可換環論と代数幾何学を用いた
非線形システムの解析

平成25年9月

河野　佑

可換環論と代数幾何学を用いた
非線形システムの解析

博士（工学）論文提出先

大阪大学 大学院基礎工学研究科

平成25年9月

河野　佑

概要

本博士論文では，非線形システム制御理論の構築に，可換環論と代数幾何学を応用する．これまで，非線形システム制御理論の構築には，微分幾何学が主に用いられてきた．微分幾何学を用いると，幅広い問題を扱える反面，局所的な性質しか解析できない．また，必要十分条件を得ることが難しいなどの問題がある．本論文では，システムや問題のクラスを多項式に制限する代わりに，多項式の集合やその根の集合を解析する数学である可換環論と代数幾何学を用いて，非線形システム制御理論における未解決問題の解決を試みる．システム制御理論を分類すると解析と設計があり，それぞれについて異なったアプローチで取り組む．まず，解析では，多項式システムを対象とする．多項式システムとは，状態の時間発展を表す式が状態と入力の多項式で与えられるシステムであり，多項式システムとして扱えるシステムのクラスは幅広い．したがって，システムのクラスを多項式に制限したとしても，システム制御理論における未解決問題を解決することには十分に意義がある．ここでは，微分幾何学では解析が難しいとされている大域的な性質の解析に取り組む．具体的には，可観測性，可到達性と有限時間安定性を解析する．そして，可観測性と有限時間安定性に対して必要十分条件を導出し，可到達性に対して十分条件を与える．さらに，局所可観測性に対しても必要十分条件を得る．微分幾何学的アプローチでも，局所可観測性は解析されているが，十分条件しか導出されていない．したがって，必要十分条件を導出することの価値は高い．つぎに，設計では，Hamilton-Jacobi 方程式（HJE）の新たな解法について考える．HJE はシステム制御理論で重要な方程式の一つであり，例えば非線形最適制御問題を解こうとすると現れる．しかしながら，HJE は非線形偏微分方程式であるため，解析的にも数値的にも解くことが難しい．ここでは，Hamiltonian を時間や状態の有理型関数かつ解の勾配の多項式に制限する代わりに，代数方程式を解くだけで解の勾配が求まる HJE のクラスを特徴づける．そのような代数方程式が見つかれば，解の勾配は，偏微分方程式を解くことなく代数方程式を解くだけで求まる．本論文では，そのような代数方程式の存在条件を明らかにする．

目 次

第 1 章　緒言

1.1　研究の背景

1960 年に Kalman が，最適レギュレータ理論 [1] と最適フィルタリング理論 [2] に関する論文を発表した．これらの研究をきっかけにして，状態方程式表現を対象とした制御理論の研究が精力的になされてきた．とくに，線形システム制御理論は 20 世紀から 21 世紀にかけてめざましく発展し，様々な問題が解決されている．その主な結果は線形代数と線形微分方程式論を用いて構築されている．研究成果の例を挙げると，解析の観点から安定性，可制御性や可観測性の必要十分条件が与えらている．設計の観点から状態観測器，安定化制御器，最適制御器，H^∞ 制御器，非干渉化制御器やサーボ制御器など様々な制御器の設計問題が解かれている [3–5]．また，制御器の設計可能性とシステムの性質との関係も十分に解析されている．線形システム制御理論の短所を一つ挙げるとすれば，線形システムとして記述できるシステムのクラスが狭いことである．

線形システムとして記述できないシステムは，線形以外との意味を込めて，非線形システムと呼ばれる．ただし，非線形システムは線形システムを含み，線形システムよりも幅広いクラスのシステムを非線形システムとして記述できる．非線形システム制御理論の研究の主流は多様体の微分幾何学を用いたものであり，1970 年代から現在にいたるまで活発に研究されている．この研究では，システムを多様体の微分幾何学を適用できるものに制限することで，線形システム制御理論における様々な成果が非線形システムへと拡張されている．例としては，局所可制御性や局所可到達性の判別条件や非干渉化制御器の設計方法の導出が考えられる [6,7]．線形システム制御理論の拡張以外にも，非線形システムに対する特有の概念も存在し，その代表例として厳密な線形化 [6, 7] が挙げられる．厳密な線形化制御器の設計条件の導出は，微分幾何学を用いることによって，きれいに解かれた問題の好例である．他方，微分代数学を用いて非線形システムを解析する研究 [8,9] もあり，これは微分幾何学を用いた研究と密接に関連している．

微分幾何学や微分代数学を用いることで，非線形システム制御理論の研究成果が数多く得られている．しかしながら，対象とするシステムのクラスが依然として一般的すぎるため，解析が難しく，未解決問題も数多く残されている．例えば，局所可観測性や局所可制御性の

十分条件が得られているが，必要十分条件は導出されていない．また，微分幾何学や微分代数学を用いて，システムの大域的な性質を解析することは難しい．したがって，システムのクラスを多少限定したとしても，非線形システム制御理論における未解決問題が解決できたり，システムの大域的な性質を解析できるようになれば，それだけで十分意義がある．そこで，本研究では，システムや問題のクラスを多項式に制限する代わりに，可換代数学や代数幾何学を応用することで，これらの問題の解決を試みる．

これまでにもシステムや問題のクラスを制限することで，非線形システムに対して新たな知見を得ようとする研究はいくつか存在する．そのような研究の例としては，Lur'e 系 [10] や Hamilton 系 [11] の解析が考えられる．まず，Lur'e 系とは，線形部と非線形部からなるフィードバック系で記述できるシステムである．Lur'e 系に対する安定条件として，スモールゲイン定理を応用した円板条件や受動定理を応用した Popov 条件が導出されている [10]．つぎに，Hamilton 系とは，Hamilton 正準方程式で表わされるシステムである．Hamilton 系を拡張した Port–Hamilton 系 [12] も提案されており，この系として力学的なシステムや非ホロノミック拘束を有するシステムなどが扱える．このような Hamilton 系や Port–Hamilton 系に特化した安定化制御器の設計に関する研究も存在している [11–13]．一方，本研究では，これらとはクラスの制限方法が異なり，システムのクラス全体を多項式へと制限する．そして，多項式やその共通零点集合を解析する可換環論や代数幾何学を制御理論の構築に応用する．

1.2 多項式システムと用いる数学

1.2.1 多項式システム

多項式システムとは，状態方程式や出力方程式が状態変数や入力変数の多項式で記述されるシステムのことである．多項式システムとして表現できるシステムは数多くあり，例えばプロセスシステムや生物システムなどが考えられる [14]．さらに，Taylor 展開を用いることで様々な非線形システムを多項式システムとして近似できたり，状態変数の数を増やすことで幅広い非線形システムを多項式システムとして表現できる [15,16]．したがって，多項式システムとして表現できるシステムのクラスは幅広い．このため多項式システムを対象とする研究は少なからず存在する．しかしながら，十分に発展しているとはいい難い．この理由の一つとしては，システムのクラスを多項式に制限したからといって，非線形システム制御理論を構築する際に現れる問題の本質的な難しさは変わらないためである．しかし，問題の難しさは変わらずとも，多項式特有の性質を応用したり新たな道具を用いることで，従来とは異なった問題の捉え方ができたり，もしかしたら問題が解けるようになったりするかもしれ

ない．以上のような動機で，本論文では多項式の構造を活かしたシステム制御理論の構築に取り組む．

多項式システムを対象とする研究としては，sum of squares [17–19] があり，そこでは多項式が係数に関して線形であることを用いて，係数を決定する問題を線形行列不等式に帰着させている．例えば，係数を決定する問題としては，システムのパラメータ同定が考えられる．また，安定解析や制御系設計を線形行列不等式に帰着させることもある．正定な多項式関数を 2 乗和多項式だと仮定すると，安定解析や制御系設計は 2 乗和多項式の係数を決定する問題に帰着できる．これらの研究では，多項式の構造を活かそうというよりも，線形システム制御理論の枠組みで多項式を扱おうとする特色が強い．他方，多項式システムの場合，Lyapunov 関数のクラスは 2 乗和多項式では不十分なことが知られている [20]．したがって，sum of squares 以外の方法でも，多項式の構造を活かした研究を行う必要がある．本論文では，多項式システムの解析に線形システム制御理論を応用しようとする研究とは異なり，多項式全体の集合が可換環であることを活かして，システム解析を行う．

1.2.2 可換環論と代数幾何学

本研究では，多項式システムの解析に可換環論と代数幾何学を用いる．多項式の集合は通常の和と積に関して可換環を成す．特に，この可換環は多項式環と呼ばれ可換環論でも主要な研究対象となっている．一方，代数幾何学は多項式の零点集合を解析する数学である．可換環論と代数幾何学には密接な関係があり，19 世紀後半に代数幾何学や不変式の観点からも多項式環について次第に研究されるようになった．

可換環論における重要な概念として，イデアルがある．これは，1870 年代に Dedekind によって，はじめて導入された概念である．多項式環のイデアルに関する研究成果は数多くあり，その中でも特筆すべきものとして，Hilbert の基底定理 [21–24] と準素イデアル分解 [21–24] がある．これらの結果は本論文でも用いられる．

可換環論と代数幾何学の研究が発展するに伴って，学習理論や統計学などの多分野でこれらの数学が応用されるようになった．制御理論の分野でもこれらの数学を応用する研究は数少ないが存在する [25–33]．しかしながら，十分に研究されているとは言い難い．本論文では，[25–31] の結果を受け継ぎつつ，可換環論と代数幾何学を用いることで，多項式システムに対して，非線形システム制御理論の未解決問題の解決に取り掛かる．

1.3　論文の内容

1.3.1　多項式システムの解析

ここでは，主に，離散時間多項式システムを扱う．離散時間多項式システムとは，システムのダイナミクスが差分方程式で表されるシステムのことである．このシステムに対して，可観測性，可到達性と有限時間安定性を解析する．可観測性と可到達性に関しては，微分幾何的アプローチによっても研究されている [6,7,34–43]．しかしながら，これらの研究では，局所可観測性や局所可到達性の十分条件しか導出されていない．したがって，どちらの性質に対しても必要十分条件の導出が課題として残されている．また，大域的性質に関する判別条件を導出することができれば，それだけで十分意義がある．一方，有限時間安定性に関しては，非線形システム制御理論ではあまり研究されていない．

そこで，本論文では，多項式システムに対して，大域的/局所可観測性,（大域的）可到達性と（大域的）有限時間安定性の判別条件を導出する．多項式システムの大域的可観測性と大域的可到達性に関しては，文献 [25–29] で研究されている．文献 [25–29] では，可換環論や代数幾何学を応用して，大域的可観測性の判別条件が導出されている．大域的可観測性に関しては，これらの結果を一般化して，より広いクラスの多項式システムに対して必要十分条件を導出する．他方，局所可観測性に関しては，可換環論や代数幾何学を応用した判別条件は得られていない．本論文では，局所可観測性の必要十分条件を導出する．微分幾何学的アプローチでは十分条件しか導出されていないため，必要十分条件を導出することの価値は高い．

文献 [25,27] では，多項式システムの（大域的）可到達性を解析しているが，必要条件しか導出していない．可到達性と関連する性質として,（大域的）可制御性 [30] や（大域的）完全可到達性 [31] についても研究されている．しかしながら，線形システムとは異なり，離散時間非線形システムに対してこれら三つの性質の関係は明らかにされておらず，文献 [30,31] の結果を可到達性の解析に応用できない．また，可到達性と可観測性の関係も，非線形システムの場合だと明らかでない．線形システムの場合，可到達性と可観測性との関係としては双対性が知られている．これは，同じ次元のユークリッド空間を定義域と値域に持つ線形写像の全射性と単射性が等価であるという事実に基づいて明らかにされた．似たような関係として，多項式写像の場合には，同じ次元のユークリッド空間を定義域と値域に持つ単射な写像は全射であることが知らている [44]．これは，大域的可観測性の判別条件が大域的可到達性の判別に応用できる可能性があることを示唆している．本論文では，この事実に基づいて，可到達性の十分条件を導出する．

線形システムの場合，有限時間安定性単体で扱われることは少なく，dead beat 制御と合わせて扱われることが多い．離散時間線形システムは，可制御であれば dead beat 制御可能，す

なわち閉ループ系の原点を有限時間安定化できることが知られている．有限時間安定性はそれ単体でも研究することに十分意義があるが，研究を進めることは可制御性の知見を深めることにも繋がる．可制御性に関しては，文献 [30] で研究されているが，システムのクラスを限定しすぎており，適用できる問題が限られている．以上のような動機で，本論文では，有限時間安定性の必要十分条件を導出する．この必要十分条件の導出には，代数幾何学の次元論を用いる．

本研究で導出する判別条件は，線形システムに対する結果を拡張したものとなっている．まず，可観測性の場合，線形システムに対して，大域的可観測性と局所可観測性は同値な性質である．したがって，本研究で導出した大域的可観測性と局所可観測性の必要十分条件は，線形システムの場合には等価な条件である．さらに，これらは可観測性 rank 条件と同値である．つぎに，本研究で導出する可到達性の十分条件は，線形システムに対しては必要十分条件であり，さらに可到達性 rank 条件と同値な条件である．有限時間安定性に関しても，写像をシステムの次元の数だけ合成すれば判別できるということは，線形システムに対する結果の自然な拡張となっている．

1.3.2　Hamilton-Jacobi 方程式の解析

Hamilton–Jacobi 方程式（HJE）は，制御理論において最も重要な式の一つである．例えば，非線形最適制御問題 [45,46] や H^∞ 制御問題 [47,48] に現れる．しかしながら，この式は非線形偏微分方程式であるため，解析的にも数値的にも解くことが難しい．いくつか数値解法が提案されている [49] が，これらは状態変数の数が増えるにつれて計算量が爆発的に増大することが知られており，高次元の問題を扱うことは困難である．すなわち，次元の呪いを回避できない．

近年，Hamiltonian が時不変の場合に，HJE の新たな解法が提案された [32]．その研究では，Hamiltonian を HJE の解の勾配の多項式に制限する代わりに，可換環論を応用することで，解の勾配が満たす代数方程式を見つける方法を与えている．そのような代数方程式が求まれば，解の勾配は代数方程式を解くだけ求まる．偏微分方程式と比べると代数方程式は数値的に解きやすく，各状態ごとの解の勾配の値は代数方程式を解けば求まる．したがって，解の勾配を状態の関数として記憶する必要がなく，次元の呪いを回避できる．

文献 [32] では，定常の HJE しか扱っていない．しかしながら，時変の最適制御問題や有限評価区間の最適制御問題まで扱おうとすると，時変の Hamiltonian を扱う必要が出てくる．したがって，非定常の HJE を考えなければならない．そこで，本論文では，文献 [32] の結果を非定常の HJE への拡張する．すなわち，非定常の HJE に対して解の勾配が満たす代数方

程式が存在するための必要十分条件を導出する．

本研究の結果は，線形システム対する結果を部分的に含む．線形時変システムに対する最適制御問題の解の勾配は，Ricatti 微分方程式と呼ばれる連立線形微分方程式を解けば求まる．さらに，時不変システムに対する有限評価区間の最適制御問題の場合，Ricatti 微分方程式の解は，時間変数の指数関数を用いて与えられる．指数関数は解析関数であるため，本研究で扱う解の勾配のクラスに含まれる．本研究の方法と，Ricatti 微分方程式を解く方法との違いは，本研究では，微分方程式ではなく代数方程式を解くことで，問題の解を見つけることである．

1.4 論文の構成

2–4 章では，離散時間多項式システムを対象とする．2 章では，可観測性を解析する．まず，大域的/局所可観測性を定義し，つぎに大域的/局所可観測性の必要十分条件を導出する．そして，主結果を用いて，多項式システムの大域的/局所可観測性を判別する．3 章では，可到達性の定義を示し，その十分条件を導出する．つぎに，例題において提案法の有効性を示す．4 章では，有限時間安定性を定義し，有限時間安定性の必要十分条件を導出する．その後，有限時間安定なシステムの例を与え，提案法を用いて有限時間整定制御器の設計例を示す．5 章では，非定常 HJE を対象とし，代数方程式を解くだけで解の勾配が求まる HJE のクラスを明らかにする．そして，そのような HJE の例を示す．6 章では，本論文をまとめる．付録では，可換環論と代数幾何学の基本的な用語をまとめる．そして，定理や補題の証明を記す．

第2章　離散時間多項式システムの可観測性

2.1　はじめに

可観測性は，システム制御理論において基本的な性質の一つである．線形システムの場合，様々な可観測性の判別条件が提案されている [3,4]．しかしながら，非線形システムの可観測性解析においてはいまだに問題が残されている．

非線形システムの可観測性を大きく二つに分類すると，大域的可観測性と局所可観測性がある [6,7]．微分幾何学的アプローチでは，局所可観測性に重点を置いて研究されてきた [6,7,34,35]．その中で，可観測性 rank 条件 [6,7,34,35] と呼ばれる判別条件が導出された．しかしながら，この rank 条件は一般に局所可観測性の十分条件でしかない．この rank 条件は，システムのクラスを多項式に制限したとしても十分条件のままである．一方，非線形システムの大域的可観測性についてはあまり研究されていない．そこで，本章では，可換環論と代数幾何学を用いることで，多項式システムの大域的可観測性と局所可観測性に対する必要十分条件を導出する．

2.2　システムの記述と可観測性

実数体 $\mathbf{R}$ 上の $2n$ 変数 ξ_i, η_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ からなる多項式環を $\mathbf{R}[\xi, \eta](:= \mathbf{R}[\xi_1, \ldots, \xi_n, \eta_1, \ldots, \eta_n])$ と表す．状態方程式がつぎで記述される離散時間多項式システムを考える．

$$\begin{cases} x[t+1] = f(x[t], u[t]),\ x[0] = x_0 \\ y[t] = h(x[t], u[t]) \end{cases} \tag{2.1}$$

ただし，$t \in \mathbf{N}$, $x \in \mathbf{R}^n$, $u \in \mathbf{R}^m$, $y \in \mathbf{R}^q$ はそれぞれ時間ステップ，状態，入力と出力を表す．また，$f : \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^m \to \mathbf{R}^n$ と $h : \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^m \to \mathbf{R}^q$ は多項式写像である．ここで，N ステップ後のシステム (2.1) の出力は，初期状態 $x_0 \in \mathbf{R}^n$ と入力列 $U_N = (u[0], u[1], \ldots, u[N]) \in \mathbf{R}^{m \times (N+1)}$ に依存し，$y(N, x_0, U_N)$ と記述できることに注意する．

それでは離散時間システムの可観測性を定義する [6,7,26,34,35].

定義 2.1. [6,34] システム (2.1) において，初期状態の組 $(\xi,\eta)\in\mathbf{R}^n\times\mathbf{R}^n$ が可識別であるとは，ある時刻 N と入力列 $U_N\in\mathbf{R}^{m\times(N+1)}$ が存在して $y(N,\xi,U_N)\neq y(N,\eta,U_N)$ となることをいう．

定義 2.2. システム (2.1) が初期状態 $x_0\in\mathbf{R}^n$ で大域的可観測であるとは，任意の $\xi\in\mathbf{R}^n\backslash\{x_0\}$ と x_0 が可識別なことをいう．また，システムが部分集合 $V\subset\mathbf{R}^n$ で大域的可観測であるとは，すべての $x_0\in V$ でシステムが大域的可観測なことをいう．特に $V=\mathbf{R}^n$ のときには，システムは単に大域的可観測であるという．

定義 2.3. システム (2.1) が初期状態 $x_0\in\mathbf{R}^n$ で局所可観測であるとは，ある近傍 $U(x_0)\subset\mathbf{R}^n$ が存在して，任意の $\xi\in U(x_0)\setminus\{x_0\}$ と x_0 が可識別なことをいう．また，システムが部分集合 $V\subset\mathbf{R}^n$ で局所可観測であるとは，すべての $x_0\in V$ でシステムが局所可観測なことをいう．特に $V=\mathbf{R}^n$ のときには，システムは単に局所可観測であるという．

可識別性は，入力信号の性質によって，複数定義される．ここでは，multiple-experiment observability [26]（ある入力列を加えれば，ある異なる初期状態の組を出力列から識別できる性質）に基づいた定義を採用している．したがって，ここで考えている可観測性は single-experiment observability [26]（ある入力列を加えれば，すべての異なる初期状態の組を出力列から識別できる性質）とは異なることに注意されたい．また，大域的可観測性や局所可観測性にも複数の定義がある [35]．定義 2.2 や 2.3 の大域的可観測性や局所可観測性は，可観測性や弱可観測性とも呼ばれる [35]．

2.3　可識別でない初期状態の組

ここでは，多項式システム (2.1) の可識別でない初期状態の組をアフィン多様体として求める．離散時間多項式システム (2.1) のステップ t における出力関数は，つぎのように記述できる．

$$y_i[t]=\sum_{j=0}^{r_{i,t}}h_{i,t,j}(x_0)p_{i,t,j}(U_t) \tag{2.2}$$

ただし，$h_{i,t,j}$ $(i=1,2,\ldots,q;t=0,1,\ldots;j=0,1,\ldots,r_{i,t})$ は x の多項式，$p_{i,t,j}$ $(i=1,2,\ldots,q;t=0,1,\ldots;j=0,1,\ldots,r_{i,t})$ は U_t の要素からなる相異なる単項式である．また，$r_{t,j}\in N$ はシステム (2.1) の f と h から一意に定まる．このとき，組 $(\xi,\eta)\in\mathbf{R}^n\times\mathbf{R}^n$ が可識別でないことと

$$h_{i,t,j}(\xi)=h_{i,t,j}(\eta)\ (i=1,\ldots,q;t=0,1,\ldots;j=0,\ldots,r_{i,t}) \tag{2.3}$$

が成り立つこととは同値であることがわかる．

式 (2.3) では，可識別でない初期状態の組 $(\xi, \eta) \in \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n$ は無限個の方程式の共通零点集合として与えられている．ここでは，Hilbert の基底定理 [21–24] を用いることで，実は有限個の方程式を考えれば十分なことを示す．ステップ $t = 0$ を考える．条件 (2.3) より，組 $(\xi, \eta) \in \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n$ が識別できないための必要条件は,

$$h_{i,0,j}(\xi) = h_{i,0,j}(\eta) \ (i = 1, \dots, q; j = 0, \dots, r_{i,0}) \tag{2.4}$$

が成り立つことである．式 (2.4) より, イデアル $J_0 \subset \mathbf{R}[\xi, \eta]$ をつぎのように定義する．

$$\begin{aligned} J_0 &= \sum_{i=1}^{q} J_{0,i}, \\ J_{0,i} &= \langle h_{i,0,0}(\xi) - h_{i,0,0}(\eta), h_{i,0,1}(\xi) - h_{i,0,1}(\eta), \dots, h_{i,0,r_{i,0}}(\xi) - h_{i,0,r_{i,0}}(\eta) \rangle. \end{aligned} \tag{2.5}$$

アフィン多様体 $\mathbf{V}(J_0) \subset \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n$ は，式 (2.4) を満たす組 $(\xi, \eta) \in \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n$ の集合である．つぎに，ステップ $t = 1$ を考える．条件 (2.3) より，組 $(\xi, \eta) \in \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n$ が識別できないための必要条件は,

$$h_{i,1,j}(\xi) = h_{i,1,j}(\eta) \ (i = 1, \dots, q; j = 0, \dots, r_{i,1}) \tag{2.6}$$

が成り立つことである．式 (2.4)，(2.6) に基づいて，イデアル $J_1 \subset \mathbf{R}[\xi, \eta]$ をつぎのように定義する．

$$\begin{aligned} J_1 &= J_0 + \sum_{i=1}^{q} J_{1,i}, \\ J_{1,i} &= \langle h_{i,1,0}(\xi) - h_{i,1,0}(\eta), h_{i,1,1}(\xi) - h_{i,1,1}(\eta), \dots, h_{i,1,r_{i,1}}(\xi) - h_{i,1,r_{i,1}}(\eta) \rangle. \end{aligned} \tag{2.7}$$

アフィン多様体 $\mathbf{V}(J_1) \subset \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n$ は，式 (2.4)，(2.6) を満たす組 $(\xi, \eta) \in \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n$ の集合である．同様にして，イデアル $J_i \subset \mathbf{R}[\xi, \eta]$, $(i = 0, 1, \dots)$ を定義すると，$J_0 \subset J_1$ より昇鎖列

$$J_0 \subset J_1 \subset \cdots \tag{2.8}$$

を得る．さらに，つぎが成り立つ．

補題 2.1. 昇鎖列 (2.8) において，ある自然数 N が存在して $J_N = J_{N+1}$ が成り立つとする．このとき $J_N = J_i \ (i = N + 1, N + 2, \dots)$ が成り立つ．

証明. ここでは，一般性を失うことなく，1 出力の自律系を考える．すなわち，つぎのシステムを考える．

$$\begin{aligned} x[t+1] &= f(x[t]) \\ y[t] &= h(x[t]) \end{aligned}$$

このとき，条件 (2.3) はつぎのようになる．

$$h(f^i(\xi)) = h(f^i(\eta))\ (i = 0, 1, \ldots)$$

ただし，条件 (2.3) の $h_{i,t,j}$ も状態のみの多項式であることに注意されたい．条件 (2.3) の $h_{i,t,j}$ と $h(f^i(x))$ のどちらも，f を再帰的に合成することで求めている．したがって，自律システムに対する結果を，システム (2.1) に対して拡張できる．

それでは，自律システムに対して証明を行う．このとき，$J_t\ (t = 0, 1, \ldots)$ はつぎのようになる．

$$J_t = \langle h(\xi) - h(\eta), \ldots, h(f^t(\xi)) - h(f^t(\eta))\rangle$$

ある $N \in \mathbf{N}$ が存在して $J_N = J_{N+1}$ が成り立つとする．このとき，ある $a_t \in \mathbf{R}[\xi, \eta]\ (t = 0, 1, \ldots N)$ が存在して，

$$h_{N+1}(\xi) - h_{N+1}(\eta) = \sum_{t=0}^{N} a_t(\xi, \eta)(h_t(\xi) - h_t(\eta))$$

となる．$h_{N+2}(\xi) - h_{N+2}(\eta)$ を計算すると

$$\begin{aligned} h_{N+2}(\xi) - h_{N+2}(\eta) &= h_{N+1}(f(\xi)) - h_{N+1}(f(\eta)) \\ &= \sum_{t=0}^{N} a_t(f(\xi), f(\eta))(h_t(f(\xi)) - h_t(f(\eta))) \\ &= \sum_{t=0}^{N} a_t(f(\xi), f(\eta))(h_{t+1}(\xi) - h_{t+1}(\eta)) \in J_{N+1} = J_N \end{aligned}$$

となり，$J_{N+2} = J_N$ が成り立つ．同様にして，$J_N = J_{N+1} = J_{N+2} = \cdots$ を示せる．システム (2.1) に対して同様に証明できる．　□

Hilbert の基底定理より，イデアルの昇鎖列は有限長さで停止する．すなわち，ある $N \in \mathbf{N}$ とイデアル $\mathcal{J} \subset \mathbf{R}[\xi, \eta]$ が存在して，

$$J_0 \subsetneq J_1 \subsetneq \cdots \subsetneq J_N = J_{N+1} = \cdots = \mathcal{J} \tag{2.9}$$

を満たす．イデアル $J_i\ (i = 0, 1, \ldots)$ の定義より，アフィン多様体 $\mathbf{V}(\mathcal{J}) \subset \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n$ は可識別でない初期状態の組を表す．

つぎに，可観測性の判別条件を記述するために，イデアル $\mathcal{I} \subset \mathbf{R}[\xi, \eta]$ を定義する．

$$\mathcal{I} = \langle \xi_1 - \eta_1, \xi_2 - \eta_2, \ldots, \xi_n - \eta_n\rangle \tag{2.10}$$

このイデアルが定義するアフィン多様体は

$$\mathbf{V}(\mathcal{I}) = \{(\xi, \eta) \in \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n : \xi = \eta\} \tag{2.11}$$

であり，これはつぎのようにも表現できる．

$$\mathbf{V}(\mathcal{I}) = \bigcup_{x_0 \in \mathbf{R}^n} \{(x_0, x_0)\} \tag{2.12}$$

ここで，式 (2.10)，(2.11) より

$$\mathcal{I} = \mathbf{I}(\mathbf{V}(\mathcal{I})) \tag{2.13}$$

が成り立つことがわかる．可観測性の判別条件は，イデアル $\mathcal{J}, \mathcal{I} \subset \mathbf{R}[\xi, \eta]$ を用いて与えられる．

2.4　初期状態 1 点での可観測性

2.4.1　大域的可観測性

前節では，多項式システム (2.1) の可識別でない初期状態の組がアフィン多様体として得られることを示した．ここでは，この多様体を用いて，初期状態 1 点での可観測性の判別条件を導出する．まず，大域的可観測性の必要十分条件を示す．

不定元 $\eta \in \mathbf{R}[\xi, \eta]$ に $x_0 \in \mathbf{R}^n$ を代入する写像を $\varphi_{x_0} : \mathbf{R}[\xi, \eta] \to \mathbf{R}[\xi]$ で表わす．イデアル $\mathcal{J} \subset \mathbf{R}[\xi, \eta]$ の像 $\varphi_{x_0}(\mathcal{J})$ は $\mathbf{R}[\xi]$ のイデアルである．アフィン多様体 $\mathbf{V}(\varphi_{x_0}(\mathcal{J})) \subset \mathbf{R}^n$ は，$x_0 \in \mathbf{R}^n$ と可識別でない初期状態の集合を表す．一方，イデアル $\mathcal{I} \subset \mathbf{R}[\xi, \eta]$ の像 $\varphi_{x_0}(\mathcal{I}) \subset \mathbf{R}[\xi]$ は，つぎで生成される．

$$\varphi_{x_0}(\mathcal{I}) = \langle \xi_1 - x_{01}, \xi_2 - x_{02}, \ldots, \xi_n - x_{0n} \rangle$$

このとき，$\mathbf{V}(\varphi_{x_0}(\mathcal{I})) \subset \mathbf{R}^n$ は $\{x_0\}$ である．

いま，つぎの定理を得る．

定理 2.1. 多項式システム (2.1) が初期状態 $x_0 \in \mathbf{R}^n$ で大域的可観測であるための必要十分条件は

$$\mathbf{V}(\varphi_{x_0}(\mathcal{J})) = \mathbf{V}(\varphi_{x_0}(\mathcal{I})) \tag{2.14}$$

が成り立つことである．

注意 2.1. 定理 2.1 のイデアルに対して

$$\varphi_{x_0}(\mathcal{J}) = \varphi_{x_0}(\mathcal{I}) \tag{2.15}$$

が成り立てば，命題 A.1 の 1 より，条件 (2.14) が成り立つ．逆は，一般に成り立たない．2 つのイデアルが等しいかどうかを確認することは，イデアルの Gröbner 基底を計算するだけで確認できる．したがって，条件 (2.15) の確認は容易である．一方，アフィン多様体が等しいかどうかを確認するためには，後述するように代数方程式を解く必要がある．したがって，条件 (2.15) は十分条件であるが，大域的可観測性の判別に役立つ．以降の結果に関しても，同様にしてイデアルの計算だけで確認できる十分条件を導出できる．

イデアルが定義するアフィン多様体は，イデアルの生成元の共通零点集合である．Hilbert の基底定理より，多項式環 $\mathbf{R}[\xi]$ のイデアルは有限個の多項式で生成される．したがって，条件 (2.14) は，$\varphi_{x_0}(\mathcal{J})$ と $\varphi_{x_0}(\mathcal{I})$ の生成元である有限個の多項式の共通零点集合を計算すれば確認できる．

条件 (2.14) の確認には，quantifier elimination (QE) [50] を用いることができる．条件 (2.14) は，

$$(\exists\xi)(\exists\eta)[\varphi_{x_0}(\mathcal{J}) \cap (\xi \neq \eta)] \tag{2.16}$$

が成り立たないことと同値である．QE を用いて，条件 (2.16) が成り立つかどうかを確認可能である．

2.4.2　局所可観測性

初期状態 $x_0 \in \mathbf{R}^n$ と可識別でない初期状態の組を定義するイデアル $\varphi_{x_0}(\mathcal{J}) \subset \mathbf{R}[\xi]$ を用いて，x_0 での局所可観測性の判別条件を導出する．局所可観測性の判別条件を導出するために環の局所化を用いる．イデアル $p \subset \mathbf{R}[\xi]$ を素とする．多項式環 $\mathbf{R}[\xi]$ の素イデアル p での局所化は，つぎで定義される．

$$\mathbf{R}[\xi]_p = \{a/b : a, b \in \mathbf{R}[\xi], b \notin p\}$$

これは局所環である．イデアル $I \subset \mathbf{R}[\xi]$ に対して，イデアル $I_p \subset \mathbf{R}[\xi]_p$ をつぎのように定義する．

$$I_p = \{a/b : a \in I, b \in \mathbf{R}[\xi], b \notin p\}$$

これは $\mathbf{R}[\xi]_p$ のイデアルである．$I_p \cap \mathbf{R}[\xi] \subset \mathbf{R}[\xi]$ がイデアルであることを用いて，アフィン多様体 $\mathbf{V}(I_p) \subset \mathbf{V}(I) \subset \mathbf{R}^n$ をつぎのように定義する．

$$\mathbf{V}(I_p) := \mathbf{V}(I_p \cap \mathbf{R}[\xi])$$

注意 2.2. 局所可観測性を確認するためには，イデアル $I_p \cap \mathbf{R}[\xi] \subset \mathbf{R}[\xi]$ を計算する必要がある．命題 A.16，A.17 より，I の極小準素分解を計算すれば I_p は求まる．イデアル I の極小準素分解を $q_1 \cap \cdots \cap q_s$ とする．ただし，$q_i \subset p$ $(i = 1, \ldots, t)$ かつ $q_i \not\subset p$ $(i = t+1, \ldots, s)$ とする．すると，命題 A.16 より，$I_p = (q_1 \cap \cdots \cap q_t)_p$ が成り立つ．さらに，命題 A.17 より，$I_p \cap \mathbf{R}[\xi] = (q_1 \cap \cdots \cap q_t)_p \cap \mathbf{R}[\xi] = q_1 \cap \cdots \cap q_t$ が成り立つ．したがって，I の極小分解を計算しかつ $q_i \subset p$ を確認すれば I_p が求まる．なお，$q_i \subset p$ は $q_i + p = p$ を確認するだけで判別できる．与えられたイデアルの極小分解と和を計算するアルゴリズムは提案されており，例えば Maple に実装されている [21].

以上の準備の下でつぎが成り立つ．

定理 2.2. 多項式システム (2.1) が初期状態 $x_0 \in \mathbf{R}^n$ で局所可観測であるための必要十分条件は

$$\mathbf{V}(\varphi_{x_0}(\mathcal{J})_{\varphi_{x_0}(\mathcal{I})}) = \mathbf{V}(\varphi_{x_0}(\mathcal{I})) \tag{2.17}$$

が成り立つことである．

証明. 準備として，環の局所化とアフィン多様体の極小分解との関係を明らかにする．イデアル $\varphi_{x_0}(\mathcal{J})$ の極小準素分解を $q_1 \cap \cdots \cap q_s$ とする．ただし，$q_i \subset \varphi_{x_0}(\mathcal{I})$ $(i = 1, \ldots, t; t \leq s)$ かつ $q_i \not\subset \varphi_{x_0}(\mathcal{I})$ $(i = t+1, \ldots, s)$ とする．素イデアル $\varphi_{x_0}(\mathcal{I})$ による環 $\mathbf{R}[\xi]$ の局所化を行うと，補題 A.16，A.17 より

$$\begin{aligned} \varphi_{x_0}(\mathcal{J})_{\varphi_{x_0}(\mathcal{I})} \cap \mathbf{R}[\xi] &= (q_1 \cap \cdots \cap q_s)_{\varphi_{x_0}(\mathcal{I})} \cap \mathbf{R}[\xi] \\ &= (q_1 \cap \cdots \cap q_t)_{\varphi_{x_0}(\mathcal{I})} \cap \mathbf{R}[\xi] = q_1 \cap \cdots \cap q_t \end{aligned} \tag{2.18}$$

が成り立つ．

つぎに，$\mathbf{V}(q_i) \not\supset \mathbf{V}(\varphi_{x_0}(\mathcal{I}))$ $(i = t+1, \ldots, s)$ を示す．$\mathbf{V}(q_i) \supset \mathbf{V}(\varphi_{x_0}(\mathcal{I}))$ を仮定すると，命題 A.1 の 2 より，

$$q_i \subset \mathbf{I}(\mathbf{V}(q_i)) \subset \mathbf{I}(\mathbf{V}(\varphi_{x_0}(\mathcal{I}))) = \varphi_{x_0}(\mathcal{I})$$

が成り立ち，$q_i \not\subset \varphi_{x_0}(\mathcal{I})$ $(i = t+1, \ldots, s)$ に矛盾する．一方，$q_i \subset \varphi_{x_0}(\mathcal{I})$ $(i = 1, \ldots, t)$ と命題 A.1 の 1) より，$\mathbf{V}(q_i) \supset \mathbf{V}(\varphi_{x_0}(\mathcal{I}))$ $(i = 1, \ldots, t)$ が成り立つ．なお，命題 A.7 より，$\mathbf{V}(q_i) = \mathbf{V}(\sqrt{q_i})$ は既約である．

以上をまとめると，式 (2.18) と命題 A.2 2) より，

$$\mathbf{V}(\varphi_{x_0}(\mathcal{J})_{\varphi_{x_0}(\mathcal{I})}) = \mathbf{V}(q_1) \cup \cdots \cup \mathbf{V}(q_t)$$

となる．すなわち，$\mathbf{V}(\varphi_{x_0}(\mathcal{J})_{\varphi_{x_0}(\mathcal{I})})$ は $\mathbf{V}(\varphi_{x_0}(\mathcal{J}))$ を既約多様体の和に分解したとき，$\mathbf{V}(\varphi_{x_0}(\mathcal{I}))$ を含むものの和である．いま，$\mathbf{V}(\varphi_{x_0}(\mathcal{J}))$ の極小分解を $X_0 \cup \cdots \cup X_s$ とする．ただし，$X_i \supset \mathbf{V}(\varphi_{x_0}(\mathcal{I}))$ $(i = 0, 1, \ldots, t; t \leq s)$ かつ $X_i \not\supset \mathbf{V}(\varphi_{x_0}(\mathcal{I}))$ $(i = t+1, \ldots, s)$ とする．このとき，$\mathbf{V}(\varphi_{x_0}(\mathcal{J})_{\varphi_{x_0}(\mathcal{I})}) = X_0 \cup \cdots \cup X_t$ が成り立つ．したがって，多項式システム (2.1) が初期状態 $x_0 \in \mathbf{R}^n$ で局所可観測であるための必要十分条件は

$$X_0 \cup \cdots \cup X_t = \mathbf{V}(\varphi_{x_0}(\mathcal{I})) \subset \mathbf{R}^n \tag{2.19}$$

が成り立つことであることを示せばよい．

(必要性) システム (2.1) が初期状態 $x_0 \in \mathbf{R}^n$ で局所可観測であれば，ある近傍 $U(x_0) \subset \mathbf{R}^n$ が存在して，$\mathbf{V}(\varphi_{x_0}(\mathcal{J})) \cap U(x_0) = \{x_0\}$ となる．すなわち，$(X_0 \cup \cdots \cup X_s) \cap U(x_0) = \{x_0\}$ が成り立つ．さらに，極小分解に対する順序付けより，$(X_0 \cup \cdots \cup X_t) \cap U(x_0) = \{x_0\}$ が成り立つ．これは，ある X_i $(i = 0, 1, \ldots, t)$ に対して，$X_i \cap U(x_0) = \{x_0\}$ が成り立つことを意味する．既約多様体は連結集合であるため，$X_i = \{x_0\} = \mathbf{V}(\varphi_{x_0}(\mathcal{I}))$ が成り立つ．一般性を失うことなく，$i = 0$ とする．極小分解の性質より，$X_0 \not\subset X_1 \cup \cdots \cup X_s$ となる．したがって，条件 (2.19) が成り立つ．

(十分性) 条件 (2.19) が成り立つとし，$W := X_{t+1} \cup \cdots \cup X_s \subset \mathbf{R}^n$ を定義する．ここで，$\mathbf{V}(\varphi_{x_0}(\mathcal{I})) = \{x_0\}$ に注意すると，極小分解の性質より $\{x_0\} \not\subset W$ である．アフィン多様体 W は Zariski 位相で閉集合なため，$W \setminus \{x_0\}$ は開集合である．したがって，ある近傍 $U(x_0) \subset \mathbf{R}^n \setminus W$ が存在して，$\mathbf{V}(\varphi_{x_0}(\mathcal{J})) \cap U(x_0) = (\{x_0\} \cup W) \cap U(x_0) = \{x_0\}$ が成り立つ．すなわち，システムは x_0 で局所可観測である．　□

定理 2.2 は，多項式環 $\mathbf{R}[\xi]$ の $\mathcal{I}$ での局所化を用いて記述されている．条件 (2.17) は，$\mathbf{V}(\varphi_0(\mathcal{J})_{\varphi_0(\mathcal{I})})$ を計算すれば確認できる．すなわち，有限個の多項式の共通零点集合が $\{\sigma\}$ と等しいかどうかを判別すれば，条件 (2.17) を確認できる．

例題 2.1. つぎの多項式システムの原点での大域的可観測性を判別する．

$$\begin{aligned} x[t+1] &= \begin{bmatrix} x_2^2[t]u[t](x_1[t] + x_2[t]) \\ x_1[t]x_2[t] \end{bmatrix} \\ y(t) &= x_1[t] \end{aligned}$$

まず，局所可観測性の十分条件である可観測性 rank 条件 $[6, 7, 34, 35]$ が成り立たないことを

示す．可観測性 rank 条件より

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ x_2^2 u & x_2 u(2x_1+3x_2) \end{bmatrix}$$

が正則であればシステムは局所可観測である．この行列の行列式は $x_2 u(2x_1+3x_2)$ であるため，可観測性 rank 条件は $x_2 u(2x_1+3x_2)=0$ となるような初期状態で成り立たない．しかし，十分条件が成り立たないからといって，システムが局所可観測でないとはいえない．そこで，ここでは提案手法を用いて，原点での大域的可観測性を判別する．

それでは，原点での大域的可観測性を判別する．つぎのイデアル $\varphi_0(\mathcal{I}) \subset \mathbf{R}[\xi](:=\mathbf{R}[\xi_1,\xi_2])$ は

$$\varphi_0(\mathcal{I}) = \langle \xi_1, \xi_2 \rangle$$

と求まる．また，可識別でない初期状態の組を求めるために，$\mathbf{R}[\xi,\eta](:=\mathbf{R}[\xi_1,\xi_2,\eta_1,\eta_2])$ のイデアルをつぎのように生成する．

$$\begin{aligned} J_0 &= \langle \xi_1 - \eta_1 \rangle \\ J_1 &= J_0 + \langle \xi_2^2(\xi_1+\xi_2) - \eta_2^2(\eta_1+\eta_2) \rangle \\ J_2 &= J_1 + \langle \xi_1^3\xi_2^3 - \eta_1^3\eta_2^3, \xi_1^2\xi_2^4(\xi_1+\xi_2) - \eta_1^2\eta_2^4(\eta_1+\eta_2) \rangle = J_1 \end{aligned}$$

このとき，$J_2 = J_1$ が成り立つ．いま，J_1 を $\mathcal{J} \subset \mathbf{R}[\xi,\eta]$ と定義する．つぎに，$\varphi_0(\mathcal{J}) \subset \mathbf{R}[\xi]$ は

$$\varphi_0(\mathcal{J}) = \langle \xi_1, \xi_2^2(\xi_1+\xi_2) \rangle \tag{2.20}$$

と求まる．また，

$$\mathbf{V}(\varphi_0(\mathcal{J})) = \left\{ \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{bmatrix} \in \mathbf{R}^3 : \xi_1 = 0, \xi_2 = 0 \right\}$$

を得る．条件 $\mathbf{V}(\varphi_0(\mathcal{J})) = \mathbf{V}(\mathcal{I})$ が成り立つため，定理 2.3 よりシステムは原点で大域的可観測である．したがって，原点で局所可観測でもある．ただし，原点で局所可観測性の十分条件である可観測性 rank 条件が成り立たないことに注意されたい．

定理 2.3 の条件が成り立つからといって，どのような入力列を加えても，出力列から原点を他の初期状態から識別できるとは限らない．例えば，すべての時刻 t で $u[t]=0$ とした場合には，$\mathcal{J} = J_0$ となり，システムは原点で大域的可観測でない．一方，$t=0$ で $u[t]=1$ とした場合には，それ以降の入力列に依らず，システムは原点で大域的可観測である．

2.5　アフィン多様体上での可観測性

2.5.1　大域的可観測性

前節では，多項式システム (2.1) の初期状態 1 点での可観測性に対する判別条件を導出した．しかしながら，得られた条件をアフィン多様体上のすべての初期状態に対して確認することは難しい．そこで，ここではアフィン多様体上での可観測性の判別条件を導出する．得られた条件は，初期状態 1 点での可観測性の条件を拡張したものと見なせる．

定理 2.3. 多項式システム (2.1) が，アフィン多様体 $V \subset \mathbf{R}^n$ で大域的可観測であるための必要十分条件は

$$\mathbf{V}(\mathcal{J}) \cap (\mathbf{R}^n \times V) = \mathbf{V}(\mathcal{I}) \cap (\mathbf{R}^n \times V) \tag{2.21}$$

が成り立つことである．

証明. （十分性）条件 (2.21) が成り立てば，すべての $x_0 \in V$ に対して，つぎが成り立つ．

$$\mathbf{V}(\mathcal{J}) \cap (\mathbf{R}^n \times \{x_0\}) = \mathbf{V}(\mathcal{I}) \cap (\mathbf{R}^n \times \{x_0\}) \tag{2.22}$$

共通部分 $\mathbf{V}(\mathcal{J}) \cap (\mathbf{R}^n \times \{x_0\})$ は，つぎのような集合である．

$$\{(\xi, x_0) \in \mathbf{R}^n \times \{x_0\} : \xi \text{ は } x_0 \text{ と可識別でない}\}$$

式 (2.11) より，式 (2.22) の右辺は $\{(x_0, x_0)\}$ である．したがって，$x_0 \in V$ と可識別でない初期状態は x_0 のみであり，定義 2.2 が成り立つ．

（必要性）対偶を示す．包含関係 $\mathbf{V}(\mathcal{J}) \supset \mathbf{V}(\mathcal{I})$ は常に成り立つため，つぎを得る．

$$\mathbf{V}(\mathcal{J}) \cap (\mathbf{R}^n \times V) \supset \mathbf{V}(\mathcal{I}) \cap (\mathbf{R}^n \times V) \tag{2.23}$$

したがって，条件 (2.22) が成り立たねば，$\mathbf{V}(\mathcal{J}) \cap (\mathbf{R}^n \times V) \not\subset \mathbf{V}(\mathcal{I}) \cap (\mathbf{R}^n \times V)$ を得る．すなわち，ある $(\xi, x_0) \in (\mathbf{V}(\mathcal{J}) \cap (\mathbf{R}^n \times V)) \setminus (\mathbf{V}(\mathcal{I}) \cap (\mathbf{R}^n \times V))$ が存在する．ここで，$(x_0, x_0) \in \mathbf{V}(\mathcal{I}) \cap (\mathbf{R}^n \times V)$ に注意されたい．以上より，組 $(\xi, x_0) \in \mathbf{R}^n \times V$ は可識別でなく, また $\xi \neq x_0$ である. したがって，システムは定義 2.2 を満たさない． □

注意 2.3. 条件 (2.21) は，初期状態 1 点での大域的可観測性の判別条件を含む．条件 (2.21) において，$V = \{x_0\}$ とすれば，初期状態 1 点 $x_0 \in \mathbf{R}^n$ での大域的可観測性を判別できる．初期状態 1 点 $x_0 \in \mathbf{R}^n$ と可識別でない初期状態を求めるためには，$(\xi, \eta) \in \mathbf{V}(\mathcal{J})$ の η を x_0 に固定すればよい．条件 (2.21) では，この固定する操作を $(\mathbf{R}^n \times \{x_0\})$ との共通部分を計算

することで達成できる．一方，前節では，この固定する操作を $\mathbf{R}[\xi, \eta]$ の不定元 $\eta \in \mathbf{R}[\xi, \eta]^n$ に $x_0 \in \mathbf{R}^n$ を代入することで達成している．η に x_0 を代入する写像 $\varphi_{x_0} : \mathbf{R}[\xi, \eta] \to \mathbf{R}[\xi]$ の核 $I := \langle \eta_1 - x_{01}, \ldots, \eta_n - x_{0n} \rangle \subset \mathbf{R}[\xi, \eta]$ が $\mathbf{I}(\mathbf{V}(I)) = I$ を満たすことから，片方の操作で得られる結果と同様のものを，もう片方の操作で得ることは容易である．

注意 2.4. 離散時間多項式システムの大域的可観測性に対する判別条件は文献 [26, 27, 29] でも導出されている．これらの結果は，条件 (2.21) において $V = \mathbf{R}^n$ とした場合に相当し，定理 2.3 の特殊な場合である．

アフィン多様体 $V \subset \mathbf{R}^n$ での大域的可観測性を確認する場合，この多様体を定義する多項式 $p_1, \ldots, p_s \in \mathbf{R}[\eta]$ が与えられることが多い．この多項式が定義するイデアルを $I := \langle p_1, \ldots, p_s \rangle \subset \mathbf{R}[\eta]$ とすると，$V = \mathbf{V}(I)$ での大域的可観測性を確認すれば良い．ここで，イデアル I の $\mathbf{R}[\xi, \eta]$ への拡大を $I\mathbf{R}[\xi, \eta]$ とすると，

$$\mathbf{V}(I\mathbf{R}[\xi, \eta]) = \mathbf{R}^n \times \mathbf{V}(I) \tag{2.24}$$

が成り立つ．ただし，$\mathbf{V}(I\mathbf{R}[\xi, \eta]) \subset \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n$ である．以上の準備の元で，$\mathbf{V}(I)$ での大域的可観測性の判別条件を示す．

系 2.1. $I \subset \mathbf{R}[\eta]$ をイデアルとする．多項式システム (2.1) が $\mathbf{V}(I) \subset \mathbf{R}^n$ で大域的可観測であるための必要十分条件は

$$\mathbf{V}(\mathcal{J} + I\mathbf{R}[\xi, \eta]) = \mathbf{V}(\mathcal{I} + I\mathbf{R}[\xi, \eta]) \tag{2.25}$$

が成り立つことである．

証明. 命題 A.2 の 1 と式 (2.24) より，

$$\mathbf{V}(\mathcal{J} + I\mathbf{R}[\xi, \eta]) = \mathbf{V}(\mathcal{J}) \cap \mathbf{V}(I\mathbf{R}[\xi, \eta]) = \mathbf{V}(\mathcal{J}) \cap (\mathbf{R}^n \times \mathbf{V}(I))$$

と $\mathbf{V}(\mathcal{I} + I\mathbf{R}[\xi, \eta]) = \mathbf{V}(\mathcal{I}) \cap (\mathbf{R}^n \times \mathbf{V}(I))$ が成り立つ．したがって，条件 (2.21) と条件 (2.25) は等価である． □

定理 2.3 ではアフィン多様体の共通部分を計算したが，系 2.1 ではイデアルの和を計算した．一般に，イデアルの計算のほうが容易である．したがって，条件 (2.25) よりも，条件 (2.21) のほうが確認が容易である．

条件 (2.25) は，$\mathcal{J} + I\mathbf{R}[\xi, \eta]$ と $\mathcal{I} + I\mathbf{R}[\xi, \eta]$ の生成元である有限個の多項式の共通零点集合を計算すれば確認できる．さらに，生成元は計算可能である．

2.5.2　局所可観測性

ここでは，局所可観測性の必要十分条件を導出する．まず，局所可観測性の必要条件を示し，その後，必要条件の確認を反復する形で，必要十分条件を導出する．ただし，反復回数は高々有限である．

局所可観測性の必要条件はつぎのように与えられる．

定理 2.4. アフィン多様体 $V \subset \mathbf{R}^n$ を既約とし，$W := \mathbf{V}(\mathcal{I}) \cap (\mathbf{R}^n \times V) \subset \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n$ を定義する．さらに，$\mathbf{V}(\mathcal{J}) \cap (\mathbf{R}^n \times V) \subset \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n$ の極小分解 $\mathbf{V}(\mathcal{J}) \cap (\mathbf{R}^n \times V) = X_0 \cup X_1 \cup \cdots \cup X_s$ をとする．ただし，$W \subset X_j$ $(j = 0, 1, \ldots, t; t \leq s)$ かつ $W \not\subset X_j$ $(j = t+1, t+2, \ldots, s)$ とする．このとき，つぎが成り立つ．

1. W は既約多様体である．

2. 多項式システム (2.1) がある初期状態 $x_0 \in V$ で局所可観測であればつぎが成り立つ．

   (a) $X_0 \cup \cdots \cup X_t = W$ が成り立つ．すなわち，$\mathbf{V}(\mathcal{J}) \cap (\mathbf{R}^n \times V)$ をつぎのように分解できる．

   $$\mathbf{V}(\mathcal{J}) \cap (\mathbf{R}^n \times V) = W \cup X \tag{2.26}$$

   ただし，$X = X_{t+1} \cup \cdots \cup X_s \subset \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n$ である．もし，X_j $(j = t+1, \ldots, s)$ が存在しなければ，X を空とする．

   (b) $\hat{V} := \{x_0 \in \mathbf{R}^n : (x_0, x_0) \in W \cap X\}$ とする．多項式システム (2.1) は $V \setminus \hat{V}$ で局所可観測である．

   (c) $\hat{V}$ はアフィン多様体かつ $\dim V > \dim \hat{V}$ を満たす．

付録で定理 2.4 を証明する．

定理 2.4 より，システムが既約多様体 V で局所可観測であるための必要十分条件は，$X_0 = W$ が成り立ち，かつ $\hat{V}$ でシステムが局所可観測であることである．アフィン多様体 $\hat{V}$ での局所可観測性の判別には，定理 2.4 を再び用いればよい．多様体 $\hat{V}$ の極小分解を $\hat{V} = \hat{V}_1 \cup \hat{V}_2 \cup \cdots \cup \hat{V}_r$ とすると，各 $\hat{V}_i \subset \mathbf{R}^n$ $(i = 1, \ldots, r)$ は既約である．既約な $\hat{V}_i$ での局所可観測性の判別には，定理 2.4 を用いることができる．したがって，再帰的に定理 2.4 の必要条件を確認すれば，局所可観測性を判別できる．この考えに基づいて，局所可観測性の判別アルゴリズムを提案し，それに付随して定理を与える．

アルゴリズム 2.1.

入力: アフィン多様体 $V \subset \mathbf{R}^n$.

出力: アフィン多様体 $V_0 \subset \mathbf{R}^n$.

1. $V_0 := \emptyset \subset \mathbf{R}^n$, $\hat{V} := \emptyset \subset \mathbf{R}^n$.
2. V の極小分解を $V_1 \cup \cdots \cup V_r \subset \mathbf{R}^n$ $(r \in \mathbf{N}_+)$ とする.
3. $i = 1, \ldots, r$ に対して，つぎを繰り返す.
   (a) $W_i := \mathbf{V}(\mathcal{I}) \cap (\mathbf{R}^n \times V_i) \subset \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n$.
   (b) $\mathbf{V}(\mathcal{J}) \cap (\mathbf{R}^n \times V_i) \subset \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n$ の極小分解を
   $$\mathbf{V}(\mathcal{J}) \cap (\mathbf{R}^n \times V_i) = X_{i,0} \cup X_{i,1} \cup \cdots \cup X_{i,s_i}$$
   とする．ただし，$W_i \subset X_{i,j}$ $(j = 0, 1, \ldots, t_i; t_i \leq s_i)$ かつ $W_i \not\subset X_{i,j}$ $(j = t_i+1, t_i+2, \ldots, s_i)$ である.
   (c) $X_{i,0} \cup \cdots \cup X_{i,t_i} = W_i$ が成り立たねば，ステップ 3f) へ進む．さもなければ，$X_i = X_{i,t_i+1} \cup \cdots \cup X_{i,s_i} \subset \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n$ とする．もし $X_{i,j}$ $(j = t_i + 1, \ldots, s_i)$ が存在しなければ，X_i を空集合とする.
   (d) $\hat{V}_i := \{x_0 \in \mathbf{R}^n : (x_0, x_0) \in W_i \cap X_i\}$.
   (e) $\hat{V} := \hat{V} \cup \hat{V}_i$ とし，ステップ 3g) へ進む.
   (f) $V_0 := V_0 \cup V_i$.
   (g) $i := i + 1$.
4. もし $\hat{V} = \emptyset$ であれば，V_0 を出力する．さもなければ，$V := \hat{V}$ とする.
5. $\hat{V} := \emptyset$ とし，ステップ 2) へ戻る.

定理 2.5. アルゴリズム 2.1 は有限回の計算で終了する．さらに，ステップ 2) – 5) の繰り返し回数は高々 n である.

証明. まず，ステップ 4) の $\hat{V} \subset \mathbf{R}^n$ の Krull 次元が，ステップ 2) の $V \subset \mathbf{R}^n$ の次元よりも高いことを示す．一般性を失うことなく，ステップ 3c) の条件が，$i = 1, \ldots, k$ $(k \leq r)$ に対して成立すると仮定する．命題 A.20 より，$\dim V = \max\{\dim V_1, \ldots, \dim V_r\}$ と $\dim \hat{V} = \max\{\dim \hat{V}_1, \ldots, \dim \hat{V}_k\}$ が成り立つ．定理 2.4 の 2c より，$\dim V_i > \dim \hat{V}_i$ $(i = 1, \ldots, k)$ であるため，$\dim V > \dim \hat{V}$ を得る．したがって，ステップ 2) – 5) を一度繰り返すと，ステップ 4) の $\hat{V}$ の次元は減少する.

アルゴリズムの入力 V に対して，$\dim V \leq \dim \mathbf{R}^n = n$ が成り立つことに注意されたい．このため，ステップ 2) – 4) を高々 n 回繰り返せば，ステップ 4) の $\hat{V}$ の次元は -1 になる．すなわち，$\hat{V}$ は最終的に空集合になる．したがって，アルゴリズム 2.1 は有限回の計算で終了する．　□

定理 2.6. 多項式システム (2.1) がアフィン多様体 $V \subset \mathbf{R}^n$ で局所可観測であるための必要十分条件は，アルゴリズム 2.1 の出力が $V_0 = \emptyset \subset \mathbf{R}^n$ となることである．

証明. (必要性) 対偶を示す．出力 V_0 が空でなければ，ある i に対してステップ 3f) を実行したことになる．すなわち，ステップ 3c) の条件を満たさない $V_i \subset \mathbf{R^n}$ が存在する．定理 2.4 の 2a より，システムはそのような V_i で局所可観測でない.

(十分性) ステップ 3) について考える．出力 V_0 が空であることは，すべてのステップで，ステップ 3c) の条件が成り立つことを意味する．したがって，定理 2.4 の 2b より，システムは $V_i \setminus \hat{V}_i$ $(i = 1, \ldots, r)$ で局所可観測である．すなわち，システムは $V \setminus \hat{V}$ で局所可観測である．

入力を $V := \tilde{V}_1 \subset \mathbf{R}^n$ とする．このとき，ステップ 4) の $\hat{V}$ を $\tilde{V}_2 \subset \mathbf{R}^n$ とすると，システムは $\tilde{V}_1 \setminus \tilde{V}_2$ で局所可観測である．もし，$\tilde{V}_2$ が空であれば，システムは $\tilde{V}_1$ で局所可観測であるため，ここでは空でないと仮定する. すると，ステップ 4) より, $V := \tilde{V}_2$ としてステップ 2) – 5) を実行する．ここで，ステップ 4) の $\hat{V}$ を $\tilde{V}_3 \subset \mathbf{R}^n$ とすると，システムは $\tilde{V}_2 \setminus \tilde{V}_3$ で局所可観測である．さらに，$(\tilde{V}_1 \setminus \tilde{V}_2) \cup (\tilde{V}_2 \setminus \tilde{V}_3) = \tilde{V}_1 \setminus \tilde{V}_3$ でシステムは局所可観測である．同様にして，$\tilde{V}_i$ $(i = 1, 2, \ldots)$ を定義すると，システムは $\tilde{V}_1 \setminus \tilde{V}_i$ で局所可観測である．定理 2.5 の証明より, ある $N \leq n$ が存在して，$\tilde{V}_N = \emptyset$ が成り立つため，システムは $V := \tilde{V}_1$ で局所可観測である．　□

定理 2.6 より，アフィン多様体 $V \subset \mathbf{R}^n$ での局所可観測性は，アルゴリズム 2.1 を実行すれば確認できる．また，出力 $V_0 \subset \mathbf{R}^n$ は局所可観測でない初期状態の集合を表す．アルゴリズム 2.1 では，局所可観測性の必要条件を繰り返し確認し，定理 2.5 より，その繰り返し回数は高々有限回である．したがって，局所可観測性の必要条件を有限回確認すれば，システムの局所可観測性を判別できる．

一般に，アルゴリズム 2.1 の実行には，アフィン多様体の計算が必要となる．しかしながら，これは一般に困難である．一方，イデアルの計算は，アフィン多様体の計算に比べると容易である．そこで，イデアルの計算を行うことで，手順の大部分を実行できる局所可観測性の判別アルゴリズムを導出する．まず，定理 2.4 より，つぎの系を得る．

系 2.2. イデアル $I \subset \mathbf{R}[\eta]$ を素とし，$J := \mathcal{I} + I\mathbf{R}[\xi, \eta] \subset \mathbf{R}[\xi, \eta]$ を定義する．さらに，$\mathcal{J} + I\mathbf{R}[\xi, \eta] \subset \mathbf{R}[\xi, \eta]$ の極小準素分解を $\mathcal{J} + I\mathbf{R}[\xi, \eta] = q_0 \cap q_1 \cap \cdots \cap q_s$ とする．ただし，

$\mathbf{V}(J) \subset \mathbf{V}(q_j)$ $(j = 0, 1, \ldots, t; t \leq s)$ かつ $\mathbf{V}(J) \not\subset \mathbf{V}(q_j)$ $(j = t+1, t+2, \ldots, s)$ とする．つぎが成り立つ．

1. J は素である．
2. 多項式システム (2.1) がある初期状態 $x_0 \in \mathbf{V}(I)$ で局所可観測であればつぎが成り立つ．
   (a) $\mathbf{V}(q_0 \cap \cdots \cap q_t) = \mathbf{V}(J)$.
   (b) $q \subset \mathbf{R}[\xi, \eta]$ を $q := q_{t+1} \cap \cdots \cap q_s$ と定義する．もし，q_j $(j = t+1, \cdots, s)$ が存在しなければ，$q := \mathbf{R}[\xi, \eta]$ とする．さらに，$\hat{I} = \varphi(J + q)$ とする．ただし，$\varphi : \mathbf{R}[\xi, \eta] \ni \xi \mapsto \eta \in \mathbf{R}[\eta]$ である．多項式システム (2.1) は $\mathbf{V}(I) \setminus \mathbf{V}(\hat{I})$ で局所可観測である．
   (c) $\dim \mathbf{V}(I) > \dim \mathbf{V}(\hat{I})$ が成り立つ．

系 2.2 は付録で証明される．

局所可観測性の判別アルゴリズム 2.1 を与える．

アルゴリズム 2.2.

入力: イデアル $I \subset \mathbf{R}[\eta]$.

出力: イデアル $I_0 \subset \mathbf{R}[\eta]$.

1. $I_0 := \mathbf{R}[\eta]$, $\hat{I} := \mathbf{R}[\eta]$.
2. I の極小準素分解を $I_1 \cap \cdots \cap I_r \subset \mathbf{R}[\eta]$ $(r \in \mathbf{N}_+)$ とする．
3. $i = 1, \ldots, r$ に対して，つぎを繰り返す．
   (a) $J_i := \sqrt{I_i}\mathbf{R}[\xi, \eta] + \mathcal{I} \subset \mathbf{R}[\xi, \eta]$ とする．ただし，$\sqrt{I_i} \subset \mathbf{R}[\eta]$ は I_i の根基である．
   (b) イデアル $\mathcal{J} + \sqrt{I_i}\mathbf{R}[\xi, \eta]$ の極小準素分解を
   $$\mathcal{J} + \sqrt{I_i}\mathbf{R}[\xi, \eta] = q_{i,0} \cap \cdots \cap q_{i,s_i}$$
   とする．ただし，$\mathbf{V}(\mathcal{J}) \subset \mathbf{V}(q_j)$ $(j = 0, 1, \ldots, t_i; t_i \leq s_i)$ かつ $\mathbf{V}(\mathcal{J}) \not\subset \mathbf{V}(q_j)$ $(j = t_i + 1, t_i + 2, \ldots, s_i)$ とする．
   (c) もし $\mathbf{V}(q_{i,0} \cap \cdots \cap q_{i,t_i}) = \mathbf{V}(J_i)$ が成り立たねば，ステップ 3f) へ行く．さもなければ，$q_i := q_{i,t_i+1} \cap \cdots \cap q_{i,s_i} \subset \mathbf{R}[\xi, \eta]$ とする．もし $q_{i,j}$ $(j = t_i + 1, \ldots, s_i)$ が成り立たねば，$q_i := \mathbf{R}[\xi, \eta]$ とする．

(d) $\hat{I}_i := \varphi(J_i + q_i)$ とする．ただし，$\varphi : \mathbf{R}[\xi, \eta] \ni \xi \mapsto \eta \in \mathbf{R}[\eta]$ が成り立つ．

(e) $\hat{I} := \hat{I} \cap \hat{I}_i$ とし，ステップ 3g) へ進む．

(f) $I_0 := I_0 \cap I_i$.

(g) $i := i + 1$.

4. もし $\mathbf{V}(\hat{I}) = \emptyset$ であれば，I_0 を出力する．さもなければ，$I := \hat{I}$ とする．

5. $\hat{I} := \mathbf{R}[\eta]$ とし，ステップ 2) へ戻る．

定理 2.5，2.6 と同様にしてつぎを示せる．

定理 2.7. アルゴリズム 2.2 は有限で停止する．さらに，ステップ 2) – 5) の繰り返し回数は高々 n である．

定理 2.8. 多項式システム (2.1) がアフィン多様体 $\mathbf{V}(I) \subset \mathbf{R}^n$ で局所可観測であるための必要十分条件は，$\mathbf{V}(I_0) \subset \mathbf{R}^n$ が空集合であることである．ただし，$I_0 \subset \mathbf{R}[\eta]$ はアルゴリズム 2.2 の出力である．

アルゴリズム 2.2 において，ステップ 3b), 3c)，4) 以外は，イデアルの計算だけで実行できる．具体的には，極小分解，和，共通部分と根基の計算が必要となる．これらの計算は，計算代数システム，例えば Maple を用いて行える．ステップ 3b), 3c)，4) はイデアルが定義するアフィン多様体を計算すれば実行できる．したがって，代数方程式を解けば，多項式システムの局所可観測性を判別できる．

2.6　連続時間システムの場合

連続時間多項式システムに対して，可識別でない初期状態の組を求められることを示す．この可識別でない初期状態の組を用いれば，離散時間システムの場合と同様にして可観測性の判別条件を導出できる．

状態方程式がつぎで記述される連続時間多項式システムを考える．

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(x(t), u(t)),\ x(0) = x_0 \\ y(t) = h(x(t), u(t)) \end{cases} \tag{2.27}$$

ただし，$x \in \mathbf{R}^n$, $u \in \mathbf{R}^m$ と $y \in \mathbf{R}^q$ はそれぞれシステム (2.27) の状態，入力，出力を表す．また，$f : \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^m \to \mathbf{R}^n$ と $h : \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^m \to \mathbf{R}^q$ は多項式写像である．各時刻での出力は時刻，初期状態と入力のみの関数であるため，時刻 t における出力を $y(t; x_0, u)$ で表わす．

可識別性を定義する．

定義 2.4. システム (2.27) の初期状態の組 $(\xi,\eta)\in\mathbf{R}^n\times\mathbf{R}^n$ が可識別であるとは，ある区分的連続な許容入力 u と時刻 $t\geq 0$ が存在して，$y(t;\xi,u)\neq y(t;\eta,u)$ となることをいう．

多項式システム (2.27) の f と h_i $(i=1,2,\ldots,q)$ はつぎのように表現できる．

$$f(x,u) = \sum_{k=0}^{r} g_k(x)q_k(u) \tag{2.28}$$

$$h_i(x,u) = \sum_{j=0}^{s_i} p_{i,j}(x)\hat{q}_{i,j}(u) \tag{2.29}$$

ただし，$g_k\in(\mathbf{R}[x])^n$ $(k=0,1,\ldots,r)$, $p_{i,j}\in\mathbf{R}[x]$ $(i=1,2,\ldots,q;j=0,1,\ldots,s_i)$ である．また，q_k $(k=0,\ldots,r)$ と $\hat{q}_{i,j}$ $(i=1,\ldots,q;j=0,\ldots,s_i)$ は u の相異なる単項式である．非負の整数 r と s_i $(i=1,\ldots,q)$ は，システム (2.27) の f と h が与えられれば一意に定まる．

システム (2.27) の初期状態の組に対して，可識別性の判別条件はつぎで与えられる．

補題 2.2. システム (2.27) の初期状態の組 $(\xi,\eta)\in\mathbf{R}^n\times\mathbf{R}^n$ が可識別でないための必要十分条件は，すべての $(\tau_1,\tau_2,\ldots,\tau_\ell)\in\{g_0,g_1,\ldots,g_r\}^\ell$ $(\ell=0,1,\ldots)$ に対して，

$$L_{\tau_1}L_{\tau_2}\cdots L_{\tau_\ell}p_{i,j}(\xi)=L_{\tau_1}L_{\tau_2}\cdots L_{\tau_\ell}p_{i,j}(\eta)\ (i=1,\ldots,q;j=0,\ldots,s_i) \tag{2.30}$$

が成り立つことである．ただし，$L_\tau p(x):=(\partial p/\partial x)\tau$ である．

証明. 補題 2.2 は，入力アフィンシステムに対するものと同様にして証明できる [51]．したがって，ここでは略証を与える．微少時間区間 $[t_0,t_0+t_1)$ における許容入力を $u_1\in\mathbf{R}^n$ とする．時刻 $t\in[t_0,t_0+t_1)$ での出力関数を x 周りで Taylor 展開すると，

$$h(x)=h(x_0,u_1)+\frac{\partial h(x_0,u_1)}{\partial x}(x-x_0)+\cdots$$

となる．一方，時刻 $t\in[t_0,t_0+t_1)$ での状態を t_0 周りで Taylor 展開すると，

$$x(t)=x_0+f(x_0,u_1)(t-t_0)+\cdots$$

を得る．したがって，時刻 t_0+t_1 での出力関数は t_0，t_1，x_0 と u_1 の関数として，つぎにように記述できる．

$$\begin{aligned} y(t_1;x_0,u_1) &= h(x_0,u_1)+\frac{\partial h}{\partial x}(-x_0+x_0+f(x_0,u_1)t_1+\cdots)+\cdots \\ &= h(x_0,u_1)+\frac{\partial h}{\partial x}f(x_0,u_1)t_1+\cdots \end{aligned}$$

同様にして，時刻 $t_0+\cdots+t_k$ での出力関数 h は $t_0,t_1,\ldots,t_k$，x_0 と $u_1,\ldots,u_{k+1}$ の関数として記述できる．この関数 h に対して，つぎが成り立つ．

$$\left.\frac{\partial h(t_0,\ldots,t_k,u_1,\ldots,u_{k+1},\xi)}{\partial t_0\cdots\partial t_k}\right|_{t_0=t_1=\cdots=t_k=0}=L_{f(x,u_{k+1})}\cdots L_{f(x,u_2)}h(x,u_1)$$

可識別でない初期状態の組を (ξ, η) とする．その定義より，すべての $t_0, \ldots, t_k$ とすべての $u_1, \ldots, u_{k+1}$ に対して

$$h(t_0, \ldots, t_k, u_1, \ldots, u_{k+1}, \xi) = h(t_0, \ldots, t_k, u_1, \ldots, u_{k+1}, \eta)$$

が成り立つ．これは，すべての $t_0, \ldots, t_k$ とすべての $u_1, \ldots, u_{k+1}$ $(k = 0, 1, \ldots)$ に対して

$$L_{f(\xi, u_{k+1})} \cdots L_{f(\xi, u_2)} h(\xi, u_1) = L_{f(\eta, u_{k+1})} \cdots L_{f(\eta, u_2)} h(\eta, u_1)$$

が成り立つことを意味する．したがって，f と h をそれぞれ式 (2.28)，(2.29) のように表現すれば，条件 (2.30) が成り立つことを示せる．

一方，f と h は解析的であるため，$L_{f(\xi, u_{k+1})} \cdots L_{f(\xi, u_2)} h(\xi, u_1)$ も解析的である．また，

$$h(t_0, \ldots, t_k, u_1, \ldots, u_{k+1}, \xi) = \sum_{k=0} \frac{1}{k!} L_{f(\xi, u_{k+1})} \cdots L_{f(\xi, u_2)} h(\xi, u_1)$$

が成り立つ．したがって，式 (2.30) が成り立てば，組 (ξ, η) は可識別でない． □

補題 2.2 において，τ の各要素や p が x の多項式であれば $L_\tau p(x)$ も多項式であることに注意されたい．

離散時間システムの場合と同様にして，可識別でない初期状態の組をアフィン多様体として求める．条件 (2.30) より，組 $(\xi, \eta) \in \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n$ が可識別でないための必要条件は

$$p_{i,j}(\xi) = p_{i,j}(\eta) \ (i = 1, \ldots, q; j = 0, \ldots, s_i) \tag{2.31}$$

である．条件 (2.31) より，イデアル $J_0 \subset \mathbf{R}[\xi, \eta]$ を

$$J_0 = \langle p_{1,0}(\xi) - p_{1,0}(\eta), p_{1,1}(\xi) - p_{1,1}(\eta), \ldots, p_{q,s_q}(\xi) - p_{q,s_q}(\eta) \rangle \tag{2.32}$$

と定義する．アフィン多様体 $\mathbf{V}(J_0) \subset \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n$ は式 (2.31) を満たす組 (ξ, η) を表す．条件 (2.30) より，組 $(\xi, \eta) \in \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n$ が可識別でないための必要条件は

$$L_{g_k} p_{i,j}(\xi) = L_{g_k} p_{i,j}(\eta) \ (i = 1, \ldots, q; j = 0, \ldots, s_i; k = 0, \ldots, r) \tag{2.33}$$

が成り立つことである．式 (2.31)，(2.33) より，イデアル $J_1 \subset \mathbf{R}[\xi, \eta]$ をつぎのように定義する．

$$\begin{aligned} J_1 &= J_0 + \sum_{i=1}^{q} J_{1,i} \\ J_{1,i} &= \langle L_{g_0} p_{i,0}(\xi) - L_{g_0} p_{i,0}(\eta), \\ &\qquad L_{g_0} p_{i,1}(\xi) - L_{g_0} p_{i,1}(\eta), \ldots, L_{g_r} p_{i,s_i}(\xi) - L_{g_r} p_{i,s_i}(\eta) \rangle \end{aligned} \tag{2.34}$$

アフィン多様体 $\mathbf{V}(J_1) \subset \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n$ は式 (2.31)，(2.33) を満たす組 (ξ, η) を表す．条件 (2.30) より，組 $(\xi, \eta) \in \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n$ が可識別でないための必要条件は

$$L_{g_l} L_{g_k} p_{i,j}(\xi) = L_{g_l} L_{g_k} p_{i,j}(\eta) \ (i = 1, \ldots, q; j = 0, \ldots, s_i; k, l = 0, \ldots, r) \tag{2.35}$$

が成り立つことである．式 (2.31), (2.33)，(2.35) より，イデアル $J_2 \subset \mathbf{R}[\xi, \eta]$ を

$$\begin{aligned} J_2 &= J_1 + \sum_{i=1}^{q} J_{2,i} \\ J_{2,i} &= \langle L_{g_0} L_{g_0} p_{i,0}(\xi) - L_{g_0} L_{g_0} p_{i,0}(\eta), L_{g_0} L_{g_0} p_{i,1}(\xi) - L_{g_0} L_{g_0} p_{i,1}(\eta), \\ &\quad \ldots, L_{g_r} L_{g_r} p_{i,s_i}(\xi) - L_{g_r} L_{g_r} p_{i,s_i}(\eta) \rangle \end{aligned} \tag{2.36}$$

と定義する．アフィン多様体 $\mathbf{V}(J_2) \subset \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n$ は式 (2.31), (2.33)，(2.35) を満たす組 (ξ, η) を表す．式 (2.32), (2.34)，(2.36) より，包含関係 $J_0 \subset J_1 \subset J_2$ が成り立つ．同様にして，イデアル $J_i \subset \mathbf{R}[\xi, \eta]$ $(i = 0, 1, 2, \ldots)$ と昇鎖列

$$J_0 \subset J_1 \subset \cdots \tag{2.37}$$

が得られる．さらに，つぎが成り立つ．

補題 2.3. 昇鎖列 (2.37) において，ある自然数 N が存在して $J_N = J_{N+1}$ が成り立つとする．このとき $J_N = J_i$ $(i = N+1, N+2, \ldots)$ が成り立つ．

証明. 離散時間多項式システムの場合と同様に，一般性を失うことなく，1 出力の自律系

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= f(x) \\ y &= h(x) \end{aligned}$$

に対して証明する．ただし，システム (2.27) に対しても同様に証明できる．このとき，J_t $(t = 0, 1, \ldots)$ はつぎのようになる．

$$J_t = \langle h(\xi) - h(\eta), \ldots, L_f^t h(\xi) - L_f^t h(\eta) \rangle$$

ある $N \in \mathbf{N}$ が存在して $J_N = J_{N+1}$ が成り立つとする．このとき，ある $a_t \in \mathbf{R}[\xi, \eta]$ $(t = 0, 1, \ldots N)$ が存在して，

$$L_f^{N+1} h(\xi) - L_f^{N+1} h(\eta) = \sum_{t=0}^{N} a_t(\xi, \eta)(L_f^t h(\xi) - L_f^t h(\eta))$$

となる．ここで，任意の $t \in \mathbf{N}$ に対して

$$L_f^{t+1} h(\xi) = \frac{\partial (L_f^t h(\xi) - L_f^t h(\eta))}{\partial \xi} f(\xi), \ L_f^{t+1} h(\eta) = \frac{\partial (L_f^t h(\xi) - L_f^t h(\eta))}{\partial \eta} f(\eta)$$

が成り立つことに注意して，$L_f^{N+1}h(\xi) - L_f^{N+1}h(\eta)$ を計算すると

$$
\begin{aligned}
&L_f^{N+1}h(\xi) - L_f^{N+1}h(\eta) \\
&= \frac{\partial(L_f^N h(\xi) - L_f^N h(\eta))}{\partial\xi} f(\xi) + \frac{(\partial L_f^N h(\xi) - L_f^N h(\eta))}{\partial\eta} f(\eta) \\
&= \sum_{t=0}^{N-1} \left[\frac{\partial\left\{a_t(\xi,\eta)(L_f^t h(\xi) - L_f^t h(\eta))\right\}}{\partial\xi} f(\xi) + \frac{\partial\left\{a_t(\xi,\eta)(L_f^t h(\xi) - L_f^t h(\eta))\right\}}{\partial\eta} f(\eta) \right] \\
&= \sum_{t=0}^{N-1} \Bigg\{ \left(\frac{\partial a_t(\xi,\eta)}{\partial\xi} f(\xi) + \frac{\partial a_t(\xi,\eta)}{\partial\eta} f(\eta) \right) \left(L_f^t h(\xi) - L_f^t h(\eta) \right) \\
&\qquad + a_t(\xi,\eta) \left(L_f^{t+1} h(\xi) - L_f^{t+1} h(\eta) \right) \Bigg\} \in J_{N-1} + J_N = J_N
\end{aligned}
$$

となり，$J_{N+2} = J_N$ が成り立つ．同様にして，$J_N = J_{N+1} = J_{N+2} = \cdots$ を示せる． □

Hilbert の基底定理より，昇鎖は収束する．以上をまとめると，ある自然数 N とイデアル $J \subset \mathbf{R}[\xi,\eta]$ が存在してつぎが成り立つ．

$$
J_0 \subsetneq J_1 \subsetneq \cdots \subsetneq J_N = J_{N+1} =: \mathcal{J} \tag{2.38}
$$

したがって，システム (2.27) の可識別でない初期状態の組 (ξ,η) は $\mathbf{V}(\mathcal{J}) \subset \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n$ で得られる．可識別でない初期状態の組が得られれば，離散時間システムに対する場合と同様にして連続時間システムに対しても可観測性の判別条件を導出できる．

例題 2.2. つぎのシステムを考える．

$$
\begin{aligned}
\frac{dx}{dt} &= \begin{bmatrix} x_2 \\ -x_1 + x_1^3 \end{bmatrix} \\
y_1 &= x_2
\end{aligned}
$$

このシステムの局所可観測性を判別する．このためにまず可識別でない初期状態の組を定義するイデアルを求める．式 (2.38) のイデアル $J_i \subset \mathbf{R}[\xi,\eta] := \mathbf{R}[\xi_1,\xi_2,\eta_1,\eta_2]$ $(i = 0, 1, \ldots)$ を生成する．

$$
\begin{aligned}
J_0 &= \langle \xi_2 - \eta_2 \rangle \\
J_1 &= \langle \xi_2 - \eta_2, -\xi_1 + \xi_1^3 + \eta_1 - \eta_1^3 \rangle, \cdots
\end{aligned}
$$

ここで，$J_3 = J_4$ を得る．したがって，J_3 を $\mathcal{J} \subset \mathbf{R}[\xi,\eta]$ と置くと，これはつぎのように求まる．

$$
\mathcal{J} = \langle \xi_2 - \eta_2, -\xi_1 + \xi_1^3 + \eta_1 - \eta_1^3, (-\eta_1 + \eta_1^3)(\xi_1^2 - \eta_1^2) + 2\eta_2^2(\xi_1 - \eta_1), \eta_2(\xi_1^2 - \eta_1^2) \rangle
$$

つぎに，式 (2.10) のイデアル $\mathcal{I} \subset \mathbf{R}[\xi, \eta]$ をつぎのように求める．

$$\mathcal{I} = \langle \xi_1 - \eta_1, \xi_2 - \eta_2 \rangle \tag{2.39}$$

入力を $I := \langle 0 \rangle \subset \mathbf{R}[\eta]$ として，アルゴリズム 2.2 を実行する．

Step 1) $I_0 := \mathbf{R}[\eta]$, $\hat{I} := \mathbf{R}[\eta] = \langle 0 \rangle$.

Step 2) $I = \langle 0 \rangle \subset \mathbf{R}[\eta]$ は準素であるため，$I_1 := I$ とおく．

Step 3) $i = 1$ とする．

Step 3a) $J_1 := \mathcal{I} + I_1\mathbf{R}[\xi, \eta] = \mathcal{I}$ とする．ただし，$I_1 = \langle 0 \rangle$ は根基であることに注意する．

Step 3b) $\mathcal{J} + I_1\mathbf{R}[\xi, \eta]$ の極小準素分解を計算すると

$$\begin{aligned}
&\mathcal{J} + I_1\mathbf{R}[\xi, \eta] = \bigcap_{i=0}^{6} q_{1,j} \\
&\quad q_{1,0} = J_1,\ q_{1,1} = \langle \xi_1, \xi_2, \eta_2, -1 + \eta_1 \rangle,\ q_{1,2} = \langle \xi_1, \xi_2, \eta_2, 1 + \eta_1 \rangle \\
&\quad q_{1,3} = \langle \xi_2, \eta_1, \eta_2, -1 + \xi_1 \rangle,\ q_{1,4} = \langle \xi_2, \eta_1, \eta_2, 1 + \xi_1 \rangle \\
&\quad q_{1,5} = \langle \xi_2^2, -1 + \xi_1, 1 + \eta_1, \xi_2 - \eta_2 \rangle,\ q_{1,6} = \langle \xi_2^2, -1 + \eta_1, 1 + \xi_1, \xi_2 - \eta_2 \rangle
\end{aligned} \tag{2.40}$$

となる．極小準素分解の性質より，$q_{1,j} \not\subset J_1$ $(j = 1, \ldots, 6)$ が成り立つ．この場合，$\mathbf{V}(q_{1,j}) \not\supset \mathbf{V}(J_1)$ $(j = 1, \ldots, 6)$ を示せる．背理法を用いてこれを示す．式 (2.13) より，$J_1 = \mathbf{I}(\mathbf{V}(J_1))$ であるため，$q_{1,j} \not\subset \mathbf{I}(\mathbf{V}(J_1))$ $(j = 1, \ldots, 6)$ となる．いま，$\mathbf{V}(q_{1,j}) \supset \mathbf{V}(J_1)$ を仮定する．命題 A.1 の 2 より，$q_{1,j} \subset \mathbf{I}(\mathbf{V}(q_{1,j})) \subset \mathbf{I}(\mathbf{V}(J_1))$ となり，これは $q_{1,j} \not\subset \mathbf{I}(\mathbf{V}(J_1))$ に矛盾する．したがって，$\mathbf{V}(q_{1,j}) \not\supset \mathbf{V}(J_1)$ が成り立つ．

Step 3c) $q_{1,0} = J_1$ と命題 A.1 の 1 より，$\mathbf{V}(q_{1,0}) = \mathbf{V}(J_1)$ となる．$q_1 \subset \mathbf{R}[\xi, \eta]$ を

$$q_1 = \bigcap_{i=1}^{6} q_{1,j} = \langle \xi_2^2, \xi_1(1 - \xi_1^2), \xi_2 - \eta_2, \xi_2(\xi_1^2 - 1), \xi_2(\xi_1 + \eta_1), 1 - \xi_1^2 - \xi_1\eta_1 - \eta_1^2 \rangle$$

と定義する．

Step 3d) $J_1 + q_1 = \mathbf{R}[\xi, \eta]$ より，$\hat{I}_1 := \varphi(J_1 + q_1) = \mathbf{R}[\eta]$ となる．

Step 3e) $\hat{I} := \hat{I} \cap \hat{I}_1 = \mathbf{R}[\eta]$.

Step 4) $\hat{I} = \mathbf{R}[\eta]$ であるため，$\mathbf{V}(\hat{I}) = \emptyset$ が成り立つ．したがって，I_0 を出力する．

出力 $I_0 \subset \mathbf{R}[\eta]$ は $\mathbf{R}[\eta]$ であり，$\mathbf{V}(I_0) \subset \mathbf{R}^n$ は空集合である．定理 2.8 より，システムは局所可観測である．この例題の場合，アルゴリズム 2.2 は，代数方程式を解くことなくイデアルの計算だけで実行できた．

2.7　おわりに

本章では，離散時間多項式システムに対する大域的/局所可観測性の必要十分条件を導出した．また，これらの結果を連続時間多項式システムに対しても拡張できることも示した．得られる条件は，有限本の代数方程式を解けば確認できる．非線形システムに対する既存の可観測性の判別条件は，局所可観測性の十分条件のみである．これに対して，本研究では，システムのクラスを多項式に制限することで，大域的可観測性や局所可観測性の必要十分条件を導出した．

第3章　離散時間多項式システムの可到達性

3.1　はじめに

可到達性は，可観測性と並び基本的な性質の一つである．しかしながら，非線形システムの可到達性に対する必要十分条件は導出されていない．

非線形システムの可到達性は，大きく（大域的）可到達性と局所可到達性に分類できる．非線形システムの可到達性に対しては，局所可到達性について研究されることが多く,（大域的）可到達性について　研究されることはほとんどない．局所可到達性に関する研究については，文献 [36–43, 52] を参照されたい．そこで，本章では，システムのクラスを多項式に制限することで,（大域的）可到達性について考える．

（大域的）可到達性の判別は，写像の全射性を判別することに相当する．写像の全射性を判別するためには，写像の像を計算する必要がある．しかしながら，写像の像を求めることは一般に困難である．そこで，本研究では，像を計算することなく確認できる形で，可到達性の判別条件を導出する．この条件は，代数方程式を解くだけで確認できる

3.2　可到達性

実数体 $\mathbf{R}$ 上の $3n$ 変数 x_{i+1}, u_i, v_i $(i = 0, 1, \ldots, n-1)$ からなる多項式環を $\mathbf{R}[x, u, v](:= \mathbf{R}[x_1, \ldots, x_n, u_0, \ldots, u_{n-1}, v_0, \ldots, v_{n-1}])$ と表す．前章と同様にシステム (2.1) を考える．状態 $x[N+1]$ は，初期状態 $x_0 \in \mathbf{R}^n$ と入力列 $U_{N-1} \in \mathbf{R}^N$ のみに依存するため $x(N+1; x_0, U_N)$ と記述できる．さらに，$F^N(x_0, U_N) := f(\cdots f(f(x_0, u[0]), u[1]) \cdots, u[N-1])$ と定義すると，$x(N+1; x_0, U_N) = F^N(x_0, U_N)$ が成り立つ．初期状態 x_0 を $\mathbf{R}^n$ の元に固定したとき，$F^N(x_0, U_N)$ を $F^N_{x_0}(U_N)$ と表す．このとき，$F^N_{x_0}$ は $\mathbf{R}^N$ から $\mathbf{R}^n$ への多項式写像である．なお，$F^N(x_0, U_N)$ は $\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^N$ から $\mathbf{R}^n$ への多項式写像であることに注意されたい．

離散時間多項式システムの可到達性はつぎのように定義される．

定義 3.1. システム (2.1) が初期状態 $x_0 \in \mathbf{R}^n$ で可到達であるとは，任意の $x_f \in \mathbf{R}^n$ に対して，ある入力列 $U_{N+1} \in \mathbf{R}^{N+1}$ が存在して，$x(N+1; x_0, U_{N+1}) = x_f$ が成り立つことをいう．また，システムがすべての初期状態で可到達であれば，完全可到達であるという．

システムの可到達性は多項式写像 $F^n_{x_0} : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ の全射性を判別すれば確認できる．しかしながら，全射性を確認するためには，写像の像を求める必要があり，これは一般に困難である．そこで，ここでは，全射性の十分条件を導出する．この十分条件は，代数方程式を解けば確認できる．

つぎの補題より，多項式写像の全射性は単射性を確認することで評価できる．

補題 3.1. [44] $\mathbf{R}^n$ から $\mathbf{R}^n$ への多項式写像は単射であれば全射である．

補題 3.1 は，適当な多項式写像は単射であれば全射であることを意味している．しかしながら，一般に逆は成り立たない．そのような写像の例を示す．

例題 3.1. $u^2 + u^3$ で表現される多項式写像は全射であるが単射でない．

補題 3.1 より，多項式システム (2.1) の可到達性は，多項式写像 $F^n_{x_0} : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ の単射性を確認すれば判別できる．それでは，単射性の判別条件を導出することを考える．イデアル $\mathcal{J} \subset \mathbf{R}[u, v]$ をつぎのように定義する．

$$\mathcal{J} = \langle (F^n_{x_0})_1(u) - (F^n_{x_0})_1(v), \ldots, (F^n_{x_0})_n(u) - (F^n_{x_0})_n(v) \rangle$$

ただし，$(F^n_{x_0})_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ は $F^n_{x_0}$ の第 i 要素を表す．つぎに，イデアル $\mathcal{I} \subset \mathbf{R}[u, v]$ を

$$\mathcal{I} = \langle u_0 - v_0, u_1 - v_1, \ldots, u_{n-1} - v_{n-1} \rangle$$

と定義する．

多項式写像 $F^n_{x_0} : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ に対する単射性の定義を書き下すとつぎのようになる．

$$\{(u, v) \in \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n : (F^n_{x_0})_i(u) = (F^n_{x_0})_i(v), i = 1, \ldots, n\} = \{(u, v) \in \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n : u = v\}$$

この定義を，アフィン多様体を用いて表わすとつぎが成り立つ．

補題 3.2. 多項式写像 $F^n_{x_0} : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ が単射であるための必要十分条件は

$$\mathbf{V}(\mathcal{J}) = \mathbf{V}(\mathcal{I}) \tag{3.1}$$

が成り立つことである．ただし，$\mathbf{V}(\mathcal{J}), \mathbf{V}(\mathcal{I}) \subset \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n$ である．

補題 3.1，3.2 より，つぎの主結果を得る．

定理 3.1. 離散時間多項式システム (2.1) が初期状態 $x_0 \in \mathbf{R}^n$ で可到達であるための十分条件は，条件 (3.1) が成り立つことである．

アフィン代数多様体 $\mathbf{V}(\mathcal{J})$ はイデアル $\mathcal{J}$ の基底の共通零点集合であるため，$(F^n_{x_0})_i(u) - (F^n_{x_0})_i(v) = 0$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ を (u, v) について解けば，$\mathbf{V}(\mathcal{J})$ が求まる．つぎに，システムが可到達であるような初期状態が存在するための十分条件を導出する．$F^n(x_0, U_{n-1})$ の第 i 要素はつぎのように記述できる．

$$F^n_i(x_0, U_{n-1}) = \sum_{j=1}^{r_i} h_{i,j}(U_{n-1}) p_{i,j}(x_0)$$

ただし，$h_{i,j}$ $(i = 1, 2, \ldots, n; j = 1, 2, \ldots, r_i)$ は U_{n-1} の多項式, $p_{i,j}$ $(i = 1, 2, \ldots, n; j = 1, 2, \ldots, r_i)$ は x_0 の相異なる単項式である．正の整数 r_i は，システム (2.1) の f から一意に定まる．

イデアル $J \subset \mathbf{R}[u, v]$ をつぎのように定義する．

$$\begin{aligned} J &= \sum_{i=1}^{n} J_i, \\ J_i &= \langle h_{i,1}(u) - h_{i,1}(v), h_{i,2}(u) - h_{i,2}(v), \ldots, h_{i,r_i}(u) - h_{i,r_i}(v) \rangle \end{aligned} \tag{3.2}$$

このとき，つぎが成り立つ．

補題 3.3. ある初期状態 $x_0 \in \mathbf{R}^n$ が存在して，多項式写像 $F^n_{x_0} : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ が単射であるための必要十分条件は

$$\mathbf{V}(J) = \mathbf{V}(\mathcal{I}) \tag{3.3}$$

が成り立つことである．

補題 3.1，3.3 より，つぎを得る．

定理 3.2. ある初期状態 $x_0 \in \mathbf{R}^n$ が存在して， 多項式システム (2.1) が x_0 で可到達であるための十分条件は (3.3) が成り立つことである．

最後に，完全可到達性の十分条件を示す．まず，つぎの補題を与える．

補題 3.4. 各 $x_0 \in \mathbf{R}^n$ で，多項式写像 $F^n_{x_0} : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ が単射であるための必要十分条件は,

$$\mathbf{V}(\mathcal{J}) = \mathbf{V}(\mathcal{I}\mathbf{R}[x, u, v]) \tag{3.4}$$

が成り立つことである．ただし，$\mathcal{I}\mathbf{R}[x, u, v]$ は $\mathcal{I}$ と同じ基底を持つ $\mathbf{R}[x, u, v]$ のイデアルである．

証明. (十分性) アフィン多様体 $\mathbf{V}(\mathcal{J}) \subset \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n$ はつぎの集合である．

$$\{(x_0, u, v) \in \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n : F^n(x_0, u) = F^n(x_0, v)\}$$

条件 (3.4) は $\mathbf{V}(\mathcal{J})$ がつぎの集合と一致することを意味する．

$$\{(x_0, u, v) \in \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n : u = v\}$$

すなわち，x_0 の値に依らず，$F^n_{x_0}$ が単射であることを意味する．

(必要性) 対偶を示す．包含関係

$$\mathbf{V}(\mathcal{J}) \supset \mathbf{V}(\mathcal{I}\mathbf{R}[x, u, v])$$

が常に成り立つため，式 (3.4) が成り立たなければ，$(x_0, u, v) \in \mathbf{V}(\mathcal{J}) \setminus \mathbf{V}(\mathcal{I}\mathbf{R}[x, u, v])$ を満たす $x_0 \in \mathbf{R}^n$ が存在する．不定元 $x \in \mathbf{R}[x, u, v]$ に $x_0 \in \mathbf{R}^n$ を代入する写像を $\varphi_{x_0} : \mathbf{R}[x, u, v] \to \mathbf{R}[u, v]$ すると，

$$\mathbf{V}(\mathcal{J}) \cap \mathbf{V}(\mathrm{Ker}\varphi_{x_0}) \supsetneq \mathbf{V}(\mathcal{I}\mathbf{R}[x, u, v]) \cap \mathbf{V}(\mathrm{Ker}\varphi_{x_0})$$

が成り立つ．また，補題 A.2，A.1 より, つぎを得る．

$$\mathbf{V}(\mathcal{J} + \mathrm{Ker}\varphi_{x_0}) \supsetneq \mathbf{V}(\mathcal{I}\mathbf{R}[x, u, v] + \mathrm{Ker}\varphi_{x_0})$$
$$\mathbf{I}(\mathbf{V}(\mathcal{J} + \mathrm{Ker}\varphi_{x_0})) \subsetneq \mathbf{I}(\mathbf{V}(\mathcal{I}\mathbf{R}[x, u, v] + \mathrm{Ker}\varphi_{x_0}))$$

さらに，補題 A.9，B.4 を用いると

$$\varphi_{x_0}(\mathbf{I}(\mathbf{V}(\mathcal{J} + \mathrm{Ker}\varphi_{x_0}))) \subsetneq \varphi_{x_0}(\mathbf{I}(\mathbf{V}(\mathcal{I}\mathbf{R}[x, u, v] + \mathrm{Ker}\varphi_{x_0})))$$
$$\mathbf{I}(\mathbf{V}(\varphi_{x_0}(\mathcal{J}))) \subsetneq \mathbf{I}(\mathbf{V}(\varphi_{x_0}(\mathcal{I}\mathbf{R}[x, u, v])))$$

となり，補題 A.1 よりつぎが成り立つ．

$$\mathbf{V}(\varphi_{x_0}(\mathcal{J})) \supsetneq \mathbf{V}(\varphi_{x_0}(\mathcal{I}\mathbf{R}[x, u, v]))$$

任意の $x_0 \in \mathbf{R}^n$ に対して，$\varphi_{x_0}(\mathcal{I}\mathbf{R}[x, u, v]) = \mathcal{I}$ が成り立つため，

$$\mathbf{V}(\varphi_{x_0}(\mathcal{J})) \supsetneq \mathbf{V}(\mathcal{I})$$

となる．したがって，式 (3.1) が成り立たず，$x_0 \in \mathbf{R}^n$ で多項式写像 $F^n_{x_0} : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ は単射でない． □

補題 3.1，3.4 より，つぎの定理が成り立つ．

定理 3.3. 多項式システム (2.1) が完全可到達であるための十分条件は式 (3.4) が成り立つことである．

例題 3.2. つぎのシステムを考える．

$$x[t+1] = \begin{bmatrix} x_2[t] + (1 + x_2[t])u^2[t] \\ -x_1[t] + x_2[t] + x_3[t] + x_2[t]u^2[t] \\ x_1[t] - x_3[t] + u^2[t] + u^3[t] \end{bmatrix},\ x[0] = x_0$$

このシステムに対して，以下の可到達性を確認する．

a). 定理 3.2 を用いて，システムが可到達であるような初期状態が存在するかどうかを確認する．

b). 定理 3.1 を用いて原点での可到達性を確認する．

c). 定理 3.3 の完全可到達性の十分条件 (3.4) を確認する．

Case a): 条件 (3.3) を確認するために，式 (3.2) のイデアル $J \subset \mathbf{R}[u, v]$ を計算する．イデアル J はつぎのように求まる．

$$\begin{aligned} J = \langle & u_1^2u_2^2 + u_1^2 - (v_1^2v_2^2 + v_1^2), u_0^3u_2^2 + u_2^2 + u_0^3 - (v_0^3v_2^2 + v_2^2 + v_0^3), u_1^2u_2^2 - v_1^2v_2^2, \\ & u_0^2u_1^2u_2^2 + u_1^2u_2^2 + u_0^2u_1^2 + u_1^2 - (v_0^2v_1^2v_2^2 + v_1^2v_2^2 + v_0^2v_1^2 + v_1^2), \\ & -u_1^2 + v_1^2, u_0^2u_1^2u_2^2 + u_1^2u_2^2 - (v_0^2v_1^2v_2^2 + v_1^2v_2^2), -u_1^2u_2^2 + v_1^2v_2^2, u_0^3u_2^2 + u_1^3 - (v_0^3v_2^2 + v_1^3), \\ & u_0^2u_1^2 + u_1^2 - (v_0^2v_1^2 + v_1^2), u_2^3 + u_2^2 - u_1^3 + u_0^3 - (v_2^3 + v_2^2 - v_1^3 + v_0^3)\rangle \end{aligned}$$

イデアル $\mathcal{I} \subset \mathbf{R}[u, v]$ をつぎのように定義する．

$$\mathcal{I} = \langle u_0 - v_0, u_1 - v_1, u_2 - v_2\rangle$$

アフィン多様体 $\mathbf{V}(J) \subset \mathbf{R}^3 \times \mathbf{R}^3$ を計算すると，$\mathbf{V}(J) = \mathbf{V}(\mathcal{I})$ が成り立つ．したがって，定理 3.2 より，ある初期状態が存在して，システムはその初期状態で可到達である．

Case b): 定理 3.1 を用いて，システムが原点で可到達であることを示す．条件 (3.1) を確認するために，式 (3.4) のイデアル $\mathcal{J} \subset \mathbf{R}[x, u, v]$ を計算するとつぎのようになる．

$$\begin{aligned} \mathcal{J} = \langle & (u_1^2u_2^2 + u_1^2)x_3 + (u_0^2u_1^2u_2^2 + u_1^2u_2^2 + u_0^2u_1^2 + u_1^2)x_2 + (-u_1^2u_2^2 - u_1^2)x_1 + u_0^3u_2^2 + u_2^2 + u_0^3 \\ & -((v_1^2v_2^2 + v_1^2)x_3 + (v_0^2v_1^2v_2^2 + v_1^2v_2^2 + v_0^2v_1^2 + v_1^2)x_2 + (-v_1^2v_2^2 - v_1^2)x_1 + v_0^3v_2^2 + v_2^2 + v_0^3), \\ & u_1^2u_2^2x_3 + (u_0^2u_1^2u_2^2 + u_1^2u_2^2)x_2 - u_1^2u_2^2x_1 + u_0^3u_2^2 + u_1^3 - (v_1^2v_2^2x_3 + (v_0^2v_1^2v_2^2 + v_1^2v_2^2)x_2 \\ & -v_1^2v_2^2x_1 + v_0^3v_2^2 + v_1^3), u_1^2x_3 + (u_0^2u_1^2 + u_1^2)x_2 - u_1^2x_1 + u_2^3 + u_2^2 - u_1^3 + u_0^3 \\ & -(v_1^2x_3 + (v_0^2v_1^2 + v_1^2)x_2 - v_1^2x_1 + v_2^3 + v_2^2 - v_1^3 + v_0^3)\rangle \end{aligned}$$

不定元 x に $0 \in \mathbf{R}^3$ を代入する写像を $\varphi_0 : \mathbf{R}[x,u,v] \to \mathbf{R}[u,v]$ とすると，その像 $\varphi_0(\mathcal{J}) \subset \mathbf{R}[u,v]$ はつぎのように計算できる．

$$\begin{aligned}\varphi_0(\mathcal{J}) = \langle & u_0^3u_2^2 + u_2^2 + u_0^3 - (v_0^3v_2^2 + v_2^2 + v_0^3), \\ & u_0^3u_2^2 + u_1^3 - (v_0^3v_2^2 + v_1^3), u_2^3 + u_2^2 - u_1^3 + u_0^3 - (v_2^3 + v_2^2 - v_1^3 + v_0^3)\rangle\end{aligned}$$

アフィン多様体 $\mathbf{V}(\varphi_0(\mathcal{J})) \subset \mathbf{R}^3 \times \mathbf{R}^3$ は $\mathbf{V}(\varphi_0(\mathcal{J})) = \mathbf{V}(\mathcal{I})$ を満たす．したがって，定理 3.1 より，システムは原点で可到達である．

Case c): 完全可到達性の十分条件を確認する．$\mathbf{V}(\mathcal{J}) \supsetneq \mathbf{V}(\mathcal{I}\mathbf{R}[x,u,v])$ を得るため，十分条件 (3.4) を満たさない．実際，条件 (3.1) が成りたたない初期状態が存在する．例えば，$x_0 := (1,0,0)^{\mathrm{T}}$ とすると $\mathbf{V}(\varphi_{x_0}(\mathcal{J})) \supsetneq \mathbf{V}(\mathcal{I})$ を得る．ただし，$\varphi_{x_0} : \mathbf{R}[x,u,v]^n \ni x \mapsto x_0 \in \mathbf{R}[u,v]$ である．したがって，初期状態 $(1,0,0)^{\mathrm{T}}$ でシステムは十分条件 (3.1) を満たさない．

3.3　おわりに

離散時間多項式システムの可到達性に対して，十分条件を導出した．ここでは，可到達性と可観測性がそれぞれ多項式写像の全射性と単射性として解釈できることから，多項式写像の性質を用いた判別条件を導出した．具体的には，ある単射な多項式写像は全射であるという性質を用いた．この性質より，前章で求めた単射性の判別条件を，可到達解析に応用できる．以上をまとめると，多項式写像の単射性を確認する形で，多項式システムの可到達性に対する判別条件を導出した．

第4章　離散時間多項式システムの有限時間安定性

4.1　はじめに

非線形システムの安定解析は，システム制御理論において最も基本的な問題の一つである．その中でも，離散時間非線形システムの有限時間安定性についてはあまり研究されておらず，必要十分条件も知られていない．線形システムの場合には，Cayley–Hamilton の定理より,「システムの次元の数」だけ線形写像を合成すれば有限時間安定性を判別できる．しかしながら，非線形システムの場合には，有限時間安定性の判別に十分な非線形写像の合成回数の上界が明らかでない．そこで，本研究では，システムのクラスを多項式に制限する代わりに代数幾何学の次元論を用いることで，有限時間安定性の必要十分条件を導出する．得られた条件は，「システムの次元の数」だけ多項式写像を合成すれば判別できるため確認が容易である．これは，線形システムに対する判別条件の自然な拡張となっている．さらに，得られた条件を用いて，離散時間多項式システムに対する有限時間整定制御器を設計する．

4.2　有限時間安定性

ここでは，つぎの自律系を考える．

$$x[t+1] = f(x[t]),\ x[0] = x_0 \tag{4.1}$$

ただし，$f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ は多項式写像であり，$f(0) = 0$ とする．ここで，$f^0 : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ を恒等写像とし，$f^{t+1} := f \circ f^t$ $(t \in \mathbf{N})$ とすると，$t+1$ ステップ目のシステムの状態を

$$x[t+1] = f^{t+1}(x_0)$$

と記述できる．

システム (4.1) に対して，有限時間安定性をつぎのように定義する．

定義 4.1. ある $N \in \mathbf{N}$ が存在して $f^N(\mathbf{R}^n) = \{0\}$ であれば，システム (4.1) の原点は有限時間安定であるという．

有限時間安定性の定義によっては，定義 4.1 の N を初期状態の関数とする場合がある [53]. 定義 4.1 では，すべての初期状態に対してステップ数の上界を一様としていることに注意されたい．それでは有限時間安定性の判別条件を導出する．

有限時間安定性の判別条件を導出するために，つぎを明らかにしておく．

補題 4.1. 多項式写像 $f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ はつぎを満たす.

$$\mathbf{R}^n \supset \overline{f(\mathbf{R}^n)} \supset \overline{f^2(\mathbf{R}^n)} \supset \cdots \supset \overline{f^n(\mathbf{R}^n)} = \overline{f^{n+1}(\mathbf{R}^n)} = \cdots \tag{4.2}$$

証明. 多項式写像は Zarisiki 位相で連続であるため，任意の部分集合 $A \subset \mathbf{R}^n$ に対して，

$$f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)}$$

が成り立つ．ただし，$\overline{A}$ は A の Zariski 閉包である．他方，$A \subset \overline{A}$ より，$f(A) \subset f(\overline{A})$ を得る．したがって，つぎが成り立つ.

$$f(A) \subset f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)}$$

各項の Zariski 閉包を取ると

$$\overline{f(A)} \subset \overline{f(\overline{A})} \subset \overline{\overline{f(A)}}$$

となり，位相空間の閉包の性質 $\overline{\overline{f(A)}} = \overline{f(A)}$ より，

$$\overline{f(A)} = \overline{f(\overline{A})} \tag{4.3}$$

を得る．

多項式写像 $f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ に対して，$\mathbf{R}^n \supset f(\mathbf{R}^n)$ が成り立つため，f の合成を繰り返すと，降鎖列

$$\mathbf{R}^n \supset f(\mathbf{R}^n) \supset f^2(\mathbf{R}^n) \supset \cdots$$

を得る．さらに，各項の Zariski 閉包を取ると，つぎのアフィン多様体の降鎖列を得る．

$$\mathbf{R}^n \supset \overline{f(\mathbf{R}^n)} \supset \overline{f^2(\mathbf{R}^n)} \supset \cdots \tag{4.4}$$

式 (4.3) を $\overline{f^k(\mathbf{R}^n)}$ に繰り返し用いると

$$\overline{f^k(\mathbf{R}^n)} = \overline{f^{k-1}(\overline{f(\mathbf{R}^n)})} = \overline{f^{k-2}(f(\overline{f(\mathbf{R}^n)}))} = \cdots$$

が成り立つ．これを式 (4.4) の各項に用いると，つぎを得る．

$$\mathbf{R}^n \supset \overline{f(\mathbf{R}^n)} \supset \overline{f(\overline{f(\mathbf{R}^n)})} \supset \overline{f(\overline{f(\overline{f(\mathbf{R}^n)})})} \supset \cdots \tag{4.5}$$

ただし，式 (4.4) と式 (4.5) の各項は集合として等しいことに注意する．アフィン多様体 $\mathbf{R}^n$ は既約なため，命題 A.13 より，$\overline{f(\mathbf{R}^n)}$ も既約である．さらに，命題 A.13 を適用すると $\overline{f(\overline{f(\mathbf{R}^n)})}$ も既約である．したがって，式 (4.5) は既約なアフィン代数多様体の降鎖列である．加えて，この降鎖列は真減少列である．実際に，あるアフィン代数多様体 $V \subset \mathbf{R}^n$ に対して，$\overline{f(V)} = V$ が成り立つとすると，

$$\overline{f(\overline{f(V)})} = \overline{f(V)} = V$$

を得る．式 (4.4) と式 (4.5) の各項は集合として等しいため，式 (4.4) も既約なアフィン多様体の真減少列であることがわかる．命題 A.18 によれば, 真減少列 (4.4) の長さの上界は n である．したがって，式 (4.2) を得る．$\square$

補題 4.2. 空でない部分集合 $A \subset \mathbf{R}^n$ の Zariski 閉包が $\{0\}$ であれば，$A = \{0\}$ である．

証明. $\mathbf{R}^n$ の部分集合で $\{0\}$ に含まれるのは，$\{0\}$ もしくは空集合である．空集合もアフィン多様体であるため，その Zariski 閉包も空集合である．したがって，$\mathbf{R}^n$ の部分集合で，Zariski 閉包が $\{0\}$ となるのは $\{0\}$ 自身のみである．$\square$

それでは，有限時間安定性の判別条件を示す．

定理 4.1. 多項式システム (4.1) の原点が有限時間安定であるための必要十分条件は，$f^n(x)$ のすべての要素が恒等的に零となることである．

証明. （十分性）$f^n(x) = 0$ であれば，$f^n(\mathbf{R}^n) = 0$ である．したがって，定義 4.1 において，$s = n$ とおけば良い．

（必要性）まず，$s \leq n$ の場合を考える．定義 4.1 より，多項式システム (4.1) の原点が有限時間安定であれば，ある $s \in \mathbf{N}$ が存在して，$f^s(\mathbf{R}^n) = \{0\}$ が成り立つ．いま，$f(0) = 0$ を用いると，つぎを得る．

$$f^n(\mathbf{R}^n) = f^{n-s}(f^s(\mathbf{R}^n)) = f^{n-s}(\{0\}) = \{0\}$$

$\mathbf{R}$ は無限体であるため，$f^n(x)$ のすべての要素は恒等的に零である．

つぎに，$s > n$ の場合について考える．$\{0\} \subset \mathbf{R}^n$ はアフィン代数多様体であるため，$f^s(\mathbf{R}^n) = \{0\}$ より

$$\overline{f^s(\mathbf{R}^n)} = \overline{\{0\}} = \{0\}$$

を得る．補題 4.1 より，$s > n$ に対して，$\overline{f^n(\mathbf{R}^n)} = \overline{f^s(\mathbf{R}^n)}$ であるため，$\overline{f^n(\mathbf{R}^n)} = \{0\}$ が成り立つ．したがって，補題 4.2 より，$f^n(\mathbf{R}^n) = \{0\}$ を得る．すなわち，$f^n(x)$ のすべての要素は恒等的に零である．$\square$

例題 4.1. つぎの形で表現される n 次元多項式システムの原点は有限時間安定である．

$$x[t+1] = \begin{bmatrix} p_1(x)q_1(x_2,\ldots,x_n) \\ p_2(x)q_2(x_3,\ldots,x_n) \\ \vdots \\ p_{n-1}(x)q_{n-1}(x_n) \\ 0 \end{bmatrix}$$

ただし，p_i, q_i $(i=1,\ldots,n)$ は多項式であり，また $q_i(0)=0$ $(i=1,\ldots,n-1)$ である．右辺の形から，$t=0,1,2,\cdots$ と時刻が進むにつれて，$x_n, x_{n-1}, x_{n-2}, \cdots$ が順に 0 になっていくことが容易に確かめられる．これは，対角要素が 0 の上三角行列を係数行列に持つ線形システムの一般化になっている．また，このシステムを等価変換して得られるシステムの原点も有限時間安定である．

定理 4.1 の応用としては，たとえば多項式型状態フィードバックによる有限整定制御が考えられる．多項式システムに対して多項式型状態フィードバック制御を施すと，閉ループ系も多項式システムになる．したがって，定理 4.1 により，閉ループ系が有限整定になることは，すべての閉ループ軌道が時刻 n で原点に到達することと同値であり，この条件を使って，有限整定制御を実現する状態フィードバック制御則が設計できる場合がある．

例題 4.2. $n=2$ としたつぎの離散時間多項式システムを考える．

$$x[t+1] = \begin{bmatrix} -0.2x_1^2[t] + x_2[t] \\ 0.5x_1[t] \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u[t] \tag{4.6}$$

まず，すべての $t \in \mathbf{N}$ において $u[t]=0$ とした場合のシステム (4.6) の原点での有限時間安定を判別する．すなわち，$f \in \mathbf{R}[x_1,x_2]^2$ がつぎで与えられる場合を考える．

$$f(x) = \begin{bmatrix} -0.2x_1^2 + x_2 \\ 0.5x_1 \end{bmatrix} \tag{4.7}$$

$f^2(x)$ を計算するとつぎのようになる．

$$f^2(x) = \begin{bmatrix} (-0.2x_1^2 + x_2)^2 + 0.5x_1 \\ -0.1x_1^2 + 0.5x_2 \end{bmatrix}$$

$f^2(x) \neq 0$ であるため，定理 4.1 より，$u[t]=0$ とした場合，システム (4.6) の原点は有限時間安定でないことがわかる．

つぎに，有限整定制御器を設計することを考える．ただし，定理 4.1 の結果を用いるため，$u[t]$ を $x[t]$ の多項式関数とする．式 (4.7) において，$f_i^2(x)$ $(i = 1, 2)$ の最大次数は 4 である．そこで，$u[t]$ を 4 次以下の $x[t]$ の多項式

$$u(x[t]) = \sum_{i=0}^{4} \sum_{j=0}^{4-i} a_{i,j} x_1^i[t] x_2^j[t] \tag{4.8}$$

とする．式 (4.8) の $u(x[t])$ を用いて $x[2]$ を計算し，$x[2] = 0$ となるような係数 $a_{i,j}$ $(i, j = 1, \ldots, 4)$ を選ぶと

$$u[t] = 0.008x_1^4[t] - 0.08x_1^2[t]x_2[t] + 0.2x_2^2[t] - 0.5x_1[t]$$

を得た．したがって，閉ループシステムの原点が有限時間安定となるような制御器を設計できた．

4.3 おわりに

本章では，離散時間多項式システムの有限時間安定性を解析した．まず，代数幾何学の結果を用いることで，多項式写像に対して，線形代数における Cayley-Hamilton の定理の一種の拡張を行った．そして，その拡張を用いて，有限時間安定性の必要十分条件を導出した．得られた条件は，システムの次元の数だけ多項式関数を合成することで判別でき，確認が容易である．最後に，得られた結果に基づいて，有限時間整定制御器の設計例を示した．

第5章　Hamilton-Jacobi方程式の解析

5.1　はじめに

Hamilton 正準方程式や Hamilton–Jacobi 方程式（HJE）については，解析力学の分野でよく研究されている．これらの方程式はシステム制御理論においても重要であり，様々なアプローチで解析が行われている [45,46,54–63]．例えば，ある非線形最適制御問題において，停留条件を満たす制御入力は正準方程式の共状態を用いて与えられ，最適制御入力は HJE の解の勾配を用いて与えられる．最適制御問題のクラスを，線形システムかつ 2 次形式評価関数に限定すれば，これらの方程式は Riccati 方程式 [1,45,64,65] に帰着する．

システム制御理論の分野では，正準方程式の共状態を時間や状態の関数として求める問題を扱うことがある．そのような共状態の例としては，HJE の解の勾配が考えられる．共状態を時間や状態の関数とすると，Hamilton 正準方程式は非線形連立偏微分方程式となる．したがって，そのような共状態を得るためには非線形連立偏微分方程式を解かなければならない．しかしながら，一般に，非線形偏微分方程式は解析的にも数値的にも解くことが難しい．

そこで，本章では，Hamiltonian を共状態の多項式かつ状態と時間の有理型関数に制限する代わりに，求めたい共状態が満たすべき代数方程式を見つけることを考える．そのような代数方程式を見つけることができれば，代数方程式を解くだけで共状態を時間や状態の関数として求めることができる．すなわち，非線形偏微分方程式を解くことなく共状態が求まる．偏微分方程式に比べると，代数方程式を数値的に解くことは容易である．共状態を定義する代数方程式を解析的に解くことが難しい場合でも，各時刻各状態ごとに代数方程式を数値的に解けば，そのときどきにおける共状態の値は求まる．

Hamilton 正準方程式と同様に，HJE に対しても，解の勾配が満たす代数方程式を見つけることを考える．一般に，HJE の解の勾配は，Hamilton 正準方程式の共状態であることが知られている．この事実に基づいて，本章で求める共状態が解の勾配になるための条件や，共状態を定義する代数方程式が解の勾配を定義するための条件を導出する．

5.2 記法

本章では，$x = [x_1, x_2, \ldots, x_n]^{\mathrm{T}}$ を n 次元の状態ベクトルとする．スカラー値関数 $V(t,x)$ の各 x_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ による偏導関数を並べた行ベクトルを $\partial V/\partial x$ で表す．その転置ベクトル $(\partial V/\partial x)^{\mathrm{T}}$ を ∇V で表す．$\mathbf{R} \times \mathbf{R}^n$ のある領域で定義された (t,x) の有理型関数の集合を K_t で表す．これは体である．体 K_t 上の p_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ を不定元とする多項式環を $K_t[p]$ とする．ただし， $p = [p_1, p_2, \ldots, p_n]^{\mathrm{T}}$ である．さらに，K_t の代数的閉包を $\bar{K}_t$ とする．ここでは，イデアル $I \subset K_t[p]$ が定義するアフィン多様体 $\mathbf{V}(I)$ は $\bar{K}_t \times \bar{K}_t^n$ の部分集合であるとする．

5.3 Hamilton 正準方程式の代数的共状態

5.3.1 Hamilton 正準方程式

Hamilton 正準方程式は，つぎで記述される方程式である．

$$\frac{dx}{\mathrm{d}t}(t) = \left(\frac{\partial H}{\partial p}\right)^{\mathrm{T}} (t, x(t), p(t)) \tag{5.1}$$

$$\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t}(t) = -\left(\frac{\partial H}{\partial x}\right)^{\mathrm{T}} (t, x(t), p(t)) \tag{5.2}$$

ただし，$H(t,x,p)$ は Hamiltonian と呼ばれるスカラー値関数である．ここでは p を (t,x) の関数 $p(t,x)$ として得ることを考える．このような $p(t,x)$ を求める問題は，例えば，有限評価区間の最適制御問題を解く際に現れる．

例題 5.1 (有限評価区間の非線形最適制御問題). つぎの状態方程式と評価関数を考える．

$$\begin{aligned}
&\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(t) = f(t, x(t)) + g(t, x(t))u(t),\ x(0) = x_0 \\
&J = \varphi(x(t_f)) + \frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_f} \left(q(t, x(t)) + ||u(t)||_2^2\right) \mathrm{d}t
\end{aligned}$$

ただし，$f : \mathbf{R} \times \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$, $g : \mathbf{R} \times \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^{n\times m}$, $q : \mathbf{R} \times \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$, $\varphi : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ である．また，$f(t, 0) = 0, \forall t \in \mathbf{R}$ とし，$q(t,x)$ は t を非負の実数に固定したとき x に関して準正定であり，x を $\mathbf{R}^n$ の各元に固定したとき t に関して一様有界であるとする．このとき，停留条件は 正準方程式 (5.1)，(5.2) とつぎの横断性条件

$$p(t_f) = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)^{\mathrm{T}} (x(t_f)) \tag{5.3}$$

を用いて記述される．ただし，正準方程式 (5.1)，(5.2) において，Hamiltonian はつぎで与えられる．

$$H(t,x,p) = p^{\mathrm{T}} f(t,x) - p^{\mathrm{T}} g(t,x) g^{\mathrm{T}}(t,x) p/2 + q(t,x)$$

停留条件を満たす制御入力は，正準方程式 (5.1)，(5.2) と横断性条件 (5.3) を満たす p を用いて，$u = -g^{\mathrm{T}} p$ と与えられる．

正準方程式を満たす $p(t,x)$ が満たすべき方程式を求める．式 (5.1) に $p = p(t,x)$ を代入すると

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(t) = \frac{\partial H}{\partial p}(t, x, p(t,x)) \tag{5.4}$$

が成り立つ．初期状態が $x(t_0) = x_0$ かつ初期時刻が t_0 のときの式 (5.4) の解軌道を $x(t; t_0, x_0)$ で表す．ここでは，$x(t; t_0, x_0)$ が任意の領域 D の元 (t_0, x_0) に対して存在すると仮定する．式 (5.2) の p と x に $p(t, x(t; t_0, x_0))$ と $x(t; t_0, x_0)$ をそれぞれ代入すると，

$$\frac{\partial p}{\partial t}(t, x(t; t_0, x_0)) + \frac{\partial p}{\partial x}(t, x(t; t_0, x_0)) \left(\frac{\partial H}{\partial p}\right)^{\mathrm{T}} = -\left(\frac{\partial H}{\partial x}\right)^{\mathrm{T}} \tag{5.5}$$

が成り立つ．ただし，H の各偏導関数の引数は $(t, x(t; t_0, x_0), p(t, x(t; t_0, x_0)))$ である．これは，任意の $(t_0, x_0) \in D$ に対して成り立つため，

$$\frac{\partial p}{\partial t}(t,x) + \frac{\partial p}{\partial x}(t,x) \left(\frac{\partial H}{\partial p}\right)^{\mathrm{T}} (t, x, p(t,x)) \equiv -\left(\frac{\partial H}{\partial x}\right)^{\mathrm{T}} (t, x, p(t,x)) \tag{5.6}$$

を D 上で得る．したがって，式 (5.6) を p について解けば，$p(t,x)$ が求まる．しかしながら，式 (5.6) は偏微分方程式であるため，一般に解くことが難しい．そこで，本研究では問題のクラスを制限することで，$p(t,x)$ が満たす方程式を見つけることを考える．具体的には $H \in K_t[p]$ とし，つぎのようなクラスに属する $p(t,x)$ を求める問題を考える．

定義 5.1. ある領域 $D \subset \mathbf{R} \times \mathbf{R}^n$ で定義された解析関数 $\rho : D \to \mathbf{C}$ が K_t 上の代数関数であるとは，ある非零の既約多項式 $\psi \in K_t[X]$ が存在して，

$$\psi(t, x, \rho(t,x)) = 0$$

がすべての $(t,x) \in D$ に対して成り立つことをいう．

定義 5.2. 式 (5.6) を満たすベクトル値関数 $p(t,x)$ が代数的共状態であるとは，p_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ がすべて K_t 上の代数関数であることをいう．

注意 5.1. 以降では，適宜 p の引数を省略する．関数の引数を (t,x,p) と記述したときは p の引数も (t,x) であり，関数の引数を $(t, x(t; t_0, x_0), p)$ と記述したときは p の引数も $(t, x(t; t_0, x_0))$ である．

5.3.2 代数的共状態

ここでは，Hamilton 正準方程式 (5.4)，(5.5) が代数的共状態を持つための必要十分条件を明らかにする．2 つの関数 Φ と Ψ の Poisson 括弧はつぎのように定義される．

$$\{\Phi, \Psi\} := \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x_i} \frac{\partial \Psi}{\partial p_i} - \frac{\partial \Phi}{\partial p_i} \frac{\partial \Psi}{\partial x_i} \right)$$

ここで，Φ と Ψ が多項式環 $K_t[p]$ の元であれば，$K_t[p]$ が偏導関数で閉じていることから $\{\cdot, \cdot\} : K_t[p] \times K_t[p] \to K_t[p]$ が成り立つ．Poisson 括弧を用いて，イデアルの H 不変性を定義する．

定義 5.3. 与えられた $H \in K_t[p]$ に対して，イデアル $I \subset K_t[p]$ が H 不変であるとは，任意の $\Phi \in I$ に対して，

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \{\Phi, H\} \in I$$

が成り立つことをいう．

定義 5.1，5.2 より，代数的共状態は陰関数として定義されていることがわかる．すなわち，代数的共状態は，存在すれば代数方程式を解くだけで求まる．補題 B.5 より，つぎの 0 次元イデアルは陰関数を定義する．

定義 5.4. イデアル $I \subset K_t[p]$ が 0 次元イデアルであるとは，$\mathbf{V}(I) \subset \bar{K}_t \times \bar{K}_t^n$ が有限集合であることをいう．

代数的共状態の存在性は，0 次元イデアルの H 不変性で特徴づけられる．

定理 5.1. ある $\mathbf{R} \times \mathbf{R}^n$ の領域で Hamilton 正準方程式 (5.4)，(5.5) が代数的共状態を持つための必要十分条件は，H 不変な 0 次元イデアルが存在することである．

証明. （必要性）代数的共状態を $p(t, x) \in \bar{K}_t^n$ とする．K_t は適当な領域 $U_0 \subset \mathbf{R} \times \mathbf{R}^n$ で定義された有理型関数であるため，$p(t, x)$ は U_0 内の適当な領域で解析的である．同様に，$(\partial H/\partial p)^{\mathrm{T}}(t, x, p) \in (K_t[p])^n$ の各要素も $U_0 \times \mathbf{R}^n$ 内の適当な領域で解析的である．解析関数の合成関数も解析関数 [66] であるため，ある領域 $U \subset U_0$ が存在して，$(\partial H/\partial p)^{\mathrm{T}}(t, x, p(t, x))$ の各要素は U で解析的である．したがって，ある領域 $D \subset U_0$ が存在して，D 内で式 (5.4) の解は解析的かつ一意に存在する [67]．式 (5.5) は，領域 U_0 を D に制限しても成り立つことに注意する．

H 不変な 0 次元イデアルが存在することを示す．$p \in K_t[p]$ に代数的共状態 $p(t, x) \in \bar{K}_t^n$ を代入する写像を $\varphi : K_t[p] \to K_t[p]$ とする．命題 B.1 より，$\mathrm{Ker}\varphi$ は極大イデアル

であり，n 個の元で生成される．また，極大イデアルは 0 次元イデアルである [22, 68]．この 0 次元イデアルを $\mathrm{Ker}\varphi := \langle F_1, F_2, \ldots, F_n \rangle$ で表す．$F_i \in \mathrm{Ker}\varphi$ $(i = 1, \ldots, n)$ より，$F = [F_1, F_2 \ldots, F_n]^{\mathrm{T}}$ に対して $F(t, x, p(t, x)) = 0$ が成り立つ．この等式は，初期条件を $(t_0, x_0) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R}^n$ とした，式 (5.4) の解 $x(t; t_0, x_0)$ を $x \in K_t^n$ に代入しても成り立つ．すなわち，$F(t, x(t; t_0, x_0), p(t, x(t; t_0, x_0))) = 0$ を得る．この等式を t について微分すると，式 (5.4), (5.5) が $(t_0, x_0) \in D$ を初期条件とする解であることから，

$$
\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}t}(t, x(t; t_0, x_0), p) &= \frac{\partial F}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial x}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(t; t_0, x_0) + \frac{\partial F}{\partial p}\left(\frac{\partial p}{\partial t} + \frac{\partial p}{\partial x}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(t; t_0, x_0)\right) \\
&= \frac{\partial F}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial x}\left(\frac{\partial H}{\partial p}\right)^{\mathrm{T}} - \frac{\partial F}{\partial p}\left(\frac{\partial H}{\partial x}\right)^{\mathrm{T}} = 0
\end{aligned}
$$

が成り立つ．ただし，F や H の各偏微分の引数は $(t, x(t; t_0, x_0), p)$ であり，p の偏微分の引数は $(t, x(t; t_0, x_0))$ である．最後の式の第 i 成分は

$$
\frac{\partial F_i}{\partial t}(t, x(t; t_0, x_0), p) + \{F_i, H\}(t, x(t; t_0, x_0), p)
$$

と記述できるため，

$$
\frac{\partial F_i}{\partial t}(t_0, x(t; t_0, x_0), p) + \{F_i, H\}(t_0, x(t; t_0, x_0), p) = 0 \quad (i = 1, \ldots, n) \tag{5.7}
$$

を得る．式 (5.7) は，任意の $(t_0, x_0) \in D$ に対して成り立つため，$K_t \times K_t^n$ の元 (t, x) に対して $\partial F_i/\partial t(t, x, p) + \{F_i, H\}(t, x, p) \equiv 0$ $(i = 1, \ldots, n)$ を得る．すなわち，$\partial F_i/\partial t + \{F_i, H\} \in \mathrm{Ker}\varphi = I$ であるため，補題 B.10 より 0 次元イデアル I は H 不変である．

（十分性）イデアル $I \subset K_t[p]$ を H 不変かつ 0 次元とする．ただし，K_t は領域 $D \subset \mathbf{R} \times \mathbf{R}^n$ 上で定義された (t, x) の有理型関数体である．また，式 (5.4) は任意の $(t_0, x_0) \in D$ と $p(t, x) \in \mathbf{V}(I) \subset \bar{K}_t \times \bar{K}_t^n$ に対して一意かつ解析的な解 $x(t; t_0, x_0)$ を持つとする．必要性の証明より，そのような D は必ず存在する．また，Hilbert 零点定理 [21, 22, 24] より，アフィン多様体 $\mathbf{V}(I) \subset \bar{K}_t \times \bar{K}_t^n$ は空集合ではない．

0 次元イデアル I が H 不変であれば，$p(t, x) \in \mathbf{V}(I)$ が式 (5.5) を満たすことを示す．定理 B.2 より，根基 $\sqrt{I}$ も H 不変であり，補題 B.5 より n 個の多項式 $F_1, \ldots, F_n \in K_t[p]$ が存在して，$\sqrt{I} = \langle F_1, \ldots, F_n \rangle$ が成り立つ．$F := [F_1, \ldots, F_n]^{\mathrm{T}}$ とすると，任意の $p(t, x) \in \mathbf{V}(I)(= \mathbf{V}(\sqrt{I}))$ に対して $F(t, x, p) = 0$ となり，これは x に $(t_0, x_0) \in D$ を初期条件とする解軌道 $x(t; t_0, x_0)$ を代入しても成り立つ．すなわち，$F(t, x(t; t_0, x_0), p(t, x(t; t_0, x_0))) = 0$ となる．この式を t について微分すると，$x(t; t_0, x_0)$ が式 (5.4) を満たすため，

$$
\frac{\partial F}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial x}\left(\frac{\partial H}{\partial p}\right)^{\mathrm{T}} + \frac{\partial F}{\partial p}\left(\frac{\partial p}{\partial t} + \frac{\partial p}{\partial x}\left(\frac{\partial H}{\partial p}\right)^{\mathrm{T}}\right) = 0 \tag{5.8}
$$

が成り立つ．ただし，F や H の各偏導関数の引数は $(t,x_0(t),p)$ であり，p の偏導関数の引数は $(t,x(t;t_0,x_0))$ である．式 (5.8) は，任意の $(t_0,x_0)\in D$ に対して成り立つため，$K_t\times K_t^n$ の元 (t,x) に対して

$$\frac{\partial F}{\partial t}+\frac{\partial F}{\partial x}\left(\frac{\partial H}{\partial p}\right)^{\mathrm{T}}+\frac{\partial F}{\partial p}\left(\frac{\partial p}{\partial t}(t,x)+\frac{\partial p}{\partial x}(t,x)\left(\frac{\partial H}{\partial p}\right)^{\mathrm{T}}\right)\equiv 0 \tag{5.9}$$

が成り立つ．ただし，F や H の各偏導関数の引数は (t,x,p) である．他方，$\sqrt{I}$ の H 不変性より，$(t,x)\in K_t\times K_t^n$ に対して

$$\frac{\partial F}{\partial t}(t,x,p)+\frac{\partial F}{\partial x}(t,x,p)\left(\frac{\partial H}{\partial p}\right)^{\mathrm{T}}(t,x,p)-\frac{\partial F}{\partial p}(t,x,p)\left(\frac{\partial H}{\partial x}\right)^{\mathrm{T}}(t,x,p)\equiv 0 \tag{5.10}$$

が成り立つ．式 (5.9) と式 (5.10) の右辺は等しいため，

$$\frac{\partial F}{\partial p}(t,x,p)\left(\frac{\partial p}{\partial t}(t,x)+\frac{\partial p}{\partial x}(t,x)\left(\frac{\partial H}{\partial p}\right)^{\mathrm{T}}(t,x,p)\right)\equiv -\frac{\partial F}{\partial p}(t,x,p)\left(\frac{\partial H}{\partial x}\right)^{\mathrm{T}}(t,x,p)$$

となる．補題 B.5 より，Jacobi 行列 $\partial F/\partial p(t,x,p)$ は任意の $\mathbf{V}(I)$ の元に対して正則なため，式 (5.6) が成り立つ． □

定理 5.1 と命題 B.13，B.2 より，つぎが成り立つ．

系 5.1. ある $\mathbf{R}\times\mathbf{R}^n$ の領域で Hamilton 正準方程式 (5.4)，(5.5) が代数的共状態を持つための必要十分条件は，H 不変な 0 次元根基イデアルが存在することである．

系 5.2. ある $\mathbf{R}\times\mathbf{R}^n$ の領域で Hamilton 正準方程式 (5.4)，(5.5) が代数的共状態を持つための必要十分条件は，H 不変な極大イデアルが存在することである．

注意 5.2. Hamiltonian が時不変の場合にも代数的共状態を同様に定義でき，その存在条件を導ける．ただし，代数的共状態は状態のみの関数である．イデアル $I\subset\mathcal{K}[p]$ が H 不変であるとは，任意の $\Psi\in I$ に対して $\{\Psi,H\}\in I$ が成り立つことをいう．ただし，$\mathcal{K}$ は x の有理型関数体である．このとき，代数的共状態が存在するための必要十分条件は，H 不変な 0 次元イデアルが存在することである．

注意 5.3. 解析力学において，関数 F_i $(i=1,\ldots,n)$ が第一積分 [69] であるとは，$\mathbf{R}\times\mathbf{R}^n\times\mathbf{R}^n$ 上で恒等的に $\partial F_i/\partial t+\{F_i,H\}=0$ 成り立つことをいう．F_i $(i=1,\ldots,n)$ が第一積分であれば，イデアル $I=\langle F_1,\ldots,F_n\rangle$ は H 不変である．しかしながら，逆は一般に成り立たない．すなわち，イデアルの H 不変性は関数の可積分性よりも弱い．

あるイデアル $I=\langle F_1,\dots,F_s\rangle$ が H 不変であるかどうかは，補題 B.10 より関数 H と F_i の Poisson 括弧を計算すれば確認できる．Hamilton 正準方程式に対して H 不変な 0 次元イデアル $I=\langle F_1,\dots,F_s\rangle$ が見つかれば，代数的共状態 $p(t,x)$ は連立代数方程式 $F(t,x,p):=[F_1,\dots,F_s]^{\mathrm{T}}(t,x,p)=0$ を p について解けば求まる．このとき，解 $p(t,x)$ は $\mathbf{V}(I)\subset\bar{K}_t\times\bar{K}_t^n$ の元である．

さらに，各時刻，各状態における代数的共状態は，実数体 $\mathbf{R}$ 上の代数方程式を各点ごとに解けば求まる．各時刻，各状態 $(\hat{t},\hat{x})\in\mathbf{R}\times\mathbf{R}^n$ で $F(\hat{t},\hat{x},p)$ は $\mathbf{R}[p]^s$ に属する．すなわち，$F(\hat{t},\hat{x},p)=0$ は $\mathbf{R}$ 上の代数方程式である．$\mathbf{R}$ 上の代数方程式を解く方法としては，例えば Newton 法が知られている．また，$\mathbf{R}[p]$ に属するイデアルの Gröbner 基底 [21, 22, 70] は，$\mathbf{R}$ 上の代数方程式を解く際に役立つ．イデアルの Gröbner 基底を用いた代数方程式の数値解法も提案されている [22]．

H 不変性なイデアルを求めるためには，未知変数 (t,x) に対する連立偏微分方程式を解く必要がある．したがって，H 不変な 0 次元イデアルを見つけることは一般に難しい．そこで，ここでは逆問題的に，イデアルが H 不変かつ 0 次元イデアルであるための十分条件を与える．

定理 5.2. $g_i\in K_t[p_1]\backslash K_t$ $(i=1,2,\dots,n)$ を多項式とし，$F_1:=g_1$ と $F_i:=p_i-g_i$ $(i=2,\dots,n)$ を定義する．イデアル $I:=\langle F_1,\dots,F_n\rangle\subset K_t[p]$ が H 不変な 0 次元イデアルであるための十分条件は，つぎが成り立つことである．

$$\frac{\partial g_1}{\partial t}+\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial g_1}{\partial x_j}\frac{\partial H}{\partial p_j}-\frac{\partial g_1}{\partial p_1}\frac{\partial H}{\partial x_1}\in I$$
$$\frac{\partial g_i}{\partial t}+\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial g_i}{\partial x_j}\frac{\partial H}{\partial p_j}-\frac{\partial g_i}{\partial p_1}\frac{\partial H}{\partial x_1}-\frac{\partial H}{\partial x_i}\in I\quad(i=2,\dots,n)$$

証明. まず，Hilbert の零点定理 [21,22,24] より，$\mathbf{V}(g_1)\subset\bar{K}_t$ は空でない．また，$\mathbf{V}(g_1)$ は有限集合である．実際，$F_i=0$ より，任意の $p_1(t,x)\in\mathbf{V}(g_1)$ に対して，$p_i(t,x)=g_i(p_1(t,x))$ $(i=2,\dots,n)$ を得る．したがって，$\mathbf{V}(I)$ は有限集合，すなわち $I=\langle F_1,\dots,F_n\rangle$ は 0 次元イデアルである．

つぎに，

$$\frac{\partial F_1}{\partial t}+\{F_1,H\}=\frac{\partial g_1}{\partial t}+\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial g_1}{\partial x_j}\frac{\partial H}{\partial p_j}-\frac{\partial g_1}{\partial p_1}\frac{\partial H}{\partial x_1}\in I$$
$$\frac{\partial F_i}{\partial t}+\{F_i,H\}=\frac{\partial g_i}{\partial t}+\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial g_i}{\partial x_j}\frac{\partial H}{\partial p_j}-\frac{\partial g_i}{\partial p_1}\frac{\partial H}{\partial x_1}-\frac{\partial H}{\partial x_i}\in I\quad(i=2,\dots,n)$$

より，I は H 不変である． □

注意 5.4. 定理 5.2 の H 不変な 0 次元イデアルが求まれば，$F_1(p_1) = 0$ を p_1 について解けば代数的共状態が求まる．実際，p_i $(i = 2, \ldots, n)$ は $p_i = g_i(p_1)$ より，一意に決定できる．したがって，定理 5.2 の形で H 不変な 0 次元イデアルを求めることができれば，代数的共状態は 1 変数の代数方程式を解くだけで求まる．これは，高次元の問題を解く際に役立つ．

5.4 Hamilton–Jacobi 方程式の代数的勾配解

5.4.1 Hamilton-Jacobi 方程式

スカラー値関数 $V(t, x)$ の偏導関数を用いて記述される方程式

$$\frac{\partial V}{\partial t} = -H(t, x, p),\ p = \nabla V \tag{5.11}$$

を考える．ただし，$H(t, x, p)$ はスカラー値関数であり，この式は Hamilton-Jacobi 方程式（HJE）と呼ばれる．本章では，$V(t, x)$ に対する時刻 $t = t_f$ における横断性条件

$$V(t_f, x) = \varphi(x) \tag{5.12}$$

を考慮することもある．ただし，φ はスカラー値関数である．

HJE も正準方程式と同様に，システム制御理論において重要な式の一つである．例えば，非線形最適制御問題において正準方程式は停留条件を記述されるために用いられるが，HJE は最適制御入力を記述するために用いられる．

例題 5.2 (有限評価区間の非線形最適制御問題)**.** 例題 5.1 と同じ非線形最適制御問題を考える．このとき，値関数 $V(t_0, x_0) = \inf_u J$ は HJE(5.11) と横断性条件

$$V(t_f, x) = \varphi(x) \tag{5.13}$$

を満たす．また，最適制御入力は $u = -g^{\mathrm{T}}p$ で与えられる．最適制御入力を施した閉ループ系の状態軌道 $x(t)$ とその軌道に沿った値関数の勾配 $\partial V(t, x(t))/\partial x$ は正準方程式 (5.1)，(5.2) と横断性条件 (5.3) を満たす．

例題 5.3 (無限評価区間の非線形最適レギュレータ問題)**.** つぎの非線形最適制御問題を考える．

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt}(t) &= f(t, x(t)) + g(t, x(t))u(t), x(0) = x_0 \\ J &= \frac{1}{2}\int_{t_0}^{\infty} \left(q(t, x(t)) + ||u(t)||_2^2\right) dt \end{aligned}$$

ただし，f, g と q は例題 5.1 と同じとする．このとき，値関数 $V(t_0, x_0) := \inf_u J$ はつぎの HJE を満たす．

$$H(t,x,p) = p^{\mathrm{T}} f(t,x) + \left(-p^{\mathrm{T}} g(t,x) g^{\mathrm{T}}(t,x) p + q(t,x)\right)/2$$

さらに，最適制御入力は $u_{opt} = -g^{\mathrm{T}} p$ で与えられる．

HJE が解ければ，上のクラスの最適制御問題に対して，最適制御入力を計算できる．しかしながら，HJE は１階の偏微分方程式であるため解くことが難しい．ここでは正準方程式と同様に，問題のクラスを制限することで，HJE の解が求まるクラスを明らかにする．具体的には $H \in K_t[p]$ とし，つぎの代数的勾配解を求める問題を考える．

定義 5.5. 式 (5.11) を満たすスカラー値関数 $V(t,x)$ が代数的勾配解であるとは，$p_i = \partial V/\partial x_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ がすべて K_t 上の代数的関数であることをいう．また，その勾配 $p = \partial V/\partial x$ を代数的勾配と呼ぶ．

5.4.2 横断性条件がある場合における代数的勾配解

代数的共状態を用いて，代数的勾配解の存在条件を明らかにする．定理 5.1 の必要性の証明より，代数的共状態 $p(t,x)$ が存在すればある領域 $D_p \subset \mathbf{R} \times \mathbf{R}^n$ が存在して $(x_p(t; t_0, x_0),$ $p(t, x_p(t; t_0, x_0)))$ は一意に存在し解析的である．同様に，代数的勾配解 $V(t, x_V(t; t_0, x_0))$ が存在すれば，ある領域 $D_V \subset \mathbf{R} \times \mathbf{R}^n$ が存在して，$(x_V(t; t_0, x_0), \nabla V(t, x_V(t; t_0, x_0)))$ は適当な正準方程式 (5.4)，(5.5) の一意かつ解析的な解である．この記法の元でつぎが成り立つ．

定理 5.3. 領域 $U \subset D_p \cap D_V$ の存在を仮定し，式 (5.13) の t_f に対して $(t_f, x_f) \in D_p \cap D_V$ を満たす x_f の集合を $\pi_{t_f}(D_p \cap D_V) \subset \mathbf{R}^n$ で表す．このとき，代数的共状態が $\pi_{t_f}(D_p \cap D_V)$ 上で

$$p(t_f, x) \equiv \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)^{\mathrm{T}} (x) \tag{5.14}$$

を満たせば，p は代数的勾配解である．

証明. 代数的勾配解は，式 (5.13) を $\pi_{t_f}(D_p \cap D_V)$ 上で満たすため，$\pi_{t_f}(D_p \cap D_V)$ 上で

$$\nabla V(t_f, x) \equiv \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x) \equiv p(t_f, x)$$

が成り立つ．ここで，初期条件 $(t_f, x_f) \in D_p \cap D_V$ における $x_p(t)$ と $x_V(t)$ の解軌道をそれぞれ $x_p(t; t_f, x_f)$ と $x_V(t; t_f, x_f)$ で表す．$D_p \cap D_V$ 上では，解 $x_p(t)$ と $x_V(t)$ は一意に存在する

ため，$x_p(t;t_f,x_f) \equiv x_V(t;t_f,x_f)$ が任意の $x_f \in \pi_{t_f}(D_p \cap D_V)$ に対して成り立つ．解軌道を逆時間に辿ると，任意の $x_f \in \pi_{t_f}(D_p \cap D_V)$ に対して，初期時刻で $x_p(t_0;t_f,x_f) \equiv x_V(t_0;t_f,x_f)$ が成り立つ．すなわち，$p(t_0,x_0) \equiv \nabla V(t_0,x_0)$ が $D_p \cap D_V$ 上で成り立つ．さらに，解析学の一致の定理 [71] より，$D_p \cup D_V$ 上で $p(t_0,x_0) \equiv \nabla V(t_0,x_0)$ を得る． □

定理 5.3 より，適当な仮定の下では，横断性条件 (5.14) を満たす代数的共状態は代数的勾配解である．有限評価区間の最適制御問題では，HJE を解くことなく最適制御入力を求めることができる．

H 不変な 0 次元イデアルが定義する代数的共状態が横断性条件を満たすかどうかは，一般に代数方程式を解かなければ確認できない．ここでは，H 不変な 0 次元イデアルが定義する代数的共状態のうち，横断性条件を満たすものが存在するための十分条件を与える．

定理 5.4. H 不変な 0 次元イデアルを $I \subset K_t[p]$ とし，その基底を $F_i(t,x,p) \in K_t[p]$ $(i = 1,\ldots,s)$ とする．また，$p(t,x) \in \mathbf{V}(I) \subset \bar{K}_t \times \bar{K}_t^n$ が時刻 $t = t_f \in \mathbf{R}$ で存在するものとする．$p(t,x) \in \mathbf{V}(I)$ が横断性条件 (5.14) を満たすための十分条件は

$$
\begin{aligned}
&I^{t_f} \subset J^{t_f} \\
&\quad I^{t_f} = \langle F_1(t_f,p),\ldots,F_n(t_f,p)\rangle \subset K[p],\ J^{t_f} = \langle G_1(p),\ldots,G_n(p)\rangle \subset K[p]
\end{aligned} \tag{5.15}
$$

が成り立つことである．ただし，J^{t_f} は，$K[p]$ の元 p に $\partial\varphi(x)/\partial x$ を代入する環準同型写像の核である．さらに，I^{t_f} が根基であれば逆もまた成り立つ．

証明. 条件 (5.15) は $\partial\varphi(x)/\partial x \in \mathbf{V}(I^{t_f}) \subset \bar{K}^n$ を意味する．したがって，$p(t,x) \in \mathbf{V}(I) \subset \bar{K}_t \times \bar{K}_t^n$ の t に t_f を代入すると，$p_0(t_f,x) = \partial\varphi(x)/\partial x$ を満たす代数的共状態が存在する．

イデアル I^{t_f} を根基とする．代数的共状態 $p_0(t,x) \in \mathbf{V}(I)$ が横断性条件 (5.14) を満たせば，$\mathbf{V}(I^{t_f}) \supset \mathbf{V}(J^{t_f})$ が成り立つ．さらに，$\mathbf{I}(\mathbf{V}(I^{t_f})) \subset \mathbf{I}(\mathbf{V}(J^{t_f}))$ を得る．また，イデアル J^{t_f} は極大であり，極大イデアルは根基イデアルである．根基イデアル I^{t_f}，J^{t_f} は $I^{t_f} = \mathbf{I}(\mathbf{V}(I^{t_f}))$，$J^{t_f} = \mathbf{I}(\mathbf{V}(J^{t_f}))$ を満たす [22] ため，条件 (5.15) を得る． □

5.4.3 横断性条件がない場合における代数的勾配解

無限評価区間の最適制御問題を解く際には，式 (5.11) を満たす代数的勾配解 p を見つけることが重要である．ここではそのような代数的勾配解 p の存在条件を明らかにする．

代数的勾配解の存在性を特徴付けるために，イデアルに対して包合性を定義する．

定義 5.6. イデアル $I \subset K_t[p]$ が包合的であるとは，任意の $\Phi \in I$ と $\Psi \in I$ に対して

$$\{\Phi, \Psi\} \in I$$

が成り立つことをいう．

代数的勾配解の存在条件は，イデアルの H 不変性に加えて，包合性を用いて記述される．

定理 5.5. ある可縮領域で HJE(5.11) が代数的勾配解 V を持つための必要十分条件は，H 不変かつ包合的な 0 次元根基イデアルが存在することである．

証明. （必要性）HJE が可縮領域 $U_0 \subset \mathbf{R} \times \mathbf{R}^n$ で解を持つとする．HJE(5.11) はつぎのように記述できる．

$$\begin{bmatrix} \partial V/\partial t \\ \nabla V(t,x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -H(t,x,p) \\ p(t,x) \end{bmatrix} \tag{5.16}$$

右辺は，スカラー値関数の偏導関数であるため，その Jacobi 行列

$$\begin{bmatrix} -\dfrac{\partial H}{\partial t}(t,x,p) - \dfrac{\partial H}{\partial p}(t,x,p)\dfrac{\partial p}{\partial t}(t,x) & -\dfrac{\partial H}{\partial x}(t,x,p) - \dfrac{\partial H}{\partial p}(t,x,p)\dfrac{\partial p}{\partial x}(t,x) \\ \dfrac{\partial p}{\partial t}(t,x) & \dfrac{\partial p}{\partial x}(t,x) \end{bmatrix}$$

は対称である．すなわち，領域 U_0 で次が成り立つ．

$$\frac{\partial p}{\partial t}(t,x) = \left(-\frac{\partial H}{\partial x}(t,x,p) - \frac{\partial H}{\partial p}(t,x,p)\frac{\partial p}{\partial x}(t,x)\right)^{\mathrm{T}} \tag{5.17}$$

$$\frac{\partial p}{\partial x}(t,x) = \left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)^{\mathrm{T}}(t,x) \tag{5.18}$$

式 (5.17), (5.18) より，式 (5.5) を得る．

領域 U_0 で定義された (t,x) の有理型関数の集合を K_t で表す．定理 5.1 の必要性の証明より，式 (5.5) を満たす p が存在すれば H 不変な極大イデアル $I \subset K_t[p]$ が存在する．補題 B.1 より，これは n 個の元で生成される．また，極大イデアルは 0 次元根基イデアルである [22, 68]．この 0 次元根基イデアル I を $\langle F_1, F_2, \ldots, F_n \rangle$ で表すと，定理 5.1 の必要性の証明より，$p = \nabla V \in K_t \times K_t^n$ に対して $F(t,x,\nabla V(t,x)) = 0$, $F := [F_1, \cdots, F_n]^{\mathrm{T}}$ が成り立つ．この等式を x について微分すると

$$\frac{dF}{dx}(t,x,\nabla V) = \frac{\partial F}{\partial x}(t,x,\nabla V) + \frac{\partial F}{\partial p}(t,x,\nabla V)\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}(t,x) = 0$$

を得る．補題 B.5 より，$\partial F(t,x,\nabla V)/\partial p$ は $p = \nabla V \in K_t \times K_t^n$ で非正則である．したがって，

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}(t,x) = -\left(\frac{\partial F}{\partial p}\right)^{-1}(t,x,\nabla V)\frac{\partial F}{\partial x}(t,x,\nabla V)$$

となる．$\partial^2 V/\partial x^2(t,x)$ は対称，すなわち式 (5.18) が $p(t,x) = \nabla V(t,x)$ に対して成り立つため，

$$\frac{\partial F}{\partial x}\left(\frac{\partial F}{\partial p}\right)^{\mathrm{T}} - \frac{\partial F}{\partial p}\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^{\mathrm{T}} = 0$$

を得る．ただし，F の偏導関数の引数は $(t,x,\nabla V)$ である．左辺の第 (i,j) 要素は，$\{F_i, F_j\}$ と記述できるため，$\{F_i, F_j\}(t,x,\nabla V) = 0$ となる．したがって，$\{F_i, F_j\} \in \mathrm{Ker}\varphi = I$ となり，補題 B.14 より I は包合的である．

（十分性）イデアル $I \subset K_t[p]$ を H 不変かつ包合的な 0 次元根基イデアルとする．ただし，K_t は可縮領域 $D \subset \mathbf{R} \times \mathbf{R}^n$ 上で定義された (t,x) の有理型関数体かつ，式 (5.4) は任意の $(t_0, x_0) \in D$ と $p(t,x) \in \mathbf{V}(I) \subset \bar{K}_t \times \bar{K}_t^n$ に対して一意かつ解析的な解 $x(t;t_0,x_0)$ を持つとする．定理 5.1 の必要性の証明より，そのような D は必ず存在する．また，Hilbert 零点定理 [21,22,24] より，アフィン多様体 $\mathbf{V}(I) \subset \bar{K}_t \times \bar{K}_t^n$ は空集合ではない．まず，定理 5.1 の十分性の証明より，$p \in \mathbf{V}(I)$ は式 (5.5) を D 上で満たす．

つぎに，式 (5.18) について考える．補題 B.5 より，任意の $\mathbf{V}(I)$ の元に対して，$\partial F(t,x,p)/\partial p$ は非正則である．このため，$F(t,x,p(t,x)) = 0$ を x で微分すると

$$\frac{\partial p}{\partial x}(t,x) = -\left(\frac{\partial F}{\partial p}\right)^{-1}(t,x,p)\frac{\partial F}{\partial x}(t,x,p) \tag{5.19}$$

が D 上で成り立つ．他方，I の包合性より，$p(t,x) \in \mathbf{V}(I)$ に対して，D 上で $\{F_i, F_j\} = 0$ が成り立つ．すなわち，D 上で

$$\frac{\partial F}{\partial x}\left(\frac{\partial F}{\partial p}\right)^{\mathrm{T}} - \frac{\partial F}{\partial p}\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^{\mathrm{T}} = 0 \tag{5.20}$$

を得る．ただし，各偏導関数の引数は (t,x,p) である．式 (5.19)，(5.20) より，$\partial p(t,x)/\partial x$ は対称であり，D 上で式 (5.18) が成り立つ．

以上をまとめると，$p(t,x) \in \mathbf{V}(I)$ は式 (5.18)，(5.5) を可縮領域 D 上で満たす．Poincaré の補題とその逆 [72] より，$[-H(t,x,p)\ p(t,x)]^{\mathrm{T}}$ はあるスカラー値関数 $V(t,x)$ の勾配である．すなわち，式 (5.16) を満たす．したがって，$p(t,x)$ は可縮領域 D で定義された代数的勾配である． □

定理 5.1 と命題 B.3，B.2 より，つぎが成り立つ．

系 5.3. ある可縮領域で HJE(5.11) が代数的勾配解 V を持つための必要十分条件は，H 不変かつ包合的な極大イデアルが存在することである．

定理 5.5 より，H 不変かつ包合的な 0 次元根基イデアルが存在すれば，代数的勾配解はその基底が定義する代数方程式を解けば求まる．しかしながら，H 不変かつ包合的な 0 次元根基イデアルを見つけることは，一般に難しい．そこで，命題 5.2 と同様に，逆問題的にイデアルが H 不変かつ包合的な 0 次元根基イデアルであるための十分条件を導出する．

定理 5.6. $g_i \in K_t[p_1] \setminus K_t$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ を多項式とし，$F_1 := g_1$ かつ $F_i := p_i - g_i$ $(i = 2, \ldots, n)$ とする．さらに， $\deg(g_i) < \deg(g_1)$ $(i = 2, \ldots, n)$ かつ g_1 はスクエアフリーかつモニックであるとする．イデアル $I := \langle F_1, \ldots, F_n \rangle \subset K_t[p]$ が H 不変かつ包合的な 0 次元根基イデアルであるための十分条件は，つぎが成り立つことである．

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial a_1}{\partial t} + \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial a_1}{\partial x_j}\frac{\partial H}{\partial p_j} - \frac{\partial a_1}{\partial p_1}\frac{\partial H}{\partial x_1} \in I \\
&\frac{\partial a_i}{\partial t} + \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial a_i}{\partial x_j}\frac{\partial H}{\partial p_j} - \frac{\partial a_i}{\partial p_1}\frac{\partial H}{\partial x_1} - \frac{\partial H}{\partial x_i} \in I \ (i = 2, \ldots, n) \\
&-\frac{\partial a_1}{\partial x_1}\frac{\partial a_i}{\partial p_1} + \frac{\partial a_1}{\partial x_i} + \frac{\partial a_1}{\partial p_1}\frac{\partial a_i}{\partial x_1} \in I \ (i = 2, \ldots, n) \\
&-\frac{\partial a_i}{\partial x_1}\frac{\partial a_j}{\partial p_1} + \frac{\partial a_i}{\partial x_j} + \frac{\partial a_i}{\partial p_1}\frac{\partial a_j}{\partial x_1} - \frac{\partial a_j}{\partial x_i} \in I \ (i, j = 2, \ldots, n)
\end{aligned}
$$

証明. まず, 次数に関しては, $\deg(g_i) < \deg(g_1)$ $(i = 2, 3, \ldots, n)$ より $\mathrm{LT}(F_i) = p_i, \mathrm{REM}(F_i) = -a_i$ が成り立つため，g_i を $\mathrm{LT}(F_1) = \mathrm{LT}(g_1)$ で割り切れない．ただし， $\mathrm{LT}(F_i)$ は F_i の先頭項であり，$\mathrm{REM}(F_i)$ は F_i から先頭項を取り除いたものを表す．逆に，$F_1 = g_1 \in K_t[p_1]$ の項を $\mathrm{LT}(F_i) = p_i$ $(i = 2, \ldots, n)$ で割り切れない．補題 B.9 より，$I = \langle F_1, \ldots, F_n \rangle$ は 0 次元根基イデアルである．

命題 5.2 より，I は H 不変なため，包合的なことを示す．これは

$$
\begin{aligned}
\{F_1, F_i\} &= -\frac{\partial a_1}{\partial x_1}\frac{\partial a_i}{\partial p_1} + \frac{\partial a_1}{\partial x_i} + \frac{\partial a_1}{\partial p_1}\frac{\partial a_i}{\partial x_1} \in I \ (i = 2, \ldots, n) \\
\{F_i, F_j\} &= -\frac{\partial a_i}{\partial x_1}\frac{\partial a_j}{\partial p_1} + \frac{\partial a_i}{\partial x_j} + \frac{\partial a_i}{\partial p_1}\frac{\partial a_j}{\partial x_1} - \frac{\partial a_j}{\partial x_i} \in I \ (i, j = 2, \ldots, n)
\end{aligned}
$$

より，明らかである． □

より具体的に，$H \in K[p]$ が

$$
H(t, x, p) = p^{\mathrm{T}} f(t, x) + \left(-p^{\mathrm{T}} g(t, x) g^{\mathrm{T}}(t, x) p + q(t, x)\right)/2
$$

として与えられたとき，つぎのイデアル H 不変かつ包合的であるための十分条件を考える．

$$
\begin{cases}
F_1 = p_1^2 + b_{11}(x_1) p_1 + b_{12}(x_1) \\
F_i = p_i + b_i(x_i, t) \ (i = 2, 3, \ldots, n)
\end{cases}
$$

定理 5.7. まず，$b_{11}^2 - 4b_{12} \neq 0$ とする．ある b_{11}, b_{12} と b_i $(i = 2, \ldots, n)$ に対して，

$$f_1 + \sum_{j=1}^{m} g_{1j} \left(\sum_{k=2}^{n} b_k g_{kj} \right) + \frac{b_{11}}{2} \sum_{j=1}^{m} g_{1j}^2 = 0 \tag{5.21}$$

$$2 \sum_{k=2}^{n} \left(b_k f_k + \int_0^{x_k} \frac{\partial b_k}{\partial t} dx_k \right) - \sum_{j=1}^{m} b_{12} g_{1j}^2 + \sum_{j=1}^{m} \left(\sum_{k=2}^{n} b_k g_{kj} \right)^2 - 2q = 0 \tag{5.22}$$

成り立てば，イデアル $I = \langle F_1, \ldots, F_n \rangle$ は，H 不変かつ包合的な 0 次元根基イデアルである．

証明. 仮定 $b_{11}^2 - 4b_{12} \neq 0$ より，F_1 はスクエアフリーであり，また F_1 明らかにモニックである．さらに，$\deg(b_i) < \deg(F_1)$ $(i = 2, \ldots, n)$ が成り立つ．したがって，命題 5.6 より，$\langle F_1, \ldots, F_n \rangle$ は 0 次元根基イデアルである．

命題 5.6 より，$\langle F_1, \ldots, F_n \rangle$ はつぎを満たせば H 不変である．

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \left(f_1 + \sum_{j=1}^{m} g_{1j} \left(\sum_{k=2}^{n} b_k g_{kj} \right) + \frac{b_{11}}{2} \sum_{j=1}^{m} g_{1j}^2 \right) = 0 \tag{5.23}$$

$$2 \frac{\partial b_i}{\partial t} + \frac{\partial \hat{b}_1}{\partial x_i} = 0 \tag{5.24}$$

$$\frac{\partial \hat{b}_1}{\partial x_1} + \frac{\partial b_{11} \hat{b}_2}{\partial x_1} = 0 \tag{5.25}$$

$$\frac{b_{11}}{2} \frac{\partial \hat{b}_1}{\partial x_1} + 2b_{12} \frac{\partial \hat{b}_2}{\partial x_1} + \frac{\partial b_{12}}{\partial x_1} \hat{b}_2 = 0 \tag{5.26}$$

ただし，

$$\hat{b}_1 = 2 \sum_{k=2}^{n} b_k f_k - \sum_{j=1}^{m} b_{12} g_{1j}^2 + \sum_{j=1}^{m} \left(\sum_{k=2}^{n} b_k g_{kj} \right)^2 - 2q$$
$$\hat{b}_2 = f_1 + \sum_{j=1}^{m} g_{1j} \left(\sum_{k=2}^{n} b_k g_{kj} \right) + \frac{b_{11}}{2} \sum_{j=1}^{m} g_{1j}^2$$

である．まず，式 (5.21) を式 (5.23) の左辺に代入すると

$$\frac{\partial \hat{b}_2}{\partial x_i} = 0 \ (i = 2, \ldots, n)$$

が成り立つ．したがって，式 (5.21) より，式 (5.23) が成り立つ．つぎに，式 (5.24) の左辺に式 (5.22) を代入すると

$$2 \frac{\partial b_i}{\partial t} + \frac{\partial \hat{b}_1}{\partial x_i} = 2 \frac{\partial b_i}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x_i} \left(2 \int_0^{x_i} \frac{\partial b_i}{\partial t} dx_i \right) \quad (i = 2, \ldots, n)$$

を得る．微積分学の基本定理より，

$$2\frac{\partial b_i}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x_i}\left(2\int_0^{x_i}\frac{\partial b_i}{\partial t}dx_i\right) = 2\frac{\partial b_i}{\partial t} - 2\frac{\partial b_i}{\partial t} = 0 \quad (i = 2, \ldots, n)$$

を得る．したがって，式 (5.22) より式 (5.24) を得る．

式 (5.21)，(5.22) を式 (5.25) の左辺に代入すると

$$\frac{\partial \hat{b}_1}{\partial x_1} + \frac{\partial b_{11}\hat{b}_2}{\partial x_1} = -\frac{\partial}{\partial x_1}\left(2\sum_{k=2}^{n}\int_0^{x_k}\frac{\partial b_k}{\partial t}dx_k\right) = 0$$

となる．最後に，式 (5.21)，(5.22) を式 (5.26) の左辺に代入すると

$$\frac{b_{11}}{2}\frac{\partial \hat{b}_1}{\partial x_1} + 2b_{12}\frac{\partial \hat{b}_2}{\partial x_1} + \frac{\partial b_{12}}{\partial x_1}\hat{b}_2 = -\frac{b_{11}}{2}\frac{\partial}{\partial x_1}\left(2\sum_{k=2}^{n}\int_0^{x_k}\frac{\partial b_k}{\partial t}dx_k\right) = 0$$

が成り立つ．したがって，式 (5.21)，(5.22) が成り立てば，$\langle F_1, \ldots, F_n\rangle$ は H 不変である．

命題 5.6 より，$\langle F_1, \ldots, F_n\rangle$ が

$$\begin{aligned}
&-\frac{\partial(p_1^2 + b_{11}p_1 + b_{12})}{\partial x_1}\frac{\partial b_i}{\partial p_1} + \frac{\partial(p_1^2 + b_{11}p_1 + b_{12})}{\partial x_i} + \frac{\partial(p_1^2 + b_{11}p_1 + b_{12})}{\partial p_1}\frac{\partial(p_2 + b_i)}{\partial x_1} = 0 \in I \\
&-\frac{\partial b_i}{\partial x_1}\frac{\partial b_j}{\partial p_1} + \frac{\partial b_i}{\partial x_j} + \frac{\partial b_i}{\partial p_1}\frac{\partial b_j}{\partial x_1} - \frac{\partial b_j}{\partial x_i} = 0 \in I \ (i, j = 2, \ldots, n)
\end{aligned}$$

を満たせば包合的である． □

5.4.4 HJE の安定化解

例題 5.3 のような，無限評価区間の最適レギュレータ問題では，HJE の安定化解を見つけることが重要である．ここでは，HJE の代数的勾配解から安定化解を選ぶ方法について考える．

定義 5.7. HJE の解 $V(t,x)$ が安定化解であるとは，$V(t,x)$ が原点を含む開集合で定義され，かつ $V(t,0) = 0$，$\nabla V(t,0) = 0$ をすべての $t \geq 0$ に対して満たし，さらに，原点がつぎのシステムの一様漸近安定な平衡点であることをいう．

$$\frac{dx}{dt} = \left(\frac{\partial H}{\partial p}\right)^{\mathrm{T}}(t, x, \nabla V) \tag{5.27}$$

いま，つぎの行列を定義する．

$$\begin{aligned}
A(t) &:= \frac{\partial^2 H}{\partial p \partial x}(t,0,0),\ B(t) := \frac{\partial^2 H}{\partial p^2}(t,0,0) \\
C(t) &:= \frac{\partial^2 H}{\partial x^2}(t,0,0),\ X(t) := \frac{\partial^2 V}{\partial x^2}(t,0)
\end{aligned}$$

システム (5.27) の原点近傍での線形近似システムを

$$\frac{d\xi}{dt} = (A(t) + B(t)X(t))\xi. \tag{5.28}$$

と表す．このとき，$X(t)$ は，つぎの Riccati 微分方程式 (RDE) の安定化解であることを示せる．

$$-\frac{dX}{dt}(t) = A^{\mathrm{T}}(t)X(t) + X(t)A(t) + X(t)B(t)X(t) + C(t)$$

RDE の解 $X(t)$ が安定化解であるとは，原点がシステム (5.28) の一様漸近安定な平衡点であるときにいう．

安定化解に関してはつぎが知られている．

命題 5.1. [47, 48]HJE の解 V が $V(t,0) = 0$ と $\nabla V(t,0) = 0$ をすべての $t \geq 0$ に対して満たすとする．$X(t)(= \partial^2 V(t,0)/\partial x^2)$ が RDE の安定化解であれば，$V(t,x)$ は HJE の安定化解である．

RDE の解が安定化解であるかどうかを判別するためには，Lyapunov の安定定理 [10] が使える．RDE は，つぎの Lyapunov 方程式に変形できる．

$$\frac{dX}{dt}(t) + X(t)(A(t) + B(t)X(t)) + (A(t) + B(t)X(t))^{\mathrm{T}}X(t) = -(C(t) - X(t)B(t)X(t))$$

Lyapunov の安定定理より，$A(t) + B(t)X(t)$ が連続な関数であり，$X(t)$ が有界かつ連続微分可能な正定関数であり，さらに $C(t) - X(t)B(t)X(t)$ が有界かつ連続な正定値関数であれば，$X(t)$ は RDE の安定化解である．

以上をまとめると，命題 5.1 より，HJE の安定化解は，すべての t に対して $p(t,0) = 0$ を満たし，$\partial p(t,0)/\partial x$ が半正定かつ有界である代数的勾配解 p を選べば求まる．$\partial p(t,0)/\partial x$ が半正定であれば，$\partial p(t_0,0)/\partial x \geq 0$ は初期時刻で成り立つ．したがって，$\partial p(t_0,0)/\partial x \geq 0$ が成り立つかどうかを確認すれば, 安定化解の候補を絞ることができる．

例題 5.4. ここでは，つぎの最適制御問題に対して，HJE の安定化解を求める．

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} -\dfrac{x_1^3}{2} + \dfrac{x_2}{1+\mathrm{e}^{-t}} + 2x_3x_4 \\ -\dfrac{\mathrm{e}^{-t}x_2}{2} \\ -3x_3 + 2x_2^2x_3 + \dfrac{2x_2x_4}{1+\mathrm{e}^{-t}} + 2x_3x_4^2 \\ 2x_2x_3 - x_4^3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 2x_4 & 2x_2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} u$$

$$J = \frac{1}{2}\int_{t_0}^{\infty} (x_1^2 + x_2^2 + 6x_3^2 + 4x_4^2 + 4x_4^4 + u^2)dt$$

命題 5.7 によれば，代数的勾配 p は，つぎの代数方程式を解けば求まる．

$$\begin{cases} p_1^2 + x_1^3 p_1 - x_1^2 = 0 \\ p_2 - \dfrac{x_2}{1+\mathrm{e}^{-t}} = 0 \\ p_3 - x_3 = 0 \\ p_4 - 2x_4 = 0 \end{cases}$$

命題 5.1 より，$(\partial p/\partial x)(t,0)$ が半正定であるような p の分枝を選ぶと

$$p(x) = \begin{bmatrix} \dfrac{1}{2}\left(-x_1^3 + x_1\sqrt{4+x_1^4}\right) & \dfrac{x_2}{1+\mathrm{e}^{-t}} & x_3 & 2x_4 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$$

となる．つぎに，以下の制御則

$$u = -g^{\mathrm{T}} p = -\begin{bmatrix} \dfrac{1}{2}\left(-x_1^3 + x_1\sqrt{4+x_1^4}\right) + \dfrac{x_2}{1+\mathrm{e}^{-t}} + 2x_3x_4 \\ 2x_2x_3 + 2x_4 \end{bmatrix}$$

を施した閉ループ系の原点が一様漸近安定であること示す．ここでは，線形近似系を考える．閉ループ系を線形近似すると

$$\dot{\xi} = (A(t) + B(t)X(t))\xi,$$

$$A(t) + B(t)X(t) = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -\dfrac{\mathrm{e}^{-t}}{2} - \dfrac{1}{1+\mathrm{e}^{-t}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

となり，$A(t) + B(t)X(t)$ は連続である．さらに，$X(t)$ は

$$X(t) = \frac{\partial p}{\partial x}(t,0) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \dfrac{1}{1+\mathrm{e}^{-t}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

となり，これは一様有界かつ連続微分可能な正定行列である．さらに，$C(t) - X(t)B(t)X(t)$ も一様有界かつ連続微分可能な正定行列である．ただし，

$$B(t) = -g^{\mathrm{T}}(t,0)g(t,0) = -\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$C(t) = \frac{\partial^2 q}{\partial x^2}(t, 0) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

となる．Lyapunov の安定定理 [10] より，線形近似システムの原点は一様漸近安定であり，p は安定化解の勾配である．最後に，値関数は

$$V(x,t) = \int_0^x \frac{\partial V}{\partial x}(\xi) d\xi = \int_0^1 p^{\mathrm{T}}(sx) x ds$$

と表現でき，これを線積分すると

$$V(x,t) = \frac{1}{8}\left(x_1^2 \sqrt{4 + x_1^4} + 4 \sinh^{-1} \frac{x_1^2}{2} - x_1^4 + \frac{4x_2^2}{1 + \mathrm{e}^{-t}} + \frac{x_3^2}{2} + x_4^2 \right)$$

となる．

5.5　Hamiltonian が時不変の場合

Hamiltonian が時不変の場合に代数的勾配解が存在するための条件は，文献 [32] で導出されている．本研究では，この結果を Hamiltonian が時変の場合に拡張したものである．本節では，Hamiltonian が時不変の場合に，本研究の結果と文献 [32] との結果を比較する．K を x の有理型関数体とし，K 上の多項式環 $K[p]$ を考える．

Hamiltonian が時不変のとき，HJE は

$$\frac{\partial V(t,x)}{\partial t} = H(x,p),\ p = \nabla V \tag{5.29}$$

となる．ただし，$H \in K[p]$ とする．このとき，系 5.3 より，つぎが成り立つ．

命題 5.2. 適当な $\mathbf{R}^n$ の可縮領域で HJE(5.29) の代数的勾配解が存在するための必要十分条件は，H 不変かつ包合的な極大イデアルが存在することである．

一方，文献 [32] では，定常な HJE

$$H(x,p) = 0,\ p = \nabla V \tag{5.30}$$

を考えている．この HJE に対して，代数的勾配の存在条件は，文献 [32] で明らかにされている．

命題 5.3. 適当な $\mathbf{R}^n$ の可縮領域で HJE(5.30) の代数的勾配解が存在するための必要十分条件は，Hamiltonian $H \in K[p]$ を含む包合的極大イデアルが存在することである．

定常な HJE に対しては，H 不変かつ包合的な極大イデアルが存在することは，代数的勾配解が存在することの必要条件でしかない．

命題 5.4. 適当な $\mathbf{R}^n$ の可縮領域で HJE(5.30) の代数的勾配解が存在するための必要条件は，H 不変かつ包合的な極大イデアルが存在することである．

証明. $H \in K[p]$ を含む包合的イデアルを I とする．このとき，I が H 不変であることを示せば良い．これは，$H \in I$ かつ I の包合性より明らかである． □

本節の結果は，文献 [32] のものを Hamiltonian が時変の場合へと拡張したものである．しかしながら，上で示したように，本節の条件を Hamiltonian が時不変の場合に制限しても，考えている方程式が異なるため，文献 [32] の条件は得られない．したがって，本研究は，解の勾配が満たす代数方程式を見つけるという基本的なアイデアは文献 [32] と同じであるが，得られた条件は文献 [32] の条件を単純に拡張したものではない．

5.6 おわりに

本章では，Hamiltonian が時間と状態に関する関数体上の共状態に関する多項式であるような Hamilton 正準方程式と Hamilton–Jacobi 方程式 (HJE) を扱った．まず，Hamilton 正準方程式や HJE の解として，代数的共状態や代数的勾配解を定義した．そして，それぞれの解が存在するための必要十分条件をイデアルの H 不変性や包合性を用いて与えた．また，代数的共状態や代数的勾配解が存在すれば，それらは代数方程式を解くだけで求めることができる．しかしながら，現時点では与えられた問題に対して，代数的共状態や代数的勾配解を見つける統一的な方法は存在しない．そこで，ここでは逆問題的に，代数的共状態や代数的勾配解が存在する問題のクラスをイデアルの H 不変性や包合性の性質を用いて明らかにした．実際に，代数方程式を解けば代数的勾配解が求まる最適制御問題の例を与えた．

第6章　結言

6.1　論文のまとめ

本論文では，可換環論や代数幾何学を非線形システム制御理論の構築に応用した．まず，2–4 章では，解析の観点から，非線形システム制御理論における未解決問題の一部を多項式システムに対して解決した．具体的には，離散時間多項式システムの可観測性，可到達性や有限時間安定性の判別条件を導出した．つぎに，設計の観点から，5 章で非線形最適性制御問題や H^∞ 制御問題を解く際に現れる Hamilton-Jacobi 方程式（HJE）に対して，Hamiltonian を多項式型に制限することによって代数的解法を提案した．各章のまとめは下記のとおりである．

2–4 章では，離散時間多項式システムの解析を行った．2 章では，離散時間多項式システムの可観測性を解析した．非線形システムの可観測性として，大域的可観測性と局所可観測性が定義されている．しかしながら，微分幾何学的アプローチでは局所可観測性の十分条件しか導出されておらず，大域的可観測性に関しては判別条件すら与えられていなかった．そこで，本論文では，大域的可観測性と局所可観測性それぞれに関して必要十分条件を導出した．まず，Hilbert の基底定理を用いて可識別でない初期状態の組をアフィン多様体として求めた．そして，このアフィン多様体を用いて，大域的可観測性の必要十分条件を導出した．つぎに，アフィン多様体の極小分解を用いて，局所可観測性の必要条件を導出した．その後，この必要条件の確認を有限回反復する形で局所可観測性の必要十分条件を導出した．必要条件の確認が有限回で良いことは，代数幾何学の次元論を用いて示した．得られる条件は，有限本の代数方程式を解くだけで確認できる．また，例題において，提案法の有効性を示した．

3 章では，離散時間多項式システムの（大域的）可到達性を解析した．微分幾何学的アプローチでは，局所可到達性を扱うことが多く,（大域的）可到達性を解析することはほとんどない．多項式システムに関しては，可到達性の判別条件が導出されているがこれは必要条件でしかない．そこで，本論文では，既存結果とは異なるアプローチで可到達性の十分条件を導出した．この十分条件の導出には，多項式写像の「定義域と値域が同じ次元のユークリッド空間である多項式写像は，単射であれば全射である」という性質を用いた．単射性の判別条件は，2 章で大域的可観測性の必要十分条件として得られている．したがって，ここでは

大域的可観測性の必要十分条件を有用することで，可到達性の十分条件を導出した．得られる条件は，可観測性と同様に有限本の代数方程式を解くだけで確認できる．そして，提案法の有効性を例題で示した．

4 章では，離散時間多項式システムの有限時間安定性を解析した．可観測性や可到達性とは異なり，非線形システムの有限時間安定性についてはあまり研究されていない．多項式システムの場合，有限時間安定性は多項式写像の冪零性と解釈できる．冪零性を判別するためには，多項式写像を繰り返し合成する必要がある．しかしながら，合成回数の上界は明らかでない．本論文では，この問題を解決し，有限時間安定性の必要十分条件を導出した．まず，冪零性を解析する際には，多項式写像をシステムの次元の数だけ合成すれば十分であることを，代数幾何学の次元論を用いて示した．これは，Cayley-Hamilton の定理の一種の拡張と解釈できる．そして，有限時間安定性の必要十分条件を導出した．また，この条件を満たすシステムの例を示した．得られた条件は，多項式型の有限時間整定制御器の設計にも応用できる．実際，有限時間整定制御器の設計例を示した．

5 章では，Hamiltonian が時変のとき，HJE の解を解析した．HJE は偏微分方程式であるため，一般に解くことは難しい．本論文では，代数方程式を解くだけで，解の勾配が求まる HJE のクラスを明らかにした．そのような勾配が存在するための必要十分条件は，H 不変かつ包合的な 0 次元根基イデアルが存在する，もしくは H 不変な 0 次元イデアルが定義する代数方程式の根が横断性条件を満たすことである．しかしながら，与えられた問題に対して，これらの条件を満たすイデアルを見つけるためには，偏微分方程式を解く必要があり，これは難しい．そこで，本稿では，逆問題的にあるイデアルが H 不変な 0 次元イデアルとなるための十分条件や H 不変かつ包合的な 0 次元根基イデアルとなるための十分条件を導出した．これらの条件を用いて，代数方程式を解くだけで解の勾配が見つかる HJE の例を示した．

6.2　今後の展望

本研究の目的は，線形システム制御理論を多項式システムへと拡張することである．解析の観点から，本論文の 2–4 章で，離散時間多項式システムの可観測性，可到達性や有限時間安定性の判別条件を導出した．設計の観点から，本論文の 5 章で，最適制御問題に現れる Hamilton–Jacobi 方程式に対して，代数的な解法を提案した．しかしながら，依然として，課題は数多く残されている．

システム制御理論における基本的な性質としては，可観測性，可制御性と安定性がある．線形システムの場合，各性質に対する必要十分条件に加えて，可観測なシステムや可制御なシステムの一般形である可観測正準形や可制御正準形が明らかにされている．また，可観測/可

制御でないシステムを，可観測/可制御なサブシステムと可観測/可制御でないサブシステムに分解する方法，すなわち可観測/可制御正準分解する方法が明らかにされている．多項式システムに対しては，可観測と可到達性の判別条件を導出した段階である．可観測性に関する今後の課題は，線形システム制御理論に倣い，可観測正準形や可観測正準分解の手順を明らかにすることである．

可制御性に関しては，本論文では離散時間多項式システムの可到達性に対する十分条件を導出した段階にすぎない．このため，可到達性の必要十分条件を導出することが今後の課題の一つである．離散時間システムの場合，可制御性と可到達性は異なる性質である．今回は，可到達性の判別条件を導出した．一方，一般的な多項式システムに対して，可制御性の判別条件は導出されていない．また，線形システムとは異なり，可制御性と可到達性の関係は明らかでない．この関係を明らかにし，かつさらに可制御性の判別条件を導出することも今後の課題の一つである．

可観測性とは異なり，可到達性に関する成果を連続時間システムに対して拡張することは困難である．これは，多項式システムの解軌道が，初期状態の多項式関数で表現できないためである．したがって，連続時間多項式システムに対して，可制御性の判別条件を導くことも課題の一つである．

安定性に関して，本論文では有限時間安定性を考えたが，一般的に扱われるのは漸近安定性である．しかしながら，漸近安定性の判別問題は解かれていない．多項式の構造を生かして安定解析に取り組むことは重要な課題である．

システム制御理論では，安定化制御器，状態推定器や最適レギュレータなどの制御器設計の設計方法や，制御器や推定器の設計可能性がシステムの性質と結び付けられている．しかしながら，問題のクラスが多項式であったとしても，これらを設計することは現時点では難しい．また，これらの設計可能性とシステムの性質との関係については，明らかでない．したがって，本論文で導出したシステム解析の結果を基に，制御器設計について研究することも今後の課題である．

最後に，本論文の成果を，実システムの解析に応用することも今後の課題の一つである．本論文の 2–4 章で得られた可観測性，可到達性や有限時間安定性の判別条件は，与えられた多項式システムに対して確認可能である．したがって，多項式システムとして記述できる実システムに対して，本研究成果を応用したい．

付 録A　数学的準備

可換代数や代数幾何の用語，特にイデアルとアフィン多様体について述べる．詳しくは [21–24, 73] を参照されたい．

A.1　多項式

$\xi_1, \dots, \xi_n$ の単項式とは $\xi_1^{\alpha_1} \cdot \xi_2^{\alpha_2} \cdots \xi_n^{\alpha_n}$ の形の積のことをいう．ここで，指数 $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ は非負整数である．和 $\alpha_1 + \cdots + \alpha_n$ をこの単項式の全次数という．

単項式を簡略化してつぎのように表記することができる．$\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ を非負整数の n 個の組として，

$$\xi^\alpha = \xi_1^{\alpha_1} \cdot \xi_2^{\alpha_2} \cdots \xi_n^{\alpha_n}$$

と書く．$\alpha = (0, \dots, 0)$ のときは，$\xi^\alpha = 1$ であることに注意する．$|\alpha| = \alpha_1 + \cdots + \alpha_n$ により，単項式 ξ^α の全次数を表す．

係数を k に持つ $\xi_1, \dots, \xi_n$ の多項式 f とは，体 k の元を係数とする単項式の有限個の線形結合のことをいう．多項式 f をつぎのように表わす．

$$f = \sum_\alpha a_\alpha \xi^\alpha,\ a_\alpha \in k$$

ここで，和は有限個の $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ についてとっている．係数を k に持つ多項式の集合を $k[\xi_1, \dots, \xi_n]$ と表わす．この集合は環に成っていることから，多項式環と呼ばれる．

$f = \sum_\alpha a_\alpha \xi^\alpha$ を $k[\xi_1, \dots, \xi_n]$ の多項式とする．

1. a_α を ξ^α の係数と呼ぶ．

2. $a_\alpha \neq 0$ のとき，$a_\alpha \xi^\alpha$ を f の項という．

3. 係数 $a_\alpha \neq 0$ がゼロでないような $|\alpha|$ の最大値を全次数といい $\deg(f)$ で表す．

多項式環の順序について考える．$k[\xi_1, \dots, \xi_n]$ における単項式の順序付けまたは単項式順序とは，非負整数の直積集合 $\mathbf{Z}^n_{\geq 0}$ の順序付け $>$，あるいは単項式の集合 $\{\xi^\alpha : \alpha \in \mathbf{Z}^n_{\geq 0}$ の順序付けで，つぎの性質を満たすものである．

1. $>$ は $\mathbf{Z}^n_{\geq 0}$ の全順序である．

2. $\alpha > \beta$ で $\gamma \in \mathbf{Z}^n_{\geq 0}$ とすれば，$\alpha + \gamma > \beta + \gamma$ である．

3. $>$ は $\mathbf{Z}^n_{\geq 0}$ の整列順序である．これは $\mathbf{Z}^n_{\geq 0}$ のどんな空でない部分集合も，$>$ に関する最小元を持つことである．

$f = \sum_\alpha a_\alpha \xi^\alpha$ は $k[\xi_1, \ldots, \xi_n]$ のゼロでない多項式であるとし，$>$ を単項式順序とする．

1. f の多重次数（multidegree）とは，

$$\mathrm{multideg}(f) = \max(\alpha \in \mathbf{Z}^n_{\geq 0} : a_\alpha \neq 0)$$

のことである．ここで max は，順序 $>$ に関してとる．

2. f の先頭係数とは $\mathrm{LC}(f) = a_{\mathrm{multideg}(f)} \in k$ のことである．

3. f の先頭単項式とは $\mathrm{LM}(f) = \xi^{\mathrm{multideg}(f)}$ のことである．

4. f の先頭項とは $\mathrm{LT}(f) = \mathrm{LC}(f) \cdot \mathrm{LM}(f)$ のことである．

A.2　イデアル

多項式環 $\mathbf{R}[\xi]$ の部分集合 I がイデアルであるとは，任意の $a, b \in I$ と $c \in \mathbf{R}[\xi]$ に対してつぎを満たすときにいう．

1. $a + b \in I$

2. $ca \in I$

多項式 $p_1, p_2, \ldots, p_s \in \mathbf{R}[\xi]$ を用いて，つぎの集合を定義する．

$$\langle p_1, \ldots, p_s \rangle = \left\{ \sum_{i=1}^{r} a_i p_i : a_i \in \mathbf{R}[\xi] (i = 1, 2, \ldots, s) \right\}$$

これは $\mathbf{R}[\xi]$ のイデアルであり，$p_1, \ldots, p_s$ はこのイデアルの基底と呼ばれる．多項式環 $\mathbf{R}[\xi]$ のイデアルは，必ず有限個の基底を持つことが知られている．この性質は，Hilbert の基底定理 [21–24] と呼ばれる．

I と J を多項式環 $\mathbf{R}[\xi]$ のイデアルとする．I と J の和 $I + J$ とはつぎの集合

$$I + J = \{a + b : a \in I \text{ かつ } b \in J\}$$

のことを言う．和 $I+J$ も $\mathbf{R}[\xi]$ のイデアルであり，I と J を含む最小のイデアルである．イデアル I と J の積とは，多項式 fg $(f \in I; g \in J)$ の集合であり，これも $\mathbf{R}[\xi]$ のイデアルである．つぎに，I と J の共通部分 $I \cap J$ とは I と J の両方に属する多項式の集合である．これも多項式環のイデアルである．

$I \subset \mathbf{R}[\xi]$ をイデアルとする．I の根基 $\sqrt{I}$ とはつぎの集合のことを言う．

$$\{f : \text{ある正の整数 } m \geq 1 \text{ が存在して } f^m \in I\}$$

根基 $\sqrt{I}$ は I を含む $\mathbf{R}[\xi]$ イデアルである．イデアル I は $I = \sqrt{I}$ を満たせば根基であることを示せる．

あるイデアル $p \subset \mathbf{R}[\xi]$ が素であるとは， $ab \in p$ であれば $a \in p$ もしくは $b \in p$ が成り立つことをいう．あるイデアル $q \subset \mathbf{R}[\xi]$ が準素であるとは，$ab \in q$ であれば $a \in q$ もしくは $b \in \sqrt{q}$ が成り立つことをいう．準素イデアルの根基は素イデアルであることが知られている．イデアル $I \subset \mathbf{R}[\xi]$ の準素分解とは，有限個の準素イデアルの集まりとして I を $q_1 \cap \cdots \cap q_s$ のように記述することをいう．準素分解が極小であるとは，$\sqrt{q_i}$ が相異なりかつ $q_i \not\supset \bigcap_{j \neq i} q_j$ が成り立つことをいう．すべてのイデアル $I \subset \mathbf{R}[\xi]$ は極小準素分解を持つことが知られている．与えられたイデアルに対して，和，積，共通部分，根基と極小分解を計算するアルゴリズムが提案されており [21]，例えば Maple に実装されている．

イデアルの剰余環を定義する．環 $\mathbf{R}[\xi]$ のイデアルを I とする．関係 $a \sim b$ を $a - b \in I$ とすればこれは同値関係である．この同値関係で $\mathbf{R}[\xi]$ を割った商集合 $\mathbf{R}[\xi]/I$ を $\mathbf{R}[\xi]$ の I に関する剰余環と呼ぶ．

環の準同型写像のについて簡単に述べる．環 $\mathbf{R}[\xi, \eta]$ から $\mathbf{R}[\xi]$ への写像 φ はつぎの 3 つの条件を満たすとき環の準同型写像という．

1. 任意の $a, b \in \mathbf{R}[\xi, \eta]$ に対して，$\varphi(a+b) = \varphi(a) + \varphi(b)$
2. 任意の $a, b \in \mathbf{R}[\xi, \eta]$ に対して，$\varphi(ab) = \varphi(a)\varphi(b)$
3. $\varphi(1) = 1$

環の準同型写像 φ が全単射のとき φ を同型写像という．また，環 A，B の間に同型写像が存在するとき，A と B は同型であるといい，$A \simeq B$ と表わす．準同型写像の核 $\mathrm{Ker}\varphi$ と像 $\mathrm{Im}\varphi$ はそれぞれつぎで定義される．

$$\mathrm{Ker}\varphi := \{a \in A : \varphi(a) = 0\}$$
$$\mathrm{Im}\varphi := \{\varphi(a) \in B : a \in A\}$$

A.3　アフィン多様体

多項式 $p_1, \ldots, p_s \in \mathbf{R}[\xi]$ が定義するアフィン多様体とは，つぎの集合のことをいう．

$$\mathbf{V}(p_1, \ldots, p_s) = \{\xi \in \mathbf{R}^n : p_i(\xi) = 0, i = 1, \ldots, s\}$$

イデアル $I \subset \mathbf{R}[\xi]$ が定義するアフィン多様体とは，つぎの集合のことをいう．

$$\mathbf{V}(I) = \{\xi \in \mathbf{R}^n : p(\xi) = 0, \forall p \in I\}$$

したがって，$\mathbf{V}(I)$ は I に含まれる多項式すべての共通零点集合である．イデアル $I \subset \mathbf{R}[\xi]$ が $p_1, \ldots, p_s \in \mathbf{R}[\xi]$ で生成されるとき

$$\mathbf{V}(I) = \mathbf{V}(p_1, \ldots, p_s)$$

が成り立つ．

部分集合 $A \subset \mathbf{R}^n$ を含む最小のアフィン多様体は A の Zariski 閉包と呼ばれ，$\overline{A}$ と記述される．その名の通り，アフィン多様体は，Zariski 位相における閉集合である．

アフィン多様体 $V \subset \mathbf{R}^n$ が既約であるとは，$V = V_1 \cup V_2$ であれば $V = V_1$ もしくは $V = V_2$ が成り立つことをいう．ただし，$V_1, V_2 \subset \mathbf{R}^n$ はアフィン多様体である．アフィン多様体 $V \subset \mathbf{R}^n$ を $V = V_1 \cup \cdots \cup V_s$ $(s \in \mathbf{Z}_+)$ と分解したとき，$V_i \not\subset V_j$ $(i \neq j)$ が成り立てばその分解は極小であるという．すべての多様体は極小分解を持つ．

アフィン多様体 $V \subset \mathbf{R}^n$ を用いて定義される集合

$$\mathbf{I}(V) = \{p \in \mathbf{R}[\xi] : p(\xi) = 0, \forall \xi \in V\}$$

は多項式環のイデアルである．このイデアルは根基であり，任意の $I \subset \mathbf{R}[\xi]$ に対して $I \subset \sqrt{I} \subset \mathbf{I}(\mathbf{V}(I))$ が成り立つ．代数的閉体上の多項式環，例えば $\mathbf{C}[\xi]$ のイデアルに対しては，$\sqrt{I} = \mathbf{I}(\mathbf{V}(I))$ が成り立つ．この結果は，Hilbert 零点定理 [21, 22, 24] として知られている．

A.4　イデアルやアフィン多様体の基本的性質

イデアルやアフィン多様体の性質のうち，本研究で用いたものを示す．

命題 A.1. $I, J \subset \mathbf{R}[\xi]$ をイデアルとし，$V, W \subset \mathbf{R}^n$ をアフィン多様体とする．このとき，つぎが成り立つ．

1. $I \supset J$ であれば $\mathbf{V}(I) \subset \mathbf{V}(J)$ が成り立つ．

2. $V \supset W$ であれば $\mathbf{I}(V) \subset \mathbf{I}(W)$ が成り立ち，また逆も正しい．

命題 A.2. $I, J \subset \mathbf{R}[\xi]$ をイデアルとし，$V, W \subset \mathbf{R}^n$ をアフィン多様体とする．

1. $\mathbf{V}(I+J) = \mathbf{V}(I) \cap \mathbf{V}(J)$.
2. $\mathbf{V}(I \cap J) = \mathbf{V}(I) \cup \mathbf{V}(J)$.
3. $\mathbf{I}(V \cup W) = \mathbf{I}(V) \cap \mathbf{I}(W)$.
4. $\mathbf{I}(V \cap W) = \sqrt{\mathbf{I}(V) + \mathbf{I}(W)}$.

命題 A.3. イデアル $I, J \subset \mathbf{R}[\xi]$ に対して，$\sqrt{I \cap J} = \sqrt{I} \cap \sqrt{J}$ が成り立つ．

命題 A.4. イデアル $I, J \subset \mathbf{R}[\xi]$ に対して，$IJ \subset I \cap J$ が成り立つ．

命題 A.5. アフィン多様体 $V \subset \mathbf{R}^n$ に対して，$\mathbf{V}(\mathbf{I}(V)) = V$ が成り立つ．

命題 A.6. アフィン多様体 $V \subset \mathbf{R}^n$ が既約であることと，イデアル $\mathbf{I}(V) \subset \mathbf{R}[\xi]$ が素であることは同値である．

命題 A.7. イデアル $q \subset \mathbf{R}[\xi]$ が素であれば，アフィン多様体 $\mathbf{V}(q) \subset \mathbf{R}^n$ は既約である．

命題 A.8. $\varphi : \mathbf{R}[\xi, \eta] \to \mathbf{R}[\xi]$ を環の準同型写像とする．イデアル $p \subset \mathbf{R}[\xi]$ が素であれば，$\varphi^{-1}(p) \subset \mathbf{R}[\xi, \eta]$ も素イデアルである．

命題 A.9. $\varphi : \mathbf{R}[\xi, \eta] \to \mathbf{R}[\xi]$ を環の準同型写像とし，イデアル $I, J \subset \mathbf{R}[\xi, \eta]$ が $\mathrm{Ker}\varphi \subset \mathbf{R}[\xi, \eta]$ を含むとする．$I = J$ と $\varphi(I) = \varphi(J)$ は同値である．

証明. 必要性は明らかなため，十分性を示す．$\varphi(I) = \varphi(J)$ より，$I \subset J + \mathrm{Ker}\varphi = J$ と $J \subset I + \mathrm{Ker}\varphi = I$ が成り立つ． □

命題 A.10. イデアル $I, J \subset \mathbf{R}[\xi]$ が $I \subset J$ を満たすとする．このとき，$(\mathbf{R}[\xi]/I)/(J/I) \simeq \mathbf{R}[\xi]/J$ が成り立つ．

命題 A.11. イデアル $I \subset \mathbf{R}[\xi]$ が素であることと $\mathbf{R}[\xi]/I$ が整域であることは同値である．

命題 A.12. アフィン多様体 $V \subset \mathbf{R}^n$ と $W \subset \mathbf{R}^m$ は既約であるとする．このとき，$V \times W \subset \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^m$ も既約多様体である．

命題 A.13. $f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$ を多項式写像とする．アフィン多様体 $V \subset \mathbf{R}^n$ が既約であれば，$\overline{f(V)}$ も既約である．

命題 A.14. $V \subset \mathbf{R}^n$ と $W_i \subset \mathbf{R}^n$ $(i = 1, 2, \ldots, s)$ を既約多様体とする．$V \not\subset W_i$ であれば $V \not\subset W_1 \cup \cdots \cup W_s$ が成り立つ．

証明. 命題 A.1 2) より，$\mathbf{I}(V) \not\supset \mathbf{I}(W_i)$ $(i = 1, \ldots, s)$ が成り立つ．$a_i \in \mathbf{I}(W_i) \setminus \mathbf{I}(V)$ $(i = 1, \ldots, s)$ とすると，$a_1 \cdots a_s \in \mathbf{I}(W_1) \cap \cdots \cap \mathbf{I}(W_s)$ を得る．命題 A.6 より，$\mathbf{I}(V)$ は素であるため，$a_1 \cdots a_s \notin \mathbf{I}(V)$ が成り立つ．したがって，$\mathbf{I}(V) \not\supset \mathbf{I}(W_1) \cap \cdots \cap \mathbf{I}(W_s)$ を得る．命題 A.1 2), A.2 3)，A.5 より，$V \not\subset W_1 \cup \cdots \cup W_s$ が成り立つ． □

命題 A.15. $I, J \subset \mathbf{R}[\xi]$ をイデアルとし，$p \subset \mathbf{R}[\xi]$ を素イデアルとする．このとき，$(I \cap J)_p = I_p \cap J_p$ が成り立つ．

命題 A.16. $I, J \subset \mathbf{R}[\xi]$ をイデアルとし，$p \subset \mathbf{R}[\xi]$ を素イデアルとする．このとき $I \not\subset p$ かつ $J \subset p$ が成り立てば，$(I \cap J)_p = J_p$ を得る．

証明. $(I \cap J)_p \subset J_p$ は明らかなため，$(I \cap J)_p \supset J_p$ を示す．包含関係 $I \not\subset p$ より，ある $a \in I$ が存在して $a \notin p$ が成り立つ．この a と任意の $b \in J$ に対して，$ab \in IJ \subset I \cap J$ を得る．したがって，任意の $b/r \in J_p$ $(b \in J, r \notin p)$ に対して $b/r = ab/ar \in (J \cap I)_p$ が成り立つ．いま，p は素であるため，$r \notin p$ かつ $a \notin p$ より $ar \notin p$ を得る． □

命題 A.17. $q \subset \mathbf{R}[\xi]$ を準素とし，$p \subset \mathbf{R}[\xi]$ を素とする．このとき，$q \subset p$ であれば $q_p \cap \mathbf{R}[\xi] = q$ を得る．

証明. p は素なため，$q \subset p$ より $\sqrt{q} \subset p$ を得る．つぎに，$\sqrt{q} \subset p$ より $q_p \cap \mathbf{R}[\xi] = q$ が成り立つことを示す．包含関係 $q_p \cap \mathbf{R}[\xi] \supset q$ は明らかなため，$q_p \cap \mathbf{R}[\xi] \subset q$ を示す．ここでは，対偶を示す．$(q_p \cap \mathbf{R}[\xi]) \not\subset q$ を仮定すると，ある $a \in (q_p \cap \mathbf{R}[\xi]) \setminus q$ が存在する．a の分子は q に属し，a の分母は p に属さない．したがって，ある $b \notin p$ が存在して $ab \in q$ が成り立つ．すなわち，$ab \in q$ が成り立つ．$a \notin q$ かつ $b \notin \sqrt{q}$ より，これは q が準素であることに矛盾する． □

定義 A.1. 位相空間 X が既約であるとは，$X = X_1 \cup X_2$ となる任意の閉部分集合 $X_1, X_2 \subset X$ に対して，$X = X_1$ もしくは $X = X_2$ が成り立つことをいう．

定義 A.2. 位相空間 X の Krull 次元とは，空でない既約な閉部分集合 $X_i \neq \emptyset$ の昇鎖列 $X_0 \subsetneq X_1 \subsetneq \cdots \subsetneq X_n$ の長さの最小上界のことである．これは $\dim X$ で表される．また，空集合の Krull 次元は -1 である．

定義 A.3. 環 $\mathbf{R}[\xi]$ の Krull 次元とは，素イデアル鎖 $p_0 \subsetneq p_1 \subsetneq \cdots \subsetneq p_n$ の長さの最小上界であり，$\dim \mathbf{R}[\xi]$ と記述される．さらに，イデアル $I \subset \mathbf{R}[\xi]$ の Krull 次元は，$\dim I := \dim \mathbf{R}[\xi]/I$ で定義される．

命題 A.18. $\mathbf{R}^n$ の Krull 次元は n である．

命題 A.19. アフィン多様体 $V \subset \mathbf{R}^n$ の Krull 次元とイデアル $\mathbf{I}(V)$ の Krull 次元は同値である．

命題 A.20. アフィン多様体 $V \subset \mathbf{R}^n$ の分解を $V = V_1 \cup V_2 \cup \cdots \cup V_r$ とする．ただし，$V_i \subset \mathbf{R}^n$ $(i = 1, \ldots, r)$ は既約とは限らないアフィン多様体である．このとき，$\dim V = \max\{\dim V_1, \ldots, \dim V_1\}$ が成り立つ．

命題 A.21. $V \subset \mathbf{R}^m$ と $W \subset \mathbf{R}^n$ をアフィン多様体とする．このとき，$\dim(V \times W) = \dim V + \dim W$ が成り立つ．

命題 A.22. V と $W \subset \mathbf{R}^n$ をアフィン多様体とする．このとき，$V \subset W$ であれば $\dim V \leq \dim W$ が成り立つ．さらに，W が既約であれば，$V \subsetneq W$ は $\dim V < \dim W$ を意味する．

命題 A.23. $U \subset \mathbf{R}^n$ を既約なアフィン多様体とし，$V \subset U$ かつ $W \subset U$ も既約とする．このとき，$V \cap W$ の極小分解の要素 Z は $\dim Z \geq \dim V + \dim W - \dim U$ を満たす．

付 録B　証明

B.1　定理2.4の証明

補題 B.1. 多項式システム Σ が初期状態 $\{\sigma\} \subset \mathbf{R}^n$ で局所可観測であるための必要十分条件は，ある近傍 $U(\sigma) \subset \mathbf{R}^n$ が存在して

$$\mathbf{V}(\mathcal{J}) \cap (U(\sigma) \times \{\sigma\}) = \{(\sigma, \sigma)\} \tag{B.1}$$

が成り立つことである．

証明. この定理は，$\mathbf{V}(\mathcal{J}) \cap (U(\sigma) \times \{\sigma\})$ がつぎの集合であることから明らかである．

$$\{(\xi, \sigma) \in \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n : \sigma \text{ と識別できない } \xi \in U(\sigma)\}$$

□

補題 B.2. アフィン多様体 $X \subset \mathbf{R}^n \times \{\sigma\} \subset \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n$ に対して，つぎが成り立つ．

1. あるアフィン多様体 $Y \subset \mathbf{R}^n$ が存在して，$X = Y \times \{\sigma\}$ が成り立つ．
2. X を既約とする．$X \supsetneq \{(\sigma, \sigma)\}$ が成り立てば，$X \cap (U(\sigma) \times \{\sigma\}) = \{(\sigma, \sigma)\}$ となるような近傍 $U(\sigma) \subset \mathbf{R}^n$ は存在しない．

1 の証明. X の定義より, ある $Y \subset \mathbf{R}^n$ が存在して $X = Y \times \{\sigma\}$ となる．X は Zariski 位相で閉集合なため，X の Zariski 閉包 $\overline{X}$ は X 自身である．したがって，

$$Y \times \{\sigma\} = \overline{Y \times \{\sigma\}} = \overline{Y} \times \overline{\{\sigma\}} = \overline{Y} \times \{\sigma\}$$

であり，$Y = \overline{Y}$ が成り立ち，Y はアフィン多様体である． □

2 の証明. 対偶を示す．ある近傍 $U(\sigma) \subset \mathbf{R}^n$ が存在して，$X \cap (U(\sigma) \times \{\sigma\}) = \{(\sigma, \sigma)\}$ であれば $Y \cap U(\sigma) = \{\sigma\}$ が成り立つ．既約多様体は連結部分集合であるため，Y の極小分解の要素の一つは $\{\sigma\}$ である．いま，X は既約なため，X の極小分解の要素はただ一つで，それは X である．したがって，$X = \{(\sigma, \sigma)\}$ であり $X \supsetneq \{(\sigma, \sigma)\}$ は成りたない． □

定理 2.4 を証明する．

定理 2.4 の 1 の証明．命題 A.2 の 2 と式 (2.13)，(2.24) より，

$$\mathbf{I}(W)=\mathbf{I}(\mathbf{V}(\mathcal{I})\cap(\mathbf{R}^n\times V))=\mathbf{I}(\mathbf{V}(\mathcal{I}))+\mathbf{I}(\mathbf{R}^n\times V)=\mathcal{I}+\mathbf{I}(V)\mathbf{R}[\xi,\eta] \tag{B.2}$$

が成り立つ．ただし，$\mathbf{I}(V)\subset\mathbf{R}[\eta]$ である．命題 A.6 より，$\mathcal{I}+\mathbf{I}(V)\mathbf{R}[\xi,\eta]$ が素イデアルであることを示せばよい．V は既約なため，$\mathbf{I}(V)\subset\mathbf{R}[\xi,\eta]$ は素である．写像 $\varphi:\mathbf{R}[\xi,\eta]^n\ni\xi\mapsto\eta\in\mathbf{R}[\eta]^n$ の核は $\mathcal{I}$ であるため，命題 A.8 より $\varphi^{-1}(\mathbf{I}(V))=\mathcal{I}+\mathbf{I}(V)\mathbf{R}[\xi,\eta]$ は素である．□

定理 2.4 2a) を証明するためにつぎを示す．

$$\dim W=\dim V \tag{B.3}$$

包含関係 $W\subset\mathbf{V}(\mathcal{I})$ より, 命題 A.1 2)，(2.13) を用いれば $\mathbf{I}(W)\supset\mathbf{I}(\mathbf{V}(\mathcal{I}))=\mathcal{I}$ が成り立つ．また，式 (B.2) より $\mathbf{I}(W)=\mathbf{I}(V)\mathbf{R}[\xi,\eta]+\mathcal{I}$ となる．ただし，$\mathbf{I}(V)\subset\mathbf{R}[\eta]$ に注意する．命題 A.10 より，つぎを得る．

$$\begin{aligned}\mathbf{R}[\xi,\eta]/\mathbf{I}(W) &\simeq (\mathbf{R}[\xi,\eta]/\mathcal{I})/(\mathbf{I}(W)/\mathcal{I})\\ &= (\mathbf{R}[\xi,\eta]/\mathcal{I})/((\mathbf{I}(V)\mathbf{R}[\xi,\eta]+\mathcal{I})/\mathcal{I})\\ &= (\mathbf{R}[\xi,\eta]/\mathcal{I})/(\mathbf{I}(V)\mathbf{R}[\xi,\eta]/\mathcal{I})\simeq\mathbf{R}[\eta]/\mathbf{I}(V)\end{aligned}$$

したがって，$\dim\mathbf{I}(W)=\dim\mathbf{I}(V)$ が成り立つ．ここで，$\mathcal{I}$ が $\varphi:\mathbf{R}[\xi,\eta]^n\ni\xi\mapsto\eta\in\mathbf{R}[\eta]^n$ の核であることを用いた．命題 A.19 より，式 (B.3) が成り立つ．

定理 2.4 の 2a の証明．$X_j\subset\mathbf{R}^n\times\mathbf{R}^n$ $(j=0,1,\ldots,s)$ の中で $W\subset\mathbf{R}^n\times\mathbf{R}^n$ を含むものが一つ存在することを示す．式 (2.23) より $X_0\cup\cdots\cup X_s\supset W$ が成り立つ．ただし，W と X_j $(j=0,1,\ldots,s)$ は既約である．命題 A.14 より，W を含む X_j が少なくとも一つ存在する．

システムがある初期状態 $x_0\in V$ で局所可観測であれば，$X_0\cup\cdots\cup X_t=W$ が成り立つことを示す．ここでは対偶を示す．$X_0\cup\cdots\cup X_t=W$ が成り立たねば，$X_0\cup\cdots\cup X_t\supsetneq W$ が成り立つ．極小分解の性質 $X_i\not\supset X_j$ $(i\neq j)$ より，$X_i\supsetneq W$ $(i=0,\ldots,t)$ が成り立つ．

X_0 について考える．命題 A.22 と式 (B.3) より，

$$\dim X_0>\dim V \tag{B.4}$$

が成り立つ．他方，$X_0\supsetneq W:=\mathbf{V}(\mathcal{I})\cap(\mathbf{R}^n\times V)$ と式 (2.12) より，任意の $x_0\in V$ に対して

$$X_0\cap(\mathbf{R}\times\{x_0\})\supset W\cap(\mathbf{R}\times\{x_0\})\supset\{(x_0,x_0)\}$$

が成り立つ．

命題 A.23 を用いて，$X_0 \cap (\mathbf{R} \times \{x_0\}) \supset \{(x_0, x_0)\}$ が強い包含関係であることを示す．$X_0 \cap (\mathbf{R} \times \{x_0\})$ の極小分解の要素のうち $\{(x_0, x_0)\}$ を含むものを $U \subset \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n$ と表す．命題 A.14 より，そのような U は必ず存在する．ここで，$X_0 \subset \mathbf{R}^n \times V$ が既約であることと，命題 A.12 より $\mathbf{R}^n \times \{x_0\}$ と $\mathbf{R}^n \times V$ が既約であることに注する．命題 A.21，A.23 より，U は

$$
\begin{aligned}
\dim U &\geq \dim X_0 + \dim(\mathbf{R}^n \times \{x_0\}) - \dim(\mathbf{R}^n \times V) \\
&= \dim X_0 + (\dim \mathbf{R}^n + \dim\{x_0\}) - (\dim \mathbf{R}^n + \dim V) \\
&= \dim X_0 + \dim\{x_0\} - \dim V = \dim X_0 - \dim V
\end{aligned}
$$

を満たす．ただし，$\dim\{x_0\} = 0$ を用いた．式 (B.4) より，$\dim U > 0$ が成り立つ．したがって，命題 A.22 より，$U \supsetneq \{(x_0, x_0)\}$ が成り立つ．この式より，つぎを得る．

$$
X_0 \cap (\mathbf{R} \times \{x_0\}) \supset U \supsetneq \{(x_0, x_0)\} \tag{B.5}
$$

$U \subset \mathbf{R} \times \{x_0\}$ であるため，補題 B.2 より，任意の近傍 $U(x_0) \subset \mathbf{R}^n$ が存在して

$$
U \cap (U(x_0) \times \{x_0\}) \supsetneq \{(x_0, x_0)\} \tag{B.6}
$$

が成り立つ．式 (B.5)，(B.6) と X_0 の定義より，任意の $x_0 \in V$ に対して

$$
\mathbf{V}(\mathcal{J}) \cap (U(x_0) \times \{x_0\}) \supset X_0 \cap (U(x_0) \times \{x_0\}) \supset U \cap (U(x_0) \times \{x_0\}) \supsetneq \{(x_0, x_0)\} \tag{B.7}
$$

が成り立つ．補題 B.1 より，システムが局所可観測であるような初期状態 $x_0 \in V$ は存在しない．　□

定理 2.4 の 2b の証明．x_0 を $V \setminus \hat{V}$ の元とする．このとき $\{(x_0, x_0)\} \not\subset X$ であり，

$$
\{(x_0, x_0)\} \not\subset X \cap (\mathbf{R}^n \times \{x_0\})
$$

が成り立つ．補題 B.2 1) より，ある多様体 $Y \subset \mathbf{R}^n$ が存在して

$$
Y \times \{x_0\} = X \cap (\mathbf{R}^n \times \{x_0\}), \tag{B.8}
$$

となるため，つぎを得る．

$$
\{(x_0, x_0)\} \not\subset Y \times \{x_0\}. \tag{B.9}
$$

すなわち，$\{x_0\}$ は Y に含まれない．Zariski 位相でアフィン多様体は閉集合であり，$\{x_0\}$ を含む $\mathbf{R}^n \setminus Y$ は $\mathbf{R}^n$ の開部分集合である．したがって，$Y \cap U(x_0)$ が空となるような近傍 $U(x_0) \subset \mathbf{R}^n$ が存在する．以上をまとめると，式 (2.26), (B.8)，(B.9) よりつぎが成り立つ．

$$\begin{aligned}
\mathbf{V}(\mathcal{J}) \cap (U(x_0) \times \{x_0\}) &= \mathbf{V}(\mathcal{J}) \cap ((\mathbf{R}^n \times V) \cap (U(x_0) \times \{x_0\})) \\
&= (W \cup X) \cap (U(x_0) \times \{x_0\}) \\
&= (W \cap (U(x_0) \times \{x_0\})) \cup (X \cap (U(x_0) \times \{x_0\})) \\
&= (W \cap (U(x_0) \times \{x_0\})) \cup (X \cap ((U(x_0) \times \{x_0\}) \cap (\mathbf{R}^n \times \{x_0\}))) \\
&= (W \cap (U(x_0) \times \{x_0\})) \cup ((Y \times \{x_0\}) \cap (U(x_0) \times \{x_0\})) \\
&= (W \cap (U(x_0) \times \{x_0\})) \cup ((Y \cap U(x_0)) \times \{x_0\}) \\
&= W \cap (U(x_0) \times \{x_0\})
\end{aligned}$$

包含関係 $W \subset \mathbf{V}(\mathcal{I})$ が成り立つため，式 (2.12) よりある $\tilde{V} \subset \mathbf{R}^n$ が存在して $W = \bigcup_{\tilde{V}} \{(x_0, x_0)\}$ となる．この $\tilde{V}$ は V に他ならない．したがって，任意の $x_0 \in V \setminus \hat{V}$ に対して $W \cap (U(x_0) \times \{x_0\}) = \{(x_0, x_0)\}$ が成り立つ．以上より，つぎを得る．

$$\mathbf{V}(\mathcal{J}) \cap (U(x_0) \times \{x_0\}) = \{(x_0, x_0)\}$$

補題 B.1 より，システムは $V \setminus \hat{V}$ で局所可観測である． □

定理 2.4 の 2c の証明. $W \cap X \subset \mathbf{V}(\mathcal{I})$ が成り立つため，式 (2.12) より $W \cap X = \bigcup_{x_0 \in \hat{V}} \{(x_0, x_0)\}$ を得る．

多項式写像 $d : \mathbf{R}^n \ni x_0 \mapsto (x_0, x_0) \in \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n$ について考える．Zariski 位相で多項式写像は連続 [74] であり，アフィン多様体は閉集合である．したがって，逆像 $d^{-1}(W \cap X) \subset \mathbf{R}^n$ はアフィン多様体であり，これは $\hat{V}$ に他ならない．したがって，$\hat{V}$ はアフィン多様体である．

つぎに，$W \not\subset X$ を示す．これは $X = \emptyset$ であれば明らかなため，$X \neq \emptyset$ を仮定する．すなわち，$W \not\subset X_j$ $(j = t+1, \ldots, s)$ となる X_j の存在を仮定する．$X_0 \cup \cdots \cup X_t = W$ が成り立てば，命題 A.14 と極小分解の性質 $X_i \not\subset X_j$ $(i \neq j)$ より，$W \not\subset X$ が成り立つ．これは $W \supsetneq W \cap X$ を意味する．$W = \bigcup_{x_0 \in V} \{(x_0, x_0)\}$ と $W \cap X = \bigcup_{x_0 \in \hat{V}} \{(x_0, x_0)\}$ に注意すると，$\bigcup_{x_0 \in V} \{(x_0, x_0)\} \supsetneq \bigcup_{x_0 \in \hat{V}} \{(x_0, x_0)\}$ が成り立ち，さらに $V \supsetneq \hat{V}$ を得る．V は既約なため，命題 A.22 より $\dim V > \dim \hat{V}$ が成り立つ． □

定理 2.4 の証明に基づいて，系 2.2 を証明する．

系 2.2 の 1 の証明. $I \subset \mathbf{R}[\eta]$ は素なため，定理 2.4 の 1 の証明より $J := \mathcal{I} + I\mathbf{R}[\xi, \eta] \subset \mathbf{R}[\xi, \eta]$ も素である． □

系 2.2 の 2a の証明．命題 A.2 1)，2) と式 (2.24) より，

$$\mathbf{V}(\mathcal{J}) \cap (\mathbf{R}^n \times \mathbf{V}(I)) = \mathbf{V}(\mathcal{J} + I\mathbf{R}[\xi,\eta]) = \mathbf{V}(q_0 \cap \cdots \cap q_s) = \mathbf{V}(q_0) \cup \cdots \cup \mathbf{V}(q_s)$$

が成り立つ．ただし，命題 A.7 より $\mathbf{V}(q_j) \subset \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n$ $(j = 0, 1, \ldots, s)$ は既約である．また，つぎを得る．

$$\mathbf{V}(\mathcal{I}) \cap (\mathbf{R}^n \times \mathbf{V}(I)) = \mathbf{V}(\mathcal{I} + I\mathbf{R}[\xi,\eta]) = \mathbf{V}(J)$$

式 (2.23) より，つぎが成り立つ．

$$\mathbf{V}(q_0) \cup \cdots \cup \mathbf{V}(q_s) \supset \mathbf{V}(J)$$

以上より，定理 2.4 の 2a の証明と同様にして，システムがある $x_0 \in \mathbf{V}(I)$ で局所可観測であれば $\mathbf{V}(q_0 \cap \cdots \cap q_t) = \mathbf{V}(J)$ が成り立つことを示せる． □

系 2.2 の 2b の証明．定理 2.4 の 2b の証明より，つぎを示せばよい．

$$\mathbf{V}(\hat{I}) = \{x_0 \in \mathbf{R}^n : (x_0, x_0) \in \mathbf{V}(J) \cap \mathbf{V}(q)\} \tag{B.10}$$

式 (2.12) より，つぎの等式が成り立つ．

$$\mathbf{V}(\hat{I}) = \{x_0 \in \mathbf{R}^n : (x_0, x_0) \in \mathbf{V}(\mathcal{I}) \cap (\mathbf{R}^n \times \mathbf{V}(\hat{I}))\} \tag{B.11}$$

命題 A.2 1) と式 (2.24) より，

$$\mathbf{V}(\mathcal{I}) \cap (\mathbf{R}^n \times \mathbf{V}(\hat{I})) = \mathbf{V}(\mathcal{I} + \hat{I}\mathbf{R}[\xi,\eta]) \tag{B.12}$$

を得る．他方，$\hat{I} \subset \mathbf{R}[\eta]$ の定義より，

$$\hat{I} = \varphi(J + q)$$

が成り立つ．ただし，$\varphi : \mathbf{R}[\xi,\eta] \ni \xi \mapsto \eta \in \mathbf{R}[\eta]$ であり，その核は $\mathcal{I} \subset \mathbf{R}[\xi,\eta]$ である．したがって，$\varphi^{-1}(\hat{I}) = \varphi^{-1}(\varphi(J + q))$ であり，これより

$$\mathcal{I} + \hat{I}\mathbf{R}[\xi,\eta] = J + q \tag{B.13}$$

が成り立つ．式 (B.11)–(B.13) と命題 A.2 1) より，式 (B.10) が成り立つ． □

系 2.2 の 2c の証明．まず，$\mathbf{V}(J) \not\subset \mathbf{V}(q)$ を示す．$q = \mathbf{R}[\xi,\eta]$ のとき，これは明らかなため，$q \neq \mathbf{R}[\xi,\eta]$ と仮定する．すなわち，ある $q_j \subset \mathbf{R}[\xi,\eta]$ $(j = t+1, \ldots, s)$ が存在して，$\mathbf{V}(J) \not\subset \mathbf{V}(q_j)$ を満たすとする．このとき，命題 A.7 より，$\mathbf{V}(J) \subset \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n$ と $\mathbf{V}(q_j) \subset \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n$ $(j = t+1, \ldots, s)$ は既約である．命題 A.14 より，$\mathbf{V}(J) \not\subset \mathbf{V}(q_{t+1}) \cup \cdots \cup \mathbf{V}(q_s)$ が成り立ち，さらに命題 A.2 2) を用いると $\mathbf{V}(J) \not\subset \mathbf{V}(q_{t+1} \cap \cdots \cap q_s) = \mathbf{V}(q)$ が成り立つ．式 (B.10) と

$$\mathbf{V}(I) = \{x_0 \in \mathbf{R}^n : (x_0, x_0) \in \mathbf{V}(J)\}$$

が成り立つことから，定理 2.4 の 2c の証明と同様にして，$\dim \mathbf{V}(I) > \dim \mathbf{V}(\hat{I})$ を示せる． □

B.2　補題 3.4 の証明に用いた補題

補題 B.3. イデアル $I \subset \mathbf{R}[\xi]$ と同じ生成元を持つ $\mathbf{R}[\xi, \eta]$ のイデアルを $I\mathbf{R}[\xi, \eta]$ と記述する．このとき，$\varphi_\sigma(I\mathbf{R}[\xi, \eta]) = I$ が成り立つ．

証明. イデアル $I\mathbf{R}[\xi, \eta]$ は $\mathbf{R}[\xi]$ の多項式のみを生成元に持つイデアルある．いま，$\varphi_\sigma : \mathbf{R}[\xi, \eta] \to \mathbf{R}[\xi]$ は，η に $\sigma \in \mathbf{R}^n$ を代入する写像であった．したがって，$I\mathbf{R}[\xi, \eta]$ を φ_σ で写しても，その生成元は変化せず，I が得られる． □

補題 B.4. イデアル $I \subset \mathbf{R}[\xi, \eta]$ に対して，

$$\varphi_\sigma(\mathbf{I}(\mathbf{V}(I + \mathrm{Ker}\varphi_\sigma))) = \mathbf{I}(\mathbf{V}(\varphi_\sigma(I)))) \tag{B.14}$$

が成り立つ．

証明. イデアル $\varphi_\sigma(I) \subset \mathbf{R}[\xi]$ と同じ生成元を持つ $\mathbf{R}[\xi, \eta]$ のイデアルを $\varphi_\sigma(I)\mathbf{R}[\xi, \eta]$ と記述すると，

$$\varphi_\sigma(\varphi_\sigma(I)\mathbf{R}[\xi, \eta] + \mathrm{Ker}\varphi_\sigma) = \varphi_\sigma(\langle \varphi_\sigma(I), 0 \rangle) = \varphi_\sigma(I) = \varphi_\sigma(I + \mathrm{Ker}\varphi_\sigma) \tag{B.15}$$

が成り立つ．ただし，第 2 式から第 3 式への式展開で補題 B.3 を用いた．写像 $\varphi_\sigma : \mathbf{R}[\xi, \eta] \to \mathbf{R}[\xi]$ は全射であり，命題 A.9 より $\mathbf{R}[\xi, \eta]$ の $\mathrm{Ker}\varphi_\sigma$ を含むイデアルと $\varphi_\sigma(\mathbf{R}[\xi, \eta]) = \mathbf{R}[\xi]$ のイデアルは 1 対 1 で対応するため，式 (B.15) より，

$$\varphi_\sigma(I)\mathbf{R}[\xi, \eta] + \mathrm{Ker}\varphi_\sigma = I + \mathrm{Ker}\varphi_\sigma \tag{B.16}$$

が成り立つ．左辺のイデアルに対応するアフィン代数多様体を計算する．命題 A.2 の 1 より，

$$\mathbf{V}(\varphi_\sigma(I)\mathbf{R}[\xi, \eta] + \mathrm{Ker}\varphi_\sigma) = \mathbf{V}(\varphi_\sigma(I)\mathbf{R}[\xi, \eta]) \cap \mathbf{V}(\mathrm{Ker}\varphi_\sigma)$$

となり，$\mathbf{V}(\varphi_\sigma(I)\mathbf{R}[\xi, \eta]) = \mathbf{V}(\varphi_\sigma(I)) \times \mathbf{R}^n$ と $\mathbf{V}(\mathrm{Ker}\varphi_\sigma) = \mathbf{R}^n \times \{\sigma\}$ を用いると，

$$\mathbf{V}(\varphi_\sigma(I)\mathbf{R}[\xi, \eta] + \mathrm{Ker}\varphi_\sigma) = \mathbf{V}(\varphi_\sigma(I)) \times \{\sigma\} \tag{B.17}$$

となる．式 (B.16)，(B.17) を用いて，$\mathbf{V}(I + \mathrm{Ker}\varphi_\sigma)$ を計算すると

$$\mathbf{V}(I + \mathrm{Ker}\varphi_\sigma) = \mathbf{V}(\varphi_\sigma(I)\mathbf{R}[\xi, \eta] + \mathrm{Ker}\varphi_\sigma) = \mathbf{V}(\varphi_\sigma(I)) \times \{\sigma\}$$

となる．両辺定義イデアルを計算すると，

$$\mathbf{I}(\mathbf{V}(I + \mathrm{Ker}\varphi_\sigma)) = \mathbf{I}(\mathbf{V}(\varphi_\sigma(I)) \times \{\sigma\})$$

となり，右辺は命題 A.2 の 4 より，

$$\mathbf{I}(\mathbf{V}(\varphi_\sigma(I)) \times \{\sigma\}) = \sqrt{\langle \mathbf{I}(\mathbf{V}(\varphi_\sigma(I)), \mathbf{I}(\{\sigma\}) \rangle}$$

を満たすため

$$\mathbf{I}(\mathbf{V}(I + \mathrm{Ker}\varphi_\sigma)) = \sqrt{\langle \mathbf{I}(\mathbf{V}(\varphi_\sigma(I))), \mathbf{I}(\{\sigma\}) \rangle}$$

が成り立つ．ただし，$\mathbf{I}(\mathbf{V}(\varphi_\sigma(I))) \subset \mathbf{R}[\xi]$，$\mathbf{I}(\{\sigma\}) \subset \mathbf{R}[\eta]$ である．この等式は両辺を φ_σ で写しても成り立ち，

$$\varphi_\sigma(\mathbf{I}(\mathbf{V}(I + \mathrm{Ker}\varphi_\sigma))) = \varphi_\sigma\left(\sqrt{\langle \mathbf{I}(\mathbf{V}(\varphi_\sigma(I))), \mathbf{I}(\{\sigma\}) \rangle}\right)$$

となる．写像 φ_σ は $\mathbf{R}[\xi, \eta]$ の不定元 $\eta_i \in \mathbf{R}[\xi, \eta]$ に実数 $\sigma_i \in \mathbf{R}$ $(i = 1, \ldots, n)$ を代入する写像であるため，右辺に対して，

$$\varphi_\sigma\left(\sqrt{\langle \mathbf{I}(\mathbf{V}(\varphi_\sigma(I))), \mathbf{I}(\{\sigma\}) \rangle}\right) = \varphi_\sigma\left(\sqrt{\langle \mathbf{I}(\mathbf{V}(\varphi_\sigma(I))), \langle 0 \rangle \rangle}\right)$$

が成り立つ．$\mathbf{I}(\mathbf{V}(\varphi_\sigma(I)))$ は根基イデアルであるため，$\langle \mathbf{I}(\mathbf{V}(\varphi_\sigma(I))), \langle 0 \rangle \rangle \subset \mathbf{R}[\xi]$ も根基イデアルであり，

$$\varphi_\sigma\left(\sqrt{\langle \mathbf{I}(\mathbf{V}(\varphi_\sigma(I))), \langle 0 \rangle \rangle}\right) = \varphi_\sigma\left(\langle \mathbf{I}(\mathbf{V}(\varphi_\sigma(I))), \langle 0 \rangle \rangle\right)$$

が成り立つ．補題 B.3 より，

$$\varphi_\sigma\left(\langle \mathbf{I}(\mathbf{V}(\varphi_\sigma(I))), \langle 0 \rangle \rangle\right) = \mathbf{I}(\mathbf{V}(\varphi_\sigma(I)))$$

が成り立つため，式 (B.14) が成り立つ．　□

B.3　0 次元イデアルの性質

0 次元イデアルの性質について述べる．

補題 B.5. 0 次元根基イデアル $I \subset K[p]$ は n 個の元 $F_1, \ldots, F_n \in K[p]$ で生成できる．さらに，$F := [F_1, \ldots, F_n]^{\mathrm{T}}$ としたとき，$\partial F / \partial x$ は任意の $\mathbf{V}(I)$ の元で正則である．

証明. 0 次元根基イデアル $I \subset K[p]$ は n 個の元で必ず生成できる [70]．これらを $F_1, \ldots, F_n$ とし，さらに $F := [F_1, \ldots, F_n]^{\mathrm{T}}$ とする．0 次元根基イデアル I に対して，$I \cap K[p_i] = \langle \Phi_i(p_i) \rangle$ $(i = 1, \ldots, n)$ を得る．ただし，各 Φ_i はスクエアフリー [22] である．すなわち，重根を持たない．$\Phi_i \in I$ より，ある $s_{ij} \in K[p]$ が存在して，$\Phi_i(p_i) = s_{i1}(p)F_1(p) + \cdots + s_{in}(p)F_n(p)$ と

なる．すなわち，$\Phi(p) = [\Phi_1(p_1), \ldots, \Phi_n(p_n)]^{\mathrm{T}} \in K[p]^n$ と $S(p) = (s_{ij}(p)) \in K[p]^{n\times n}$ に対して $\Phi(p) = S(p)F(p)$ となる．各点 $p_0 \in \mathbf{V}(I)$ で $\Phi(p)$ の Jacobi 行列を計算すると

$$\det\left(\frac{\partial\Phi}{\partial p}(p_0)\right) = \frac{\partial\Phi_1}{\partial p_1}(p_{0_1})\cdots\frac{\partial\Phi_n}{\partial p_n}(p_{0_n}) = \det S(p_0)\det\left(\frac{\partial F}{\partial p}(p_0)\right).$$

となる．ただし，$\partial\Phi/\partial p(p_0)$ を計算したときに現れる $(\partial S/\partial p_i)(p_0)F(p_0)$ $(i = 1, \ldots, n)$ は $\mathbf{V}(I)$ で消えることに注意する．各 $\Phi_i(p_i)$ はスクエアフリーであるため重根を持たず，任意の $p_0 \in \mathbf{V}(I)$ に対して $\partial\Phi_i(p_0)/\partial p_i \neq 0$ $(i = 1, \ldots, n)$ が成り立つ．したがって，任意の $p_0 \in \mathbf{V}(I)$ に対して $\det(\partial\Phi(p_0)/\partial p) \neq 0$ が成り立つ．これは，任意の $p_0 \in \mathbf{V}(I)$ に対して $\det(\partial F(p_0)/\partial p) \neq 0$ が成り立つことを意味する． □

補題 B.6. [68] 0 次元根基イデアル $I \subset K[p]$ の極小準素分解を $M_1 \cap M_2 \cap \cdots \cap M_t$ とする．このとき，M_i $(i = 1, \ldots, t)$ は極大イデアルである．

補題 B.7. $Q_1, Q_2 \subset K_t[p]$ が準素イデアルかつ $\sqrt{Q_1} \subset \sqrt{Q_2}$ であれば $Q_1 \cap Q_2$ も準素イデアルである．

証明. 命題 A.3 より，$\sqrt{Q_1 \cap Q_2} = \sqrt{Q_1} \cap \sqrt{Q_2}$ であり，$\sqrt{Q_1} \subset \sqrt{Q_2}$ は $\sqrt{Q_1 \cap Q_2} = \sqrt{Q_1}$ を意味する．$Q_1 \cap Q_2$ が準素イデアルであることを示す．$a, b \in K_t[p]$ に対して，$ab \in Q_1 \cap Q_2 \subset Q_1$ が成り立つとする．Q_1 は準素なため，$a \notin Q_1$ より $b \in \sqrt{Q_1} = \sqrt{Q_1 \cap Q_2}$ が成り立つ．他方，$a \in Q_1$ であれば $a \in \sqrt{Q_1} = \sqrt{Q_1 \cap Q_2}$ である．したがって，$Q_1 \cap Q_2$ は準素イデアルである． □

定理 B.1. イデアル $I \subset K_t[p]$ の準素分解を $I = \bigcap_{i=1}^r Q_i$ とする．このとき，$\sqrt{Q_i} \not\supset \sqrt{Q_j}$ $(i \neq j)$ かつ $Q_i \not\supset \bigcap_{j\neq i} Q_j$ となるように分解できる．

証明. イデアル $I \subset K_t[p]$ は極小準素分解 [21, 23, 24] を持つ．すなわち，$\sqrt{Q_i}$ は相異なり，かつ $Q_i \not\supset \bigcap_{j\neq i} Q_i$ となるように I を準素分解できる．

いま，Q_k と Q_l の根基が $\sqrt{Q_k} \supset \sqrt{Q_l}$ を満たすとする．補題 B.7 より，$Q = Q_k \cap Q_l$ は準素である．このため，I の極小準素分解において Q_k と Q_l を Q に置き換える．この操作を繰り返すと，最終的には $\sqrt{Q_k} \not\supset \sqrt{Q_l}$ となるように I を分解できる．

つぎに，Q_k と Q_l を Q に置き換えても，$Q_i \not\supset \bigcap_{j\neq i} Q_j$ が成り立つことを示す．包含関係 $Q_i \not\supset \bigcap_{j\neq i} Q_j$ より，$Q_k \not\supset \bigcap_{j\neq k,l} Q_j$ かつ $Q_l \not\supset \bigcap_{j\neq k,l} Q_j$ が成り立つため，$Q = Q_k \cap Q_l \not\supset \bigcap_{j\neq k,l} Q_j$ を得る． □

補題 B.8. イデアル $I \subset K_t[p]$ が定理 B.1 のように分解されたとする．このとき，$\sqrt{Q_i} \not\supset \bigcap_{j\neq i} Q_j$ が成り立つ．

証明. 一般性を失うことなく $i=0$ の場合について考える．$\sqrt{Q_i}$ は相異なるため，ある $b_j \in K_t[p]$ $(j=1,\dots,s)$ が存在して $b_j \in \sqrt{Q_j} \setminus \sqrt{Q_0}$ となる．また，$\sqrt{Q_0}$ は素であるため，$b_1 b_2 \cdots b_s \notin \sqrt{Q_0}$ が成り立つ．他方，命題 A.4 より，$\sqrt{Q_1}\sqrt{Q_2}\cdots\sqrt{Q_s} \subset \sqrt{Q_1} \cap \cdots \cap \sqrt{Q_s}$ が成り立ち，補題 A.3 より $b_1 b_2 \cdots b_s \in \sqrt{Q_1 \cap \cdots \cap Q_s}$ が成り立つ．ここで，$b_1 b_2 \cdots b_s$ を b と表す．以上をまとめると，$b \in \sqrt{Q_1 \cap \cdots \cap Q_s} \setminus \sqrt{Q_0}$ となる．根基の定義より，ある正の整数 m が存在して，$b^m \in Q_1 \cap \cdots \cap Q_s$ となる．$\sqrt{Q_0}$ は素であるため $b^m \notin \sqrt{Q_0}$ が成り立つ．したがって，$\sqrt{Q_0} \not\supset \bigcap_{j=1}^{s} Q_j$ である．□

命題 B.1. $L \supset K$ を代数拡大とし，$\alpha_1,\dots,\alpha_n \in L$ とするとつぎが成り立つ．

1. $K[\alpha_1,\dots,\alpha_n] = K(\alpha_1,\dots,\alpha_n)$
2. x_i を α_i に写像する K 上の環準同型写像 $\varphi : K[x_1,\dots,x_n] \to K(\alpha_1,\dots,\alpha_n)$ の核は $F_1(x_1), F_2(x_1,x_2),\dots,F_n(x_1,\dots,x_n)$ の形の n 個の元で生成される極大イデアルである．$F_i(X_1,\dots,X_i)$ は X_i についてモニックである．

補題 B.9. (Shape lemma) [75] イデアル $I \subset K[p]$ を p_1 で正則な 0 次元根基イデアルとする．このとき，ある $a_1, a_2 \dots, a_n \in K[p_1]$ が存在して，a_1 はスクエアフリーかつ $\deg(a_i) < \deg(a_1)$ $(i=2,3,\dots,n)$ を満たす．さらに，イデアル I の辞書式順序 $p_1 < p_2 < \cdots < p_n$ における Gröbner 基底はつぎのように求まる．

$$\{a_1, p_2 - a_2, \dots, p_n - a_n\}.$$

逆に，イデアル I の順序 $<$ に関する Gröbner 基底が上のように得られたとき，I は 0 次元根基イデアルである．

B.4　H 不変性

イデアルの H 不変性と包合性に関してつぎが成り立つ．

補題 B.10. 多項式 $F_1, F_2, \dots, F_m \in K[p]$ で生成されるイデアルを $I \subset K[p]$ とする．I が H 不変であるための必要十分条件は $\partial F_i/\partial t + \{F_i, H\} \in I$ $(i=1,\dots,m)$ が成り立つことである．

証明. 必要性は，$F_i \in I$ $(i=1,\dots,m)$ より明らかなため，十分性について考える．$\Phi \in I$ は，$\Phi = \sum_{i=1}^{m} s_i F_i$, $s_i \in K[p]$ と表現できるため，

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \{\Phi, H\} = \sum_{i=1}^{m} s_i \left(\frac{\partial F_i}{\partial t} + \{F_i, H\} \right) + F_i \left(\frac{\partial s_i}{\partial t} + \{s_i, H\} \right).$$

が成り立つ．$\partial F_i/\partial t + \{F_i, H\} \in I$ と $F_i \in I$ より，$\partial \Phi/\partial t + \{\Phi, H\} \in I$ となり，I は H 不変である．□

補題 B.11. 根基イデアル $I \subset K[p]$ の極小準素分解を $P_1 \cap P_2 \cap \cdots \cap P_s$ とする．ただし，P_i $(i = 1, \ldots, s)$ は素イデアルである．イデアル I が H 不変であれば，各 $P_1, \ldots, P_s$ も H 不変である．

証明. 命題 A.4 より，任意の $a \in P_1$ と $b \in P_2 \cap \cdots \cap P_s$ に対して，$ab \in P_1(P_2 \cap \cdots \cap P_n) \subset P_1 \cap \cdots \cap P_s$ が成り立つ．極小準素分解の性質より，ある $b \in (P_2 \cap \cdots \cap P_s) \setminus P_1$ が存在する．$I = P_1 \cap \cdots \cap P_s$ が H 不変であれば，$\partial(ab)/\partial t + \{ab, H\} \in P_1 \cap \cdots \cap P_n$ が任意の $a \in P_1$ と $b \in (P_2 \cap \cdots \cap P_s) \setminus P_1$ に対して成り立つ．$\partial(ab)/\partial t + \{ab, H\}$ を展開すると

$$\frac{\partial(ab)}{\partial t} + \{ab, H\} = a\left(\frac{\partial b}{\partial t} + \{b, H\}\right) + b\left(\frac{\partial a}{\partial t} + \{a, H\}\right) \in P_1 \cap \cdots \cap P_s$$

となり，包含関係 $P_1 \cap \cdots \cap P_s \subset P_1$ より

$$a\left(\frac{\partial b}{\partial t} + \{b, H\}\right) + b\left(\frac{\partial a}{\partial t} + \{a, H\}\right) \in P_1$$

を得る．また，$a \in P_1$ より $a\,(\partial b/\partial t + \{b, H\}) \in P_1$ である．したがって，$b\,(\partial a/\partial t + \{a, H\}) \in P_1$ が成り立つ．P_1 は素イデアルなため，$b\,(\partial a/\partial t + \{a, H\}) \in P_1$ より，$b \in P_1$ もしくは $(\partial a/\partial t + \{a, H\}) \in P_1$ のどちらかが成り立つ．いま，$b \notin P_1$ であったため，$\partial a/\partial t + \{a, H\} \in P_1$ となる．すなわち，P_1 は H 不変である．同様にして，$P_2, \ldots, P_s$ も H 不変である．□

補題 B.6，B.11 よりつぎを得る．

命題 B.2. H 不変な 0 次元根基イデアルが存在するための必要十分条件は，H 不変な極大イデアルが存在することである．

証明. 補題 B.6 より，0 次元根基イデアル $I \subset K_t[p]$ の極小準素分解は，有限個の極大イデアル $M_1, \ldots, M_s$ の交わりである．I は根基イデアルであり，M_i $(i = 1, \ldots, s)$ は素イデアルであるため，I が H 不変であれば補題 B.11 より各極大イデアル M_i $(i = 1, \ldots, s)$ も H 不変である．逆は，極大イデアルが 0 次元根基イデアルである [68] ことから明らかである．□

補題 B.12. イデアル I，$J \subset K_t[p]$ が H 不変であれば，$I \cap J$ も H 不変である．

証明. 対偶を示す．$I \cap J$ が H 不変でなければ，ある $a \in I \cap J$ が存在して，$\partial a/\partial t + \{a, H\} \notin I \cap J$ となる．これは，$\partial a/\partial t + \{a, H\} \notin I$ もしくは $\partial a/\partial t + \{a, H\} \notin J$ を意味する．したがって，I と J は H 不変でない．□

補題 B.13. イデアル $I \subset K_t[p]$ を定理B.1のように分解する．I が H 不変であれば，各 $\sqrt{Q_i}$ $(i = 0, 1 \ldots, s)$ も H 不変である．

証明. 対偶を示す．$\sqrt{Q_0}$ が H 不変でないとする．すると，ある $a \in \sqrt{Q_0}$ が存在して，$\partial a/\partial t + \{a, H\} \notin \sqrt{Q_0}$ である．根基の定義より，$a \in \sqrt{Q_0}$ に対して，ある m が存在して $a^m \notin Q_0$ かつ $a^{m+1} \in Q_0$ が成り立つ．他方，補題B.8より，ある $b \in (Q_1 \cap \cdots \cap Q_s) \setminus \sqrt{Q_0}$ が存在する．命題A.4より， $Q_0(Q_1 \cap \cdots \cap Q_s) \subset Q_0 \cap \cdots \cap Q_s$ であるため，$a^{m+1}b \in Q_0 \cap \cdots \cap Q_s = I$ が成り立つ．さらに，$a^{m+1}b^2 \in I$ が成り立つ．$\partial(a^{m+1}b^2)/\partial t + \{a^{m+1}b^2, H\}$ を展開すると

$$\begin{aligned}\frac{\partial(a^{m+1}b^2)}{\partial t} + \{a^{m+1}b^2, H\} &= a^{m+1}\left(\frac{\partial b^2}{\partial t} + \{b^2, H\}\right) + b^2\left(\frac{\partial a^{m+1}}{\partial t} + \{a^{m+1}, H\}\right) \\ &= 2a^{m+1}b\left(\frac{\partial b}{\partial t} + \{b, H\}\right) + (m+1)a^m b^2\left(\frac{\partial a}{\partial t} + \{a, H\}\right).\end{aligned}$$

となる．このとき，$a^{m+1}b \in I$ より $2a^{m+1}b(\partial b/\partial t + \{b, H\}) \in I$ が成り立つ．つぎに，$a^m b^2(\partial a/\partial t + \{a, H\})$ について考える．$\sqrt{Q_0}$ は素であるため，$b \notin \sqrt{Q_0}$ と $\partial a/\partial t + \{a, H\} \notin \sqrt{Q_0}$ より $b^2(\partial a/\partial t + \{a, H\}) \notin \sqrt{Q_0}$ が成り立つ．$a^m \notin Q_0$ より，$a^m b^2(\partial a/\partial t + \{a, H\}) \notin Q_0$ が成り立ち，さらに $I \subset Q_0$ より $\partial(a^{m+1}b^2)/\partial t + \{a^{m+1}b^2, H\} \notin I$ が成り立つ．したがって，I は H 不変でない，□

定理 B.2. あるイデアル $I \subset K_t[p]$ が H 不変であれば，その根基 H 不変である．

証明. イデアル $I \subset K_t[p]$ を定理B.1のように分解する．補題B.13より，各 $\sqrt{Q_i}$ $(i = 0, 1 \ldots, s)$ は H 不変である．また，補題B.12より，$\sqrt{Q_0} \cap \sqrt{Q_1} \cap \cdots \cap \sqrt{Q_s}$ も H 不変である．補題A.3より，$\sqrt{Q_0} \cap \sqrt{Q_1} \cap \cdots \cap \sqrt{Q_s} = \sqrt{Q_0 \cap \cdots \cap Q_s} = \sqrt{I}$ が成り立つため，$\sqrt{I}$ も H 不変である．□

B.5　包合性

イデアルの包合性に関してつぎが成り立つ．

補題 B.14. 多項式 $F_1, F_2, \ldots, F_m \in K[p]$ で生成されるイデアルを $I \subset K[p]$ とする．イデアル I が包合的であるための必要十分条件は $\{F_i, F_j\} \in I$ $(i, j = 1, \ldots, m)$ が成り立つことである．

証明. 必要性は，$F_i \in I$ $(i = 1, \ldots, m)$ より明らかなため，十分性について考える．任意の $\Phi, \Psi \in I$ は $\Phi = \Sigma_{i=1}^m s_i F_i$，　$\Psi = \Sigma_{i=1}^m t_i F_i$ $(s_i, t_i \in K[p])$ 表現できるため

$$\{\Phi, \Psi\} = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m \{s_i F_i, t_j F_j\}$$

$$= \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m}(s_it_j\{F_i,F_j\}+s_iF_j\{F_i,t_j\}+F_it_j\{s_i,F_j\}+F_iF_j\{s_i,t_j\}).$$

となる．$\{F_i,F_j\}$,F_j,F_i,$F_iF_j \in I$ より，$\{\Phi,\Psi\}$ は I に属する．したがって，I は包合的である． □

補題 B.15. 根基イデアル $I \subset K[p]$ の極小準素分解を $P_1 \cap P_2 \cap \cdots \cap P_s$ とする．ただし，P_i $(i=1,\ldots,s)$ は素イデアルである．イデアル I が包合的であれば，各 $P_1,\ldots,P_s$ も包合的である．

証明. 任意の $a \in P_1$ と任意の $b \in P_2 \cap \cdots \cap P_s$ に対して，命題 A.4 より，$ab \in P_1(P_2 \cap \cdots \cap P_s) \subset P_1 \cap \cdots \cap P_s$ が成り立つ．極小分解の性質より，ある $b \in (P_2 \cap \cdots \cap P_s) \setminus P_1$ が存在する．$I = P_1 \cap \cdots \cap P_s$ が包合的であれば，$\{a_1b, a_2b\} \in P_1 \cap \cdots \cap P_s$ が任意の $a_1, a_2 \in P_1$ と $b \in (P_1 \cap \cdots \cap P_s) \setminus P_1$ に対して成り立つ．式 $\{a_1b, a_2b\}$ を展開すると

$$\begin{aligned}\{a_1b,a_2b\} &= a_1a_2\{b,b\}+a_1b\{b,a_2\}+ba_2\{a_1,b\}+b^2\{a_1,a_2\}\\ &= a_1b\{b,a_2\}+ba_2\{a_1,b\}+b^2\{a_1,a_2\} \in P_1\cap\cdots\cap P_s.\end{aligned}$$

となり，包含関係 $P_1 \cap \cdots \cap P_s \subset P_1$ より

$$a_1b\{b,a_2\}+ba_2\{a_1,b\}+b^2\{a_1,a_2\} \in P_1$$

を得る．また，$a_1 \in P_1$ かつ $a_2 \in P_1$ より，$a_1b\{b,a_2\} \in P_1$ と $ba_2\{a_1,b\} \in P_1$ が成り立つ．したがって，$b^2\{a_1,a_2\} \in P_1$ である．P_1 は素であるため，$b^2\{a_1,a_2\} \in P_1$ より $b^2 \in P_1$ もしくは $\{a_1,a_2\} \in P_1$ が成り立つ．ただし，$b \notin P_1$ より $b^2 \notin P_1$ である．したがって，$\{a_1,a_2\} \in P_1$ となり，P_1 は包合的である．同様にして，$P_2,\ldots,P_s$ が包合的であることを示せる． □

命題 B.2 と同様にして，補題 B.6 と B.15 より次が成り立つ．

命題 B.3. 包合的な 0 次元根基イデアルが存在するための必要十分条件は，包合的な極大イデアルが存在することである．

参考文献

[1] R. E. Kalman, "Contributions to the theory of optimal control," *Boletín de la Sociedad Matemática Mexicana*, vol. 5, pp. 102–119, 1960.

[2] R. E. Kalman, "A new approach to linear filtering and prediction problems," *ASME Journal of Basic Engineering*, vol. 82D, no. 35–45, 1960.

[3] R. E. Kalman, *Lectures on Controllability and Observability.* C.I.M.E., 1968.

[4] T. Kailath, *Linear Systems.* Prentice-Hall, 1980.

[5] L. A. Zadeh and C. A. Desoer, *Linear System Theory.* McGraw-Hill, 1963.

[6] H. Nijmeijer and A. J. van der Schaft, *Nonlinear Dynamical Control Systems.* Springer-Verlag, 1991.

[7] A. Ishidori, *Nonlinear Control Systems.* Springer-Verlag, 1995.

[8] G. Conte, C. H. Moog, and A. M. Perdon, *Nonlinear Control Systems: An Algebraic Setting.* Springer-Verlag, 1999.

[9] E. Pico-Marco, "Differential algebra for control systems design," *IEEE Control Systems Magazine*, vol. 33, no. 2, pp. 52–62, 2013.

[10] W. M. Haddad and V. Chellaboina, *Nonlinear Dynamical Systems and Control: A Lyapunov-Based Approach.* Princeton Univ Press, 2008.

[11] A. J. van der Schaft, "Nonlinear analysis, theory, methods & analysis," *Stabilization of Hamiltonian systems*, vol. 10, no. 10, pp. 1021–1035, 1986.

[12] B. M. J. Maschke and A. J. van der Schaft, "Port–controlled Hamiltonian systems: Modelling origins and system–theoritic prperties," *Proceedings of the IFAC Symposium on Nonlinear Control Systems*, pp. 282–288, 1992.

[13] K. Fujimoto, K. Sakurama, and T. Sugie, "Trajectory tracking control of port-controlled Hamiltonian systems via generalized canonical transformations," *Automatica*, vol. 39, no. 12, pp. 2059–2069, 2003.

[14] B. O. Palsson, *Systems Biology: Simulation of Dynamic Network States.* Cambridge Univ. Press, 2011.

[15] T. Ohtsuka, "Model structure simplification of nonlinear systems via immersion," *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 50, no. 5, pp. 607–618, 2005.

[16] T. Ohtsuka, "Algebraic structures in nonlinear systems over rings obtained by immersion," *SIAM Journal on Control and Optimization*, vol. 47, no. 4, pp. 1961–1976, 2008.

[17] A. Prestel and C. N. Delzell, *Positive Polynomials: From Hilbert's 17th Problem to Real Algebra.* Springer-Verlag, 2000.

[18] P. Lindskog, *Methods, algorithms and tools for system identification.* Ph.D. dissertation, Depart. Elect. Eng., 1996.

[19] P. A. Parrilo, *Structured Semidefinite Programs and Semialgebraic Geometry Methods in Robustness and Optimization.* Ph.D. Thesis, California Institute of Technology, 2000.

[20] A. A. Ahmadi, M. Krstic, and P. A. Parrilo, "A globally asymptotically stable polynomial vector field with no polynomial Lyapunov function," *Proceedings of the 50th IEEE Conference on Decision and Control and European Control Conference*, pp. 7579–7580, 2011.

[21] D. Cox, J. Little, and D. O'Shea, *Ideals, Varieties and Algorithms.* Springer-Verlag, 1992.

[22] D. Cox, J. Little, and D. O'Shea, *Using Algebraic Geometry.* Springer-Verlag, 2005.

[23] E. Kunz, *Introduction to Commutative Algebra and Algebraic Geometry.* Birkhäuser, 1984.

[24] M. F. Atiyah and I. G. Macdonald, *Introduction to Commutative Algebra.* Westview Press, 1969.

[25] E. D. Sontag, *Polynomial Response Maps.* Springer-Verlag, 1979.

[26] E. D. Sontag, "On the observability of polynomial system, I: finite-time problems," *SIAM Journal on Control and Optimization*, vol. 17, no. 1, pp. 139–151, 1979.

[27] E. D. Sontag and Y. Rouchaleau, "On discrete-time polynomial systems," *Nonlinear Analysis, Theory, Methods & Applications*, vol. 1, no. 1, pp. 55–63, 1976.

[28] B. Tibken, "Observability of nonlinear systems – an algebraic approach," *Proceedings of the 43rd IEEE Conference on Decision and Control*, pp. 4824–4825, 2004.

[29] D. Nešić, "A note on observability tests for general polynomial and simple wiener-hammerstein systems," *Systems & Control Letters*, vol. 35, pp. 219–227, 1998.

[30] D. Nešić and I. M. Y. Mareels, "Dead beat controllability of polynomial systems: symbolic computation approach," *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 43, no. 2, pp. 62–175, 1998.

[31] D. Nešić and I. M. Y. Mareels, "Controllability of structured polynomial systems," *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 44, no. 4, pp. 761–764, 1999.

[32] T. Ohtsuka, "Solutions to the Hamilton-Jacobi equation with algebraic gradients," *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 56, no. 8, pp. 1874–1885, 2011.

[33] I. A. Fotiou, P. Rostalski, P. A. Parrilo, and M. Morari, "Parametric optimization and optimal control using algebraic geometry methods," *International Journal of Control*, vol. 79, no. 11, pp. 1340–1358, 2006.

[34] H. Nijmeijer, "Observability of autonomous discrete-time non-linear systems: a geometric approach," *International Journal of Control*, vol. 36, no. 5, pp. 867–874, 1982.

[35] R. Hermann and A. J. Krener, "Nonlinear controllability and observability," *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 22, no. 5, pp. 728–740, 1977.

[36] B. Jakubczyk and E. D. Sontag, "Controllability of nonlinear discrete-time systems: A lie-algebraic approach," *SIAM Journal on Control and Optimization*, vol. 28, pp. 1–33, 1990.

[37] F. Albertini and E. D. Sontag, "Discrete-time transitivity and accessibility: Analytic systems," *SIAM Journal on Control and Optimization*, vol. 31, pp. 1599–1622, 1993.

[38] E. Aranda-Bricaire, Ü. Kotta, and C. H. Moog, "Linearization of discrete-time systems," *SIAM Journal on Control and Optimization*, vol. 34, no. 6, pp. 1999–2023, 1996.

[39] E. Aranda-Bricaire, "Computer algebra analysis of discrete-time nonlinear systems," *Proceedings of the 13th IFAC World Congress*, vol. 34, no. F, pp. 306–309, 1996.

[40] J. Barbot, "A forward accessibility algorithm for nonlinear discrete time systems," *Lecture Notes in Control and Information Sciences*, vol. 144, pp. 314–323, 2004.

[41] Ü. Kotta, M. Tõnso, A. Y. Shumsky, and A. N. Zhirabok, "Feedback linearization and lattice theory," *Systems & Control Letters*, vol. 62, pp. 248–255, 2013.

[42] F. Wirth, "Dynamics and controllability of nonlinear discrete-time control systems," *Proceedings of the 4th IFAC Nonlinear Control Systems Design Symposium*, pp. 269–275, 1998.

[43] K. Rieger and K. Schlacher, "Implicit discrete-time systems and accessibility," *Automatica*, vol. 47, pp. 1849–1859, 2011.

[44] A. Bialynicki-Birula and M. Rosenlicht, "Injective morphisms of real algebraic varieties," *Proceedings of the American Mathematical Society*, vol. 13, no. 2, pp. 200–203, 1962.

[45] B. D. O. Anderson and J. B. Moore, *Optimal Control: Linear Quadratic Methods.* Prentice Hall, 1989.

[46] A. E. Bryson, Jr. and Y. C. Ho, *Applied Optimal Control.* Hemisphere, 1975.

[47] L. T. Aguilar, Y. Orlov, and L. Acho, "Nonlinear H_∞-control of nonsmooth time-varying systems with application to friction mechanical manipulators," *Automatica*, vol. 39, no. 9, pp. 1531–1542, 2003.

[48] Y. Orlov, L. Acho, and V. Solis, "Nonlinear H_∞ control of time-varying systems," *Proceedings of the 38th IEEE Conference on Decision and Control*, pp. 3764–3769, 1999.

[49] S. Osher and R. P. Fedkiw, *Level Set Methods and Dynamic Implicit Surfaces.* Springer-Verlag, 2002.

[50] B. F. Caviness and J. R. Johnson, *Quantifier Elimination and Cylindrical Algebraic Decomposition.* Springer-Verlag, 1998.

[51] E. D. Sontag, *Mathematical Control Theory.* Springer-Verlag, 1990.

[52] M. Halás, Ü. Kotta, Z. Li, H. Wang, and C. Yuan, "Submersive rational difference systems and their accessibility," *Proceedings of the 2009 International Symposium on Symbolic and Algebraic Computation*, vol. 34, no. 6, pp. 175–182, 2009.

[53] S. P. Bhat and D. S. Bernstein, "Finite-time stability of continuous autonomous systems," *SIAM Journal on Control and Optimization*, vol. 38, no. 3, pp. 751–766, 2000.

[54] A. J. van der Schaft, "On a state space approach to nonlinear H_∞ control," *Systems & Control Letters*, vol. 16, pp. 1–8, 1991.

[55] N. Sakamoto, "Analysis of the Hamilton-Jacobi equation in nonlinear control theory by symplectic geometry," *SIAM Journal on Control and Optimization*, vol. 40, no. 6, pp. 1924–1937, 2002.

[56] J. M. A. Scherpen, "Balancing for nonlinear systems," *Systems & Control Letters*, vol. 21, no. 2, pp. 143–153, 1993.

[57] K. Fujimoto and J. M. A. Scherpen, "Nonlinear input-normal realizations based on the differential eigenstructure of hankel operators," *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 50, no. 1, pp. 2–18, 2005.

[58] A. J. van der Schaft, "L_2-gain analysis of nonlinear systems and nonlinear state-feedback H_∞ control," *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 37, no. 6, pp. 770–784, 1992.

[59] A. Isidori and A. Astolfi, "Disturbance attenuation and H_∞ control via measurement feedback in nonlinear systems," *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 37, no. 9, pp. 1283–1293, 1992.

[60] N. Sakamoto and A. J. van der Schaft, "Analytical approximation methods for the stabilizing solution of the Hamilton-Jacobi equation," *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 53, no. 10, pp. 2335–2350, 2008.

[61] M. Bardi and I. Capuzzo-Dolcetta, *Optimal Control and Viscosity Solutions of Hamilton-Jacobi-Bellman Equations.* Birkhauser, 1997.

[62] M. G. Crandall, L. C. Evans, and P. L. Lions, "Some properties of viscosity solutions of Hamilton-Jacobi equations," *Transactions of the American Mathematical Society*, vol. 282, no. 2, pp. 487–502, 1984.

[63] P. Soravia, "H^∞ control of nonlinear systems," *SIAM Journal on Control and Optimization*, vol. 34, no. 3, pp. 1071–1097, 1996.

[64] A. Ichikawa and H. Katayama, *Linear Time Varying Systems and Sampled-Data Systems.* Springer-Verlag, 2001.

[65] H. Abou-Kandil, G. Freiling, V. Ionescu, and G. Jank, *Matrix Riccati Equations in Control and Systems Theory.* Birkhäuser, 2003.

[66] S. S. Cheng and W. Li, *Analytic Solutions of Functional Equations.* World Scientific, 2008.

[67] Y. Ilyashenko and S. Yakovenko, *Lectures on Analytic Differential Equations.* American Mathematical Society, 2008.

[68] A. Dickenstein and I. Z. Emiris, *Solving Polynomial Equations: Foundations, Algorithms, and Applications.* Springer-Verlag, 2005.

[69] V. I. Arnol'd, *Mathematical Methods of Classical Mechanics.* Springer-Verlag, 1989.

[70] W. Vasconcelos, *Computational Methods in Commutative Algebra and Algebraic Geometry.* Springer-Verlag, 2004.

[71] W. Ebeling, *Functions of several complex variables and their singularities.* American Mathematical Society, 2007.

[72] H. Flanders, *Differential Forms with Applications to the Physical Sciences.* Academic Press, 1963.

[73] B. Sturmfels, *Solving Systems of Polynomial Equations.* American Mathematical Society, 2002.

[74] K. Hulek, *Elementary Algebraic Geometry.* American Mathematical Society, 2003.

[75] F. Winkler, *Polynomial Algorithms in Computer Algebra.* Springer-Verlag, 1997.

謝辞

本研究を行うにあたり，日頃よりご指導頂き，有益なご助言を賜りました京都大学大学院情報学研究科 大塚敏之教授に心から感謝致します．大塚敏之教授には，私が研究室に配属されて以来，昼夜を問わず貴重な御時間を割いて終始丁寧なご指導を頂きました．本論文の主査，副査を引き受けて下さった飯國洋二教授，乾口雅弘教授，潮俊光教授には，貴重な時間を割いていただいて，適切なご助言を頂きました．大阪大学大学院情報科学研究科 日比孝之教授には，第 4 章の内容について，問題設定から丁寧に議論して頂き，貴重なご意見を頂きました．福井大学工学研究科 小原敦美教授，大阪大学大学院基礎工学研究科 加嶋健司准教授，橋本智昭助教には，研究室内のゼミや研究発表会など，機会がある度に貴重なアドバイスや建設的なご意見を頂きました．Control Systems Department, Institute of Cybernetics at Tallinn University of Technology の皆様には，留学の受入を快諾していただきました．とくに，Ülle Kotta 教授には生活面，研究面両方において大変お世話になりました．神戸市立工業高等専門学校 小林洋二教授には，制御工学の分野へ導いて頂きました．旧大塚研究室の多くの先輩，後輩諸氏には公私ともどもお世話になりました．事務関係では，潮かよ子さん，小檜山よしかさんと留田直子さんに大変お世話になりました．ここに御礼申し上げます．最後に，長い間大学に通わせてくれ，支えてくれた両親に心より感謝の意と敬意を表します．

研究業績リスト

関連研究業績

学会誌論文（査読有）

1）河野 佑，大塚 敏之: 入力アフィンな多項式システムの大域的可観測性，計測自動制御学会論文集，Vol.46, No.6, 2010, pp.353–355.

2）Y. Kawano, T. Ohtsuka and T. Hibi: Nilpotency of a finitely iterated polynomial map, *International Journal of Algebra*, Vol.30, No.5, 2011, pp.1475–1479.

3）Y. Kawano and T. Ohtsuka: Algebraic solutions to the Hamilton-Jacobi equation with the time-varying Hamiltonian, *SICE Journal of Control, Measurement, and System Integration*, Vol.6, No.1, 2013, pp.28–37.

4）Y. Kawano and T. Ohtsuka: Observability at an initial state for polynomial systems, *Automatica*, Vol.49, No.5, 2013, 1126–1136.

5）Y. Kawano and T. Ohtsuka: Simple sufficient condition for reachability of discrete-time polynomial systems, *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2013 (accepted for publication).

解説

1）大塚 敏之，河野 佑：代数幾何と可換環論を応用した非線形システムの解析，システム/制御/情報，Vol.57，No.6，2013, pp.230–235.

国際学会（査読有）

1）Y. Kawano and T. Ohtsuka: Global observability of polynomial systems, *Proceedings of SICE Annual Conference 2010*, Taipei, Taiwan, Aug.18, 2010, pp.2038–2041.

2) Y. Kawano and T. Ohtsuka: Global observability of discrete-time polynomial systems, *Proceedings of the 8th IFAC Symposium on Nonlinear Control Systems*, Bologna, Italy, Sept.1, 2010, pp.203–207.

3) Y. Kawano and T. Ohtsuka: An algebraic approach to local observability at an initial state for discrete-time polynomial systems, *Proceedings of the 18th IFAC World Congress*, Milano, Italy, Aug.30, 2011, pp.6449–6453.

4) Y. Kawano and T. Ohtsuka: An algebraic approach to Hamilton's canonical equations, *Proceedings of SICE Annual Conference 2011*, Tokyo, Japan, Sept.14, 2011, pp.370–375.

5) Y. Kawano and T. Ohtsuka: An algebraic solution method for the unsteady Hamilton-Jacobi equation, *Proceedings of the 50th IEEE Conference on Decision and Control and European Control Conference*, Florida, USA, Dec.15, 2011, pp.7741–7746.

6) Y. Kawano and T. Ohtsuka: Necessary condition for local observability of discrete-time polynomial systems, *Proceedings of the 2012 American Control Conference*, Montreal, Canada, June, 2012, pp.6757–6762.

7) Y. Kawano and T. Ohtsuka: Sufficiency of a necessary condition for local observability of discrete-time polynomial systems, *Proceedings of the 2013 European Control Conference*, Zurich, Swithland, July, 2013, pp.1722–1727.

国内学会（査読無）

1) 河野 佑，大塚 敏之：離散時間多項式システムの大域的可観測性，第 10 回計測自動制御学会制御部門大会，熊本，2010 年 3 月 16 日，165-1-2.

2) 河野 佑，大塚 敏之：離散時間多項式システムにおける初期状態 1 点の可観測性，第 39 回計測自動制御学会制御理論シンポジウム，大阪，2010 年 9 月 27 日，pp.165–168.

3) 河野 佑，大塚 敏之：あるクラスの非線形最適制御問題における Hamilton 正準方程式の代数的解法，第 11 回計測自動制御学会制御部門大会，沖縄，2011 年 3 月 18 日，187-2-1.

4) 河野 佑，大塚 敏之：Hamilton 正準方程式における代数的共状態の存在条件，第 55 回システム制御情報学会研究発表講演会，大阪，2011 年 5 月 19 日，pp.649–650.

5）河野 佑，大塚 敏之，日比 孝之：離散時間多項式システムの有限時間安定性の解析，第40回計測自動制御学会制御理論シンポジウム，大阪，2011年9月27日，pp.337–340.

6）河野 佑，大塚 敏之：離散時間多項式システムの局所可観測性-必要条件への代数的アプローチ-，第12回計測自動制御学会制御部門大会，奈良，2012年3月14日，SY0003/12/0000-P0041.

7）河野 佑，大塚 敏之：連続時間多項式システムに対する初期状態1点での局所可観測性，第55回自動制御連合講演会，京都，2012年11月17日，pp.500–501.

8）河野 佑，大塚 敏之：離散時間多項式システムの局所可観測性，第13回計測自動制御学会制御部門大会，福岡，2013年3月17日，SY0002/0000-0407.

9）河野 佑，大塚 敏之：離散時間多項式システムの可到達性：多項式写像の性質を用いた解析，第57回システム制御情報学会研究発表講演会，兵庫，213-2.

他の研究業績

学会誌論文（査読有）

1）Y. Kawano and T. Ohtsuka: Input-output linearization for transfer functions of input-affine meromorphic systems, *SICE Journal of Control, Measurement, and System Integration*, Vol. 5, No. 3, 2012, pp.133–138.

2）河野 佑，大塚 敏之：有理型非線形時変システムに対する伝達関数行列の代数的性質，システム制御情報学会論文誌，Vol.26，No.6，2013, pp.185–192.

国際学会（査読有）

1）Y. Kawano and T. Ohtsuka: Observability analysis of nonlinear systems by using a pseudo-linear transformation, *Proceedings of the 9th IFAC Symposium on Nonlinear Control Systems*, Toulouse, France, September, 2013 (accepted).

国内学会（査読無）

1）河野 佑，小林 洋二：プロパーな近似 DVDFB による柔軟宇宙構造物のロバスト安定化，日本機械学会関西学生会平成 19 年度学生員卒業研究発表講演会，大阪，2008 年 3 月 17 日，pp.1110.

2）河野 佑，小林 洋二：変位出力を用いたプロパーなコントローラによる柔軟宇宙構造物のロバスト安定化，第 51 回自動制御連合講演会，山形, 2008 年 11 月 22 日, pp. 1174–1175.

3）河野 佑，大塚 敏之：入力アフィンな多項式システムの局所可到達性，第 10 回計測自動制御学会制御部門大会，熊本，2010 年 3 月 16 日，166-2-1.

4）河野 佑，小林 洋二：変位出力を用いたプロパーな局所コントローラによる大型柔軟宇宙構造物の分散制御，第 52 回自動制御連合講演会, 大阪, 2009 年 11 月 22 日, C6-5.

5）河野 佑，大塚 敏之：Relation between transfer functions of input-affine nonlinear systems and input-output linearization，第 40 回計測自動制御学会制御理論シンポジウム，大阪，2011 年 9 月 26 日，pp.141–144.

6）河野 佑，大塚 敏之：非線形時変システムの伝達関数：定義と代数的性質，第 56 回システム制御情報学会研究発表講演会, 京都，2012 年 5 月 23 日，pp.515–516.

その他

1）河野 佑，小林 洋二：大型柔軟宇宙構造物の最適分散サーボ系の設計法，神戸高専研究紀要, Vol. 47, 2010, pp.25–30.

2）河野 佑，小林 洋二：変位出力を用いた二次のプロパーなコントローラによる柔軟宇宙構造物の位置と姿勢制御，神戸高専研究紀要, Vol. 50, 2012, pp.23–26.