



Title	連続体およびトラス構造の強度的最適形態の決定法に関する研究
Author(s)	山崎, 光悦
Citation	大阪大学, 1982, 博士論文
Version Type	VoR
URL	https://hdl.handle.net/11094/262
rights	
Note	

The University of Osaka Institutional Knowledge Archive : OUKA

<https://ir.library.osaka-u.ac.jp/>

The University of Osaka

連続体およびトラス構造の強度的最適形態の
決定法に関する研究

昭和 57 年 8 月

山 崎 光 悦

目 次

第1章 緒 論	1
第2章 要素パターン変換法による軸対称体の形状最適化法	8
2. 1 序 言	8
2. 2 要素パターン変換法	9
2. 2. 1 パターン変換法の概念	9
2. 2. 2 有限要素法の応用	12
2. 3 最適化の手順と計算手法	16
2. 3. 1 設計基準応力の設定	16
2. 3. 2 節点移動ベクトルの決定	18
2. 3. 3 設計手順	19
2. 3. 4 数値計算上の注意事項	20
2. 4 設計例と考察	21
2. 4. 1 厚肉圧力容器	21
2. 4. 2 管フランジ	29
2. 5 結 言	38
第3章 要素パターン変換法による物体力場の形状最適化法	39
3. 1 序 言	39
3. 2 物体力場の要素パターン変換法	40
3. 2. 1 物体力を考慮したパターン変換法	40
3. 2. 2 有限要素法の応用	43
3. 3 最適化の手順	49
3. 4 設計例と考察	50
3. 4. 1 自重を考慮した形状決定	50
3. 4. 2 2次元遠心応力場の形状決定	54
3. 4. 3 軸対称遠心応力場の形状決定	65
3. 5 結 言	73

第4章	要素パターン変換法による複合体の形状最適化法	74
4.1	序言	74
4.2	複合体の要素パターン変換法	74
4.2.1	パターン変換法の概念	74
4.2.2	有限要素法の応用	77
4.3	設計例と考察	81
4.4	結言	83
第5章	材質変化法を利用した多連結形状の創成法	85
5.1	序言	85
5.2	材質変化法	85
5.3	多連結形状創成手法	87
5.3.1	多連結物体創成の可能性	87
5.3.2	手法Ⅰ	88
5.3.3	手法Ⅱ	90
5.4	設計例と手法の比較	92
5.4.1	L型フレームの補強リブ	93
5.4.2	水圧を受ける柱	99
5.4.3	一様荷重を受けるT型柱	103
5.4.4	手法Ⅰと手法Ⅱの比較	107
5.5	結言	109
第6章	トラス構造の最適形態の決定法	110
6.1	序言	110
6.2	最適形態の決定法	111
6.2.1	基本的な考え方	111
6.2.2	トラス連続体の有限要素法	113
6.2.3	最小重量設計法	116
6.2.4	数値計算上の注意事項	120
6.3	設計例と考察	121

6. 3. 1	2部材トラス構造	1 2 1
6. 3. 2	片持ちトラス構造	1 2 7
6. 4	結 言	1 3 0
第7章	結 論	1 3 1
付録Ⅰ	要素パターン変換による応力変化と節点力変化	1 3 3
付録Ⅱ	無限板中に存在する円形介在物の最適形状	1 3 5
謝 辞		1 3 8
参 考 文 献		1 3 9
関連発表論文		1 4 6

第 1 章 緒 論

機械設計および構造設計を始めとする工学設計一般の究極の目的は、それぞれの機能目的を満たす広い意味での形状や機構を決定することにある。その一般的な過程として機能設計、強度設計、材質の選定および生産設計が行なわれ、それらの結果が総合判断されて形状や機構が最終的に決定される。それら各設計のうち、大型構造物の設計等では強度設計が一般により重要視されるのに対し、機構の設計等では機能設計が優先されることが多い。いずれにしても工学設計において強度設計は不可欠であり、かつその重要な部分を占めていることは認識されているところである。

強度設計の分野に注目すると、その構造解析法は有限要素法の出現によって最近の約 20 年間に著しい進歩を遂げ、我々の知識の及ぶ範囲の構造問題をほとんど全て解きうるまでに至っている〈1〉。しかし有限要素法を設計対象物体の単なる解析手段として用い、安全性および機能上の制約条件を満足するいくつかの設計を試みてそのうちの最良のものを選択する従来の設計手続きでは、当然設計々算に要する経費と時間のきびしい制限を受けるから安易に何回も計算を繰り返すことができない。そこで解析過程を電子計算機に頼りながら、組織的に設計変更を実施する方法の開発が望まれるようになった。

以上のような状況のもとで近年構造設計の分野では、与えられた設計制約条件下で設定された強度的な目的関数を数理計画法を用いて合理的に最適化する手法、いわゆる“構造最適設計法”に関する種々の研究が推進され、すでに実用段階に入りつつある。それらの研究歴史と成果については、Was i u t y n s k i と B r a n d t 〈2〉、S h e u と P r a g e r 〈3〉、田中〈4〉および V e n k a y y a 〈5〉が詳しい解説を与えている。さらに構造最適設計法をテーマとする国際会議〈6〉の開催や国内外での書物の発行〈7〉～〈12〉もなされるまでに至っている。そしてそれらの研究の対象範囲も、弾性設計、塑性設計は無論のこと、座屈や振動等多岐にわたっている。

しかし構造最適設計法に関する従来の研究の大半は、構造形態、いわゆる構造位相の主要部分をあらかじめ規定して、その各部材の断面寸法や長さなどのある目的関数を最小化して決定するものであり、構造最適設計において重要な部材配置、すなわち構造形態（構造位相）その

注) 本文中の〈 〉内の数字は巻末に掲げた文献番号を表わす。

ものの決定法を論じたものはきわめて少ない〈13〉～〈25〉。20世紀初期にMichellはトラス部材が連続的に分布する骨組連続体の概念を導入して、最小重量トラス構造の最適形態に関する理論的極限、いわゆる“Michell構造”を与えた〈13〉。近年になってようやくそのMichell構造の重要性が認識され、それに関する具体的な研究がPragerら〈14〉～〈17〉、Chan〈22〉～〈24〉等によってなされるようになった。またMichell構造に関する詳細な解説がHempの書物〈20〉に与えられている。しかし上記のPragerら、Chanによる決定論的方法では、取り扱える対象が支持条件および荷重条件の単純な場合に限られ、一般的な荷重条件および支持条件下での最適形態を見出すことはたとえ高級な数学的知識を駆使してもまず不可能であろう。

それに対し、Hemp〈26〉、瀬口ら〈19〉はトラス構造を創成すべき空間内にあらかじめ多数の節点を点状させ、それら節点間の結合部材の有無を数理計画法的手段により組織的に判定し、離散トラス構造の最適位相の決定を試みている。それらは離散的、数値解析的手法であるがゆえに、任意の支持条件および荷重条件下の問題に適用可能ではあるが、設ける節点数に依存して求まる位相が異なる。さらに節点数が増加すると数理計画法による実行が急激に困難となり複雑な問題に対しては実用的ではない。一方、構造設計の分野ではしばしば重要となる多重荷重形式問題に至っては、解析的方法によりChan〈22〉、Pragerら〈14〉によって若干の試みがなされている程度であり、最適形態に関する普遍性のある有用な知見はほとんど得られていない。したがって、多重荷重形式を含めた任意の荷重条件および支持条件下でのトラス構造の位相決定を可能とするはん用的かつ実用的手法の開発が必要である。

次に連続体の最適設計問題に注目すると、はりや板等解析的方法によりその断面形状を決定論的に求められる特殊な問題を除けば、連続体の2次元あるいは3次元の形状の決定法に関する研究は、ここ数年間にようやくそのほう芽期を迎えた感がある。すなわち、国内では任意の制約条件下にある2次元連続体の強度的最適形状の決定手法として、まず尾田が有限要素法を利用して、与えられた基本原形の表面形状を構成する要素群に対しパターン変換を繰り返し実施することにより表面応力分布の均一化を図り、漸近的に最適形状を得る“要素パターン変換法”を提案した〈27〉。また梅谷らは骨の生長過程に注目し、境界上の応力値と目標値との差に応じ表面形状を生長させる“生長変形法”と称する方法を発表している〈28〉、〈29〉。さらに薦と山地は、高次有限要素を用いて応力集中部の応力分布を目標の分布に漸近的に近づける局所的な形状修正法を提案している〈30〉。これら梅谷らおよび薦、山地による方法は発想の根本こそ異なるが、基本的には有限要素法による応力解析を基礎とし、形状修正を必要とする境界上の各点の応力と目標値との差あるいは比に応じて形状修正を繰り返し実施

する点で尾田の方法と類似している。

一方、瀬口と多田は形状パラメータをも変数とする物体全体のエネルギーはん関数を停留させる“逆変分原理”による形状最適化法を提案している〔31〕。それは構造全体としての形状をエネルギー基準によって大域的に評価し、その最適形状を決定するものである。また浜田らはその逆変分原理による方法を、座屈、振動問題〔32〕および変断面はりの問題〔33〕へも適用している。しかし逆変分原理による方法も、形状パラメータに関して得られる方程式が当然ながら高次の非線形となるため、“エネルギー比法”と称する境界でのエネルギー密度分布の均一化をねらった繰返し法とならざるを得ない。したがって静的弾性問題にその適用範囲を限れば、応力基準とエネルギー基準の差はあるが基本的には局所的な値と目標値との比較により全体の分布の均一化を図る点で手法的には尾田、その他の方法と同様であると見なせよう。また数学的にはかなり複雑であり、しかも弾性破損あるいは破壊に関する応力の諸条件を直接考慮することが容易ではない。

さて国外でも最近、有限要素法と数値計画法を用いて2, 3の試み〔34〕～〔36〕がなされている。数値計画法によるそれらの手法では、設計変数を多くとることが実際上困難なため、形状をあらかじめ設定した曲線に近似しその関数パラメータを設計変数とする等の方法を採用している。したがって形状決定の自由度が極端に限定される危険性があり、また局所的な形状最適化法とならざるを得ない面がある。なお、はん用性には欠けるが実験的手法により形状最適化を図る興味ある研究〔37〕～〔39〕も報告されている。

上述のように連続体の形状最適化法として提案されている各種の方法は、それぞれ独自の特長と欠点を有しているが、それら手法の適用の限界等については未だ明らかにされていない面が多い。したがってそれら各手法のより高度な設計問題への適用の可能性と限界がまず明らかにされ、それらの中から、あるいは新たな手法の開発により、設計の自由度がより大きく、はん用性のある形状決定手法が確立されることが望まれる。

以上述べたような観点から本論文では、トラス構造および連続体の最適形態のはん用性ある決定手法の開発とそれら手法の有効性を示すことを目的とする。まず連続体の形状最適化問題に対しては、尾田によって提案された要素パターン変換法の有用性に着目し、その拡張、発展により、3次元軸対称問題、物体力場の問題、複合体問題および多連結化問題等のより高度の設計問題に対する具体的な手法をそれぞれ提示する。またトラス構造の位相決定問題に対しては、有限要素法と数値計画法の導入によってM i c h e l l構造を離散的にとらえ、より一般的な構造に対するはん用性ある位相決定手法を提示する。

まず第2章では、尾田によって提示された要素パターン変換法を3次元軸対称問題に拡張し

た場合の具体的手法を提示し、有限要素法にパターン変換法を組み込んだ形状最適化法の理論的解釈を明確にする。さらにその手法を厚肉圧力容器および管フランジの設計例に適用し、形状最適化法としての実用性を検討する。また管フランジに関してはエポキシモデルの破壊実験によって解析結果の有効性を検討する。

第3章では、要素パターン変換法を物体力場の形状最適化問題に拡張、適用し、その理論的解釈を与える。そして物体力として自重あるいは遠心力が作用する場合の平等強さの形状決定問題に適用し、解の収束性および有効性を検討する。さらにスポーク付きおよびリム付き回転円板の実用的設計問題にも適用し、回転破壊試験を実施してそれらの解析結果の有効性を実験的にも検討する。

第4章では、完全接着された複合弾性体の形状最適化問題を対象とし、その境界接線応力分布の均一化を図る境界形状決定手法として、境界をはさんで対をなす有限要素のパターン変換法を提示する。そしてその手法の理論的解釈も明確にする。さらに設計例として、2軸応力場下の長方形板中に存在する介在物の形状決定問題への適用を図り、手法の有効性を吟味する。

第5章では、強度的な最適形状が連続体内部に空域を有する形状、いわゆる多連結物体の最適形状決定問題を対象とし、2つの手法を提示する。その第1の手法は、従来から利用されてきた板厚変化法〔40〕、〔41〕あるいは剛性変化法と要素パターン変換法を交互に用いることによって多連結化を図る方法である。また第2の手法は板厚あるいは剛性変化法等から直接形状修正ベクトルを決定し、合せて多連結化も自動的に実施する方法である。その2つの手法を一樣荷重を受ける柱あるいはフレームの補強リブの形状決定問題等に適用し、2手法の特徴と優劣を比較検討する。

第6章では、与えられた設計空間と多重荷荷を含めた任意の荷重条件および支持条件に対し、静定トラス連続体の最小重量構造を与える位相決定問題を対象とする。そしてMichell構造の直交トラス連続体を一般化した斜交トラス連続体の概念とそれの有限要素法を導入し、数値計画法によって連続的な最適位相を決定するはんだ用的手法を提示する。さらにその手法を2部材構造および片持ちトラス構造に適用してその有効性を検証する。

第7章では、第2章から第6章において得られた成果の要約を述べる。

主 要 記 号

本論文に用いる主な記号は、次のとおりである

A_j	: 3角形要素, リング要素の面積, 断面積
B_j	: ひずみ-変位マトリックス
b_{ji}	: 節点 i の移動ベクトル (第2章)
D, D_0	: 応力-ひずみマトリックス (第2, 3, 4, 5章)
d, d_j	: 構造全体, 要素 j の節点変位ベクトル
E	: 縦弾性係数
F_j	: 物体力の等価節点力ベクトル (第3章)
g	: 重力加速度 (第3章)
g_{mi}	: 節点 i における材料特性分布の最大勾配 (第5章)
H	: Hesse行列の逆行列 (第6章)
I	: 単位マトリックス
K, K_j	: 構造全体, 要素 j の剛性マトリックス
l, m	: 方向余弦 (第2, 6章)
m	: 全要素数 (第6章)
N_j	: 変位の内そうマトリックス (第3, 6章)
N	: 破壊回転数 (第3章)
n	: 最適化の繰り返し数
P, P_j	: 構造全体, 要素 j に関する外荷重の等価節点力ベクトル (第2, 3, 6章)
p	: 一様分布あるいは直線分布荷重 (第2, 3, 5章)
$\tilde{p}_j(x, y)$	: 無次元化材料特性分布 (第5章)
$R_j = \bar{\sigma}_j / \sigma_a, \sigma_a / \bar{\sigma}_j$	: 応力比
r, θ, z	: 円柱座標 (第2, 3章)
r_m, z_m	: 3角形リング要素の重心点の座標値 (第2, 3章)
$r^{(n)}$	: 第 n ステップにおける探索方向ベクトル (第6章)
S_F, S_C	: 設計境界, 形状規定境界 (第2, 3, 5章)
S_u	: 幾可学的境界条件が与えられる境界 (第6章)
s, t	: 接合境界の法線および接線方向座標 (第4章)

s	: 軸対称体の子午線方向 (第2章)
	多重負荷の荷重条件数 (第6章)
T, T_0	: 座標変換マトリックス (第6章)
t, t_0	: 平板あるいはトラス連続体の板厚 (第3, 4, 5, 6章)
$t_{\alpha j}, t_{\beta j}$	: トラス連続体の α, β 部材板厚 (第6章)
$u_j, \bar{u}_j$	: 部材座標系および全体座標系での変位ベクトル (第6章)
V	: 全体積
x, y	: 直交座標 (第3, 5, 6章)
x	: 設計変数ベクトル (第6章)
δx_i	: 節点 i の形状修正ベクトル (第2, 5章)
α_1, α_2	: 境界対向要素の寸法比 (第4章)
α, β	: 斜交部材座標 (第6章)
$\alpha_x, \alpha_y, \alpha_r, \alpha_z$	: 等価節点力の物体力成分と外荷重成分との比 (第3章)
$\beta_x, \beta_y, \beta_r, \beta_\theta, \beta_z$	: 基準応力に対する各応力成分比 (第3章)
γ	: 比重量 (第3章)
δ_{ij}	: クロネッカーのデルタ (第6章)
$\delta_n = x_{n+1} - x_n$	: 第 $(n+1)$ ステップにおける設計変数の修正量 (第6章)
e_j	: ひずみベクトル
ε_0	: 相対誤差の収束基準 (第6章)
$\theta_{\alpha j}, \theta_{\beta j}$	: x 軸と α, β 座標軸とのなす角 (第6章)
ν	: ポアソン比 (第2, 3, 4章)
ξ, η	: パターン変換係数 (第2, 3章)
ξ_1, ξ_2	: 複合体のパターン変換係数 (第4章)
ρ	: 材料密度 (第3章)
σ_j	: 応力ベクトル
$\bar{\sigma}_j$	: 相当応力 (第2, 3, 5章)
σ_a	: 基準応力
σ_B	: 1 軸の引張り破断強さ (第2, 3章)
ϕ	: パターン変換関数 (第2, 3章)
Ω	: 設計物体
Ω_F, Ω_C	: 設計領域, 形状不変要素域 (第2, 3, 4, 5章)

Ω_s, Ω_m : 単連結物体, 多連結物体 (第 5 章)

∇V : スカラー関数 V の勾配 (第 6 章)

次に共通的に用いる添字記号は, 以下に示すとおりである.

i : 節点 i に関する量 (第 2, 3, 5 章),
複合体を構成する弾性体 1, 2 に関する量 (第 4 章),
荷重形式 i に関する量 (第 6 章)

j : 要素 j に関する量

$\min, \max$: 最小値, 最大値

n : 繰り返し過程の第 n ステップにおける量

opt : 最適形状に関する量 (第 3, 5 章)

p, q : α, β 部材応力が許容応力に到達する荷重条件 (第 6 章)

r, θ, z : 円柱座標成分 (第 2, 3 章)

s, t : 接合境界法線および接線方向成分 (第 4 章)

x, y : x, y 座標成分

0 : 初期量または基準値

α, β : α, β 部材成分 (第 6 章)

$*$: パターン変換後の量 (第 2, 3, 4 章)

第2章 要素パターン変換法による軸対称体の形状最適化法

2.1 序言

本章では、設計応力あるいは体積（重量）、形状の一部などが設計条件によってあらかじめ規定される3次元軸対称体の強度的最適形状の決定問題を考える。荷重条件として静的外力による単一の負荷形式のみを対象とする。また強度設計の基準として“応力”をとり、弾性設計問題を考えると大きく次の2つの問題に分けられる。すなわち、

(i) 設計物体の体積（重量）を規定して、その発生最大応力あるいは応力集中係数等を最小化する形状の決定問題。

(ii) 設計物体の設計応力を規定して、その体積（重量）を最小とする形状の決定問題。

これらの問題は一見別々のようであるが、最終的に得られる形状は設計物体全域での応力変化のより少ないもの、いわゆる平等強さの形状により近いものとなることから、“任意の制約条件下にある物体の強度的最適形状とは、その制約条件を満たす許容形状のうち、平等強さの形状あるいはそれにより近い形状”と定義することができる。

図2.1に本設計問題の一般的な力学モデルを示す。すなわち、任意の静的外荷重 P （集中荷重）、 p （分布荷重）および設計条件に対応した変位拘束条件が与えられている設計物体 Ω を考えると、その境界は荷重、変位拘束条件および機能的な要求等を始めとする他の設計条件からあらかじめ形状が規定される境界 S_c と、強度的な観点からの形状決定の必要な設計境界 S_f とに分けることができる。したがって、本設計問題は後者の設計境界 S_f の形状を設計目的に従ってどのように決定するかという問題に帰着する。

しかし、この問題を離散化して数値計画法に従った最適化手法によって直接解くことは、大型の非線形問題となるため現状においては一般

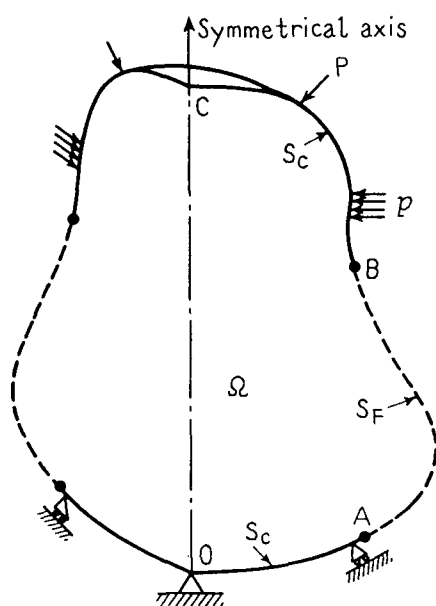


図2.1 軸対称体の設計モデル

に不可能である。それに対し尾田は、従来自動設計の分野において利用されてきた図2. 2に示すようなパターン発生システム《42》を有限要素法に組み込んだ“要素パターン変換法”と称する2次元問題における実用的な形状最適化手法を提案している《27》。その手法は、まず設計条件を満たす基本原形を設定し、有限要素法を用いた応力解析によりその形状の優劣を判定する。そして各有限要素自身の形状を1つのパターンとみなし、それら各要素に形状比例変換、いわゆるパターン変換を施して発生応力の改善を図る。このような境界形状修正操作を繰り返して実施して、次第に最適解へと近付ける試行法的手法である。

そこで本章では上記パターン変換法を3次元軸対称問題に拡張した場合の具体的手法を示し、有限要素法に組み込んだ場合の要素パターン変換法の理論的解釈を与える。さらに、要素パターン変換法による最適化の手順を示し、数値計算および実験によって手法の有効性を確認した結果について述べる。

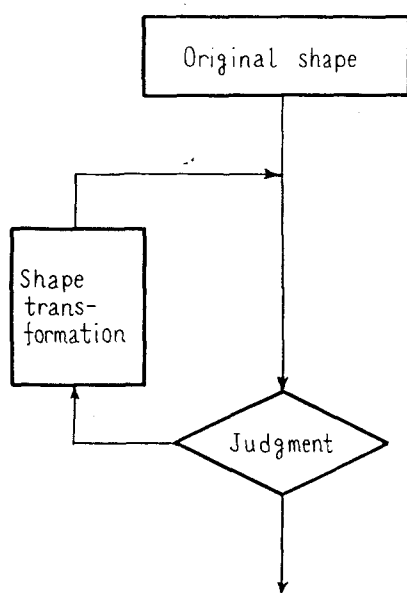


図2. 2 自動設計システムの基本型

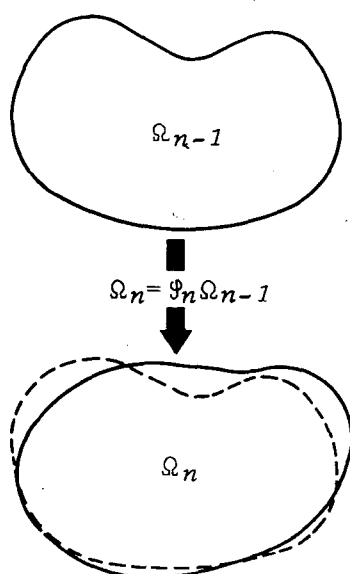


図2. 3 パターン変換

2. 2 要素パターン変換法

2. 2. 1 パターン変換法の内容

図2. 3に示すような任意の力学的な場に置かれた物体のパターン Ω_{n-1} に変換関数 φ_n を作用させることにより新しいパターン Ω_n が作られるならば

$$\Omega_n = \varphi_n \Omega_{n-1} \quad (2.1)$$

ここで φ_n は両パターン間を支配する力学的法則により決定する必要がある。すなわち、形状最適化過程に有限要素法を導入することを前提とすれば、各有限要素の形状をパターンとみなし、応力分布の均一化等を目的として各要素にパターン変換を実施することになる。このようなパターン変換法としてはTompsonの提唱している次のような基本的変換法が知られている〔43〕。

- (i) 比例変換 z 軸を対称軸とする円柱座標系を (r, θ, z) とすれば、軸対称体では直交座標のまま r または z 方向の尺度を比例的に伸縮させる変換。
- (ii) 対数変換 直交座標系から片対数または両対数座標系への変換。
- (iii) 斜交変換 直交座標系から斜交座標系への変換。
- (iv) 極座標変換 もとの座標系

上の特定の点を極とする放射状の
第2座標系への変換。

以上のほか各種の変換方法があり、また一般に自然界に現われる変換はそれらを組み合わせた複合変換であると言われている。

さて、尾田が2次元問題の場合に適用したと同様に、上記変換法のうち最も単純で力学的解釈も容易な(i)の比例変換法を利用することを考えよう。最適化の根本的手法として、有限要素法によって求まった各要素応力を直接基準の応力と比較して各要素形状の修正量を決定する、いわゆる構造設計における古典的な手法の1つである“応力比法”〔44〕に相当する手法を採用するとすれば、パターン変換と要素

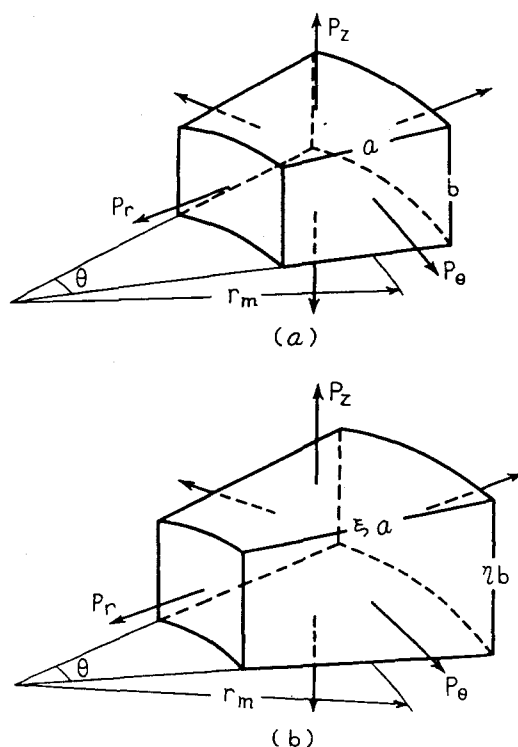


図2. 4 軸対称要素のパターン変換

応力変化との関係を明確にしておく必要がある。そこで図2. 4 (a) に示すような r - z 断面が $a \times b$, 円周角 θ , 重心半径 r_m の軸対称要素を例にとってパターン変換法の概念を明らかにする。荷重として r, z 軸方向に軸対称荷重 (表面力) P_r, P_z を受け, それらによって θ 方向に生ずる内力を P_θ とする。簡単のため r - z 面内のせん断力は作用しないものとする。すなわち, P_r, P_z, P_θ によって生ずる垂直応力は主応力に一致する。これは, 後述するように実際の物体にパターン変換を実施する場合主応力に注目してそれを実施するゆえ, 主応力場での応力値とパターン変換量の関係を明らかにしておけば十分であるからである。

さて, このとき要素に生ずる座標軸方向の垂直応力は, 荷重が各面に一様に作用するとして

$$\sigma_r = \frac{P_r}{b r_m \theta}, \quad \sigma_\theta = \frac{P_\theta}{ab}, \quad \sigma_z = \frac{P_z}{a r_m \theta} \quad (2.2)$$

となることは明らかである。今, 荷重条件としての P_r, P_θ, P_z を不変として, 式 (2. 2) の応力を変化させるために要素形状を比例変換に従い

$$\varphi = (a \rightarrow \xi a, b \rightarrow \eta b) \quad (2.3)$$

を用いて変換する。ここに ξ, η は変換係数とする。このようにすれば要素形状は図2. 4

(b) のように変化する。以後, パターン変換後の諸量に * 印を付して記すと, 変換後の要素応力は

$$\sigma_r^* = \frac{\sigma_r}{\eta}, \quad \sigma_\theta^* = \frac{\sigma_\theta}{\xi \eta}, \quad \sigma_z^* = \frac{\sigma_z}{\xi} \quad (2.4)$$

すなわち, 軸対称体は θ 方向に形状変更できないため, r - z 面内の2つの形状変換係数 ξ, η によって $\sigma_r, \sigma_\theta, \sigma_z$ の3つの応力成分の増減が規定されることになる。したがって3応力成分をそれぞれ独自に修正することはできないゆえ, 実際の設計においても2応力成分の増減を規定すると残りの応力成分の増減量は一意的に決定されることになる。

また式 (2. 3) による軸対称要素のパターン変換は主応力を対象とするものであり, したがってせん断応力は考慮されていないが, 目的とする応力の種類に応じて種々のパターン変換法を考案することも可能である。

以上述べたとおり, 一様な応力状態にある軸対称要素の応力の修正は, 目的とする応力軸と直角方向へ基準の目標応力との比に応じた形状比例変換を実施することによって可能である。次にこれを有限要素法に利用することを考える。

2. 2. 2 有限要素法の応用

有限要素法によって応力解析を実施するため、図2. 1の設計物体 Ω を図2. 5に示すように定ひずみ3角形断面のリング要素に分割する。そして設計境界 S_F を構成する要素群からなる領域を設計領域 Ω_F と定義し、 Ω_F 域の要素群に対してパターン変換を実施して形状修正操作を行なうものとする。このとき任意の要素 j (ここで3節点を1, 2, 3とする) の応力 $\sigma_j = (\sigma_r, \sigma_\theta, \sigma_z, \tau_{rz})_j^T$ は節点変位 $d_j = (d_{r1}, d_{z1}, d_{r2}, d_{z2}, d_{r3}, d_{z3})_j^T$ を用いて次式で表わされることは周知のところである【45】。

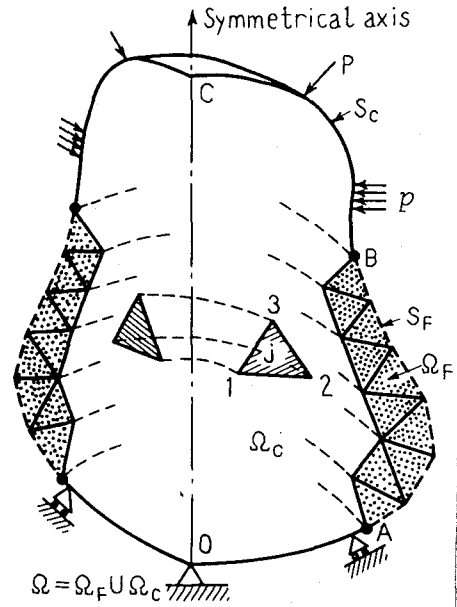


図2. 5 設計モデルの要素分割

$$\sigma_j = D B_j d_j \quad (2.5)$$

ここに Ω の縦弾性係数, ポアソン比を E, ν とすると

$$D = \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1 & \chi_1 & \chi_1 & 0 \\ \chi_1 & 1 & \chi_1 & 0 \\ \chi_1 & \chi_1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \chi_2 \end{bmatrix}, \quad (2.6)$$

$$\chi_1 = \frac{\nu}{1-\nu}, \quad \chi_2 = \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)}$$

であり、一方 B_j はリング要素の3節点の座標値 (r_i, z_i) ($i=1, 2, 3$) から決定されるひずみマトリックスと呼ばれるものであり、次式で与えられる。

$$B_j = (B_1, B_2, B_3)_j \quad (2.7.a)$$

ここに、要素断面積を A_j として

$$B_i = \frac{1}{2A_j} \begin{bmatrix} b_i & 0 \\ a_i/r + b_i + c_i z/r & 0 \\ 0 & c_i \\ c_i & b_i \end{bmatrix} \quad (i=1, 2, 3) \quad (2.7.b)$$

なお, $a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3$ および c_1, c_2, c_3 は3節点の座標値を用いて次式で与えられる.

$$\left. \begin{aligned} a_1 &= r_2 z_3 - r_3 z_2, a_2 = r_3 z_1 - r_1 z_3, a_3 = r_1 z_2 - r_2 z_1, \\ b_1 &= z_2 - z_3, b_2 = z_3 - z_1, b_3 = z_1 - z_2, \\ c_1 &= r_3 - r_2, c_2 = r_1 - r_3, c_3 = r_2 - r_1. \end{aligned} \right\} \quad (2.7.c)$$

さらに, 以後パターン変換法に関する理論展開における取り扱いを容易とするため, リング要素の3角形断面の重心座標を (r_m, z_m) として式 (2. 7. b) を次式で近似する.

$$B_i = \frac{1}{2A_j} \begin{bmatrix} b_i & 0 \\ a_i/r_m + b_i + c_i z_m/r_m & 0 \\ 0 & c_i \\ c_i & b_i \end{bmatrix} \quad (i=1, 2, 3) \quad (2.7.d)$$

一方, 要素の節点力を $P_j = (P_{r1}, P_{z1}, P_{r2}, P_{z2}, P_{r3}, P_{z3})_j^T$ とすると要素の剛性方程式は

$$P_j = K_j d_j \quad (2.8)$$

ここに K_j は要素の剛性マトリックスであり,

$$K_j = 2\pi r_m A_j B_j^T D B_j \quad (2.9)$$

で与えられる. そこで式 (2. 5), (2. 9) を式 (2. 8) に代入すると次のような節点力と応力の関係式が得られる.

$$P_j = 2\pi r_m A_j B_j^T \sigma_j \quad (2.10)$$

さて, 要素応力の修正を目的とする強度的パターン変換法として

$$\varphi = (r \rightarrow \xi r, z \rightarrow \eta z) \quad (2.11)$$

なる要素重心を原点とした比例変換を適用し、 Ω_F 域のリング要素の3角形断面の形状を変化させることにする。まず、パターン変換後のひずみマトリックス B_j^* は要素面積が $\xi \eta A_j$ となることを考慮して、式 (2. 7) より

$$B_j^* = (B_1^*, B_2^*, B_3^*)_j \quad (2.12.a)$$

ここに

$$B_i^* = \frac{1}{2\xi\eta A_j} \begin{bmatrix} \eta b_i & 0 \\ \xi\eta(a_i/r_m + b_i + c_i z_m/r_m) & 0 \\ 0 & \xi c_i \\ \xi c_i & \eta b_i \end{bmatrix} \quad (i=1, 2, 3) \quad (2.12.b)$$

よって節点力と応力の関係式は式 (2. 10) より、

$$P_j^* = 2\pi\xi\eta r_m A_j B_j^{*T} \sigma_j^* \quad (2.13)$$

今、設計条件によって与えられる外力条件は一般に不変であるから要素の等価節点外力に関して

$$P_j = P_j^* \quad (2.14)$$

が成立する程度の範囲 (節点力の変化に関しては付録 I 参照) にその要素の形状変化を限定してパターン変換を実施するとすれば、式 (2. 10) と式 (2. 13) を等置して

$$\xi\eta B_j^{*T} \sigma_j^* = B_j^T \sigma_j \quad (2.15)$$

上式に前方より B_j を掛けて σ_j^* について解くと

$$\sigma_j^* = \frac{1}{\xi\eta} (B_j B_j^{*T})^{-1} B_j B_j^T \sigma_j \quad (2.16)$$

そこで式 (2. 7), (2. 12) を用いて上式を具体的に計算する。まず $B_j B_j^{*T}$ を求めると

$$B_j B_j^{*T} = \frac{1}{4\xi\eta A_j^2} \times$$

$$\begin{bmatrix} \eta S_{zz} & \xi \eta S_{\theta z} & 0 & \xi S_{rz} \\ \eta S_{\theta z} & \xi \eta S_{\theta\theta} & 0 & \xi S_{r\theta} \\ 0 & 0 & \xi S_{rr} & \eta S_{rz} \\ \eta S_{rz} & \xi \eta S_{r\theta} & \xi S_{rz} & \xi S_{rr} + \eta S_{zz} \end{bmatrix} \quad (2.17.a)$$

ここに

$$\left. \begin{aligned} S_{rr} &= \sum_{i=1}^3 c_i^2, & S_{\theta\theta} &= \sum_{i=1}^3 \left(\frac{a_i}{r_m} + b_i + \frac{c_i z_m}{r_m} \right)^2, \\ S_{zz} &= \sum_{i=1}^3 b_i^2, & S_{r\theta} &= \sum_{i=1}^3 c_i \left(\frac{a_i}{r_m} + b_i + \frac{c_i z_m}{r_m} \right), \\ S_{\theta z} &= \sum_{i=1}^3 b_i \left(\frac{a_i}{r_m} + b_i + \frac{c_i z_m}{r_m} \right), & S_{rz} &= \sum_{i=1}^3 b_i c_i. \end{aligned} \right\} \quad (2.17.b)$$

また $B_j B_j^T$ は式 (2.17. a) の右辺に $\xi=\eta=1$ を代入した表示に等しい。さて上式 (2.17. a) の行列は、3 節点が 3 角形を構成することおよび $\xi>0, \eta>0$ であることから常に正則であるゆえ、その逆行列が計算可能である。式 (2.17. a) の逆行列を式 (2.16) に代入し、整理すると

$$\sigma_j^* = \begin{bmatrix} 1/\eta & 0 & 0 & \lambda_1/\eta\lambda_0 \\ 0 & 1/\xi\eta & 0 & \lambda_2/\xi\eta\lambda_0 \\ 0 & 0 & 1/\xi & \lambda_3/\xi\lambda_0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_4/\lambda_0 \end{bmatrix} \sigma_j \quad (2.18.a)$$

ここに

$$\left. \begin{aligned} \lambda_0 &= \xi S_{rr} (S_{rr} S_{\theta\theta} S_{zz} - S_{rr} S_{\theta z}^2 - S_{\theta\theta} S_{rz}^2 - S_{zz} S_{r\theta}^2 \\ &\quad + 2 S_{r\theta} S_{\theta z} S_{rz}) + \eta (S_{rr} S_{zz} - S_{rz}^2) (S_{\theta\theta} S_{zz} - S_{\theta z}^2), \\ \lambda_1 &= (\eta - \xi) (S_{rr} S_{zz} - S_{rz}^2) (S_{\theta\theta} S_{rz} - S_{r\theta} S_{\theta z}), \\ \lambda_2 &= (\eta - \xi) (S_{rr} S_{zz} - S_{rz}^2) (S_{zz} S_{r\theta} - S_{\theta z} S_{rz}), \\ \lambda_3 &= (\xi - \eta) S_{rz} (S_{rr} S_{\theta\theta} S_{zz} - S_{rr} S_{\theta z}^2 - S_{\theta\theta} S_{rz}^2) \end{aligned} \right\} \quad (2.18.b)$$

$$\begin{aligned} & -S_{zz}S_{r\theta}^2 + 2S_{r\theta}S_{\theta z}S_{rz} \Big), \\ \lambda_4 = & S_{rr}(S_{rr}S_{\theta\theta}S_{zz} - S_{rr}S_{\theta z}^2 - S_{\theta\theta}S_{rz}^2 - S_{zz}S_{r\theta}^2 \\ & + 2S_{r\theta}S_{\theta z}S_{rz}) + (S_{rr}S_{zz} - S_{rz}^2)(S_{\theta\theta}S_{zz} - S_{\theta z}^2) \Big). \end{aligned}$$

すなわち，上式（2. 18）よりせん断応力 τ_{rz} の影響は複雑ではあるが，座標変換によって主応力方向のパターン変換を考えれば $\tau_{rz}=0$ となり，式（2. 18）は式（2. 4）と全く同じ結果を与える。

以上より，有限要素にパターン変換を実施した場合も前節の軸対称要素で考察したと同様に，目的とする応力軸と直角方向に応力比に応じた比例変換を実施することによって要素応力の修正が基本的に可能である。ただし，それは式（2. 14）が成立する範囲の形状修正に対して保証されるものであり，この観点からは1回の操作による形状修正量を小さく押える必要がある。

2. 3 最適化の手順と計算手法

2. 3. 1 設計基準応力の設定

2. 1 節に述べたように本章の強度設計の目的は，応力基準の設計によって平等強さに最も近い物体形状を決定することにあるが，強度の優劣の判定に用いる基準としてどのような種類の応力を採用すべきかを考える必要がある。それは設計対象としての物体材料の性質に左右されるが，本章では弾性設計を対象としているゆえ多軸応力場での種々の弾性破損の条件式としての次式

$$f(\sigma_r, \sigma_\theta, \sigma_z, \tau_{rz}) = 0 \quad (2.19)$$

から与えられる相当応力 $\bar{\sigma}$ を用いることにすれば，有限要素法を利用して各要素の相当応力 $\bar{\sigma}_j$ を容易に得ることができる。

さて，上述のようにして得られた Ω_F 域の各要素の相当応力 $\bar{\sigma}_j$ を設計基準応力 σ_a と比較することにより，それら要素群の相当応力の基準応力に対する偏差を定量的に判定できることになる。この設計基準応力 σ_a は2. 1 節に述べた（i）体積（重量）一定の設計と（ii）設計応力一定の設計では，その設定方法が異なってくる。すなわち，（ii）設計応力一定の設計問題では物体材料の強度から与えられる設計応力を直接 σ_a として用いることができる。それ

に対し、(1) 体積一定の設計問題では設定する σ_a の値に依存して各要素のパターン変換量が異なり、それに伴って物体全体の体積が変動する。したがって体積を一定に保つ基準応力 σ_a を一意的に決定する必要があるが、一般に体積と σ_a は非線形関係にあるのでこれを次のような数値的求根法〔46〕を用いて近似的に解決する。

まず設計物体 Ω は、形状不変の領域 Ω_C と可変の領域 Ω_F からなるゆえ、体積一定の条件は形状修正を実施する Ω_F 域のみが満足すればよい。すなわち、 Ω_F 域の体積を $\bar{V}$ とし、これが σ_a の関数で与えられることを考慮し、

$$\bar{V}(\sigma_a) = \bar{V}_0 \quad (2.20)$$

を満たす σ_a を求めればよい。ここに $\bar{V}_0$ は設計条件としてあらかじめ規定される Ω_F 域の体積である。この場合、パターン変換法の1ステップでは $\bar{V}$ は σ_a に対して一般に図2.6に示すような非線形の減少関数であるが、基準応力の参照値 σ_{a1} として式(2.20)を近似的に満たすと期待できる値、たとえば Ω_F 域全要素の相当応力 $\bar{\sigma}_j$ の平均値

$$\sigma_{a1} = \sum_j \frac{\bar{\sigma}_j v_j}{\bar{V}_0} \quad (2.21)$$

などを採用し、そのときの体積 $\bar{V}_1$ を求める。ここに v_j は三角形リング要素 j の体積を表す。次に σ_{a1} と少し異なる基準応力の参照値 σ_{a2} (たとえば $0.9\sigma_{a1}$) を設定し、これに対応する体積 $\bar{V}_2$ を求める。そして $\bar{V}_1 \geq \bar{V}_0 \geq \bar{V}_2$ を満たせば、図2.6の破線のような線形関数で近似し、次式によって σ_a を求める。

$$\sigma_a = \sigma_{a1} + \frac{\bar{V}_0 - \bar{V}_1}{\bar{V}_2 - \bar{V}_1} (\sigma_{a2} - \sigma_{a1}) \quad (2.22)$$

一般に σ_a は式(2.21)で与えられる σ_{a1} の近傍に存在し、1~2回の操作で $\bar{V}_1 \geq \bar{V}_0 \geq \bar{V}_2$ を満たす σ_{a1}, σ_{a2} を見出すことができる。また体積一定の条件を厳密に要求しないときや、あるいは速く最適形状に近づくことが予測される場合、式(2.21)の σ_{a1} を σ_a と

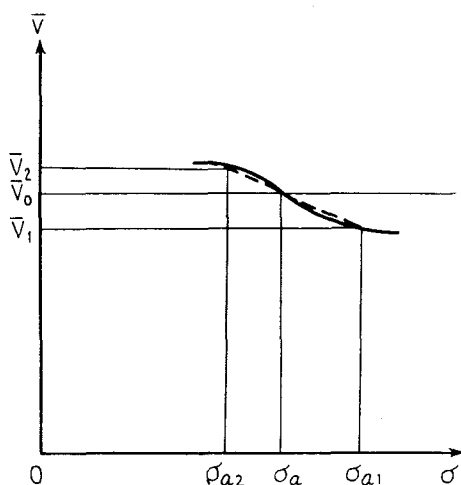


図2.6 基準応力 σ_a の決定法

して処理しても形状修正操作を繰り返すため誤差は少ない。

2. 3. 2 節点移動ベクトルの決定

2. 3. 1 項に述べた手法により Ω_F 域の3角形リング要素に対する設計基準応力 σ_a を設定し、これと各要素の相当応力 $\bar{\sigma}_j$ との比をとって式 (2. 4) の関係を考慮してパターン変換係数 ξ, η を決定できる。そして要素断面の重心を原点とする比例変換を実施し、新しい節点座標を計算する。すなわち、任意の要素の形状をある応力軸方向に ξ, η 倍するとき、このパターン変換軸の r, z 軸へ方向余弦を $(l, m), (-m, l)$ として変換後の節点座標 (r_i^*, z_i^*) ($i=1, 2, 3$) は、

$$\left. \begin{aligned} r_i^* &= (\eta l^2 + \xi m^2)(r_i - r_m) + (\eta - \xi)lm(z_i - z_m) + r_m, \\ z_i^* &= (\eta - \xi)lm(r_i - r_m) + (\eta m^2 + \xi l^2)(z_i - z_m) + z_m. \end{aligned} \right\} \quad (2.23)$$

で与えられる。またこのとき要素の断面積は $\xi\eta A_j$ に変化する。以上は Ω_F

域の各要素ごとに単独のパターン変換を実施した場合であるが、実用上は効率などの点から Ω_F 域の全要素に対して同時にパターン変換を実施する手法をとることが有利である。その場合 Ω_F 域内の要素群であってもお互いに拘束しあって、実際の節点移動量は式 (2. 23) に規定したものとはならない。したがって応力変化も式 (2. 4) に示したものとはならないが、パターン変換によって計算される方向に設計境界 S_F 上の構成節点群を移動して物体形状を修正するならば、それに近づくことは保証される。

さて次に要素自身のパターン変換から規定される形状修正量を、具体的な節点移動ベクトル量 δx_i と関係付けることを考えよう。すなわち、図 2. 7 に示すように要素 j が形状変更することは、各節点がベクトル b_{ji} ($i=1, 2, 3$) に従って移動することと考えられるから、

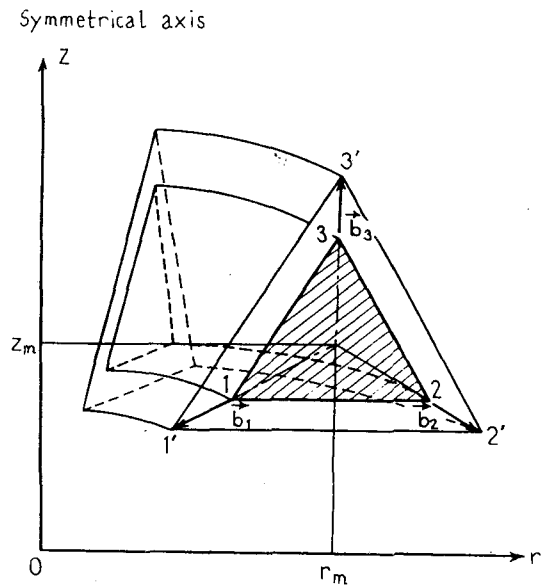


図 2. 7 パターン変換量のベクトル表示

今、節点 i が k 個の要素に囲まれているとすれば、移動ベクトル量 δx_i をその平均値

$$\delta x_i = \frac{1}{k} \sum_{j=1}^k b_{ji} \quad (2.24)$$

で与える。この移動ベクトル量に従って図 2. 8 に示すように S_F 上のすべての節点が移動するとき、 Ω_0 からより設計目的に近い新しいパターン Ω_1 が得られる。なお、式 (2. 24) による節点移動ベクトル量は Ω_F 域を構成する全ての節点について計算できるが、図 2. 8 に示すように形状修正に直接関与しない内部節点については計算効率と要素分割の悪化防止の観点から節点位置の修正操作は実施しないものとする。

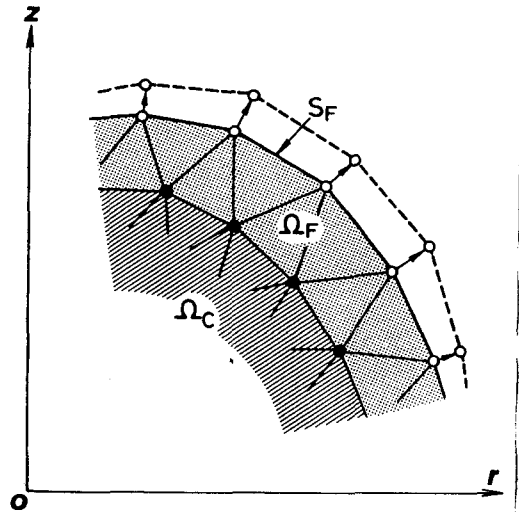


図 2. 8 節点移動ベクトルによる形状修正

2. 3. 3 設計手順

図 2. 2 の自動設計過程に以上述べてきた手法を取り入れると、図 2.

9 に示すような最適形状決定システムが提案できる。すなわち、

- (i) 設計条件を満たす基本原形を設定する。
- (ii) 解析モデルを要素分割する。
- (iii) 有限要素法によって応力場を計算し、各要素の相当応力 $\bar{\sigma}_j$ を求める。
- (iv) パターン変換に用いる基準応力 σ_a を設定する。
- (v) 各要素の相当応力 $\bar{\sigma}_j$ と基準応力 σ_a との比に応

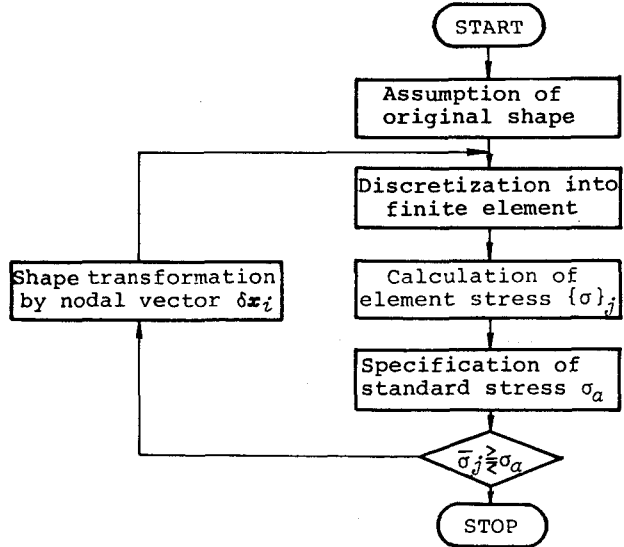


図 2. 9 形状最適化手順

じてパターン変換を実施して、 S_F 境界構成節点の移動ベクトル量 δx_i を求め、形状を修正する。

以上の操作のうち (II) ~ (V) あるいは (III) ~ (V) を判定条件が満足されるまで繰り返し実施すれば、最終的に強度的に最適な形状を決定することができる。

2. 3. 4 数値計算上の注意事項

図 2. 9 に示した形状最適化過程で特に数値計算上注意すべき事項について以下に述べる。

(1) 基本原形の設定 荷重、変位拘束条件および重量などの設計制約条件を満たす任意の形状を設定することが可能であるが、これには応力集中の発生を極力避けるなどの工学的センスと経験が重要であり、その設定した原形によっては同一の最適解に到達するまでに非常に計算時間がかかることがあるので注意を要する。特に後述の数値例でも示すように、あらかじめ応力集中の発生が予想される角を持った基本原形の設定をできるだけ避けることが望ましい。

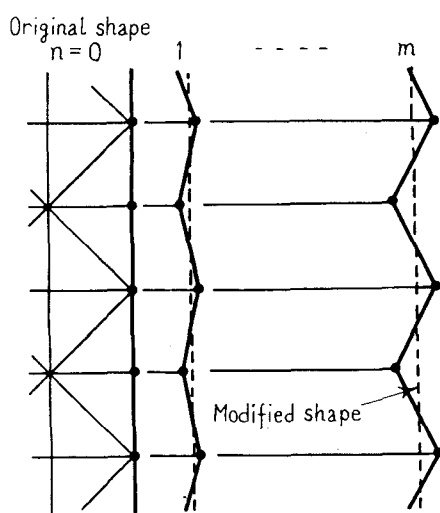


図 2. 10 形状の凹凸

(2) 要素分割 基本原形に適当な要素分割をすれば、その後は各繰り返し過程に伴って自動的に節点座標は決定されるが、何回かの形状修正操作の後、非常に寸法の大きい要素と逆に小さい要素やゆがんだ要素が生じ、それが有限要素法による解析精度を低下させる。これを避けるため、 Ω_F 域の要素に対してあらかじめ許容しうる最大要素断面積 A_{max} と最小要素断面積 A_{min} を与え、

$$A_{min} \leq A_j \leq A_{max} \quad (2.25)$$

を満足しなくなった時点で繰り返し計算を停止し、要素の再分割を実施する。なお形状の最適化を効率的に進めるため、初期の繰り返し過程では要素分割を粗くし、再分割の度に徐々に細かくして最終的にはより精密な最適形状を得ることが肝要である。

(3) 収束判定 設計目的が平等強さに最も近い形状を得ることにあるから、各過程での相当応力の最大、最小応力比 $\bar{\sigma}_{max}/\bar{\sigma}_{min}$ の値を求め、これが 1 あるいはそれに最も近い

た時点での形状を最終形状とすれば良い。

(4) 修正形状の平滑化

式(2.24)に従って節点が移動し新しい形状を求めるとき、有限要素法自身が近似解法であるために要素分割などに起因して生ずる応力分布の不連続性から、新しい形状自身が

図2.10に示すように滑

らかなものとはならないこ

とがある。したがって何回かの繰り返し後、これらの誤差が累積しこの刃状の境界が得られることになる。このような現象を防止するため特に次のような点を考慮しておくことが必要である。

- (i) 要素分割において、 S_F 上の節点についてはあらかじめその点に集まる要素数をほぼ一致するように注意する(図2.11参照)。
- (ii) 各繰り返しごとに、図2.12に示すように要素分割方法を改め、誤差を打ち消すようにする。
- (iii) 形状修正後の S_F 境界構成節点群を図2.10の破線で示すように連続した曲線で近似する。このためには最小二乗法を始めとする各種のフェアリング法〔47〕を応用すべきである。

なお、以上のうちのいずれの方法を採用しても、きわめて有効であることを後述の数値計算例で示す。

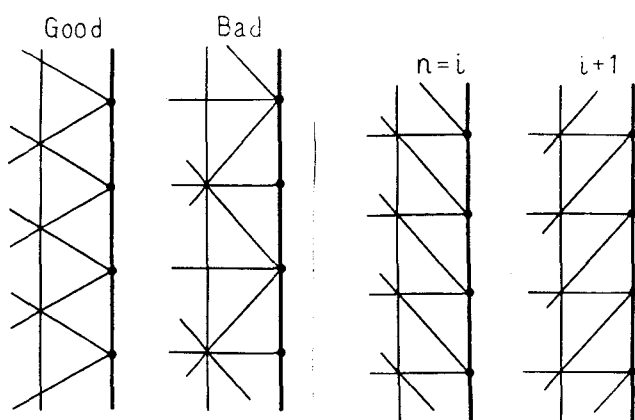


図2.11 境界近傍の要素分割の良悪

図2.12 各ステップごとに要素分割を改める方法

2.4 設計例と考察

2.4.1 厚肉圧力容器

前節までに述べた最適形状決定手法の有効性を確認するために、工学上重要な厚肉圧力容器に対し実施した解析結果を次に示す。なお、設計基準応力 σ_a は弾性破損の代表的な条件の1

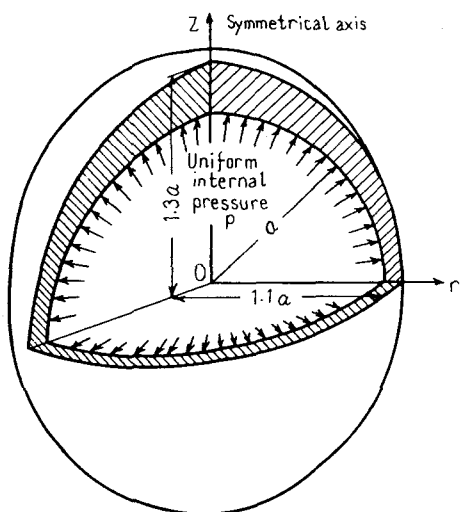


図2. 13 不等厚球原形モデル

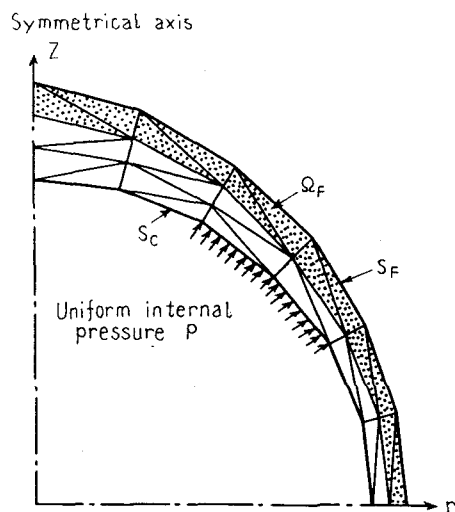


図2. 14 基本原形の要素分割

つとして知られる最大主応力説より決定した。また以後の圧力容器の解析結果の表示に用いる σ_R, σ_s はすべて $r-z$ 面内の肉厚方向および子午線方向の主応力を表わす。

(1) 不等厚球 まず本手法の妥当性、とりわけ最適解への収束性を検討するために、

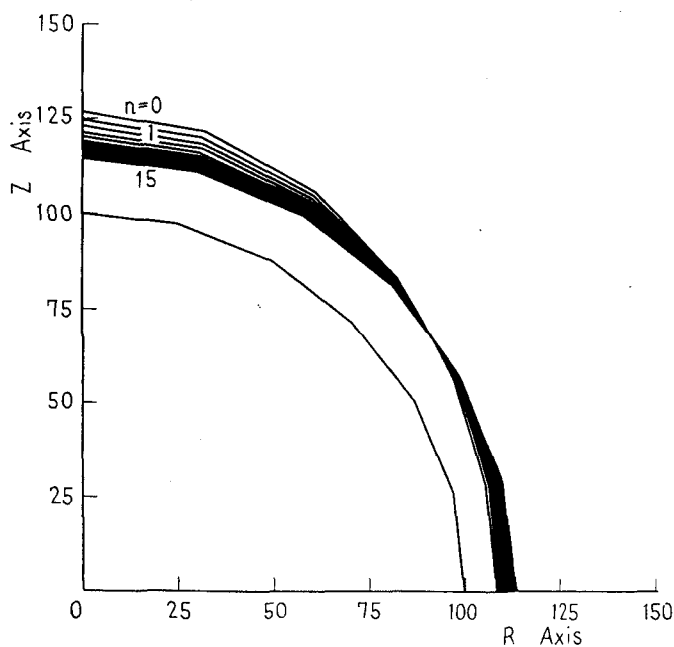


図2. 15 形状変化過程

最適解の既知なモデルに対し解析を実施した。すなわち、原形モデルとして図2. 13に示すような内面が半径 a の球、外面が長短軸 $2.6a, 2.2a$ の回転だ円体の不等厚々肉球に一樣内圧 p が作用するモデルを取り上げ、体積一定の条件下での最適形状の決定を試みた。周知のとおり、これの最適形状は等厚の厚肉球となる。さて解析は対称性のため $1/2$ 領域のみをとり、図2. 14に示す要素

分割を用いて実施した。設計条件として一様内圧 p および球内面の形状を S_C として規定し、球外面を設計境界 S_F として図 2. 14 に示すように設計領域 Ω_F をとり、 Ω の体積を一定として応力分布の均一化を図った。この原形パターンではモデル内の各点で子午線応力 σ_s が最大主応力となるため、主応力方向のパターン変換法によって σ_s 分布の均一化を行なった。またこのとき式 (2. 4) の関係から σ_θ は自動的に均一化される。なお、計算の各ステップでの基準応力 σ_a を式 (2. 2. 1) によって設定した。

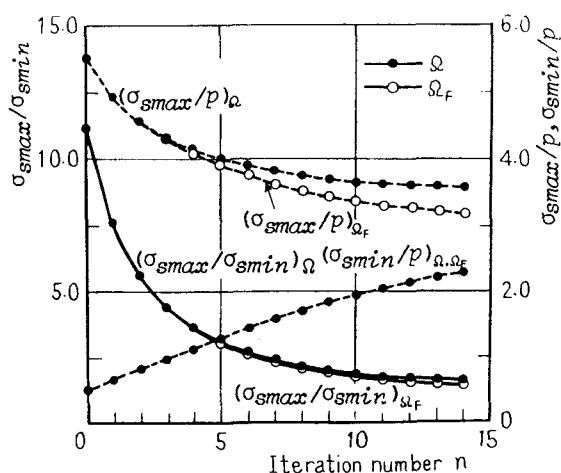


図 2. 16 Ω, Ω_F 域の $\sigma_{smax}/\sigma_{smin}$ の変化

図 2. 15 は繰り返し数 $n=15$ 回までのパターン変化過程を図形出力したものである。こ

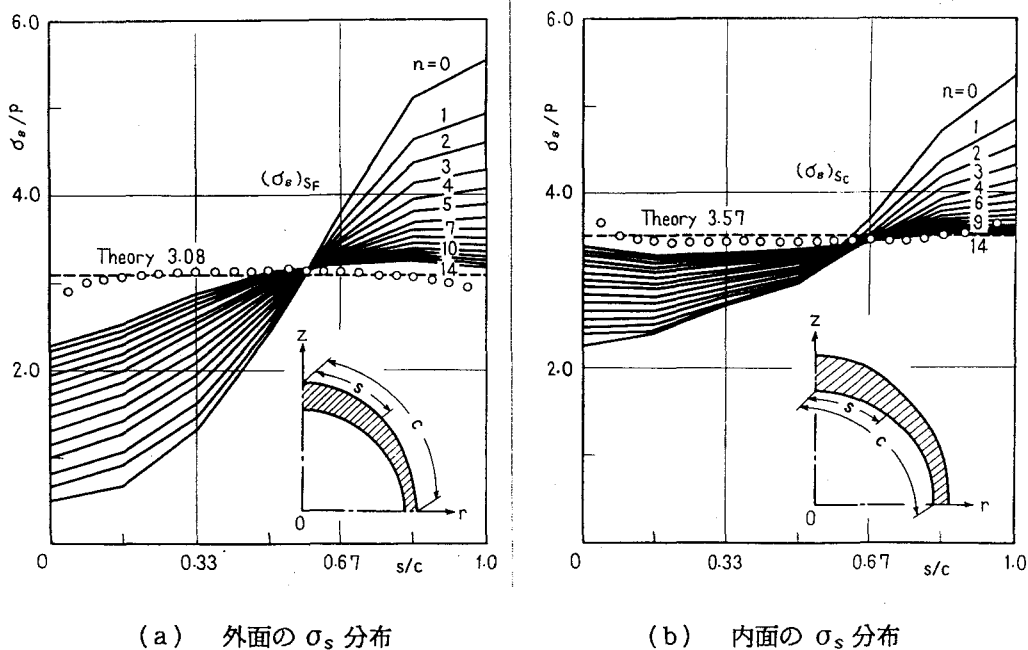


図 2. 17 内外面の σ_s 分布の変化

ここで原形パターンの球外面と r - z 面の交線が円であり、最適解のそれが円形であることから各ステップでパターン変換後の S_F 境界を形成する節点群を円にて最小二乗近似し、その平滑化を図った。こうして得られた $n=15$ のパターンは長短径比が 1.007 ($n=0$ で 1.182) と最適解である球にきわめて近いものとなり、かつ体積変化も $V_{n=15}/V_0=0.979$ と

ほとんど一定の条件を保っている。また図 2. 16 はモデル全域および Ω_F 域での主応力 σ_s

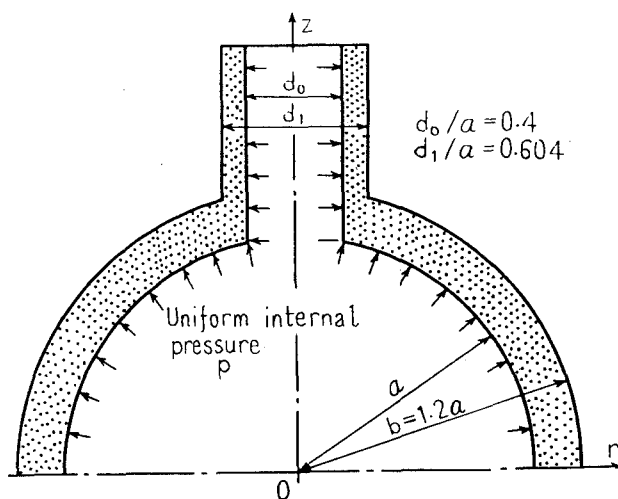


図 2. 18 ノズル付き球原形モデル

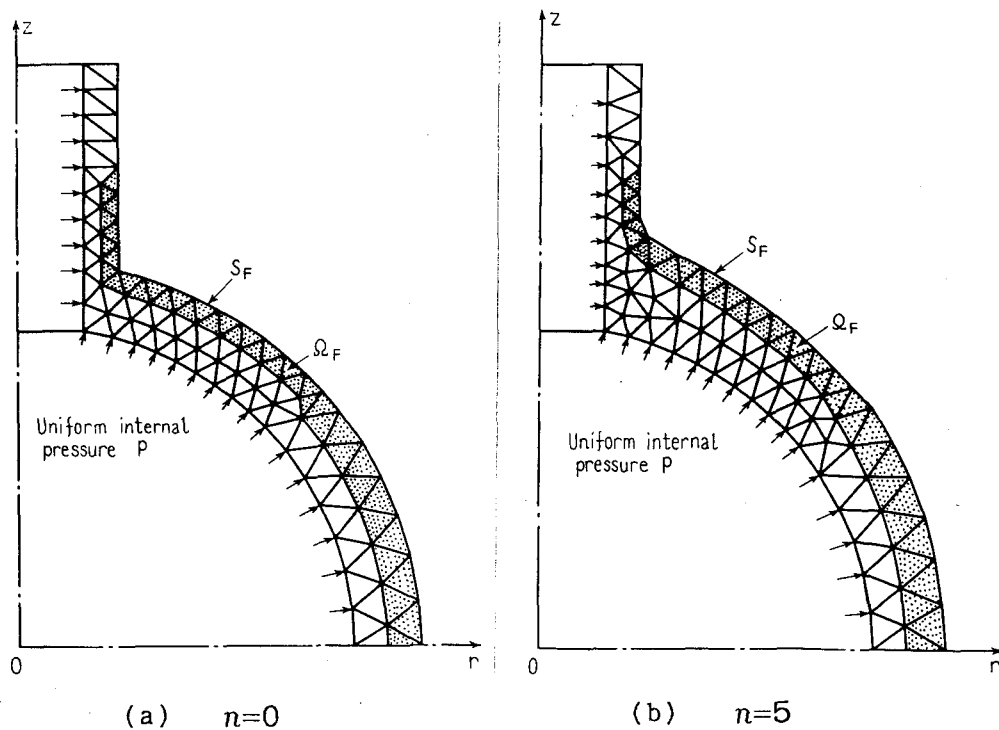


図 2. 19 要素分割

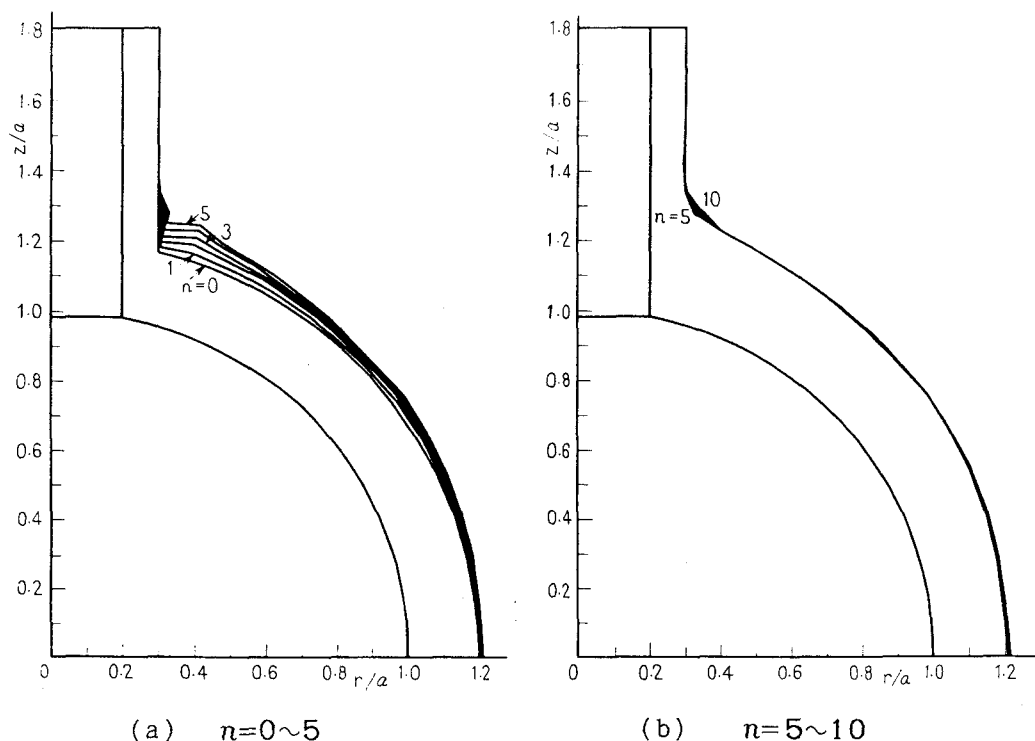


図2. 20 形状変化過程

の最大値 σ_{smax} 、最小値 σ_{smin} およびその比 $\sigma_{smax}/\sigma_{smin}$ が形状変化に伴って変化する様子を
示したものである。同図より15回の繰返しで Ω および Ω_F 域での応力 σ_s が着実に均
一化されることがわかる。このことは図2. 17の σ_s 分布の変化過程を示した結果からも明
らかであるが、 $n=14$ の解は理論値からやや離れている。これは要素分割の影響であって、
最終形状に対し肉厚方向に2分割、円周方向に24分割（75節点、96要素）して得られた
図中の○印の値は理論値とよく一致していることが明らかで、以後の数値例での要素分割にこ
の点を考慮している。以上の結果より $n=15$ のパターンはほぼ最適なものと言え、本章で提
示した軸対称体の最適形状決定手法の解への収束性およびその有効性が確認された。

(2) ノズル付き球 次に実用上も重要な問題に対する本手法の適用例の1つとして、
図2. 18に示すようなノズル付き厚肉球に一様内圧 p が作用する場合の最適形状を求めた。
同図中に示す値 $b/a=1.2$ 、 $d_1/d_0=1.5$ は、周知の圧力容器の応力計算式よりノズル部
内面と球部内面の接線応力 σ_θ が等しくなるように設定したものである。この基本原形におい
て σ_θ はノズル付け根部で激しい応力集中を生じ、全域で $\sigma_\theta > \sigma_s$ であることより σ_θ に特に
注目し、図2. 19 (a) に示すように Ω_F 域をとり、応力集中部の応力の均一化を図った。

なお設計応力を一定とし、その値として基本原形におけるノズル部外周と球部外周の圧力容器の式から得られる σ_θ の平均値 $\sigma_a = 1.81p$ を採用した。

図2. 20 (a), (b) は各々 $n=0 \sim 5, 5 \sim 10$ までの形状変化過程を示したものであるが、途中 $n=4$ 回までは図2. 19 (a) の要素分割を用い、一方それ以後は要素形状が解析精度保持のためにあらかじめ設定しておいた条件式 (2. 25) を満足しなくなったので、

図2. 19 (b) の要素分割に改めて $n=5 \sim 9$ まで計算を実施した。ただし、 A_{max}, A_{min} をそれぞれ Ω_F 域の最大要素断面積の2倍、最小要素断面積の $1/2$ にとった。また要素再分割の際にノズル付け根部形状の平滑化を図った。図2. 21 は各繰り返し過程での応力比 $\sigma_{\theta max}/\sigma_{\theta min}$ などの変化を示すが、 $n=9$ のパターンまでで応力比がほぼ一定となったので、ここで繰り返し計算を停止した。図2. 20 (b) より最適形状はノズル付け根部

がかなり丸みをおびた形状となっており、その曲率半径は約 $0.36d_1$ である。また図2. 21 より Ω, Ω_F 域での応力比の値は、 $4.16 \rightarrow 2.56, 2.54 \rightarrow 1.26$ にそれぞれ減少し、応力分布が均一化されたことは明らかである。このことは主応力 σ_θ の内外表面での分布の変化過程を示した図2. 22 から明らかで、特にノズル付け根付近外面の応力値が急激に減少し均一化され、一方形状変化の影響を直接受けない内面における値も外

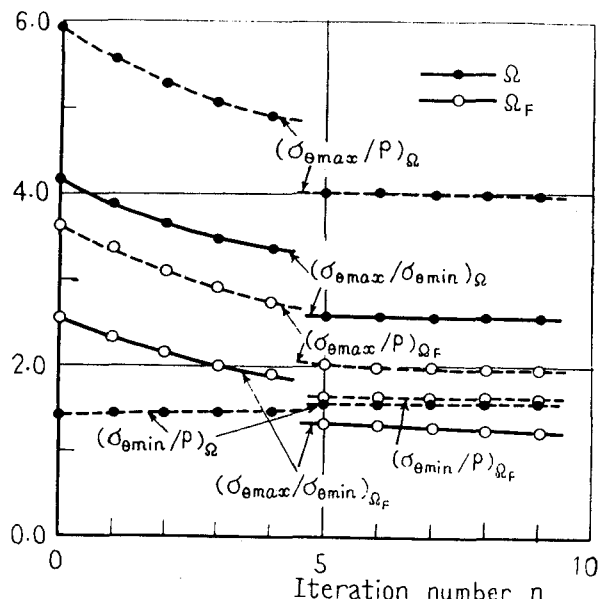


図2. 21 Ω, Ω_F 域の $\sigma_{\theta max}/\sigma_{\theta min}$ の変化

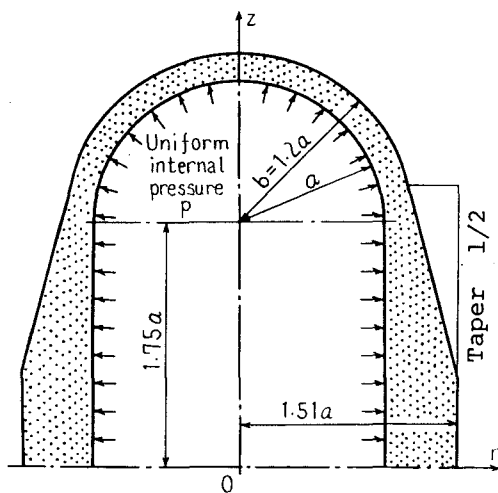
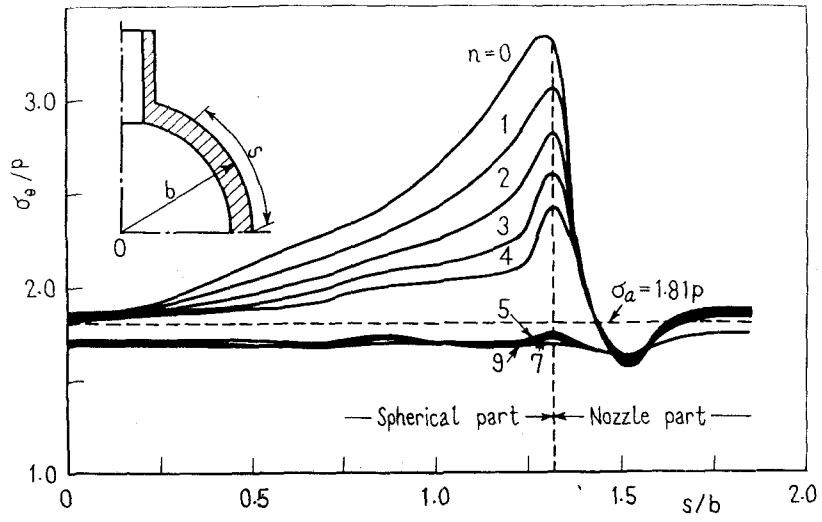
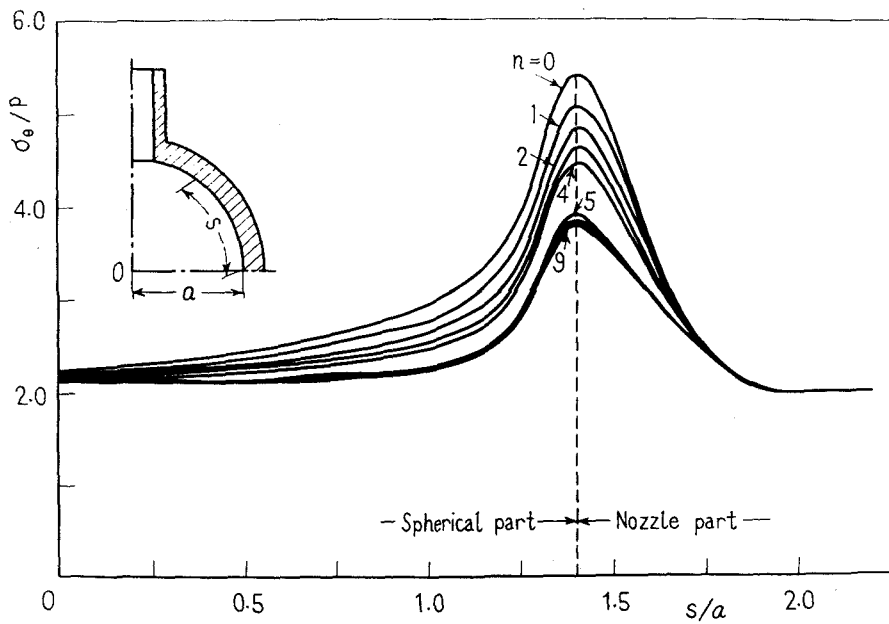


図2. 23 半球形鏡板付き円筒原形モデル



(a) 外面の σ_θ 分布



(b) 内面の σ_θ 分布

図2. 22 内外面の σ_θ 分布の変化

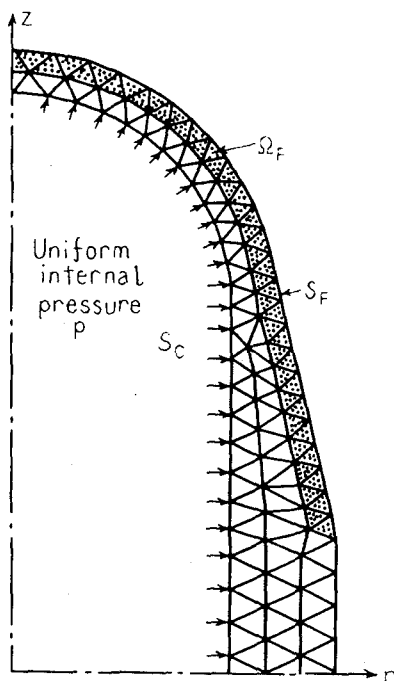


図 2. 2 4 要素分割

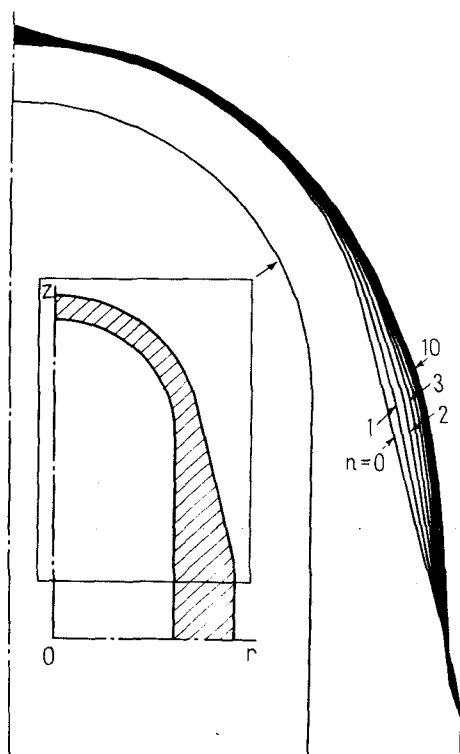


図 2. 2 5 形状変化過程

面に比較して緩慢ではあるが均一化の傾向を示している。

(3) 半球形鏡板付き円筒 次に本手法の有効性を確認するもう 1 つの圧力容器の例題として、図 2. 2 3 に示すような寸法比の半球形鏡板付き円筒の鏡板と円筒部との接続部の形状決定を試みた。すなわち、半球部および円筒部内径を $2a$ とするとき、半球部外径を $2b = 2.4a$ 、円筒部外径を $3.02a$ 、鏡板と円筒の接続部外面を $1/2$ テーパの原形パターンとした。図 2. 2 4 に示す要素分割を採用し、鏡板部およびテーパ部を設計境界 S_F とし、同図に示すように Ω_F 域をとった。さて、 σ_θ, σ_s とともに半球と円筒の接続部に応力集中を生じ、 $\sigma_\theta > \sigma_s$ であることより σ_θ に注目して形状変換係数を決定し、 σ_θ, σ_s を均一化する主応力方向のパターン変換を採用した。また設計応力を一定とし、その値として前例題同様外周の円筒、半球部の σ_θ の平均値 $\sigma_a = 1.81p$ を採用した。

図 2. 2 5 は繰り返し数 $n=10$ 回までの形状変化過程を図形出力したものである。これによると接続部の形状が原形のテーパ状から、かなり曲線的に膨張変化している。一方、図 2. 2 6 には Ω, Ω_F 域での $\sigma_{\theta\max}, \sigma_{\theta\min}$ およびその比の繰り返し数による変化過程を、また

図2. 27には内外面の σ_θ 分布の変化過程を示した。これらの図より、 σ_θ 分布が着実に均一化され、接続部の応力集中が緩和されて、 $n=9$ のパターンでは S_F 境界ではほぼ完全に σ_θ 分布が一様となり、 $n=10$ の形状が $(\sigma_{\theta\max}/\sigma_{\theta\min})_{\Omega_F}$ 最小という意味での最適形状と言うことができよう。

2. 4. 2 管フランジ

次にきわめて実用的な設計問題として、管フランジの強度的最適形状の決定を試みた結果について示す。

(1) 従来の研究動向とJIS

規格の問題点

現在JISでは中低圧用（63 kg/cm²以下）の管フランジについてB2201~2217-1963に詳細に諸寸法が規定されており、またその根拠となる“応力計算式（一体形）”〔48〕が参考として示されている。また高压化の要求に応じて、その応力計算式をそのまま踏襲したJIS案“100 kg/cm² 鋼製管フランジ基本寸法”〔49〕が公表されており、それらの形状に対して林らは3次元光弾性実験による応力解析を実施している〔50〕。一方、最近これら規格に対する見直しもなされている〔51〕。しかし、規格の諸寸法決定の根拠となる応力計算式は古典曲げ理論による簡略計算式であり、それが決して設計の安全側を与えないことは西岡らによる有限要素解析の結果〔52〕からも明らかである。一方、FesslerとPerry〔53〕は種々のボルトピッチ円径を有し、かつハブ部にくい込む種々のボルト頭部座を有する管フランジ形状に対する光弾性実験を実施しており、また西岡らはハブのテーパやフランジ付け根部の曲率半径の大きさの影響を調べ、その修正を提案している〔52〕。しかし、いずれの研究も現在採用されている規格形状あるいはフランジ付け根部の曲率半径などをパラメータとして局部的に修正された形状に対する応力解析であって、基本形状自身を根本的に検討したものはないようである。

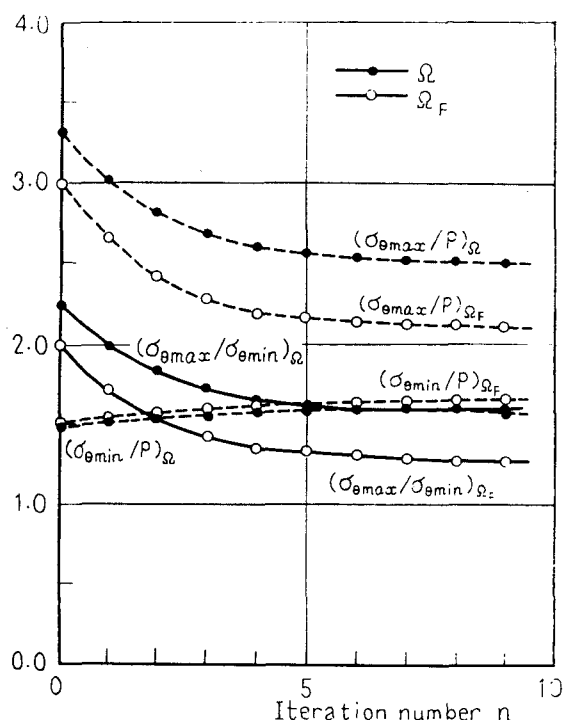


図2. 26 Ω, Ω_F 域の $\sigma_{\theta\max}/\sigma_{\theta\min}$ の変化

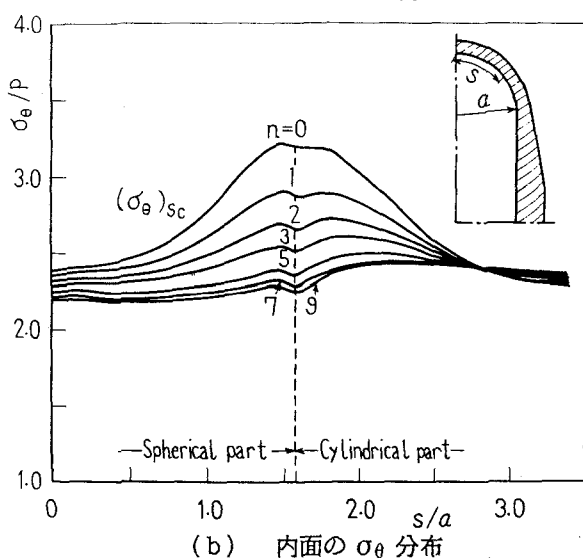
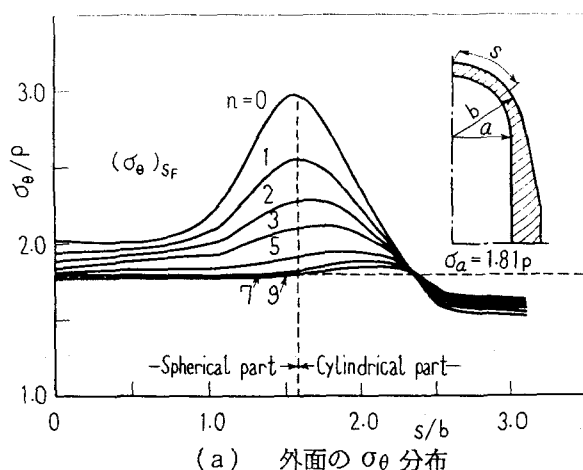


図2. 27 内外面の σ_θ 分布の変化

さて現行の J I S では図2. 28に示すようにテーバハブ付きフランジの基本寸法が規定されている。さらにその寸法決定の根拠となった応力計算式においては詳細な計算が可能ないように使用ガasketの種類、座の形状に応じたボルト荷重の決定法などが詳細に規定されている。しかし、その応力計算式および規格形状には基本的かつ大きな問題点がいくつかある。すなわち、

- (i) 応力計算式は管フランジを管部の円筒とフランジ部の中空円板とに分け、各断面での曲げモーメントから発生応力を算出する簡略計算式であり、ハブのテーバ、フランジ付け根部の曲率半径 r_1 、リードフェイス直径 g 、高さ f などは全く考慮されていない。特にフランジ付け根フィレットの応力集中に関し、計算式

に忠実にその形状寸法が規定されている 100 kg/cm^2 用管フランジでは呼び径によっては規格の許容応力の約1.5倍以上の応力が生じているという報告〔52〕もある。したがって少なくともハブテーバ部およびフランジ付け根部曲率半径などを考慮に入れた解析法を導入し、より慎重かつ理論的に形状寸法を決定する必要がある。

- (ii) 管フランジの応力分布に大きな影響を与えるボルト締め付け力の決定に必要なガasket係数 e 、最小有効締め付け圧力 y_0 に関する資料の根拠が明確ではない。すなわち、種々のガasket材料に対して、圧力勾配を有する場合の有効締め付け幅、圧力および使用環境下でのガasket係数を実験的および理論的に明らかにする必要がある。これに関

し、最近1つの試みがなされている〈54〉。

(iii) フランジの厚み t 、リードフェイス直径 g などの諸寸法の応力分布、ガスケット締め付け圧に与える影響についての検討がなされておらず、したがってそれら諸寸法決定の根拠が不明確である。

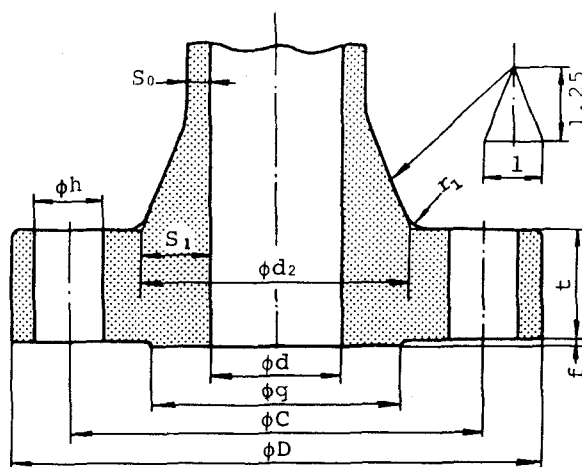


図2.28 管フランジ基本寸法

(iv) 応力計算式では、管フランジを実際に使用した配

管系の曲げ外力によるフランジ部の発生応力に与える影響について全く加味されていない。そこで本設計例ではこれらの問題点のうち特に(i)に焦点をしぼり、有限要素解析では(ii)の点も考慮してガスケットの有効締め付け幅およびボルト荷重を正確に決定しつつ、形状の最適化を図ることにした。

(2) 設計条件と設計例 具体的な設計モデルとして“100 kg/cm² 鋼製管フランジ基本寸法、日本工業規格(案)”で規定されている呼び径50のものを選んで形状最適化の基本原形とした。その基本寸法を表2.1に示す。締め付け用のボルト穴を無視し、ボルト荷重がボルト中心を通るピッチ円周上に一様分布すると仮定すると、軸対称モデルとなって本手法の適用が可能となる。まず使用ガスケットとして軟鋼製の平形金属ガスケット(ガスケット係数 $e=5.50$ 、最小有効締め付け圧力 $y_0=12.66$ kg/cm²)を想定し、ボルト荷重を決定した。規格によれば内圧 p の作用時に必要なボルト荷重 P_b は次式で与えられる。

$$P_b = P_1 + P_2 + P_3 \quad (2.26.a)$$

表2.1 100 kg/cm²鋼製管フランジ各部寸法

単位: mm

呼び径	管内径 d	管厚 S_0	ハブ付け根部厚さ S_1	ハブ付け根部直径 d_2	フランジの径 D	フランジ各部寸法				ボルト穴			ボルトの呼び
						t	f	g	r_1	中心円の径 C	数	径 h	
50	43.1	8.7	23.6	90	180	38	2	85	8	140	8	24	M22

ただし

$$P_1 = \pi p d^2 / 4, \quad P_2 = \pi p (d_3^2 - d^2) / 4, \quad P_3 = 2 \pi p b G e. \quad (2.26.b)$$

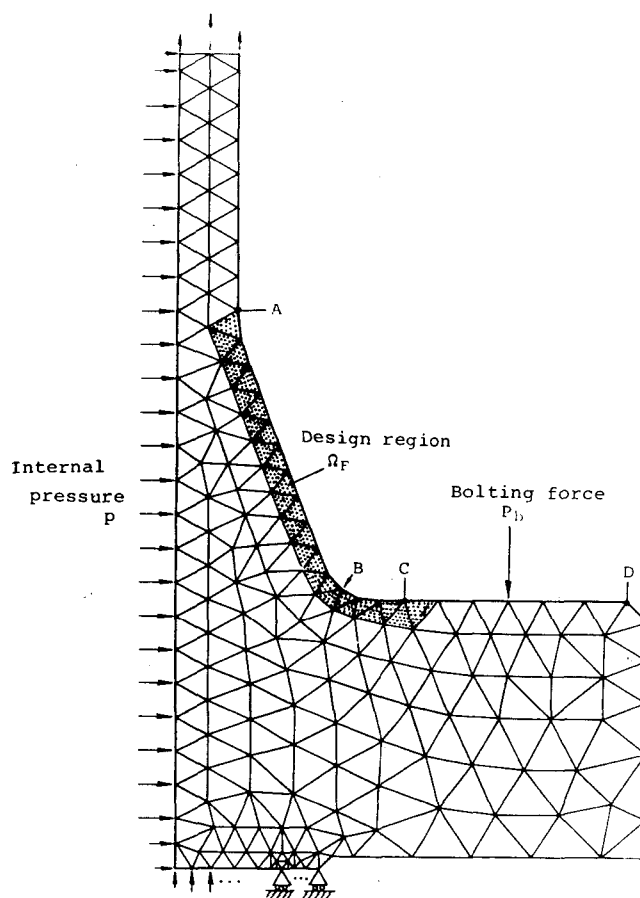


図 2. 29 要素分割と Ω_F 域

ここに d_3 はガスケット内部への内圧しみ込み直径, b はガスケットの有効幅, G はガスケットに圧縮力が作用する円の直径である. 解析では式 (2. 26) による P_b を初期値として, ガスケットの有効締め付け幅りを有限要素法による繰返し計算により精度をよく決定し, 常にガスケット接触部の平均締め付け圧が最小締め付け圧 y_0 に一致するようにボルト締め付け荷重を制御した.

原形モデルにおいて採用した要素分割の r - z 断面を図 2. 29 に示す. 設計境界として応力集中の激しいハブ部を含む曲線 ABC をとり, 図中のドット領域で示す要素域を Ω_F と定義した. また形状変化の各ステップでフランジ付け根 B 点部の形状を最小二乗法により円弧に近

似した。それに伴ってC～Dの境界も曲線ABCと連続となるようボルト頭部の座として平面を保ったまま変化させて、フランジ厚み t の変化を許容した。一方、形状変化に対する制約条件として、後述の破壊強度の比較の観点からモデル体積一定の条件を設け、強度評価の基準として最大主応力説を用いた。また管部の剛性低下および形状の複雑化を避けるために、管部厚み S_0 が規格値以下とならぬように S_F 上の節点の r 座標値に対して次の条件を設けた。

$$r_i \geq S_0 + d/2 \quad (2.27)$$

さらに解析精度保持のため各要素の断面積変化に対する制限式(2.25)に対する A_{max} 、 A_{min} として Ω_F 域の最大断面積の2倍および最小断面積の $1/2$ を設定した。

さて図2.30に繰返し数 $n=24$ までの形状変化過程を示す。同図よりハブ部のテーパがとれて、ハブ部全体がかなり大きな曲率半径を有する形状に変化している。またハブ部の体積の減少に伴ってフランジの厚みが若干増加している。 $n=24$ の形状ではフランジ付け根部の曲率半径は $r_1=0.47d_1$ 、フランジ厚み $t_{n=24}/t_0=1.07$ となっている。なお式(2.25)の制限のため途中 $n=6$ および14で要素分割を改めた。次に図2.31に $r-z$ 面内における境界表面上の子午線方向応力 σ_s および円周方向応力 σ_θ の最大値の変化過程を示す。初期形状で $\sigma_{smax}/p=7.58$ であった最大応力は $n=23$ で5.08と減少し、一方円周方向応力も $n=23$ で $\sigma_{\theta max}/p=4.98$ と σ_{smax} に非常に近い値となっている。なお形状修正過程の各ステップでのボルト荷重値は、式(2.26)による値との差が最大1%以下の変動であった。また体積も $V_{n=24}/V_0=1.009$ とほぼ一定の条件が満足されている。これらの結果から $n=24$ の形状を後述の実験における最適形状として採用した。次に規格形状および最終形状

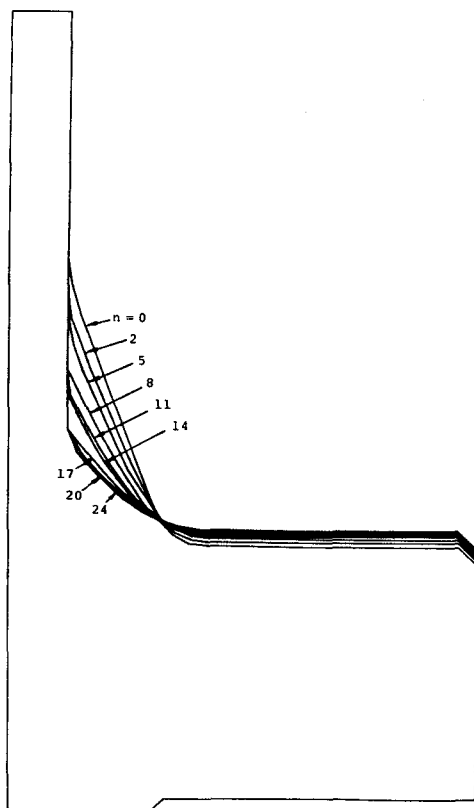


図2.30 形状変化過程

($n=23$)における内外表面の応力分布

を図2. 3 2, 図2. 3 3にそれぞれ示すが, これらより規格形状ではハブ付け根部で特に σ_s

の応力集中が激しいが, 最終形状ではそれが緩和されて, σ_s , σ_θ ともにその分布がかなり均一化されていることが了解できる。

ここでフランジ部およびハブ部の応力分布に与えるボルト荷重の影響について考察する。図2. 3 4は規格形状および最適形状について, 内圧が作用しない場合すなわちボルト締め付け力 P_b のみ負荷した際のフランジおよびハブ部外表面の発生応力分布を, 内圧およびボルト荷重が同時に作用する場合に対する比で示した。横軸はボルト座面端C点からの距離 s を示す。問題となるフランジ付け根付近の応力比に注目すると, 両形状とも内圧作用時の発生応力との差は最大 $\pm 10\%$ 程度であり, したがってフランジ付け根部の発生応力はボルト荷重によって支配されており, 内圧の影響をほとんど受けないと結論できる。

(3) 破壊実験 要素パターン変換法によって得られた最適形状管フランジの強度的優位性を確認するため, 縮尺 $1/2$ のエポキシモデルによる破壊実験を実施した。使用したエポキシ樹脂の重

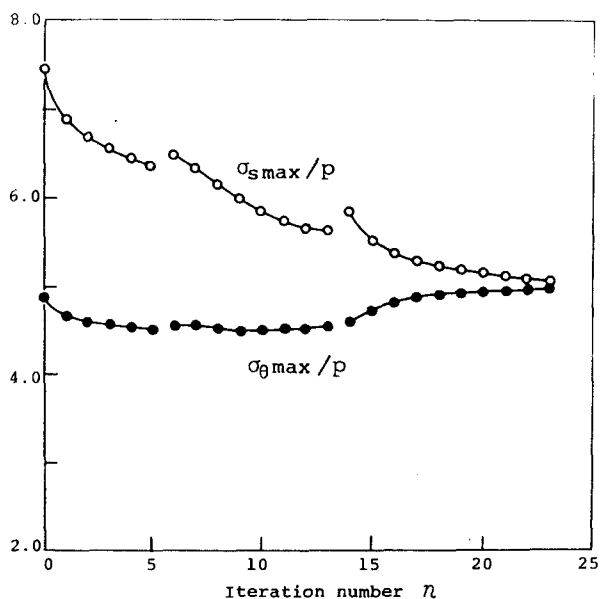


図2. 3 1 最大応力の変化

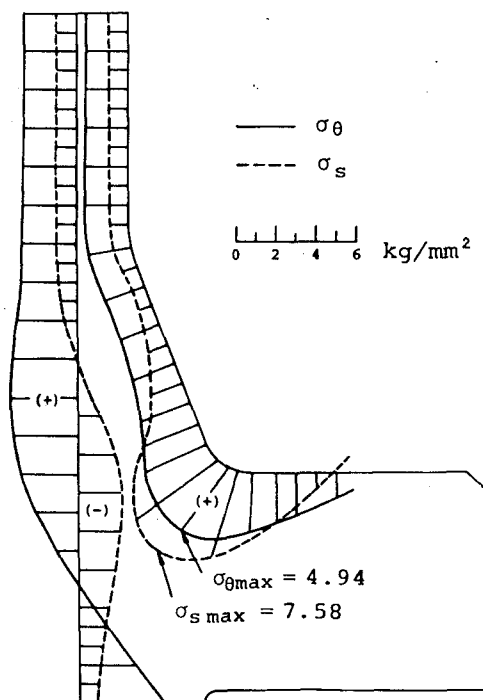
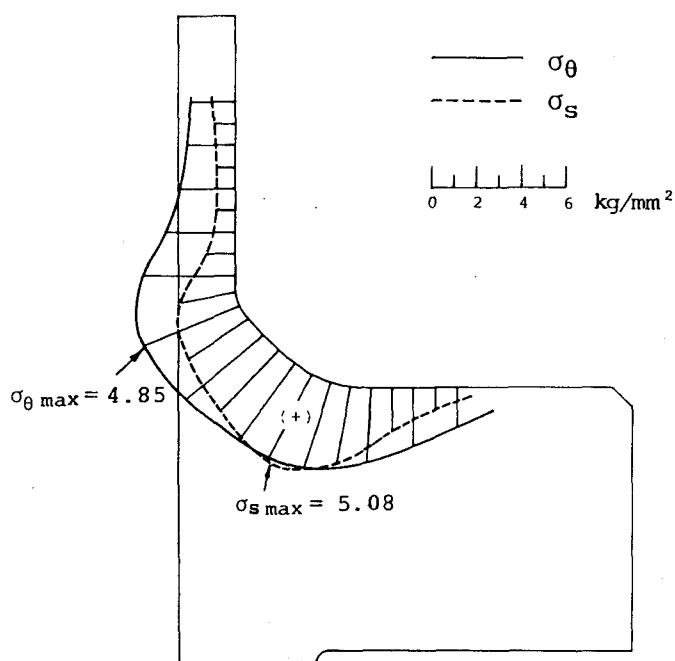
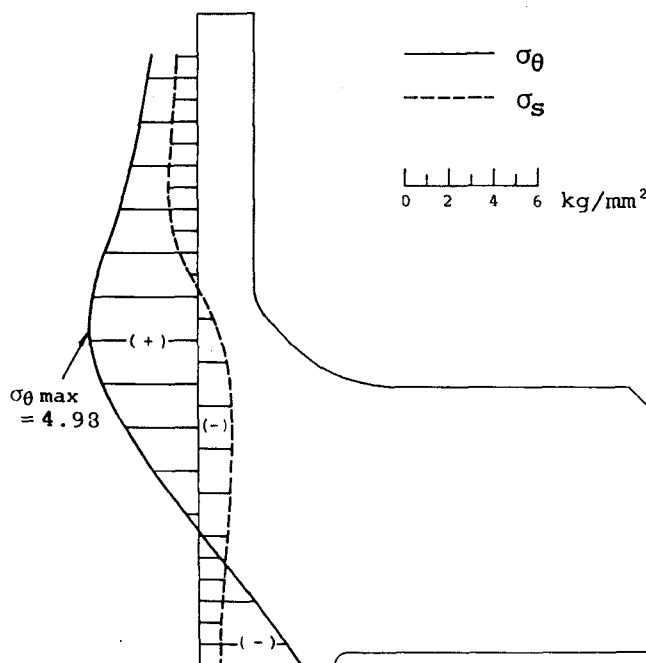


図2. 3 2 規格形状の応力分布



(a) 外表面の分布



(b) 内表面の分布

図 2. 3 3 最終形状 ($n=23$) の応力分布

量成分比を表2. 2に, またその機械的性質を表2. 3にそれぞれ示す. 図2. 35は最適形状モデルの形状寸法を示すもので, 供試片をNC旋盤にて加工作製した. さらに負荷条件として上述の考察より明らかとなった影響の最も大きいボルト荷重のみを考え, これを供試片にリング状に一樣負荷したときの破壊荷重を測定した.

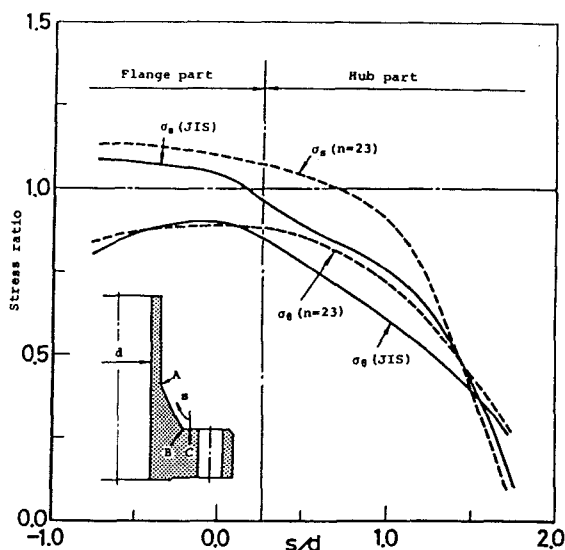


図2. 34 応力分布に及ぼすボルト荷重の影響

各々3個のモデルより得られた破壊ボルト荷重を式(2. 26)を用いて相当内圧 $\bar{p}$ に換算した値を表2. 4に示す. この値は内圧とボルト荷重を比例負荷させた場合に破壊すると予測される内圧を近似的に示す. また同表にはボルト荷重のみを負荷した際の応力分布と, エポキシ樹脂の引張り強さ σ_B をもとに最大主応力説およびミーゼス説を適用して推定した相当破壊内圧も並記した. なお, 各形状における両説による最大相当応力の発生箇所は等しく, 規格形状では $s/d=0.26$ すなわ

表2. 2 エポキシ樹脂の重量成分比

エポキシプレポリマ エピコート 828	ポリサルファイド チオコール LP-3	硬化剤 ジエチレントリアミン
100	15	8

表2. 3 エポキシ樹脂の材料定数

	平均値	標準偏差
縦弾性係数 E kg/mm^2	311	10.8
ポアソン比 ν	0.405	0.023
引張り強さ σ_B kg/mm^2	4.55	0.082

ちフランジ付け根部であり、一方最適形状では $s/d=0.53$ の位置である。さて、表 2. 4 よりエポキシモデルの破壊強さは最適形状のほうが規格形状に比較して実験値で 17%，最大主応力説およびミーゼス説で各々 39%，20% 有利であり、しかもミーゼス説による値は良い推定値を与えていると言えよう。さらに図 2. 36 には両形状の破壊写真の一例を示すが、その破壊発生箇所は両形状とも最大子午線応力の発生する

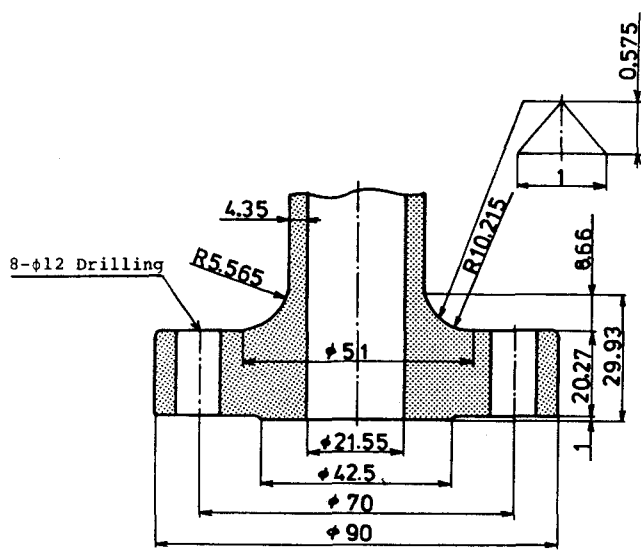


図 2. 35 最適形状の形状寸法

フランジ付け根部付近であり、両説による推定箇所とよく一致している。また相当応力分布が均一に近い最適形状モデルではき裂パターンがより複雑となっていることが観察される。

(4) 考察 要素パターン変換法による形状最適化法を適用して、フランジ各部の寸法やボルト荷重など不確定ながらも設計変数となりにくい因子の多い管フランジの最適形状を決定し、さらに実験的にもその有効性を確認できた。したがってそれらの結果より現行の J I S 規格に対して強度的な観点からおよそ次のような点に関する改善が必要であると結論できよう。すなわち、高圧用管フランジ（100 kg/cm² 用）ではフランジとハブ接続部に規格許容応

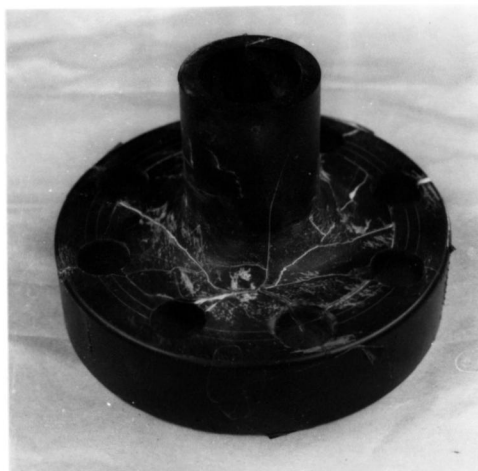
表 2. 4 相当破壊内圧と各破壊説による推定値

単位：kg/cm²

	実 験 値		推 定 値	
	相当破壊内圧	標準偏差	最大主応力説	ミーゼス説
規格形状 $\bar{p}_{n=0}$	98.3	17.51	61.7	89.8
最適形状 $\bar{p}_{n=24}$	115.4	4.11	86.0	107.3
$\bar{p}_{n=24}/\bar{p}_{n=0}$	1.174	—	1.394	1.195



(a) J I S規格形状



(b) 最適形状

図2. 36 破壊時のき裂パターン

力をはるかに越える応力集中を生じており、その緩和のためにはハブとフランジ付け根の曲率半径を大きくとり（設計例では約 $d/2$ ）、またハブと管の接続部の曲率半径を小さく（約 $d/4$ ）とって大きなテーパを付けた形状あるいは管とフランジを直接大きな曲率半径（約 $d/2$ ）で接続した形状に改めることが望ましい。さらにフランジ付け根部の応力集中がほとんど締め付け力のみによって生ずる限り、上記寸法は相似則により他の呼び径および中低圧用フランジに対しても基本的に適用可能である。

2. 5 結 言

本章では、静的外力を受ける3次元軸対称体に対する応力基準の強度的最適形状決定手法として、有限要素法に自動設計におけるパターン発生システムを組み込んだ実用的な試行法的手法を提示した。それは形状決定を必要とする境界の有限要素に対し、修正を必要とする応力の応力軸と直角方向への比例変換、いわゆる要素パターン変換法を繰り返すことによって漸近的に応力分布の様な最適形状に収束させる方法である。

さらに本手法が実用上有効な形状最適化の手段と成り得ることを、厚肉圧力容器および管フランジの設計例によって確認した。また管フランジに対してはエポキシモデルによる破壊実験を実施して、解析によって得られた最適形状の強度的優位性を確認し、現行のJIS規格形状の修正を提案した。

第3章 要素パターン変換法による物体力場の形状最適化法

3.1 序言

本章では、自重や遠心力を始めとする物体力の作用する応力場における2次元および3次元軸対称体の強度的最適形状決定法について述べる。その決定手法の基礎は、静的外力のみを受けて生ずる応力場に対して尾田によって提示された2次元の手法〔27〕および第2章に述べた軸対称体の手法の拡張、適用にある。それらの手法の根本的原理とも言うべき要素パターン変換法の理論的基礎は、境界要素形状の変化に対してその要素自身の節点力変化は小さいため、近似的にそれを無視することに

よってその解釈が与えられた。

しかし、物体力場では境界要素の節点力のうち要素自身の物体力の寄与による等価節点力は、

後述するように要素面積あるいは体積に比例するため、形状変化に伴うその等価節点力変化を応力変化に対して小さいとして無視することはできない。

そこで本章では、物体力場における合理的な形状最適化法の確立を目的として、形状変化に伴う物体力の等価節点力変化を考慮に入れた要素パターン変換法を提示する。次にそれを物体力として自重あるいは遠心力の作用する設計問題に適用した結果について述べる。さらに遠心応力場の設計例の解析結果の有効性を確認するために実施した回転破

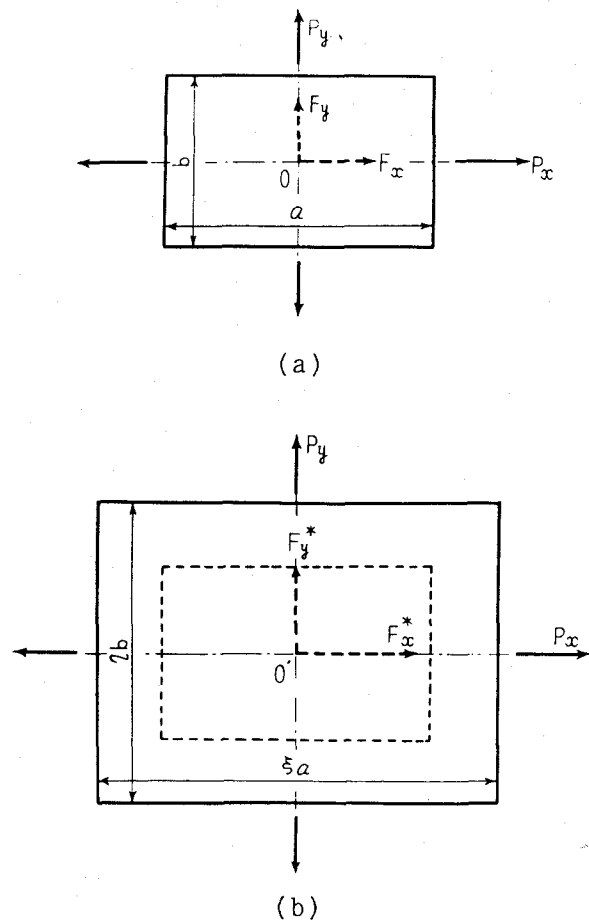


図3.1 長方形板のパターン変換例

壊試験結果についても示す。

3. 2 物体力場の要素パターン変換法

3. 2. 1 物体力を考慮したパターン変換法

形状変化に伴う物体力の等価節点力変化を考慮した効果的なパターン変換を考案するため、物体力場におかれた1要素の簡単なモデルを考えることにする。

(1) 2次元長方形要素 図3. 1 (a)に示すように直交座標系 (x, y) に平行な辺を持つように切り出した辺の長さ a, b 、板厚 t の長方形要素を考える。荷重として x, y 方向に一樣な外荷重 P_x, P_y および物体力を受けているとする。簡単のためせん断力は作用しないものとし、主応力場のパターン変換法について考える。有限要素法では物体力を等価節点力に換算する手法が常用されていることから、要素内に分布する物体力をそれと等価な合力 F_x, F_y に置き換えると、この要素に生ずる座標軸方向の垂直応力は

$$\sigma_x = \frac{P_x + F_x}{bt}, \quad \sigma_y = \frac{P_y + F_y}{at} \quad (3.1)$$

で与えられる。今、外力条件としての P_x, P_y を不変とし、座標軸方向の垂直応力を設計基準応力とするためにパターン変換の変換関数 ϕ を次のようにとり、力の釣り合いから変換係数 ξ, η を決定する。

$$\phi = (x \rightarrow \xi x, y \rightarrow \eta y) \quad (3.2)$$

式(3. 2)の比例変換を実施すると図3. 1 (a)の長方形要素は同図(b)に示すように辺 a, b が $\xi a, \eta b$ と変化する。

さて、物体力が長方形要素内で一樣分布していると思わせる場合にはそれは要素体積に比例するから、その比例定数を k_x, k_y として

$$F_x = k_x abt, \quad F_y = k_y abt \quad (3.3)$$

と表わせる。以後パターン変換後の諸量に*印を付して記すと、変換後の物体力成分は

$$F_x^* = \xi \eta F_x, \quad F_y^* = \xi \eta F_y \quad (3.4)$$

と表わせ、したがって応力は次のように変化する。

$$\sigma_x^* = \frac{P_x + \xi \eta F_x}{\eta b t}, \quad \sigma_y^* = \frac{P_y + \xi \eta F_y}{\xi a t}. \quad (3.5)$$

よって上式で示す垂直応力が設計基準応力に一致するように式 (3. 1), (3. 5) から変換係数 ξ, η を決定する. まず各物体力成分と外力成分の比を $F_x/P_x = \alpha_x, F_y/P_y = \alpha_y$ とおき, また σ_x^*, σ_y^* が基準応力に等しいとしてこれを σ_a で置き換え, さらに垂直応力と基準応力の比を $\sigma_x/\sigma_a = \beta_x, \sigma_y/\sigma_a = \beta_y$ とおくと式 (3. 1), (3. 5) より,

$$\left. \begin{aligned} (1 + \alpha_x) \eta &= \beta_x (1 + \alpha_x \xi \eta), \\ (1 + \alpha_y) \xi &= \beta_y (1 + \alpha_y \xi \eta). \end{aligned} \right\} \quad (3.6)$$

物体力場では一般に $\alpha_x \neq 0, \alpha_y \neq 0$ だから式 (3. 6) を ξ, η について解くと

$$\left. \begin{aligned} \xi &= \frac{(1 + \alpha_x)(1 + \alpha_y) + (\alpha_x - \alpha_y)\beta_x\beta_y - \Delta}{2\alpha_x(1 + \alpha_y)\beta_x}, \\ \eta &= \frac{(1 + \alpha_x)(1 + \alpha_y) + (\alpha_y - \alpha_x)\beta_x\beta_y - \Delta}{2(1 + \alpha_x)\alpha_y\beta_y}. \end{aligned} \right\} \quad (3.7.a)$$

ここに

$$\begin{aligned} \Delta &= \{ (1 + \alpha_x)^2 (1 + \alpha_y)^2 - 2(1 + \alpha_x)(1 + \alpha_y)\alpha_x\alpha_y\beta_x\beta_y \\ &\quad + (\alpha_x - \alpha_y)^2 \beta_x^2 \beta_y^2 \}^{1/2} \end{aligned} \quad (3.7.b)$$

すなわち, 物体力成分と外力成分の比から α_x, α_y が, 一方垂直応力と基準応力の比から β_x, β_y がそれぞれ与えられるから, 式 (3. 7) によって変換係数 ξ, η を一意的に決定することが可能である. それに従ってパターン変換を実施すれば座標軸方向の垂直応力を目標の基準応力に変化させることができる.

一方, 実用上よく用いる特別な場合として物体力が x 軸方向あるいは y 軸方向にのみ存在する場合がある. たとえば $F_x = 0$ とすると $\alpha_x = 0$ となり, 式 (3. 6) より変換係数 ξ, η は次のようになる.

$$\xi = \frac{\beta_y}{1 + \alpha_y(1 - \beta_x\beta_y)}, \quad \eta = \beta_x. \quad (3.8)$$

なお, 式 (3. 7), (3. 8) のいずれの場合も長方形の体積は $\xi\eta$ 倍に変化する.

(2) 軸対称要素モデル 上述の2次元問題における要素パターン変換法は軸対称問題にも容易に拡張することが可能である. 図3. 2 (a) のような軸対称要素に外荷重 P_r, P_z

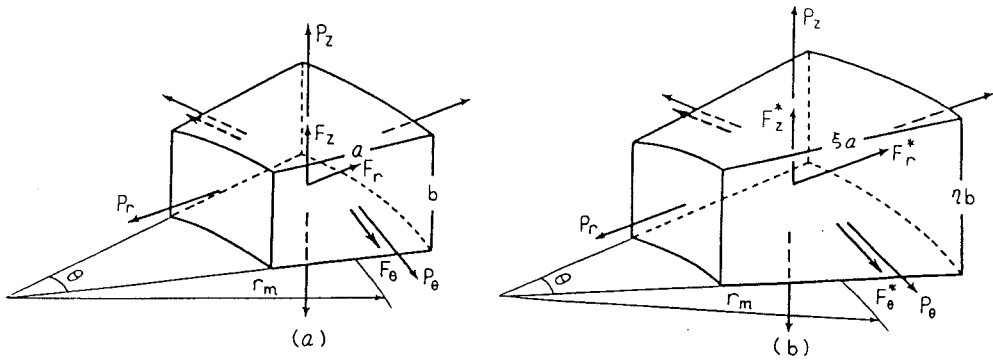


図3. 2 軸対称要素のパターン変換例

が作用し、同時に円周方向に内力 P_θ が生じてそれらが釣り合っているとす。簡単のためここでも r - z 面内のせん断力は作用しないものとし、主応力場のパターン変換を考える。この状態の要素に r, z 方向の分布物体力の合力 F_r, F_z が作用すると、これによって円周方向の内力の変動が生ずる。これを F_θ とおき、外力成分を不変に保ったまま変換関数として

$$\varphi = (r \rightarrow \xi r, z \rightarrow \eta z) \quad (3.9)$$

を作用させると、図3. 2 (b) のように形状は変化し、物体力成分 F_r, F_z および物体力によって生ずる内力 F_θ は $\xi\eta$ 倍される。したがって長方形要素における式 (3. 6) に対応して次式が得られる。

$$\left. \begin{aligned} (1+\alpha_r)\eta &= \beta_r(1+\alpha_r\xi\eta), \\ (1+\alpha_r)\xi\eta &= \beta_\theta(1+\alpha_r\xi\eta), \\ (1+\alpha_z)\xi &= \beta_z(1+\alpha_z\xi\eta). \end{aligned} \right\} \quad (3.10.a)$$

ここに

$$\alpha_r = F_r/P_r = F_\theta/P_\theta, \quad \alpha_z = F_z/P_z. \quad (3.10.b)$$

ただし $F_\theta/P_\theta = \alpha_r$ を仮定した。また $\beta_r, \beta_\theta, \beta_z$ は各応力成分と基準応力との比である。上式 (3. 10) から ξ, η を決定し、パターン変換を実施するという点で基本的には長方形要素の場合と同様である。しかし、2変数 ξ, η によって $\sigma_r, \sigma_\theta, \sigma_z$ の3応力成分の増減を規定するから、それら3成分を全く独自に制御することはできない。ただし、自由境界では応力成分として主応力をとれば境界法線方向の主応力は存在しないので、 ξ, η を一意的に決定できる。また物体力成分が1座標軸方向にのみ存在する場合、たとえば遠心応力場のように物体力の z 方向成分が存在しなければ、 $\alpha_z = 0$ となり式 (3. 10. a) の第1, 2式より

$$\xi = \frac{\beta_\theta}{\beta_r}, \quad \eta = \frac{\beta_r}{1 + \alpha_r(1 + \beta_\theta)} \quad (3.11)$$

と与えられ、そのとき σ_z は式 (3. 10. a) 第3式より $1/\xi$ に変化する。

以上述べたように、一様な応力状態にある物体力場下の応力修正は、基本的には目的の応力軸と直角方向への形状比例変換によって可能であり、その効果的な変換量は2次元要素では式 (3. 7) ,

(3. 8) などで、また軸対称要素では式 (3. 10) あるいは式 (3. 11) などで与えられる。次にこれを有限要素法に利用することを考える。

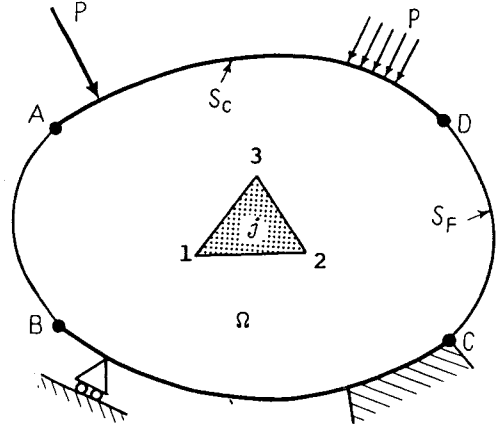


図3. 3 2次元設計モデル

3. 2. 2 有限要素法の応用

設計物体 Ω を、2次元問題では3節点3角形の定ひずみ要素に (図3. 3) , また軸対称問題では3角形断面の定ひずみリング要素にそれぞれ分割すると、その任意の要素 j (3節点を1, 2, 3とする) の応力 σ_j は節点変位ベクトルを d_j として式 (2. 5) で与えられた。すなわち

$$\sigma_j = D B_j d_j \quad (3.12.a)$$

具体的には、2次元問題では

$$\left. \begin{aligned} \sigma_j &= (\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy})_j^T, \\ d_j &= (d_{x1}, d_{y1}, d_{x2}, d_{y2}, d_{x3}, d_{y3})_j^T. \end{aligned} \right\} \quad (3.12.b)$$

一方、軸対称問題では

$$\left. \begin{aligned} \sigma_j &= (\sigma_r, \sigma_\theta, \sigma_z, \tau_{rz})_j^T, \\ d_j &= (d_{r1}, d_{z1}, d_{r2}, d_{z2}, d_{r3}, d_{z3})_j^T. \end{aligned} \right\} \quad (3.12.c)$$

さらに2次元平面応力問題における D, B_j は要素面積を A_j , 縦弾性係数, ポアソン比を E, ν

として

$$D = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (1-\nu)/2 \end{bmatrix} \quad (3.13)$$

$$B_j = \frac{1}{2A_j} \begin{bmatrix} b_1 & 0 & b_2 & 0 & b_3 & 0 \\ 0 & c_1 & 0 & c_2 & 0 & c_3 \\ c_1 & b_1 & c_2 & b_2 & c_3 & b_3 \end{bmatrix} \quad (3.14.a)$$

ここで b_1, b_2, b_3 および c_1, c_2, c_3 は3節点の座標値を (x_i, y_i) ($i=1, 2, 3$) とし
て

$$\left. \begin{aligned} b_1 &= y_2 - y_3, & b_2 &= y_3 - y_1, & b_3 &= y_1 - y_2, \\ c_1 &= x_3 - x_2, & c_2 &= x_1 - x_3, & c_3 &= x_2 - x_1. \end{aligned} \right\} \quad (3.14.b)$$

一方、軸対称問題における D, B_j は式 (2. 6), (2. 7) でそれぞれ与えられた。

次に要素における外力の等価節点力を P_j 、物体力の等価節点力を F_j とすると要素の剛性
方程式は

$$P_j + F_j = K_j d_j \quad (3.15.a)$$

ここに

$$P_j = \left\{ \begin{aligned} &(P_{x1}, P_{y1}, P_{x2}, P_{y2}, P_{x3}, P_{y3})_j^T && (2 \text{次元}) \\ &(P_{r1}, P_{z1}, P_{r2}, P_{z2}, P_{r3}, P_{z3})_j^T && (\text{軸対称}) \end{aligned} \right\} \quad (3.15.b)$$

$$F_j = \left\{ \begin{aligned} &(F_{x1}, F_{y1}, F_{x2}, F_{y2}, F_{x3}, F_{y3})_j^T && (2 \text{次元}) \\ &(F_{r1}, F_{z1}, F_{r2}, F_{z2}, F_{r3}, F_{z3})_j^T && (\text{軸対称}) \end{aligned} \right\} \quad (3.15.c)$$

また K_j は要素の剛性マトリックスであり

$$K_j = k_0 B_j^T D B_j \quad (3.16.a)$$

ただし

$$k_0 = \begin{cases} A_j t & (2 \text{次元}) \\ 2\pi r_m A_j & (\text{軸対称}) \end{cases} \quad (3.16.b)$$

で与えられる。一方、 F_j は分布物体力を $f = (f_x, f_y)^T$ (2次元) あるいは $f = (f_r, f_z)^T$ (軸対称) として次式で決定される。

$$F_j = \int N_j^T f dV \quad (3.17)$$

ここに N_j は変位関数と節点変位を結びつける内そう関数であり、次のように与えられる。

$$N_j = [IN_1, IN_2, IN_3]_j \quad (3.18.a)$$

ただし、2次元問題では

$$\left. \begin{aligned} N_i &= (a_i + b_i x + c_i y) / 2A_j \quad (i=1, 2, 3), \\ a_1 &= x_2 y_3 - x_3 y_2, \quad a_2 = x_3 y_1 - x_1 y_3, \quad a_3 = x_1 y_2 - x_2 y_1. \end{aligned} \right\} \quad (3.18.b)$$

また軸対称問題では

$$\left. \begin{aligned} N_i &= (a_i + b_i r + c_i z) / 2A_j \quad (i=1, 2, 3), \\ a_1 &= r_2 z_3 - r_3 z_2, \quad a_2 = r_3 z_1 - r_1 z_3, \quad a_3 = r_1 z_2 - r_2 z_1, \\ b_1 &= z_2 - z_3, \quad b_2 = z_3 - z_1, \quad b_3 = z_1 - z_2, \\ c_1 &= r_3 - r_2, \quad c_2 = r_1 - r_3, \quad c_3 = r_2 - r_1. \end{aligned} \right\} \quad (3.18.c)$$

なお I は2次の単位マトリックスである。さらに式 (3.17) の積分は要素全域にわたる体積々分とする。そこで式 (3.12), (3.16) を式 (3.15) に代入すると次のような節点力と応力の関係式が得られる。

$$P_j + F_j = k_0 B_j^T \sigma_j \quad (3.19)$$

さて要素応力の修正を目的として式 (3.2) あるいは式 (3.9) の変換関数を用いてパターン変換を実施すると、ひずみマトリックス B_j は、要素面積が $\xi \eta A_j$ となることを考慮して次式のように変化する。

$$B_j^* = (B_1^*, B_2^*, B_3^*)_j \quad (3.20.a)$$

ここに2次元問題では

$$B_i^* = \frac{1}{2\xi\eta A_j} \begin{bmatrix} \eta b_i & 0 \\ 0 & \xi c_i \\ \xi c_i & \eta b_i \end{bmatrix} \quad (i=1,2,3) \quad (3.20.b)$$

軸対称問題では

$$B_i^* = \frac{1}{2\xi\eta A_j} \begin{bmatrix} \eta b_i & 0 \\ \xi\eta(a_i/r_m + b_i + c_i z_m/r_m) & 0 \\ 0 & \xi c_i \\ \xi c_i & \eta b_i \end{bmatrix} \quad (i=1,2,3) \quad (3.20.c)$$

である。よってパターン変換後の節点力と応力の関係は式 (3.19) より

$$P_j^* + F_j^* = \xi\eta k_0 B_j^{*T} \sigma_j^* \quad (3.21)$$

今、 Ω の外力条件を不変として第2章の場合と同様に要素のパターン変換をこれら要素の節点外力に関して

$$P_j^* = P_j \quad (3.22)$$

が成立する程度の範囲に限定して実施するものとする。一方、物体力は要素内で近似的に一樣に分布するとみなせる場合でもその等価節点力は要素面積あるいは体積に比例するので

$$F_j^* = \xi\eta F_j \quad (3.23)$$

と変化する。そこで物体力の等価節点力を対角マトリックス α_j を用いて

$$F_j = \alpha_j P_j \quad (3.24.a)$$

ここに

$$\alpha_j = \begin{bmatrix} \alpha_0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_0 \end{bmatrix} \quad (3.24.b)$$

ただし

$$\alpha_0 = \left\{ \begin{array}{ll} \text{diag}(\alpha_x, \alpha_y) & (2\text{次元}) \\ \text{diag}(\alpha_r, \alpha_z) & (\text{軸対称}) \end{array} \right\} \quad (3.24.c)$$

と表わすと、式 (3. 19) および式 (3. 21) より次式が成立する.

$$(I + \alpha_j)^{-1} B_j^T \sigma_j = \xi \eta (I + \xi \eta \alpha_j)^{-1} B_j^{*T} \sigma_j^*$$

ただし I は 6 次の単位マトリックスである. 上式を σ_j^* について解くと

$$\sigma_j^* = \frac{1}{\xi \eta} (B_j B_j^{*T})^{-1} B_j (I + \xi \eta \alpha_j) (I + \alpha_j)^{-1} B_j^T \sigma_j \quad (3.25)$$

そこで式 (3. 20) を用いて上式 (3. 25) を具体的に計算する. まず $B_j B_j^{*T}$ は、2次元問題では

$$B_j B_j^{*T} = \frac{1}{4 \xi \eta A_j^2} \begin{bmatrix} \eta S_y & 0 & \xi S_{xy} \\ 0 & \xi S_x & \eta S_{xy} \\ \eta S_{xy} & \xi S_{xy} & \xi S_x + \eta S_y \end{bmatrix} \quad (3.26.a)$$

ここに

$$S_x = \sum_{i=1}^3 c_i^2, \quad S_y = \sum_{i=1}^3 b_i^2, \quad S_{xy} = \sum_{i=1}^3 b_i c_i. \quad (3.26.b)$$

また軸対称問題では式 (2. 17) に与えた表示に等しい. 一方,

$$B_j (I + \xi \eta \alpha_j) (I + \alpha_j)^{-1} B_j^T = \frac{1}{4 A_j^2} \times \begin{bmatrix} \mu_x S_y & 0 & \mu_x S_{xy} \\ 0 & \mu_y S_y & \mu_y S_{xy} \\ \mu_x S_{xy} & \mu_y S_{xy} & \mu_x S_x + \mu_y S_y \end{bmatrix} \quad (3.27.a)$$

$$B_j (I + \xi \eta \alpha_j) (I + \alpha_j)^{-1} B_j^T = \frac{1}{4 A_j^2} \times \begin{bmatrix} \mu_r S_{zz} & \mu_r S_{\theta z} & 0 & \mu_r S_{rz} \\ \mu_r S_{\theta z} & \mu_r S_{\theta\theta} & 0 & \mu_r S_{r\theta} \\ 0 & 0 & \mu_z S_{rr} & \mu_z S_{rz} \\ \mu_r S_{rz} & \mu_r S_{r\theta} & \mu_z S_{rz} & \mu_r S_{rr} + \mu_z S_{zz} \end{bmatrix} \quad (3.27.b)$$

ここに

$$\left. \begin{aligned} \mu_x &= \frac{1+\xi\eta\alpha_x}{1+\alpha_x}, \quad \mu_y = \frac{1+\xi\eta\alpha_y}{1+\alpha_y} \quad (2\text{次元}) \\ \mu_r &= \frac{1+\xi\eta\alpha_r}{1+\alpha_r}, \quad \mu_z = \frac{1+\xi\eta\alpha_z}{1+\alpha_z} \quad (\text{軸対称}) \end{aligned} \right\} \quad (3.27.c)$$

また $S_{rr}, S_{\theta\theta}, S_{zz}, S_{r\theta}, S_{\theta z}, S_{rz}$ は式 (2. 17) に用いたものと同様の表示である。そこで式 (3. 26) あるいは式 (2. 17) の逆行列および式 (3. 27) を式 (3. 25) に代入して整理すると、2次元問題では

$$\sigma_j^* = \begin{bmatrix} \frac{\mu_x}{\eta} & 0 & \frac{\eta\mu_x - \xi\mu_y}{\xi S_x + \eta S_y} \frac{S_{xy}}{\eta} \\ \eta & & \xi S_x + \eta S_y & \eta \\ 0 & \frac{\mu_y}{\xi} & \frac{\xi\mu_y - \eta\mu_x}{\xi S_x + \eta S_y} \frac{S_{xy}}{\xi} \\ \xi & & \xi S_x + \eta S_y & \xi \\ 0 & 0 & \frac{\mu_x S_x + \mu_y S_y}{\xi S_x + \eta S_y} \\ \xi S_x + \eta S_y & & & \end{bmatrix} \sigma_j \quad (3.28)$$

一方、軸対称問題では

$$\sigma_j^* = \begin{bmatrix} \mu_r/\eta & 0 & 0 & \lambda_1/\eta\lambda_0 \\ 0 & \mu_r/\xi\eta & 0 & \lambda_2/\xi\eta\lambda_0 \\ 0 & 0 & \mu_z/\xi & \lambda_3/\xi\lambda_0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_4/\lambda_0 \end{bmatrix} \sigma_j \quad (3.29.a)$$

ここに

$$\left. \begin{aligned} \lambda_0 &= \xi S_{rr} (S_{rr} S_{\theta\theta} S_{zz} - S_{rr} S_{\theta z}^2 - S_{\theta\theta} S_{rz}^2 - S_{zz} S_{r\theta}^2 \\ &\quad + 2S_{r\theta} S_{\theta z} S_{rz}) + \eta (S_{rr} S_{zz} - S_{rz}^2) (S_{\theta\theta} S_{zz} - S_{\theta z}^2), \\ \lambda_1 &= (\eta\mu_r - \xi\mu_z) (S_{rr} S_{zz} - S_{rz}^2) (S_{\theta\theta} S_{rz} - S_{r\theta} S_{\theta z}), \\ \lambda_2 &= (\eta\mu_r - \xi\mu_z) (S_{rr} S_{zz} - S_{rz}^2) (S_{zz} S_{r\theta} - S_{\theta z} S_{rz}), \\ \lambda_3 &= (\xi\mu_z - \eta\mu_r) S_{rz} (S_{rr} S_{\theta\theta} S_{zz} - S_{rr} S_{\theta z}^2 - S_{\theta\theta} S_{rz}^2 \\ &\quad - S_{zz} S_{r\theta}^2 + 2S_{r\theta} S_{\theta z} S_{rz}), \\ \lambda_4 &= \mu_r S_{rr} (S_{rr} S_{\theta\theta} S_{zz} - S_{rr} S_{\theta z}^2 - S_{\theta\theta} S_{rz}^2 - S_{zz} S_{r\theta}^2 \\ &\quad + 2S_{r\theta} S_{\theta z} S_{rz}) + \mu_z (S_{rr} S_{zz} - S_{rz}^2) (S_{\theta\theta} S_{zz} - S_{\theta z}^2). \end{aligned} \right\} \quad (3.29.b)$$

すなわち、式 (3. 28), (3. 29) のいずれの場合もせん断応力の影響はかなり複雑ではあるが、主応力方向のパターン変換を考えれば $\tau_{xy}=0$ あるいは $\tau_{rz}=0$ となって、2次元問題では式 (3. 28) より

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x^* &= \frac{\mu_x \sigma_x}{\eta} = \frac{1+\alpha_x \xi \eta}{(1+\alpha_x) \eta} \sigma_x, \\ \sigma_y^* &= \frac{\mu_y \sigma_y}{\xi} = \frac{1+\alpha_y \xi \eta}{(1+\alpha_y) \xi} \sigma_y. \end{aligned} \right\} \quad (3.30)$$

一方、軸対称問題では式 (3. 29) より

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r^* &= \frac{\mu_r \sigma_r}{\eta} = \frac{1+\alpha_r \xi \eta}{(1+\alpha_r) \eta} \sigma_r, \\ \sigma_\theta^* &= \frac{\mu_\theta \sigma_\theta}{\xi \eta} = \frac{1+\alpha_\theta \xi \eta}{(1+\alpha_\theta) \xi \eta} \sigma_\theta, \\ \sigma_z^* &= \frac{\mu_z \sigma_z}{\xi} = \frac{1+\alpha_z \xi \eta}{(1+\alpha_z) \xi} \sigma_z \end{aligned} \right\} \quad (3.31)$$

となり、2次元問題では $\sigma_x^*/\sigma_x=\beta_x$, $\sigma_y^*/\sigma_y=\beta_y$ とおけば長方形要素に対する式 (3. 6) に、また軸対称問題では $\sigma_r^*/\sigma_r=\beta_r$, $\sigma_\theta^*/\sigma_\theta=\beta_\theta$, $\sigma_z^*/\sigma_z=\beta_z$ とおけば軸対称要素に対する式 (3. 10) にそれぞれ一致する。したがって、有限要素法に組み込んだパターン変換法も 3. 2. 1 項の1要素モデルの場合と同様、式 (3. 6) あるいは式 (3. 10) などによって変換係数 ξ, η を決定し、主応力軸と直角方向への比例変換を実施することによって要素応力の修正が可能である。

3. 3 最適化の手順

物体力場の一般的な形状最適化の手順を図 3. 4 に示す。基本的には第 2 章に述べた外荷重のみを受ける場合の形状最適化手順を踏襲すればよい。ただし、有限要素法による応力解析では物体力の影響を等価節点力として導入する必要がある。さらに形状修正のためのパターン変換法は、3. 2 節で提示した物体力場のものを採用しなければならない。

なお、2. 3. 4 項で述べた数値計算を実施する上での注意事項は本章の場合にもすべて適用される。

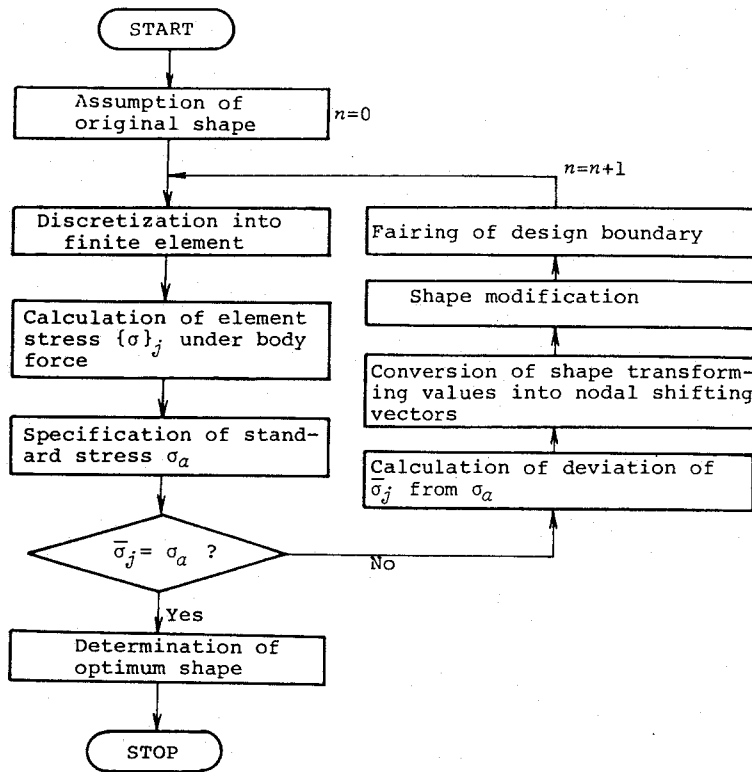


図3. 4 解析手順のフローチャート

3. 4 設計例と考察

前節までに提示した物体力を考慮した強度的最適形状決定手法の有効性を確認するために実施した数値計算結果および実験結果について以下に述べる。

3. 4. 1 自重を考慮した形状決定

(1) 2次元問題 設計モデル原形として図3. 5に示すような長さ l 、幅 $2a$ ($a/l = 0.25$)、単位板厚の長方形板を考え、荷重条件として上端 $y=l$ に一様分布荷重 p ($p/\gamma l = 3.125$)、ただし γ は比重量) が作用する場合の自重を考慮した最適形状を求めた。設計制約条件として、設計基準応力を分布荷重 p にとり、荷重の作用する上端 $y=l$ および変位拘束を受ける $y=0$ の境界を S_c として、その形状を不変に保った。すなわち、 $x=\pm a$ の長

手方向の境界を設計境界 S_F としてその形状を本手法によって決定した。解析は対称性のため $1/2$ 領域のみについて実施したが、採用した要素分割を図 3. 6 に示す。同図中のドット域で示す要素域を Ω_F とし、パターン変換操作を実施した。なお、本例では σ_y が支配的であり、ほぼ単軸圧縮応力状態とみなせるから、パターン変換係数 ξ, η を式 (3. 8) において $\beta_x = 1.0$ として決定した。また初等理論解 (5. 5) の S_F 形状が

$$x = a \exp \{ \gamma (l - y) / p \} \quad (3.32)$$

で与えられることから、各ステップでの S_F 境界形成節点群を指数関数にて最小二乗近似し、形状の平滑化を図った。なお弾性破損条件としてミーゼスの説を採用したが、本例のごとく近似的に 1 軸の応力場とみなせる場合は破損条件としていずれの説を用いても求まる形状にほとんど差は見られない。

図 3. 7 は繰り返し数 $n=9$ 回までの形状変化の様子を示したものである。同図に初等理論による最適形状いわゆる平等強さの形状を破線で示した。 $n=7$ あるいは 8 の形状が最適形状に最も近いことは Ω および Ω_F 域での相当応力比 $\bar{\sigma}_{max}/\bar{\sigma}_{min}$ の変化を示した図 3. 8 から明らかである。なお基本原形からの面積変化は同図より $A_{n=8}/A_0 = 1.14$ であり、初等理論から得られる $A_{th}/A_0 = 1.18$ に比較して約 3% 小さい。次に S_F 境界および $x=0$ の y 軸上の相当応力分布の変化過程を図 3. 9

に示す。 S_F 境界ではほぼ応力分布は均一化されているが、 y 軸上では全体的にいく分高目であり、それは $y=0$ 近傍で顕著である。以上の結果より、本手法で決定した最適形状は初等理論解と若干相違しているが、これは図 3. 9 (a) と (b) の応力分布の相違からもわかるように全域 2 次元的応力分布を示しており、したがってより厳密な応力解析に基礎をおく本手法によって決定した形状のほうが $\bar{\sigma}_{max}/\bar{\sigma}_{min}$ 最小という意味で真の最適形状により近いと言うことができる。

(2) 軸対称問題 設計例題とし

て図 3. 5 に示した 2 次元モデルを y 軸

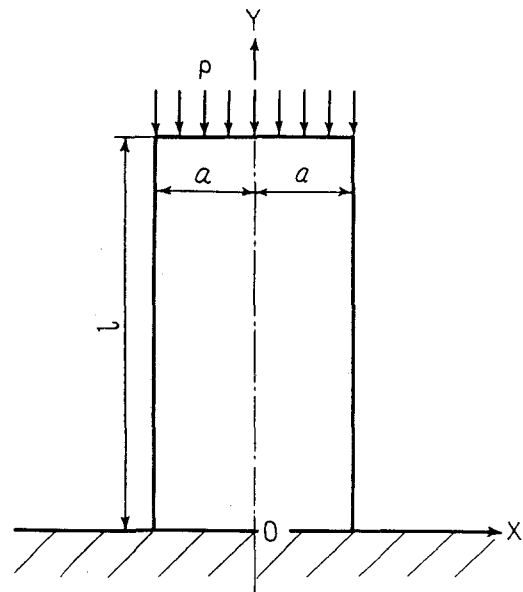


図 3. 5 平等強さの柱 原形モデル

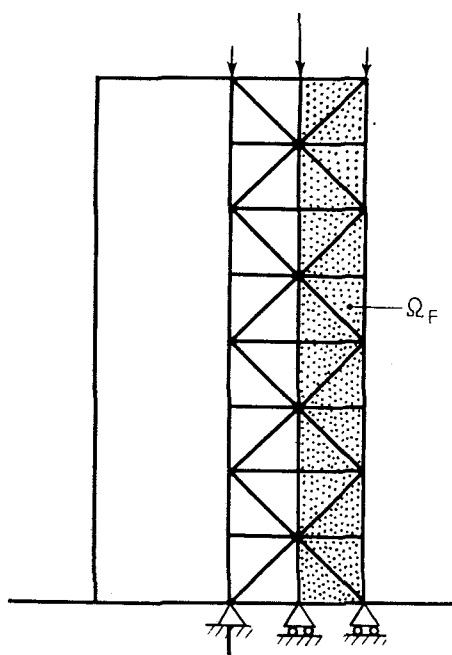


図3. 6 要素分割

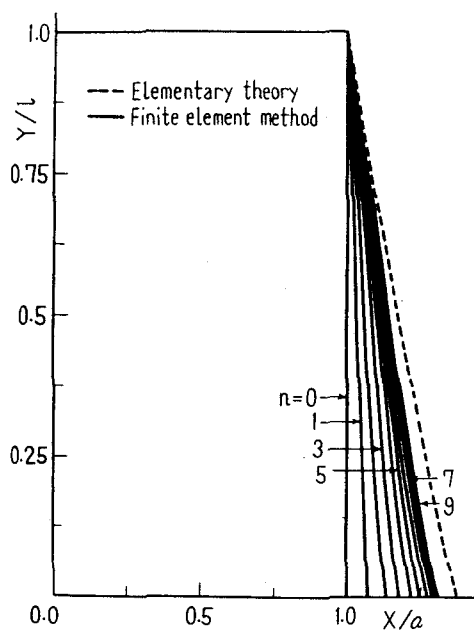


図3. 7 形状変化過程

中心に回転して得られる図3. 10のような円柱を考え、荷重条件として上端面に一様分布荷重 p ($p/\gamma l = 1.25$) を作用させて自重を考慮したときの最適形状を求めた。2次元の例題同様、 $r=a$ の円柱側面を S_F とした。解析に用いた要素分割の $r-z$ 断面は図3. 6と同様である。本モデルも自重の作用方向の応力すなわち σ_z が支配的であり、ほぼ単軸の圧縮応

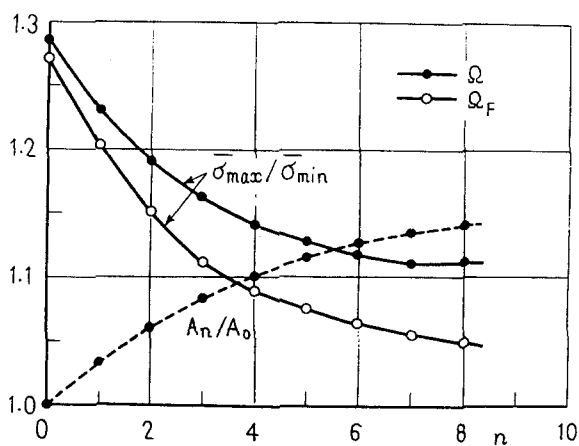
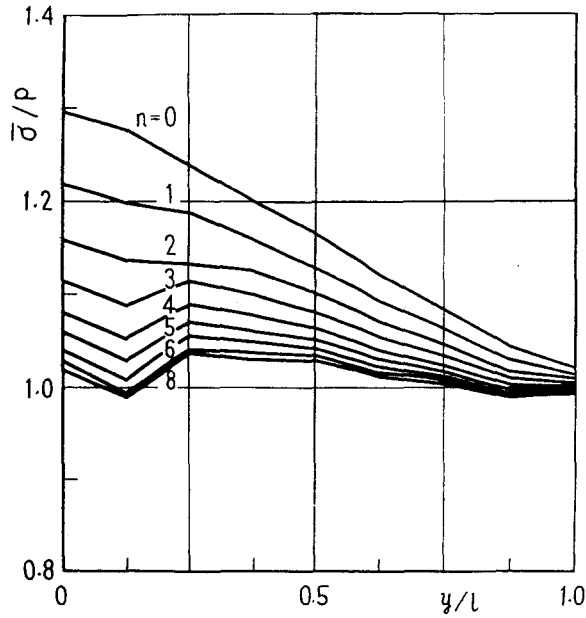
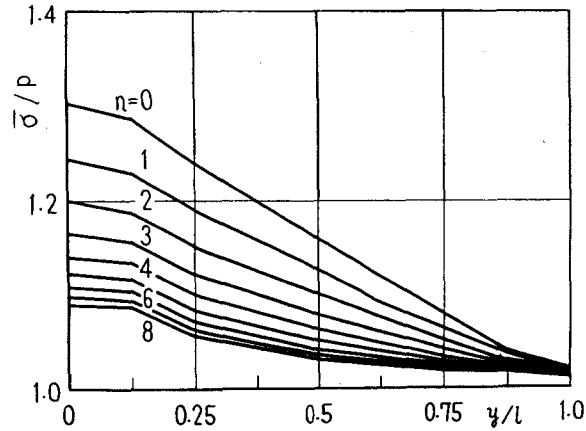


図3. 8 応力比および面積の変化



(a) S_F 境界の $\bar{\sigma}$ 分布



(b) y 軸上の $\bar{\sigma}$ 分布

図3. 9 応力分布の変化過程

力場と見なせることから式 (3. 10) において $\alpha_r = \alpha_\theta = 0$, $\beta_r = \beta_\theta = 1.0$ として変換係数 ξ, η を決定した. また破損条件として最大圧縮応力に注目し, 2次元問題と同様 S_F 境界を指数関数に近似して形状の平滑化を図った.

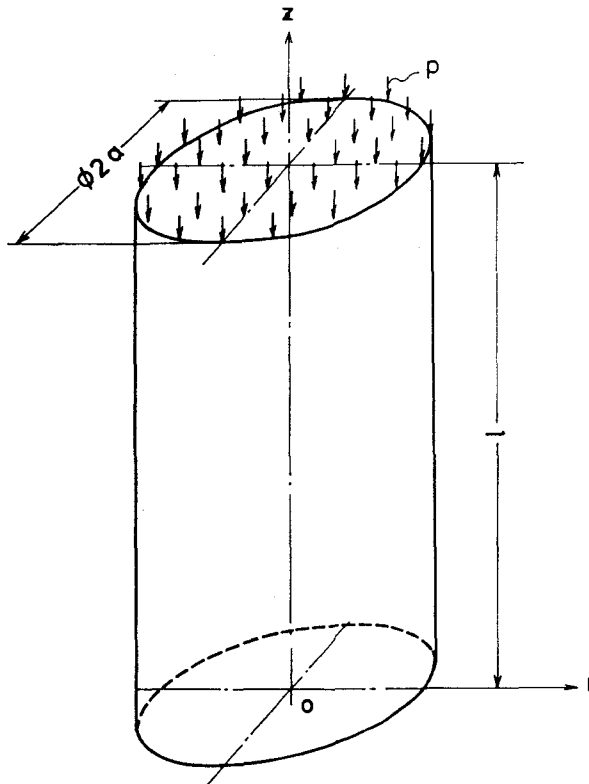


図3. 10 平等強さの柱 原形モデル

図3. 11は $n=12$ までの形状変化過程を示したものである。同図に初等理論による平等強さの形状を破線で示した。また図3. 12には Ω および Ω_F 域での σ_z の絶対値の最大、最小応力比および体積変化を示す。これより応力比は $n=10$ の形状が最小であり、このとき体積変化は $V_{n=10}/V_0=1.43$ と初等理論値 $V_{th}/V_0=1.49$ に比較して若干低目である。次に S_F 境界および対称軸上での応力分布の変化過程を図3. 13に示す。これらの結果より2次元の例題と同様の結論が導けよう。すなわち、本解析結果と初等理論解との相違は本解析が3次元軸対称体の応力解析を基礎としていることに起因するものであり、したがって本解析結果のほうが真の最適形状により近いと言える。

3. 4. 2 2次元遠心応力場の形状決定

2次元遠心応力場の設計例として、はずみ車、ベルト車あるいは大径歯車の形状として従来から用いられているスポーク付き回転円板を取り上げた。

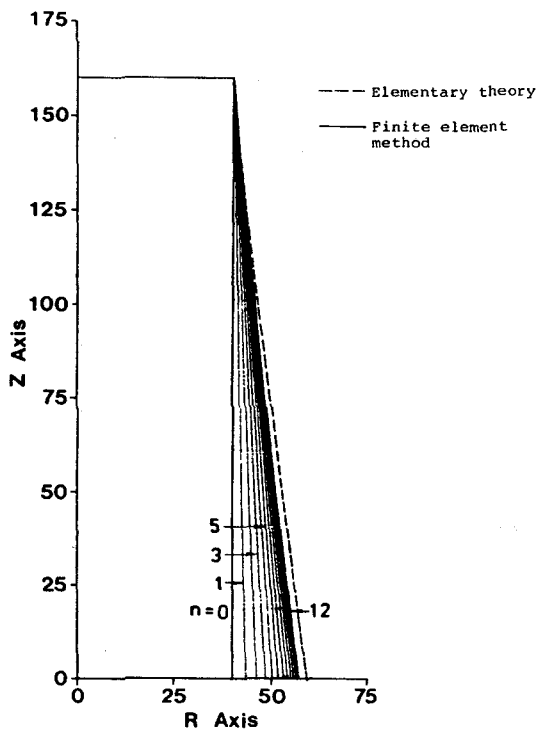


図3. 11 形状変化過程

スポーク付き回転円板の形状自身を強度設計の観点から求めた研究はなく、したがって本設計例題として取り上げることは実用上意義あることと考える。

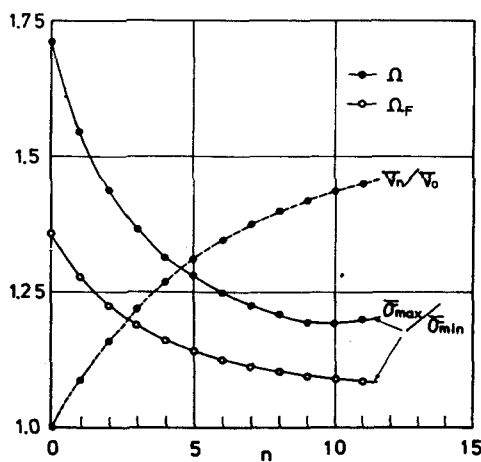


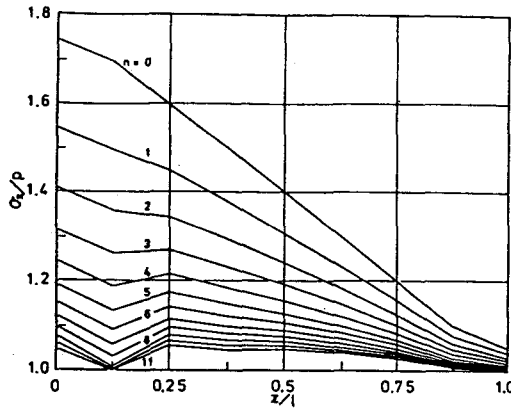
図3. 12 応力比および体積の変化

スポーク付き回転円板に関する応力

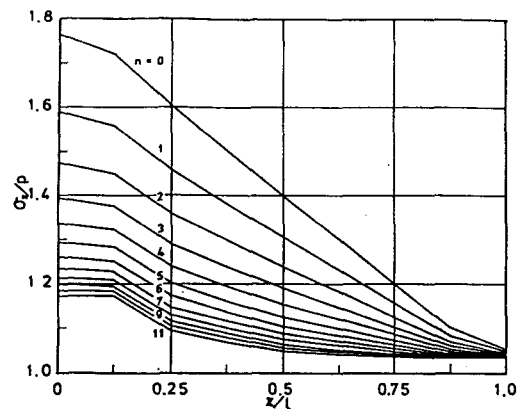
解析は古くはTimoshenko

〈56〉、永島〈57〉によって、また近年では井沢〈58〉によって行なわれているが、これらでは種々の大きな仮定がなされており、したがってその解析も概略的であり、その結果は単に目安とする程度のものである。しかしながらこの方面のさらに進んだ研究がほとんどなされていないために、現在もなお設計の基礎はそれら古典的な強度計算式や設計慣習〈59〉に頼っているのが現状である。ただ近年、井沢らは有限要素法による詳細な応力解析を試み、さらに実際にスポーク付き回転円板のひずみ測定と回転破壊試験をも実施している〈60〉。しかし、

(1) 設計例 まず円板の外径に比較して板厚が薄いとして2次元平面応力状態を仮定する。図3. 14に示すような形状寸法の4本スポーク付き回転円板を設計モデル基本原形の1つとして採用した。すなわち、リム内径を $2a$ 、リム外径を $2b$ 、ボス外径を $2c$ 、ボス内径およびスポーク幅を d とすると、 $a/b=0.85$ 、 $c/b=0.25$ 、 $d/b=0.2$ のスポーク幅が一定で比較的広いモデルである。その設計条件としてリム外周およびボス内周の形状を規定して不変とし、面積一定条件の下でリム内



(a) 自由境界（側面）の σ_z 分布



(b) z 軸上（中心）の σ_z 分布

図3. 13 応力 σ_z 分布の変化

周，スポークおよびボス外周での応力が一様となる形状の決定を試みた。なお解析対象材料として，後述の回転破壊試験に用いたレジソモタルの材料定数（表3. 1参照）を用いた。

さて解析領域として対称性のためモデルの1/8領域のみをとり，まず形状変化の促進を図るため図3. 15 (a) に示す比較的粗

い要素分割を用いて解析を実施した。形状変更可能なりム内周，ボス外周およびスポーク部を設計境界 S_F とし，同図のドット域を設計領域 Ω_F としてパターン変換を実施して形状の最適化を図った。

なお弾性破損条件として最大主応力説を採用し，また面積を一定に保つために設計基準応力 σ_a を Ω_F 域の重み付き平均

$$\sum \bar{\sigma}_j A_j / \sum A_j$$

に設定した。図3.

16 (a) にその形状変化過程を示す。

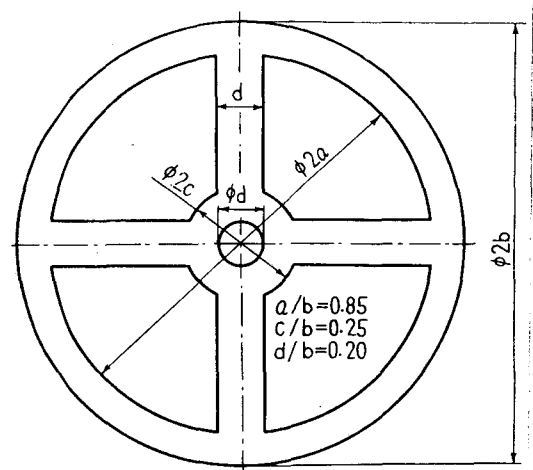


図3. 14 4本スポーク付き回転円板原形モデル

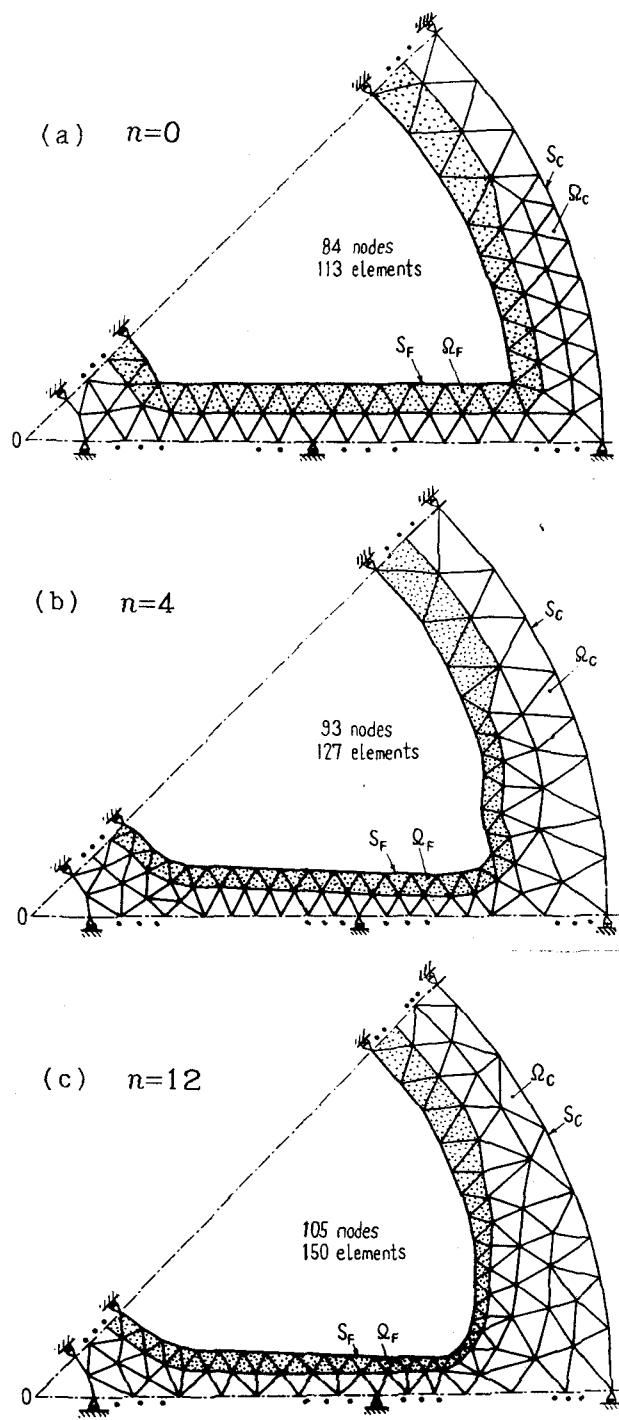


图 3. 15 要素分割

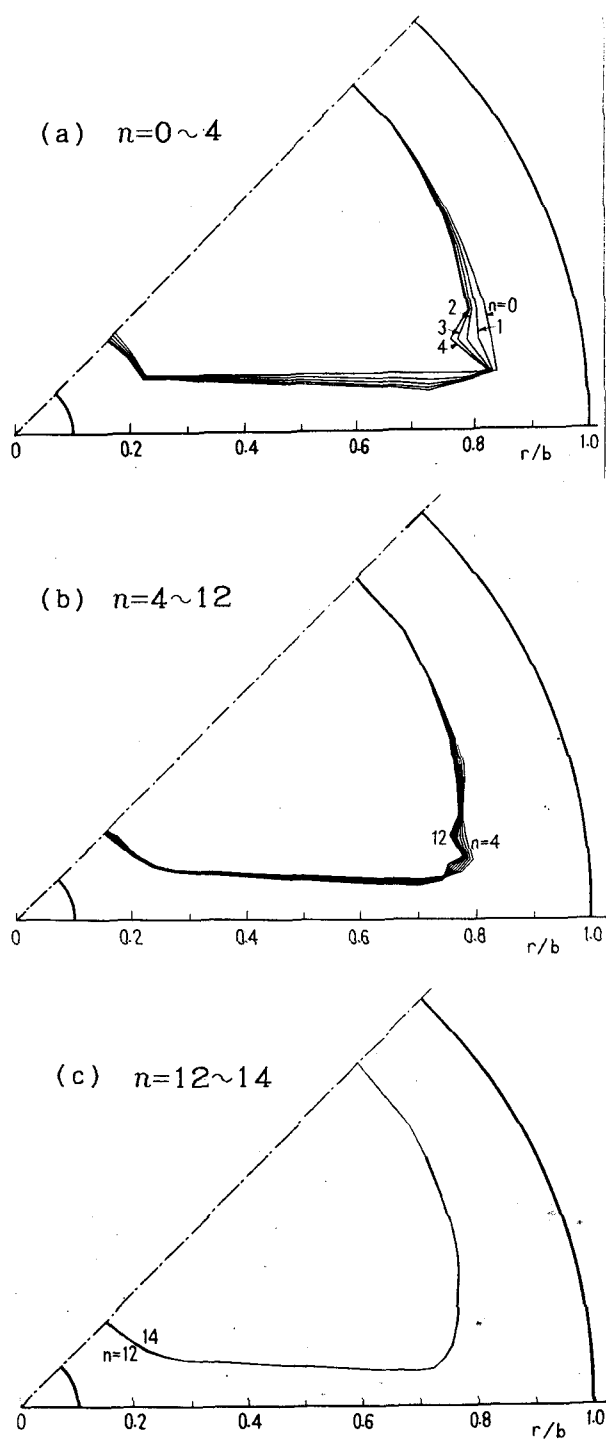


图3. 16 形状变化过程

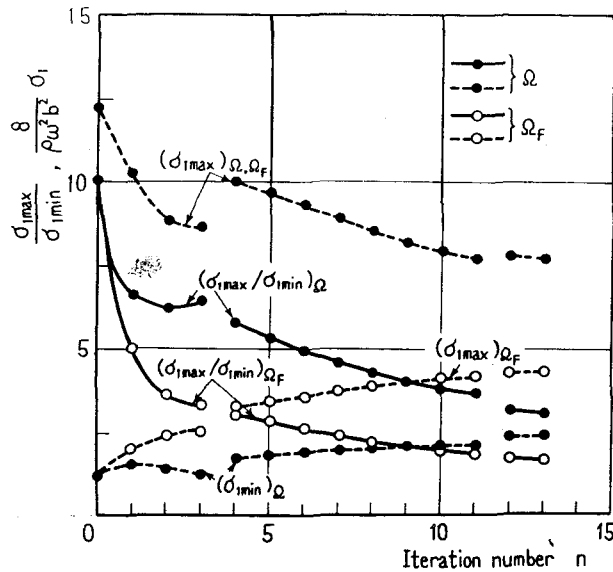


図3. 17 最大, 最小応力およびその比の変化

定された $n=4$ の形状のスポーク付け根近傍のリム内周の要素が, あらかじめ設けておいた解析精度保持のための要素面積変化に対する制約条件を満たさなくなったので, 計算を停止して要素分割を図3. 15 (b) に改めた. その際にスポーク付け根部における凹状の形状変化の不均一性を修正するために S_F 境界の形状の平滑化も併せて行なった. 同様の操作を $n=12$ においても実施したが, $n=12$ 以後用いた要素分割を図3. 15 (c) に示す. また $n=4 \sim 12$ および $n=12 \sim 14$ の形状変化過程を図3. 16 (b), (c) にそれぞれ示す. 同図

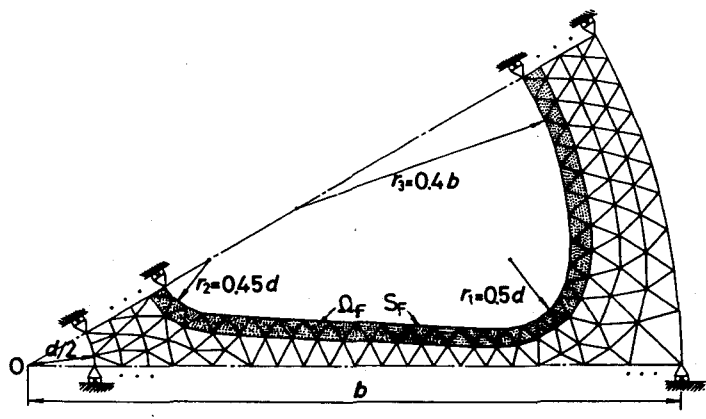
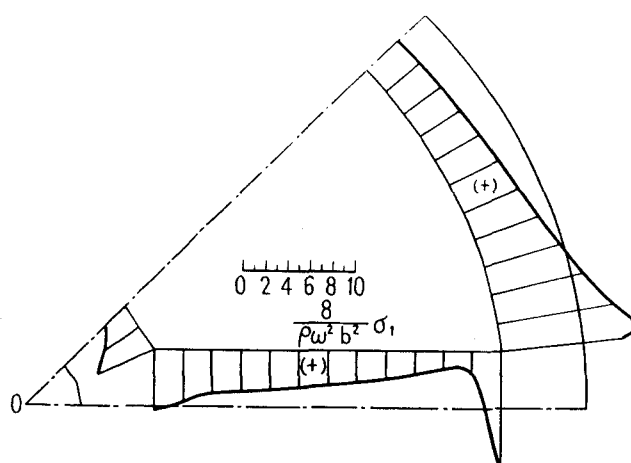


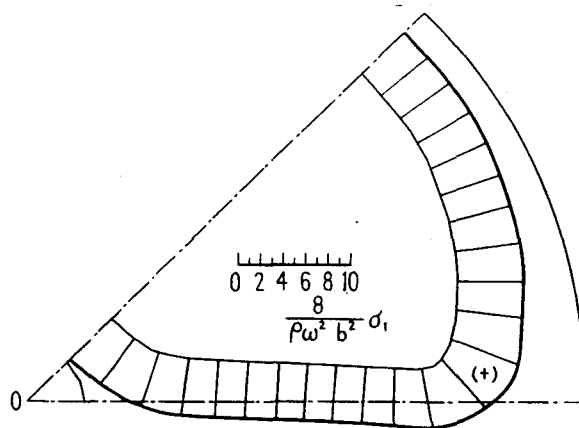
図3. 19 6本スポーク付き円板 原形とその要素分割

より $n=14$ の形状はリム幅がスポーク付け根に近づくにつれて増大し、スポーク付け根のリム幅は最小幅の約 1.7 倍となっており、リムとスポークの接続部の曲率半径は $r_1=0.33d$ と比較的小さい。一方、スポークとボスの接続部の曲率半径は $r_2=1.18d$ とかなり大きな R を持つ形状となっている。

またスポーク幅は外周に向かって約 $1/10$ テーパとなっており、これは従来から知られているはずみ車の設計慣習〈59〉のボス付け根とリム付け根の寸法比 $5:4$ より大きなテーパ（最適形状では約 $3:2$ ）となっている。さらにボス内外径比は $2c/d=2.12$ と設計慣習の $1.6 \sim 1.8$ よりも大きい。次に図 3.17 にモデル全域 Ω および設計領域 Ω_F での主応力 σ_1 (2 主応力を σ_1, σ_2 ; σ_1



(a) 原形モデル



(b) 最適形状

図 3.18 設計境界の応力分布

$\geq \sigma_2$ とする) の最大値、最小値およびその比 $\sigma_{1\max}/\sigma_{1\min}$ の変化過程を示す。同図中の ρ は材料密度、 ω は回転角速度である。 Ω_F 域の応力比の変化をみると原形モデルで 10.09 であったものが、繰り返しの初期の段階で大幅に減少し、 $n=13$ では 1.68 となっている。また図 3.18 (a), (b) には $n=0$ および $n=13$ における S_F 境界接線応力分布を比較して示す。 $n=0$ の分布は応力集中を考慮した細分割要素によって得た結果である。同図より原形モデルではスポーク付け根のリム内周に激しい応力集中を生じており、ボスとの接続部においても若干その傾向がみられるのに対し、 $n=13$ の形状ではほとんど均一な応力分布となっている。以上の結果から $n=13$ あるいは 14 の形状はほぼ最適形状に収束していると言

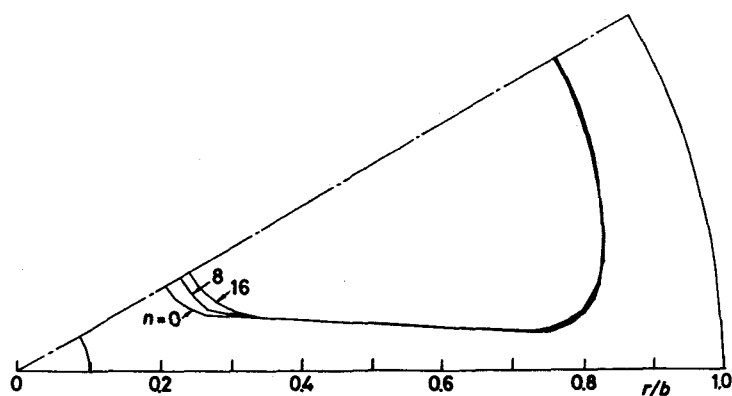


図3. 20 6本スポーク付き円板の形状変化過程

え、したがって $n=14$ の形状を次に示す回転破壊試験の最適形状モデルとした。なお面積変化は原形モデルに対して1%内の変化にとどまっており、面積一定の条件も満足されている。

次に上述の4本スポーク付き円板に等しい面積を有する6本スポーク付き円板の解析結果を示す。設計条件を同一とし、上記の4本スポーク付き円板の結果を考慮して図3. 19に示す形状を基本原形として形状決定を実施した。その形状変化過程を図3. 20に、また16ステップの繰り返しの後求めた最適形状を図3. 21にそれぞれ示す($r_1=0.43d$, $r_2=0.64d$)。さらに最適形状における設計境界 S_F 上の主応力分布を図3. 22に示す。これらの結果より、十分に応力分布の均一化が図られており、ボス外径およびボスとスポークの接続部の曲率半径 r_2 の相違を除けば、4本スポーク付き円板とほぼ同様の設計指針が得られる。

(2) 回転破壊試験 上述の解析結果の有効性を実証するために4本スポーク付き円板の原形モデルおよび最適形状モデルの回転破壊試験を実施した。本設計が弾性設計を対象としていることから、円板試料

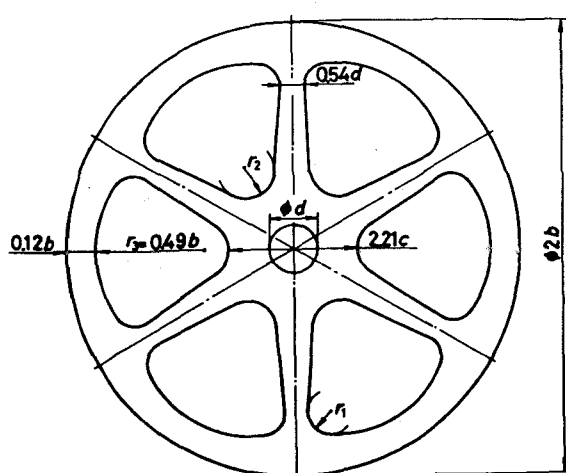


図3. 21 6本スポーク付き円板の最適形状

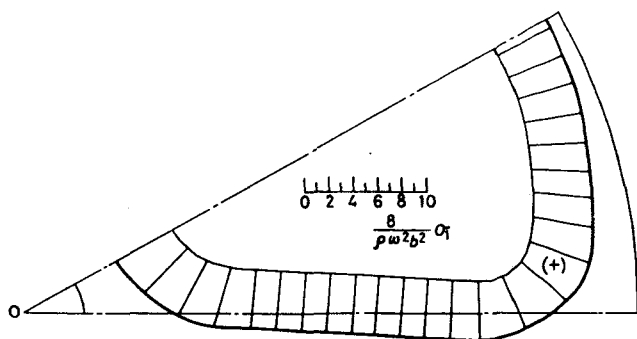


図3. 22 6本スポーク付き円板 最適形状の応力分布

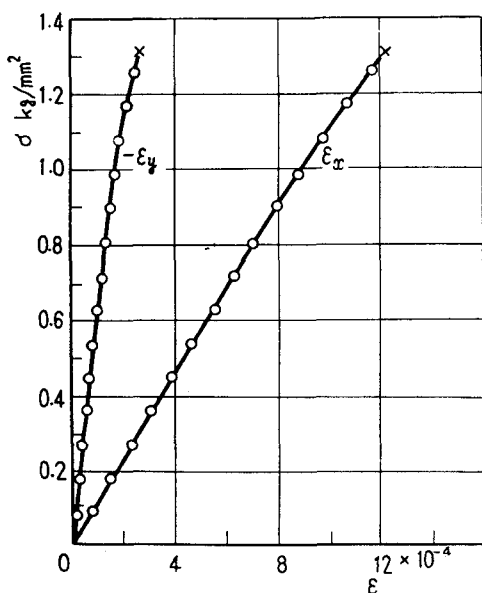


図3. 23 レジンモルタルの応力-ひずみ線図

として破壊まではほぼ完全な
ぜい性を呈し、しかも型成
形の容易なレジンモルタル
を採用した。それはエポキ
シ樹脂（重量比でエピコー
ト828：チオコールLP
3：ジェチレントリアミン
=100：15：10）を
結合剤として粒度35メッ
シュ以下の砂を固めたもの

で、結合剤の重量含有率20%のものである。そのレジンモルタルの機械的性質および比重量 γ を表3. 1に示す。また図3. 23には引張試験における応力-ひずみ線図の一例を示す。これより破断まではほぼ完全な線形関係を保つ材料であることが了解されよう。

さて回転破壊試験の試料形状として図3. 14に示した設計モデル原形と図3. 16 (c) の $n=14$ の形状から決定した図3. 24に示す最適形状円板（リム外径 $2b=130$ mm、板厚10 mm）を木型で鑄造し、安定した強度を出すため常温にて20日間養生させ実験に供した。

表3. 1 レジンモルタルの機械的性質

	引張り強さ σ_B kg/mm ²	縦弾性係数 E kg/mm ²	ポアソン比 ν	比重量 γ g/cm ³
平均値	1.325	1278	0.279	1.98
標準偏差	0.074	133	0.031	—

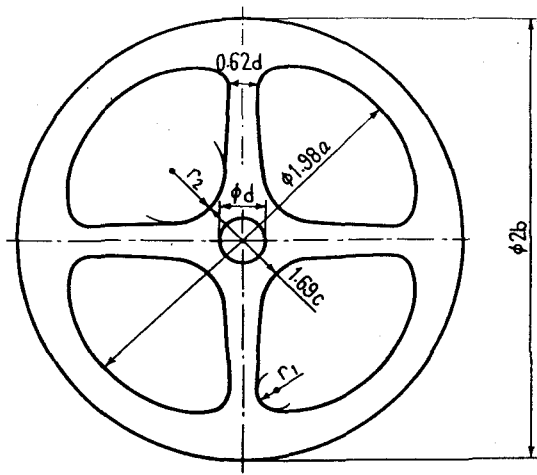


図3. 24 4本スポーク付き円板 最適形状モデル

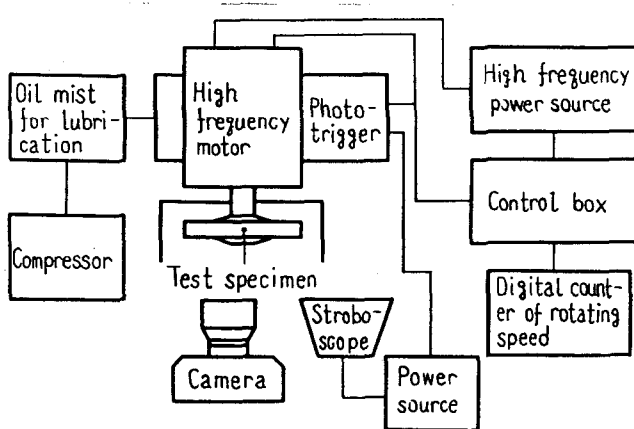


図3. 25 回転破壊試験装置ブロック図

次に回転破壊試験装置のブロック図を図3. 25に示す。すなわち、オイルミストで強制潤滑された高周波モータ（出力750W、回転数範囲7100～35000rpm）の主軸に試料を直接取り付け、回転数を徐々に増して（増速回転数76rps）試料を遠心力によって破壊させるものである。その試料の取り付けに際しては、偏心のないよう細心の注意を払い、試料のボス部を締め付けナットで主軸に固定した。また試料の外周から2～3mm離れた位置に外周に沿ってエナメル線（直径0.1mm程度）を張り巡らせ、その切断をトリガとして破壊回転数を検知し、それと同時にストロボを発光させて破壊瞬間時の写真撮影もできるようにした。

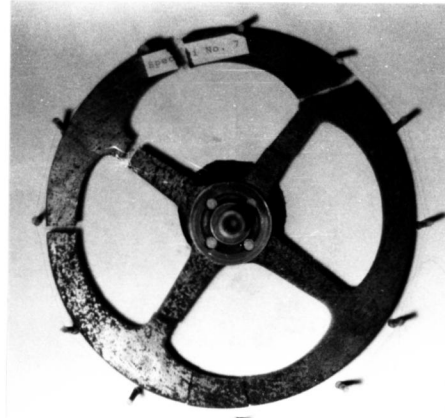
破壊試験は原形モデル、最適形状モデル各々10個程度の円板について実施し

表3. 2 回転破壊試験結果と各破壊説による推定値

破壊回転数 rpm	実 験 値		推 定 値	
	平 均 値	標準偏差	最大主応力説	平均応力説
基本原形 $N_{n=0}$	11908	239	8401	13690
最適形状 N_{opt}	15120	789	12535	14451
$N_{opt} / N_{n=0}$	1.270	—	1.492	1.056



(a) 原形モデル



(b) 最適形状モデル

図3. 26 破壊瞬間写真

た。その結果得られた破壊回転数の平均値を表3. 2に示す。同表より本手法で決定した最適形状は原形モデルに比較して、平均破壊回転数で27%の上昇が実証された。また図3. 26には各形状の破壊瞬間写真の一例を示す。同図から観察されるように原形モデルにおけるき裂は応力集中の激しいスポークとリムの接続部で発生し、リム外周に向って半径方向に貫通している。それに対して最適形状モデルでは、リム、スポークおよびボス各部の最小断面付近では同時にき裂が発生、貫通している。この破壊形態は先の図3. 18の応力分布からも容易に予想できるものである。

さて表3. 2には実験結果と共に従来から提唱されている最大主応力説および平均応力説〔61〕による推定破壊回転数を示したが、これらの値はレジンモルタルの引張り強さ σ_B および解析結果から得られた応力分布をもとに算出したものである。なお平均応力説とは本来、中空回転円板の r 軸上の σ_θ の平均値が1軸の引張り強さに達したとき破壊を生ずるとするものであるが、ここではき裂の発生する断面における垂直応力の平均値が引張り強さ σ_B に達する回転数をもって推定値とした。同表の値を比較すると応力集中の激しい基本原形の実験値は両説による推定値の間にあるが、若干平均応力説に近い値を示している。一方、最適形状モデルの実験値は両推定値より大きい値を示しており、また回転数の上昇率では実験値は両説による値のほぼ中間の値を示している。したがっていずれの形状にも適用可能な破壊則を見い出すことは困難であるが、最大主応力説を適用して決定した最適形状が強度的にきわめて有利であることは明らかである。よって先に説明したスポーク付き回転円板の形状についての設計指針は十分に信頼できるものと考えらる。

3. 4. 3 軸対称遠心応力場の形状決定

基本的な機械要素として重要な回転円板あるいは回転体の応力解析および破壊に関する研究〈61〉～〈66〉は以前より盛んに行なわれているが、その最適形状について論じたものは少なく、SeiregとSuranaが2次元解析的に回転円板の板厚分布を求めた研究〈67〉などが見られるにすぎない。そのような設計問題に対しても無論、軸対称体に対する本手法の適用が可能である。そこで、まず最適形状が理論的に既知な平等強さの中実回転円板の形状決定問題に適用し、それらの解を比較することにより本手法の妥当性を吟味した結果を示す。次に実用的設計例の1つとしてリム付き中空回転円板の強度的最適形状を決定し、その形状の有効性を回転破壊試験を実施して確認した結果について示す。

(1) 平等強さの中実円板 原形モデルとして図3. 27に示すような直径 $2b$ 、一様厚さ $2h$ ($h/b=0.15$)の中実円板が外周 $r=b$ に一様引張り応力 σ_0 を受ける場合を考えた。設計条件として引張り荷重を受ける外周 $r=b$ を境界 S_C としてその形状を規定した。したがって $z=\pm h$ の面を設計境界 S_F として繰り返し計算により最適形状を求めた。解析はモデルの対称性のため $1/2$ 領域のみをとり、図3. 28に示すような比較的粗い要素分割を採用し、ドット域の要素群を Ω_F とした。また弾性破壊条件として最大主応力説を採用し、基準応力として一様引張り荷重 σ_0 をとり、境界 S_F の応力が σ_0 に近づくよう σ_r, σ_θ の両応力に

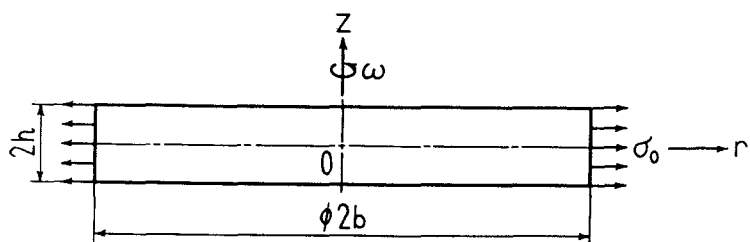


図3. 27 平等強さの回転円板 原形モデル

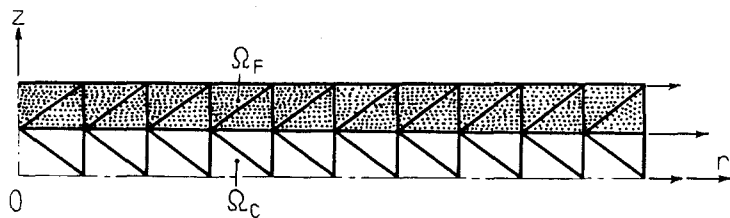


図3. 28 要素分割

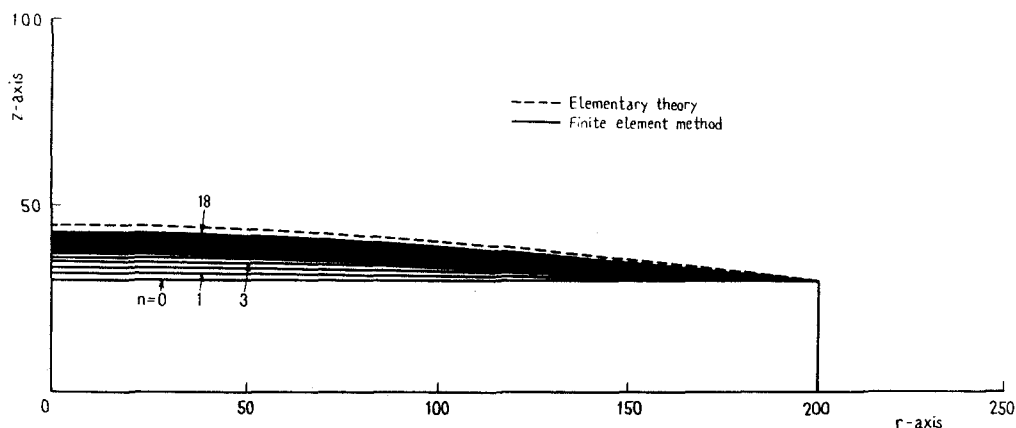


図3. 29 形状変化過程

注目して形状変更量を決定した。

図3. 29は18ステップまでの形状変化過程を示したものであるが、図中に破線で2次元理論による平等強さの形状をも併記してある。なお円板の密度を ρ ，回転角速度を ω とすると2次元理論形状が

$$z = h \exp \left\{ \frac{\rho \omega^2}{2\sigma_0} (b^2 - r^2) \right\} \quad (3.33)$$

で与えられる〔68〕ことから各ステップでの S_F 境界形成節点群を指数関数にて最小二乗近似し，形状の平滑化を図った。図3. 29より各ステップで安定した形状変化を示し，18ステップの繰り返してほぼ収束して

いる。 $n=18$ の形状は2次元理論による平等強さの形状よりも全体的に板厚が薄く，体積は約2.5%小さい。次に図3. 30には形状変化に伴うモデル全領域 Ω および設計領域 Ω_F での最大，最小主応力比 $\sigma_{\max}/\sigma_{\min}$ および体積比 V_n/V_0 の変化過程を示した。応力比は原形モデルから最終形状までで， Ω ， Ω_F 域の各々で1.28→1.07，1.28→1.0

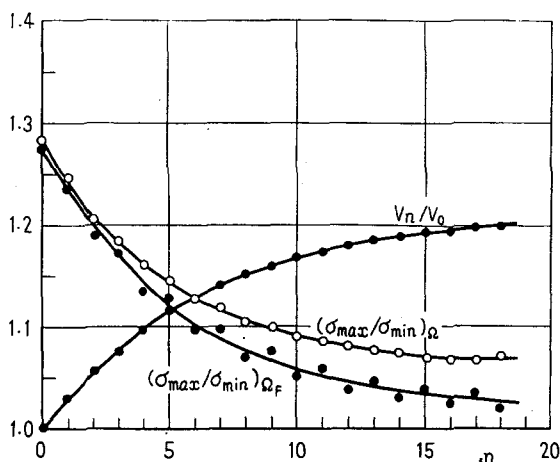


図3. 30 最大，最小主応力比および体積の変化

2 と減少し、一方体積は約 20% 増加している。次に $n=0$ と 18 の設計境界 S_F および中央面 ($z=0$) における応力分布を図 3.

31 に示す。図中の 2 点鎖線は 2 次元理論解である。

図中の σ_r は厳密には r - z 面内の最大主応力を表わしたものであるが、便宜的に以後このように記す。同

図より $n=18$ のパターン

の S_F 境界では $\sigma_r = \sigma_\theta = \sigma_0$ と均一化されており、モデル表面では一様な 2 軸応力状態にある。しかし最終形状の中央面の σ_r, σ_θ 分布から容易に想像できるようにモデル内部では両応力とも σ_0 よりも高く、中央面では最大 5% 程度の差があり、全域 3 次元的な分布を示している。

(2) リム付き中空円板 次に本手法の実用的な設計例題への応用の 1 つとして外荷重を受けないリム付き中空円板を対象として実施した解析結果を示す。図 3. 32 に断面形状を示すように基本原形として内径 $2a$ 、外径 $2b$ ($a/b=0.2$)、厚さ $2h$ ($h/b=0.1$) の一様厚さの中空円板を考えた。そして同図中にドット域で示すように外周から幅 c ($c/b=0.2$) の領域をリム部としてその形状を規定した。つまり $z=\pm h$ ($a \leq r \leq b-c$) の境界を S_F として形状を修正する。また内周 $r=a$ の面での r, z 変位を完全拘束とし、全重量一定条件の下で形状の最適化を図った。なお弾性破損条件として最大主応力説を採用し、基本原形にお

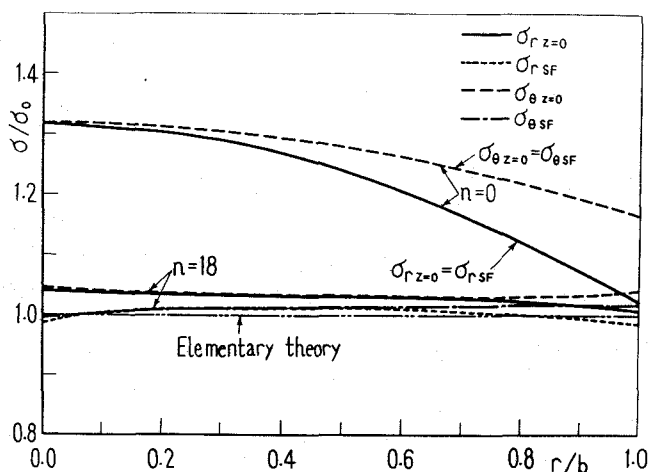


図 3. 31 応力分布

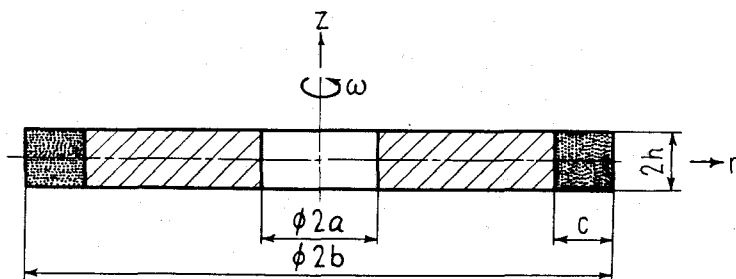


図 3. 32 リム付き中空円板設計モデル原形

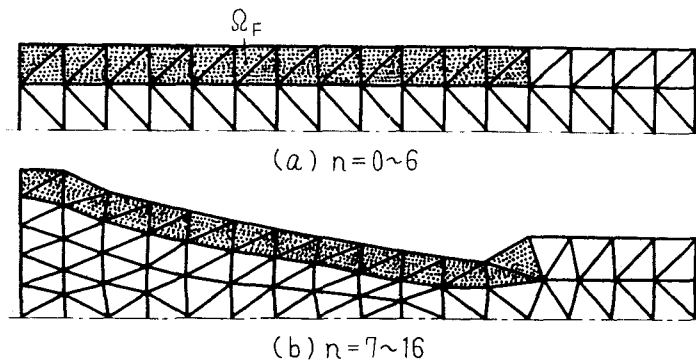


図3. 33 要素分割

いて支配的な σ_r (図3. 36 参照) に注目してパターン変換係数を決定した。

原形モデルにおける要素分割を図3. 33 (a) に示すが、モデルの対称性のため1/2領域のみについて解析を実施した。同図中のドット域が設計領域 Ω_F である。なお形状変化の平滑化を図るため、各ステップで要素分割の方向を図2. 12の例のように改めた。図3. 34には16ステップまでの形状変化過程を示すが、途中第7ステップで図3. 33 (b)の要素分割に改めた。図3. 34より形状変化は内周の板厚が厚く、リム付け根で薄くなっている。なお同図の16ステップ目の形状より後述の回転破壊試験における最適形状モデルを決定した。次に図3. 35は Ω , Ω_F 域での応力 σ_r (厳密には $r-z$ 面内の最大主応力を表わす) の最大値、最小値およびその比の変化過程を示した。これより Ω 全域での σ_{rmax} は4.95→3.32へと約33%減少し、また Ω_F での応力比 $(\sigma_{rmax}/\sigma_{rmin})_{\Omega_F}$ は3.80→1.79へと、特に初期のステップで大幅に減少している。次に原形および $n=16$ の最終形状における S_F

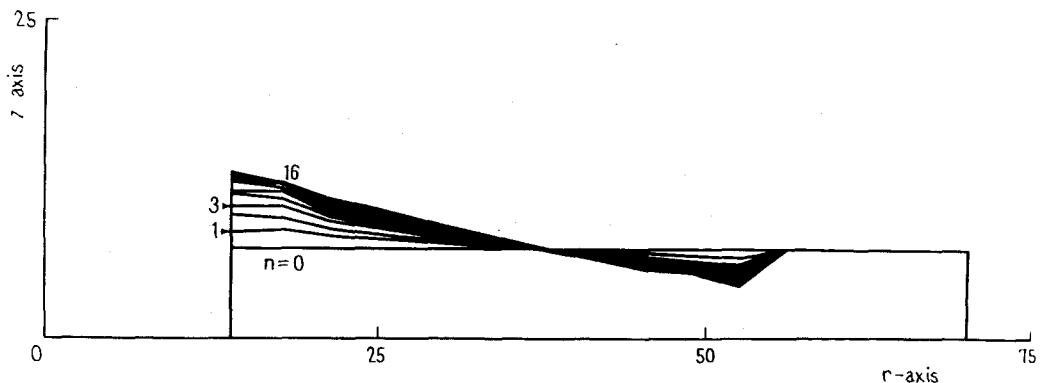


図3. 34 形状変化過程

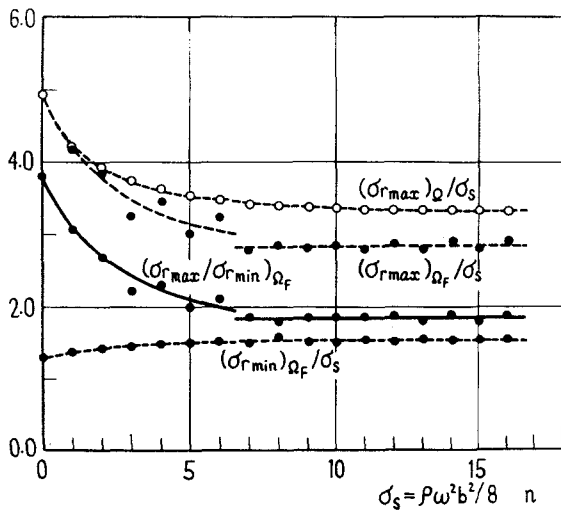


図3. 35 最大、最小応力およびその比の変化

した。表3. 3にその機械的性質などを示す。また図3. 37には引張り試験での応力-ひずみ線図の一例を示すが、これより黒鉛が破壊まではほぼ弾性的挙動を示すことが了解されよう。

さて供試片として図3. 38 (a), (b)に示す断面形状寸法の一様厚さの原形モデルお

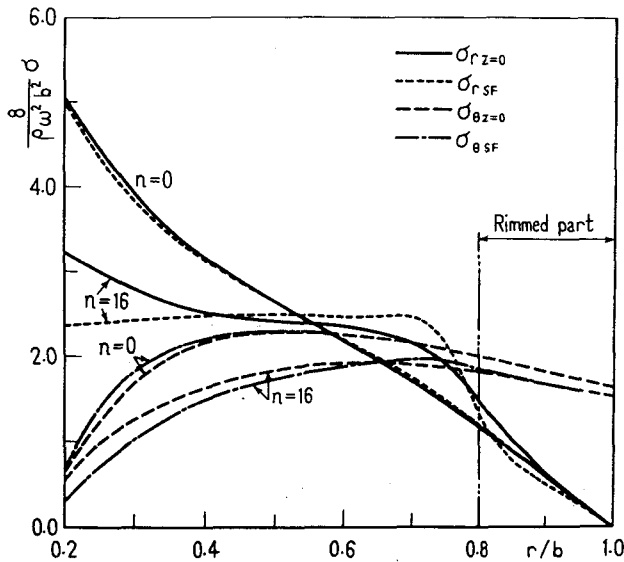


図3. 36 応力分布

境界と中央面での σ_r, σ_θ の応力分布を図3. 36に示す。両形状の分布を比較すると、 S_F 上の σ_r 分布はリム部を除いた設計境界全域ではほぼ均一化され、同時に σ_θ は全体的に減少の傾向を示している。また中央面の応力分布も、 S_F 境界に比較して緩慢ではあるがかなり均一化されている。

(3) 回転破壊試験 上述のリム付き中空円板が実際にどの程度強度的に有利であるかを検討するために回転破壊試験を実施した。試験片材料として黒鉛を採用

および解析より求めた最適形状円板を採用した。最適モデルの厚さ変化部はリム付け根部をR 3. 64の円弧、他の部分は19本の直線にて近似し、NC旋盤で加工作製した。また設計条件としての内周固定条件は黒鉛に比較して弾性係数の大きい鋼材製のボス（縦弾性係数約50倍、半径方向厚さ5mm）を中心部にはめ込んでエポキシ系接着剤で接着することにより実現させた。なお実験装置はスポー

ク付き回転円板の場合と同様のものを用いた。

破壊試験は各々 5 個の試料について実施したが、その結果を表 3. 4 に示す。同表より本設計手法による最適形状円板は一樣厚みの円板に比較して平均破壊回転数で 1. 1. 4 % の上昇が実証された。なお同表には前述の解析で得られた応力分布と黒鉛の引張り強さから計算される最大主応力説、平均応力説による各々の推定値およびその比を付記したが、平均応力説による値は若干低目ではあるが実験結果をよく推定している。

ただし、ここで採用した平均応力説は従

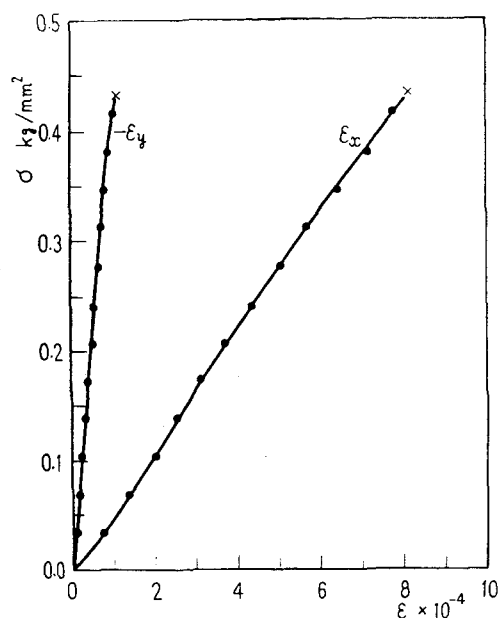


図3. 37 黒鉛の応力-ひずみ線図

表 3. 3 黒鉛の材料定数

	平均 値	標準偏差
引張り強さ σ_B kg/mm ²	0.408	0.057
縦弾性係数 E kg/mm ²	443	63
ポアソン比 ν	0.125	0.016
密度 ρ kg·sec ² /mm ⁴	1.665×10^{-10}	—

表 3. 4 回転破壊試験結果と各破壊説による推定値

(単位 rpm)

破壊回転数	実 験 値		最大主応力説 による推定値	平均応力説 による推定値
	平均 値	標準偏差		
一樣厚みの中空円板 $N_{n=0}$	12420	250	8320	11940
本報設計手法による リム付き円板 $N_{opt.}$	13840	760	10500	13390
$N_{opt.}/N_{n=0}$	1.114	—	1.262	1.121

来から知られている σ_θ が支配的な回転円板に対し、その直径断面における σ_θ の平均値が1軸の引張り強さに達するとき破壊するとする説〈61〉をスポーク付き回転円板の場合と同様、一般的に拡張したものである。つまり本実験モデルは図3. 36からも明らかなように σ_r が支配的であるから、その説としては図3. 39の模式図に示すように円板の任意の弦で作られる断面の垂直応力 σ_n の平均値が1軸の引張り強さに達すると

き、その位置で円板が破壊すると考えるものである。そこで円板の中心から弦までの距離 r に

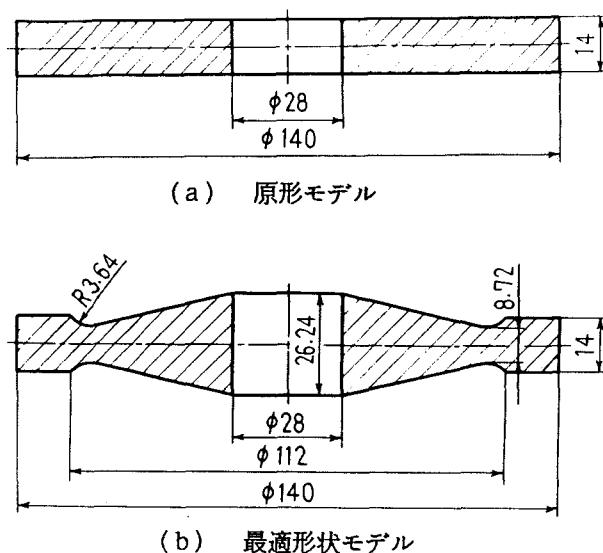


図3. 38 実験モデル寸法形状

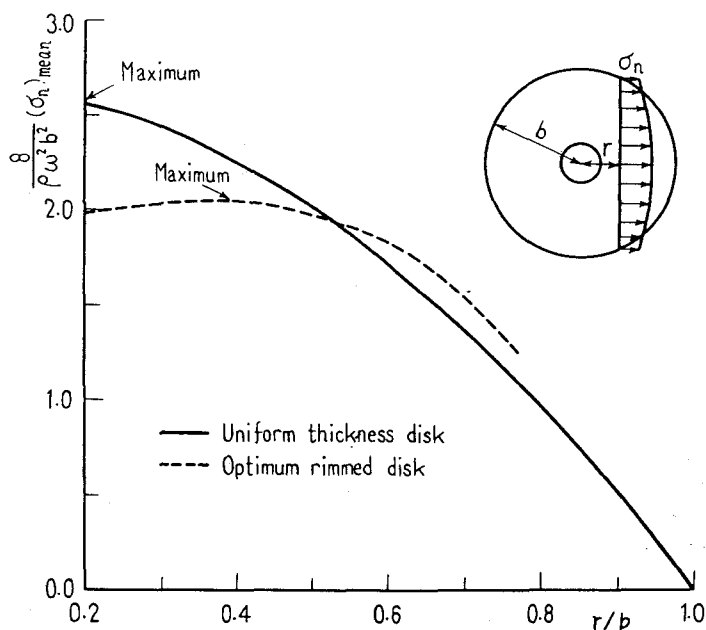


図3. 39 平均応力 $(\sigma_n)_{mean}$ の分布



(a) 原形モデル



(b) 最適形状モデル

図3. 40 破壊瞬間写真

よるこの平均応力 $(\sigma_n)_{mean}$ の分布を示した図3. 39に注目すると、 $(\sigma_n)_{mean}$ が最大となるのは原形モデルでは $r/b=0.2$ すなわち内周であり、一方最適形状モデルでは $r/b=0.4$ 付近である。またその位置がき裂発生箇所であり、最適形状モデルでは最大主応力説による位置と大きく異なる。

さて、実際の破壊は図3. 40 (a), (b) の破壊瞬間写真の一例に示すように、原形モデルではほぼ内周で、また最適形状モデルでは $r/b=0.4$ 付近でそれぞれ接線方向にき裂が進展している。この点からも σ_r が支配的な回転円板の破壊はここに提案した平均応力説に従うと言えよう。

以上の結果より、本手法によって決定した軸対称最適形状の強度的優位性が実験的にも確認できた。しかし、本手法はそもそも自由境界上の応力分布の均一化を目的としたものであり、上述のリム付き回転円板の例のように破壊が断面の平均応力に依存して生ずる問題では、設計境界の応力分布の均一化よりも平均応力分布の均一化を図ることが、より厳密な最適形状を決定する上で必要となってくる。

3. 5 結 言

本章では、物体力場における 2 次元物体および 3 次元軸対称体の形状最適化手法として、尾田によって提示された 2 次元応力場の要素パターン変換法および第 2 章に述べた軸対称応力場の要素パターン変換法の拡張、適用を図った。すなわち、物体力場専用の効果的なパターン変換法を提示し、それを有限要素法に組み込んだ場合の理論的妥当性を明らかにした。

次に物体力として自重あるいは遠心力が作用する場合の平等強さの形状決定問題に適用し、その解への収束性および有効性を確認した。さらに本手法をスポーク付き回転円板およびリム付き回転円板の実用的設計例に対しても適用し、その結果求めた形状の強度的優位性を回転破壊試験によって実験的に確認した。

第4章 要素パターン変換法による複合体の形状最適化法

4.1 序言

接着継手をはじめとする機械要素や複合材料の生地組織と第2相材などに見られる2種類以上の材料で構成される複合弾性体は、弾性係数およびポアソン比の相違によってその接合境界に応力集中を生じ易く、境界の接着強度が十分強い場合にはその応力集中が破壊を引き起こすことが多い。したがって、境界形状の最適化問題は強度設計あるいは材料設計の立場からも重要な課題である。

そこで本章では、2次元応力場における複合体の完全接着された接合境界の接線方向の垂直応力分布が境界形状決定の支配的要因である問題、すなわち接線応力分布の局所的な応力集中を緩和することによって複合体の強度の向上が期待できる問題を対象とし、尾田が提示した2次元問題に対する要素パターン変換法〔27〕を拡張した複合体の最適境界形状決定の簡便な手法を提示し、それを有限要素法に組み入れた場合の妥当性を理論的に検討する。さらに本手法を2軸の引張り応力を受ける長方形板中に存在する介在物の最適形状決定問題に適用して、その有効性を検討した結果について示す。

4.2 複合体の要素パターン変換法

4.2.1 パターン変換法の概念

2種類の材料で構成される複合体の設計モデルを図4.1に示す。すなわち、設計条件によって荷重および変位拘束条件が与えられた場合に、異種材料1, 2からなる各領域 Ω_1, Ω_2 の体積一定あるいは接合境界での設計応力一定の制約条件のもとで、境界に生ずる最大接線応力を最小化あるいはその応力分布を均一化するような接合境界A~Bの形状決定問題を考える。

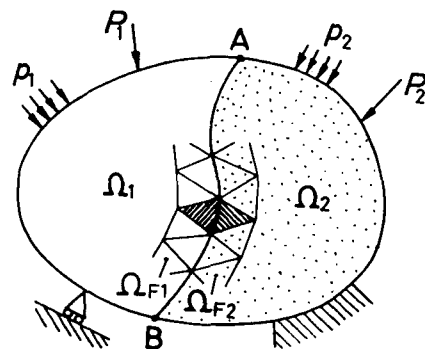


図4.1 複合体の設計モデル

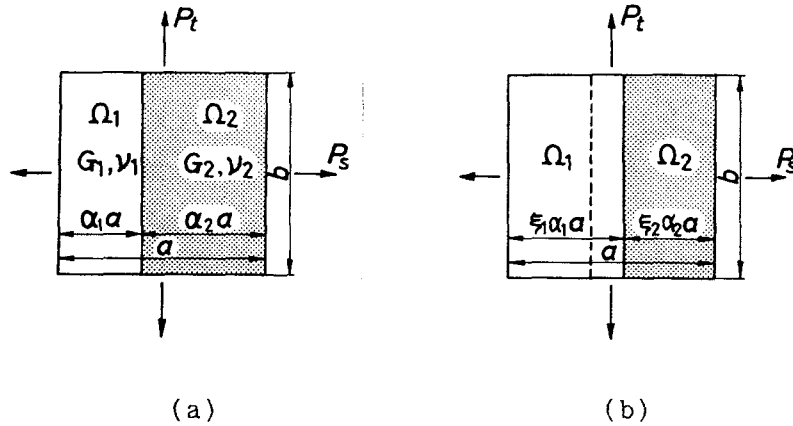


図4. 2 長方形要素のパターン変換

この問題に対し、要素パターン変換法による形状最適化手法を拡張するとすれば、形状修正操作の具体的方法として複合体独自の要素パターン変換法を確立する必要がある。簡単のため図4. 2 (a) に示すような接合境界に沿って、しかもその境界を含む寸法 $a \times b$ (単位板厚) の2次元長方形要素を取り出して、その要素応力の修正を目的とするパターン変換法を考える。両領域の横弾性係数を G_1, G_2 、ポアソン比を ν_1, ν_2 とし、境界の法線および接線方向に局部座標 (s, t) をとる。各領域の応力およびひずみ成分を $\sigma_{si}, \sigma_{ti}, \tau_{sti}, \epsilon_{si}, \epsilon_{ti}, \gamma_{sti}$ ($i=1, 2$ 、以後本章では添字 i は同様) とすると、境界上で

$$\sigma_{s1} = \sigma_{s2}, \quad \tau_{st1} = \tau_{st2}, \quad \epsilon_{t1} = \epsilon_{t2}. \quad (4.1)$$

一方、応力とひずみの関係より

$$2G_i \epsilon_{ti} = \frac{1}{4}(\kappa_i - 3)\sigma_{si} + \frac{1}{4}(\kappa_i + 1)\sigma_{ti} \quad (4.2)$$

ここに κ_i は

$$\kappa_i = \begin{cases} 3 - 4\nu_i & \text{(平面応力),} \\ (3 - \nu_i)/(1 + \nu_i) & \text{(平面ひずみ),} \end{cases}$$

とする。よって完全接着の条件より $\sigma_{s1} = \sigma_{s2} = \sigma_{sm}$ と記すと、式 (4. 1), (4. 2) より

$$\sigma_{t2} = \psi_1 \sigma_{sm} + \psi_2 \sigma_{t1} \quad (4.3.a)$$

ここに

$$\left. \begin{aligned} \psi_1 &= \frac{1}{\kappa_2 + 1} \left\{ \left(\frac{G_2}{G_1} \kappa_1 - \kappa_2 \right) - 3 \left(\frac{G_2}{G_1} - 1 \right) \right\}, \\ \psi_2 &= \frac{G_2}{G_1} \frac{\kappa_1 + 1}{\kappa_2 + 1}. \end{aligned} \right\} \quad (4.3.b)$$

そこで図4. 2 (a) に示すように両材料の幅を $\alpha_1 a, \alpha_2 a$ (ただし $\alpha_1 + \alpha_2 = 1$) とし, 境界接線方向に P_t , 法線方向に P_s なる一様外力を受けているとすると

$$\sigma_{t1} = \frac{-\psi_1 \alpha_2 \sigma_{sm} + \sigma_{tm}}{\alpha_1 + \psi_2 \alpha_2}, \quad \sigma_{t2} = \frac{\psi_1 \alpha_1 \sigma_{sm} + \psi_2 \sigma_{tm}}{\alpha_1 + \psi_2 \alpha_2}. \quad (4.4)$$

ここに σ_{sm}, σ_{tm} はそれぞれ

$$\sigma_{sm} = \frac{P_s}{b}, \quad \sigma_{tm} = \alpha_1 \sigma_{t1} + \alpha_2 \sigma_{t2} = \frac{P_t}{a}. \quad (4.5)$$

そこで要素応力 σ_{ti} の修正を目的として, 図4. 2 (b) に示すように $\alpha_1 \rightarrow \xi_1 \alpha_1, \alpha_2 \rightarrow \xi_2 \alpha_2$ (ただし, $\xi_1 \alpha_1 + \xi_2 \alpha_2 = 1$) とする境界法線方向のパターン変換を実施し, その要素応力の修正目標とする基準応力との関係から変換係数 ξ_1 あるいは ξ_2 を決定する. 外力条件を不変として, 図4. 2 (b) の要素に生ずる接線応力 $\sigma_{t1}^*, \sigma_{t2}^*$ は式 (4. 4) の α_1, α_2 に $\xi_1 \alpha_1, \xi_2 \alpha_2$ を代入して

$$\sigma_{t1}^* = \frac{-\psi_1 \xi_2 \alpha_2 \sigma_{sm} + \sigma_{tm}}{\xi_1 \alpha_1 + \psi_2 \xi_2 \alpha_2}, \quad \sigma_{t2}^* = \frac{\psi_1 \xi_1 \alpha_1 \sigma_{sm} + \psi_2 \sigma_{tm}}{\xi_1 \alpha_1 + \psi_2 \xi_2 \alpha_2}. \quad (4.6)$$

そこで, たとえば, Ω_1 の接線応力の修正を目的とする場合には, $\sigma_{t1}/\sigma_{t1}^* = \beta_1$ とおいて $\xi_2 \alpha_2 = 1 - \xi_1 \alpha_1$ であることを考慮すると式 (4. 4), (4. 6) の第1式より

$$\xi_1 = \frac{1}{\alpha_1} \frac{\psi_1 \{ \alpha_1 \beta_1 - \psi_2 \alpha_2 (1 - \beta_1) \} \sigma_{sm} + (\psi_2 - \alpha_1 \beta_1 - \psi_2 \alpha_2 \beta_1) \sigma_{tm}}{\psi_1 \{ \alpha_1 \beta_1 + \alpha_2 - \psi_2 \alpha_2 (1 - \beta_1) \} \sigma_{sm} - (1 - \psi_2) \sigma_{tm}} \quad (4.7)$$

したがって式 (4. 7) で求まる変換係数を用いてパターン変換を実施して境界を移動すれば $\sigma_{t1}^* = \sigma_{t1}/\beta_1$ とすることが可能であり, そのとき σ_{t2}^* は次式のように変化する.

$$\sigma_{t2}^* = \psi_1 \left(1 - \frac{1}{\beta_1} \right) \sigma_{sm} + \frac{\sigma_{t2}}{\beta_1} \quad (4.8)$$

一方, Ω_2 の接線応力に注目すれば同様に変換係数 ξ_2 を決定できるが, σ_{t1}, σ_{t2} の両応力を同時に目標とする異なった基準応力に近づけるパターン変換を実施することはできない. ただし, 接線応力が支配的な応力場において特に $P_s \ll P_t$ であれば, 式 (4. 8) よりその変

化は同率となる。よって Ω_1, Ω_2 の接線応力を同時に均一化できる可能性は存在する。

4. 2. 2 有限要素法の応用

次に上述のパターン変換法を有限要素法に適用することを考える。まず図4. 1に示すように接合境界A～Bに沿って設計領域 Ω_{F1}, Ω_{F2} をとり、境界をはさんで対をなすよう3角形要素に分割する。そしてその任意の1対の要素に対して前述のパターン変換を実施した場合の要素応力の変化について考察する。

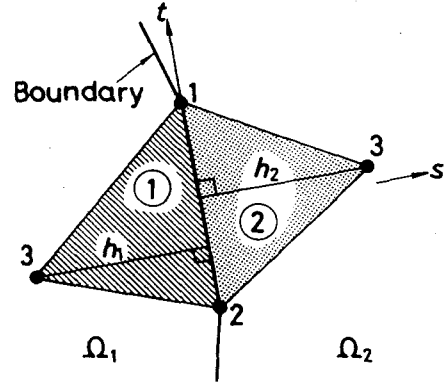


図4. 3 境界上で対をなす3角形要素

図4. 3に示すような境界をはさんだ1対の任意の要素を考えると、領域 Ω_1, Ω_2 の要素①, ②(3節点をそれぞれ1, 2, 3とする)の応力 $\sigma_i = (\sigma_{si}, \sigma_{ti}, \tau_{sti})^T$ は、節点変位を $d_i = (d_{s1}, d_{t1}, d_{s2}, d_{t2}, d_{s3}, d_{t3})_i^T$ として式(2. 5)同様に次式で与えられる。

$$\sigma_i = D_i B_i d_i \quad (4.9)$$

ここに D_i は応力-ひずみマトリックスであり、 G_i, κ_i を用いて表わすと

$$D_i = \frac{G_i}{\kappa_i - 1} \begin{bmatrix} \kappa_i + 1 & 3 - \kappa_i & 0 \\ 3 - \kappa_i & \kappa_i + 1 & 0 \\ 0 & 0 & \kappa_i - 1 \end{bmatrix} \quad (4.10)$$

一方、 B_i はひずみ-変位マトリックスであり、3角形定ひずみ要素に対しては各要素面積を A_i として式(3. 14)同様次式で与えられる。

$$B_i = \frac{1}{2A_i} \begin{bmatrix} b_{i1} & 0 & b_{i2} & 0 & b_{i3} & 0 \\ 0 & c_{i1} & 0 & c_{i2} & 0 & c_{i3} \\ c_{i1} & b_{i1} & c_{i2} & b_{i2} & c_{i3} & b_{i3} \end{bmatrix} \quad (4.11.a)$$

ただし、 b_{i1}, b_{i2}, b_{i3} および c_{i1}, c_{i2}, c_{i3} は3節点の局部座標値 (s_{ij}, t_{ij}) ($j=1, 2, 3$) から

$$\left. \begin{aligned} b_{11} &= t_{13} - t_{12}, & b_{12} &= t_{11} - t_{13}, & b_{13} &= t_{12} - t_{11}, \\ b_{21} &= t_{22} - t_{23}, & b_{22} &= t_{23} - t_{21}, & b_{23} &= t_{21} - t_{22}, \\ c_{11} &= s_{12} - s_{13}, & c_{12} &= s_{13} - s_{11}, & c_{13} &= s_{11} - s_{12}, \\ & & & & & -77- \end{aligned} \right\} \quad (4.11.b)$$

$$C_{21}=S_{23}-S_{22}, \quad C_{22}=S_{21}-S_{23}, \quad C_{23}=S_{22}-S_{21} \quad]$$

として与えられるものである。

さて図4. 3に示すように境界辺を底辺とする各要素の高さを h_1, h_2 とし

$$h_i / (h_1 + h_2) = \alpha_i$$

とおくと

$$C_{ij} = \alpha_i \bar{C}_j \quad (4.12)$$

とおける。ただし $\bar{C}_j = C_{1j} + C_{2j}$, $\alpha_1 + \alpha_2 = 1$ とする。一方、各要素の等価節点外力を $P_i = (P_{s1}, P_{t1}, P_{s2}, P_{t2}, P_{s3}, P_{t3})_i^T$ とすると要素の剛性方程式は

$$P_i = K_i d_i \quad (4.13)$$

と表わせる。ここに K_i は要素の剛性マトリックスであり、 $K_i = A_i t_0 B_i^T D_i B_i$ (t_0 は平面応力の場合は板厚、平面ひずみの場合 $t_0 = 1$ とする) で与えられる。そこで式(4. 9)を式(4. 13)に代入し、和をとると次のような節点力と応力の関係式が得られる。

$$P_1 + P_2 = A_1 t_0 B_1^T \sigma_1 + A_2 t_0 B_2^T \sigma_2 \quad (4.14)$$

そこで要素の接線応力の修正を目的とする強度的パターン変換法として、前述の長方形要素同様に境界法線方向に

$$h_i \rightarrow \xi_i h_i; \quad \xi_1 \alpha_1 + \xi_2 \alpha_2 = 1 \quad (4.15)$$

なる変換を適用すると、式(4. 11)のひずみ-変位マトリックスは各要素面積が $\xi_i A_i$ となることおよび式(4. 12)を考慮して

$$B_i^* = \frac{1}{2\xi_i A_i} \times \begin{bmatrix} b_{i1} & 0 & b_{i2} & 0 & b_{i3} & 0 \\ 0 & \xi_i \alpha_i \bar{C}_1 & 0 & \xi_i \alpha_i \bar{C}_2 & 0 & \xi_i \alpha_i \bar{C}_3 \\ \xi_i \alpha_i \bar{C}_1 & b_{i1} & \xi_i \alpha_i \bar{C}_2 & b_{i2} & \xi_i \alpha_i \bar{C}_3 & b_{i3} \end{bmatrix} \quad (4.16)$$

と変化する。よって式(4. 14)より節点力と応力の関係式は

$$P_1^* + P_2^* = \xi_1 A_1 t_0 B_1^{*T} \sigma_1^* + \xi_2 A_2 t_0 B_2^{*T} \sigma_2^* \quad (4.17)$$

となる。今、 Ω_1, Ω_2 の外力条件を不変として、境界要素のパターン変換量を次式が成立する程度の範囲に限定して実施するものとする。

$$P_1 + P_2 = P_1^* + P_2^* \quad (4.18)$$

また近似的に式 (4. 1) および式 (4. 3) が成立するものとして

$$\sigma_2 = \Psi \sigma_1, \quad \sigma_2^* = \Psi \sigma_1^* \quad (4.19)$$

と表わし、式 (4. 14), (4. 17) を式 (4. 18) に代入すると

$$\text{ただし} \quad (A_1 B_1^T + A_2 B_2^T \Psi) \sigma_1 = (\xi_1 A_1 B_1^{*T} + \xi_2 A_2 B_2^{*T} \Psi) \sigma_1^* \quad (4.20.a)$$

$$\Psi = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \psi_1 & \psi_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.20.b)$$

式 (4. 20. a) に前方より B_1 を掛けて σ_1^* について解くと

$$\begin{aligned} \sigma_1^* &= (\xi_1 A_1 B_1 B_1^{*T} + \xi_2 A_2 B_1 B_2^{*T} \Psi)^{-1} \\ &\quad \times (A_1 B_1 B_1^T + A_2 B_1 B_2^T \Psi) \sigma_1 \end{aligned} \quad (4.21)$$

そこで式 (4. 11), (4. 16) を用いて式 (4. 21) を具体的に計算する。まず

$$\begin{aligned} A_1 B_1 B_1^T + A_2 B_1 B_2^T \Psi &= \frac{1}{4A_1} \times \\ &\begin{bmatrix} S_{tt} & 0 & S_{st} \\ \psi_1 \alpha_1 \alpha_2 S_{ss} & \alpha_1 (\alpha_1 + \psi_2 \alpha_2) S_{ss} & \alpha_1 (S_{st} + S_{ts}) \\ (\alpha_1 + \psi_1 \alpha_2) S_{st} + \alpha_1 S_{ts} & (\alpha_1 + \psi_2 \alpha_2) S_{st} & \alpha_1 S_{ss} + S_{tt} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (4.22.a)$$

ただし

$$\left. \begin{aligned} S_{tt} &= \sum_{j=1}^3 b_{1j} (b_{1j} + b_{2j}), \quad S_{ss} = \sum_{j=1}^3 \bar{c}_j^2, \\ S_{st} &= \sum_{j=1}^3 b_{1j} \bar{c}_j, \quad S_{ts} = \sum_{j=1}^3 b_{2j} \bar{c}_j. \end{aligned} \right\} \quad (4.22.b)$$

一方,

$$\begin{aligned}
 & \xi_1 A_1 B_1 B_1^* + \xi_2 A_2 B_1 B_2^* \Psi = \frac{1}{4A_1} \times \\
 & \begin{bmatrix} S_{tt} & 0 & S_{st} \\ \psi_1 \xi_2 \alpha_1 \alpha_2 S_{ss} & \alpha_1 (\xi_1 \alpha_1 + \psi_2 \xi_2 \alpha_2) S_{ss} & \alpha_1 (S_{st} + S_{ts}) \\ (\alpha_1 + \psi_1 \xi_2 \alpha_2) S_{st} + \alpha_1 S_{ts} & (\xi_1 \alpha_1 + \psi_2 \xi_2 \alpha_2) S_{st} & \alpha_1 S_{ss} + S_{tt} \end{bmatrix} \quad (4.23)
 \end{aligned}$$

この逆行列は式 (4. 12), (4. 15) の付帯条件を考慮すると,

$$\begin{aligned}
 & (\xi_1 A_1 B_1 B_1^* + \xi_2 A_2 B_1 B_2^* \Psi)^{-1} = \frac{4A_1}{\Delta} \times \\
 & \begin{bmatrix} \alpha_1 (\xi_1 \alpha_1 + \psi_2 \xi_2 \alpha_2) \{S_{ss} (\alpha_1 S_{ss} + S_{tt}) - S_{st} (S_{st} + S_{ts})\} \\ \alpha_1^2 (S_{st} + S_{ts})^2 - \psi_1 \xi_2 \alpha_1 \alpha_2 \{S_{ss} (\alpha_1 S_{ss} + S_{tt}) - S_{st} (S_{st} + S_{ts})\} \\ -\alpha_1^2 (\xi_1 \alpha_1 + \psi_2 \xi_2 \alpha_2) S_{ss} (S_{st} + S_{ts}) \\ (\xi_1 \alpha_1 + \psi_2 \xi_2 \alpha_2) S_{st}^2 \\ (\alpha_1 S_{ss} + S_{tt}) S_{tt} - \{(\alpha_1 + \psi_1 \xi_2 \alpha_2) S_{st} + \alpha_1 S_{ts}\} S_{st} \\ -(\xi_1 \alpha_1 + \psi_2 \xi_2 \alpha_2) S_{st} S_{tt} \\ -\alpha_1 (\xi_1 \alpha_1 + \psi_2 \xi_2 \alpha_2) S_{ss} S_{st} \\ -\alpha_1 (S_{st} + S_{ts}) S_{tt} + \psi_1 \xi_2 \alpha_1 \alpha_2 S_{ss} S_{st} \\ \alpha_1 (\xi_1 \alpha_1 + \psi_2 \xi_2 \alpha_2) S_{ss} S_{tt} \end{bmatrix} \quad (4.24.a)
 \end{aligned}$$

ここに

$$\Delta = \alpha_1 (\xi_1 \alpha_1 + \psi_2 \xi_2 \alpha_2) (\alpha_1 S_{ss} + S_{tt}) (S_{ss} S_{tt} - S_{st}^2 - S_{st} S_{ts}) \quad (4.24.b)$$

式 (4. 22), (4. 24) を式 (4. 21) に代入して整理すると, 結局

$$\sigma_1^* = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{\psi_1 (\xi_1 - 1) \alpha_1}{\xi_1 \alpha_1 + \psi_2 \xi_2 \alpha_2} & \frac{\alpha_1 + \psi_2 \alpha_2}{\xi_1 \alpha_1 + \psi_2 \xi_2 \alpha_2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \sigma_1 \quad (4.25)$$

となり, $\sigma_{t1}/\sigma_{t1}^* = \beta_1$ において ξ_1 について解くと式 (4. 7) に一致する. したがって, 3 角形定ひずみ要素に対しても前述の長方形要素と同様のパターン変換が有効である.

以上のことより, 境界の対をなす要素群に対し式 (4. 7) に従ってパターン変換を実施し, それを境界上の節点移動ベクトル量に換算して形状修正を実施する前章までに述べた手法を踏襲すれば接線応力分布の修正が可能である. ただし, 設計問題を設定する際に両物体の材料強度と実際に生ずる応力水準とを比較して, 注目すべき領域を前もって選択する必要がある.

4. 3 設計例と考察

4. 2 節で述べた複合弾性体の最適な接合境界形状決定手法の有効性を確認するため, 基本的な例題として 2 軸応力場下での長方形板中に存在する介在物の最適形状の決定を試み, 無限板中の円形介在物の弾性解 (6. 9) と比較する.

基本原形として図 4. 4 に示すように直径 d の円形介在物を有する幅 W の長方形板 ($d/W=0.4$) が, y 軸方向に $2\sigma_0$, x 軸方向に σ_0 の一様引張り応力を受けるモデルを採用し

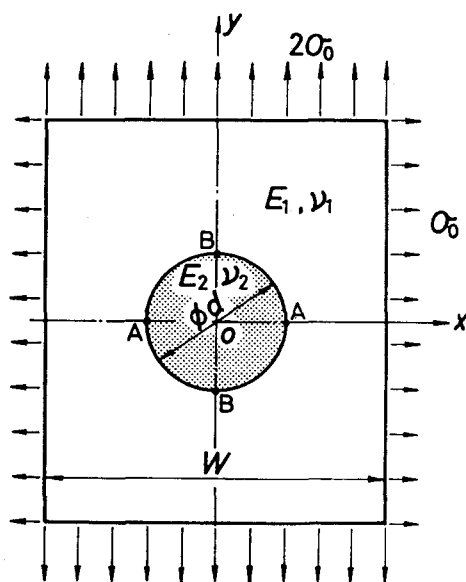


図 4. 4 解析モデル基本原形

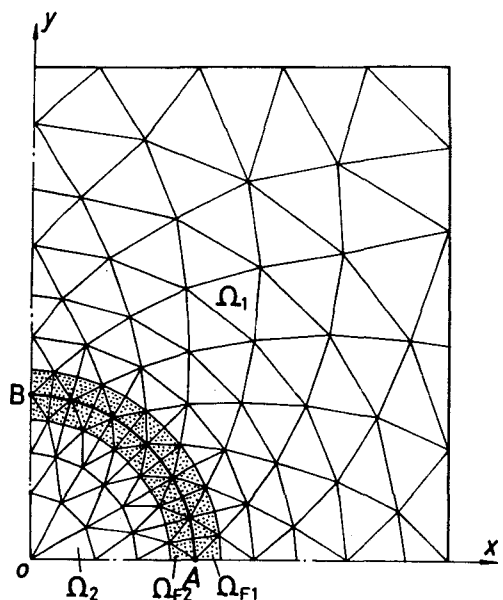


図 4. 5 要素分割

た。長方形板を領域 Ω_1 ，円形介在物を領域 Ω_2 として，母材 Ω_1 より介在物 Ω_2 の剛性が小さいモデルを取り上げた。具体的な数値例として縦弾性係数の比 $E_2/E_1=0.1$ ，ポアソン比 $\nu_1=\nu_2=0$ ，3 とした。そして Ω_2 の体積一定の条件の下で介在物の最適形状の決定を試みた。解析は平面応力状態とし，モデルの対称性により $1/4$ 領域について実施したが，図 4. 5 に採用した基本原形における要素分割を示す。基本原形では後出の図 4. 8 に示すように領域 Ω_1 の境界接線応力 σ_{t1} が支配的であり，しかも不均一な分布を示していることから， σ_{t1} に注目してパターン変換量を決定した。要素パターン変換を実施する設計領域 Ω_{F1} ， Ω_{F2}

を境界 A～B に沿って図 4. 5 のドット領域で示すようにとり，基準応力として設計領域 Ω_{F1} での接線応力の平均値を採用した。

さて，図 4. 6 は繰り返し数 $n=37$ 回までの形状変化過程を示す。これより介在物は安定な形状変化を示しており，基本原形の円形から y 軸方向に徐々に偏平化し， $n=37$ では長短軸比 $b/a=2.38$ のほぼ完全なだ円形状となっている。なお同図中に破線で示した形状は，無限平板中に存在する介在物の最適形状，すなわち $b/a=2.57$ のだ円である（詳細は付録 II 参照）。これより $n=37$ の形状は無限板中の理論形状よりも若干円に近いだ円形状となっている。次に図 4. 7 に境界での接線応力 σ_{t1} ， σ_{t2} の最大，最小応力比の変化過程を示す。

Ω_1 での応力比 $\sigma_{t1\max}/\sigma_{t1\min}$ に注目すると $n=0 \rightarrow 37$ で $5.81 \rightarrow 1.35$ と減少している。同様に Ω_2 の応力比も $2.38 \rightarrow 1.04$ と同時に均一化されている。これらのことは境界上での接線応力 σ_{t1} ， σ_{t2} および法線応力 σ_s の分布の変化を示した図 4. 8 からいっそう明らかである。また，同図には破線で無限板の理論値も示した。なお，境界に沿って生ずるせん断応力 τ_{st} は原形モデルにおいてさえも σ_{t1} ， σ_{t2} ， σ_s に比較してきわめて小さく，また $n=37$ の形状では $\tau_{st} \approx 0$ となっている。

以上の結果より， $n=37$ の形状では境界の接線応力のみならず法線応力分布の均一化も図

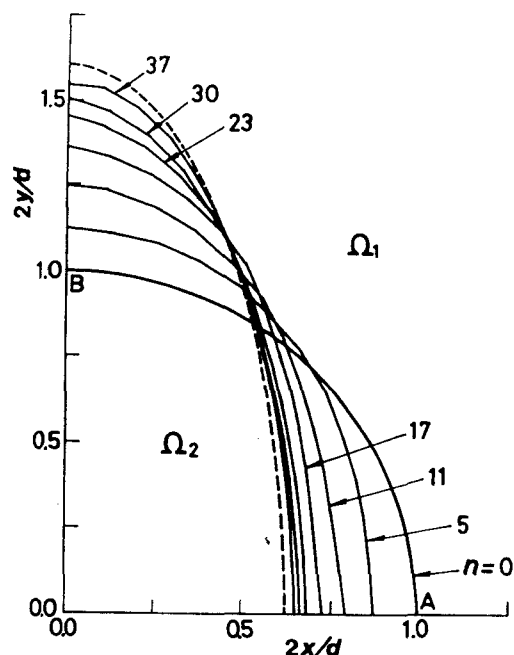


図 4. 6 形状変化過程

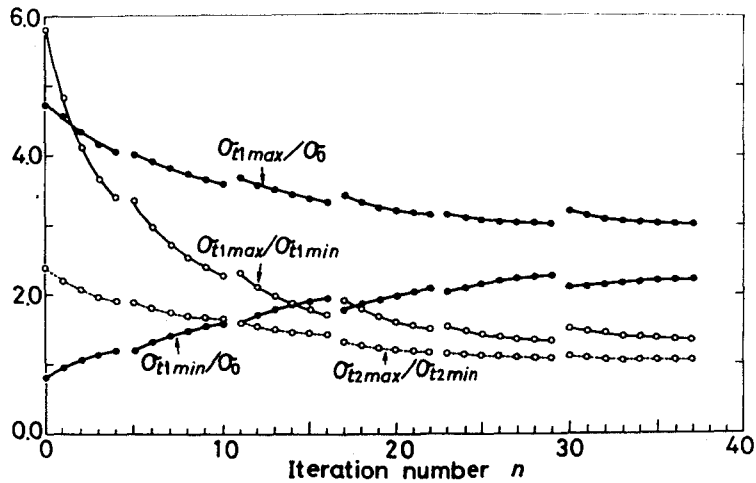


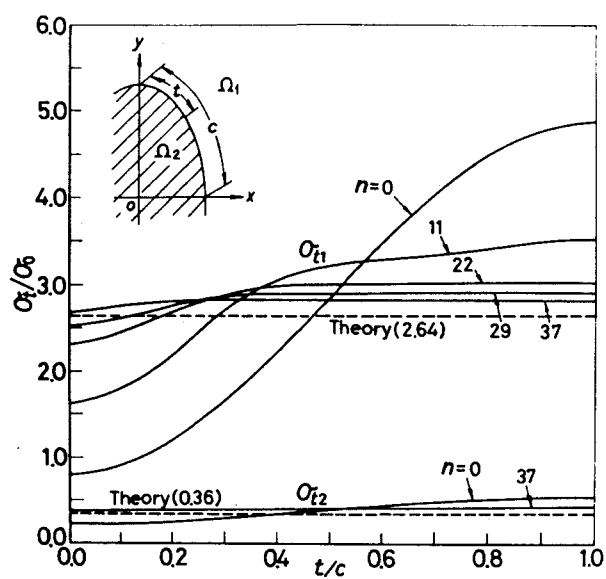
図4. 7 最大応力，最小応力およびその比の変化

られており，十分最適形状に近いものと言える。

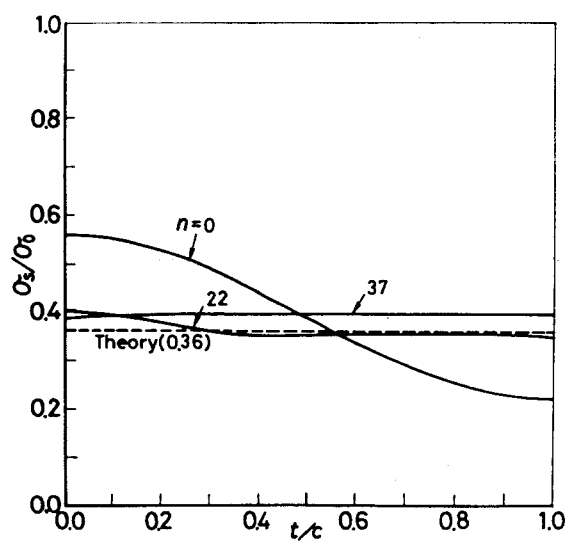
4. 4 結 言

本章では，完全接着された複合弾性体の接合境界の形状最適化問題に対し，境界をはさんで対をなす要素のパターン変換法を利用して境界接線応力分布の均一な形状の決定手法を提示した。そして，それを長方形板中に存在する介在物の形状決定問題に適用した結果，無限板中の円形介在物の解と比較的良好一致を示すことが明らかとなり，本手法の有効性が確認できた。

なお，本章の手法は前章までの議論の対象とした自由境界の形状最適化手法と組み合わせた場合，実用上重要となる自由境界と接合境界の共存するような複雑な問題に対しても有効な手法となり得ると考える。



(a) 接線応力



(b) 法線応力

図4. 8 応力分布の変化

第 5 章 材質変化法を利用した多連結形状の創成法

5. 1 序 言

本章では、強度的な最適形状が連続体内部に空域を持った形状いわゆる多連結物体の最適形状決定問題を考える。前章までに述べた要素パターン変換法を始めとして、現在までに提案されている連続体の一般的な形状最適化法〔27〕～〔36〕は、基本的にはまず設計の原形モデルを仮定し、有限要素法等により応力分布、ひずみエネルギー分布等を求め、種々の形状最適化の原理あるいは数値計画法を導入して形状を修正するという操作を繰り返して、逐次最適解に近づける手法がとられる。したがって、基本原形を設定する時点で形状変化の自由度を減少させ、対象物体をある形状に限定する危険性が伴う。つまり、基本原形として幾何学的に単純な単連結の物体形状を設定することは容易であるが、たとえ複雑な多連結物体が強度的に有利であっても与えられた単連結形状を修正するだけの従来の手法ではそのような多連結の最適解を創成することは不可能である。ところが設計条件によっては最適形状が物体内部に空域を有する多連結形状となる場合のあることは、ダム等の実際構造物の例に見られるように我々のよく知るところである。したがって、このような問題に対し、基本原形設定時より最適解へ至る過程で偶然性を伴うことなしに多連結の形状を創成することが可能であれば、きわめて有用である。

そこで本章では上述の観点に立つ手法として、要素パターン変換法による形状最適化法と従来から利用されてきた剛性あるいは板厚変化法〔40〕、〔41〕、いわゆる材質変化法（2次元問題における板厚分布も材質分布の一種と見なす）を結合した手法（手法Ⅰ）および材質変化法から直接形状修正ベクトルを決定する手法（手法Ⅱ）を提示する。そして、その2つの手法を一樣荷重を受ける柱あるいはフレームの補強リブの形状決定問題等に適用し、2手法の特徴と優劣を検討した結果について示す。

5. 2. 材質変化法

従来から知られている2次元問題における板厚変化法は、厚さ分布を設計変数とする最大剛性設計および全応力設計（物体内応力分布の均一化を図る一樣応力設計）に対する直接的手法

としてしばしば利用されている〈40〉，
 〈41〉．特に全応力設計問題では，有
 限要素法によって応力分布を求め，各要
 素の相当応力値 $\bar{\sigma}_j$ と基準応力 σ_a の比
 に応じて板厚 t_j を増減させる方法，い
 わゆる応力比法を繰り返すことによって
 最終的に応力分布が一様となる最適板厚
 分布を容易に決定することが可能である．
 また同様の手法が剛性分布あるいは物体
 力場での材料密度分布等を設計変数にと
 った場合にも適用可能である．すなわち，
 繰り返しの第 k ステップにおける板厚，
 剛性など，いわゆる材料特性値を無次元化した量を $\tilde{p}_j^{(k)}$ ，第 $k+1$ ステップでのそれを $\tilde{p}_j^{(k+1)}$ とすると

$$\tilde{p}_j^{(k+1)} = \{1 + c_0 (R_j^{(k)} - 1)\} \tilde{p}_j^{(k)} \quad (5.1)$$

によって各有限要素の材料特性値を修正し，それを解析物体の最大，最小応力比が1に収束するまで繰り返すものである．なお，上式中の c_0 は収束係数であり，一般に

$$0.5 \leq c_0 \leq 1 \quad (5.2)$$

の値を通常用いる．また $R_j^{(k)}$ は，板厚変化法では $\bar{\sigma}_j^{(k)} / \sigma_a$ ，剛性変化法では $\sigma_a / \bar{\sigma}_j^{(k)}$ とする．

さて，後述するように材質変化法による最適材料特性分布から形状修正ベクトルを直接決定する手法Ⅱでは，特にその最適材料特性分布をより正確に把握する必要がある．そこで手法Ⅱでは図5.1に示すように，要素の応力および材料特性を線形分布させた6節点3角形要素を用いる．すなわち，無次元化された材料特性分布 $\tilde{p}_j(x, y)$ を次式で仮定する．

$$\tilde{p}_j(x, y) = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y \quad (5.3)$$

ここに $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ は要素 j の3頂点の座標値 (x_i, y_i) および材料特性値 $\tilde{p}_i$ ($i=1, 3, 5$) から定まる定数である．また $\tilde{p}_j(x, y)$ は具体的に板厚変化法では $t(x, y) / t_0$ ，剛性変化法では $E(x, y) / E_0$ (t_0, E_0 はそれぞれ設計物体の板厚および縦弾性係数) とする．

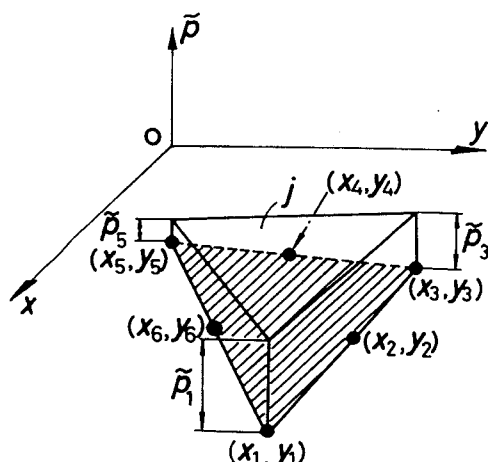


図5.1 6節点材質変化要素

また有限要素法の定式化において、式 (5. 3) を考慮して要素剛性マトリックス K_j を次式によって算出する。

$$K_j = \int B_j^T D_0 B_j t_0 \tilde{p}_j(x, y) dA_j \quad (5.4)$$

ここに B_j は要素 j のひずみ-変位マトリックス、 D_0 は縦弾性係数を E_0 としたときの応力-ひずみマトリックスであり、積分は要素全域にわたる面積々分とする。その他の定式化については従来の有限要素法と同様である《1》。こうして与えられた特性分布 $\tilde{p}(x, y)$ に対する応力分布が決定されれば、要素の頂点を構成する各節点 i に対して式 (5. 1) を適用してその特性値 $\tilde{p}_i$ を修正する。この操作を繰り返せば、3 角形定ひずみ要素同様与えられた形状に対する最適材料特性分布を決定することが可能である。

5. 3 多連結形状創成手法

5. 3. 1 多連結物体創成の可能性

図 5. 2 に示すように S_c 上での変位拘束や荷重条件を一定として設計物体 Ω 内に生ずる応力分布をできるだけ均一にすること、いわゆる平等強さの形状あるいはそれに最も近い形状を、多連結形状も含めた許容形状の中から選ぶことが本章の目的である。繰り返し法を基本とする形状最適化法では、その最初のステップとして設計条件を満足する基本原形 Ω_0 を設定する必要がある、その Ω_0 としてどのような形状を選択しても良い。しかし實際上、内部に空域を有する複雑な多連結形状を想定するよりも、単純な単連結形状を採用する方が容易であり、

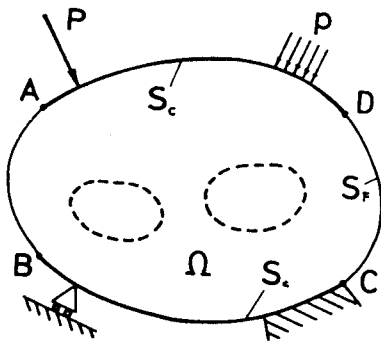
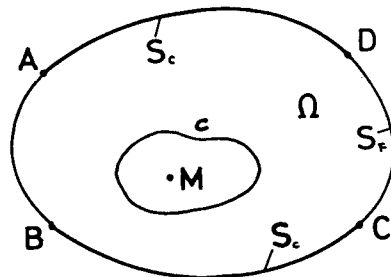


図 5. 2 荷重、変位拘束される連続体



5. 3 単連結物体の最適形状 Ω_{sopt}

またそれが普通である。そのようにして与えられた境界形状を修正して得られる最適解を図5. 3に示す Ω_{sopt} とすると、その内部の任意の1点Mの応力がそれを囲む任意の経路c上のどの位置の応力よりも常に小さくなる場合がある。そのときM点を含むある領域を空域とすることによって、 Ω の重量を減少させ、全域の応力分布をより均一化することが可能となる。あるいは空域分だけ外部設計境界 S_F を拡大することによって、重量一定条件の下に Ω 内部の応力を単連結物体より低い応力値で均一化させることも可能である。

しかし、内部に空域を作ることによって新たな応力分布の再配分を生じ、その変化は特に空域近傍で激しいから、空域の設定についてその位置や大きさを決めるには高度な判断が必要である。さらに重量一定の設計条件下では、空域設定によって生ずる体積の減少を外部の S_F の拡大によって補うように形状修正を実施しなければならない。それらの要求を満足する具体的な手法として、前述の材質変化法を利用した2つの手法を次に提示する。

5. 3. 2 手法I

第1の手法は、基本的には要素パターン変換法と材質変化法を交互に繰り返すものである。つまり、与えられた形状の修正を要素パターン変換法によって行ない、多連結化のための空域創成を材質変化法より得られる最適材料特性分布を用いて実施するものである。その具体的な設計手順を図5. 4に示す。すなわち、

- (i) ステップI まず設計制約条件を満たす単連結の基本原形 Ω_{s0} を設定し、これに要素パターン変換法を適用して単連結物体としての最適形状 Ω_{sopt} を求める。こうして得られる Ω_{sopt} では形状変更可能な設計境界 S_F 付近においてほとんど応力分布は均一化されているが、物体内部において図5. 3のような現象の生ずることがある。よってその応力分布の等応力線図を求め、それより図5. 3のM点のような部分の有無を判定し、多連結化の可能性のあるモデルのみが次のステップへ進む。
- (ii) ステップII ステップIによって多連結物体への可能性が判定されると、既に得られている Ω_{sopt} をこのステップでの新しい原形 $\hat{\Omega}_{s0}$ としてこれに材質変化法を適用し、 $\hat{\Omega}_{s0}$ の幾何学的境界形状不変の下で、内部に生ずる応力を均一にする板厚分布や剛性分布を求める。設計対象が2次元物体の場合は板厚変化法を、3次元物体の場合は剛性変化法を用いると良い。得られた結果より等厚さ線図などいわゆる最適な材料特性分布図を描き、 $\hat{\Omega}_{\text{sopt}}$ のどの部分にどの程度の空域を作るべきかを判断する。そして特性値の等高線に沿って、ある板厚以下の領域あるいは剛性値がある値以上の領域を切り取ればよい。このようにすれば空域の形状や大きさが応力集中効果と関連して定量的に決定できることになる。

ただし、このとき作るべき領域などが非常に小さなものとなれば、実際問題として空域創成による不利益（加工費用など）から多連結化を中止してもよい。

- (iii) ステップⅢ ステップⅡの Ω_{sopt} から決定した多連結物体としての原形 Ω_{m0} は、空域を設けたことによって当然最初の設計条件のうちの重量に関する条件を満足しないし、また応力分布の不均一性を新しく生ずる。そこで Ω_{sopt} における外部設計境界と空域を作ったことによって形成された内部設計境界を S_F として、 Ω_{m0} に要素パターン変換法を再び適用し、設計条件を満足する多連結物体としての最適形状 Ω_{mopt} を求める。このようにして得られた Ω_{mopt} について再び判定を行ない、さらに高次の多連結化の可能性の有無を判断する。そして必要に応じてステップⅡ、Ⅲを繰り返せば、最終的に多連結の最適形状を決定することが可能である。

以上述べたように、要素パターン変換法と従来形状決定法とは無縁のものとして扱われてきた材質変化法とを併用すれば、単連結の基本原形から出発して任意性や偶然性を伴うことなしに最適な多連結物体を創成することが可能となる。

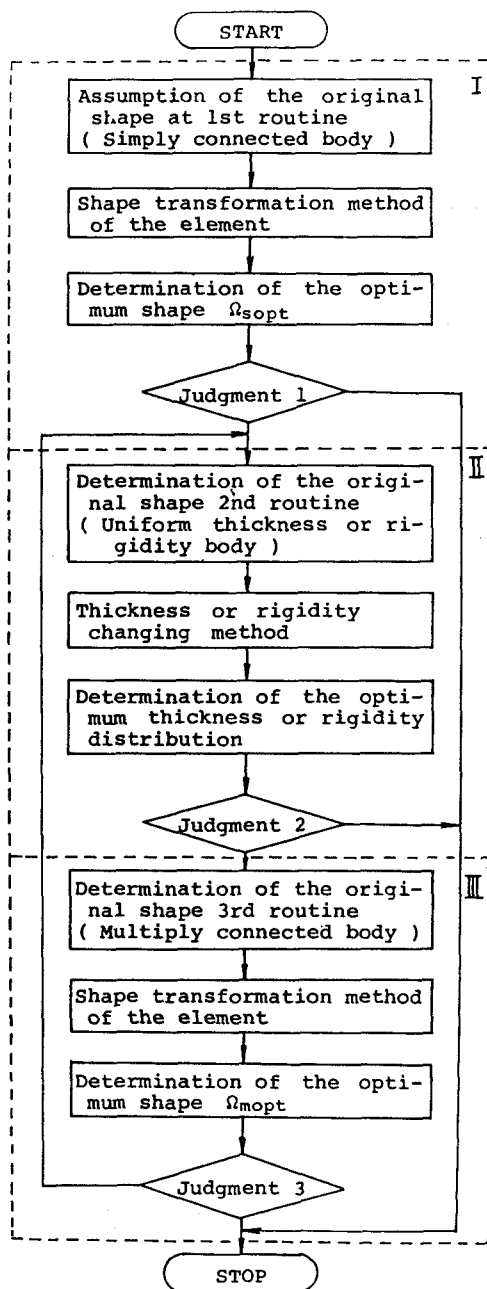


図5. 4 多連結最適形状の決定ルーチン
(手法Ⅰ)

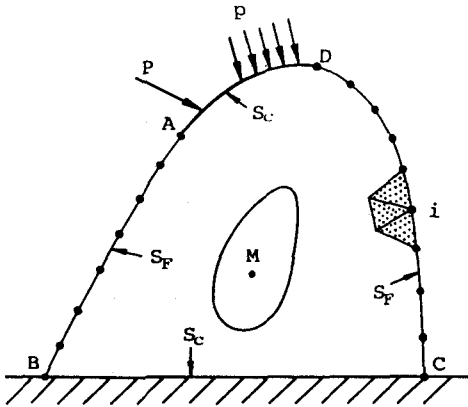


図5. 5 設計モデル原形

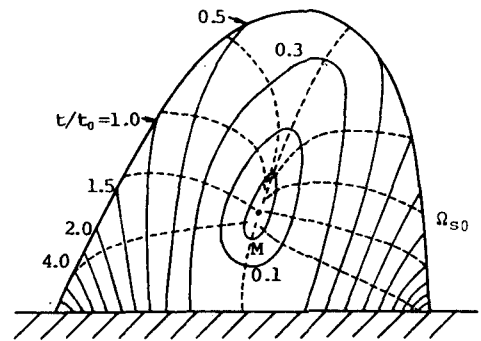


図5. 6 Ω_{s0} の最適材料特性分布

5. 3. 3 手法II

次に第2の手法として、材質変化法による最適材料特性分布を直接形状修正ベクトルの決定に応用した形状最適化手法を提示する。図5. 5に示す2次元物体の設計モデル Ω_{s0} に対し、その形状を不変のまま板厚変化法を適用して求まった最適板厚分布を仮に図5. 6としよう。その時、同図より板厚のきわめて薄い部分は切り取り、逆に厚い部分は形状を拡大すれば応力分布をより均一なものに修正できることは容易に理解できる。よってこの場合、設計境界での形状修正ベクトルの方向と大きさを一意的に決定し、しかも空域を自動的に創成する具体的な

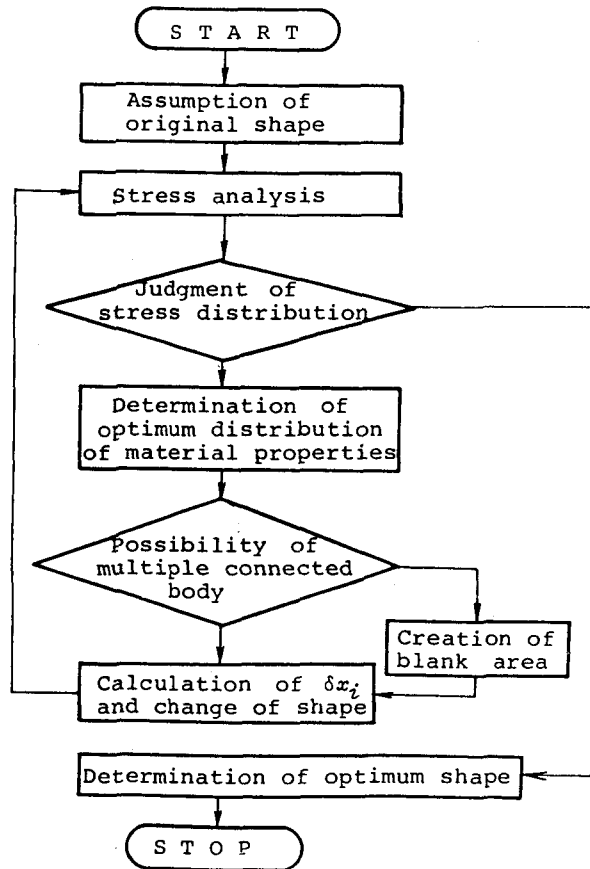


図5. 7 多連結最適形状決定ルーチン（手法II）

手法が重要となる。そこで図5. 7のフローチャートに示すような形状修正手順による手法を考案した。すなわち、

- (i) ステップⅠ 設計制約条件を満たす基本原形を設定し、それに対して材質変化法を適用して最適材料特性分布を求める。
- (ii) ステップⅡ 形状修正を実施すべき節点を選択する。これには設計境界 S_F 上の節点および図5. 6のM点のごとく空域の創成の必要のある節点を含める。
- (iii) ステップⅢ ステップⅡで選択された節点 i における形状修正ベクトル δx_i を決定する。その形状修正ベクトルの方向は応力分布の均一化に最も効果的な各節点での材質分布の最大傾斜 g_{mi} の方向に取る。さらに、ベクトルの大きさを次式によって与える。

$$\delta x_i = \left(\frac{\partial \tilde{p}_i}{\partial x_i} \right)^{-1} \delta \tilde{p}_i = \frac{\tilde{p}_i - \tilde{p}_0}{g_{mi}} \quad (5.5)$$

ここに $\tilde{p}_0$ は設計条件によって与えられる無次元化された基準の特性値とする。したがって上式は $(\tilde{p}_i - \tilde{p}_0)$ の符号に応じて形状を拡大、縮小することになる。なお、最大勾配 g_{mi} の大きさと方向は次のようにして近似的に決定する。まず図5. 8に示すような境界上の典型的な節点 i がその回りを l 個の節点 (図中の●印の節点) に取り囲まれているとする。そのとき l 節点要素による材質変化法によって各節点での材料特性値が与え

られるから、その差として取り囲む各節点方向の勾配 g_j を求める。その勾配 g_j は直交座標系 (x, y) の x, y 軸方向の勾配を g_x, g_y とすれば

$$g_j = g_x \cos \theta_j + g_y \sin \theta_j \quad (j=1, \dots, l) \quad (5.6)$$

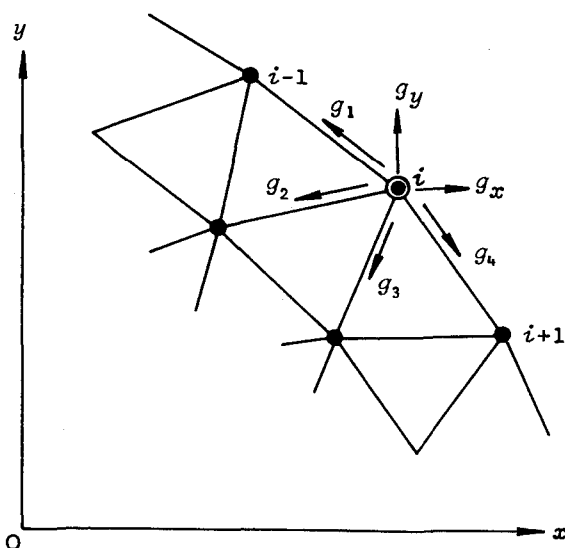


図5. 8 最大傾斜の決定法

で与えられる。ここに θ_j は取り囲む各節点方向と x 軸とのなす角とする。したがって最小二乗法によって式 (5. 6) より g_x, g_y を決定すれば、最大傾斜の方向 θ_{mi} は次式によって求まる。

$$\theta_{mi} = \tan^{-1}(g_y/g_x) \quad (5.7)$$

さらに式 (5. 7) で求まった θ_{mi} を式 (5. 6) に代入すれば最大勾配 g_{mi} を決定できる。

(iv) ステップIV 式 (5.

5) で与えられるベクトル量に従って S_F 上の節点を移動して形状を修正し、新しい形状を創成する。なお、図 5. 6 の M 点に相当する節点では、式 (5. 6) の勾配を用いて式 (5. 5) より求まるベクトル量に従って図 5. 9 に示すように取り囲むすべての節点の方向に節点を設けて空域を創成する。そして空域近傍の 3 角形要素から

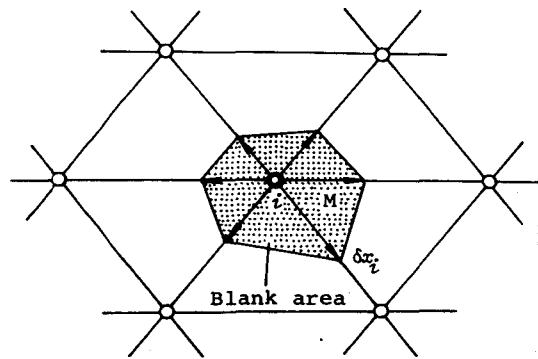


図 5. 9 空域の自動創成

生じた 4 角形領域を対角線で 2 分して要素再分割を自動的に行なう。

(v) ステップV 新しく求まった形状に対し、改めて材料特性値を一定とした場合の応力分布を有限要素法によって求める。

以上述べた手順 (i) ~ (v) を収束条件が満足されるまで繰り返せば、最適材料特性分布から簡単にしかも合理的に形状修正ベクトルを決定でき、そして最終的に最適な形状を決定することが可能となる。さらに、設計物体の多連結化も自動的に行なうことができる。なお式

(5. 5) における基準の特性値 $\tilde{p}_0$ の設定は、要素パターン変換法における基準応力 σ_a と同様の方法を採用する。すなわち、設計応力一定の問題では設計条件によって与えられる特性値をそのまま用いれば良いが、体積一定の問題では $\tilde{p}_0$ の設定に依存して体積が増減するため、数値的求根法によって体積を一定に保つ $\tilde{p}_0$ を一意的に決定する必要がある。

5. 4 設計例と手法の比較

前節に述べた2つの手法の有効性を検討するために、手法ⅠをL型フレームの補強リブおよび一様荷重を受けるT型柱の形状決定に適用した。一方、手法Ⅱは水圧を受ける長方形柱と手法Ⅰ同様のT型柱の設計例に対して適用した。そしてそれらの数値結果から、2つの手法の特徴を考察する。

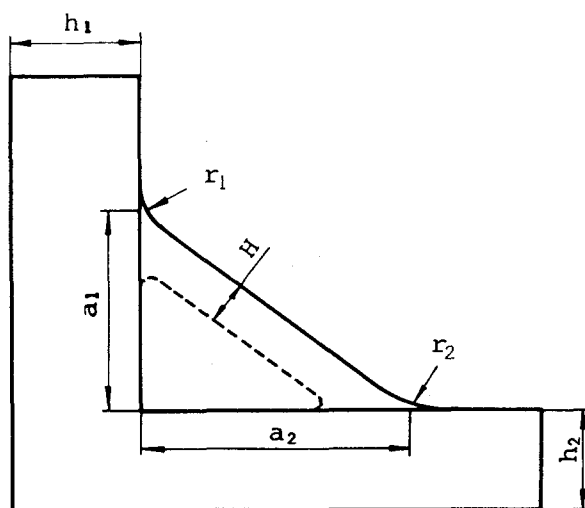


図5. 10 一般のL型フレーム形状

5. 4. 1 L型フレームの補強リブ

まず手法Ⅰに対する設計例として従来より構造物設計の上で問題となっている交差フレーム

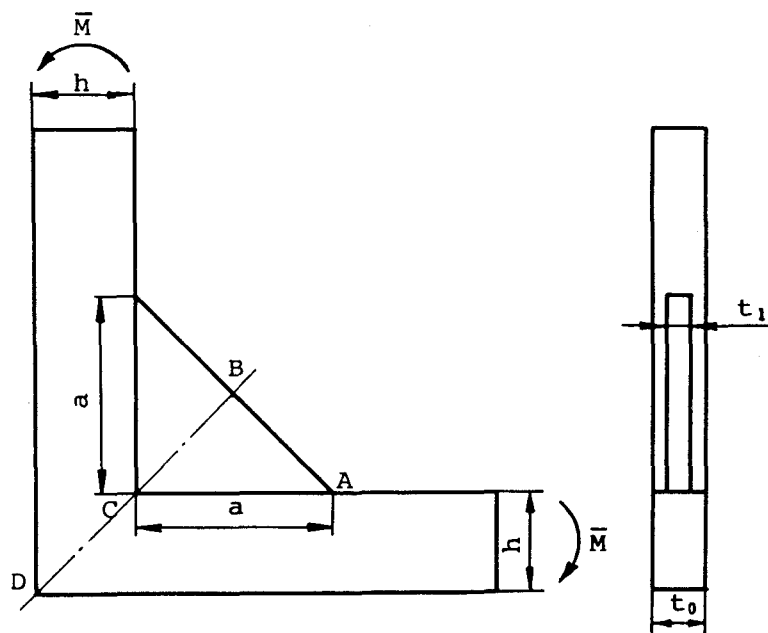


図5. 11 設計モデル

部材の補強リブの形状決定問題を取り上げた。そもそも補強リブの目的は、フレーム材の剛性を保ち相互変位を抑止することと、すみ肉部に生ずる応力集中の緩和を図ることにあるが、その適切な形状を見出すことはかなり困難な問題である。これに対し、西岡らは既に光弾性実験によって図5. 10に示すようなL型フレームの3角形および台形補強リブの種々のパラメータを変えて、その応力集中係数を調べ系統的な設計資料を与えている《71》～《74》。しかしこれまでの研究ではその形状決定が図5. 10に示すような a_1, a_2, H やフレーム部材との接続部の曲率半径 r_1, r_2 などのかなり制約された形状因子に限られているため、得られた形状も強度的に最適なものとは言いがたい。そこでここでは設計制約条件をリブの板厚と重量あるいは設計応力など最小限にとどめ、自由度の多い条件の下での形状決定を試みた。

具体的な設計例として図5. 11に示すような曲げモーメント $\bar{M}$ を受ける長方形断面の部材からなるL型フレームを考える。これを補強するのに最も自然に想定されるものとして2等辺3角形リブを考え、これを Ω_{s0} とした。ここで直交するフレーム部材の高さを h 、板厚を t_0 とし、リブの等辺の長さを a 、板厚を t_1 として、 $a/h=2.0$ 、 $t_1/t_0=0.25$ のモデルとする。 Ω_{s0} に生ずる応力状態を有限要素を用いて解析し、その結果得られた最大主応力 σ_1 の等応力線図を図5. 12に示す。図中の数値は曲げモーメント $\bar{M}$ によってリブのない部分のフレーム部材の外縁に生ずる曲げ応力 $\sigma_0=6\bar{M}/t_0h^2$ で無次元化した値である。これよりリブのすみ肉部A点に σ_0 の2倍以上の応力集中が生じている。これを緩和するためフレーム部材の形状および両部材の板厚 t_0, t_1 を不変として、補強リブの形状を最適化した。

図5. 13は Ω_{s0} の要素分割と設計領域 Ω_F を示す。同図の Ω_F の要素群に対し、主応力方向のパターン変換を実施して、リブの面積 $a^2/2$ を一定に保ちながら応力集中の最も少ない

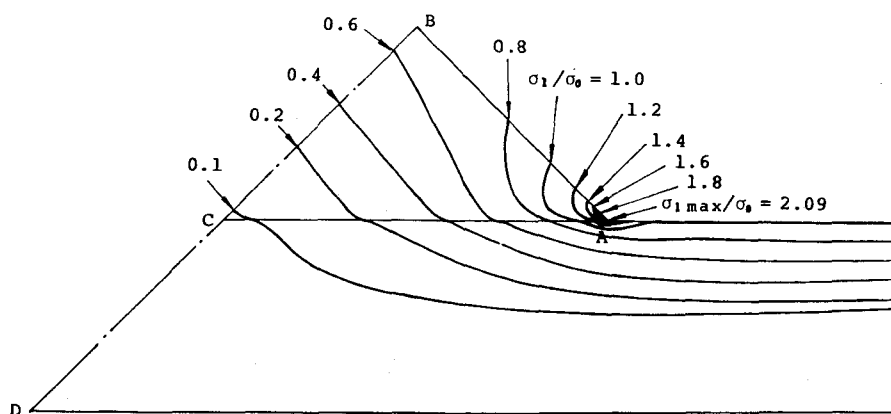


図5. 12 Ω_{s0} の等応力線図

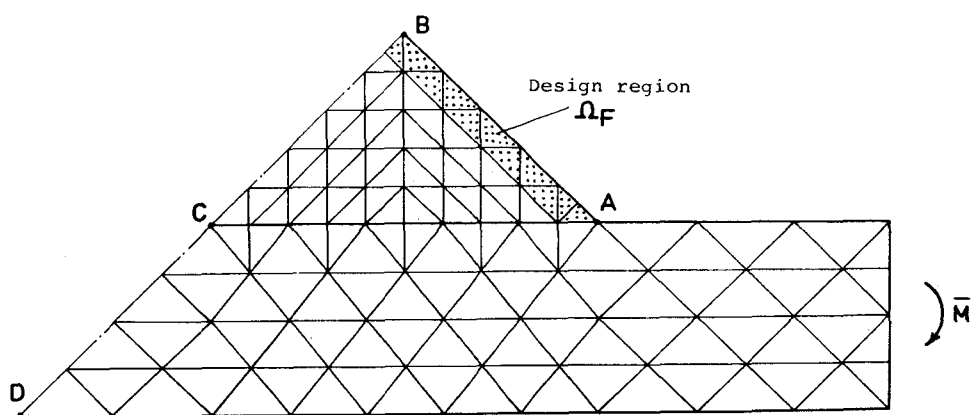


図5. 13 Ω_{s0} の要素分割

形状を求めた。図5. 14はその形状変化過程を示すが、特にA点部付近のリブ形状を2次曲線で最小二乗近似して得られたものである。これよりA点部付近は張り出し、逆に応力集中のないB点部付近は削除され、全体に境界ABは円弧状に変化している。繰り返し数 $n=14$ で最大主応力はほとんど減少しなくなったのでここで計算を停止し、この形状を Ω_{sopt} とした。次にこの Ω_{sopt} に対する最大主応力 σ_1 の等応力線図(図5. 15)を求めると、予想されるようにC点部に多連結化の可能性を確認することができる。そこで空域を定量的に決めるために Ω_{sopt} の形状を不変としてリブ全域での最大主応力が一様で、 σ_0 に等しくなる最適板厚分布を図5. 16のように求めた。そこで板厚の非常に薄い $t/t_0 \leq 0.1$ の領域を空域とすることによって2連結物体としての基本原形 Ω_{n0} を決定した。ただし、この形状の面積は0.35

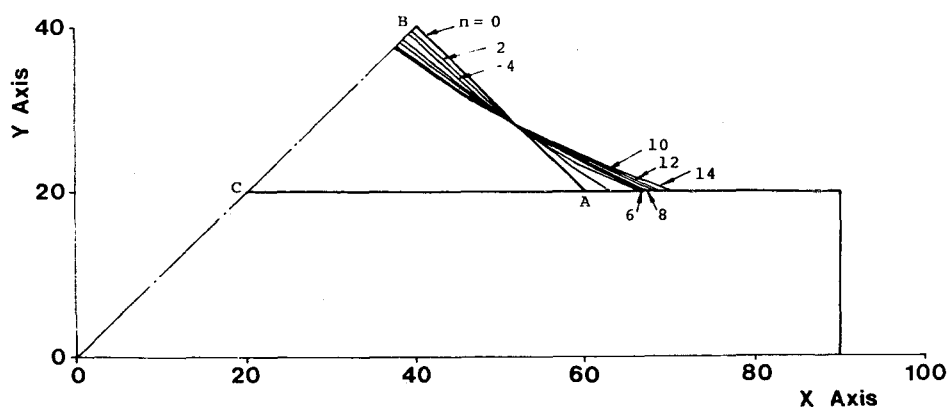


図5. 14 Ω_{sopt} の決定過程

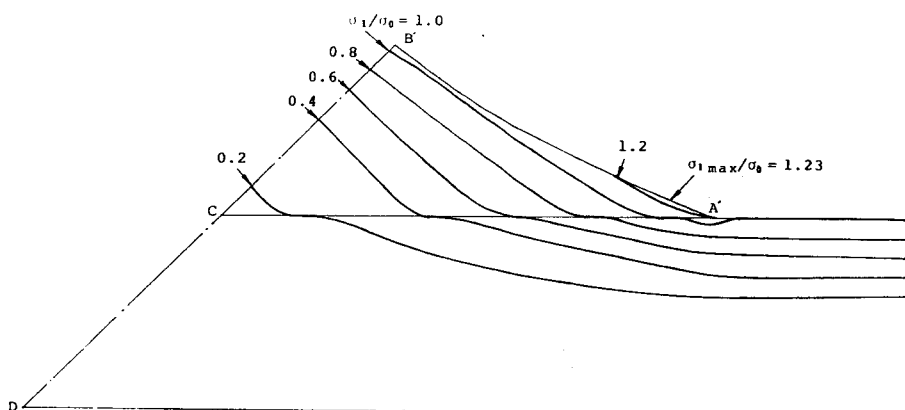


図5. 15 Ω_{sopt} の等応力線図

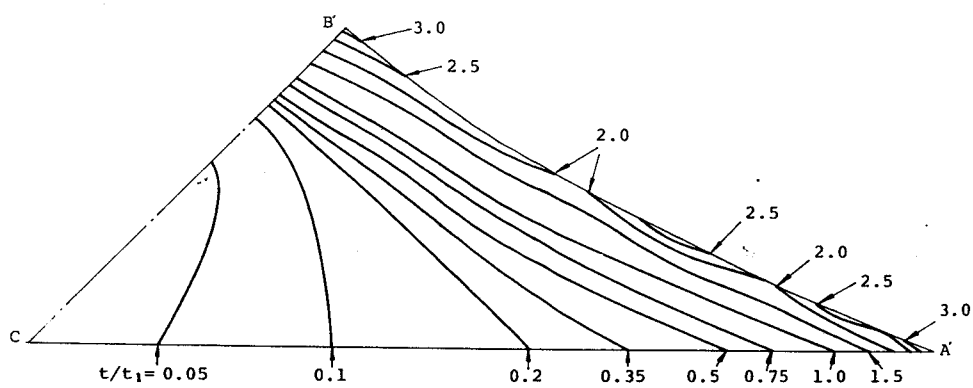


図5. 16 Ω_{sopt} の最適板厚分布

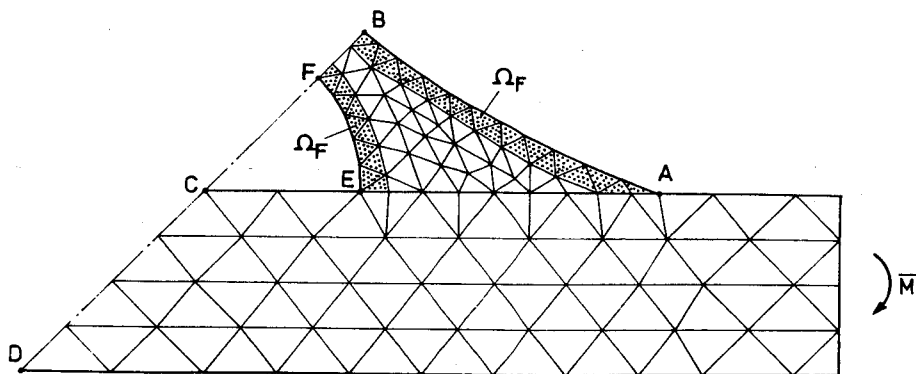


図5. 17 Ω_{m0} とその要素分割

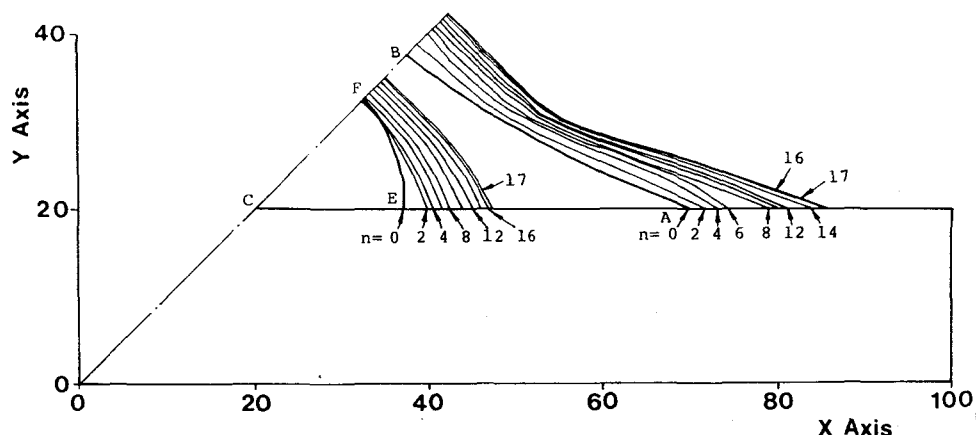


図5. 18 Ω_{mopt} の決定過程

$4a^2$ となって Ω_{s0} の 70.8% に減少している。よってこの面積を目標値にもどすことと、2 連結化によって生じた応力分布の乱れを修正する目的で、図5. 17 のような要素分割を用いて境界 AB, EF 部分の形状を要素パターン変換法によって決定した。図5. 18 にその形状変化過程を示す。すなわち、空域を設けたことによって再び境界 AB の応力が增大するために AB は成長し、低応力域の境界 EF は削られて全体に寸法の大きなリブ形状 Ω_{mopt} に変化している。ここで最大主応力は Ω_{m0} のパターンで $\sigma_{\text{max}}/\sigma_0 = 1.51$ であったものが、 Ω_{mopt} では 1.17 まで減少している。また図5. 19 には Ω_{mopt} の等応力線図を示すが、これよりさらに高次の多連結化の可能性は存在しないことが明らかなので、この形状を多連結最適形状とした。この形状でのリブ面積は $0.485a^2$ とほぼ Ω_{s0} のそれに等しくなっている。さらに図

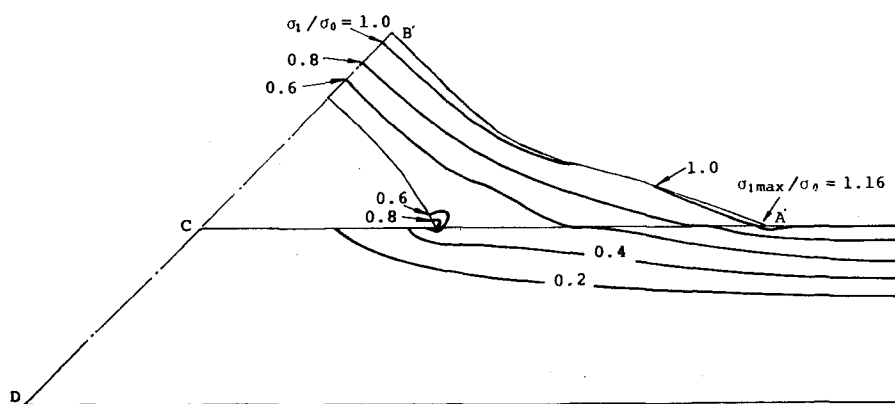


図5. 19 Ω_{mopt} の等応力線図

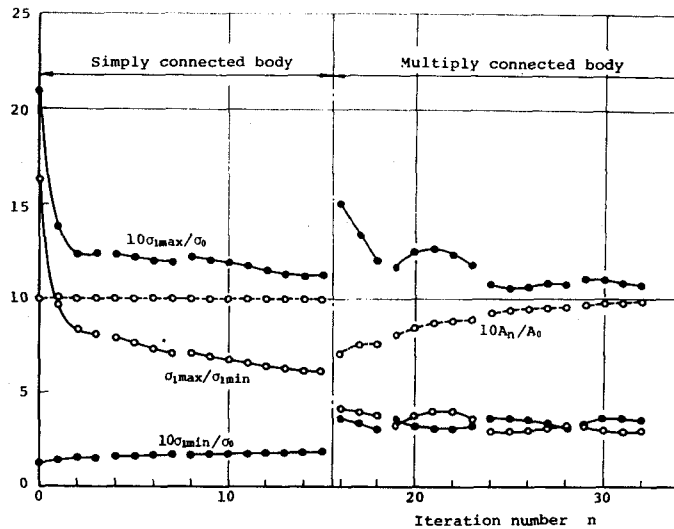


図5. 20 n による応力の変化状態

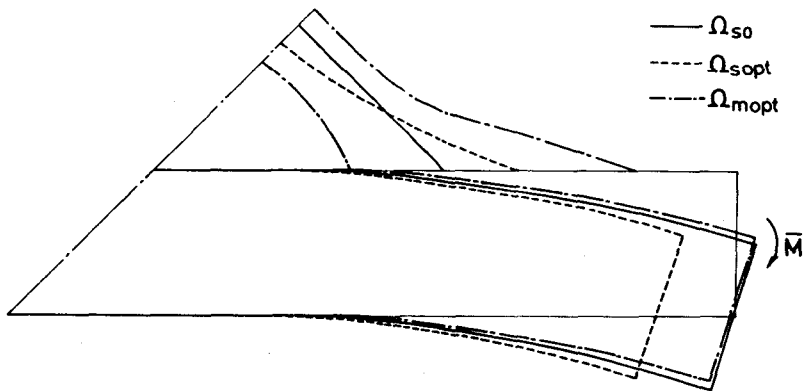


図5. 21 各リブ形状とフレーム部材の変形状態の比較

5. 20には単連結形状 Ω_{s0} から Ω_{mopt} に至るまでの主応力 σ_1 の最大、最小値の変化の状況を示す。特に応力比 $\sigma_{1max}/\sigma_{1min}$ の変化に注目すると $\Omega_{s0} \rightarrow \Omega_{sopt}$ で16. 2→6. 2に、また $\Omega_{m0} \rightarrow \Omega_{mopt}$ では4. 2→2. 9まで減少している。これより Ω_{mopt} は Ω_{sopt} に比較して最大値の減少こそあまり期待できないが、最小値が上昇していることから材料がかなり有効に使用されていることがわかる。また図5. 21には Ω_{s0} , Ω_{sopt} , Ω_{mopt} のフレーム部材の変形状態を比較して示すが、これより多連結形状は単連結のものよりも変形が少なく、いわゆる強

度のみならずフレーム部材の設計上重要なもう1つの目的である剛性の増大にも優れていることが了解できる。

5. 4. 2 水圧を受ける柱

次に手法Ⅱに対する基本的な設計例として図5. 22に示すように水圧を受ける長方形柱を取り上げた。材質変化法として板厚変化法、剛性変化法の両手法を適用して形状決定を実施した結果を比較して示す。まず設計モデルは高さ l 、幅 a 、板厚 t_0 の長方形板が $x=0$ において水圧 $p=p_0(1-y/l)$ を受けているとする。また $y=0$ の支持境界における端効果（固定支持節点に生ずる σ_x の応力集中）を避けるため水圧と等価なせん断応力 $\tau_0=p_0 l/2a$ を $y=0$ の境界に一樣に負荷した。形状最適化の設計条件として体積一定とし、応力評価の基準としてミーゼス説を採用した。また $x=0$ の負荷境界および $y=0$ の支持境界の形状を不変とし、 $x=a$ および $y=l$ の境界を S_F として形状修正を実施した。原形モデルにおけるミーゼスの相当応力分布を図5. 23に示すが、これより支持境界上の $x=0$ および $x=a$ において激しい応力集中を生じている。

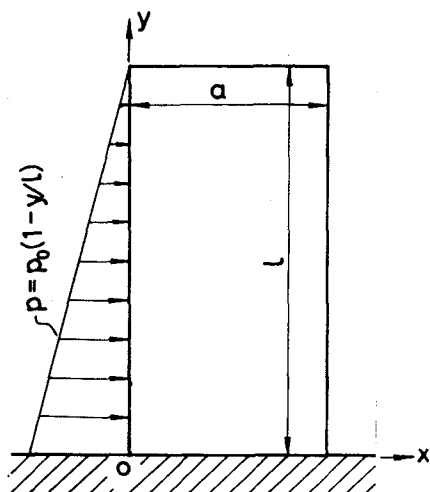


図5. 22 水圧を受ける柱

まず基本原形の形状を不変として、板厚変化法および剛性変化法を適用し、原形モデルの最適材料特性分布を求めた結果を示す。計算に際して体積一定条件に対応して次の制約条件を設けた。

$$\iint_{\Omega} \tilde{p}(x, y) dx dy = al \quad (5.8)$$

上式の積分はモデル Ω の全域について行なうものとする。図5. 24は両変化法によって求めた最適特性分布を示す。これより両者の分布は対照的である。すなわち、板厚変化法では高応力レベルの部分で板厚が増加して荷重分担を分散させて応力低下が図られているのに対し、剛性変化法では高応力レベルの部分の剛性を低下させてその分担荷重を減少することによって応力低下が図られている。

次に両材質変化法による形状最適化の計算結果を示す。なお各ステップでの形状修正量として、板厚変化法では式(5. 5)で与えられる量の0. 4倍の量を、また剛性変化法では0.

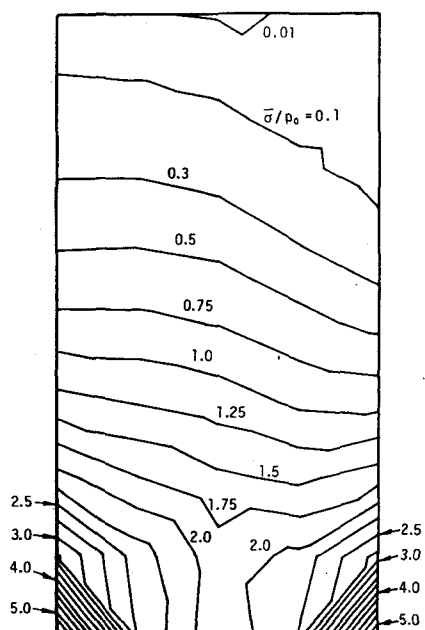


図 5. 2 3 基本原形の相当応力分布

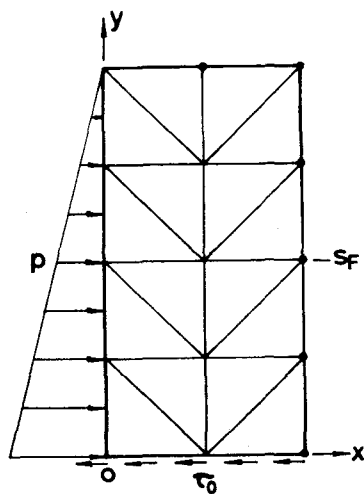
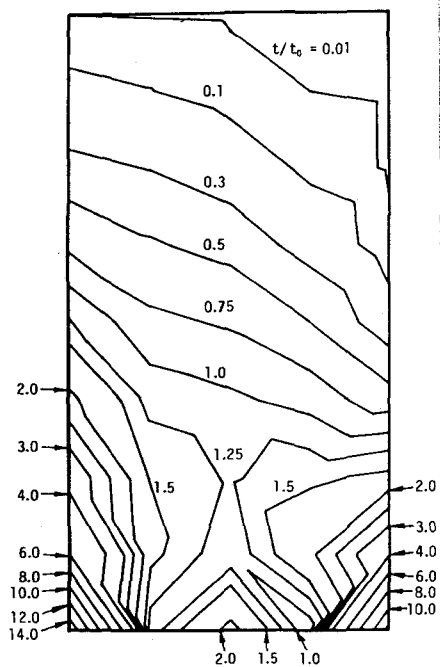
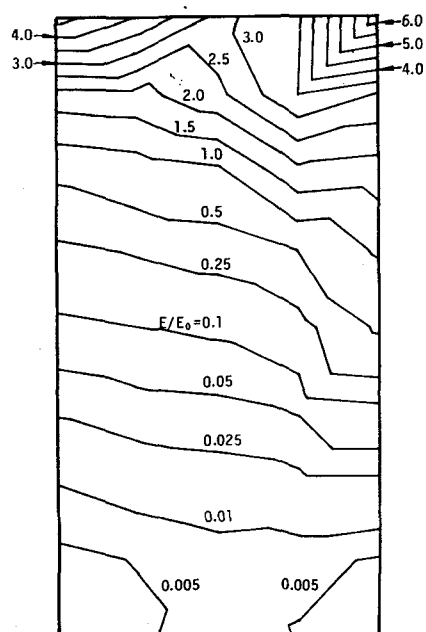


図 5. 2 5 要素分割

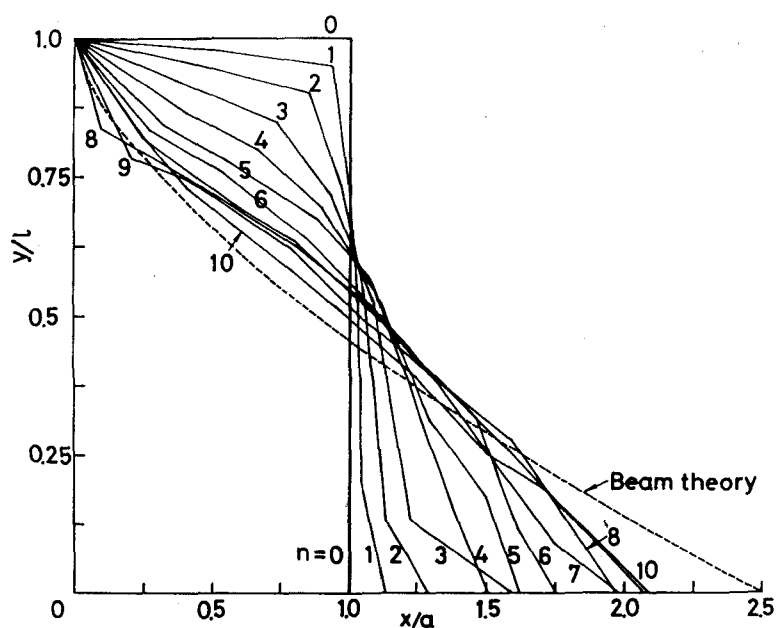


(a) 板厚分布

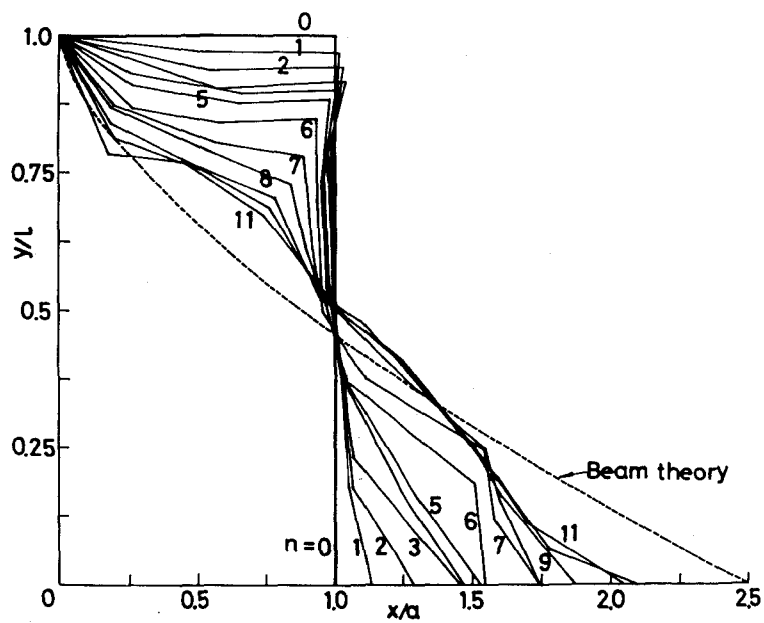


(b) 剛性分布

図 5. 2 4 最適材料特性分布



(a) 板厚變化法



(b) 剛性變化法

圖 5. 26 形狀變化過程

1 倍の量をそれぞれ与えた。図 5. 25 は解析に用いた基本原形における要素分割を示す。図 5. 26 に両変化法による形状変化過程を比較して示す。同図より初期の形状変化には差異が認められるが、最終的に得られた形状には大差がない。なお、同図中には次式で与えられるはり理論による最適形状を破線で示した。

$$x = \frac{5}{2} a \left(1 - \frac{y}{l}\right)^{3/2} \quad (5.9)$$

図 5. 27 は両方法による全域 Ω および設計境界 S_F での最大相当応力の変化過程を示す。また図 5. 28 には板厚変化法による最終形状における等応力線図を示す。図 5. 23 の分布と比較して十分応力分布の均一化が

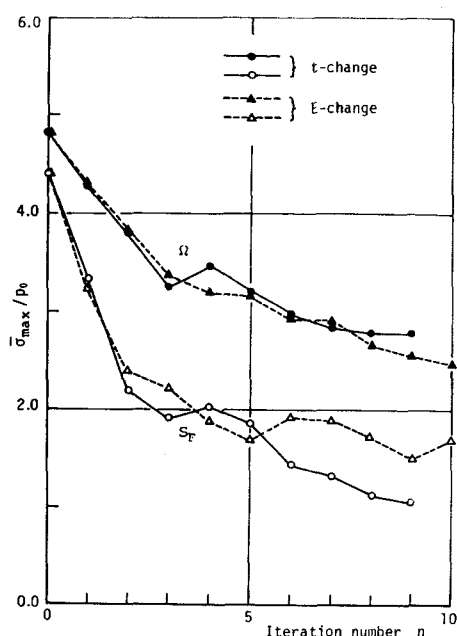


図 5. 27 最大応力の変化

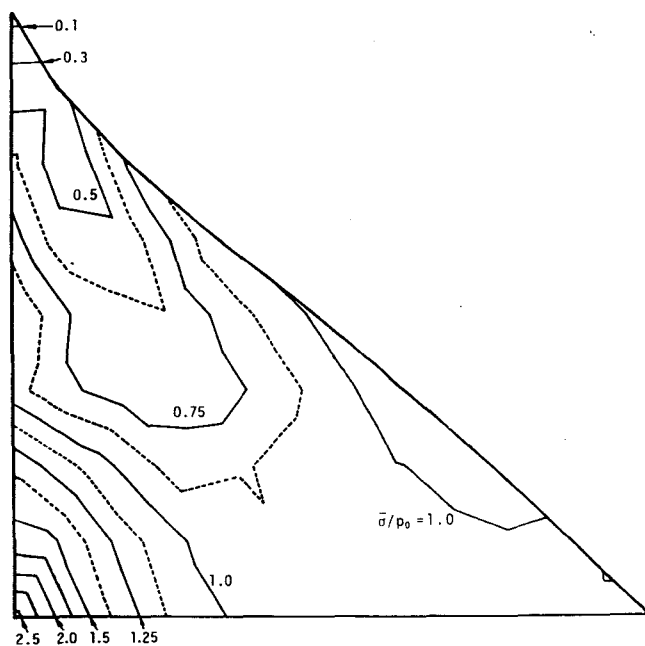


図 5. 28 Ω_{opt} における等応力線図

図られていることが了解できる。
 なお同図より本設計モデルでは
 多連結化の可能性は存在しない。

5. 4. 3 一様荷重を受ける T型柱

次に図5. 29に示すような
 高さ H , 幅 W の部分に一様
 な分布荷重 p を受ける柱を考え
 る。このような形状の柱は実際
 高架道路などによく利用されて
 いるものである。設計条件とし
 て柱の荷重を受ける上端面およ
 び支持部分の形状を不変とし、
 体積一定の条件のもとで形状を

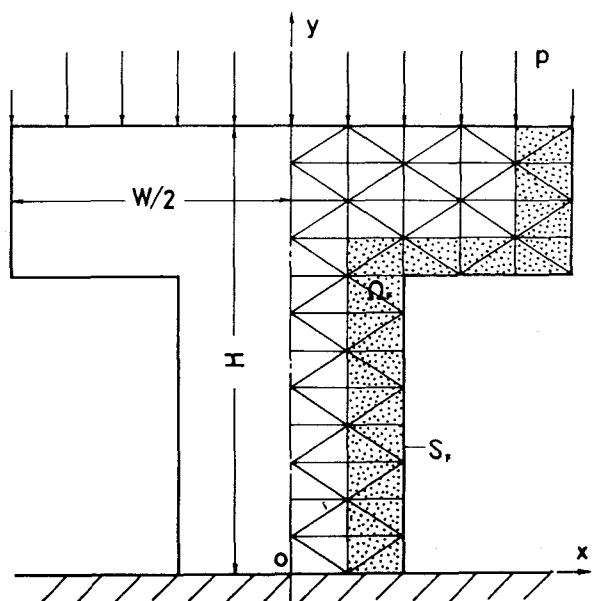


図5. 29 一様荷重を受ける柱 Ω_{s0} とその要素分割

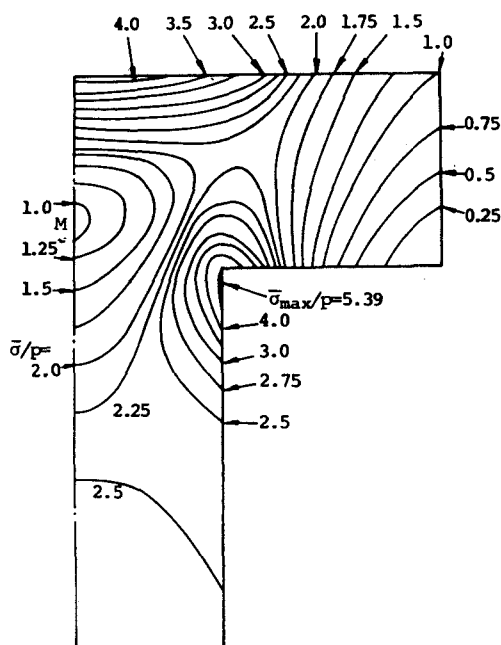


図5. 30 Ω_{s0} の等応力線図

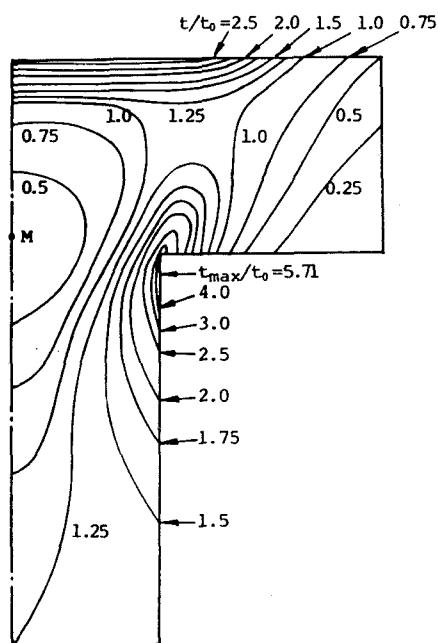


図5. 31 Ω_{s0} の最適板厚分布

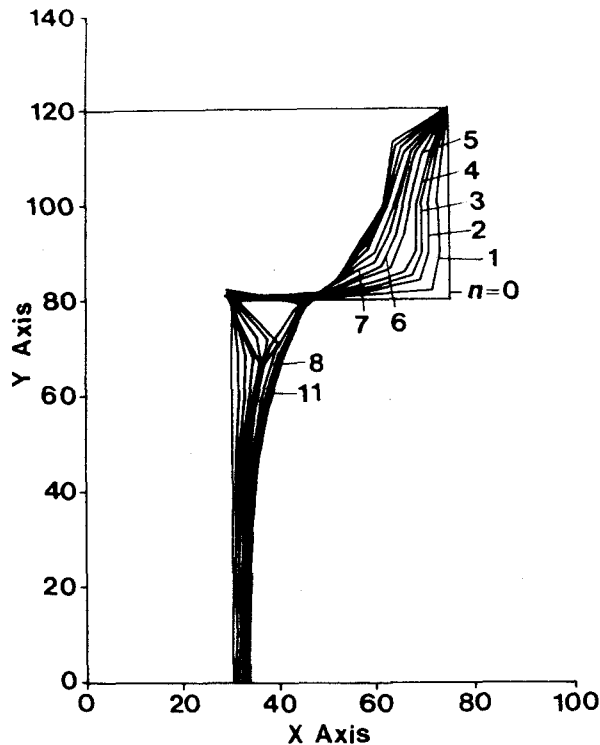


図5. 32 Ω_{sopt} の決定過程

最適化する。また弾性破損条件としてミーゼス説を用いる。図5. 29は単連結物体として採用した基本原形 Ω_{s0} を示しており、一様板厚を t_0 として Ω_{s0} の体積は $0.6WHt_0$ である。また解析はモデルの対称性から1/2領域のみについて実施したが、図5. 29は手法Iに対して採用した要素分割を示す。次に図5. 30に基本原形 Ω_{s0} におけるミーゼスの相当応力の等高線図を示す。これより基本原形は段付き部に激しい応力集中を生じており、一方中心線 y 軸上に応力分布の極小点Mが存在することがわかる。さらに図5. 31は基本原形に対する等厚さ線図を示すが、この図からも上述のことが裏付けられる。そこで2つの手法を適用してT型柱の多連結最適形状の決定を行なった。

(1) 手法I まず図5. 29の Ω_{s0} に対して同図に示すように Ω_F, S_F をとり、要素パターン変換法を適用してその最適形状 Ω_{sopt} を決定した。図5. 32はそのパターンの変化過程を示すもので、 $n=11$ 回で形状はほぼ収束した。最大、最小応力の比は Ω_{s0} で23.2であったものが $n=11$ で2.28まで減少している。次に図5. 4の判定1を行なうために Ω_{sopt} についての等応力線図5. 33を求めた。これより明らかにM点近傍が全域で最も応

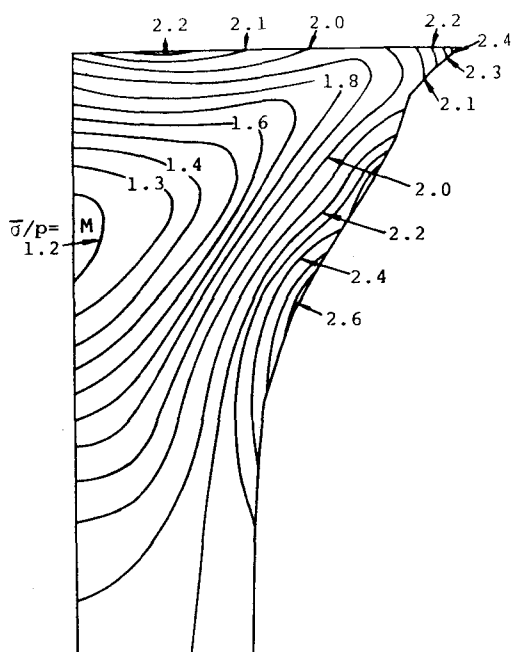


図5. 33 Ω_{sopt} の等応力線図

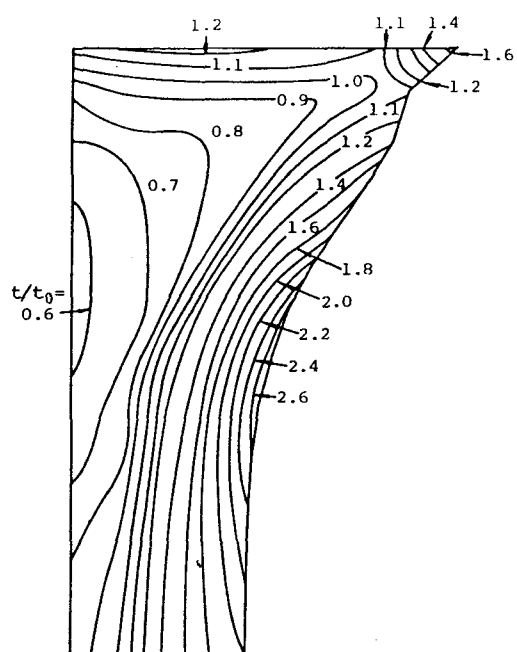


図5. 34 Ω_{sopt} の最適板厚分布

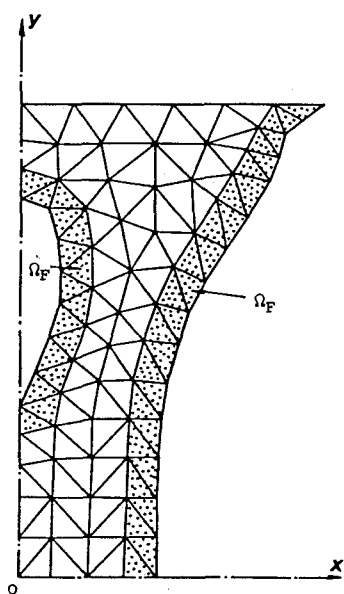


図5. 35 2連結物体 Ω_{m0} とその要素分割

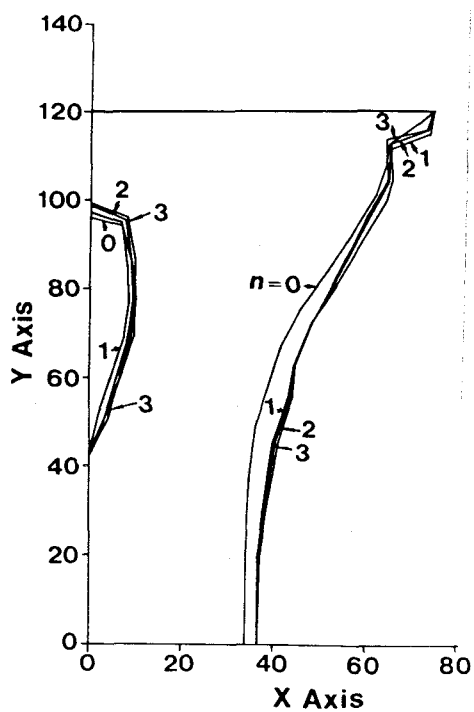


図5. 36 Ω_{mopt} の決定過程

力が低く、図5. 3のそれに対応することが確認できる。よってこの部分に空域を設けることにする。そこで図5. 4のフローチャートに従い、 Ω_{sopt} の形状を変えないで全域の応力が一定

(Ω_{sopt} の全要素応力の平均値を目標値とする)となるような最適板厚分布を求めた。図5. 34はその等高線図を示すが、これより板厚の薄い $t/t_0 \leq 0.65$ の部分为空域とする2連結物体の原形 Ω_{m0} を決定した。図5. 35は Ω_{m0} の形状と採用した要素分割を示す。全域の板厚を t_0 とするとその体積は $0.56WHt_0$ となっており、 Ω_{s0} の体積より約6. 8%小さく、明らかに体積一定の条件は満たされていない。そこでこの基本原形 Ω_{m0} に対し

て再び要素パターン変換法による形状最適化を実施した。図5. 35には設計領域 Ω_F をドット域で示すが、計算では Ω_F 域の応力分布を均一化させつつ、体積をもとの値に近づけるように要素パターン変換の基準応力 σ_a を設定した。図5. 36はその形状変化過程を示すが、最終的に得られた Ω_{mopt} の体積は $0.603WHt_0$ となっており、 Ω_{s0} のそれにほぼ一致している。また応力比は1. 90となっている。

次に Ω_{mopt} の等応力線図を図5. 37に示すが、これよりまた新たにM'点部に低応力域が生じていることが認められる。よってさらに高次の多連結化の可能性がうかがえるが、 Ω_{s0} から Ω_{mopt} に至るまでの応力変化を示した図5. 38からも了解できるように、M'点部に空域を設けても全域での応力比の大幅な減少は期待できないので、ここで多連結化の計算を終了した。

(2) 手法II 手法Iと同様図5. 29のモデルを基本原形とし、材質変化法として板厚変化法を用いて式(5. 5)で得られる形状修正ベクトル量の0. 2倍の修正量を与えて形状の最適化を図った。採用した要素分割は精度良い最適板厚分布を求めるため、図5. 29の段付き部を若干細分割したものである。図5. 39は $n=10$ までの形状変化過程を示す。こ

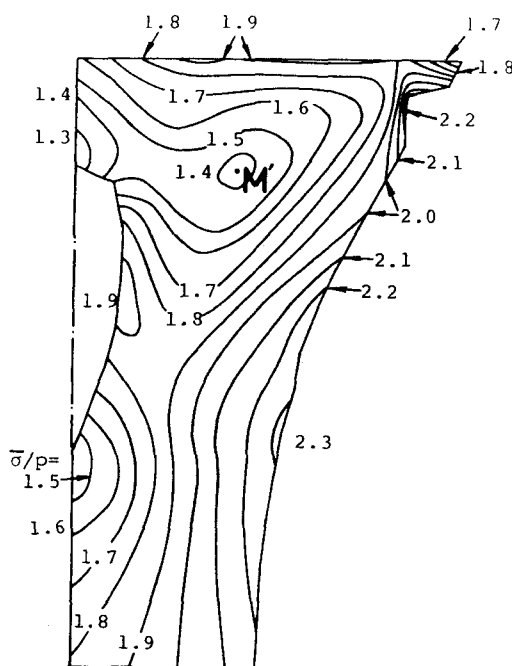


図5. 37 Ω_{mopt} の等応力線図

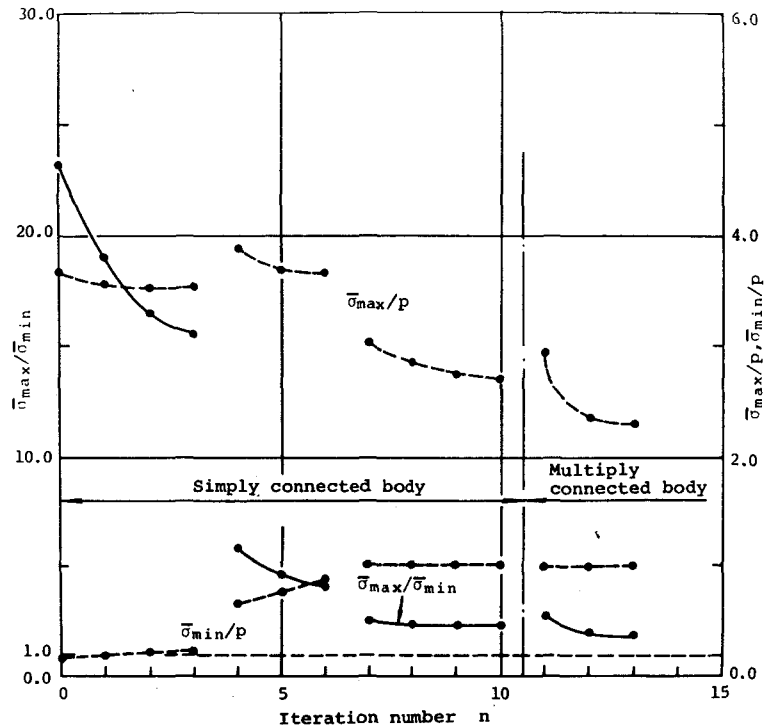


図5. 38 n による応力の変化状態

れより最初のステップ $n=1$ で既に空域が創成され、繰り返し過程に伴ってその空域が成長している。一方、段付き部はスムーズに膨張して滑らかな曲線形状へと変化している。次に図5. 40に最大、最小応力の比の変化過程を示す。同図より応力比 $\bar{\sigma}_{\max}/\bar{\sigma}_{\min}$ は $n=0 \rightarrow 10$ で51.0 $\rightarrow$ 2.5と繰り返し初期に大幅に減少している。さらに図5. 41は最終形状 $n=10$ における等応力線図を示すが、ほとんど全域で応力集中のない形状となっていることが了解できる。

5. 4. 4 手法Ⅰと手法Ⅱの比較

前項までの設計例の数値結果を比較して次のことが言える。すなわち、

- (i) 要素パターン変換法による手法Ⅰの方が安定した形状変化を示しているが、多連結化の際に切り取る等高線の材料特性値を判断する必要がある、その判断した結果が多連結最適形状を決定するのに必要な繰り返し数を左右する。それに対し、手法Ⅱでは自動的に空域の創成が可能であり、人為的因子が関与しない。

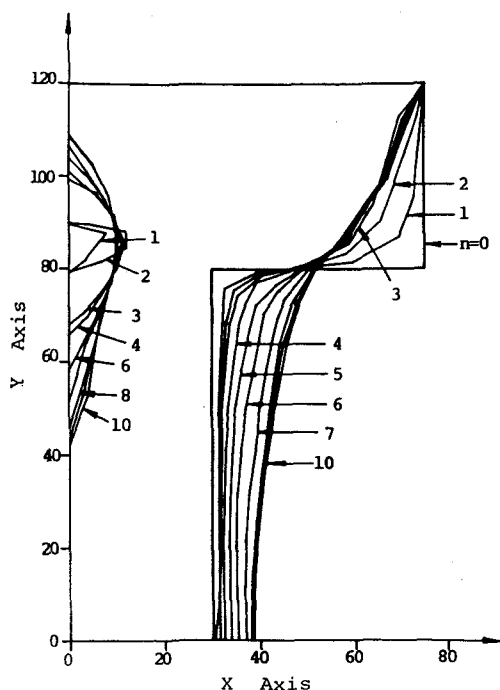


図5. 39 形状変化過程 (手法Ⅱ)

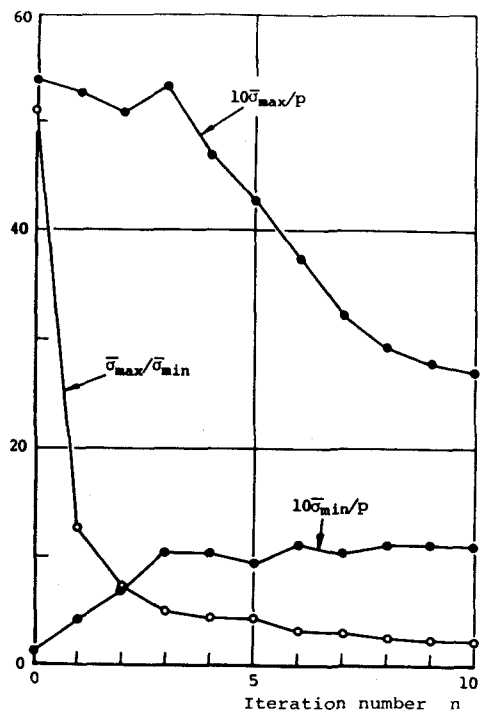


図5. 40 最大, 最小応力の変化

- (ii) 手法Ⅱでは形状修正の各ステップごとに最適材料特性分布を求めるための数回の有限要素解析が必要であり, したがって一般に最適形状を得るまでに手法Ⅰより多くの計算時間を必要とする.
- (iii) 手法Ⅰでは多連結化を手動で行なうため, 全体のアルゴリズムは簡単であるのに対し, 手法Ⅱは空域創成のための複雑な自動分割アルゴリズムを必要とする.
- (iv) 手法Ⅱはパターン変換法では困難な応力集中の激しい角部を持った基本原形に対しても滑らかな形状修正が可能である.

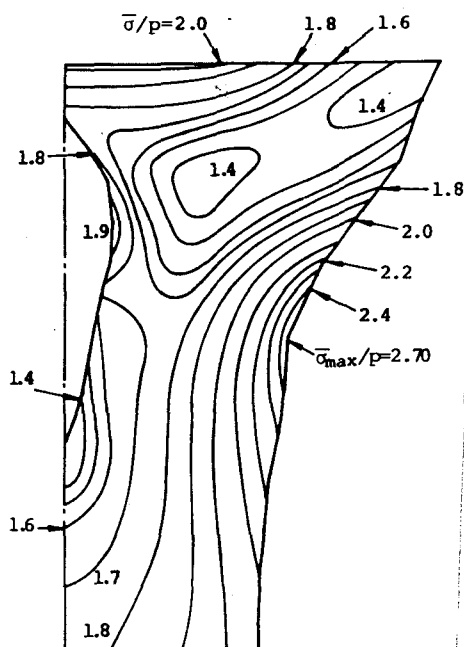


図5. 41 等応力線図 ($n=10$)

5. 5 結 言

本章では、多連結物体によってその最適形状が与えられる2次元連続体の強度的最適化手法として、単連結の基本原形から出発してその多連結最適形状を決定する2つの手法を提示した。その第1の手法は要素パターン変換法による形状最適化過程と従来から用いられてきた板厚変化法を始めとした材質変化法による多連結化過程を組み合わせた手法である。一方、第2の手法は材質変化法による最適材料特性分布の設計境界における特性値とその勾配から直接形状修正ベクトルを決定する手法である。そしてこれらの2つの手法を種々の設計例題に適用してその有効性を確認し、また両手法の特徴を明らかにした。

第 6 章 トラス構造の最適形態の決定法

6. 1 序 言

与えられた荷重形式、支持条件の下で、応力あるいは変位等に関する種々の制約条件が課せられるトラス構造設計問題では、その最適構造を決定するには位相決定と形状決定が必要であり、両者が同時に遂行されて始めてそれが可能となる。位相決定とは構造物全体の最適化基準に対し、与えられた設計空間内での任意の節点間の結合部材の有無の決定いわゆる構造形態の決定であり、連続体における形状創成に対応する。一方、形状決定とは与えられた構造形態における各部材寸法と各節点位置の決定をさす。後者の形状決定に関する研究は、構造最適設計に関する従来の研究の大半を占め、内容也多岐にわたっており、種々の数値計画法的手法によりかなりの成功をおさめている〔6〕～〔12〕。これに対し、20世紀初期にMichell〔13〕によって絶対最適トラス構造が与えられながらも、位相決定問題が本格的に研究され始めたのは比較的最近のことであり、しかも内容は離散化トラスに関するものがほとんどである〔14〕～〔19〕。

しかしながら、部材数が無限であるという実用的難点を除けば、トラス構造の極限である絶対最適解を与えるMichell構造は常に離散化トラス設計の最適構造形態に関する指針を与え得る点できわめて重要である。限られた単純な負荷形式および支持条件に対しては、その解が得られてはいるものの、支持条件あるいは負荷形式が複雑な一般的な問題に対してHencky-Prandtl網を作図して絶対最適解を求めることは困難あるいは不可能である。さらに負荷形式がたとえ単純であっても異なった数種類の荷重条件すべてに対して最適形態を決定する問題、いわゆる多重負荷形式問題に対してはもはや“Michellの定理”〔13〕、〔20〕、〔75〕は適用できず、位相決定に関する情報は何も得られない。

そこで本章では、与えられた設計空間と任意の支持条件および多重負荷形式を含めた任意の負荷形式に対し、静定トラス連続体の最小重量構造を与える位相決定問題を対象とする。静定トラス連続体の最小重量設計では、静定構造ゆえに位相が与えられれば内力系は確定するので一般に形状は自動的に決まり、位相決定問題に帰着する。そこでトラス連続体の有限要素法を導入して与えられた設計空間を離散化し、構造全体の位相を各有限要素のトラス部材の配置方向としてとらえて、数値計画法により連続的な最適位相を決定するはん用的手法を提示する。さらに本手法をMichell構造の既知な問題等に適用してその有効性を検討した結果につ

いても述べる.

6. 2 最適形態の決定法

6. 2. 1 基本的な考え方

単一の負荷形式に対する最小重量構造形態はMichell構造によって達成される. そのMichell構造の性質と具体例に関する詳細な記述はHempの書物《20》が与えているが, 略述すればMichell構造とはHencky-Prandtl網に代表される直交直線網あるいは直交曲線網に沿って無数の無限小長さの部材が連続的に分布するトラス状の連続体である. さらにMichell構造は静定構造であり, また最大剛性設計の解にもなっている. 図6. 1に直交線網によって形成される点荷重 P を円形基礎弧に伝達するMichell構造《20》の一例を示す. 同図中に太線で示した荷重点を通過する2本の線は, 点荷重の大部分を伝達する引張りおよび圧縮の集中部材を表わし, 構造の境界を形成している. そして内部は直交する引張り部材および圧縮部材の連続構造からなる.

さて単一負荷形式に対する2次元トラス連続体の最小重量設計問題では, Michellの定理がその最適位相とそのトラス連続体の応力場およびひずみ場に関する一般的な性質を与える. すなわち, トラス連続体内の各部材応力が引張りあるいは圧縮の許容限界に到達している

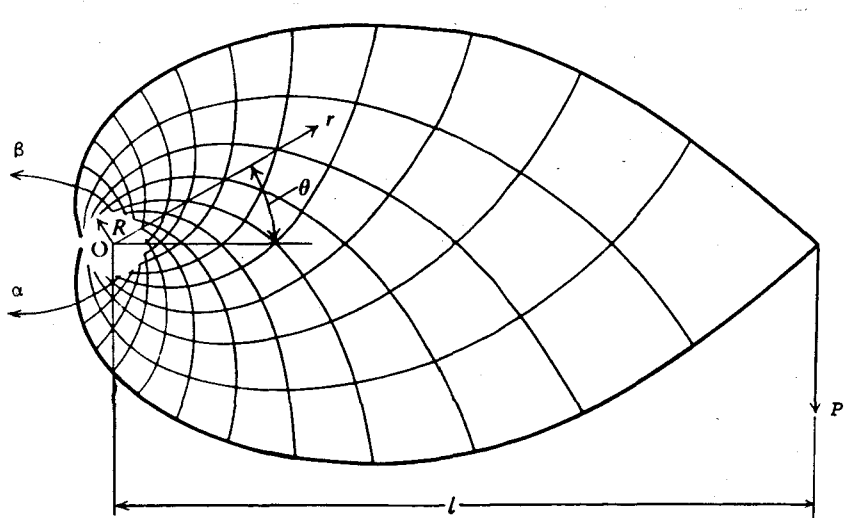


図6. 1 円形基礎弧へ点荷重を伝達する等角線網

場合の2次元トラス内の1点において次の場合が起こりうる。

- (i) 応力場が1軸の引張りあるいは圧縮の状態にある場合は、部材はこの点を端点（起点）に持つかまたはこの点を直線的に通過する。構造全体についてこの条件が成立するならば、1軸引張りあるいは圧縮に関する単純な位相を得る。
- (ii) 応力場が一様な2軸の引張りあるいは圧縮の状態にある場合、部材はこの点から任意の方向に伸ばすことができるが、それらは全て引張りあるいは圧縮の状態にある。したがってこの場合、位相決定に関する情報は得られない。
- (iii) 応力場が引張りと圧縮の2軸状態にある場合、この点から対応する方向にのみ部材を伸ばすことができ、各部材は直交する。設計空間内のすべての点においてこの条件が成立するならば、図6.1のMichell構造の例にみられるように引張りおよび圧縮部材は互いに直交網を形成する。

本章では上記3つの場合のうち基本的には(iii)に対応する応力場を対象とするが、最小重量設計によって必要な部材が選択され得るならば(i)の場合も含むことが可能である。

単一の荷重形式に対しては上述のようにトラス連続体内の部材応力およびひずみは常に引張りあるいは圧縮の許容限界に到達している。しかし多重荷重形式の荷重を受ける場合には、トラス連続体の各部材はそのすべての荷重形式に対してその応力あるいはひずみが同時に許容限界に到達するように位相および形状を決定することは一般に不可能である。したがって最適位相では負荷される s 個の多重荷重形式のうちの1つ P^p に対してある主方向のひずみが引張りまたは圧縮の許容限界に到達し、他のもう1つの荷重形式 P^q に対して P^p の場合と異なるある主方向のひずみが許容限界に到達する。そしてその他の荷重形式に対しては全ての方向のひずみが許容限界内にとどまることになる。それゆえ、すべての荷重形式によって生ずるひずみの主方向に2部材を配置することはできず、またその必要もない。一方、任意の1点から1対を越える部材を任意の方向に伸ばすと、それによって形成される連続的な全体構造としてはもはや静定構造を形成することができない。以上の考察から多重荷重形式に対する一般化されたトラス連続体として、Michell構造における1対の圧縮および引張り部材の直交条件を除いた連続体いわゆる

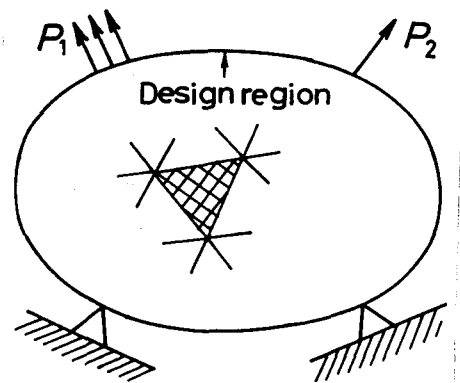


図6.2 トラス連続体の設計モデル

“斜交トラス連続体”を考えることができる。

そこで、その斜交網によって形成されるトラス連続体の重量を最小化する最適位相の決定手法としての次の手順をとることとする。

- (i) 設計条件として支持条件と多重負荷形式が与えられたとき、まず図6. 2に示すようにトラス構造の形態創成の設計空間を荷重点および支持境界を含むように規定する。
- (ii) 斜交する2方向にトラス部材が連続的かつ一様に分布するトラス連続体に対する有限要素法を導入して設計空間を離散化し、構造全体の位相を各要素内の2方向の部材の配置方向としてとらえる。
- (iii) 数値計画法の最適化手法として準ニュートン法的一种であるDFP (Davidon-Fletcher-Powell) 法〔76〕を採用し、各有限要素の部材の配置方向を設計変数にとり、構造全体の重量を最小化する。

上記の手法によって各要素内の2部材の配置方向を最適化すれば、その結果を用いてトラス連続体としての最適位相を決定することが可能である。その詳細を次節以降に述べる。

6. 2. 2 トラス連続体の有限要素法

設計空間を離散化するために、トラス連続体の有限要素を導入する。図6. 3に示すように異なる2方向にトラス部材が連続的かつ一様に分布する構造からなるトラス連続体の3角形要素を考える。この3角形要素は部材方向の引張り力および圧縮力のみの負荷を分担し、せん断変形に対し抵抗を示さない連続体要素とみることができる。したがって、要素内の変位分布を線形に仮定すれば、各部材の主軸方向の定ひずみおよび要素の回転を厳密に与えることができる。今、要素 j の局部座標系 (α, β) を部材の主軸方向にとり、全体座標系 (x, y) の x 軸と α 軸、 β 軸とのなす角を反時計回りに $\theta_{\alpha j}$ 、 $\theta_{\beta j}$ として、これを方向変数と呼ぶことにする。そして要素 j の3節点の局部座標値を (α_i, β_i) ($i=1, 2, 3$)、節点変位ベクトルを $d_j = (d_{\alpha 1}, d_{\beta 1}, d_{\alpha 2}, d_{\beta 2}, d_{\alpha 3}, d_{\beta 3})_j^T$ とすれば、要素内の任意の点の α, β 方向の

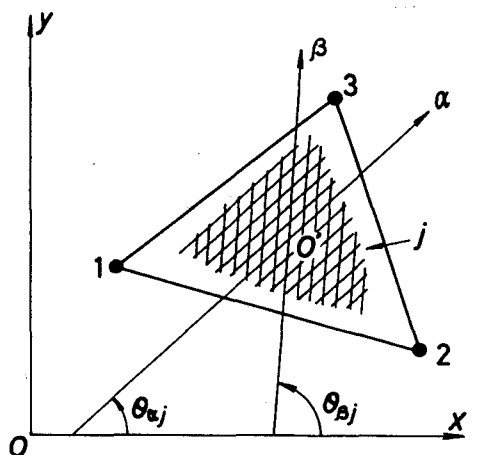


図6. 3 斜交トラス連続体の3角形定ひずみ要素

変位 $u_j = (u_\alpha, u_\beta)_j^T$ は 2 次元連続体の 3 角形定ひずみ要素の場合と同様にして次式で与えられる (77)。

$$u_j = N_j d_j \quad (6.1.a)$$

ここに

$$N_j = \begin{bmatrix} 1 & \alpha & \beta & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \alpha & \beta \end{bmatrix} C_j^{-1} \quad (6.1.b)$$

$$C_j^{-1} = \frac{\sin(\theta_{\beta j} - \theta_{\alpha j})}{2A_j} \begin{bmatrix} a_1 & 0 & a_2 & 0 & a_3 & 0 \\ b_1 & 0 & b_2 & 0 & b_3 & 0 \\ c_1 & 0 & c_2 & 0 & c_3 & 0 \\ 0 & a_1 & 0 & a_2 & 0 & a_3 \\ 0 & b_1 & 0 & b_2 & 0 & b_3 \\ 0 & c_1 & 0 & c_2 & 0 & c_3 \end{bmatrix} \quad (6.1.c)$$

であり, A_j は要素面積を表わす。また

$$\left. \begin{aligned} a_1 &= \alpha_2 \beta_3 - \alpha_3 \beta_2, & a_2 &= \alpha_3 \beta_1 - \alpha_1 \beta_3, & a_3 &= \alpha_1 \beta_2 - \alpha_2 \beta_1, \\ b_1 &= \beta_2 - \beta_3, & b_2 &= \beta_3 - \beta_1, & b_3 &= \beta_1 - \beta_2, \\ c_1 &= \alpha_3 - \alpha_2, & c_2 &= \alpha_1 - \alpha_3, & c_3 &= \alpha_2 - \alpha_1 \end{aligned} \right\} \quad (6.1.d)$$

である。さて、応力およびひずみベクトルは α および β 方向の成分だけが存在するので、 $\sigma_j = (\sigma_\alpha, \sigma_\beta)_j^T$, $\epsilon_j = (\epsilon_\alpha, \epsilon_\beta)_j^T$ とそれぞれ表わすことができ、ひずみ、応力と変位の関係は式 (6.1) を微分して

$$\sigma_j = E \epsilon_j = E \left(\frac{\partial u_\alpha}{\partial \alpha}, \frac{\partial u_\beta}{\partial \beta} \right)_j^T = E B_j d_j \quad (6.2.a)$$

ここに

$$B_j = \frac{\sin(\theta_{\beta j} - \theta_{\alpha j})}{2A_j} \begin{bmatrix} b_1 & 0 & b_2 & 0 & b_3 & 0 \\ 0 & c_1 & 0 & c_2 & 0 & c_3 \end{bmatrix} \quad (6.2.b)$$

であり, E は部材の縦弾性係数とする。

そこで連続トラス要素内の α, β 部材の板厚を一定値 t_0 として、この要素に仮想仕事の原理を適用すると容易に要素に関する剛性方程式を得ることができる。すなわち、外力の等価節

点力ベクトルを $P_j = (P_{\alpha 1}, P_{\beta 1}, P_{\alpha 2}, P_{\beta 2}, P_{\alpha 3}, P_{\beta 3})_j^T$ として,

$$P_j = K_j d_j \quad (6.3.a)$$

ただし

$$K_j = A_j E t_0 B_j^T B_j \quad (6.3.b)$$

$$P_j = \int_s N_j^T p \, ds \quad (6.3.c)$$

ここに $p = (p_\alpha, p_\beta)_j^T$ は要素周辺上に作用する分布外力であり、積分は要素境界に沿った面積々分とする。

次に要素の局部座標系に関する剛性方程式を全体座標系に変換する。まず各部材の変位成分 u_α, u_β はそれぞれ独立した各部材の変位を表わすから、全体座標系での変位成分 u_x, u_y は図6. 4に示すようにベクトルの合成によって計算される。したがって全体座標系での変位 $\bar{u}_j^T = (u_x, u_y)_j^T$ は

$$\bar{u}_j = T_{0j} u_j \quad (6.4.a)$$

ここに

$$T_{0j} = \begin{bmatrix} l_1 & l_2 \\ m_1 & m_2 \end{bmatrix} \quad (6.4.b)$$

であり、 $l_1 = \cos \theta_{\alpha j}$, $l_2 = \cos \theta_{\beta j}$, $m_1 = \sin \theta_{\alpha j}$, $m_2 = \sin \theta_{\beta j}$ とする。式(6. 4)の変換は荷重および変位ベクトルに対しても適用可能である。 P_j, d_j に対応する全体座標系での要素の荷重ベクトルを $\bar{P}_j = (P_{x1}, P_{y1}, P_{x2}, P_{y2}, P_{x3}, P_{y3})_j^T$ 変位ベクトルを $\bar{d}_j = (d_{x1}, d_{y1}, d_{x2}, d_{y2}, d_{x3}, d_{y3})_j^T$ とし、変換マトリックスを T_j で表わすと、次の関係がそれぞれ成立する。

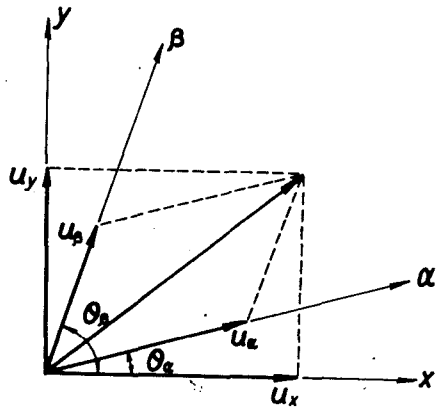


図6. 4 変位ベクトルの合成

$$\bar{P}_j = T_j P_j \quad (6.5)$$

$$\bar{d}_j = T_j d_j \quad (6.6)$$

ただし, T_j は式 (6. 4) の T_{0j} を用いて次のように与えられる.

$$T_j = \begin{bmatrix} T_{0j} & 0 & 0 \\ 0 & T_{0j} & 0 \\ 0 & 0 & T_{0j} \end{bmatrix} \quad (6.7)$$

式 (6. 5), (6. 6) を式 (6. 3) に代入すると, 全体座標系での剛性方程式が次のように得られる.

$$\bar{P}_j = T_j K_j T_j^{-1} \bar{d}_j \quad (6.8)$$

次に全ての要素における式 (6. 8) で与えられる剛性方程式を重ね合せて, 構造全体の剛性方程式を組み立てる. すなわち, S 個の荷重形式に対応する構造全体の荷重ベクトルおよび節点変位ベクトルを P^i, d^i ($i=1, \dots, S$) とすれば

$$P^i = K d^i \quad (i=1, \dots, S) \quad (6.9.a)$$

ただし, 支持条件として

$$d^i = 0 \quad ; \quad S_u \text{上} \quad (6.9.b)$$

ここに K は重ね合せによって式 (6. 8) より求まる構造全体の剛性マトリックスであり, S_u はあらかじめ変位が規定される境界である. 式 (6. 9) を解いて節点変位が求まれば, 式 (6. 2) より要素部材のひずみおよび応力が決定される. なお, 式 (6. 8) より明らかに通常連続体の有限要素法と異なり, 剛性マトリックスは非対称であるので数値計算を実施する際に注意を要する.

6. 2. 3 最小重量設計法

(1) 最適化問題の定式化 設計条件によってあらかじめ規定した設計空間をトラス連続体の 3 角形要素に分割すれば, 多重負荷条件下での最小重量を与える最適位相決定問題は各要素部材の配置方向の決定問題となる. それゆえ, 設計変数として各要素ごとの α, β 部材の

主軸方向を正規化した次式で与えられる量をとることとする。

$$x = (x_{\alpha 1}, x_{\beta 1}, \dots, x_{\alpha m}, x_{\beta m})^T \quad (6.10.a)$$

ここに

$$x_{\alpha j} = 2\theta_{\alpha j}/\pi, \quad x_{\beta j} = 2\theta_{\beta j}/\pi \quad (j=1, \dots, m) \quad (6.10.b)$$

であり、 m は構造全体の分割要素数とする。各部材の方向変数 $\theta_{\alpha j}, \theta_{\beta j}$ が可能な全ての位相の組み合わせを表示するためには、 $-\pi/2 \leq \theta_{\alpha j}, \theta_{\beta j} \leq \pi/2$ とすれば十分であるから、設計変数の変域を次式の範囲に限定する。

$$-1 \leq x_{\alpha j}, x_{\beta j} \leq 1 \quad (j=1, \dots, m) \quad (6.11)$$

なお上式の制限は解の表示に対する便宜的なものであり、最適化の境界制約条件とはならない。

さて、応力の制約条件下での最小重量設計問題は、 α, β 部材の板厚 $t_{\alpha j}, t_{\beta j}$ を、与えられた全ての荷重形式に対して生ずる応力の絶対値の最大値が引張りおよび圧縮の許容限界 σ_0 に一致するように選ぶならば、材料密度を一定として次式で与えられる体積 V を最小化するように式 (6.10) の設計変数を決定する問題となる。

$$V = \sum_{j=1}^m A_j (t_{\alpha j} + t_{\beta j}) \quad (6.12)$$

トラス連続体によって与えられるトラス構造は内的静定構造であるから、任意の与えられる位相に対して内力系すなわち外荷重に釣り合う各部材軸力が確定する。したがって、全構造要素の板厚を一定値 $t_{\alpha j} = t_{\beta j} = t_0$ として解析した際の部材応力を用いて必要体積 V を評価すれば次式となる。

$$V = \sum_{j=1}^m \frac{A_j t_0}{\sigma_0} (|\sigma_{\alpha j}^p| + |\sigma_{\beta j}^q|) \quad (6.13.a)$$

ここに多重荷重の荷重条件数を s とし、各応力成分の上添字 i が荷重形式 i に対応する応力を表わすとする。

$$|\sigma_{\alpha j}^p| = \max_{i=1, \dots, s} |\sigma_{\alpha j}^i|, \quad |\sigma_{\beta j}^q| = \max_{i=1, \dots, s} |\sigma_{\beta j}^i| \quad (6.13.b)$$

すなわち、上添字 p, q は α, β 部材応力が許容応力 σ_0 に一致する場合の荷重形式を表わす。したがって式 (6.13) の体積を最小化すれば、式 (6.10) の設計変数ベクトルによって最適位相を決定することが可能となる。

(2) 最適化手法 式(6.13)の表示の目的関数には応力に関する制約条件が含まれているので、本問題は制約条件なしの最適化問題となる。重量最小化の具体的方法としてDavidon-Fletcher-Powellの可変計量法(DFP法)〔76〕を採用すると、第 n ステップにおける可変計量法の具体的な計算アルゴリズムは以下のとおりである。

(i) 次式によって最小化の探索方向 r_n を計算する。

$$r_n = -H_n(\nabla V)_n \quad (6.14)$$

ここに $(\nabla V)_n$ は目的関数 V_n の1階微係数を、また H_n は $(\nabla V)_n$ を修正するためのHesse行列の逆行列である。

(ii) 新しい設計点を

$$x_{n+1} = x_n + \lambda r_n \quad (6.15)$$

として、1方向探索によって $V_n(\lambda)$ を最小とする λ の値 λ_{min} を求め、設計変数を修正する。

(iii) 新しい設計変数 x_{n+1} に対して式(6.9)の剛性方程式を解いて d_{n+1} を求める。

(iv) $(\nabla V)_{n+1}$ を後述の計算手法により求める。

(v) DFP法では次式によって H_n を修正する。

$$H_{n+1} = H_n + \frac{\delta_n \delta_n^T}{\delta_n^T y_n} - \frac{H_n y_n (H_n y_n)^T}{y_n^T H_n y_n} \quad (6.16.a)$$

ここに

$$\delta_n = x_{n+1} - x_n, \quad y_n = (\nabla V)_{n+1} - (\nabla V)_n. \quad (6.16.b)$$

なお、最初のステップ ($n=0$) では、まず仮定した x_0 に対応する d_0 および $(\nabla V)_0$ を求める。また H_0 として単位マトリックスを仮定する。したがって (i) ~ (v) の操作を収束基準が満足されるまで繰り返せば、最適位相を決定することができる。

(3) ∇V の算出 上述のDFP法による繰り返し計算には、目的関数の1階微係数 ∇V が必要である。式(6.13)より目的関数の設計変数に関する微分は部材応力に関する微分の計算を必要とする。そこで、まず式(6.2)の表示を式(6.4)を用いて全体座標系に変換すれば次式となる。

$$\sigma_j = E \bar{B}_j T_j^{-1} \bar{d}_j \quad (6.17.a)$$

ここに

$$\left. \begin{aligned} \bar{B}_j &= (B_{\alpha j}, B_{\beta j})^T, \\ B_{\alpha j}^T &= \frac{1}{2A_j} (l_1 \bar{b}_1 + m_1 \bar{c}_1, 0, l_1 \bar{b}_2 + m_1 \bar{c}_2, 0, l_1 \bar{b}_3 + m_1 \bar{c}_3, 0), \\ B_{\beta j}^T &= \frac{1}{2A_j} (0, l_2 \bar{b}_1 + m_2 \bar{c}_1, 0, l_2 \bar{b}_2 + m_2 \bar{c}_2, 0, l_2 \bar{b}_3 + m_2 \bar{c}_3). \end{aligned} \right\} (6.17.b)$$

であり、 $\bar{b}_1, \bar{b}_2, \bar{b}_3$ および $\bar{c}_1, \bar{c}_2, \bar{c}_3$ は3角形要素の3節点の全体座標値を (x_i, y_i) ($i=1, 2, 3$) とすれば

$$\left. \begin{aligned} \bar{b}_1 &= y_2 - y_3, \quad \bar{b}_2 = y_3 - y_1, \quad \bar{b}_3 = y_1 - y_2, \\ \bar{c}_1 &= x_3 - x_2, \quad \bar{c}_2 = x_1 - x_3, \quad \bar{c}_3 = x_2 - x_1. \end{aligned} \right\} (6.17.c)$$

で与えられる。一方、 ∇V は形式的には次式で表わされる。

$$\begin{aligned} \nabla V &= \left(\frac{\partial V}{\partial x_{\alpha 1}}, \frac{\partial V}{\partial x_{\beta 1}}, \dots, \frac{\partial V}{\partial x_{\alpha m}}, \frac{\partial V}{\partial x_{\beta m}} \right)^T \\ &= \frac{\pi}{2} \left(\frac{\partial V}{\partial \theta_{\alpha 1}}, \frac{\partial V}{\partial \theta_{\beta 1}}, \dots, \frac{\partial V}{\partial \theta_{\alpha m}}, \frac{\partial V}{\partial \theta_{\beta m}} \right)^T \end{aligned} \quad (6.18)$$

上式の各成分は、式(6.13)より

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial \theta_{\alpha j}} &= \frac{t_0}{\sigma_0} \sum_{i=1}^m A_i \left(-\frac{\sigma_{\alpha i}^p}{|\sigma_{\alpha i}^p|} \frac{\partial \sigma_{\alpha i}^p}{\partial \theta_{\alpha j}} + \frac{\sigma_{\beta i}^q}{|\sigma_{\beta i}^q|} \frac{\partial \sigma_{\beta i}^q}{\partial \theta_{\alpha j}} \right), \\ \frac{\partial V}{\partial \theta_{\beta j}} &= \frac{t_0}{\sigma_0} \sum_{i=1}^m A_i \left(-\frac{\sigma_{\alpha i}^p}{|\sigma_{\alpha i}^p|} \frac{\partial \sigma_{\alpha i}^p}{\partial \theta_{\beta j}} + \frac{\sigma_{\beta i}^q}{|\sigma_{\beta i}^q|} \frac{\partial \sigma_{\beta i}^q}{\partial \theta_{\beta j}} \right). \end{aligned} \right\} (6.19)$$

さらに上式右辺の各応力成分の $\theta_{\alpha j}, \theta_{\beta j}$ に関する微分形は、式(6.17)より次式となる。

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{E} \frac{\partial \sigma_{\alpha i}^p}{\partial \theta_{\alpha j}} &= \delta_{ij} \left(\frac{\partial B_{\alpha i}^T}{\partial \theta_{\alpha j}} T_i^{-1} \bar{d}_i^p + B_{\alpha i}^T \frac{\partial T_i^{-1}}{\partial \theta_{\alpha j}} \bar{d}_i^p \right) + B_{\alpha i}^T T_i^{-1} \frac{\partial \bar{d}_i^p}{\partial \theta_{\alpha j}}, \\ \frac{1}{E} \frac{\partial \sigma_{\beta i}^q}{\partial \theta_{\alpha j}} &= \delta_{ij} B_{\beta i}^T \frac{\partial T_i^{-1}}{\partial \theta_{\alpha j}} \bar{d}_i^q + B_{\beta i}^T T_i^{-1} \frac{\partial \bar{d}_i^q}{\partial \theta_{\alpha j}}, \\ \frac{1}{E} \frac{\partial \sigma_{\alpha i}^p}{\partial \theta_{\beta j}} &= \delta_{ij} B_{\alpha i}^T \frac{\partial T_i^{-1}}{\partial \theta_{\beta j}} \bar{d}_i^p + B_{\alpha i}^T T_i^{-1} \frac{\partial \bar{d}_i^p}{\partial \theta_{\beta j}}, \\ \frac{1}{E} \frac{\partial \sigma_{\beta i}^q}{\partial \theta_{\beta j}} &= \delta_{ij} \left(\frac{\partial B_{\beta i}^T}{\partial \theta_{\beta j}} T_i^{-1} \bar{d}_i^q + B_{\beta i}^T \frac{\partial T_i^{-1}}{\partial \theta_{\beta j}} \bar{d}_i^q \right) + B_{\beta i}^T T_i^{-1} \frac{\partial \bar{d}_i^q}{\partial \theta_{\beta j}}. \end{aligned} \right\} (6.20)$$

ここに $\delta_{ij}=1$ ($i=j$), $\delta_{ij}=0$ ($i \neq j$). 上式中の $\partial B_{\alpha j}^T / \partial \theta_{\alpha j}$, $\partial B_{\beta j}^T / \partial \theta_{\beta j}$ および $\partial T_j^{-1} / \partial \theta_{\alpha j}$, $\partial T_j^{-1} / \partial \theta_{\beta j}$ は, $\bar{B}_j$ および T_j^{-1} をそれぞれ直接微分して求めることができる. それに対し, $\partial \bar{d}_i / \partial \theta_{\alpha j}$, $\partial \bar{d}_i / \partial \theta_{\beta j}$ は若干複雑であり, 外荷重不変の条件の下に式 (6. 9) を微分して得られる次式を解く必要がある.

$$\left. \begin{aligned} K \frac{\partial d^i}{\partial \theta_{\alpha j}} &= - \frac{\partial K}{\partial \theta_{\alpha j}} d^i, \\ K \frac{\partial d^i}{\partial \theta_{\beta j}} &= - \frac{\partial K}{\partial \theta_{\beta j}} d^i. \end{aligned} \right\} (i=p, q, j=1, \dots, m) \quad (6.21.a)$$

ただし

$$\frac{\partial d^i}{\partial \theta_{\alpha j}} = 0, \quad \frac{\partial d^i}{\partial \theta_{\beta j}} = 0; \quad S_u \text{ 上} \quad (6.21.b)$$

式 (6. 21. a) 右辺の $\partial K / \partial \theta_{\alpha j}$ および $\partial K / \partial \theta_{\beta j}$ は, 要素 j の剛性マトリックスの微係数のみによって容易に計算される. 以上の定式化によって ∇V の算出が可能である.

6. 2. 4 数値計算上の注意事項

上述の位相決定手法によって具体的に数値計算を実施する際, 下記の点に留意する必要がある.

(1) 位相の初期設定 設計空間を連続トラス要素に分割した後, 位相の最適化計算を開始するにはまず初期位相を仮定する必要がある. ところが一般の連続体とは異なり, 位相によっては離散化トラス構造におけるリンク機構の形成に相当する構造的不安定を生ずる場合がある. そのような初期設定を避けるために一様乱数を発生させ, 各要素ごとに α, β 部材が直交するランダムな初期値 x_0 を仮定する.

(2) 探索時間の節約 繰り返しの各ステップで ∇V を求めるために $4m$ 個の連立方程式 (6. 21) を解く必要があり, その計算時間が最適化の反復ステップの所要時間に占める割合が大きいの. ところが式 (6. 21) の各々の連立方程式で各 $\theta_{\alpha j}, \theta_{\beta j}$ に対して変化するの, 右辺の接線剛性マトリックス $\partial K / \partial \theta_{\alpha j}, \partial K / \partial \theta_{\beta j}$ のみである. したがって消去法によって $4m$ 個の連立方程式を同時に解けば, 反復法による解法に比較して計算時間を大幅に節約できる.

(3) 1方向探索 式 (6. 15) の $\lambda_{\min}$ を決定する1方向探索の具体的手法として, 探索のステップ幅 c_0 をあらかじめ与え,

$$\lambda_k = k c_0 \quad (k=1, 2, \dots) \quad (6.22)$$

として、それに対応する体積 $V(\lambda_k)$ を求める。ここに k は 1 方向探索のステップ数である。 $V(\lambda_k)$ が最小値を含む範囲まで λ_k を追い込んだ後、 $V(\lambda)$ を 2 次式に近似して最小体積を与える $\lambda_{\min}$ を求める。ステップ幅 c_0 は、最初大きめの値を入力し、 $\lambda_{\min} < \lambda_1$ となる場合には

$$c'_0 = \gamma_0 c_0 \quad (\gamma_0 < 1) \quad (6.23)$$

として自動的に小さくして、探索幅を合理的に狭ばめる。

(4) 収束基準 反復探索過程の停止のための収束基準を、各位相の前ステップとの相対誤差に対して課す。すなわち、設計変数のすべての成分に対して次の条件が満足された場合に反復計算を終了する。

$$\left| \frac{x_{\alpha_j}^{n+1} - x_{\alpha_j}^n}{x_{\alpha_j}^n} \right| < \varepsilon_0, \quad \left| \frac{x_{\beta_j}^{n+1} - x_{\beta_j}^n}{x_{\beta_j}^n} \right| < \varepsilon_0 \quad (j=1, \dots, m) \quad (6.24)$$

ここに ε_0 は相対誤差の限界を表わす。

6. 3 計算例と考察

6. 3. 1 2 部材トラス構造

まず最適解への収束性を検討するために図 6. 5 (a) に示すような鉛直下向きの大きさ P の点荷重を、距離 d だけ離れた鉛直な基礎壁に伝える問題、いわゆるコート掛け問題を取り上げた。これの最適解は図 6. 5 (b) に示すように荷重点から基礎壁と $\pm \pi/4$ だけ傾いた方向に伸ばした 2 本の引張りお

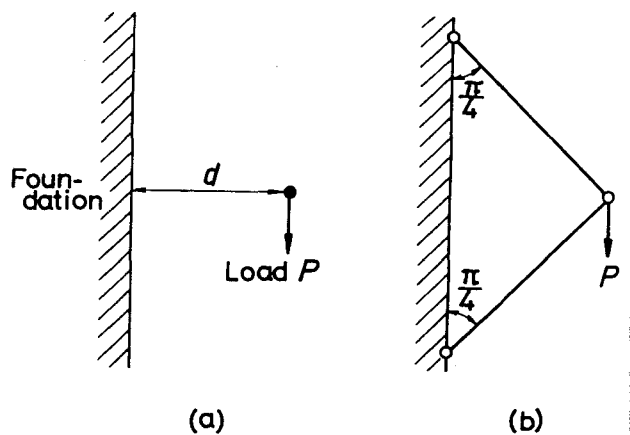


図 6. 5 コート掛け問題の設計モデルと最適解

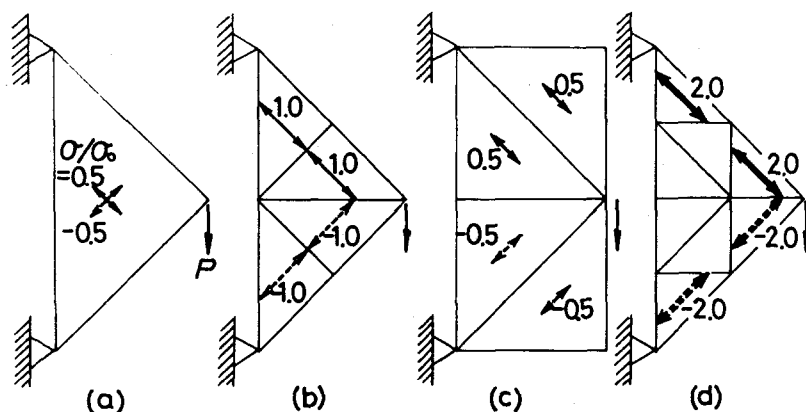


図6. 6 要素分割と応力分布

および圧縮部材によって達成される。このとき最小体積 V_{th} は引張りおよび圧縮の許容応力を σ_0 として次式で与えられる【75】。

$$V_{th} = \frac{2Pd}{\sigma_0} \quad (6.25)$$

さて、上述の解をトラス連続体で表示すると2部材と平行な直線直交網となるが、図6. 6は本手法の連続トラス要素によってコート掛け問題の解が的確に表現され得ることを確認した結果を示す。すなわち、同図に示すような種々の等分割要素に対して各要素の位相を最適な方向 $\pm\pi/4$ とし、単位板厚 ($t_0=1$) で解析した際の各要素に生ずる応力比 σ_α/σ_0 , σ_β/σ_0 の大きさとその方向を示す。実線は引張り応力を、破線は圧縮応力を表わしている。また式(6. 13)を用いて各要素の応力値より算出される各分割モデルの全体積は、全て厳密に理論値 ($V_{th}=1.0$, $d=1.0$) と一致する。これらの結果より、図6. 5(b)の位相を正確にとらえるには、要素の細分割が望ましいことがわかる。

次に図6. 7に示す2要素モデルを用い、初期値を変えて最適解への収束性を検討した結果を示

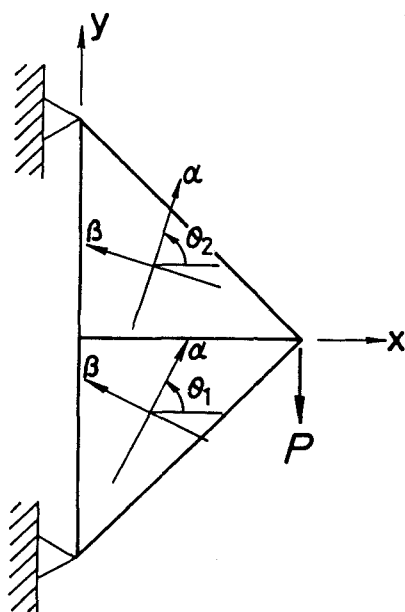


図6. 7 2要素モデル

表 6. 1 コート掛け問題の解の収束状況

n	ケース 1			ケース 2			ケース 3		
	x_1	x_2	V_n/V_{th}	x_1	x_2	V_n/V_{th}	x_1	x_2	V_n/V_{th}
0	0.2500	0.7500	2.0000	0.2500	0.2500	1.7071	0.9500	0.9500	6.8530
1	0.5000	0.5000	1.0000	0.5000	0.2500	1.2071	0.9500	0.9220	5.8534
2				0.5877	0.4618	1.0232	0.5146	0.4867	1.0010
3				0.5044	0.4805	1.0010	0.5035	0.4861	1.0005
4				0.5000	0.4954	1.0001	0.5053	0.4900	1.0004

す。本例は単一の負荷形式のみを受ける問題であるから Mitchell の定理がそのまま適用できるゆえ、各要素内の α, β 部材は直交する。したがって各要素内の α 部材の位相 $x_1=2\theta_1/\pi$, $x_2=2\theta_2/\pi$ を設計変数にとれば、2変数問題となる。このとき、可能なすべての位相を表示するには、設計変数の変化域を $0 \leq x_1, x_2 < 1$ とすれば十分である。本モデルの最適解は $x_1=x_2=1/2$ で与えられ、また $x_1=0$ あるいは $x_2=0$ で構造的に不安定を生ずる。

初期ステップ幅 $c_0=1/18$ (角度

で 5° に相当), $\gamma_0=1/2$, 収束基準 $\varepsilon_0=10^{-2}$ とし、異なった初期値に対して実施した数値計算の収束状況を表 6. 1 に示す。また図 6. 8 にはその収束過程を目的関数の等高線とともに図示する。これらの結果よりきわめて良好な収束性を示していることが了解される。

次に多重負荷形式に対する簡単な設計例として、図 6. 9 に示すように荷重点および支持条件は前例項と同様であるが表 6. 2 に示すような 3 種類の荷重 (P_0 は定数) が負荷されるモデルを取り上げた。これの最適位相は 2 部材静定トラス構造によって達成される。 x 軸を基礎壁に垂直かつ荷重点を通過するようにとれば、 $\theta_\alpha=48.31^\circ$, $\theta_\beta=-19.75^\circ$ のとき、最小体積

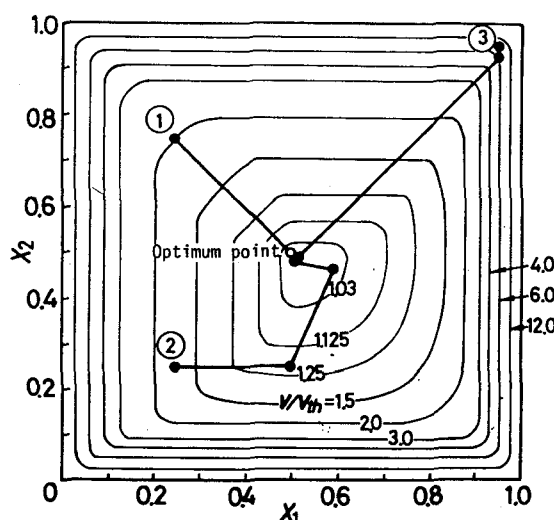


図 6. 8 コート掛け問題の目的関数の等高線と最適化過程

$$V_{th} = 7.506 P_0 d / \sigma_0 \quad (6.26)$$

となる。

さて本モデルのひずみ場は位相が一定であれば各荷重形式に対して α, β 部材方向に一樣となるので、その分割モデルとして図6. 10に示すような荷重点を頂点とする直角2等辺3角形の1要素モデルを採用する。任意の一定位相に対して部材の板厚を一定値 t_0 として解析した際の α, β 部材応力成分は、3角形要素の面積に反比例する。したがって式(6. 13)より、要素形状として基礎壁を底辺とし、荷重点を頂点とする任意の形状を選択することが可能であり、それによって2部材トラス構造の体積および位相を厳密に表現することができる。よって図6. 10に示すような2変数 $x_\alpha = 2\theta_\alpha / \pi$, $x_\beta = 2\theta_\beta / \pi$ を設計変数とする2変数問題となる。このとき設計領域を $-1 \leq x_\alpha, x_\beta \leq 1$ かつ $x_2 \leq x_1$ とすれば、すべての可能な位相を網羅できる。

最小化の数値計算を初期値を種々変えて実施した。表6. 3は、相対誤差 $\varepsilon_0 = 10^{-4}$ として3種類の初期値からの最適解への収束性を検討した結果を示している。また図6. 11は $P_0 d / \sigma_0 = 1/2$ としたときの目的関数の等高線図上に、表6. 3の収束過程をプロットしたものである。設計変数に対する設計空間は図中に破線で示す10個の領域に分割され、各領域内の目的関数は次式で評価される。

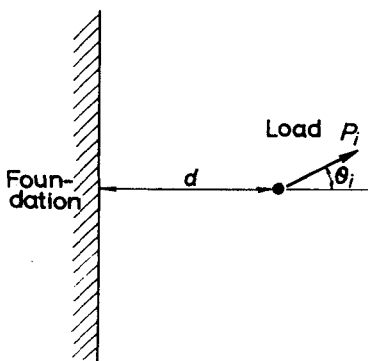


図6. 9 3重点荷重を支持する
2部材構造設計モデル

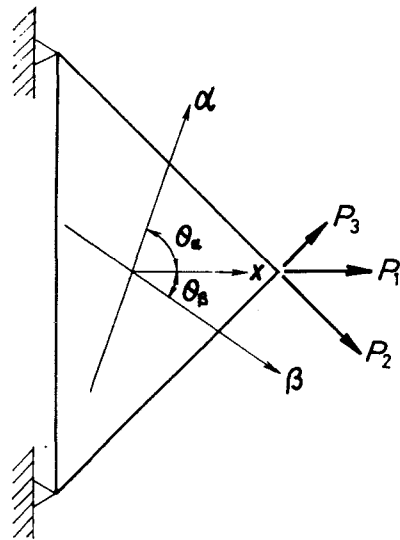


図6. 10 1要素モデル

表 6. 3 3重負荷モデルの収束状況

n	アース 1			アース 2			アース 3		
	x_α	x_β	V_n/V_{th}	x_α	x_β	V_n/V_{th}	x_α	x_β	V_n/V_{th}
0	0.8333	0.6667	11.2501	0.8333	-0.8333	6.5495	-0.5000	-0.8333	3.2760
1	0.9009	0.4641	6.3263	0.4272	-0.3267	1.0099	0.4553	-0.5378	1.1966
2	0.6926	0.3934	3.8783	0.5028	-0.2457	1.0010	0.4191	-0.3166	1.0102
3	0.6883	-0.2512	1.0809	0.5181	-0.2459	1.0005	0.4980	-0.2837	1.0031
4	0.5938	-0.2057	1.0057	0.5183	-0.2349	1.0003	0.5332	-0.2566	1.0020
5	0.5930	-0.2049	1.0054	0.5363	-0.2202	1.0000	0.5301	-0.2254	1.0000
6	0.5930	-0.2048	1.0054	0.5362	-0.2201	1.0000	0.5364	-0.2198	1.0000
7	0.5277	-0.2280	1.0001				0.5364	-0.2198	1.0000
8	0.5320	-0.2271	1.0000						
9	0.5367	-0.2196	1.0000						
10	0.5366	-0.2196	1.0000						

最適点 $(x_\alpha, x_\beta) = (0.5368, -0.2194)$

表 6. 2 負荷条件

i	P_i	θ_i
1	$3P_0$	0°
2	$4P_0$	-45°
3	$2P_0$	45°

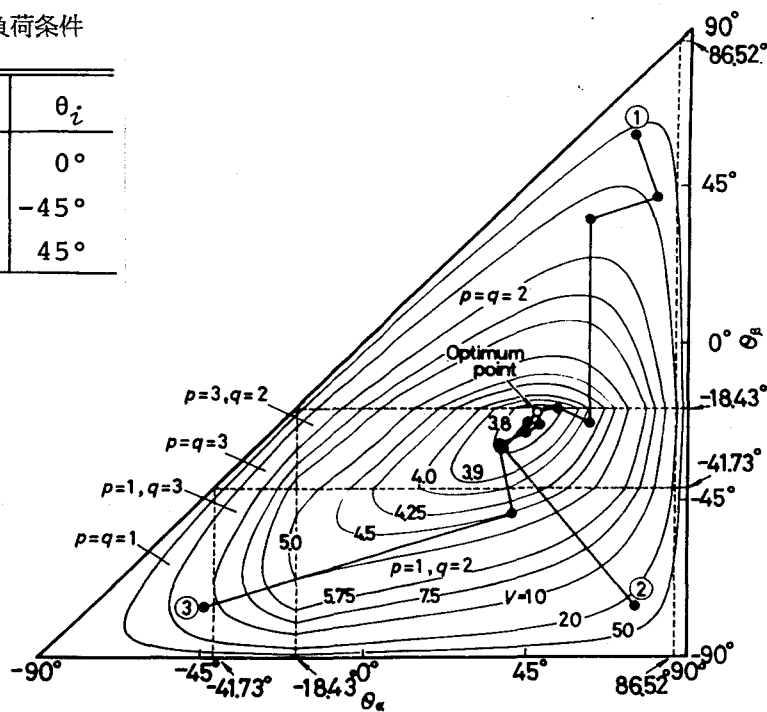


図 6. 11 3重負荷モデルの目的関数の等高線と最適化過程

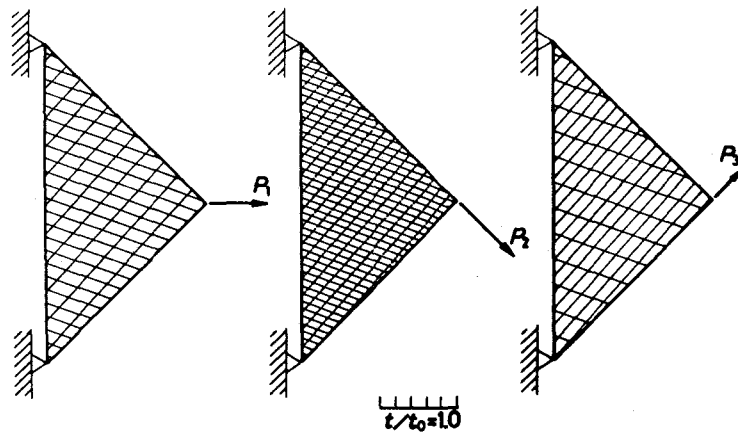


図6. 12 各負荷条件に対応する必要板厚密度

$$V = \frac{d^2 t_0}{\sigma_0} (|\sigma_\alpha^p| + |\sigma_\beta^q|) \quad (6.27)$$

ここに応力成分の上添字 p, q は各部材応力の絶対値が最大となる荷重形式を表わすが、各領域における具体的な値を同図中に示した。さらに本モデルは、 $\theta_\alpha = \pm \pi/2$ 、 $\theta_\beta = \pm \pi/2$ あるいは $\theta_\alpha = \theta_\beta$ のとき構造的に不安定を生じ、体積は無限大となる。また $p=3, q=2$ のとき最小となる。次に図6. 12は全負荷形式に対する最適位相が各負荷形式を支持するのに必要な板厚密度（ただし、 $P_0/d t_0 \sigma_0 = 1/2$ ）を示している。実線は引張り応力を、破線は圧縮応力をそれぞれ表わす。さらに図6. 13はそれらの板厚密度から評価される全負荷形式に対する必要体積の板厚密度と位相を示す。また同図には2部材構造を仮定して要素の最適位相から求まる離散化トラスの最適形態も太い実線で示した。

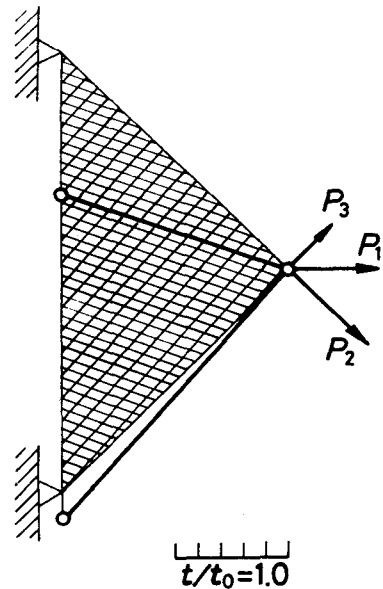


図6. 13 最適位相の板厚密度

以上の結果から、本手法によって単一負荷および多重負荷形式に対する最適位相の決定が可能であり、さらに解の収束性も良好であることが確認された。次により複雑な設計モデルへの適用を試み

る。

6. 3. 2 片持ちトラス構造

図6. 14に示すように間隔 h の2つの支持点に，その支持点間の垂直2等分線上の距離 l 離れた点に作用する点荷重を伝達する構造の位相決定問題を取り上げた．具体的な寸法として $l/h=4.0$ とし，同図に示すように荷重点および支持点を含む高さ $2h$ ，長さ l の構造形態創成の設計空間を規定し，同図に示すような要素分割を採用した．このときの構造物の体積を次式で定義する．

$$V = \kappa P_0 l / \sigma_0 \quad (6.28)$$

ここに P_0 は基準となる荷重値であり，また κ は種々の荷重条件と構造形態に対応して定まる定数である．

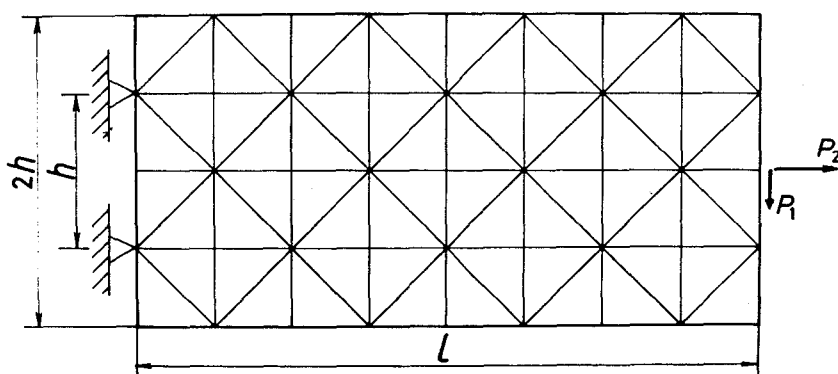


図6. 14 片持ちトラス構造の設計モデルと要素分割

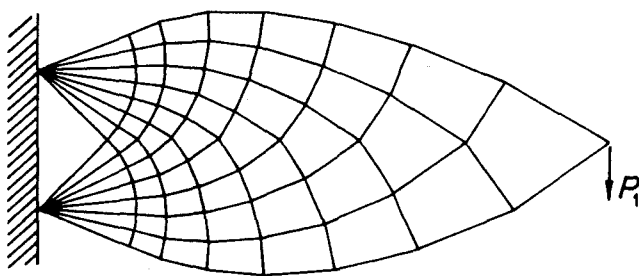


図6. 15 Michell構造の離散化モデル

まず、第1の荷重条件として支持端と平行な外荷重 P_1 のみが負荷される場合の位相決定を試みた。このモデルのMichell構造はChan〔21〕によって研究されており、支持点を中心とする2つの円弧から伸びる直交曲線群によって与えられる。図6. 15はその離散化モデルを示す。さらにこのモデルの最小体積は次式で与えられる〔21〕。

$$V_{th} = \sqrt{2P_1 h} \{ (1+2\mu) I_0(2\mu) + 2\mu I_1(2\mu) \} / \sigma_0 \quad (6.29)$$

ここに $I_0(2\mu)$ 、 $I_1(2\mu)$ はそれぞれ0次、1次の第1種変形ベッセル関数である。また μ は l/h の値に対応して定まる定数で、本例題の場合 $\mu=1.297$ である。なお式(6. 2

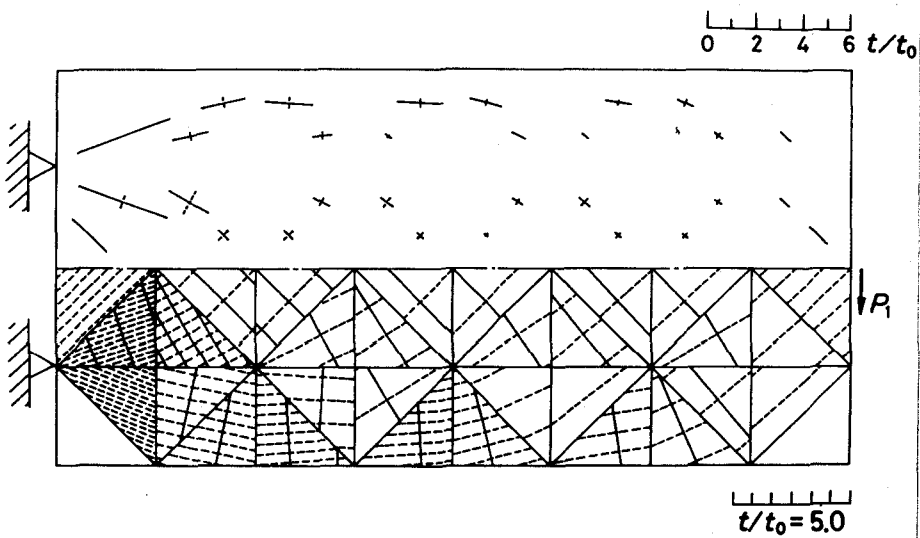


図6. 16 最適位相における板厚密度分布

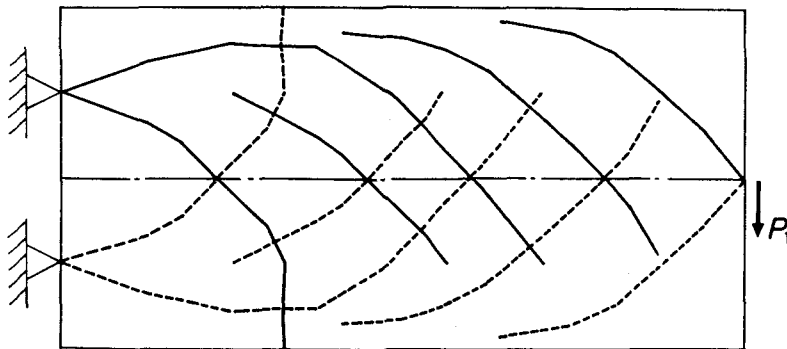


図6. 17 最適位相の離散化

8) で最小体積を表わせば, $P_0=P_1$ として $\kappa=4.95$ となる.

さて荷重形式が単一の場合, 前述のとおり Michell の定理によってその最適位相は直交網で与えられるゆえ, 設計変数は半減する. よって各要素内の α 部材の方向変数 $\theta_{\alpha j}$ を設計変数にとり, その変化範囲を $0 \leq \theta_{\alpha j} < \pi/2$ とすれば可能な全ての位相を表示できる. さらに解析モデルの幾何学および力学的対称性から, 上半分の領域の要素群の部材方向変数のみを設計変数にとった. そして収束判定の相対誤差の基準を $\varepsilon_0=0.25 \times 10^{-2}$ として解析を実施した. 10 回の最適化ステップの繰り返しの後, 式 (6.28) の定数 $\kappa=4.99$ まで減少し, 理論値にかなり近い値となった. 図 6.16 はその時の α, β 部材の板厚 t_α, t_β の分布とその最適配置方向を示す. 実線は引張り部材を, また破線は圧縮部材をそれぞれ示す. 同図の上半分の領域は各要素の重心点における板厚 t/t_0 のベクトル表示を, また下半分は線密度による t_α, t_β の板厚密度分布をそれぞれ示す. 次に図 6.17 は, 図 6.16 の位相分布

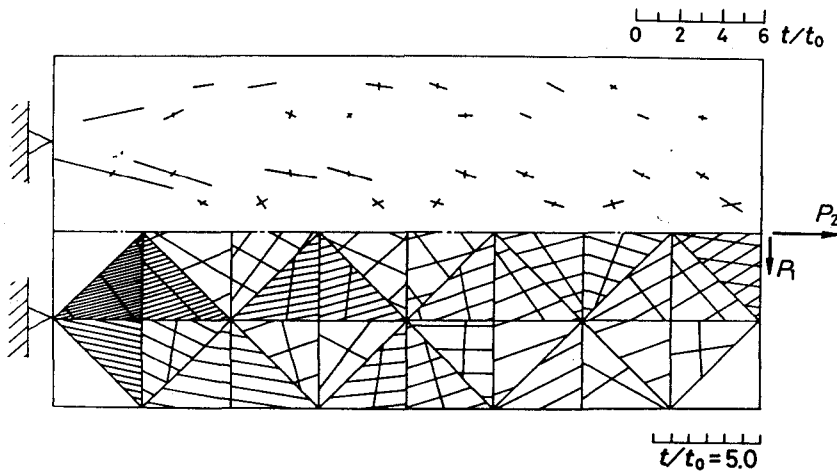


図 6.18 2 重負荷条件下の最適位相における板厚密度分布

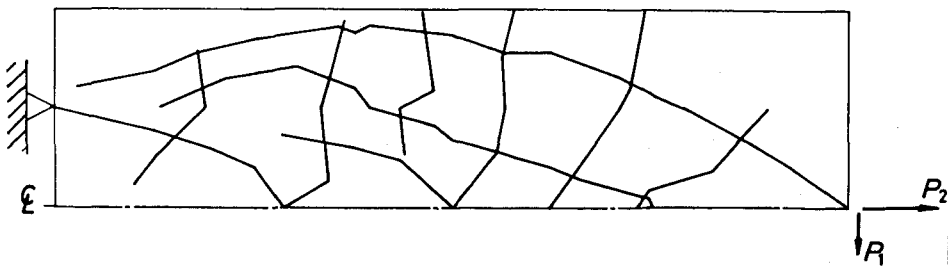


図 6.19 2 重負荷条件下の最適位相分布の離散化

から内そうして得られたトラス連続体としての最適位相を数本の折線によって離散的に表わしたものである。同図と図6. 15とを比較すると定性的にはかなり良い一致を示している。

次に多重負荷形式に対する設計例として、支持端と平行な集中荷重 P_1 と垂直な集中荷重 P_2 ($P_2/P_1=2.0$) の2種の荷重が負荷される2重負荷形式問題の解析を実施した。図6. 17に示した P_1 のみに対するM i c h e l l 構造によってこれらの荷重を支持するのに必要な体積は、式(6. 28)において $P_0=P_1$ として $\kappa=7.11$ となる。そこで図6. 17の位相を初期値とし、 $\varepsilon_0=10^{-3}$ として最適化計算を実施した。31回の繰り返しの後、 $\kappa=5.26$ まで減少し、収束した。このときの最適板厚および位相の分布を図6. 16と同様の表示法によって図6. 18に示す。また同図の結果を内そうして得られた位相形態を、対称性から半分の領域について図6. 19に示す。これらの結果より、 P_1, P_2 の両負荷形式に対して最適な位相形態は片持ち荷重 P_1 のみを支持する図6. 16のM i c h e l l 構造を引張り荷重 P_2 方向に偏平化した構造となっている。

以上の結果より、位相的にかなり複雑な構造形態に対しても本手法が十分適用可能であることが明らかである。

6. 4 結 言

本章ではトラス連続体の有限要素法と数値計画法の最適化手法を用いて、多重負荷条件下におけるトラス連続体の最小重量構造を与える最適位相の決定手法を提示した。すなわち、まず異なる2方向に無数のトラス部材が連続的かつ一様に分布する構造からなるトラス連続体の線形有限要素によって、トラス連続体のひずみ場を十分解析できることを確認した。次にトラス連続体の位相決定問題を、各有限要素内の2部材の配置方向の決定問題としてとらえ、DFP法による位相最適化の定式化を行なった。

本手法を最適解の既知な2部材トラス構造に適用した結果、単一および多重負荷形式問題のいずれの場合の収束性も良好であり、位相および最小体積がM i c h e l l 構造に良い一致を示すことを確認した。さらに本手法を片持ちトラス構造に対しても適用し、複雑な位相決定問題に対する有効性も明らかにした。したがって今後は、M i c h e l l 構造の未知なより複雑な問題に対しても本手法を適用して容易にその最小重量構造形態を決定することが可能である。

第 7 章 結 論

本論文においては、連続体およびトラス構造の最適形態、つまり連続体に対しては 2 次元あるいは 3 次元の物体形状を、またトラス構造に対しては最適位相をそれぞれ決定するはん用性および実用性のある手法を提示し、それら手法を種々の設計例題に適用してその有効性を確認した。すなわち、まず連続体に対する応力基準の形状最適化手法として本論文で提示した要素パターン変換法が、3 次元軸対称問題を始めとして、物体力場の問題、複合体の接合境界形状決定問題および多連結化問題などきわめて高度な設計問題に対しても容易に適用可能であり、手法の簡略さゆえに十分実用的にも有効であることを明らかにした。また材質変化法を直接利用した連続体の形状最適化手法を提示し、それによって多連結化過程の自動化が可能であり、要素パターン変換法の欠点を補うものであることを示した。一方、トラス構造の絶対最適解を与えるトラス連続体の位相決定問題に対して、有限要素法と数値計画法を導入した最小重量設計手法を提示し、多重負荷形式を含めた任意の荷重条件および支持条件に対してはん用性のある手法となり得ることを確認した。

なお、研究結果および結論の詳細は、各章の末尾において述べたとおりであるが、以下にそれらを要約して示す。

第 2 章においては、2 次元問題に対する形状最適化手法として尾田によって提示された要素パターン変換法を 3 次元軸対称問題に拡張し、形状最適化法としての理論的裏付けを明確にした。そしてその手法を厚肉压力容器および管フランジの設計問題に適用し、また管フランジに対しては破壊実験も実施して、有効性を確認した。

第 3 章においては、物体力場における 2 次元および 3 次元軸対称体の形状最適化手法として、物体力場特有の効率的な要素パターン変換法を提示し、その理論的妥当性を明らかにした。そしてその手法を自重あるいは遠心応力場の形状最適化問題に適用し、その有効性を数値解析的に明らかにした。さらに回転円板の設計例に対しては破壊試験も実施し、解析結果の強度的優位性を検証した。

第 4 章においては、完全接着された複合体の接線応力分布の均一化を目的とする接合境界形状決定問題に対し、境界をはさんで対をなす要素のパターン変換法を提示し、その理論的解釈を与えた。さらにその手法を 2 軸応力場の介在物の形状決定に適用し、その有効性を確認した。

第 5 章においては、与えられた単連結の基本原形から多連結の連続体最適形状を創成する 2 つの手法を提示した。その第 1 の手法は要素パターン変換法による形状最適化過程と材質変化

法による多連結化過程を交互に繰り返すものである。一方、第2の手法は材質変化法による最適材料特性分布を利用して直接形状修正を実施するものである。これら2つの手法をL型フレームの補強リブおよびT型柱などの設計例に適用してそれら各手法の有効性を確認し、また両手法の特徴を明確にした。

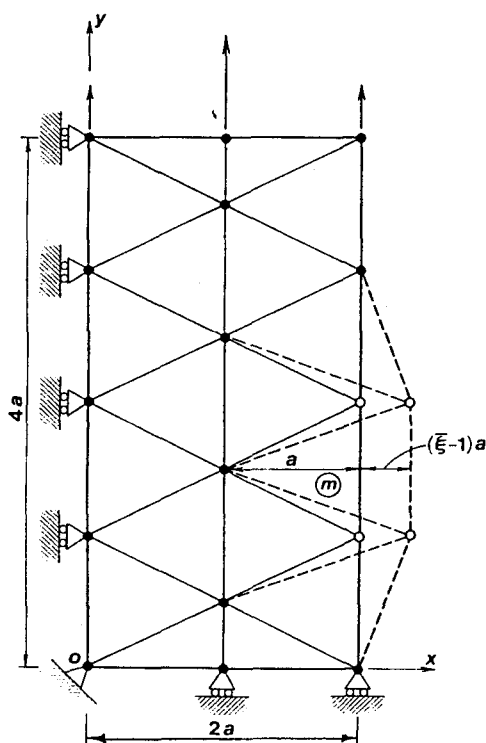
第6章においては、斜交トラス連続体の概念を導入し、有限要素法と数値計画法を用いて、多重負荷条件下におけるトラス連続体の最小重量構造を与える位相決定手法を提示した。そしてその手法を2部材トラス構造および片持ちトラス構造問題に適用して、数値解析的にその有効性を明らかにした。

以上、本論文で提示した連続体およびトラス構造の最適形態の各種決定手法の有効性と実用性を確認し、それらの手法に関する多くの知見を得ることができた。今後は、これらの手法が実際の強度設計に大いに利用され、自動設計分野の躍進に寄与することを期待したい。

付録 I 要素パターン変換による応力変化と 節点力変化

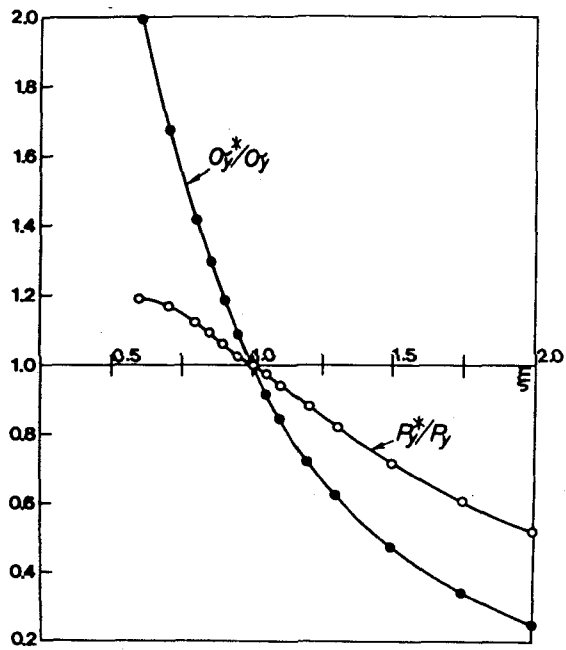
本文中で提示している連続体の形状最適化法の基本的原理である“要素パターン変換法”は、それを有限要素法に適用した場合、本文式(2.14)でも述べているとおり、パターン変換以前と後の要素節点力の変化を無視することによって理論的解釈を与えた。そこでここでは形状変化に伴う応力変化に対して、要素の節点力変化がどの程度であるかを実際のモデルによって数値実験的に検討した結果を示す。

解析モデルとして長さ $8a$ 、幅 $4a$ の2次元長方形板の長手方向に一様分布荷重が負荷されるモデルを考え、モデルの対称性から $1/4$ 領域を解析対象とした。モデルの要素分割を付図1に示す。同図の○印の2節点を設計境界構成節点として、 x 軸方向に同一の移動量を与えて形状を変化させ、その時の応力および節点力の変化を数値計算によって求めた。付図2は形状修正の影響を直接受ける代表的な要素③(付図1参照)における形状修正に伴う y 軸方向応力 σ_y の変化および○印節点の要素節点力 P_y の変化を示す。横軸 ξ は3角形要素③の x 軸方向の寸法比を表わす。つまり、本文中で用いたパターン変換係数 ξ とは $\xi=2\bar{\xi}-1$ なる関係にある。また付図2中の曲線 σ_y^*/σ_y 、 P_y^*/P_y はそれぞれ形状修正後の応力、節点力と基本原形における



付図1 解析モデル

る対応する量との比の変化を表わしている。同図より明らかなように $0.9 \leq \bar{\xi} \leq 1.1$ 程度の範囲での節点力変化は応力変化に比較して高々10~25%程度であるのに対し、 $\bar{\xi}$ が1から遠ざかるにしたがってその比は増大する傾向($\bar{\xi}=2.0$ で約60%)にある。したがって、これらの結果からは1回の形状修正量を小さくすることが望ましい。しかし、実用上はパター

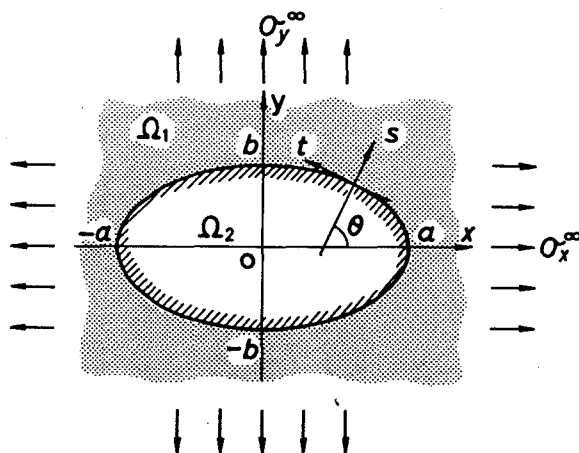


付図2 パターン変換量と要素応力および節点力の変化の関係

ン変換量を少々大きくとっても本手法が試行法的手法に基礎を置くため、パターン変換操作を繰り返すことによって目標とする基準応力に近づけることが可能である。

付録Ⅱ 無限板中に存在するだ円形介在物の最適形状

本付録では、2軸応力場の下での無限板中に存在する介在物の最適形状を理論的に決定する。無限体中にだ円体介在物が存在する場合の弾性解は、だ円体介在物内でひずみ場が一樣となることに着目してEshelby〔70〕が一般的かつ整った形式で与えている。さらにその2次元問題に対する具体的な解はJaswonとBhargava〔69〕によって与えられて



付図3 無限板中に存在するだ円形介在物

いる。すなわち、付図3に示すように無限平板中に

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1 \quad (\text{A.1})$$

なるだ円形介在物を考えると、無限遠方で主応力 $\sigma_x^\infty, \sigma_y^\infty$ が負荷された場合の介在物 Ω_2 に生ずる応力は

$$\left. \begin{aligned} \sigma_s + \sigma_{t2} &= \sigma_x^0 + \sigma_y^0 + \sigma_x^\infty + \sigma_y^\infty, \\ \sigma_s - \sigma_{t2} - 2i\tau_{st} &= (\sigma_x^0 - \sigma_y^0 + \sigma_x^\infty - \sigma_y^\infty) e^{2i\theta}. \end{aligned} \right\} \quad (\text{A.2})$$

ここに θ は x 軸とだ円境界の法線 s とのなす角であり、また i は虚数単位とする。一方、 σ_x^0, σ_y^0 は母材および介在物の諸量に添字 1, 2 を付けて表わし、 $(a-b)/(a+b)=K$ とすると

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x^0 + \sigma_y^0 &= -\frac{4G_1}{\kappa_1 + 1} (X + KY), \\ \sigma_x^0 - \sigma_y^0 &= -\frac{4G_1}{\kappa_1 + 1} \left\{ KX + \frac{1}{2}(K^2 + 1)Y \right\} \end{aligned} \right\} \quad (\text{A.3})$$

で与えられる。なお、 X, Y は次式を満足するように選ぶものとする。

$$\left. \begin{aligned}
& 4 \left\{ \frac{2}{\kappa_1+1} \left(\frac{G_1}{\kappa_1-1} - \frac{G_2}{\kappa_2-1} \right) - \frac{G_1}{\kappa_1-1} \right\} X - 4 \frac{\kappa_1-1}{\kappa_1+1} \left(\frac{G_1}{\kappa_1-1} - \frac{G_2}{\kappa_2-1} \right) Y \\
& \quad = \left(\frac{\kappa_1-1}{\kappa_2-1} \frac{G_2}{G_1} - 1 \right) (\sigma_x^\infty + \sigma_y^\infty) , \\
& -4 (G_1 - G_2) \frac{K}{\kappa_1+1} X + 2 \left\{ (G_1 - G_2) \frac{\kappa_1 - K^2}{\kappa_1+1} - G_1 \right\} Y \\
& \quad = \left(\frac{G_2}{G_1} - 1 \right) (\sigma_x^\infty - \sigma_y^\infty) .
\end{aligned} \right\} (A.4)$$

ここに κ_i ($i=1, 2$) は平面ひずみ場では $\kappa_i = 3 - 4\nu_i$ ，また平面応力場では $\kappa_i = (3 - \nu_i) / (1 + \nu_i)$ とする．一方，境界上での母材応力は次式で与えられる．

$$\sigma_{t1} = \sigma_{t2} + \frac{4G_1}{\kappa_1+1} (X - Y \cos 2\theta) \quad (A.5)$$

さて境界上での介在物の各応力成分が一様となる条件は式 (A. 2)，(A. 3) より

$$\frac{4G_1}{\kappa_1+1} \left\{ KX + \frac{1}{2} (K^2 + 1) Y \right\} - \sigma_x^\infty + \sigma_y^\infty = 0 \quad (A.6)$$

上式を式 (A. 4) の第2式に代入すると $Y=0$ が導出される．すなわち，式 (A. 6) は $Y=0$ の条件に等しく，このとき式 (A. 6) より

$$X = \frac{\kappa_1+1}{4G_1} \frac{\sigma_x^\infty - \sigma_y^\infty}{K} \quad (A.7)$$

式 (A. 7) および $Y=0$ を式 (A. 4) の第1式に代入して K について解くと

$$K = \frac{(\kappa_2-1)G_1 + 2G_2}{(\kappa_2-1)G_1 - (\kappa_1-1)G_2} \frac{\sigma_x^\infty - \sigma_y^\infty}{\sigma_x^\infty + \sigma_y^\infty} \quad (A.8)$$

上式が介在物の形状を与える．このとき式 (A. 2)，(A. 3)，(A. 8) より介在物に生ずる一様な応力は

$$\sigma_s = \sigma_{t2} = \frac{(\kappa_1+1)G_2}{(\kappa_2-1)G_1 + 2G_2} \frac{\sigma_x^\infty + \sigma_y^\infty}{2}, \quad \tau_{st} = 0. \quad (A.9)$$

また式 (A. 5) より境界上での母材の接線応力も一様となる．すなわち，

$$\sigma_{t1} = \frac{2(\kappa_2-1)G_1 - (\kappa_1-3)G_2}{(\kappa_2-1)G_1 + 2G_2} \frac{\sigma_x^\infty + \sigma_y^\infty}{2} \quad (A.10)$$

以上により，無限遠方に負荷される応力の比および母材と介在物の弾性定数が与えられると，それらに対応して母材および介在物の接線応力および法線応力が接合境界に沿って一様となる介在物のだ円形状を決定することができる．なお，第4章の設計例の理論解は

$$\sigma_x^\infty = \sigma_0, \quad \sigma_y^\infty = 2\sigma_0, \quad G_2/G_1 = 0.1, \\ \kappa_1 = \kappa_2 = (3-\nu)/(1+\nu), \quad \nu = 0.3.$$

を式 (A. 8), (A. 9), (A. 10) に代入して求まる．

謝 辞

本論文をまとめるにあたり、終始懇切なご指導と暖かいご配慮を賜った大阪大学工学部機械工学科 浜田実教授に深甚の謝意をささげます。また本論文の作成にあたり、貴重なご教示と綿密なご校閲をいただいた大阪大学工学部土木工学科 小松定夫教授、同学溶接工学研究所 上田幸雄教授ならびに同学部産業機械工学科 赤木新介教授に心より深謝いたします。

本研究は金沢大学工学部機械工学科 尾田十八教授の終始ご厚意あふれるご指導、ご鞭撻を賜ってはじめて成し得たものであり、衷心より厚くお礼申し上げます。また本研究の遂行にあたり、たえず励ましとご理解をいただいた同学科 柴原正雄教授に深謝いたします。本論文を構成する研究の一部に対し、これまで発表の機会ならびに有益なご意見をいただいたNCP研究会の各位にも深く感謝いたします。

本研究の実験に関する部分は、当時金沢大学柴原研究室に在籍された卒業研究学生 板坂重和、福知清、藤田和孝の諸氏のご協力によるところが多大である。また本論文の図面の作成にあたり、同研究室の川本久雄技官の手をわずらわした。ここに記して感謝の意を表します。

さらに、本論文の清書は金沢大学計算機センターの日本語文書処理システム（FDMS）および英論文編集清書システム（ATF）によった。日本語入力、金沢大学柴原研究室の事務補佐員 富樫道子嬢の努力によるところが多大である。また、金沢大学計算機センター 車古正樹講師には、本論文の数式清書にあたり種々のソフトウェアの提供ならびにご助言をいただいた。ここに記して深謝いたします。

なお、本研究の一部は文部省科学研究費補助金ならびに財団法人作行会研究助成金の援助を受けたことを付記し、謝意を表したい。

昭和57年8月31日

参 考 文 献

- (1) たとえば, Zienkiewicz, O.C., The Finite Element Method, 3rd ed. (1977), McGraw-Hill.
- (2) Wasiutynski, Z. and Brandt, A., "The Present State of Knowledge in the Field of Optimum Design of Structures", Applied Mechanics Reviews, Vol.16 (1963), 341.
- (3) Sheu, C.Y. and Prager, W., "Recent Developments in Optimal Structural Design", Applied Mechanics Reviews, Vol.21, No.10 (1968), 985.
- (4) 田中 尚, "構造物の最適設計における最近の進歩", 生産研究, 第22巻, 第1号 (昭45), 15.
- (5) Venkayya, V.B., "Structural Optimization : A Review and Some Recommendations", International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol.13, No.2 (1978), 203.
- (6) Sawczuk, A. and Mróz, Z. (ed.), "Optimization in Structural Design", Proceedings of International Union of Theoretical and Applied Mechanics (IUTAM) Symposium, Warsaw (1973), Springer-Verlag, 1975.
- (7) Gallagher, R.H. and Zienkiewicz, O.C. (ed.), Optimum Structural Design Theory and Applications, (1973), John Wiley & Sons.
邦訳, 川井・戸川編, 最適構造設計, (昭52), 培風館.
- (8) Haug, E.J. and Arora, J.S., Applied Optimal Design, (1979), John Wiley & Sons.
- (9) 長 尚, 構造物の最適設計, (昭46), 朝倉書店.
- (10) 田中 尚・中村 雄治, 建築構造物の自動設計と最適設計, コンピュータによる構

造工学講座II-7-B, (昭48), 培風館.

- <11> 日本鋼構造協会編, 最適化手法の構造設計・解析への応用, (昭55), 培風館.
- <12> Zienkiewicz, O.C. and Gallagher, R.H.(ed.), "Structural Optimization", International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol.13, No.2 (1978).
- <13> Michell, A.G.M., "The Limits of Economy of Material in Frame-structures", Philosophical Magazine, Series 6, Vol.8, No.47 (1904), 589.
- <14> Nagtegaal, J.C. and Prager, W., "Optimal Layout of a Truss for Alternative Loads", International Journal of Mechanical Science, Vol.5, No.7 (1973), 583.
- <15> Prager, W., "A Note on Discretized Michell Structures", Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, Vol.3, No.3 (1974), 349.
- <16> Prager, W., "Optimal Layout of Cantilaver Trusses", Journal of Optimization Theory and Applications, Vol.23, No.1 (1977), 111.
- <17> Prager, W., "Nearly Optimal Design of Trusses", Computer & Structures, Vol.8, No.8 (1978), 451.
- <18> Taylor, J.E. and Rossow, M.P., "Optimal Truss Design Based on an Algorithm Using Optimality Criteria", International Journal of Solids & Structures, Vol.13, No.10 (1977), 913.
- <19> 瀬口 靖幸・富田 佳宏・岩崎 正義, "骨組構造系の最適設計に関する一つの試み", 日本機械学会論文集, 第43巻, 第374号 (昭52), 3769.
- <20> Hemp, W.S., "Michell's Structural Continua", Optimum Structures, (1973), 70, Oxford University Press.

- 《21》 Chan, A.S.L., "The Design of Michell Optimum Structures", College of Aeronautics Report, No.142 (1960), Cranfield.
- 《22》 Chan, H.S.Y., "Minimum Volume Design of Frameworks and Discs for Alternative Loading Systems", Quarterly of Applied Mathematics, Vol.25, No.4 (1968), 470.
- 《23》 Chan, H.S.Y., "Half-plane Slip-line Fields and Michell Structures", Quarterly Journal of Mechanics and Applied Mathematics, Vol.20, No.4 (1967), 453.
- 《24》 Chan, H.S.Y., "Symmetric Plane Frameworks of Least Weight", 文献《6》, 313.
- 《25》 Johnson, W., Chitkara, N.R., Reid, S.R. and Collins, I.F., "The Displacement Field and its Significance for Certain Minimum Weight Two-dimensional Frames Using the Analogy with Perfectly Plastic Flow in Metal Working", International Journal of Mechanical Sciences, Vol.13, No.6 (1971), 547.
- 《26》 Hemp, W.S., "Pin-jointed Frameworks", Optimum Structures, (1973), 1, Oxford University Press.
- 《27》 尾田 十八, "有限要素法による強度的最適形状の決定法", 日本機械学会誌, 第79巻, 第691号 (昭51), 494.
- 《28》 梅谷 陽二, "骨の形態と生長変形法", 日本機械学会誌, 第79巻, 第693号 (昭51), 749.
- 《29》 Umetani, Y. and Hirai, S., "Adaptive Optimal Shapes of Beam and Arch Structures by the Growing-reforming Procedure", Bulletin of the Japan Society of Mechanical Engineering, Vol.21, No.153 (1978), 398.

- 〔30〕 萬 紀夫・山地 成一, “有限要素法を用いる高応力部の最適形状設計”, 日本機械学会論文集, 第44巻, 第386号(昭53), 3333.
- 〔31〕 瀬口 靖幸・多田 幸生, “逆変分原理による構造物の形状決定問題(有限要素法による取扱い)”, 日本機械学会論文集, 第44巻, 第381号(昭53), 1469.
- 〔32〕 浜田 実・瀬口 靖幸・多田 幸生, “逆変分原理による構造物の形状決定問題(第2報, 座屈問題と振動問題)”, 日本機械学会論文集, 第46巻, 第402号, A編(昭55), 187.
- 〔33〕 浜田 実・瀬口 靖幸・多田 幸生, “変断面ばりの最適設計(動的計画法による片持ばりの設計)”, 日本機械学会論文集, 第46巻, 第408号, A編(昭55), 915.
- 〔34〕 Francavilla, A., Ramakrishnan, C.V., and Zienkiewicz, O.C., “Optimization of Shape to Minimize Stress Concentration”, Journal of Strain Analysis, Vol.10, No.2 (1975), 63.
- 〔35〕 Bhavikatti, S.S. and Ramakrishnan, C.V., “Optimum Shape Design of Shoulder Fillets in Tension Bars and T-heads”, International Journal of Mechanical Sciences, Vol.21, No.1 (1979), 29.
- 〔36〕 Chun, Y.W. and Haug, E.J., “Two-dimensional Shape Optimal Design”, 文献〔6〕, 311.
- 〔37〕 Steinchen, W.P., “Investigations and Optimization of Stress-relieving Notches”, Journal of Strain Analysis, Vol.13, No.3 (1978), 149.
- 〔38〕 Erickson, P.E. and Riley, W.F., “Minimizing Stress Concentrations around Circular Holes in Uniaxially Loaded Plates”, Experimental Mechanics, Vol.18, No.3 (1978), 97.
- 〔39〕 Durelli, A.J., Brown, K. and Yee, P., “Optimization of Geometric Discontinuities in Stress Fields”, Experimental Mechanics, Vol.18, No.8 (1978), 303.

- 〈40〉 Pope, G.G., "Optimum Design of Stressed Skin Structures", American Institute of Aeronautics and Astronautics (AIAA) Journal, Vol.11, No.11 (1973), 1545.
- 〈41〉 Rossow, M.P. and Taylor, J.E., "A Finite Element Method for the Optimal Design of Variable Thickness Sheets", American Institute of Aeronautics and Astronautics (AIAA) Journal, Vol.11, No.11 (1973), 1566.
- 〈42〉 たとえば, 沖野 教郎, コンピュータによる自動デザイン, (昭42), 112, 日刊工業新聞社.
- 〈43〉 Tompson, D.W., On Growth and Form, I,II, (1968), Cambridge University Press.
- 〈44〉 たとえば, Gallagher, R. H. (川島訳), "全応力設計", 文献〈7〉, 19.
- 〈45〉 たとえば, 文献〈1〉, "Axi-symmetric Stress Analysis", 119.
- 〈46〉 中山 隆, 電子計算機と数値解析, (昭41), 63, 槇書店.
- 〈47〉 中島 尚正編, 自動設計, (昭46), 17, 丸善.
- 〈48〉 白倉 昌明, "管フランジ(一体形)の応力の計算式(案)について", 日本機械学会誌, 第67巻, 第548号(昭39), 1380.
- 〈49〉 小玉 正雄, "100 kg/cm² 鋼製管フランジの基本寸法, 日本工業規格(案)について", 日本機械学会誌, 第69巻, 第574号(昭41), 1436.
- 〈50〉 林 則行・芳 我攻・吉野 雄二郎, "管フランジ継手の光弾性応力解析", 日本機械学会論文集, 第41巻, 第349号(昭50), 2540.
- 〈51〉 JIS管フランジ規格調査分科会(S-SC103B)中間報告書, (昭52), 日本機械学会.
- 〈52〉 西岡 邦夫・森田 喜保・河嶋 寿一, "一体形管フランジの強度(第1報, 応力分布の解析と従来の設計基準との比較)", 日本機械学会論文集, 第45巻, 第392号, A編(昭54), 355.

- 〈53〉 Fessler, H. and Perry, D.A., "Stress in High-Pressure Taper-hub Flanges with Recesses for Nut Facings", Journal of Strain Analysis, Vol.10, No.2 (1975), 119.
- 〈54〉 森田 喜保・河嶋 寿一, "フランジの設計に関する研究 (ガスケット係数についての一考察)", 日本機械学会講演論文集, No. 770-6 (昭52), 225.
- 〈55〉 たとえば, Timoshenko, S. (鶴戸口・国尾訳), 材料力学, 上巻 (昭32), 18, 東京図書.
- 〈56〉 Timoshenko, S., Strength of Materials, Part II, (1930), 451, D.Van Norstrand Company.
- 〈57〉 永島 菊三郎, "回転するはずみ車に生ずる応力", 日本機械学会論文集, 第5巻, 第20号 (昭14), I-24.
- 〈58〉 井沢 実, "はずみ車の強度設計", 機械設計, 第8巻, 第2号 (昭39), 41.
- 〈59〉 たとえば, 機械設計便覧, (昭37), 703, 丸善.
- 〈60〉 井沢 実・則武 繁, "スポーク付回転円板の応力と破壊", 精密機械, 第41巻, 第2号 (昭50), 168.
- 〈61〉 鶴戸口 英善, "回転体の強さについて", 日本機械学会誌, 第55巻, 第402号 (昭27), 474.
- 〈62〉 佐藤 和郎・永井 文雄, "鋳鉄円板の回転による破壊について", 日本機械学会誌, 第69巻, 第575号 (昭41), 1617.
- 〈63〉 中西 不二夫, "回転円板の強度", 日本機械学会論文集, 第18巻, 第75号 (昭27), 44.
- 〈64〉 白鳥 英亮, "高速回転体の破壊強さ", 機械設計, 第4巻, 第1号 (昭35), 4.
- 〈65〉 Sherbourne, A.N. and Murthey, D.N.S., "Stresses in Disks with Variable Profile", International Journal of Mechanical Sciences, Vol.16, No.7 (1974), 449.
- 〈66〉 永井 文雄, 佐藤 和郎, "翼をもった軟鋼車盤の回転による降伏", 日本機械学会論文集, 第41巻, 第351号 (昭50), 3069.

- 〈67〉 Seireg, A. and Surana, K.S., "Optimum Design of Rotating Disks", Transactions of the American Society of Mechanical Engineers (ASME), Series B, Vol.92, No.1 (1970), 1.
- 〈68〉 たとえば, 中原 一郎, 材料力学, 下巻 (昭41), 99, 養賢堂.
- 〈69〉 Jaswon, M.A. and Bhargava, R.D., "Two Dimensional Elastic Inclusion Problems", Proceedings of Cambridge Philosophical Society, Vol.57 (1961), 669.
- 〈70〉 Eshelby, J.D., "The Determination of the Elastic Field of an Ellipsoidal Inclusion and Related Problems", Proceedings of the Royal Society, Series A, Vol.241 (1957), 376.
- 〈71〉 西岡 邦夫・久光 脩文, "リブ補強に関する研究 (第1報, 三角形リブすみ肉部の応力集中)", 日本機械学会論文集, 第27巻, 第179号 (昭36), 985.
- 〈72〉 西岡 邦夫・久光 脩文, "リブ補強に関する研究 (第2報, 三角形リブすみ肉部の応力集中に及ぼす部材の剛性の影響)", 日本機械学会論文集, 第29巻, 第200号 (昭38), 657.
- 〈73〉 西岡 邦夫・久光 脩文, "リブ補強に関する研究 (第3報, 直交する部材の剛性が互に異なる場合の三角形リブすみ肉部の応力集中)", 日本機械学会論文集, 第29巻, 第203号 (昭38), 1161.
- 〈74〉 西岡 邦夫・久光 脩文, "リブ補強に関する研究 (第4報, 台形リブすみ肉部の応力集中)", 日本機械学会論文集, 第29巻, 第206号 (昭38), 1523.
- 〈75〉 Whittle, P. (藤川・平本訳), 非線形計画法の理論と応用, (昭52), 176, 培風館.
- 〈76〉 Kowalik, J. and Osborne, M. R. (山本・小山訳), 非線形最適化問題, (昭45), 53, 培風館.
- 〈77〉 たとえば, 文献〈1〉, "Plane Stress and Plane Strain", 93.

関連発表論文

第2章関係

- (1) 尾田 十八・山崎 光悦 , “有限要素法による軸対称体の強度的最適形状の決定法”, 日本機械学会論文集, 第43巻, 第368号(昭52), 1182.
- (2) Oda, J. and Yamazaki, K., “On a Technique to Obtain an Optimum Strength Shape of an Axisymmetric Body by the Finite Element Method”, Bulletin of the JSME, Vol.20, No.150(1977), 1524.
- (3) 尾田 十八・山崎 光悦・福知 清・藤田 和孝 , “管フランジの強度的最適形状に関する一考察”, 日本機械学会論文集, 第46巻, 第410号, A編(昭55), 1136.

第3章関係

- (4) 尾田 十八・山崎 光悦 , “有限要素法による強度的最適形状の決定法(物体力のある問題に対する手法)”, 日本機械学会論文集, 第44巻, 第380号(昭53), 1141.
- (5) 尾田 十八・山崎 光悦 , “回転円板の強度的最適設計手法とその応用”, 日本機械学会論文集, 第44巻, 第382号(昭53), 1848.
- (6) Oda, J. and Yamazaki, K., “On a Technique to Obtain an Optimum Strength Shape by the Finite Element Method (Application to the Problems under Body Force)”, Bulletin of the JSME, Vol.22, No.164(1979), 131.
- (7) 尾田 十八・山崎 光悦 , “スポーク付き回転円板の強度的最適形状の決定”, 日本機械学会論文集, 第46巻, 第402号, A編(昭55), 167.
- (8) Oda, J. and Yamazaki, K., “Pattern Transformation Method for Shape Optimization and its Application to Spoked Rotary Disks”, Proceedings of International Symposium on Optimum Structural

Design, (1981), Arizona, 4-29.

第4章関係

- (9) 尾田 十八・山崎 光悦 , “有限要素の形状変換法による複合体の最適形状決定法”, 日本機械学会論文集, 第46巻, 第410号, A編(昭55), 1129.

第5章関係

- (10) 尾田 十八・山崎 光悦 , “有限要素法による多連結物体の最適形状創生法”, 日本機械学会論文集, 第45巻, 第389号, A編(昭54), 33.
- (11) Oda, J. and Yamazaki, K., "A Procedure to Obtain a Fully Stressed Shape of Elastic Continuum", International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol.15, No.7(1980), 1095.

第6章関係

- (12) 山崎 光悦・尾田 十八 , “連続トラス要素による骨組構造の創生法(骨組連続体の最小重量設計法)”, 日本機械学会論文集, 第46巻, 第411号, A編(昭55), 1230.
- (13) Yamazaki, K. and Oda, J., "A Technique to Obtain an Optimum Layout of Structural Continua", Preprints of Emerging Technologies in Aerospace Structures, Design, Structural Dynamics and Materials, Century-2 Emerging Technology Conference/ASME, (1980), San Francisco, 87.
- (14) Yamazaki, K. and Oda, J., "A Technique to Obtain an Optimum Layout of Truss Structures by Finite Element Method(Minimum Weight Design of Structural Continua) ", Bulletin of the JSME, Vol.24, No.193(1981), 1109.