Surveys in Geometry(1981/1982)の記録

小　林　　治

昭和57年2月4日から3日間にわたって第三回目のSurveys in Geometryが慶応義塾大学理工学部において開かれた．今回のテーマは極小曲面論で次のようなプログラムのもとに，古典極小曲面論，最近の進展，応用，今後残されている問題など，様々な観点からの報告がなされた．

極小曲面の微分幾何的側面

古典極小曲面論入門……………………………剱持勝衛

E^nの中の極小曲面論，最近の発展を中心とした微分幾何的諸結果……………………………丹野修吉

空間形の極小部分多様体
—日本人の活躍を中心として—………荻上紘一

極小曲面論の応用

Positive mass conjectureに関連して…西川青季

Ricci曲率が正な3次元リーマン多様体について
……………………………………………佐々木武

3次元リーマン多様体の中の面積最小な曲面について(Smith予想への応用)……………加藤十吉

正のスカラー曲率を持つリーマン多様体について
……………………………………………服部晶夫

極小曲面論の解析的側面

極小曲面の存在に関するDouglas-Radó-Morrey解とその性質について………………落合卓四郎

今回のSurveyでは外国で活躍する若い数学者，Yau, Schoen, Meeksなどの仕事の紹介が主なるものであり，これらの結果については‘数学’に論説として載ることはほとんどないので，数学編集部からの希望によって，ここに記録として集会の概要を述べることとなった．内容が豊富すぎることもあって，取り上げる題材に多少偏りができ，記述が上すべりになってしまうことは避け得ないが，これらいたらぬ点については，この研究集会で用意された3分冊，約800頁に及ぶ資料を参照して頂きたい．(落合卓四郎氏に問い合わせれば入手可．)

始めにkey wordsを用意する．はめこみ$f:M\to(N,g)$が**極小**であるとは平均曲率$\equiv0$を以って定義する．これはfのコンパクトな台を持ち境界を固定する任意の変分に対して体積積分の第一変分$=0$と同値である．($\dim M=1$の時は測地線．$\dim M=2$の時が極小曲面)この時，さらに第二変分$\geqq0$のときfは**安定**であるという．(第二変分>0の時を安定，$\geqq0$の時を弱安定と用語を使い分けることもある．)特にfが体積に関して最小性をもつとき，例えばPlateau問題の解，E^nの中のグラフとして定義される極小超曲面，は安定である．

1. Euclid空間E^nの極小曲面，Gauss写像

$X:M^2\to E^n$をE^nの(埋入された)曲面とする．等温座標系の存在から，Mの向きと，Mに誘導された計量によってMに複素構造が定義される．その意味でXは等角写像である．したがってMの局所複素座標系(z,U)を使って$\partial_z X:U\to \boldsymbol{C}^n$で定義される写像$\chi:M\to \boldsymbol{CP}^{n-1}$についてIm $\chi\subset Q_{n-2}:=\{(z_1:\cdots:z_n)\in \boldsymbol{CP}^{n-1};\ \sum(z_i)^2=0\}$である．$\bar{\chi}:M\to Q_{n-2}$は$X$のGauss写像$G:M\to G_{2,n}$(=グラスマン多様体)と自然に同一視される．重要なことはXが極小であることと，$\partial_z X$したがってχがholomorphicであることが同値となることである．

特に$n=3$のとき，この事実は古典極小曲面論で最も重要な結果の一つである次の公式として述べられる．

定理(Weierstrass-Enneper, 1866). E^3の任意の極小曲面は次の形に表現される：

$$X(\zeta)=\left(\mathrm{Re}\int^{\zeta}\frac{1}{2}f(1-g^2)d\zeta,\right.$$
$$\left.\mathrm{Re}\int^{\zeta}\frac{i}{2}f(1+g^2)d\zeta,\ \mathrm{Re}\int^{\zeta}fg\,d\zeta\right),\quad \zeta\in D,$$

ここでDは$\boldsymbol{C}$又は$\{z\in\boldsymbol{C};\ |z|<1\}$，$f,g$はそれぞれ$D$上の正則関数，有理型関数で$g$の$k$次のpoleでは$f$は$2k$次のzeroとなるもの．この時，$g:D\to\boldsymbol{C}\cup\{\infty\}$はstereographic map $\boldsymbol{C}\cup\{\infty\}\cong S^2$によってGauss写像$G:D\to S^2$と同一視される．

この公式の応用として最近，次の結果が得られている．

定理(Jorge, Xavier, 1980). E^3の平行な2平面の間に平坦でない完備極小曲面が存在する．

定理(Xavier, 1981). E^3の平面でない完備極小曲面のガウス写像の除外点集合$S^2\setminus\mathrm{Im}\,G$は高々6点からなる．

K. Voss (1964) により S^2 上に高々 4 個の任意の点を与えた時，それらを Gauss 写像の除外点とする E^3 の完備極小曲面の存在が示されており，Xavier の結果が 4 点にまで改良できるか否かは目下問題となっている．この問題は，Osserman が Bernstein の定理の別証明を与えるために示した結果 'E^3 の平面でない完備極小曲面の Gauss 写像の像は S^2 で稠密である (1959)' が出発点であった．

一般の n について，E^n の極小曲面 M が負の定曲率を持ったとすると，極小性から Gauss 写像 $G: M \to G_{2,n} \hookrightarrow CP^{n-1}$ は CP^{n-1} の Fubini-Study 計量に関し homothetic となり (cf. Obata の公式, 1968), CP^{n-1} への anti-Kähler 埋入を与える．しかしこれは不可能 (cf. Nakagawa, Ogiue, 1976.) したがって 'E^n の極小曲面で負の定曲率となるものは存在しない (Yau, 1974)'．この結果について $n=3$ のときは古典的な Ricci の定理 '負の曲率をもつ曲面 (M^2, g) が E^3 の極小曲面として実現されるためには $\sqrt{-K}g$ (K は g の Gauss 曲率) が平坦であることが必要十分' からもわかる．また一般の n についても Ricci の定理を一般化した，E^n の極小曲面の intrinsic な特徴づけに関する Calabi の結果 (1935) からもわかる．Yau の証明は Calabi の方法によっている．

Gauss 写像と極小曲面の安定性については Barbosa-do Carmo (1976) 'E^3 の極小曲面 M の有界領域 D について Area $G(D) < 2\pi$ なら D は安定' という結果が得られている．一般の n については 'E^n の極小曲面 M の単連結領域 D について

$$\int_D |K| < \frac{4}{3}\pi$$

なら D は安定 (Barbosa-do Carmo, 1980)' と拡張された．仮定の $\frac{4}{3}\pi$ について，最近，佐藤は 1.474π に改良した．この方面は，Sobolev 不等式，等周不等式，ラプラシアンの幾何学，等の関連で興味が持たれている．

2. Bernstein の問題

定理 (Bernstein, 1913). $z=f(x, y)$, $(x, y) \in E^2$ のグラフとして定義される E^3 の極小曲面は平面である．

といういわゆる Bernstein の定理は，その後いろいろな別証明 (e. g. Heinz，前述の Osserman 等) や拡張がなされた．中でも 'E^{n-1} 上の関数 f のグラフとして表わせる E^n の極小超曲面は超平面か？' という問題に関しては，現在，一応の解決をみている．すなわち $n=4$ の時 De Giorgi, 1965, $n=5$ の時 Almgren, 1966, $n \leqq 8$ の時 Simons, 1968, により肯定的に解かれた．証明は，考える極小超曲面の無限遠での漸近挙動，及びそうして生ずる S^{n-1} の極小超曲面の安定性の議論が鍵となる．また $n \geqq 9$ では Bombieri-De Giorgi-Giusti, 1969, により反例の存在が示された．しかしこの反例について具体的な形，幾何学的性質はほとんど知られていない．

E^n の中のグラフで定義される極小超曲面は minimizing property をもち，特に安定である．この点に注目して現在では次のように幾何的に一般化された Bernstein の問題に興味が注がれている．

問題． E^n の中の完備かつ安定な極小超曲面は超平面に限るか？

もちろん，$n \geqq 9$ では先の反例がそのままこの問題の反例になるので特に $n \leqq 8$ についてが問題である．最近 $n=3$ について Do Carmo-Peng, Schoen が肯定的に解いた．

一方 Bernstein の問題を Euclid 空間 E^n の代わりに Minkowski 空間 $L^n = (\boldsymbol{R}^n, -(dx^1)^2 + (dx^2)^2 + \cdots + (dx^n)^2)$ で考えることもできる．L^n の超曲面でその誘導計量が正定値となるものを**空間的**超曲面 (名前の由来は相対論から) という．空間的超曲面についてその平均曲率 $\equiv 0$ なるものを**極大**であるという．(極小という語を用いないのは平均曲率 $\equiv 0$ がこの場合，局所的には体積の極大性を意味するからである．) そしてこの時さらに体積積分の第二変分 $\leqq 0$ となる時それは**安定**であるという．完備空間的極大超曲面は常に安定であることがわかり，Calabi の問題と呼ばれる次の問題があった．'L^n の完備空間的極大超曲面は空間的超平面か？' この問題は次元の制限なしに，一般の n で Cheng-Yau (1976) により肯定的に解かれた．

3. 極小曲面の安定性とその応用

多様体の位相的，幾何的性質を調べるのに，そこに埋入された極小部分多様体を手掛りにすることによって，近年，多くの応用がなされてきた．ここでは安定極小部分多様体の存在定理が重要である．そのような応用としてまず典型的な例から始めよう．

N を Riemann 多様体 M の極小超曲面，A を第二基本形式，R_N, R_M をそれぞれ N, M のスカラー曲率とする．この時第二変分公式と Gauss 方程式から N が安定であることは次と同値になる．

$$(*)\qquad \frac{1}{2}\int_N (R_M - R_N + \|A\|^2)\varphi^2 dv \leqq \int_N \|\nabla\varphi\|^2 dv,$$
$$\forall\varphi\in C_0^\infty(N)$$

さて，$\dim M=3$ として，M の中に genus$\geqq 1$ の閉曲面 N が安定極小曲面として実現されたとする．$(*)$ で $\varphi\equiv 1$ とおいて N 上で Gauss-Bonnet の定理を適用すれば

$$\int_N R_M dv \leqq 0,$$

したがって M のスカラー曲率は正であり得ない．Schoen, Yau は M の基本群を手掛りにかかる安定極小曲面の存在を示し，次の結果を得た．

定理 (1979). M を 3 次元向き付け可能な多様体とする．$\pi_1(M)$ が genus$\geqq 1$ の閉曲面の基本群と同型な部分群を含めば M は正のスカラー曲率をもつ計量を許容しない．この時，非負スカラー曲率をもつ任意の計量は平坦である．

彼らは，さらに次元 7 以下の多様体について，正のスカラー曲率に対する位相的障害についての結果を得ている．証明の方法はこの定理と同様であるが次元の制限がつくのは余次元 1 のホモロジー類の極小超曲面による実現定理を使うからである．

上の定理は Positive Mass Conjecture にも関係しているのでそれについて述べよう．Newton 力学で重力場の方程式は $\Delta f=2\pi\mu$ と表現される．ここで f,μ は $\boldsymbol{R}^3$ 上の関数でそれぞれ重力ポテンシャル，local mass と呼ばれる．f が無限遠で $f(x)\sim 1+2M/|x|+O(|x|^{-2})$ (簡単のため M は定数とする) と展開された時，M を total mass という．こう呼ぶのは，Stokes の定理を使って次の公式が得られるからである：

$$(**)\qquad \int_{R^3}\mu dx = M.$$

すなわち重力ポテンシャルの無限遠での減少の度合で考えている系の total mass がはかれるわけである．local mass$\geqq 0$ を仮定すれば total mass$\geqq 0$. またこのとき total mass$=0$ なら $f\equiv 1$ となる．この一見，自明な命題を一般相対論で述べようとするのが Positive Mass Conjecture であった．これは Schoen, Yau によって次の形に解かれた．(実際には次に示すよりかなり一般の形で解かれている．)

定理 (1979). g を $\boldsymbol{R}^3$ の Riemann 計量で

$$g_{ij}\sim\left(1+\frac{2M}{r}\right)\delta_{ij}+O(r^{-2})$$

となるものとする．この時スカラー曲率 $\geqq 0$ ならば $M\geqq 0$，またスカラー曲率 $\geqq 0$ かつ $M=0$ なら g は平坦．

この定理の中の M が total mass に相当する量であり，$(\boldsymbol{R}^3, g)$ がある Lorentz 多様体の空間的超曲面として入っていると考えた時，適当な仮定のもとに，Einstein の重力場の方程式から local mass$\geqq 0$ と $(\boldsymbol{R}^3, g)$ のスカラー曲率 $\geqq 0$ が対応している．この問題は多くの人達の試みがあったが難しさの一つは $(**)$ のような積分公式が得られないことにある．Schoen-Yau の方法は前の定理と同じ考えによるが，今度は計量の漸近的性質から安定極小曲面の構成をする．前と違って扱う極小曲面が non-compact になるので公式 $(*)$ を使う時の test function φ のとり方，その他で工夫が要る．

同様な，しかしより精密な議論を用いて Schoen-Yau はさらに次の結果を得た．

定理. M を 3 次元 non compact，完備，Ric>0 な Riemann 多様体とすると M は $\boldsymbol{R}^3$ と微分同相．

定理の仮定 Ric>0 は 'Ric$\geqq 0$ かつ Ric$(x)>0$, $\exists x\in M$' におきかえられる (Aubin, Ehrlich). Ricci 曲率が正あるいは非負の多様体については古典的な Myers の定理 (1941) や Cheeger-Gromoll の分解定理 (1971) などいろいろ調べられていたが，3 次元の時，この定理は決定的である．(この定理の compact 版が最近 Hamilton により報告されている．証明の方法は極小曲面論を使わない.) 次元が 4 以上では反例がある．すなわち Nobonnand (1980) によれば $\boldsymbol{R}^{n-1}\times S^1 (n\geqq 4)$ には完備，Ric>0 な計量が入る．したがって 4 次元以上では Ric>0 の仮定から $|\pi_1|<\infty$ もいえない．

4. 正のスカラー曲率をもつ計量を許容する多様体について．

前節でスカラー曲率正となる多様体の性質について極小曲面論からのアプローチを述べたが，ここでは Gromov-Lawson (1980) の結果を中心に最近の進展を述べる．

山辺の問題，Kazdan-Warner の仕事から，3 次元以上の任意の閉多様体では，ある点で負となる任意の関数はある Riemann 計量のスカラー曲率となることが知られている．したがって正のスカラー曲率と多様体の位相的構造との間の関係は重要である．この点についてまず Lichnerowicz (1963) は Dirac 作用素についての Weitzenböck 公式から，正のスカラー曲率をもつスピン多様体で調和スピノルは 0 に限ることを示した．したが

って Atiyah-Singer の指数定理より $\hat{A}=0$. この結果は Hitchin (1974) により次のように拡張された.

定理. 正のスカラー曲率をもつ閉スピン多様体 M について $\alpha(M)=0$.

ここで α はスピン同境類の不変量で, $\dim M=8k$ のとき $\alpha=\hat{A}$, $\dim M=8k+4$ のとき $\alpha=\frac{1}{2}\hat{A}$ である. この結果から次元が $8k+1$, $8k+2$ の exotic sphere で正のスカラー曲率をもたないものがあることが示される. この不変量 α は M が単連結の場合は正のスカラー曲率に対する障害としてほとんど完全である.

定理 (Gromov-Lawson). 5次元以上の単連結閉多様体 M について (i) M がスピンでなければ M は正のスカラー曲率を持つ. (ii) M がスピンかつ $\alpha(M)=0$ のとき, ある k があって M の k 回の連結和は正のスカラー曲率をもつ. ($\dim M<12$ では $k=1$ ととれる. 一般に $k=1$ ととれるであろうと予想されている.)

証明の方針は, 余次元3以上の手術に対して正のスカラー曲率を持つという性質が保たれること (Schoen-Yau, Gromov-Lawson), その手術をうまく行なうことによって問題を同境類の段階に簡約できることを示す. ここでの方法は, より精密に行なうことによって単連結でないときも有用であることが最近, 宮崎 (1982) により示された.

定理. $G=\boldsymbol{Z}_k$ または $\boldsymbol{Z}^l$ または有限生成自由群 ($k=2$ または奇数). M を $\dim M\geqq 5$, $\dim M>l$, $\pi_1(M)\cong G$ なる閉多様体とするとき (i) $\tilde{M}$ がスピンでなければ M は正のスカラー曲率を持つ. (ii) M がスピンかつ $\hat{\boldsymbol{A}}(M)=0$ のとき適当に k 回の G 連結和をとれば正のスカラー曲率をもつ.

ここで $\hat{\boldsymbol{A}}$ は高次 $\hat{A}$ 種数と呼ばれるもので, スピン構造と基本群に関係した量である. $\hat{\boldsymbol{A}}$ については

定理 (Gromov-Lawson). 正のスカラー曲率をもつ閉スピン多様体 M について $\hat{\boldsymbol{A}}(M)=0$.

この結果からトーラス T^n は正のスカラー曲率をもち得ない, 非負スカラー曲率をもったらその計量は平坦であることが導ける. ($n\leqq 7$ については安定極小部分多様体を使って Schoen-Yau によっても得られていた.) 上の定理は, また Dirac 作用素に関する消滅定理を用いるが, その証明法から, Gromov-Lawson は **enlargable** という概念を導入し, 正のスカラー曲率の非存在についてのさらに強い結果を得ている.

5. Plateau 問題について

Γ を Riemann 多様体 (N, g) 内の Jordan 曲線, $D=\{z\in\boldsymbol{C};\ |z|<1\}$, $g_0=|dz|^2$ を D 上の計量, $S=\{f\in C^\infty(D, N)\cap C^0(\bar{D}, N);\ f(\partial D)=\Gamma\}$, $A(f)=\mathrm{Area}\,(f)$, $A(\Gamma)=\inf\{A(f);\ f\in S\}$ とする. この設定で Plateau 問題は '$A(f)=A(\Gamma)$ なる $f\in S$ を求めよ' と述べられるが次のように解かれている.

定理 (Morrey, 1948). N が homogeneous regular かつ $E(\Gamma)<\infty$ の時, $A(f)=A(\Gamma)$ なる分岐極小曲面 $f\in S$ が存在する. (この解 f を Douglas-Radó-Morrey 解, 以後は単に DRM 解, と呼ぶ.)

ここで N が homogeneous regular とは $\partial N=\phi$, かつ N が non compact の時は無限遠で十分広がっているという種の条件である. $E(\Gamma)=\inf\left\{\frac{1}{2}\int_D|\nabla f|^2dv;\ f\in S\right\}$. f が分岐極小曲面とは $f^*g=\lambda g_0$, $\lambda\geqq 0$, $\Delta f=0$ なることをいう. $\lambda\neq 0$ の所では f は埋入で平均曲率 $=0$ となる. $\lambda=0$ の所を分岐点という. $N=E^3$ の場合は, 1930年代に Douglas, Radó が得た結果で, この時は解 f を Douglas-Radó 解という. DRM 解については次の性質が知られている.

定理. (i) Γ が $C^{m,\alpha}$ 級 ($4\leqq m\leqq\infty$, ω, $0\leqq\alpha<1$) なら DRM 解 f は $\bar{D}$ 上 $C^{m,\alpha}$ 級, (ii) $\dim N=3$ の時 DRM 解は D 上に分岐点を持たない. (iii) $\dim N=3$, Γ が C^ω 級なら DRM 解は $\bar{D}$ 上に分岐点を持たない. (iv) $\dim N=3$, N は向き付け可とする時, N 内の凸領域 W (∂W の第二基本形式が内側に正定値) の境界 ∂W 上に Γ があれば, $f(D)\subset W$ なる DRM 解 f はうめ込みである.

(i) は Hildebrandt (1969) による. DRM 解に限らず一般の分岐極小曲面についていえる. これに先立って $N=E^3$, C^ω の場合に Lewy (1951) による結果があった. $N=E^3$ の時は Nitsche 等によりさらに精密化されている. (i) に関連して最近, Shibata による研究がある. (ii) は Osserman (1970), Gulliver-Osserman (1973) による. $\dim N\geqq 4$ では成り立たない. (iii) は Gulliver-Leslie (1973) による. 仮定の C^ω は C^∞ にできるだろうと予想されている. (iv) は Meeks-Yau の最近の結果, 彼らはさらに問題を free boundary でも扱い, 'ループ定理' を得た. これはホモトピー3球面上の巡回的作用の固定点集合として現われる閉曲線がノットしていないだろう, という Smith の予想の肯定的解決に寄与した.

さて, 以下 $N=E^3$ とし $\mathfrak{M}(\Gamma)$, $\mathfrak{M}_S(\Gamma)$, $\mathfrak{M}_{DR}(\Gamma)$ をそれぞれ Γ を張る (disk 型の) 分岐極小曲面, 安定極小曲面,

Douglas-Radó 解の全体とする．(ただしパラメーターの差だけある 2 つの曲面は同一視する.) Γ の長さが有限の時，$\phi \neq \mathfrak{M}_{DR}(\Gamma) \subset \mathfrak{M}_S(\Gamma) \subset \mathfrak{M}(\Gamma)$ であるが，Γ が C^ω 級の時，$\#\mathfrak{M}(\Gamma) < \infty$ が予想されている．

定理. (i) Γ が平面に凸に射影されれば $\#\mathfrak{M}(\Gamma)=1$. (ii) Γ が C^ω，Γ の全曲率 κ が 4π 以下なら $\#\mathfrak{M}(\Gamma)=1$. Γ が C^∞，$\kappa \leqq 6\pi$ なら $\#\mathfrak{M}(\Gamma) < \infty$. (iii) Γ が C^ω 級なら $\#\mathfrak{M}_{DR}(\Gamma) < \infty$. (iv) Γ が extremal (Γ はある凸集合の境界上にある) ならば，$\#\{f \in \mathfrak{M}_S(\Gamma); f$ はうめ込み$\} < \infty$. (v) C^∞ 級 Jordan 曲線全体の中で $\#\mathfrak{M}(\Gamma) < \infty$ なる Γ の全体は C^∞ 位相について開稠密.

(i) は Radó (1932) による．(ii) は Nitsche (1973 及び最近) による．(iii) は Tomi (1973) による．(iv) は Yamaoka (1982) による．付帯条件 'f はうめ込み' は多分不要といわれている．(v) は Böhme-Tromba (1981).

6. 空間形の極小部分多様体

定曲率球面 $S^m(1)$ の極小部分多様体については多くの例や興味深い結果があるが，ここでは，特に $S^n(c)$ = 曲率 c (半径 $c^{-(1/2)}$) の n 次元球面，の $S^m(1)$ への極小埋入に話題を限りたい．球面の極小部分多様体についての基本的な結果として有名な高橋の定理 (1966) から，かかる極小埋入 $S^n(c) \hookrightarrow S^m(1)$, (full)，について $c=c(k)=n/k(k+n-1)$, $m \leqq m(k)$, $m(k)+1=(2k+n-1)\cdot(k+n-2)!/k!\cdot(n-1)!$, $k \in \boldsymbol{N}$ となることがわかる．このような埋入の中でも，いわゆる標準極小埋入 (これについては $m=m(k)$ で埋入は full) があるが，$n=2$ 又は $k \leqq 3$ の時は本質的に標準極小埋入のみで，$n \geqq 3$, $k \geqq 4$ の時は標準極小埋入以外の極小埋入が多く存在することが知られている (do Carmo, Wallach, 1971). 後者の場合，最近 Tsukada は，do Carmo-Wallach の議論を精密化して，標準極小埋入の幾何的特徴付けに関する結果を得ている．標準極小埋入は例えば $S^3(1/16) \hookrightarrow S^{48}(1)$ ($n=3$, $k=6$ に相当) のように一般に余次元が非常に大きい．一般の極小埋入 $S^n(c) \hookrightarrow S^m(1)$, $c<1$ の余次元の下限について $m \geqq 2n$ となることが知られている (Moore, 1972). この不等式の等号をみたす非自明な例：$S^3(1/16) \hookrightarrow S^6(1)$，が最近 Ejiri により構成された．(したがって Pontes (1974) の結果 '$S^3(c)$, $c<1$ は $S^7(1)$ に極小埋入不可能' は正しくない. Ejiri の例について，最近，Mashimo による表現論的記述がある.)

一方，負の定曲率空間の極小部分多様体については，あまり多くが知られていないが，最近，H^3 の完備な安定極小曲面の族が Mori により構成された．2 節で述べた do Carmo-Peng, Schoen の結果と比較すると興味深い．

(1982 年 5 月 31 日提出)

(こばやし おさむ・慶応義塾大学理工学部)