
- (47) B.V. Waddell, B. Carreras, H.R. Hicks and J.A. Holmes, *Phys. Fluids* 22, 896(1979).
- (48) 田中, 安積, 常松, 竹田, 「単一ヘリシティ抵抗性 MHD 不安定性解析のための高速計算コード "AEOLUS-R1"」, JAERI-M 8656 (1980).
- (49) B. Kurita, "MHD Stability Analyses of a Tokamak Plasma by a Time-Dependent Code", JAERI-M 82-093(1982).
- (50) TFR Group, *Proc. of 7th European Conference on Controlled Fusion and Plasma Physics, Vol.2* (1975).

- (51) S. Yamamoto, M. Maeno, N. Suzuki, M. Azumi, S. Tokuda, et al., Nucl. Fusion 21, 993(1981).
- (52) DIVA Group, Nucl. Fusion 20, 271(1980).
- (53) B.B. Kadomtsev, Fiz. Plazmy 1, 710(1975)[Sov. J. Plasma Phys.1, 389(1975)].
- (54) 清水, 伊藤, 岡本, 天野, 安積, 山本, 下村, 高温学会誌 1, 35 (1981)
- (55) M.N. Rosenbluth, R.Y. Dagazian and P.H. Rutherford, Phys. Fluids, 16, 1894(1973).
- (56) J.A. Wesson, Nucl. Fusion, 18, 87(1978).
- (57) M.N. Bussac, R. Pellat, D. Edry and J.L. Soule, Phys. Rev. Lett. 35, 1638(1975).
- (58) L.E. Zakharov, Fiz. Plazmy 4, 898(1978)[Sov. J. Plasma Phys.4, 898(1978)].
- (59) M. Azumi, S. Tokuda, G. Kurita, T. Tsunematsu, T. Takizuka, T. Tuda, K. Itoh, Y. Tanaka and T. Takeda, "Internal Disruption in High β_p Tokamak", JAERI-M 9787(1981).
- (60) Guy Laval, Phys. Rev. Lett. 34, 1316(1975).
- (61) Y.-P. Pao, Phys. Fluids 19, 1796(1976).
- (62) R.M.O. Galvão, P.H. Sakanaka and H. Shigueoka, Phys. Rev. Lett. 41, 870(1978).
- (63) W. Kerner, R. Gruber and F. Troyon, Phys. Rev. Lett. 44, 536(1980).
- (64) B. Coppi, R.M.O. Galvão, R. Pellat, M.N. Rosenbluth, P.H. Rutherford, "Resistive Internal Kink Modes", Princeton PPL Report MATT-1271.
- (65) S. Yamamoto, M. Maeno, S. Sengoku, N. Suzuki, S. Kasai, et al., in Plasma Physics and Controlled Nuclear Fusion Research (9th International Conference, Baltimore, U.S.A., 1982), IAEA-CN-41/A-5 .

付録 1 (2.4-5), (2.4-6) 式の導出

ポテンシャル・エネルギー (2.3-22) 式:

$$W_p = \frac{1}{2} \int \left[\frac{1}{\mu_0} \mathbf{Q}^2 + \mathbf{j} \cdot (\boldsymbol{\xi} \times \mathbf{Q}) + (\boldsymbol{\xi} \cdot \nabla p) \operatorname{div} \boldsymbol{\xi} + \Gamma p (\operatorname{div} \boldsymbol{\xi})^2 \right] d\tau$$

において, 変位ベクトル $\boldsymbol{\xi}$ を平衡磁場 \mathbf{B} に平行な成分と垂直な成分:

$$\boldsymbol{\xi} = \frac{\boldsymbol{\xi} \cdot \mathbf{B}}{B^2} \mathbf{B} + \frac{\mathbf{B} \times (\boldsymbol{\xi} \times \mathbf{B})}{B^2} = \boldsymbol{\xi}_{\parallel} \mathbf{B} + \boldsymbol{\xi}_{\perp} \quad (*1-1)$$

に分けると,

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \boldsymbol{\xi}_{\perp} &= \operatorname{rot} \left(\frac{\mathbf{B}}{B^2} \right) \cdot (\boldsymbol{\xi} \times \mathbf{B}) - \frac{\mathbf{B} \cdot \mathbf{Q}}{B^2} \\ &= \mu_0 \frac{\boldsymbol{\xi} \cdot \nabla p}{B^2} - 2\kappa \cdot \boldsymbol{\xi} - \frac{\mathbf{B} \cdot \mathbf{Q}}{B^2} \end{aligned} \quad (*1-2)$$

である。(*1-2) 式において

$$\begin{aligned} \mathbf{B} \times \operatorname{rot} \left(\frac{\mathbf{B}}{B^2} \right) &= \mu_0 \frac{\mathbf{j} \times \mathbf{B}}{B^2} - (\mathbf{B} \cdot \nabla) \left(\frac{\mathbf{B}}{B^2} \right) - \frac{1}{B^2} (\mathbf{B} \cdot \nabla) \mathbf{B} \\ &= \mu_0 \frac{\nabla p}{B^2} - 2\kappa \end{aligned} \quad (*1-3)$$

を用いた。また,

$$\begin{aligned} \mathbf{j} \cdot (\boldsymbol{\xi} \times \mathbf{Q}) &= \mathbf{Q} \cdot (\boldsymbol{\xi}_{\parallel} \mathbf{j} \times \mathbf{B} + \mathbf{j} \times \boldsymbol{\xi}_{\perp}) \\ &= \boldsymbol{\xi}_{\parallel} (\nabla p \cdot \mathbf{Q}) - \frac{\boldsymbol{\xi} \cdot \nabla p}{B^2} (\mathbf{B} \cdot \mathbf{Q}) - \frac{\mathbf{j} \cdot \mathbf{B}}{B^2} (\boldsymbol{\xi} \times \mathbf{B}) \cdot \mathbf{Q} \end{aligned} \quad (*1-4)$$

であるから

$$\begin{aligned} \mathbf{j} \cdot (\boldsymbol{\xi} \times \mathbf{Q}) + (\boldsymbol{\xi} \cdot \nabla p) \operatorname{div} \boldsymbol{\xi} &= \boldsymbol{\xi}_{\parallel} (\nabla p \cdot \mathbf{Q}) + (\boldsymbol{\xi} \cdot \nabla p) \operatorname{div} (\boldsymbol{\xi}_{\parallel} \mathbf{B}) \\ &+ \mu_0 \frac{(\boldsymbol{\xi} \cdot \nabla p)^2}{B^2} - 2 \frac{\boldsymbol{\xi} \cdot \nabla p}{B^2} (\mathbf{B} \cdot \mathbf{Q}) - \frac{\mathbf{j} \cdot \mathbf{B}}{B^2} (\boldsymbol{\xi} \times \mathbf{B}) \cdot \mathbf{Q} \\ &- 2 (\boldsymbol{\xi} \cdot \nabla p) (\boldsymbol{\xi} \cdot \kappa) \end{aligned} \quad (*1-5)$$

である。

$$\nabla p \cdot \mathbf{Q} = \operatorname{div} \{ (\boldsymbol{\xi} \times \mathbf{B}) \times \nabla p \} = \operatorname{div} \{ (\boldsymbol{\xi} \cdot \nabla p) \cdot \mathbf{B} \}$$

であるので, (*1-5) において,

$$\boldsymbol{\xi}_{\parallel} (\nabla p \cdot \mathbf{Q}) + (\boldsymbol{\xi} \cdot \nabla p) \operatorname{div} (\boldsymbol{\xi}_{\parallel} \mathbf{B}) = \operatorname{div} [\boldsymbol{\xi}_{\parallel} (\boldsymbol{\xi} \cdot \nabla p) \mathbf{B}] \quad (*1-6)$$

が成り立つ。したがって, (*1-5) 式を (2-42) 式に代入すると, (*1-6) の体積積分は, プラズマ表面での表面積分になり, $\mathbf{n} \cdot \mathbf{B} = 0$ であるので, この項のポテンシャル・エネルギーへの寄与は消える。そして, (2.3-22) 式は (2.4-5) 式に変形される。

次に, 電流密度 \mathbf{j} を磁力線に平行な成分と垂直な成分に分けると平衡の方程式から

$$\mathbf{j} = \frac{\mathbf{B} \times \nabla p}{B^2} + \alpha \mathbf{B} \quad (*1-7)$$

を得る。ここで $\alpha = \mathbf{j} \cdot \mathbf{B} / B^2$ である ((3.1-11, 12) 式参照)。

したがって、等圧面の外向きの法線単位ベクトルを \mathbf{n} ($\equiv -\nabla p / |\nabla p|$) とすると

$$\mathbf{j} \times \mathbf{n} = -\frac{\nabla p \cdot \mathbf{n}}{B^2} \mathbf{B} + \alpha \mathbf{B} \times \mathbf{n} \quad (*1-7')$$

であるので (2.4-5) 式において、

$$\begin{aligned} \frac{1}{\mu_0} \left| \mathbf{Q} - \mu_0 \frac{\xi \cdot \nabla p}{B^2} \mathbf{B} \right|^2 &= \frac{1}{\mu_0} \left| \mathbf{Q} + \mu_0 \xi_n (\mathbf{j} \times \mathbf{n}) \right|^2 - 2\alpha \xi_n \mathbf{Q} \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{n}) \\ &\quad - \mu_0 \alpha \xi_n^2 B^2 \end{aligned} \quad (*1-8)$$

である ($\xi_n = \xi \cdot \mathbf{n}$)。

ここで、変位ベクトル ξ を

$$\xi = \xi_n \mathbf{n} + \xi_{\parallel} \mathbf{B} + \xi_{\perp} \frac{\mathbf{B} \times \mathbf{n}}{B^2} \quad (*1-9)$$

と互いに直交するベクトルの成分に分け、(2.4-5) 式のキンク項とバルーニング項を成分 ξ_n , ξ_{\perp} で表わす。

キンク項

$$\mathbf{Q} \cdot (\xi \times \mathbf{B}) = -\xi_n \mathbf{Q} \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{n}) + \xi_{\perp} \mathbf{Q} \cdot \mathbf{n} \quad (*1-10a)$$

$$\mathbf{Q} \cdot \mathbf{n} = \nabla \xi_n \cdot \mathbf{B} - \xi_n \mathbf{n} \cdot \text{rot}(\mathbf{B} \times \mathbf{n}) \quad (*1-10b)$$

$$\mathbf{Q} \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{n}) = \nabla \xi_{\perp} \cdot \mathbf{B} + \xi_{\perp} (\mathbf{B} \times \mathbf{n}) \cdot \text{rot} \mathbf{n} - \xi_n (\mathbf{B} \times \mathbf{n}) \cdot \text{rot}(\mathbf{B} \times \mathbf{n}) \quad (*1-10c)$$

バルーニング項

平衡の方程式 (2.1-12) 式から、曲率ベクトル κ は

$$\kappa = \frac{1}{B^4} \left[\mathbf{B} \times \nabla \left(p + \frac{B^2}{2} \right) \right] \times \mathbf{B}$$

が成り立つ。この式より

$$\kappa_n \equiv \kappa \cdot \mathbf{n} = \frac{1}{B^2} \nabla \left(p + \frac{B^2}{2} \right) \cdot \mathbf{n} \quad (*1-11a)$$

$$\kappa \cdot \frac{\mathbf{B} \times \mathbf{n}}{B^2} = -\frac{1}{2|\nabla p|} \mathbf{B} \cdot \nabla \alpha \quad (*1-11b)$$

が得られる。(*1-11b) の導出において、

$$\text{div} \mathbf{j} = \text{div} \left(\frac{\mathbf{B} \times \nabla p}{B^2} \right) + \mathbf{B} \cdot \nabla \alpha = 0$$

を用いた。

式 (*1-8, 10, 11) より、ただちに、ポテンシャル・エネルギー積分

$$W_p = \frac{1}{2} \int \left\{ \frac{1}{\mu_0} |\mathbf{Q} + \mu_0 \xi_n (\mathbf{j} \times \mathbf{n})|^2 + \Gamma_p |\operatorname{div} \xi|^2 + D \right\} d\tau$$

$$D = \xi_n^2 D - \operatorname{div} (\xi_n \xi_{\perp} \alpha \mathbf{B}) - \alpha \xi_n \xi_{\perp} [(\mathbf{B} \times \mathbf{n}) \cdot \operatorname{rot} \mathbf{n} - \mathbf{n} \cdot \operatorname{rot} (\mathbf{B} \times \mathbf{n})] \quad (*1-12a)$$

$$D = \alpha (\mathbf{B} \times \mathbf{n}) \cdot \operatorname{rot} (\mathbf{B} \times \mathbf{n}) + 2|\nabla_p| \kappa_n - \mu_0 \alpha^2 B^2 \quad (*1-12b)$$

を得る。式 (*1-12a) の第2項は表面積分を行うことによって、ポテンシャル・エネルギーへの寄与は消え、また、

$$(\mathbf{B} \times \mathbf{n}) \cdot \operatorname{rot} \mathbf{n} - \mathbf{n} \cdot \operatorname{rot} (\mathbf{B} \times \mathbf{n}) = \operatorname{div} (\mathbf{n} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{n})) = \operatorname{div} \mathbf{B} = 0$$

である。次に、ベクトル公式

$$\operatorname{rot} (\mathbf{B} \times \mathbf{n}) = \mathbf{B} \operatorname{div} \mathbf{n} + (\mathbf{n} \cdot \nabla) \mathbf{B} - (\mathbf{B} \cdot \nabla) \mathbf{n}$$

$$\nabla (\mathbf{B} \cdot \mathbf{n}) = \mathbf{B} \times \operatorname{rot} \mathbf{n} + \mu_0 \mathbf{n} \times \mathbf{j} + (\mathbf{B} \cdot \nabla) \mathbf{n} + (\mathbf{n} \cdot \nabla) \mathbf{B}$$

より、

$$\alpha (\mathbf{B} \times \mathbf{n}) \cdot \operatorname{rot} (\mathbf{B} \times \mathbf{n}) = \mu_0 \alpha^2 B^2 - 2\alpha (\mathbf{B} \times \mathbf{n}) \cdot (\mathbf{B} \cdot \nabla) \mathbf{n}$$

および (*1-7') 式より

$$D = -2 (\mathbf{j} \times \mathbf{n}) \cdot (\mathbf{B} \cdot \nabla) \mathbf{n} - 2 \frac{\nabla_p \cdot \mathbf{n}}{B^2} \mathbf{B} \cdot [(\mathbf{B} \cdot \nabla) \mathbf{n}] + 2|\nabla_p| \kappa_n \quad (*1-13)$$

を得る。しかし、

$$\mathbf{B} \cdot [(\mathbf{B} \cdot \nabla) \mathbf{n}] = -\mathbf{n} \cdot [(\mathbf{B} \cdot \nabla) \mathbf{B}]$$

であるので、(*1-13) 式の右辺第2項と第3項は互いに打ち消し、(2.4-6) 式を得る。

付録 2 (4.2-9) 式の導出

ベクトル公式

$$\begin{aligned} \text{rot}(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) &= \mathbf{A} \text{div} \mathbf{B} - \mathbf{B} \text{div} \mathbf{A} + (\mathbf{B} \cdot \nabla) \mathbf{A} - (\mathbf{A} \cdot \nabla) \mathbf{B} \\ \nabla(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) &= \mathbf{A} \times \text{rot} \mathbf{B} + \mathbf{B} \times \text{rot} \mathbf{A} + (\mathbf{B} \cdot \nabla) \mathbf{A} + (\mathbf{A} \cdot \nabla) \mathbf{B} \end{aligned}$$

と $\text{div} \mathbf{B} = 0$ および $\mathbf{B} \cdot \mathbf{n} = 0$ から関係式

$$2(\mathbf{B} \cdot \nabla) \mathbf{n} = \text{rot}(\mathbf{n} \times \mathbf{B}) + \mathbf{B} \text{div} \mathbf{n} + \mathbf{j} \times \mathbf{n} + \text{rot} \mathbf{n} \times \mathbf{B} \quad (*2-1)$$

が成立する。そして、

$$(\mathbf{j} \times \mathbf{n}) \cdot \mathbf{B} = -\nabla p \cdot \mathbf{n} = -RB_p p'$$

$$(\mathbf{j} \times \mathbf{n}) \cdot (\text{rot} \mathbf{n} \times \mathbf{B}) = -(\mathbf{j} \cdot \mathbf{B})(\mathbf{n} \cdot \text{rot} \mathbf{n}) = 0$$

より

$$2(\mathbf{j} \times \mathbf{n}) \cdot (\mathbf{B} \cdot \nabla) \mathbf{n} = (\mathbf{j} \times \mathbf{n}) \cdot \text{rot}(\mathbf{n} \times \mathbf{B}) + |\mathbf{j} \times \mathbf{n}|^2 - RB_p p' \text{div} \mathbf{n} \quad (*2-2)$$

が得られる。ここで、

$$\mathbf{j} \times \mathbf{n} = \sqrt{g}(-j^\varphi n^\chi \nabla \psi + j^\varphi n^\psi \nabla \chi - j^\chi n^\psi \nabla \varphi),$$

$$\sqrt{g} \nabla \psi \cdot \text{rot}(\mathbf{n} \times \mathbf{B}) = \sqrt{g} \text{div}(\mathbf{n}^\psi \mathbf{B}) = \frac{\partial}{\partial \chi}(RB_p),$$

$$\sqrt{g} \nabla \chi \cdot \text{rot}(\mathbf{n} \times \mathbf{B}) = \sqrt{g} \text{div}(\mathbf{n}^\psi \mathbf{B} - \mathbf{n} B^\chi) = -\frac{\partial}{\partial \psi}(RB_p),$$

および

$$\nabla \varphi \cdot \text{rot}(\mathbf{n} \times \mathbf{B}) = -\text{div}(\mathbf{B}^\varphi \mathbf{n}) = -\left(\frac{T}{R^2}\right) \cdot \mathbf{n} - \frac{T}{R^2} \text{div} \mathbf{n}$$

を用いると

$$\begin{aligned} (\mathbf{j} \times \mathbf{n}) \cdot \text{rot}(\mathbf{n} \times \mathbf{B}) &= -\frac{j_t}{R^2 B_p} \nabla \psi \cdot \nabla(RB_p) - (B_p T')^2 + \frac{2TT'}{R^3} \nabla \psi \cdot \nabla R \\ &\quad - B_p \frac{TT'}{R} \text{div} \mathbf{n} \end{aligned} \quad (*2-3)$$

が成立する。(*2-3) 式と $|\mathbf{j} \times \mathbf{n}|^2 = j_t^2 + (B_p T')^2$ から (*2-2) 式は

$$2(\mathbf{j} \times \mathbf{n}) \cdot (\mathbf{B} \cdot \nabla) \mathbf{n} = j_t^2 + j_t B_p \text{div} \mathbf{n} - \frac{j_t}{R^2 B_p} \nabla \psi \cdot \nabla(RB_p) + \frac{2TT'}{R^3} \nabla \psi \cdot \nabla R$$

になる。ここで、

$$\begin{aligned} \text{div} \mathbf{n} &= \text{div} \frac{\nabla \psi}{RB_p} = \frac{R}{B_p} \text{div} \left(\frac{\nabla \psi}{R^2} \right) + \frac{\nabla \psi}{R^2} \cdot \nabla \left(\frac{R}{B_p} \right) \\ &= \frac{j_t}{B_p} - \frac{1}{RB_p^2} \nabla \psi \cdot \nabla B_p + \frac{1}{R^2 B_p} \nabla \psi \cdot \nabla R \end{aligned} \quad (*2-4)$$

から, $\text{div } \mathbf{n}$ を消去すると

$$2(\mathbf{j} \times \mathbf{n}) \cdot (\mathbf{B} \cdot \nabla) \mathbf{n} = 2j_t^2 \frac{j_t}{R} \frac{1}{R^2 B_p^2} \nabla \psi \cdot \nabla (R^2 B_p^2) - \frac{2}{R} p' \nabla \psi \cdot \nabla R$$

を得る。

付録3 (5.2-2)式の導出

ψ の等高線に沿った線積分で定義される関数

$$h(\psi, \chi) \equiv \int f(R, Z) d\ell \quad (*3-1)$$

について、 $\nabla\psi \cdot \nabla h$ を積分記号下の微分で表現する。そのためには、補助変数Sを導入して(ψ, S)を独立変数に選ぶ。この時、(ψ, S)が直交座標系になるようにSを設定するのが便利である。すなわち、Sの条件として、

$$\nabla S \cdot \nabla\psi = 0 \quad (*3-2)$$

を課す。したがって、Sはポロイダル磁場 \mathbf{B}_p に平行であるから

$$\nabla S = \alpha (\mathbf{e}_\varphi \times \nabla\psi) \quad (*3-3)$$

を書くことができる(\mathbf{e}_φ :トロイダル方向の単位ベクトル)。ここで係数 α は一般にはRとZ(したがって、 ψ とS)の関数である： $\alpha = \alpha(R, Z) = \alpha(\psi, S)$ 。(*3-3)式を成分で表わすと

$$\frac{\partial S}{\partial R} = \alpha \frac{\partial\psi}{\partial Z}, \quad \frac{\partial S}{\partial Z} = -\alpha \frac{\partial\psi}{\partial R} \quad (*3-4)$$

であるので $\frac{\partial}{\partial Z} \left(\frac{\partial S}{\partial R} \right) = \frac{\partial}{\partial R} \left(\frac{\partial S}{\partial Z} \right)$ より、 α を決定する方程式として、

$$\nabla\alpha \cdot \nabla\psi + \alpha \Delta\psi = 0 \quad (*3-5)$$

を得る。(*3-5)式は、また、

$$\frac{\partial}{\partial\psi} \alpha(\psi, S) = -\frac{\alpha}{|\nabla\psi|^2} \Delta\psi \quad (*3-6)$$

と書き直せる。(R, Z)座標から(ψ, S)座標への変数変換のヤコビアンJは

$$J = \frac{\partial\psi}{\partial R} \frac{\partial S}{\partial Z} - \frac{\partial\psi}{\partial Z} \frac{\partial S}{\partial R} = -\alpha |\nabla\psi|^2 = -\alpha R^2 B_p^2 \quad (*3-7)$$

であり、したがって

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial\psi} R(\psi, S) &= \frac{1}{J} \frac{\partial S}{\partial Z} = \frac{1}{|\nabla\psi|^2} \frac{\partial\psi}{\partial R} \\ \frac{\partial}{\partial\psi} Z(\psi, S) &= -\frac{1}{J} \frac{\partial S}{\partial R} = \frac{1}{|\nabla\psi|^2} \frac{\partial\psi}{\partial Z} \end{aligned} \right\} \quad (*3-8)$$

を得る。また、任意の関数 $f(R, Z) = f(\psi, S)$ に対して

$$\left. \frac{\partial f}{\partial\psi} \right|_{\perp} = \frac{\partial}{\partial\psi} f(\psi, S) \quad (*3-8')$$

が成立する。次に、等高線に沿った線素 $d\ell$ は

$$d\ell = \frac{dS}{|\nabla S|} = \frac{dS}{\alpha |\nabla\psi|} \quad (*3-9)$$

と表わせる。この様にして構成された直交座標系 (ψ, S) を用いると、積分記号下で微分ができ、

$$\begin{aligned} \frac{1}{|\nabla\psi|^2} \nabla\psi \cdot \nabla h &= \frac{\partial}{\partial\psi} h(\psi, S) = \frac{\partial}{\partial\psi} \int f \frac{dS}{\alpha |\nabla\psi|} \\ &= \int \frac{\partial}{\partial\psi} \left(\frac{f}{\alpha |\nabla\psi|} \right) dS = \int \alpha |\nabla\psi| \frac{\partial}{\partial\psi} \left(\frac{f}{\alpha |\nabla\psi|} \right)_{\perp} d\ell \end{aligned} \quad (*3-10)$$

が成立する。上式の被積分関数

$$\begin{aligned} \alpha |\nabla\psi| \frac{\partial}{\partial\psi} \left(\frac{f}{\alpha |\nabla\psi|} \right)_{\perp} &= \frac{\partial f}{\partial\psi} \Big|_{\perp} - \frac{f}{|\nabla\psi|} \frac{\partial}{\partial\psi} (|\nabla\psi|)_{\perp} - \frac{f}{\alpha} \frac{\partial \alpha}{\partial\psi} \\ &= \frac{\partial f}{\partial\psi} \Big|_{\perp} + f \left[\frac{\Delta\psi}{|\nabla\psi|^2} - \frac{\partial}{\partial\psi} \log(|\nabla\psi|)_{\perp} \right] \end{aligned}$$

において

$$\omega \equiv \frac{\Delta\psi}{|\nabla\psi|^2} - \frac{\partial}{\partial\psi} \log(|\nabla\psi|)_{\perp} \quad (*3-11)$$

とおくと、 ω は

$$\omega = \frac{\Delta\psi}{|\nabla\psi|^2} - \frac{1}{2|\nabla\psi|^2} \left[\frac{\partial}{\partial R} |\nabla\psi|^2 \cdot \frac{\partial R}{\partial\psi} \Big|_{\perp} + \frac{\partial}{\partial Z} |\nabla\psi|^2 \cdot \frac{\partial Z}{\partial\psi} \Big|_{\perp} \right] \quad (*3-11')$$

と表わせる。 $(*3-11')$ に $(*3-8)$ 式を代入すると $(5.2-2)$ 式を得る。

付録 4 (6.2-8) 式の導出

トロイダル磁場 B_t が一定の場合，平衡の関係式 (6.2-2, 3) 式から $\frac{d\psi}{dr}$ を消去すると，

$$r \frac{d}{dr} \left(\frac{1}{q^2} \right) + \frac{4}{q^2} = - \frac{2R_0^2}{B_t^2} \frac{1}{r} \frac{dp}{dr} \quad (*4-1)$$

を得る。

(6.2-6) 式で $(nr/R_0)^2 \ll 1$ の近似を使うと，

$$W_Q = \frac{r}{R_0} B_t^2 \left(1 - \frac{n^2}{m^2} \left(\frac{r}{R_0} \right)^2 \right) \left[\left(\frac{n}{m} - \frac{1}{q} \right)^2 r^2 \left(\frac{dX_m}{dr} \right)^2 + 2 \left(\frac{n^2}{m^2} - \frac{1}{q^2} \right) r X_m \frac{dX_m}{dr} + \left(\frac{n}{m} + \frac{1}{q} \right)^2 X_m^2 \right] \quad (*4-2)$$

を得る。ここで $X_m \frac{dX_m}{dr}$ の項を部分積分し，プラズマ表面で $X_m = 0$ (固定境界条件) を用いると，ポテンシャル・エネルギー積分 W_p は次のように表わされる。

$$W_p = \frac{B_t^2}{R_0} r^3 \left[1 - \frac{n^2}{m^2} \left(\frac{r}{R_0} \right)^2 \right] \left(\frac{1}{q} - \frac{n}{m} \right)^2 \left(\frac{dX_m}{dr} \right)^2 + H X_m^2 \quad (*4-3)$$

$$H = \frac{B_t^2}{R_0} \left\{ r \left(\frac{m}{q} - n \right)^2 + \frac{r}{m^2} \left[1 - \frac{n^2}{m^2} \left(\frac{r}{R_0} \right)^2 \right] \left(\frac{m}{q} + n \right)^2 - \frac{d}{dr} \left[r^2 \left(1 - \frac{n^2 r^2}{m^2 R_0^2} \right) \left(\frac{n^2}{m^2} - \frac{1}{q^2} \right) \right] - \frac{2R_0^2}{B_t^2} \frac{dp}{dr} \right\} \quad (*4-4)$$

ここで，

$$\begin{aligned} & r \left(\frac{m}{q} - n \right)^2 + \frac{r}{m^2} \left[1 - \frac{n^2}{m^2} \left(\frac{r}{R_0} \right)^2 \right] \left(\frac{m}{q} + n \right)^2 \\ &= r \left(\frac{m}{q} - n \right)^2 \left[1 - \frac{1}{m^2} \left(1 - \frac{n^2}{m^2} \left(\frac{r}{R_0} \right)^2 \right) \right] + 2r \left[1 - \frac{n^2}{m^2} \left(\frac{r}{R_0} \right)^2 \right] \left(\frac{1}{q^2} + \frac{n^2}{m^2} \right) \end{aligned}$$

および，

$$\begin{aligned} & - \frac{d}{dr} \left[r^2 \left(1 - \frac{n^2 r^2}{m^2 R_0^2} \right) \left(\frac{n^2}{m^2} - \frac{1}{q^2} \right) \right] = -2r \left[1 - \frac{n^2}{m^2} \left(\frac{r}{R_0} \right)^2 \right] \left(\frac{n^2}{m^2} - \frac{1}{q^2} \right) \\ & + 2r \cdot \frac{n^2}{m^2} \frac{r^2}{R_0^2} \left(\frac{n^2}{m^2} - \frac{1}{q^2} \right) + r^2 \left(1 - \frac{n^2 r^2}{m^2 R_0^2} \right) \frac{d}{dr} \left(\frac{1}{q^2} \right) \end{aligned}$$

と (*4-1) 式を用いると，

$$\begin{aligned} H &= \frac{B_t^2}{R_0} \left\{ r \left[(m^2 - 1) + \frac{n^2}{m^2} \left(\frac{r}{R_0} \right)^2 \right] \left(\frac{1}{q} - \frac{n}{m} \right)^2 + \frac{4r}{q^2} \left[1 - \frac{n^2}{m^2} \left(\frac{r}{R_0} \right)^2 \right] \right. \\ & + 2r \frac{n^2}{m^2} \left(\frac{r}{R_0} \right)^2 \left(\frac{n^2}{m^2} - \frac{1}{q^2} \right) + \left[1 - \frac{n^2}{m^2} \left(\frac{r}{R_0} \right)^2 \right] \left[-\frac{4r}{q^2} - \frac{2R_0^2}{B_t^2} \frac{dp}{dr} \right] \\ & \left. + \frac{2R_0}{B_t^2} \frac{dp}{dr} \right\} \end{aligned}$$

$$= \frac{B_1^2}{R_0} \left\{ r \left[(m^2 - 1) + \frac{n^2}{m^2} \left(\frac{r}{R_0} \right)^2 \right] \left(\frac{1}{q} - \frac{n}{m} \right)^2 - 2r \frac{n^2}{m^2} \left(\frac{r}{R_0} \right)^2 \left(\frac{1}{q^2} - \frac{n^2}{m^2} \right) + \frac{n^2}{m^2} \left(\frac{r}{R_0} \right)^2 \frac{2R_0^2}{B_1^2} \frac{dp}{dr} \right.$$

となり, (6.2-8) 式を得る。

次に (6.25) 式より $r \rightarrow 0$ では

$$V_m = \frac{1}{m} \frac{d}{dr} (r X_m) ; \quad \frac{\partial}{\partial r} (r X) + \frac{\partial}{\partial \chi} V = 0$$

が成り立ち, $\text{div } \xi = 0$ から,

$$\xi_\varphi \rightarrow 0 \quad (r \rightarrow 0)$$

が得られる。そして, $r \rightarrow 0$ で, 変位ベクトル ξ がポロイダル角 χ に依存しない条件から

$$\left. \begin{aligned} X_m &\propto r^{m-1} \quad (m \geq 2) \\ X_m' &= 0 \quad (m = 1) \end{aligned} \right\}$$

を得る。

付録5 d および h の導出

平衡の方程式 (6.2-13) および $\frac{T}{q} = \frac{R_0}{r} \frac{d\psi}{dr}$ より

$$\begin{aligned} \frac{R_0}{T} \left[\frac{r}{R_0} \frac{d}{dr} \left(\frac{T}{q} \right) - \frac{Rj_t}{|\nabla r|^2} \right] &= \frac{r}{q} \left(\frac{d\psi}{dr} \right)^{-1} \left\{ r \frac{d}{dr} \left(\frac{1}{r} \frac{d\psi}{dr} \right) - \right. \\ &\quad \left. \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{d\psi}{dr} \right) - \frac{d\psi}{dr} \left[\frac{1}{|\nabla r|^2} \frac{\partial |\nabla r|^2}{\partial r} \right]_{\perp} + \frac{\partial \beta_{rx}}{\partial \chi} \right\} \\ &= -\frac{r}{q} \left[\frac{2}{r} - \frac{1}{|\nabla r|^2} \frac{\partial |\nabla r|^2}{\partial r} \right]_{\perp} - \frac{\partial \beta_{rx}}{\partial \chi} \end{aligned} \quad (*5-1)$$

を得る。ここで、右辺第1項は円柱プラズマ近似に対応している。

次に、(4.2-9) 式より、

$$\begin{aligned} 2(\mathbf{j} \times \mathbf{n}) \cdot (\mathbf{B} \cdot \nabla) \mathbf{n} &= 2j_t^2 \frac{j_t}{R} \frac{1}{|\nabla \psi|^2} \nabla \psi \cdot \nabla (R^2 B_p^2) - \frac{2}{R} \frac{dp}{d\psi} \nabla \psi \cdot \nabla R \\ &= 2j_t^2 \frac{j_t}{R} \left(\frac{d\psi}{dr} \right)^{-1} \frac{\partial}{\partial r} \left(\left(\frac{d\psi}{dr} \right)^2 |\nabla r|^2 \right) - \frac{2}{R} \frac{dp}{dr} |\nabla r|^2 \frac{\partial R}{\partial r} \Big|_{\perp} \end{aligned}$$

である。したがって

$$\begin{aligned} \frac{2R^2}{|\nabla r|^2} (\mathbf{j} \times \mathbf{n}) \cdot (\mathbf{B} \cdot \nabla) \mathbf{n} &= Rj_t \left[\frac{2Rj_t}{|\nabla r|^2} - 2 \frac{d}{dr} \left(\frac{d\psi}{dr} \right) - \frac{1}{|\nabla r|^2} \frac{d\psi}{dr} \frac{\partial |\nabla r|^2}{\partial r} \right]_{\perp} \\ &\quad - \frac{dp}{dr} \frac{\partial R^2}{\partial r} \Big|_{\perp} \end{aligned}$$

を得る。ここで平衡方程式 (6.2-13) を用いて大括弧の中の $Rj_t/|\nabla r|^2$ を消去すると

$$\begin{aligned} d &= -\frac{1}{R_0} \left(R^2 \frac{dp}{dr} + T \frac{dT}{dr} \right) \left(2 + \frac{r}{|\nabla r|^2} \frac{\partial |\nabla r|^2}{\partial r} \right)_{\perp} + 2r \frac{\partial \beta_{rx}}{\partial \chi} \\ &\quad - \frac{r}{R_0} \frac{dp}{dr} \frac{\partial R^2}{\partial r} \Big|_{\perp} \end{aligned}$$

を得る。

付録6 $m=1$ 内部キンク・モードに対する二次形式

Vについての方程式 (6.2-16) を

$$X = X_1(r) e^{ix} + X_2(r) e^{2ix}$$

$$V = iV_0(r) + iV_1(r) e^{ix} + iV_2(r) e^{2ix}$$

とにおいて解き、ポテンシャル・エネルギー (6.2-14) に代入し、ポロイダル角 x に関して積分を
実行すると、ポテンシャル・エネルギー積分 W_p は、 X_1, X_2 に関する二次形式として

$$W_p = \int_0^{r_p} (w_{1,1} + w_{2,2} + 2w_{1,2}) dr \quad (*6-1a)$$

$$\left. \begin{aligned} w_{1,1} &= a_1 \left(\frac{1}{q} - n \right)^2 (X_1')^2 + H_1 X_1^2 \\ w_{2,2} &= a_2 \left(\frac{1}{q} - \frac{n}{2} \right)^2 (X_2')^2 + H_2 X_2^2 \\ w_{1,2} &= f \left(\frac{1}{q} - n \right) \left(\frac{1}{q} - \frac{n}{2} \right) X_1' X_2' + g_{12} \left(\frac{1}{q} - n \right) X_1' X_2 \\ &\quad + g_{21} \left(\frac{1}{q} - \frac{n}{2} \right) X_1 X_2' + h X_1 X_2 \end{aligned} \right\} \quad (*6-1b)$$

を得る。ここで、 f, g_{12}, g_{21}, h はメトリック量から決まるモード間結合定数であり、また、
6.2節の議論より、 $\epsilon = (r/R_0)^2 \ll 1$ では

$$H_2 \propto 3 \left(\frac{1}{q} - \frac{n}{2} \right)^2$$

であり、 H_1 は同じオーダーの円柱プラズマ項とトロイダル項から成る。

(*6.1-a) 式で X_2 についても最小化を行うと、 X_2 に関する微分方程式

$$\left[a_2 \left(\frac{1}{q} - \frac{n}{2} \right)^2 X_2' \right]' - H_2 X_2 = - \left\{ \left(\frac{1}{q} - \frac{n}{2} \right) \left[f \left(\frac{1}{q} - n \right) X_1' + g_{12} X_1 \right] \right\}' \\ + \left[g_{21} \left(\frac{1}{q} - n \right) X_1' + h X_1 \right] \quad (*6-2)$$

を得る。また、(*6-2) 式において X_2 の境界条件は

$$X_2 = 0 ; r = 0 \text{ および } r = r_p \left(q_a \geq \frac{2}{n} \text{ の場合} \right) \quad (*6-3a)$$

である。しかし $q_a > \frac{2}{n}$ で $q = \frac{2}{n}$ の有理面がある場合、微分方程式 (*6-2) の解 X_2 が有理
面 $q = \frac{2}{n}$ で正則であるためには、

$$X_2 = 0 \quad r = r_2 \left(q(r_2) = \frac{2}{n} \right) \quad (*6-3b)$$

が成り立つ必要がある (X_1 として (6.2-10) を仮定していることに注意)。この時、 X_2 の微分
は有理面 $q = \frac{2}{n}$ で不連続になって、 V_2 に飛びが生じるが、今までの議論で暗に無視してきた運

動エネルギー（プラズマの慣性） $\omega^2 \int \rho |\xi|^2 d\tau$ が有理面近傍で無視できなくなって、結局、 X_2 は $q = \frac{2}{n}$ 面で急速に、しかし滑めらかにゼロになる。

次に、(*6-2) 式に X_2 をかけて積分すると ($r_w = r_p$ or r_2)

$$\begin{aligned}
 (*6-2) \text{ 式の左辺} &= \int_0^{r_1} X_2 \left[a_2 \left(\frac{1}{q} - \frac{n}{2} \right)^2 X_2' \right]' dr + \int_{r_1}^{r_w} X_2 \left[a_2 \left(\frac{1}{q} - \frac{n}{2} \right)^2 X_2 \right]' dr \\
 &\quad - \int_0^{r_w} H_2 X_2^2 dr \\
 &= - \int_0^{r_w} a_2 \left(\frac{1}{q} - \frac{n}{2} \right)^2 (X_2')^2 dr - \frac{n^2}{4} a_2 (r=r_1) [X_2 X_2']_{r_1-0}^{r_1+0} - \int_0^{r_w} H_2 X_2^2 dr \\
 &= - \int_0^{r_w} w_{2,2} dr - \frac{n^2}{4} a_2 (r=r_1) [X_2 X_2']_{r_1-0}^{r_1+0} \\
 (*6-2) \text{ 式の右辺} &= - \int_0^{r_1} \left\{ \left(\frac{1}{q} - \frac{n}{2} \right) \left[f \left(\frac{1}{q} - n \right) X_1' + g_{21} X_1 \right] \right\}' X_2 dr \\
 &\quad - \int_{r_1}^{r_w} \left\{ \left(\frac{1}{q} - \frac{n}{2} \right) \left[f \left(\frac{1}{q} - n \right) X_1' + g_{21} X_1 \right] \right\}' X_2 dr \\
 &\quad + \int_0^{r_w} \left[g_{21} \left(\frac{1}{q} - n \right) X_1' + h X_1 \right] X_2 dr \\
 &= + \int_0^{r_w} f \left(\frac{1}{q} - \frac{n}{2} \right) \left(\frac{1}{q} - n \right) X_1 X_2' dr + \int_0^{r_w} g_{21} \left(\frac{1}{q} - \frac{n}{2} \right) X_1 X_2' dr \\
 &\quad - \frac{n}{2} g_{12} (r=r_1) [X_1 X_2']_{r_1-0}^{r_1+0} + \int_0^{r_w} g_{21} \left(\frac{1}{q} - n \right) X_1' X_2 dr + \int_0^{r_w} h X_1 X_2 dr \\
 &= \int_0^{r_w} w_{1,2} dr - \frac{n}{2} g_{12} (r=r_1) [X_1 X_2']_{r_1-0}^{r_1+0}
 \end{aligned}$$

から、

$$\int_0^{r_w} w_{2,2} dr = - \int_0^{r_w} w_{1,2} dr - \frac{n^2}{4} a_2 (r=r_1) [X_2 X_2']_{r_1-0}^{r_1+0} - \frac{n}{2} g_{12} (r=r_1) [X_1 X_2']_{r_1-0}^{r_1+0} \quad (*6-4)$$

を得る。すなわち、 $q = 1/n$ の有理面での表面項 (*6-4) の右辺第 2, 3 項を除いて、 $m = 2$ モードのポテンシャル・エネルギーとモード結合のエネルギーは等しいことが分る。(*6-4) 式において表面項はプラズマの慣性を考慮していないために生じ、ERATO コードで行っているように、プラズマの運動エネルギーも含めて最小化を行うと、不安定な内部キック・モードでは、固有関数は有理面 $q = 1/n$ でも滑めらかであるので、表面項は消える。しかし、この場合、

(*6-4) 式に運動エネルギーの補正が現われる。また, (*6-4) 式が成立するのは, $m=1$ モードが主要モードであって, $m=2$ モードがモード結合によって強制的に励起されるからである。したがって, $m=0$ モードに対しても同様の議論が成り立ち, 表面項, および, 他のモードとのモード間結合を無視すると

$$\int_0^{r_p} w_{2,2} dr \simeq - \int_0^{r_p} w_{1,2} dr, \quad \int_0^{r_p} w_{0,0} dr \simeq - \int_0^{r_p} w_{0,1} dr$$

が成り立つ。また, (*6-4) 式において $\int_0^{r_w} w_{2,2} dr > 0$ ($\int_0^{r_p} w_{0,0} dr > 0$) であるから, モード間結合は不安定に働くことが分る。