

Title	不安定機械系の安定化制御に関する研究
Author(s)	林, 節八
Citation	大阪大学, 1980, 博士論文
Version Type	VoR
URL	https://hdl.handle.net/11094/2667
rights	
Note	

Osaka University Knowledge Archive : OUKA

<https://ir.library.osaka-u.ac.jp/>

Osaka University

不安定機械系の安定化制御に関する研究

昭和54年12月

林 節 八

論文梗概

本論文は不安定機械系として、(1) 自走する同軸平行二輪車、(2) 内部物体を横方向に直線変位させる型式の倒立振子、(3) 内部物体を回転変位させる型式の倒立振子の3種類の倒立振子を取り上げ、安定化制御について研究したものである。全体は以下の7章から成る。

第1章では、この研究の目的と特色、従来の研究経過、この研究の概要などを述べた。第2章では、3種類の倒立振子について動特性を記述する基礎方程式を導き、不安定な平衡状態のまわりで線形化して線形状態方程式を求めた。そして、これらの系の可制御性と可観測性を検討した。第3章では、倒立振子の二つの自由度に対応する二つの位置変数を出力とする場合の1次元汎関数オブザーバの構成法、およびこれを一般化した、状態の次元が出力の次元の整数(q)倍でありかつ可観測指数が構造上可能な中での最小値の q である定数線形系に対する $q-1$ 次元汎関数オブザーバの構成法を導いた。第4章では、3種類の倒立振子に対し、状態フィードバックによる安定化制御、最小次元状態オブザーバによる安定化制御、および汎関数オブザーバによる安定化制御についてそれぞれ安定化制御系の構成法を示した。第5章では、安定化制御を実験的に検討した。自由度に対応する二つの位置変数を出力として測定して、汎関数オブザーバによる安定化制御、最小次元状態オブザーバによる安定化制御、近似微分による安定化制御などを行ない各倒立振子を実験的にも安定化することができた。この結果、安定化制御における汎関数オブザーバと最小次元状態オブザーバの有効性が明らかとなった。また、近似微分による安定化もフィルタ効果について十分検討すれば、実用上有用であることがわかった。さらに、安定化された倒立振子には多くの場合に持続振動が生じたが、記述関数法による解析を行なって、この原因が駆動伝達系の固体摩擦であることを明らかにした。第6章では、床を利用しない内部検出量のみに基づく倒立振子の安定化を行なうため、補助振子を用いる方法を提案し、平行二輪車に適用して実験的にこの方法による安定化が可能であることを示した。第7章では、全体の結論を述べた。

目次

第1章 序論

1.1	本研究の目的と特色	1
1.2	従来の研究経過	3
1.3	本研究の概要	4

第2章 倒立振り子システムの動的解析

2.1	はじめに	7
2.2	平行二輪車	7
2.2.1	制御対象	7
2.2.2	基礎方程式	10
2.2.3	可制御性と可観測性	14
2.3	内部物体を直線変位させる型式の倒立振り子	17
2.3.1	制御対象	17
2.3.2	基礎方程式	18
2.3.3	可制御性と可観測性	22
2.4	内部物体を回転変位させる型式の倒立振り子	25
2.4.1	制御対象	25
2.4.2	基礎方程式	26
2.4.3	可制御性と可観測性	30
2.5	おわりに	33

第3章 状態オブザーバおよび汎関数オブザーバ

3.1	はじめに	35
3.2	状態オブザーバ	35
3.3	汎関数オブザーバ	39
3.4	おわりに	48

第4章 倒立振子システムに対する安定化制御系の構成	
4.1 はじめに	49
4.2 状態フィードバックによる安定化制御系の構成	50
4.3 最小次元状態オブザーバによる安定化制御系の構成	53
4.4 汎関数オブザーバによる安定化制御系の構成	55
4.5 おわりに	58
第5章 安定化制御の実験的検討	
5.1 はじめに	59
5.2 平行二輪車の安定化制御	59
5.3 直線変位型倒立振子の安定化制御	63
5.4 回転変位型倒立振子の安定化制御	72
5.5 実験結果の検討	78
5.5.1 記述関数法によるリミットサイクルの解析	78
5.5.2 可制御条件についての考察	86
5.6 おわりに	88
第6章 内部検出情報に基づく倒立振子の安定化	
6.1 はじめに	89
6.2 補助振子を取り付けた平行二輪車の基礎方程式	90
6.3 安定化制御系の構成	92
6.4 実験的検討	93
6.5 おわりに	102
第7章 結論	103
謝辞	105
引用文献	106
付録	108

第1章 序論

1.1 本研究の目的と特色

本論文は不安定な機械システムとして倒立振子を取り上げ、その安定化制御を研究したものである。倒立振子は我々の身近に存在する本質的に不安定なシステムであり、

1) 歩行などにおける人体のモデルとしては最も単純なモデルである。

2) 不安定な機械システムの中では自由度が最も小さく理論的に検討し易い。

などの特徴がある。本研究の目的は、倒立振子の安定化制御を研究することにより、歩行ロボットや人間の姿勢制御などの基礎的研究の資料を得て、その見通しを立てようとする事である。

倒立振子には平衡をとる方式の違いによって図1.1のように種々の型式のものがある。それらは(a) 自走する同軸平行二輪車、(b) 内部物体を横方向に直線変位させる型式の倒立振子、(c) 内部物体を回転変位させる型式の倒立振子、(d) 台車を移動させる型式の倒立振子、などであるが、(d) は従来よく取扱われているので本研究では取扱わないこととし、以下(a)、(b) および(c) について議論を進める。

(a) は人間が玉乗りや円筒乗りを行なう場合を非常に単純化してモデル化したもの、(b) および(c) は人間が重い棒などを手に持ち蹴棒の上を歩く場合の左右の運動を非常に単純化してモデル化したものと考えることができる。これらの倒立振子の自由度は2であり、従って変位と角変位などの二つの位置変数および速度と角速度などの二つの速度変数を状態変数とする4次元の動的なシステムである。

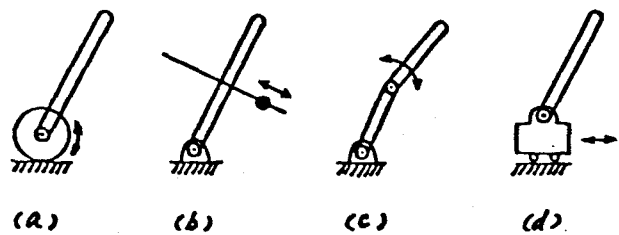


図1.1 倒立振子

安定化制御の目的は倒立振子の倒立状態を維持すること、すなわち不安定な平衡状態である倒立を安定化制御によ

り安定な平衡状態に変えることである。本研究ではこれらの倒立振子の可制御性および可観測性を検討し、どのような構造のとき基本的に安定化可能なのか、および四つの状態変数のうちどれを出力として測定すれば安定化可能なのかということについて明らかにする。そして全状態が測定できる場合と実験装置で示すように二つの位置変数を出力として測定できる場合について、それぞれ安定化制御系の構成方法を示すとともに、実験的にも倒立振子を安定化する。

一般にシステムを安定化する場合、すべての状態変数を測定してフィードバックすることが望ましいが、機構の本質的性格、測定の困難さあるいは費用の問題などのため、すべての状態変数を出力として直接に測定することができない場合も多い。このような場合、システムの入出力から内部状態を推定する状態観測器¹⁾(以下、状態オブザーバまたは単にオブザーバという)が有用である。しかし状態フィードバック制御則を実行するためには、状態そのものの値でなく、制御則に必要な状態関数を推定する線形関数オブザーバを用いればよく、特に1入力系では状態の線形結合の値を推定する汎関数オブザーバを用いればよい。多くの場合、汎関数オブザーバは状態オブザーバよりも低次元のシステムで構成できる。本研究で扱う倒立振子を含めて一般に n 自由度の機械システムにおいて、自由度に対応する n 個の位置変数を出力として測定するときには、系の可観測指数¹⁾ $\nu = 2$ であることを示すことができる。従って、これに対しては $\nu - 1 = 1$ 次元汎関数オブザーバを構成することができる。¹⁾ 本研究では倒立振子の安定化制御に主としてこの1次元汎関数オブザーバを用いることとし、上記の場合を含む、状態の次元が出力の次元の整数(ν)倍でありかつ可観測指数 ν が構造上可能な中での最小の値(ν)であるようなシステムに対し、従来の方法よりも簡単な $\nu - 1$ 次元汎関数オブザーバの構成方法を提案して使用する。

すでに述べたように実験に使用する倒立振子は、二つの位置変数を出力として測定できるように製作した。このうちの倒立振子の姿勢角の測定には床を利用する接触的な測定方法を採用することにした。ところで、歩行ロボットを製作する場合などを考えると、床を利用しない内部的な測定方法が必要であると考えられる。そこ

で、本研究では倒立振子に補助振子を取り付け、 γ の相対角変位などの内部的な方法で測定できる量からオブザーバを用いて姿勢角などを推定する方法を提案し、平行二輪車に適用して、この方法を用いた内部検出情報のみによる倒立振子の安定化が可能であることを示す。

1.2 従来の研究経過

倒立振子の安定化は、古くから多くの研究が行なわれている。特に、(a)の台車振子型^{2)~7)}と(c)の回転変位型^{8)~12)}がよく扱われている。台車振子型では、単一の剛体振子^{3), 6), 7)}の場合だけでなく、多重振子²⁾、弾性振子⁴⁾および2重振子⁵⁾も扱われている。回転変位型では、人間の2足歩行のモデルとして解析を行なっているものが多い。^{10), 11)} (a)の平行二輪車を扱ったものは少なく単に製作を目的としたもの¹³⁾や著者によるもの^{14), 15)}がある。(b)の直線変位型を扱ったものも少なく著者によるもの^{16), 17)}がある。次に制御則により分類すると、オンオフ制御による安定化を扱っているもの^{2), 3), 13)}、出力の定数フィードバックによる安定化を扱っているもの⁴⁾、モード制御とオブザーバによる安定化を扱っているもの⁵⁾、オブザーバによる安定化を扱っているもの^{6), 7), 15), 16)}、汎関数オブザーバによる安定化を扱っている著者によるもの^{9), 14), 17)}、安定な平衡点からの振り上げ制御を扱っているもの^{6), 7)}などがある。以上のように本論文で扱っている倒立振子のうち、平行二輪車および直線変位型倒立振子は、著者によるもののほかには従来あまり扱われていない。本論文で詳しく検討したこれらの倒立振子の可制御性および可観測性も従来あまり検討されていない。また、汎関数オブザーバによる安定化も著者によるもののほかには、従来あまり扱われていない。

汎関数オブザーバはLuenberger¹⁾により提案され、その後多くの研究が行なわれている。^{18)~21)} 著者も状態の次元が出力の次元の2倍でありかつ可観測指数が可能な中での最小値の2であるようなシステムに対し、従来の方法よりも簡単な設計手順による汎関数オブザーバの構成法を提案し、倒立振子の安定化制御に用いた。^{9), 14), 17)}

姿勢角などの内部検出や内部検出による倒立振子の安定化については、文献12および15で扱われているほかは、従来あまり研究されていない。文献12では、片持ちの弾性振子を用いた角変位計、振動型角変位計、角速度計および角加速度計を試作し、これを用いて回転変位型倒立振子の安定化を行なったことが報告されている。詳しく記述されていないので、ここで簡単に評価を下すことができないが、これは姿勢角などを内部的な方法で直接に測定しようとするアプローチであり、今後も研究されるべき一つの方向である。これに対し著者による文献15では、倒立振子に補助振子を取り付け、その相対角変位などの内部検出量から倒立振子の姿勢角を推定する方法を提案し、この方法で平行二輪車を安定化している。

1.3 本研究の概要

本研究では、平行二輪車、内部物体を横方向に直線変位させる型式の倒立振子および内部物体を回転変位させる型式の倒立振子の3種類の倒立振子の安定化制御について研究した。まず、これらの倒立振子システムについて動特性を記述する基礎方程式を導き、次に不安定な平衡状態のまわりで局所線形化を行なうことにより線形状態方程式を導く。次に、これらの倒立振子が基本的に安定化できる構造であるかどうかを調べるため、線形状態方程式の可制御性を検討しその必要十分条件を導く。この結果、各倒立振子の可制御性の必要十分条件は、それぞれその物理量に関するある写式が成り立たないという形の条件で与えられ、特別な場合を除くと通常満足されることがわかった。次に各倒立振子を安定化するためには、どの状態変数を出力として測定する必要があるかということ調べるため、一つあるいはいくつかの状態変数を出力として測定する場合の各倒立振子の可観測性を検討し、それぞれの場合について可観測性の必要十分条件を導く。この結果、各倒立振子は実数配置に示すように四つの状態変数のうちの二つの位置変数を出力として測定する場合には、可観測でありしかも可観測指数が構造上可能な値の中の最小値の2であることなどがわかった。

倒立振子の場合と同様、一般に n 自由度の機械システムにおいて自由度に対応す

る n 個の位置変数を出力とする場合には可観測であり、しかも可観測指数は構造上可能な中で最小値の2である。本研究ではこのような場合も含む、状態の次元が出力の次元の整数倍でありかつ構造上可能な最小の可観測指数をもつシステムに対し、汎関数オブザーバの構成について検討し、従来の方法より簡単な構成法を導く。

次に、各倒立振子が前述の可制御条件を満たすならば、それぞれ全状態のフィードバックにより安定化できること、および可観測条件を満たす出力を測定するならば、そのオブザーバを用いたフィードバックにより安定化できることを示す。特に、後者については簡単のため、実験装置に示すように二つの位置変数を出力として測定する場合について具体的に示す。この安定化制御のためのオブザーバとしては、状態オブザーバと汎関数オブザーバのいづれも使用できる。

次に、二つの位置変数を出力として測定する倒立振子実験装置で安定化制御を実験的に検討する。

最後に、床を利用した接触的な方法による姿勢角の測定が不可能な場合に対し、倒立振子に補助振子を取り付ける方法を提案し、平行二輪車に適用して、いわゆる内部検出に基づく安定化制御を検討する。

次に各章の概要について述べる。

第2章では各倒立振子について動特性を記述する基礎方程式を導く。次に、不安定な平衡状態のまわりで局所線形化を行ない、線形状態方程式を導く。最後に、各倒立振子の可制御性および一つあるいはいくつかの状態変数を出力として測定する場合の可観測性を調べ、それぞれ必要十分条件を導く。

第3章では、状態オブザーバの構成法についての従来の研究を簡単に要約した後状態の次元が出力の次元の整数倍でありかつ構造上可能な最小の可観測指数をもつシステムに対し、汎関数オブザーバの従来の方法よりも簡単な構成法を提案する。

第4章では、各倒立振子が可制御条件を満たしているならば、それぞれ全状態フィードバックにより安定化できることを示す。さらに、一つあるいはいくつかの状態変数を出力として測定する場合には、可観測条件が満たされているならば、オブザーバを用いた出力フィードバック制御により安定化できることを、二つの位置変

数を出力とする場合について具体的に示す。

第5章では各倒立振子の安定化制御を実験的に検討する。各倒立振子の出力としてそれぞれ二つの位置変数を測定し、最小次元状態オブザーバを用いたフィードバック制御、汎関数オブザーバを用いたフィードバック制御および近似微分を用いたフィードバック制御などの安定化制御を行なう。

第6章では、補助振子を取り付けた平行二輪車に対し、補助振子の車体に対する相対角変位と車輪の車体に対する相対角変位を出力として測定し、これらの床を利用しない内部検出情報のみに基づいて姿勢角などをオブザーバを用いて推定し、これをフィードバックすることにより平行二輪車を安定化する。

第7章は全体の結論である。

第2章 倒立振り子システムの動的解析

2.1 はじめに

本章では第5章の実験に用いる平行二輪車、内部物体を横方向に直線変位させる型式の倒立振り子および内部物体を回転変位させる型式の倒立振り子の3種類の倒立振り子をそれぞれ示し、それぞれについて動特性を記述する基礎方程式を導く。次に、基礎方程式を不安定な平衡状態のまわりで局所線形化して線形状態方程式を導き、可制御性および可観測性を調べてそれぞれの必要十分条件を導く。

2.2 平行二輪車

2.2.1 制御対象

実験に使用する平行二輪車を図2.1に示す。車体上部に取り付けられた50Wの直流サーボモータにより、減速比 $\frac{1}{16}$ の伝達系を介し車輪を駆動する構造となっている。伝達系にはタイミングベルトを2段使用している。直流サーボモータの界磁側は直流100V電源に、電機子側は200Wの直流電力増幅器に接続する。この増幅器の入力端電圧 u [V]が、このシステムの操作量となる。

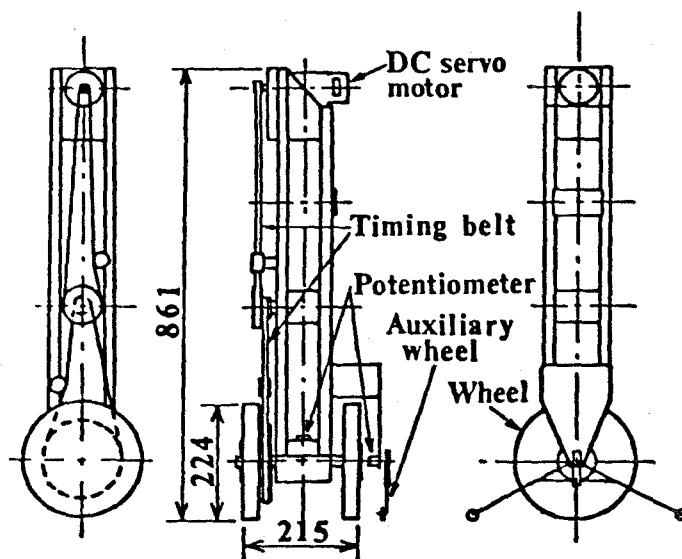


図2.1 平行二輪車

このシステムの出力として、車体に対する車輪の相対角変位 ϕ [rad]と車体の鉛直からの傾き角 θ [rad]とをそれぞれポテンシオメータにより測定する。特に傾き角 θ の測定方法は次の通りである。図2.1のように車体に取り付けられたポ

テンションメータは車輪と同一の中心線を持ち、その摺動軸からは床に接する補助車輪が出てゐる。床が水平で凹凸がなければ補助車輪は二輪車の運動の妨げとならず、ポテンションメータから傾き角を直接に測定することができる。

平行二輪車の外観を図2.2、直流電力増幅器および電源(DC100V, DC±10V)の外観を図2.3に示す。実験装置の概要を表2.1、直流電力増幅器の入出力特性を図2.4に示す。

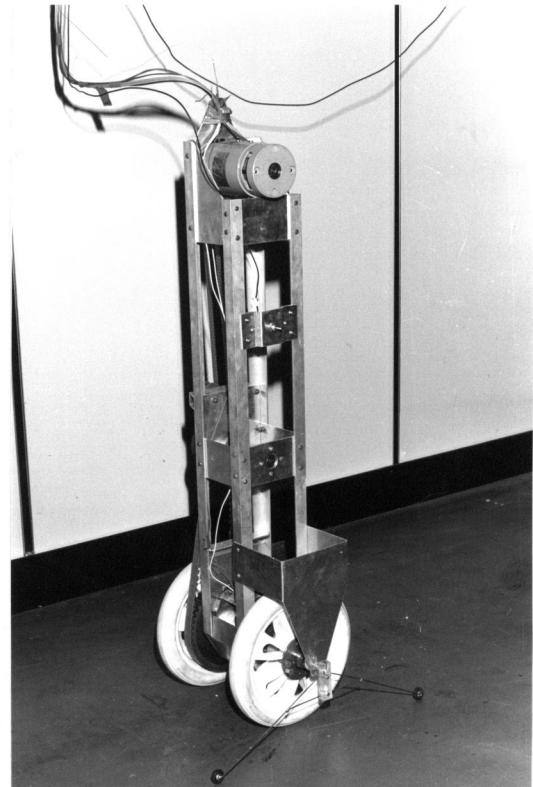


図2.2 平行二輪車の外観

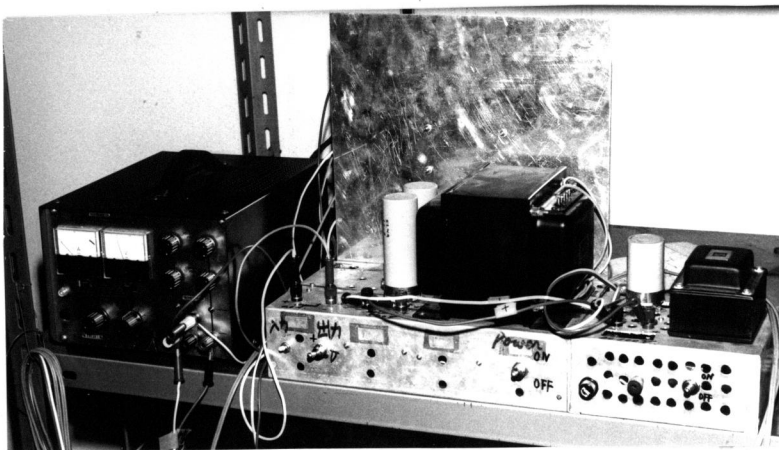


図2.3 200W直流電力増幅器および電源装置(DC100V, DC±10V)の外観

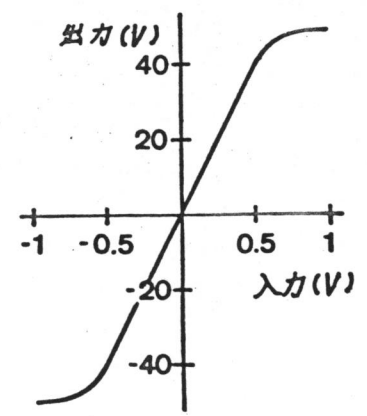


図2.4 直流電力増幅器の入出力特性

表 2.1 平行二輪車実験装置の概要

平行二輪車	高さ	861 mm
	質量	8.019 kg
	車輪直径	224 mm
	駆動方式	直流サーボモータ
	減速比	1:16
直流サーボモータ	型式	MDA D8-301 (山洋電気)
	出力	50 W
	電機子電圧	100 V
	電機子電流	0.8 A
	界磁電圧	100 V
	界磁電流	0.17 A
	電機子慣性能率	0.65 kg·cm ²
	機械的時定数	26 msec
	電気的時定数	1.59 msec
	電機子抵抗	22 Ω (75°C)
	電機子インダクタンス	35 mH (75°C)
	トルク定数	2.3 kgf·cm/A
	質量	2.4 kg
	直流電力増幅器	型式
メインアンプ		SI5200C (サンケン電気)
プリアンプ		SI5000P (サンケン電気)
入力電圧		±0.54 V
出力電圧		±42 V
出力電流		5 A
出力電力		200 W
入出力ゲイン		78.75 V/V
ポテンシオメータ (φ測定用)	型式	CPP-45 (緑測器)
		1回転形, 5kΩ
	変換率	インダクティブ・プラスチック形 1.955 rad/V (*)
ポテンシオメータ (θ測定用)	型式	CP-2U-32 (緑測器)
		無接点形
	変換率	0.9390 rad/V (**)
直流±10V電源	型式	7025 (菊水電器)
直流100V電源		自作

* 両端10V負荷, 車軸に対し歯数比30:96の歯車を介したとき.

** 両端4V負荷のとき

2.2.2 基礎方程式

平行二輪車の座標系を図2.5に示す。平行二輪車の基礎方程式を導くにあたり次の仮定を設ける。

- 1) 床は水平で凹凸がない。
- 2) 二輪車は車輪に平行な鉛直面に沿って平面運動する。
- 3) 二輪車の各部は剛体である。
- 4) 床と車輪はすべらない。
- 5) 車輪のころがり摩擦は無視できる。
- 6) モータの電気的時定数は十分小さく無視できる。
- 7) モータの不感帯は無視できる。
- 8) 駆動伝達系の摩擦としては粘性摩擦のみ考慮する。
- 9) ベルトの伸び縮みおよびバックラッシは無視できる。

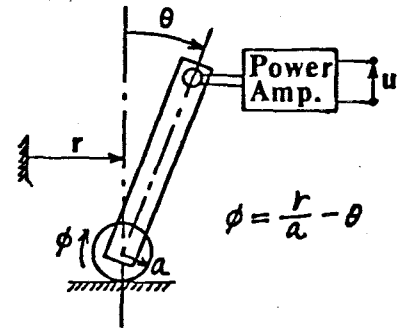


図2.5 座標系

ここで以下の解析に用いる記号を関連のあるもの同士をまとめて、次のように定める。

振子系

- r 車輪の物動距離 [m]
- θ 車体の傾き角 [rad]
- ϕ 車体に対する車輪の相対角変位 [rad]
- T_w 車輪駆動トルク [N·m] (車輪を ϕ 方向に回転させる場合を負とする)
- m 平行二輪車の全質量 [kg]
- m_1 車体の質量 [kg]
- m_2 車輪の質量 [kg]
- m_h 補助車輪の質量 [kg]
- I_1 車体の車軸まわりの慣性能率 [kg·m²]
- I_2 車輪の中心軸まわりの慣性能率 [kg·m²]
- I_d 伝達系の等価慣性能率 [kg·m²]

- I_p 伝達系の等価定数 [$\text{kg} \cdot \text{m}^2$]
 l_1 車軸から車体重心までの高さ [m]
 a 車輪半径 [m]
 C_i' 伝達系の真の等価粘性摩擦定数 [$\text{kg} \cdot \text{m}^2 / \text{sec}$]
 C_i モータの逆起電力特性も含めた伝達系の等価粘性摩擦定数 [$\text{kg} \cdot \text{m}^2 / \text{sec}$]
 G 直流増幅器入力電圧 u [V] から, 車輪駆動トルクまでの等価ゲイン定数 [$\text{N} \cdot \text{m} / \text{V}$]
 N モータ・車輪間の減速比 $\frac{1}{N}$ の逆数
 g 重力加速度 [m / sec^2]

モータ系

- u 直流電力増幅器の入力端電圧 [V] (車輪を ϕ の方向に回転させる場合を負とする.)
 K_a 直流電力増幅器のゲイン [V / V]
 i_a 電機子電流 [A]
 ω_a 電機子回転速度 [rad / sec]
 R_a 電機子抵抗 [Ω]
 L_a 電機子インダクタンス [H]
 K_t トルク定数 [$\text{N} \cdot \text{m} / \text{A}$]
 K_v 逆起電力定数 [$\text{V} / (\text{rad} / \text{sec})$]
 T_a 電機子軸トルク [$\text{N} \cdot \text{m}$]

まずモータの特性を考える。電機子の回路方程式として、次式が得られる。

$$L_a \frac{di_a}{dt} + R_a i_a = \underbrace{K_a u}_{\text{電機子電圧}} - \underbrace{K_v \omega_a}_{\text{逆起電力}} \quad (2.1)$$

電機子軸トルク T_a は電流 i_a に比例すると考えることができるから、

$$T_a = K_t i_a \quad (2.2)$$

を (2.1) に代入すると、次式を得る。

$$\frac{L_a}{R_a} \dot{T}_a + T_a = \frac{K_t K_a}{R_a} u - \frac{K_t K_v}{R_a} \omega_a \quad (2.3)$$

仮定6)により電気的時定数 $\frac{L_a}{R_a}$ は十分小さいから、左辺第1項を無視すると

$$T_a = \frac{K_t K_a}{R_a} u - \frac{K_t K_v}{R_a} \omega_a \quad (2.4)$$

さらに車軸部での関係に直すため

$$T_w = N T_a, \quad \omega_a = -N \dot{\phi}$$

を代入すると、次式を得る。

$$T_w = \frac{N K_t K_a}{R_a} u + \frac{N^2 K_t K_v}{R_a} \dot{\phi} \quad (2.5)$$

次に機械的力部分の運動を考える。Lagrangeの運動方程式から、次の平行二輪車の運動方程式を導くことができる。(付録1)

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} m a^2 + I_2 + I_d & m a^2 + I_2 + m_1 l_1 a \cos \theta + I_\beta \\ m a^2 + I_2 + m_1 l_1 a \cos \theta + I_\beta & m a^2 + I_1 + I_2 + 2 m_1 l_1 a \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\phi} \\ \ddot{\theta} \end{bmatrix} \\ & = \begin{bmatrix} -C_1 \dot{\phi} + m_1 l_1 a \dot{\theta}^2 \sin \theta - T_w \\ m_1 l_1 (g + a \dot{\theta}^2) \sin \theta \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (2.6)$$

ここで、 T_w は駆動トルクを等価的に車軸部に置き直したものであり、 I_d と I_β は駆動伝達系による定数である。伝達系各部分の慣性モーメントを I_{ti} 、車輪1回転に対する回転数を N_i 、その回転方向を σ_i (車輪と同方向のとき+1、反対方向のとき-1) とすると、ベルトの質量を無視するならば、 I_d と I_β はそれぞれ次式で求めることができる。

$$I_d = \sum_i N_i^2 I_{ti}, \quad I_\beta = \sum_i \sigma_i N_i I_{ti} \quad (2.7)$$

(2.5)を(2.6)に代入することにより、仮定1)~9)の下で平行二輪車の動特性を記述する基礎方程式として、次式を得ることができる。

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} m a^2 + I_2 + I_d & m a^2 + I_2 + m_1 l_1 a \cos \theta + I_\beta \\ m a^2 + I_2 + m_1 l_1 a \cos \theta + I_\beta & m a^2 + I_1 + I_2 + 2 m_1 l_1 a \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\phi} \\ \ddot{\theta} \end{bmatrix} \\ & = \begin{bmatrix} -C_1 \dot{\phi} + m_1 l_1 a \dot{\theta}^2 \sin \theta - G u \\ m_1 l_1 (g + a \dot{\theta}^2) \sin \theta \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (2.8)$$

ここで

$$C_1 \triangleq C_1' + \frac{N^2 K_t K_v}{R_a}, \quad G \triangleq \frac{N K_t K_a}{R_a} \quad (2.9)$$

次に基礎方程式(2.8)から、不安定な平衡状態 $\phi = \theta = \dot{\phi} = \dot{\theta} = 0$ の近傍での平行二輪車の動特性を記述する線形状態方程式を求める。状態ベクトルとして

$$x = [\phi \quad \theta \quad \dot{\phi} \quad \dot{\theta}]' \quad (\prime \text{は転置を表わす}) \quad (2.10)$$

と置くと、基礎方程式(2.8)から、次の形の非線形状態方程式が得られる。

$$\dot{x} = f(x, u) \quad (2.11)$$

ここでベクトル値関数 f の形は(2.8)から明らかである。(2.11)において、 $f(x, u)$ を $(x, u) = 0$ のまわりで Taylor 展開し 2 次以上の項を無視すると、次の線形状態方程式が得られる。

$$\dot{x} = Ax + bu \quad (2.12)$$

ここは

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & a_{32} & a_{33} & 0 \\ 0 & a_{42} & a_{43} & 0 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ b_3 \\ b_4 \end{bmatrix} \quad (2.13)$$

$$a_{32} = -\frac{m_1 l_1 g I_b}{D}, \quad a_{33} = -\frac{c_1 I_0}{D}, \quad b_3 = -\frac{G I_0}{D}$$

$$a_{42} = \frac{m_1 l_1 g I_a}{D}, \quad a_{43} = \frac{c_1 I_b}{D}, \quad b_4 = \frac{G I_b}{D}$$

$$I_a \triangleq m a^2 + I_2 + I_d, \quad I_a \triangleq m a^2 + I_2 + m_1 l_1 a + I_\beta \quad (2.14)$$

$$I_0 \triangleq m a^2 + I_1 + I_2 + 2m_1 l_1 a, \quad D \triangleq I_a I_0 - I_b^2$$

最後に、入力 u から状態 x への伝達関数を求める。線形状態方程式(2.12)を初期状態をゼロとして Laplace 変換し、入力 u と状態 x の比を計算すると逆式が得られる。

$$\frac{x(s)}{u(s)} = (sI - A)^{-1} b = \left[\frac{n_1(s)}{d(s)} \quad \frac{n_2(s)}{d(s)} \quad \frac{s n_1(s)}{d(s)} \quad \frac{s n_2(s)}{d(s)} \right]' \quad (2.15)$$

ここで

$$\begin{aligned} n_1(s) &= -\frac{GI_0}{D} s^2 + \frac{m_1 l_1 g G}{D}, & n_2(s) &= \frac{GI_b}{D} s^2 \\ d(s) &= s^4 + \frac{C_1 I_0}{D} s^3 - \frac{m_1 l_1 g I_a}{D} s^2 - \frac{m_1 l_1 g C_1}{D} s \end{aligned} \quad (2.16)$$

2.2.3 可制御性と可観測性

可制御性と可観測性は、制御系の重要な性質である。ここでは、不安定な平衡状態 $(x, u) = 0$ の近傍での平行二輪車の動特性を記述する線形状態方程式 (2.12), (2.13) について、可制御性並びに一部の状態変数を出力とする場合の可観測性を検討する。ところで、平行二輪車の安定化には、ある位置で安定に自立させたい場合とある速度で安定に走行させたい場合がある。後者の場合には、

$$x_s = [0 \quad \dot{\theta} \quad \ddot{\theta}]' \quad (2.17)$$

を状態とする (2.12) のサブシステム

$$\begin{aligned} \dot{x}_s &= A_s x_s + b_s u \\ A_s &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ a_{32} & a_{33} & 0 \\ a_{42} & a_{43} & 0 \end{bmatrix}, & b_s &= \begin{bmatrix} 0 \\ b_3 \\ b_4 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (2.18)$$

の安定化を考えれば良いので、このサブシステム (2.18) の可制御性と可観測性も検討することにする。

一般に、次の定数線形系を考える。

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu \\ y &= Cx \end{aligned} \quad (2.19)$$

ここで、 u は r 次元入力ベクトル、 x は n 次元状態ベクトル、 y は m 次元出力ベクトル、 A , B および C はそれぞれ $n \times n$, $n \times r$, $m \times n$ の行列とする。任意の初期値 $x(0) = x_0$ から出発して、ある時刻 $t = t_1$ でシステムの状態を 0、すなわち $x(t_1) = 0$ とする制御入力 $u(t)$ ($0 \leq t \leq t_1$) が存在するとき、システム (2.19) は可制御であるという、あるいは簡単に (A, B) は可制御であるともいう。

(A, B) が可制御であるということは、直感的には入力 $u(t)$ の影響がシステムの動特性を通して状態空間全体に波及し得ることを意味している。(A, B) が可制御であることは

$$\text{rank} [B, AB, \dots, A^{n-1}B] = n \quad (2.20)$$

であることと等価である。²²⁾ 次に、任意の初期状態 $x(0) = x_0$ から出発した(2.19)の解に対して、ある時刻 $t_1 > 0$ が存在して、入力 $u(t)$ ($0 \leq t \leq t_1$) および観測出力 $y(t)$ ($0 \leq t \leq t_1$) から初期状態が一意的に決定できるとき、システム(2.19)は可観測であるという、あるいは簡単に (C, A) は可観測であるともいう。(C, A) が可観測であることは

$$\text{rank} [C', A'C', \dots, (A')^{n-1}C'] = n \quad (2.21)$$

であることと等価である。²²⁾ (C, A) が可観測であることは、任意のゼロでない初期状態からのシステムの自由応答において、観測出力が恒等的にはゼロにならないということとも等価である。従って、 (C, A) が可観測であるということは、直感的にはシステムの状態空間全体にわたる挙動が、観測出力に影響を及ぼすことを意味している。

可制御条件(2.20)および可観測条件(2.21)を用いると、4次系(2.12)および3次系(2.18)の可制御性と可観測性を調べることができ、表2.2および表2.3に示す結果が得られる。表2.2は入力 u による可制御性と一部の状態変数を出力とするときの可観測性について記してあり、条件付可制御あるいは条件付可観測とあるのは、表2.3の対応する条件が満たされるならば可制御もしくは可観測であることを意味する。

表2.3の条件について考える。パラメータ m_1, g, G, c_1 および I_a は明らかに正の定数である。従って表2.3の条件は、 l_1 および I_b がそれぞれ水密か非密かということに帰着する。車体重心の車軸からの高さ l_1 が、 $l_1 \leq 0$ ならば、平行二輪車は不安定なシステムとなる。ここで対象とするところではない。 I_b は(2.14)より $I_b = m a^2 + I_2 + m_1 l_1 a + I_\beta$ であるが、 l_1 を正とすると最初の3つの項は正であり、また I_β は伝達系の定数であるから通常その絶対値は他の項に比べ

表 2. 2 平行二輪車の可制御性および可観測性

	入力および出力変数	可制御性または可観測性	表 2. 3
4次系 (2. 12)	u	条件付可制御	(a)
	ϕ および $(\phi, \dot{\phi})$	条件付可観測	(b)
	$(\phi, \dot{\theta})$ および $(\phi, \dot{\phi}, \dot{\theta})$	条件付可観測	(c)
	(ϕ, θ)	可観測	
	$(\theta, \dot{\phi}, \dot{\theta})$	不可観測	
3次系 (2. 18)	u	条件付可制御	(a)
	$\dot{\phi}$	条件付可観測	(b)
	$(\dot{\phi}, \dot{\theta})$	条件付可観測	(c)
	θ および $(\theta, \dot{\theta})$	条件付可観測	(d)
	$\dot{\theta}$	条件付可観測	(e)
	$(\theta, \dot{\phi})$	可観測	

表 2. 3 可制御性または可観測性の必要十分条件

(a)	$b_4(b_3 a_{42} - b_4 a_{32}) \neq 0$ すなわち $m, l, g G I_b \neq 0$
(b)	$a_{32} \neq 0$ すなわち $m, l, g I_b \neq 0$
(c)	$a_{32} \neq 0$ または $a_{42} \neq 0$ すなわち $m, l, g I_b \neq 0$ または $m, l, g I_a \neq 0$
(d)	$a_{43} \neq 0$ すなわち $c, I_b \neq 0$
(e)	$a_{43}(a_{33} a_{42} - a_{32} a_{43}) \neq 0$ すなわち $m, l, g c, I_b \neq 0$

て十分小さく、従って通常 I_b は正の定数である。以上の考察から次の結論を得る。

l , および I_b はともに正であるとする。このとき、平行二輪車の不安定な平衡状態の近傍での動特性を表わす 4次系 (2. 12) と 3次系 (2. 18) について、次の事項が成り立つ。

- 1) 4次系 (2. 12) および 3次系 (2. 18) はともに可制御である。
- 2) 4次系 (2. 12) は車輪の相対角変位 ϕ を出力とするとき可観測であり、 $(\theta, \dot{\phi}, \dot{\theta})$ のすべてあるいは一部を出力とするときは可観測でない。
- 3) 3次系 (2. 18) は $(\theta, \dot{\phi}, \dot{\theta})$ のどの一つを出力とするときも可観測である。

このように平行二輪車は通常可制御であるから、本章で明らかにするように、全状態のフィードバックで安定化可能であり、また可観測となる出力のオブザーバを

用いたフィードバックで安定化可能である。

2.3 内部物体を直線変位させる型式の倒立振り子

2.3.1 制御対象

実験に使用する内部物体を横方向に直線変位させる型式の倒立振り子の概略を図2.6に示す。支桌からの高さ1.089m、中2.040mの倒立振り子は、支持台に取り付けられた軸受で支えられており、倒立振り子の上部に取り付けられた直流サーボモータにより、タイミングベルト、スチールワイヤなどからなる伝達系を介して内部物体(1.21kgのおもり)を横方向に駆動する型式となっている。伝達系の概略を図2.7に示す。

直流サーボモータの界磁側は直流100V電源に、電機子側は200Wの直流電力増幅器にそれぞれ接続する。この増幅器の入力端電圧 u [V]が、

このシステムの操作量である。このシステムの出力としては、おもりの中央からの変位 r [m]と倒立振り子の鉛直からの傾き角 θ [rad]をそれぞれポテンシ

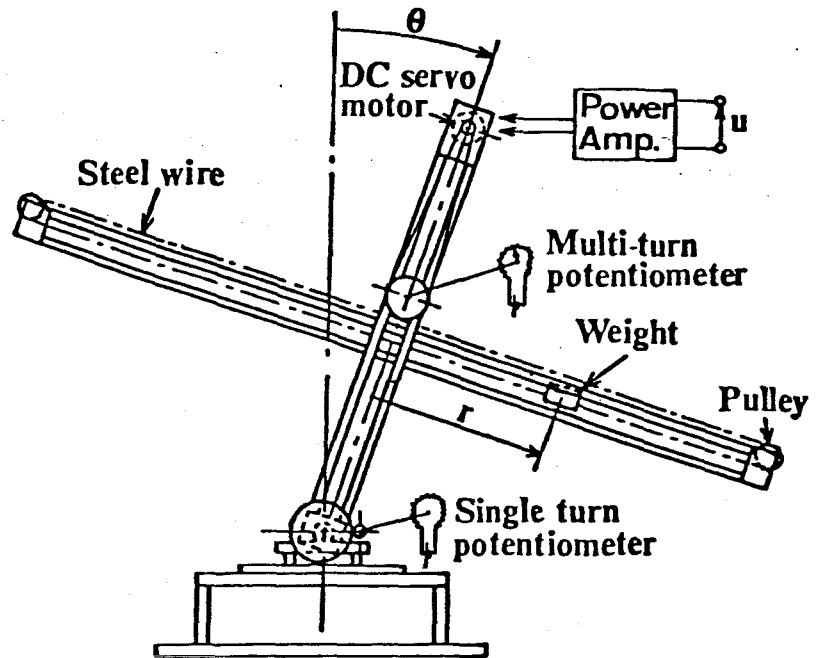


図2.6 内部物体を直線変位させる型式の倒立振り子

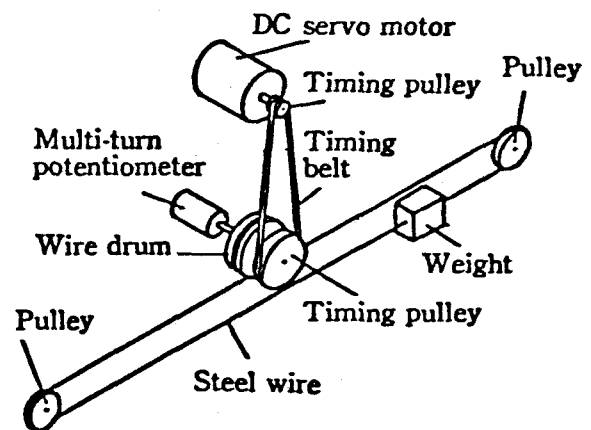


図2.7 伝達系の概略

ータにより測定する。

倒立振子の外観を図
2.8に示す。直流電
力増幅器と電源は2.
2節と同じものを用い
る。(図2.3)

実験装置の概要を表
2.4に示す。

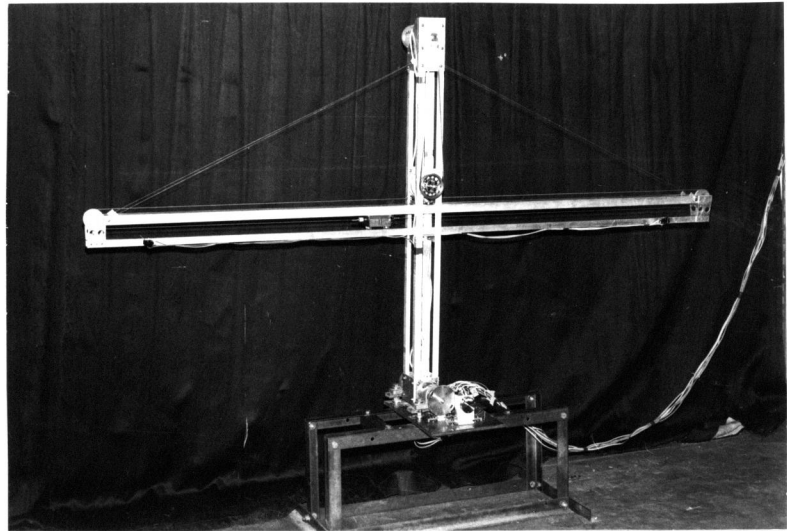


図2.8 直線変位型倒立振子の外観

表2.4 直線変位型倒立振子の実験装置の概要

直線変位型倒立振子	支桌からの高さ	1089 mm
	中	2040 mm
	全質量	10.36 kg
	おもりの質量	1.21 kg
	おもり軌道高さ	517.6 mm
	駆動方式	直流サーボモータ
	ベルトの減速比	1:4
	ワイアドラムピッチ径	81.17 mm
直流サーボモータ	表2.1参照	
直流電力増幅器	表2.1参照	
ポテンシオメータ (r 測定用)	型式	HP10S (緑測器)
		10回転形
		巻線形
	変換率	0.1276 m/V (*)
ポテンシオメータ (θ 測定用)	型式	CPP45 (緑測器)
		1回転形
		コンダクタティブ・プラスティック形
	変換率	0.05092 rad/V (**)

* 両端20V負荷のとき

** 両端20V負荷、歯数比30:180の歯車で6倍に増幅したとき。

2.3.2 基礎方程式

内部物体を横方向に直線変位させる型式の倒立振子の基礎方程式を導くにあたり、

次の仮定を設ける。

- 1) 支持軸は水平であり、倒立振り子は鉛直面に沿って平面運動する。
- 2) 倒立振り子の各部分は剛体である。
- 3) 駆動伝達系および支持軸における摩擦として、それぞれ粘性摩擦のみを考慮する。
- 4) モータの電気的時定数は十分小さく無視できる。
- 5) モータの不感帯は無視できる。
- 6) ベルトおよびワイアの伸び縮みおよびバックラッシュは無視できる。ワイアとワイアドラムの間にはすべりが生じない。

ここで、以下の解析に用いる記号を関連のあるもの同士をまとめて、次のように列記する。ただし、物理的に類似性のあるものは2.2.2節の平行二輪車の場合と同一の記号を用い、またモータ系の記号は2.2.2節と全く同じなので省略する。

- r おもりの軌道中央位置からの変位 [m]
- θ 倒立振り子の傾き角 [rad]
- F_w おもりに作用する駆動力 [N] (おもりを r 方向に動かす場合を正とする。)
- m 倒立振り子の全質量 [kg]
- l 倒立振り子全体の重心の支点からの高さ [m]
- I_0 倒立振り子全体の支点まわりの慣性能率 [kg·m²] (おもりは中央に固定)
- m_1 おもりを除く部分の質量 [kg]
- l_1 おもりを除く部分の重心の支点からの高さ [m]
- I_1 おもりを除く部分の支点まわりの慣性能率 [kg·m²]
- m_2 おもりの質量 [kg]
- l_2 おもりの重心の軌道の支点からの高さ [m]
- I_2 おもりの重心まわりの慣性能率 [kg·m²]
- m_{2a} 駆動伝達系の等価質量 [kg]

- m_{2b} 駆動伝達系の等価定数 [kg·m]
 C_1 支持軸における粘性摩擦定数 [kg·m²/sec]
 C_2' 駆動伝達系の莫の等価粘性摩擦定数 [kg/sec]
 C_2 モータの逆起電力特性も含めた駆動伝達系の等価粘性摩擦定数 [kg·m²/sec]
 G 直流電力増幅器の入力端電圧 u [V] からおもり駆動トルクまでの等価ゲイン定数 [N/V]
 N 電機子・ワイアドラム間の速速比 $\frac{1}{N}$ の逆数
 R_d ワイアドラムのピッチ半径 [m]
 g 重力加速度 [m/sec²]

仮定4) により、モータの特性は (2.4), すなわち

$$T_a = \frac{K_t K_a}{R_a} u - \frac{K_t K_v}{R_a} \omega_a \quad (2.22)$$

で表わすことができる。これをおもり部分での関係に直すため

$$F_w = \frac{N T_a}{R_d}, \quad \omega_a = \frac{N \dot{r}}{R_d}$$

を代入すると、次式を得る。

$$F_w = \frac{N K_t K_a}{R_d R_a} u - \left(\frac{N}{R_d} \right)^2 \left(\frac{K_t K_v}{R_a} \right) \dot{r} \quad (2.23)$$

次に機械的力部分の運動を考える。Lagrange の運動方程式から、次の直線変位型倒立振り子の運動方程式を導くことができる。(付録1)

$$\begin{aligned}
 & \begin{bmatrix} m_2 + m_{2a} & m_2 l_2 + m_{2b} \\ m_2 l_2 + m_{2b} & I_0 + m_2 r^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{r} \\ \ddot{\theta} \end{bmatrix} \\
 & = \begin{bmatrix} -C_2' \dot{r} + m_2 g \sin \theta + m_2 r \dot{\theta}^2 + F_w \\ -C_1 \dot{\theta} + m l g \sin \theta + m_2 g r \cos \theta - 2 m_2 r \dot{r} \dot{\theta} \end{bmatrix} \quad (2.24)
 \end{aligned}$$

ここで、 F_w は駆動トルクを等価的におもりに作用する力に置き直したものであり、 m_{2a} と m_{2b} は駆動伝達系による定数である。駆動伝達系の各回転部分の慣性モーメントを I_{ti} 、ワイアドラムが1回転するときの回転数を N_i 、回転方向を σ_i (ドラムと同方向のとき+1, 反対方向のとき-1)、とし、ベルトとワイアの質量をそれぞれ m_t および m_w とすると、 m_{2a} および m_{2b} はそれぞれ次式で求めること

がでる。

$$m_{2a} = \frac{\sum N_i^2 I_{ti} + m_t R_t^2}{R_d^2} + m_{2v} \quad (2.25)$$

$$m_{2b} = \frac{\sum \sigma_i N_i I_{ti}}{R_d} \quad (2.26)$$

ここで、 R_t はドラム軸側のタイミングプーリのピッチ半径であり、また m_{2b} についてはベルトとワイヤは無視した。

(2.23) を (2.24) に代入することにより、仮定 1) ~ 1) の下で直線変位型倒立振子の動特性を記述する基礎方程式として、次式を得ることができる。

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} m_2 + m_{2a} & m_2 l_2 + m_{2b} \\ m_2 l_2 + m_{2b} & I_0 + m_2 r^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{r} \\ \ddot{\theta} \end{bmatrix} \\ & = \begin{bmatrix} -C_2 \dot{r} + m_2 g \sin \theta + m_2 r \dot{\theta}^2 + G u \\ -C_1 \dot{\theta} + m l g \sin \theta + m_2 g r \cos \theta - 2 m_2 r \dot{r} \dot{\theta} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (2.27)$$

ここで

$$C_2 \triangleq C_2' + \left(\frac{N}{R_d} \right)^2 \left(\frac{K_t K_v}{R_a} \right), \quad G \triangleq \frac{N K_t K_a}{R_d R_a} \quad (2.28)$$

次に基礎方程式 (2.27) から、不安定な平衡状態 $r = \theta = \dot{r} = \dot{\theta} = 0$ の近傍での直線変位型倒立振子の動特性を記述する線形状態方程式を求める。状態ベクトルとして

$$x = [r \quad \theta \quad \dot{r} \quad \dot{\theta}]' \quad (2.29)$$

と置くと、基礎方程式 (2.27) から、次の形の非線形状態方程式が得られる。

$$\dot{x} = f(x, u) \quad (2.30)$$

ここで、ベクトル値関数 f の形は (2.27) から明らかである。(2.30) において、 $f(x, u)$ を $(x, u) = 0$ のまわりで Taylor 展開し 2 次以上の項を無視すると、次の線形状態方程式が得られる。

$$\dot{x} = Ax + bu \quad (2.31)$$

ここに

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ b_3 \\ b_4 \end{bmatrix}$$

$$a_{31} = -\frac{m_2 g m_b}{D}, \quad a_{32} = \frac{m_2 g I_0 - m_b m l g}{D} \quad (2.32)$$

$$a_{41} = \frac{m_2 g m_a}{D}, \quad a_{42} = \frac{m_a m l g - m_2 g m_b}{D}$$

$$a_{33} = -\frac{C_2 I_0}{D}, \quad a_{34} = \frac{C_1 m_b}{D}, \quad b_3 = \frac{G I_0}{D}$$

$$a_{43} = \frac{C_2 m_b}{D}, \quad a_{44} = -\frac{C_1 m_a}{D}, \quad b_4 = -\frac{G m_b}{D}$$

$$m_a \triangleq m_2 + m_{2a}, \quad m_b \triangleq m_2 l_2 + m_{2b}, \quad D \triangleq m_a I_0 - m_b^2 \quad (2.33)$$

最後に、入力 u から状態 x への伝達関数を求める。線形状態方程式 (2.31) を初期状態をゼロとして Laplace 変換し、入力 u と状態 x の比を計算すると次式が得られる。

$$\frac{x(s)}{u(s)} = (sI - A)^{-1} b = \begin{bmatrix} n_1(s) & n_2(s) & s n_1(s) & s n_2(s) \\ d(s) & d(s) & d(s) & d(s) \end{bmatrix}' \quad (2.34)$$

$$n_1(s) = \frac{G I_0}{D} s^2 + \frac{G C_1}{D} s - \frac{G m l g}{D}$$

$$n_2(s) = -\frac{G m_b}{D} s^2 + \frac{G m_2 g}{D} \quad (2.35)$$

$$d(s) = s^4 + \frac{m_a C_1 + I_0 C_2}{D} s^3 - \frac{m_a m l g - 2 m_b m_2 g - C_1 C_2}{D} s^2 - \frac{C_2 m l g}{D} s - \frac{m_2^2 g^2}{D}$$

2.3.3 可制御性と可観測性

システムを安定化する上で、可制御性と可観測性は重要な性質である。ここでは、不安定な平衡点 $(x, u) = 0$ の近傍での直線変位型倒立振り子の動特性を記述する線形状態方程式 (2.31), (2.32) の可制御性、および状態変数の一部を出力とする場合の可観測性について検討する。

可制御条件 (2.20) および可観測条件 (2.21) を用いて, 系 (2.31), (2.32) の可制御性, および一部の状態変数を出力とする場合の可観測性を調べると, 表 2.5 および表 2.6 の結果が得られる。表 2.5 は入力 u による可制御性と一部の状態変数を出力とするときの可観測性について記してあり, 条件付可制御あるいは条件付可観測とあるのは, 表 2.6 の対応する条件が満たされるならば, 可制御もしくは可観測であることを意味する。

表 2.5 直線変位型倒立振子の可制御性および可観測性

入力および出力変数	可制御性または可観測性	表 2.6
u	条件付可制御	(a)
r および (r, \dot{r})	条件付可観測	(b)
\dot{r}	条件付可観測	(c)
θ および $\dot{\theta}$ および $(\theta, \dot{\theta})$	条件付可観測	(d)
(r, θ)	可観測	
$(\dot{r}, \dot{\theta})$	条件付可観測	(e)
$(r, \dot{\theta})$	条件付可観測	(f)
(\dot{r}, θ)	条件付可観測	(g)

表 2.6 可制御性または可観測性の必要十分条件

(a)	$G\{(m_2 g I_0 - m_b m l g)^2 - C_1^2 m_2 g m_b\} \neq 0$
(b)	$(m_2 g I_0 - m_b m l g)^2 - C_1^2 m_2 g m_b \neq 0$
(c)	$m_2 g \{(m_2 g I_0 - m_b m l g)^2 - C_1^2 m_2 g m_b\} \neq 0$
(d)	$m_2 g (m_2 g m_a^2 - C_2^2 m_b) \neq 0$
(e)	$m_2 g \neq 0$
(f)	$m_2 g I_0 - m_b m l g \neq 0$ または $m_a m l g - m_b m_2 g \neq 0$
(g)	$m_b m_2 g \neq 0$ または $m_a m_2 g \neq 0$

明らかに, m_2, g , および G は正の定数である。このことを考慮すると, 直線変位型倒立振子の可制御性と可観測性に関して次の結論が得られる。

1) 系 (2.31) が可制御であるための必要十分条件は, 不等式

$$(m_2 g I_0 - m_b m l g)^2 - C_1^2 m_2 g m_b \neq 0 \quad (2.36)$$

が成り立つことである。

2) 系(2.31)が r または \dot{r} または (r, \dot{r}) を出力とするとき可観測であるための必要十分条件は, 不等式(2.36)が成り立つことである。

3) 系(2.31)が θ または $\dot{\theta}$ または $(\theta, \dot{\theta})$ を出力とするとき可観測であるための必要十分条件は, 不等式

$$m_2 g m_a^2 - C_2^2 m_b \neq 0 \quad (2.37)$$

が成り立つことである。

4) 系(2.31)は (r, θ) を出力とするとき可観測である。

5) 系(2.31)は $(\dot{r}, \dot{\theta})$ を出力とするとき可観測である。

最後に, 不等式条件(2.36)について考える。倒立振子の相当単振子の長さ(すなわち支点に対する打撃中心の高さ)を l_e として,

$$I_0 = m l l_e, \quad m_b = m_2 l_2 + m_{2b}$$

を(2.36)に代入し, m_2, g, m および l が正の定数であることを考慮すると, 次式が得られる。

$$\left(l_2 + \frac{m_{2b}}{m_2} \right) \pm \frac{C_1}{m l} \sqrt{\frac{1}{g} \left(l_2 + \frac{m_{2b}}{m_2} \right)} \neq l_e \quad (2.38)$$

この不等式が, 内部物体を横方向に直線変位させる型式の倒立振子の可制御条件である。特に, $C_1 = 0, m_{2b} = 0$ のときには, $l_2 \neq l_e$ という条件となり物理的直感にも一致する。すなわち, $l_2 = l_e$ はおもりの位置が打撃の中心と一致することを意味しており, もし倒立振子が $l_2 = l_e$ を満たしているならば, おもりを左右に動かしても支点における左右方向の反力は生じない。従って, 最初に振子全体の重心が支点の鉛直線上にあり静止しているならば, おもりをどのように操作しても, 振子全体の重心は常に支点の鉛直線上にあることになる。このことは倒立振子の状態を状態空間のある限られた部分空間の中でしか動かせないこと, すなわち可制御でないことを意味する。

第4章で明らかにするように, 内部物体を横方向に直線変位させる型式の倒立振子は, もし可制御条件(2.38)を満足するならば, 全状態のフィードバックで安定化可能であり, また可観測となる出力のオブザーバを用いたフィードバックで

安定化可能である。

2.4 内部物体を回転変位させる型式の倒立振り子

2.4.1 制御対象

実験に使用する内部物体を回転変位させる型式の倒立振り子の概略を、図2.9に示す。支桌からの高さ0.550mの倒立振り子は、支持台に取り付けられた軸受で支えられており、倒立振り子の上部に取り付けられた50Wの直流サーボモータにより、減速比1:60の減速機を介して内部物体（長さ0.445m、質量0.970kgの棒）を回転させる型式となっている。直流サーボモータの界磁側は直流100V電源に、電機子側は200Wの直流電力増幅器に接続され、増幅器の入力端電圧 u [V]がこのシステムの操作量である。このシステムの出カとしては、倒立振り子に対する内部物体の相対角変位 ϕ [rad]と倒立振り子の鉛直からの傾き角 θ [rad]とを、それぞれポテンシオメータにより測定する。

倒立振り子の外観を図2.10に示す。直流電力増幅器および電源は2.2節と同じものを使用する。(図2.3)

実験装置の概要を表2.7に示す。

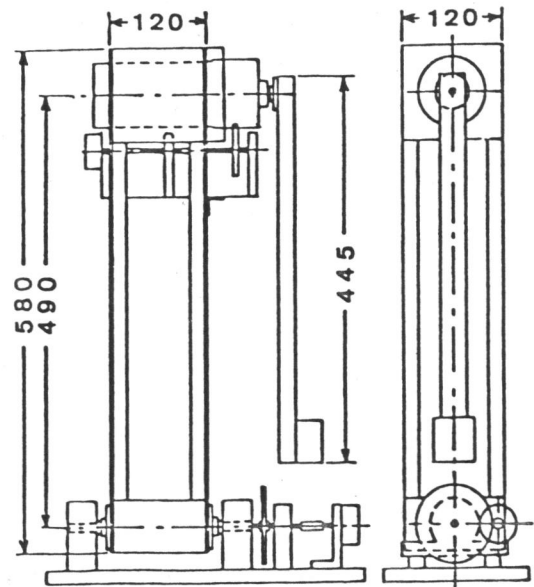


図2.9 内部物体を回転変位させる型式の倒立振り子

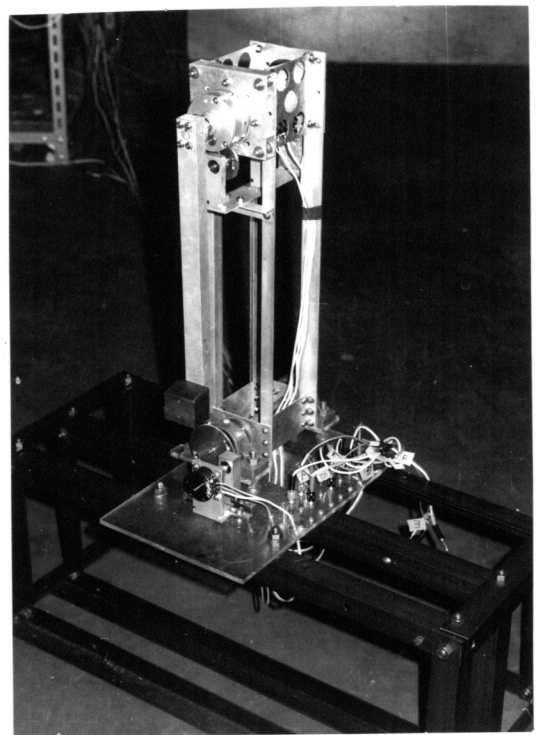


図2.10 回転変位型倒立振り子の外観

表 2.7 回転変位型倒立振子の実験装置の概要

回転変位型倒立振子	支軸からの高さ	550 mm
	全質量	5.683 kg
	内部物体の質量	0.970 kg
	内部物体の支軸の高さ	490 mm
	駆動方式	直流サ-ボモータ
	減速比	1:59.731
直流サ-ボモータ	型式	MDA D8-301 (山洋電気) (1:60の減速機付き)
	質量(減速機を含む)	2.8 kg
	特性値	表 2.1 参照
ポテンシオメータ (φ測定用)	型式	CPP-45 (緑測器)
		1回転形, 5KΩ
	変換率	コンダクティブ・プラスチック形 0.1116 rad/V (*)
ポテンシオメータ (θ測定用)	型式	CPP-45 (緑測器)
		1回転形, 5KΩ
	変換率	コンダクティブ・プラスチック形 0.03818 rad/V (**)
直流電力増幅器		表 2.1 参照

* 両端 20 V 負荷, 歯数比 $\frac{21}{96} \cdot \frac{96}{20}$ の歯車で 2.7377 倍に増幅したとき.

** 両端 20 V 負荷, 歯数比 $\frac{160}{20}$ の歯車で 8 倍に増幅したとき.

2.4.2 基礎方程式

座標系を図 2.11 に示す。内部物体を回転変位させる型式の倒立振子の基礎方程式を導くにあたり、次の仮定を設ける。

- 1) 支持軸は水平であり、倒立振子および内部物体は鉛直面に沿って平面運動する。
- 2) 倒立振子の各部は剛体である。
- 3) 駆動伝達系および支持軸における摩擦として、それぞれ粘性摩擦のみを考慮する。
- 4) モータの電気的時定数は十分小さく無視できる。

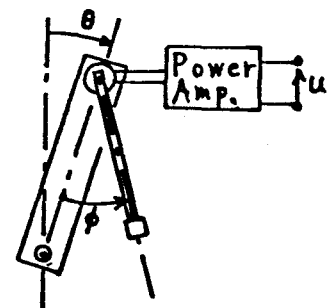


図 2.11 座標系

5) モータの不感帯は無視できる。

6) 伝達系の歯車によるバックラッシは無視できる。

ここで、以下の解析に用いる記号を関連のあるもの同士をまとめて、次のように列記する。ただし、物理的に類似性のあるものには、2.2.2節および2.3.2節と同一の記号を用い、またモータ系の記号は2.2.2節と全く同じであるので省略する。

- ϕ 内部物体の倒立振子に対する相対角変位 [rad]
- θ 倒立振子の傾き角 [rad]
- T_w 内部物体駆動トルク [N·m]
- m 倒立振子の全質量 [kg]
- l 倒立振子全体の重心の支点からの高さ [m]
- I_0 倒立振子全体の支点まわりの慣性能率 [kg·m²] (内部物体は $\phi = 0$ の位置で固定する.)
- m_1 内部物体を除く部分の質量 [kg]
- l_1 内部物体を除く部分の重心の支点からの高さ [m]
- I_1 内部物体を除く部分の支点まわりの慣性能率 [kg·m²]
- m_2 内部物体の質量 [kg]
- l_2 内部物体の支点から重心までの腕の長さ [m]
- I_2 内部物体のその支点まわりの慣性能率 [kg·m²]
- I_{2a} 伝達系の等価慣性能率 [kg·m²]
- I_{2b} 伝達系の等価定数 [kg·m²]
- l_t 内部物体の支点の倒立振子支点からの高さ [m]
- C_1 倒立振子の支点における粘性摩擦定数 [kg·m²/sec]
- C_2' 伝達系の真の等価粘性摩擦定数 [kg·m²/sec]
- C_2 モータの逆起電力特性も含めた伝達系の等価粘性摩擦定数 [kg·m²/sec]
- G 直流電力増幅器の入力端電圧 u [V] から内部物体駆動トルクまでの等

価ゲイン定数 $[N \cdot m/V]$

N 電機子・内部物体間の伝達系の減速比 $\frac{1}{N}$ の逆数

g 重力加速度 $[m/sec^2]$

仮定4) により、モータの特性は(2.4), すなわち

$$T_a = \frac{K_t K_a}{R_a} u - \frac{K_t K_v}{R_a} \omega_a$$

で表わすことができる。これを内部物体でのトルクと角速度の関係に直すため

$$T_w = N T_a, \quad \omega_a = N \dot{\phi} \quad (2.39)$$

を代入すると、次式を得る。

$$T_w = \frac{N K_t K_a}{R_a} u - \frac{N^2 K_t K_v}{R_a} \dot{\phi} \quad (2.40)$$

次に機械的な部分の運動を考える。Lagrangeの運動方程式から、次の回転変位型倒立振子の運動方程式を導くことができる。(付録1)

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} I_2 + I_{2a} & m_2 l_2 l_t \cos \phi - I_2 - I_{2b} \\ m_2 l_2 l_t \cos \phi - I_2 - I_{2b} & I_1 + I_2 + m_2 l_t^2 - 2 m_2 l_2 l_t \cos \phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\phi} \\ \ddot{\theta} \end{bmatrix} \\ & = \begin{bmatrix} -C_2' \dot{\phi} + m_2 l_2 l_t \dot{\theta}^2 \sin \phi + m_2 l_2 g \sin(\theta - \phi) + T_w \\ -C_1 \dot{\theta} + m_2 l_2 l_t \dot{\phi}(\dot{\phi} - 2\dot{\theta}) \sin \phi + (m_1 l_1 + m_2 l_t) g \sin \theta - m_2 l_2 g \sin(\theta - \phi) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (2.41)$$

ここで、 T_w は駆動トルクを等価的に内部物体に作用するトルクに置き直したものであり、 I_{2a} と I_{2b} は駆動伝達系による定数である。駆動伝達系の各部の慣性モーメントを I_{ti} 、内部物体が1回転するときの回転数を N_i とし、回転方向を σ_i (内部物体と同方向のとき+1, 反対方向のとき-1) で表わすと、 I_{2a} および I_{2b} はそれぞれ次式で求めることができる。

$$I_{2a} = \sum_i N_i^2 I_{ti}, \quad I_{2b} = \sum_i \sigma_i N_i I_{ti} \quad (2.42)$$

(2.40)を(2.41)に代入することにより、仮定1)~6)の下で回転変位型倒立振子の動特性を記述する基礎方程式として、次式を得ることができる。

$$\begin{bmatrix} I_2 + I_{2a} & m_2 l_2 l_t \cos \phi - I_2 - I_{2b} \\ m_2 l_2 l_t \cos \phi - I_2 - I_{2b} & I_1 + I_2 + m_2 l_t^2 - 2 m_2 l_2 l_t \cos \phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\phi} \\ \ddot{\theta} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -C_2 \dot{\phi} + m_2 l_2 l_t \dot{\theta}^2 \sin \phi + m_2 l_2 g \sin(\theta - \phi) + G u \\ -C_1 \dot{\theta} + m_2 l_2 l_t \dot{\phi} (\dot{\phi} - 2\dot{\theta}) \sin \phi + (m_1 l_1 + m_2 l_t) g \sin \theta - m_2 l_2 g \sin(\theta - \phi) \end{bmatrix}$$

ここで (2.43)

$$C_2 \triangleq C_2' + \frac{N^2 K_t K_v}{R_a}, \quad G \triangleq \frac{N K_t K_a}{R_a} \quad (2.44)$$

次に基礎方程式(2.43)から, 不安定な平衡状態 $\phi = \theta = \dot{\phi} = \dot{\theta} = 0$ の近傍での回転変位型倒立振子の動特性を記述する線形状態方程式を求める。状態ベクトルとして

$$x = [\phi \quad \theta \quad \dot{\phi} \quad \dot{\theta}]' \quad (2.45)$$

と置くと, 基礎方程式(2.43)から, 次の形の非線形状態方程式が得られる。

$$\dot{x} = f(x, u) \quad (2.46)$$

ここで, ベクトル値関数 f の形は(2.43)から明らかである。(2.46)において, $f(x, u)$ を $(x, u) = 0$ のまわりで Taylor 展開し 2次以上の項を無視すると, 次の線形状態方程式が得られる。

$$\dot{x} = A x + b u \quad (2.47)$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ b_3 \\ b_4 \end{bmatrix}$$

$$a_{31} = -\frac{m_2 l_2 g (I_a + I_b)}{D}, \quad a_{32} = \frac{m_2 l_2 g I_a - m l g I_b}{D} \quad (2.48)$$

$$a_{41} = \frac{m_2 l_2 g (I_a + I_b)}{D}, \quad a_{42} = \frac{m l g I_a - m_2 l_2 g I_b}{D}$$

$$a_{33} = -\frac{C_2 I_a}{D}, \quad a_{34} = \frac{C_1 I_b}{D}, \quad b_3 = \frac{G I_a}{D}$$

$$a_{43} = \frac{C_2 I_b}{D}, \quad a_{44} = -\frac{C_1 I_a}{D}, \quad b_4 = -\frac{G I_b}{D}$$

ここには

$$I_a \triangleq I_2 + I_{2a}, \quad I_b \triangleq m_2 l_2 l_t - I_2 - I_{2b}$$

$$I_0 \triangleq I_1 + I_2 + m_2 l_t^2 - 2 m_2 l_2 l_t, \quad D \triangleq I_a I_0 - I_b^2 \quad (2.49)$$

$$m l \triangleq m_1 l_1 + m_2 (l_t - l_2)$$

最後に、入力 u から状態 x への伝達関数を求める。線形状態方程式 (2.47) を初期状態をゼロとして Laplace 変換し、入力 u と状態 x の比を計算すると次式が得られる。

$$\frac{x(s)}{u(s)} = (sI - A)^{-1}b = \left[\begin{array}{cc|cc} n_1(s) & n_2(s) & \frac{sn_1(s)}{d(s)} & \frac{sn_2(s)}{d(s)} \end{array} \right]' \quad (2.50)$$

$$n_1(s) = \frac{GI_0}{D} s^2 + \frac{Gc_1}{D} s - \frac{Gmlg}{D}$$

$$n_2(s) = -\frac{GI_b}{D} s^2 + \frac{Gm_2l_2g}{D} \quad (2.51)$$

$$d(s) = s^4 + \frac{I_a c_1 + I_0 c_2}{D} s^3 - \frac{mlgI_a - m_2l_2gI_0 - 2m_2l_2gI_b - c_1c_2}{D} s^2 - \frac{mlgc_2 - m_2l_2gc_1}{D} s - \frac{m_2l_2g(mlg + m_2l_2g)}{D}$$

2.4.3 可制御性と可観測性

システムを安定化する上で、可制御性と可観測性は重要な性質である。ここでは、不安定な平衡状態 $(x, u) = 0$ の近傍での回転変位型倒立振子の動特性を記述する線形状態方程式 (2.47), (2.48) の可制御性、および状態変数の一部を出力とする場合の可観測性について検討する。

可制御条件 (2.20) および可観測条件 (2.21) を用いて、系 (2.47), (2.48) の可制御性、および一部の状態変数を出力とする場合の可観測性を調べると、表 2.8 および表 2.9 の結果が得られる。表 2.8 は入力 u による可制御性と一部の状態変数を出力とするときの可観測性について記してあり、条件付可制御あるいは条件付可観測とあるのは、表 2.9 の対応する条件が満たされるならば、可制御もしくは可観測であることを意味する。

明らかに、 m_1, m_2, g , および G は正の定数である。このことを考慮すると、回転変位型倒立振子の可制御性と可観測性に関して次の結論が得られる。

1) 系 (2.47) が可制御であるための必要十分条件は、不等式

$$(m_2l_2gI_0 - mlgI_b)^2 - c_1^2 m_2l_2gI_b \neq 0 \quad (2.52)$$

が成り立つことである。

表 2. 8 回転変位型倒立振り子の可制御性および可観測性

入力および出力変数	可制御性または可観測性	表 2. 9
u	条件付可制御	(a)
ϕ および $(\phi, \dot{\phi})$	条件付可観測	(b)
$\dot{\phi}$	条件付可観測	(c)
θ および $(\theta, \dot{\theta})$	条件付可観測	(d)
$\dot{\theta}$	条件付可観測	(e)
(ϕ, θ)	可観測	
$(\dot{\phi}, \dot{\theta})$	条件付可観測	(f)
$(\phi, \dot{\theta})$	条件付可観測	(g)
$(\dot{\phi}, \theta)$	条件付可観測	(h)

表 2. 9 可制御性または可観測性の必要十分条件

(a)	$G\{(m_2 l_2 g I_0 - m l g I_b)^2 - C_1^2 m_2 l_2 g I_b\} \neq 0$
(b)	$(m_2 l_2 g I_0 - m l g I_b)^2 - C_1^2 m_2 l_2 g I_b \neq 0$
(c)	$m_2 l_2 g (m l g + m_2 l_2 g) \{(m_2 l_2 g I_0 - m l g I_b)^2 - C_1^2 m_2 l_2 g I_b\} \neq 0$
(d)	$m_2 l_2 g \{m_2 l_2 g (I_a + I_b)^2 - C_2^2 I_b\} \neq 0$
(e)	$m_2 l_2 g (m l g + m_2 l_2 g) \{m_2 l_2 g (I_a + I_b)^2 - C_2^2 I_b\} \neq 0$
(f)	$m_2 l_2 g (m l g + m_2 l_2 g) \neq 0$
(g)	$m_2 l_2 g I_0 - m l g I_b \neq 0$ または $m l g I_a - m_2 l_2 g I_b \neq 0$
(h)	$m_2 l_2 g (I_0 + I_b) \neq 0$ または $m_2 l_2 g (I_a + I_b) \neq 0$

2) 系(2.47)が、相対角変位 ϕ または $(\phi, \dot{\phi})$ を出力とするとき可観測であるための必要十分条件は、不等式(2.52)が成り立つことである。

3) 内部物体の腕の長さ l_2 , および $m l + m_2 l_2 = m_1 l_1 + m_2 l_2$ がゼロでないとする。このとき、系(2.47)が相対角速度 $\dot{\phi}$ を出力として可観測であるための必要十分条件は、不等式(2.52)が成り立つことである。

4) 同じく、 l_2 および $m l + m_2 l_2$ がゼロでないとする。このとき、系(2.47)が傾き角 θ または $\dot{\theta}$ または $(\theta, \dot{\theta})$ を出力として可観測であるための必要十分条件は、不等式

$$m_2 l_2 g (I_a + I_b)^2 - C_2^2 I_b \neq 0 \quad (2.53)$$

が成り立つことである。

5) 系(2.47)は (ϕ, θ) を出力とするとき可観測である。

6) 系(2.47)が $(\dot{\phi}, \dot{\theta})$ を出力とするとき可観測であるための必要十分条件は、不等式

$$l_2(m_l + m_2 l_2) \neq 0 \quad (2.54)$$

が成り立つことである。

ところで、内部物体の腕の長さ l_2 は、その支点と重心の位置関係により、正、ゼロ、負のいずれの値も取り得る。すなわち、次の三つの場合がある。

(a) $l_2 > 0$ 内部物体の重心がその支点より下にある場合

(b) $l_2 = 0$ 内部物体の重心がその支点と一致する場合

(c) $l_2 < 0$ 内部物体の重心がその支点より上にある場合

本節の解析は、この三つの場合を含むものである。

最後に、不等式条件(2.52)について考える。 $l_2 = 0$ の場合、すなわち内部物体の重心と支点が一致する場合には、不等式(2.52)は

$$m_l g (I_2 + I_{2b}) \neq 0 \quad (2.55)$$

となる。従って、 m, l, g , および $I_2 + I_{2b}$ が正の定数である通常の場合には、 $l_2 = 0$ の回転変位型倒立振子は可制御である。

次に $l_2 \neq 0$ の場合を考える。倒立振子全体の相当単振子の長さを l_e 、内部物体の相当単振子の長さを l_{2e} として、

$$I_0 = m_l l_e, \quad I_2 = m_2 l_2 l_{2e} \quad (2.56)$$

および

$$I_b = m_2 l_2 l_t - I_2 - I_{2b}$$

を(2.52)に代入し、 $m_l m_2 l_2 g \neq 0$ を考慮して変形すると、次式が得られる。

$$\left(l_t - l_{2e} - \frac{I_{2b}}{m_2 l_2} \right) + \frac{C_1}{m_l} \sqrt{\frac{1}{g} \left(l_t - l_{2e} - \frac{I_{2b}}{m_2 l_2} \right)} \neq l_e \quad (2.57)$$

この不等式が、内部物体を回転変位させる型式の倒立振子の $l_2 \neq 0$ の場合の可制御条件である。特に、 $C_1 = 0$, $I_{2b} = 0$ のときには、この条件は $l_t - l_{2e} \neq l_e$

となり物理的直感にも一致する。すなわち、 $l_t - l_{2c} = l_e$ は内部物体の打撃の中心が振り全体の打撃の中心と一致することを意味しており、もし倒立振子が $l_t - l_{2c} = l_e$ を満たしているならば、内部物体を回転変位させても支点における左右方向の反力は生じず、従って直線変位型の $l_2 = l_e$ の場合と同様の考察により、可制御でない。

第4章で明らかにするように、内部物体を回転変位させる型式の倒立振子は、もし可制御条件(2.55),あるいは(2.57)を満足するならば、全状態のフィードバックで安定化可能であり、また可観測となる出力のオブザーバを用いたフィードバックで安定化可能である。

2.5 おわりに

本章では、第5章の実験に使用する3種類の倒立振子システム、(1) 平行二輪車、(2) 内部物体を横方向に直線変位させる型式の倒立振子、(3) 内部物体を回転変位させる型式の倒立振子、の各実験装置を示し、それぞれについて動特性を記述する基礎方程式を導き、不安定な平衡状態のまわりで局所線形化を行なうことにより、線形状態方程式を導いた。そして、この状態方程式の可制御性と可観測性を検討し、その必要十分条件を与えた。

平行二輪車、直線変位型倒立振子、および回転変位型倒立振子の不安定な平衡状態の近傍における動特性は、解析を行なうにあたり設定したいくつかの仮定の下でそれぞれ、(2.12)と(2.13)、(2.31)と(2.32)、および(2.47)と(2.48)により記述される。これらのシステムの可制御性と可観測性について得られた結果を次に要約する。

1) 平行二輪車および $l_2 = 0$ の回転変位型倒立振子は、通常の場合にはすなわち伝達系の慣性モーメントが極端に大きいなどの特別な場合を除けば、可制御である。

2) 直線変位型倒立振子および $l_2 \neq 0$ の回転変位型倒立振子は、それぞれ不等式条件(2.38)あるいは(2.57)が満たされるとき可制御である。

3) 本章で取り扱った3種類の倒立振子システムは、四つの状態変数の中の二

つの位置変数を出力とするときには無条件で可観測である。さらに、この場合の可観測指数が2であることも容易に示すことができる。ここで、可観測指数とは、線形システム

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu, \quad x \in \mathbb{R}^n \\ y &= Cx \end{aligned} \quad (2.58)$$

について考えると、行列 $[C', A'C', \dots, (A')^{j-1}C']$ が最大ランク n を持つような整数 j の最小値として定義されるものである。¹⁾

本章で検討した各倒立振子の可制御性および可観測性は、各倒立振子が基本的に安定化できるのかどうか、また安定化するにはどの状態変数を出力として測定すればよいのかということの目安となる。第4章で明らかにするように、各倒立振子はもし可制御ならば、全状態のフィードバックにより安定化可能であり、また可観測となる出力のオブザーバを用いたフィードバックにより安定化可能である。なお、可制御条件 (2.38), (2.57) などが満たされても、不等式の両辺の値が非常に近いときには、理論的には第4章で示すように安定化可能であっても、実際には安定化が困難である。このことについては、5.5節で考察する。

第3章 状態オブザーバおよび汎関数オブザーバ

3.1 はじめに

制御系の設計において，状態変数のフィードバックによる制御は，最適制御，安定化制御，非干渉制御など多くの場合に使われ，最も基本的である。このフィードバック則をそのまま実行するには，制御対象のすべての状態変数を測定する必要がある。しかし，実際には状態変数のすべてを直接に測定することができない場合が多い。このような場合に，制御系の直接測定されている出力からシステムの内部状態を推定することが必要になる。このための推定機構として Luenberger¹⁾ のオブザーバがよく知られており，フィードバック制御系を構成するのに有効である。ところで，状態フィードバック制御則を実行するには，すべての状態変数の値そのものは必要でなく，状態変数の線形関数，特に1入力系では線形汎関数の値が得られれば十分である。従って，そこで用いられるオブザーバは，すべての内部状態を推定する状態オブザーバでなくて，より次元の低い線形関数（または線形汎関数）オブザーバでよい。

本章では，状態オブザーバ（ n 次元状態オブザーバと最小次元状態オブザーバ）および汎関数オブザーバの構成法について述べる。

3.2 状態オブザーバ

対象とするシステムは定数線形系で， r 入力， m 出力をもち，次のような n 次元状態方程式で表現されているとする。

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu \\ y &= Cx \end{aligned} \quad (3.1)$$

ここに， u は r 次元入力ベクトル， y は m 次元出力ベクトル， x は n 次元状態ベクトル， A ， B ， C はそれぞれ， $n \times n$ ， $n \times r$ ， $m \times n$ の行列である。

対象システム(3.1)の入力 u と出力 y とを入力とする定数線形系

$$\begin{aligned}\dot{z} &= Dz + Ey + Fu \\ \hat{x} &= Gz + Hy\end{aligned}\tag{3.2}$$

を考える。ここで、 z は p 次元ベクトル、 \hat{x} は n 次元ベクトル、 D, E, F, G, H はそれぞれ、 $p \times p, p \times m, p \times r, m \times p, m \times m$ の定数行列である。いまこれらの係数行列が、ある $p \times m$ 定数行列 S に対して次の式および条件を満たしているとする。

$$SA - DS = EC\tag{3.3}$$

$$F = SB\tag{3.4}$$

$$GS + HC = I_n\tag{3.5}$$

$$D \text{ は安定行列である。}\tag{3.6}$$

ここで、安定行列とはすべての固有値の実部が負であるような行列のことである。

このとき、(3.1) ~ (3.4)より

$$\frac{d}{dt}(z - Sx) = D(z - Sx)\tag{3.7}$$

が成り立つ。従って

$$z(t) = Sx(t) + e^{Dt}(z(0) - Sx(0))\tag{3.8}$$

が得られる。(3.2)の出力方程式に(3.8)を代入し(3.5)を用いると次式が得られる。

$$\hat{x}(t) = x(t) + Ge^{Dt}(z(0) - Sx(0))\tag{3.9}$$

(3.6)より D は安定行列であるから、この式の右辺第2項は任意の初期値 $z(0), x(0)$ に対して $t \rightarrow \infty$ のときゼロに収束する。よって

$$t \rightarrow \infty \text{ のとき, } \hat{x}(t) \rightarrow x(t)\tag{3.10}$$

このようにして、ある行列 S に対し(3.3) ~ (3.6)の条件が満たされるならば、系(3.2)の出力 \hat{x} は、系(3.1)の状態 x の推定値として使うことができる。¹⁾ この意味において、条件(3.3) ~ (3.6)を満足する動的システム(3.2)は状態オブザーバと呼ばれている。

次に、 m 次元状態オブザーバおよび最小次元オブザーバの具体的な構成法について述べる。

系(3.2)の係数行列を

$$D = A - EC, \quad F = B, \quad G = I_n, \quad H = 0 \quad (3.11)$$

と置く, すなわち

$$\begin{aligned} \dot{\hat{x}} &= (A - EC)\hat{x} + Ey + Bu \\ \hat{y} &= \hat{x} \end{aligned} \quad (3.12)$$

このとき, $S = I_n$ に対し条件(3.3) ~ (3.5)が満足されている。従って, $A - EC$ が安定行列のとき, 系(3.12)は状態オブザーバである。系(3.12)は Luenberger の n 次元状態オブザーバと呼ばれている。¹⁾

ところで, $A - EC$ が安定行列となるように E を選べるかどうかという問題が残っている。Wonham²³⁾ は, (A, B) が可制御であること, すなわち

$$\text{rank}[B, AB, \dots, A^{n-1}B] = n \quad (3.13)$$

であることと, K を適当に選んで $A + BK$ の固有値を自由に設定できるということが等価であるということを示した。この双対な結果として, (C, A) が可観測であれば, すなわち

$$\text{rank}[C', A'C', \dots, (A')^{n-1}C'] = n \quad (3.14)$$

であれば, E を適当に選んで $A - EC$ の固有値を自由に設定できることがわかる。すなわち, 対象システム(3.1)が可観測であるとき, E の選択により任意の動特性をもつ n 次元状態オブザーバ(3.12)を構成できる。

状態オブザーバの中で次元の最小のものは, 最小次元状態オブザーバと呼ばれている。最小次元状態オブザーバの構成法としては, Gopinath²⁴⁾ によるものが設計に便利であり, 以下この方法について述べる。ここで, 対象システム(3.1)の出力 y の m 個の成分は互いに独立, すなわち

$$\text{rank } C = m \quad (3.15)$$

であると仮定する。もしも $\text{rank } C < m$ であれば, y のある成分は他の成分の線形結合で表わされ, 状態推定にはなんら役立たないので, 初めから除いて考えることができる。このとき, 一般性を失なうことなく $C = [I_m \ 0]$ の形を仮定することができる。(なぜなら, 適当な $(m-m) \times m$ 行列 D を選んで, 行列 $T = [$

$C' : D']'$ が正則となるようにし, 変数 $\bar{x} = T x$ を用いて系 (3.1) を表現すると, この新しい座標系での出力行列は $\bar{C} = C T^{-1} = [I_m, 0]$ となる。) このとき, 状態ベクトル x を

$$x = \left[\begin{array}{l} x_1 \\ x_2 \end{array} \right] \begin{array}{l} \}^m \\ \}^{m-m} \end{array} \quad (3.16)$$

と分割し, 系 (3.1) を

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= A_{11} x_1 + A_{12} x_2 + B_1 u \\ \dot{x}_2 &= A_{21} x_1 + A_{22} x_2 + B_2 u \\ y &= x_1 \end{aligned} \quad (3.17)$$

の形で表わすのが便利である。状態 x_1 は出力として直接測定されているから, 残りの状態 x_2 のみを推定すれば良い。 x_2 を推定する最小次元状態オブザーバの次元は $m-m$ であり, Gopinath²⁴⁾ により次式で構成できる。

$$\begin{aligned} \dot{z} &= (A_{22} - L A_{12}) z + \{ (A_{21} - L A_{11}) + (A_{22} - L A_{12}) L \} y + (B_2 - L B_1) u \\ \hat{x}_2 &= z + L y \end{aligned} \quad (3.18)$$

ここで, z は $m-m$ 次元ベクトル, \hat{x}_2 は x_2 の推定値である。ただし, $(m-m) \times m$ 行列 L はオブザーバの設計パラメータであり, $A_{22} - L A_{12}$ が安定行列になるように選ぶものとする。このとき, x の推定値 \hat{x} は次式で得られることになる。

$$\hat{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \hat{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ I_{m-m} \end{bmatrix} z + \begin{bmatrix} I_m \\ L \end{bmatrix} y \quad (3.19)$$

実際, $p \times m$ 行列 $S = [-L \quad I_{m-m}]$ に対し, (3.18), (3.19) の係数行列が条件 (3.3) ~ (3.5) を満足していることを容易に確かめることができる。最後に, $A_{22} - L A_{12}$ が安定行列になるように L を選べるかどうかという問題が残っているが, (C, A) が可観測なら (A_{12}, A_{22}) も可観測となるので,²⁴⁾ L の選択により $A_{22} - L A_{12}$ の固有値を自由に設定できる。以上のようにして, 対象システムが可観測であり, 行列 C が (3.15) の条件を満たすとき, L の選択により任意の動特性をもつ最小次元状態オブザーバ (3.18) を構成できる。この方法は (3.17) の形に座標変換することを必要とするが, 対象とするシステム

が(3.17)の形にすでに表現されている場合も、(3.17)の表現が容易に得られる場合も多いので、設計には非常に便利である。

最後に、状態オブザーバによる推定値 \hat{x} を用いて制御することを考える。すなわち、制御対象(3.1)に対し、条件(3.3)～(3.6)を満足する状態オブザーバ(3.2)により x の推定値 \hat{x} を求め、

$$u = -K\hat{x} \quad (3.20)$$

なる制御を行なうものとする。このとき、閉ループ系は(3.1)、(3.2)、および(3.20)をまとめて、次式のように表わすことができる。

$$\begin{bmatrix} \dot{\hat{x}} \\ \dot{z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A-BKHC & -BKG \\ EC-FKHC & D-FKG \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{x} \\ z \end{bmatrix} \quad (3.21)$$

さらに、 $e = z - Sx$ と置き、(3.3)～(3.5)を用いると次式のように変形することができる。

$$\begin{bmatrix} \dot{\hat{x}} \\ \dot{e} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A-BK & -BKG \\ 0 & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{x} \\ e \end{bmatrix} \quad (3.22)$$

この式から、全システムの固有値が $A-BK$ の固有値と D の固有値とから成ることがわかる。従って、制御対象(3.1)が可制御かつ可観測ならば、 n 次元状態オブザーバ(3.12)と最小次元状態オブザーバ(3.17)を用いることにより全システムの固有値を自由に設定することができる。

3.3 汎関数オブザーバ

前節と同様に、対象とするシステムは定数線形系で、 r 入力、 m 出力をもち、次のような n 次状態方程式で表現されているとする。

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu \\ y &= Cx \end{aligned} \quad (3.23)$$

ここに、 u は r 次元入力ベクトル、 y は m 次元出力ベクトル、 x は n 次元状態ベクトル、 A 、 B 、 C はそれぞれ $n \times n$ 、 $n \times r$ 、 $m \times n$ の定数行列である。

推定すべき状態変数の線形結合、すなわち線形汎関数を

$$f = k'x \quad (3.24)$$

とする。ここで、 k は m 次元定数ベクトルであり、 \prime は転置を意味する。

対象システム (3.23) の入力 u と出力 y とを入力とする定数線形系

$$\begin{aligned} \dot{z} &= D z + E y + F u \\ \hat{f} &= g' z + h' y \end{aligned} \quad (3.25)$$

を考える。ここで、 z は p 次元ベクトル、 \hat{f} はスカラー、 D, E, F はそれぞれ、 $p \times p, p \times m, p \times r$ の定数行列、 g は p 次元定数ベクトル、 h は m 次元定数行列である。いまこれらの係数行列が、ある $p \times m$ 定数行列 S に対して、次の式および条件を満たしているとする。

$$S A - D S = E C \quad (3.26)$$

$$F = S B \quad (3.27)$$

$$g' S + h' C = k' \quad (3.28)$$

$$D \text{ は安定行列である。} \quad (3.29)$$

このとき、前節と同様にして (3.23), (3.25) ~ (3.27) より次式を導くことができる。

$$z(t) = S x(t) + e^{Dt} (z(0) - S x(0)) \quad (3.30)$$

これを (3.25) の出力方程式に代入し、(3.28) を用いると次式が得られる。

$$\hat{f}(t) = f(t) + g' e^{Dt} (z(0) - S x(0)) \quad (3.31)$$

従って、 D は安定行列であるから任意の初期値 $z(0), x(0)$ に対して、

$$t \rightarrow \infty \text{ のとき, } \hat{f}(t) \rightarrow f(t) \quad (3.32)$$

が成り立つ。このようにして、(3.26) ~ (3.29) が満たされるなら、系 (3.25) の出力 \hat{f} は、線形関数 $f = k'x$ の推定値として使うことができる。この意味において、条件 (3.26) ~ (3.29) を満足する動的システム (3.25) は関数オブザーバと呼ばれている。¹⁾ なお、(3.5) の右辺が I_n であるのに対し、(3.28) の右辺が k' となっている実が、状態オブザーバの場合と異なる点である。

汎関数オブザーバは、Luenbergerにより提案された¹⁾。Luenbergerは対象システム(3.23)の可観測性と

$$\text{rank } C = m \quad (3.33)$$

を仮定し、対象システムの可観測指数を ν とするとき、 $\nu-1$ 次元を汎関数オブザーバの最小次元として与え、その構成法を提案した。その構成法は、簡単に要約すると次の通りである。まず、適当な座標変換により制御対象(3.23)をいわゆるLuenbergerの可観測正準形²⁵⁾に変換する。変換により得られるシステムは、 m 個の1出力系に分解されており、すべて ν 以下の次元である。この m 個の1出力系にそれぞれ最小次元状態オブザーバを構成する。その次元はすべて $\nu-1$ 以下である。これらの固有値を共通に選び、 s 領域での考察を加えて等価変換すると、 $\nu-1$ 次元汎関数オブザーバが得られる。

Luenbergerによる汎関数オブザーバの構成法は、上記の様に手順がかなり繁雑である。その後、種々の構成法が提案され^{18)~21)}、手順も単純化されているが、なお一般的扱いのため繁雑になっていると思われる。以下では、制御対象(3.23)に従来のよりも強い制限を加え、汎関数オブザーバの新しい構成法を導く。

以下では、制御対象(3.23)に対して、状態の次元 n が出力の次元 m の整数(q とする)倍でありかつ可観測指数 ν が q に一致する、と仮定する。すなわち

$$n = qm \quad \text{かつ} \quad \nu = q \quad (3.34)$$

この仮定は、可観測指数 ν が構造上可能な中での最小値であることを意味しており、行列

$$T_1 = [C', A'C', \dots, (A')^{q-1}C'] \quad (3.35)$$

が正則であることと等価である。仮定(3.34)を満たすシステムは、次の補題に示すような正準形をもつ

補題1 系(3.23)が仮定(3.34)を満たしているならば、適当な正則行列 T を用いて座標変換

$$\tilde{x} = Tx \quad (3.36)$$

を行なうことにより、次の正準形に変換することができる。

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{x}} &= \tilde{A} \tilde{x} + \tilde{B} u \\ y &= \tilde{C} \tilde{x} \end{aligned} \quad (3.37)$$

$$\tilde{A} = TAT^{-1} = \begin{bmatrix} A_1 & I_m & 0 & \cdots & 0 \\ A_2 & 0 & I_m & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ A_{q-1} & 0 & 0 & \ddots & I_m \\ A_q & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}, \quad \tilde{B} = TB \quad (3.38)$$

$$\tilde{C} = CT^{-1} = [I_m \ 0 \ \cdots \ 0]$$

ここに, A_1, A_2, \dots, A_q はそれぞれ $m \times m$ 行列であり, (3.35) の行列 T を用いて次式で定義する.

$$[A_q, A_{q-1}, \dots, A_1] = CA^q T^{-1} \quad (3.39)$$

(証明は付録 2 に示す)

以下では, 制御対象 (3.23) の係数行列を次の形に仮定する.

$$A = \begin{bmatrix} A_1 & I_m & 0 & \cdots & 0 \\ A_2 & 0 & I_m & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ A_{q-1} & \vdots & \ddots & \ddots & I_m \\ A_q & 0 & \cdots & \cdots & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \\ \vdots \\ B_{q-1} \\ B_q \end{bmatrix} \quad (3.40)$$

$$C = [I_m \ \underbrace{0 \ \cdots \ 0}_{(q-1)m}]$$

ここで, $A_i, i=1, \dots, q$ は $m \times m$ 定数行列, $B_i, i=1, \dots, q$ は $m \times r$ 定数行列である. 補題 1 により, 仮定 (3.34) の下ではこのように仮定しても一般性は失なわれない.

(3.40) を係数とする制御対象 (3.23) に対し, 線形汎関数 (3.24) を推定する汎関数オブザーバ (3.25) を構成するため, S と k' をそれぞれ

$$S = [S_1, S_2, \dots, S_q] \quad (3.41)$$

$$k' = [k'_1, k'_2, \dots, k'_q] \quad (3.42)$$

のように $p \times m$ 行列 $S_i, i = 1, \dots, q$ と m 次元ベクトル $k_i, i = 1, \dots, q$ に分割して, (3.40) とともに条件式 (3.26), (3.28) に代入するとそれぞれ次のようになる。

$$\begin{aligned} & [S_1, S_2, \dots, S_q] \begin{bmatrix} A_1 & I_m & 0 & \dots & 0 \\ A_2 & 0 & I_m & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_q & 0 & \dots & \dots & 0 \end{bmatrix} - D[S_1, S_2, \dots, S_q] \\ & = E[I_m, 0, \dots, 0] \end{aligned} \quad (3.43)$$

$$g'[S_1, S_2, \dots, S_q] + h'[I_m, 0, \dots, 0] = [k'_1, k'_2, \dots, k'_q] \quad (3.44)$$

(3.43) より

$$E = \sum_{i=1}^q S_i A_i - D S_1 \quad (3.45)$$

$$S_i = D S_{i+1}, \quad i = 1, 2, \dots, q-1 \quad (3.46)$$

(3.44) より

$$h' = k'_1 - g' S_1 \quad (3.47)$$

$$g' S_i = k'_i, \quad i = 2, 3, \dots, q \quad (3.48)$$

がそれぞれ得られる。(3.46) より

$$S_i = D^{q-i} S_q, \quad i = 1, 2, \dots, q-1 \quad (3.49)$$

が得られ, これを (3.48) に代入すると次式が得られる。

$$g' D^{q-i} S_q = k'_i, \quad i = 2, 3, \dots, q \quad (3.50)$$

この式はまとめて次のように表わすことができる。

$$\begin{bmatrix} g' \\ g'D \\ \vdots \\ g'D^{q-2} \end{bmatrix} S_q = \begin{bmatrix} k'_q \\ k'_{q-1} \\ \vdots \\ k'_2 \end{bmatrix} \quad (3.51)$$

条件式 (3.26) ~ (3.28) のうち, (3.27) は単に F を定める式

であり, (3.26) と (3.28) は, (3.45), (3.47), (3.49), および (3.51) と等価である. このうち (3.45), (3.47), (3.49) はそれぞれ, E, h , および $S_i, i=1, 2, \dots, g-1$ を単に決める式である. 従って, (3.51) を満足する g, D , および S_g が見い出されれば, それを (3.49), (3.45), (3.47), および (3.27) に代入することにより, それぞれ $S_i, i=1, 2, \dots, g-1, E, h$, および F が求まり, 条件 (3.26) ~ (3.28) がすべて満たされる. さらに D が安定行列ならば, 条件 (3.29) が満たされる. 故に, (3.51) を満足する安定行列 D, g , および S_g が求まることが, 汎関数オブザーバが構成できるための必要十分条件となる.

(g', D) が可観測でなければ, より次元の低いオブザーバが構成できることになるから, (g', D) が可観測であるとしても, 一般性は失われない. 従って, 代数的等価性を別にすれば, (g', D) を一つの可観測正準形

$$D = \begin{bmatrix} \alpha_1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ & \alpha_2 & 0 & 1 & \vdots \\ & \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ & \vdots & \vdots & \ddots & 1 \\ \alpha_p & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad g' = [1 \ 0 \ \cdots \ 0] \quad (3.52)$$

で表現することができる.

汎関数オブザーバ (3.25) の次元 p が

$$p = g - 1 \quad (3.53)$$

のときには, (3.51) の左辺の S_g にかかっている行列は, (g', D) の可観測性より正則となり, この式は S_g について解くことができる. すなわち,

$$S_g = \begin{bmatrix} g' \\ g'D \\ \vdots \\ g'D^{g-2} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} k'_g \\ k'_{g-1} \\ \vdots \\ k'_2 \end{bmatrix} \quad (3.54)$$

よって, 次の定理が得られる.

定理1 仮定(3.34)を満たす定数線形系(3.23)に対し、任意の線形関数 $f = k'x$ を推定する関数オブザーバを $q-1$ 次元の動的システムで構成できる。さらに、その固有値は自由に設定することができる。

(証明は付録2に示す。)

以上の $q-1$ 次元関数オブザーバの構成法を整理すると次の結果を得る。

定理2 (3.40)で与えられる係数行列 A, B, C を含む制御対象(3.23)に対し、任意の線形関数 $f = k'x$ を推定する $p = q-1$ 次元関数オブザーバ(3.25)を、 D, g' を(3.52)で与え、 E, F, h を次のように定めることにより、構成することができる。

まず、 k_1 を(3.42)のように、 m 次元ベクトル k_1, k_2, \dots, k_q に分解する。また、次式で $p \times q$ 行列 $W_i, i=1, 2, \dots, p$ を定める。

$$W_i = \begin{bmatrix} d_i & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ d_{i+1} & d_i & \cdots & \vdots & -d_1 & 1 & \cdots & \vdots \\ \vdots & d_{i+1} & \cdots & 0 & \vdots & -d_1 & \cdots & 0 \\ d_p & \vdots & \cdots & d_i & -d_{i-1} & \vdots & \cdots & 1 \\ 0 & d_p & \cdots & d_{i+1} & 0 & -d_{i-1} & \cdots & -d_1 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & d_p & 0 & \cdots & 0 & -d_{i-1} \end{bmatrix}, \quad i=1, 2, \dots, p \quad (3.55)$$

$\underbrace{\hspace{10em}}_i \qquad \underbrace{\hspace{10em}}_{q-i}$

そして、次式で E, F, h を定める。

$$e_i' = [k_2', k_3', \dots, k_q'] (W_i \otimes I_m) [A_1' - d_1 I_m, \dots, A_p' - d_p I_m, A_q']' \quad i=1, 2, \dots, p \quad (3.56)$$

$$f_i' = [k_2', k_3', \dots, k_q'] (W_i \otimes I_m) [B_1', B_2', \dots, B_q']' \quad i=1, 2, \dots, p \quad (3.57)$$

$$E = [e_1, e_2, \dots, e_p]' \quad , \quad F = [f_1, f_2, \dots, f_p]' \quad (3.58)$$

$$h' = k_1' - \sum_{i=1}^p d_i k_{i+1}' \quad (3.59)$$

ここで、 \otimes はクロネッカー積を表わし、 d_1, d_2, \dots, d_p は D が安定行列となるように選ぶものとする。

(証明は付録2に示す。)

q が小さい場合には、 $q-1$ 次元汎関数オブザーバは定理2により、次のような簡単な形で構成できる。

例1 $q=2$ の場合：1次元汎関数オブザーバ

$$D = d, \quad E = k_2' \{A_2 + d(A_1 + dI_n)\}, \quad F = k_2' (B_2 + dB_1)$$

$$g = 1, \quad h' = k_1' - dk_2'$$

例2 $q=3$ の場合：2次元汎関数オブザーバ

$$D = \begin{bmatrix} d_1 & 1 \\ d_2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$E = \begin{bmatrix} k_2' \{A_2 - d_2 I_n + d_1 (A_1 - d_1 I_n)\} + k_3' \{A_3 + d_2 (A_1 - d_1 I_n)\} \\ k_2' \{A_3 + d_2 (A_1 - d_1 I_n)\} + k_3' \{-d_1 A_3 + d_2 (A_2 - d_2 I_n)\} \end{bmatrix}$$

$$F = \begin{bmatrix} k_2' (B_2 + d_1 B_1) + k_3' (B_3 + d_2 B_2) \\ k_2' (B_3 + d_2 B_1) + k_3' (-d_1 B_3 + d_2 B_2) \end{bmatrix}$$

$$g' = [1 \ 0], \quad h' = k_1' - d_1 k_2' - d_2 k_3'$$

定理2の $q-1$ 次元汎関数オブザーバは、設計パラメータ d_1, d_2, \dots, d_p , 推定すべき汎関数を表わすベクトル k , および正準形表現(3.40)におけるシステムパラメータ $A_1, A_2, \dots, A_q, B_1, B_2, \dots, B_q$ を陽に含む形で表わされており、仮定(3.34)を満たすシステムのクラスに対する汎関数オブザーバの標準形と呼ぶことができるものである。しかし、定理2を用いて汎関数オブザーバを構成するには、正準形(3.40)への変換が必要である。元のシステムパラメータを陽に含む構成法がさらに望ましいが、特に $q=2$ の場合には次の結果が得られる。

定理3 次式で記述されるシステムを考える。

$$\dot{x}_1 = A_{11}x_1 + A_{12}x_2 + B_1u$$

$$\dot{x}_2 = A_{21}x_1 + A_{22}x_2 + B_2u \quad (3.60)$$

$$y = x_1$$

ここで、 u は r 次元入力ベクトル、 y は m 次元出力ベクトル、 x_1 と x_2 は m 次元状態ベクトル、 A_{11} 、 A_{12} 、 A_{21} 、 A_{22} はそれぞれ $m \times m$ 行列、 B_1 、 B_2 はそれぞれ $m \times r$ 行列である。制御対象(3.60)の可観測指数が2である、あるいは等価的に A_{12} が正則であると仮定する。このとき、状態の線形汎関数

$$f = k_1'x_1 + k_2'x_2 \quad (3.61)$$

を推定する1次元汎関数オブザーバを次式で構成することができる。

$$\dot{z} = \alpha z + Ey + Fu \quad (3.62)$$

$$\hat{f} = z + h'y$$

$$E = k_2' \{ A_{21} - (A_{22} - \alpha I_m)A_{12}^{-1}(A_{11} - \alpha I_m) \}$$

$$F = k_2' \{ B_2 - (A_{22} - \alpha I_m)A_{12}^{-1}B_1 \} \quad (3.63)$$

$$h' = k_1' + k_2'(A_{22} - \alpha I_m)A_{12}^{-1}$$

ここで、 α は唯一の設計パラメータであり、負の値に選ぶものとする。

(証明は付録2に示す。)

最後に、汎関数オブザーバによる推定値 \hat{f} を用いて制御することを考える。すなわち、制御対象(3.23)に対し、条件(3.26)～(3.29)を満たす汎関数オブザーバ(3.25)により $f = k'x$ の推定値 \hat{f} を求め

$$u = -\hat{f} \quad (3.64)$$

なる制御を行なうものとする。ただし、ここでは u はスカラーであるとする。このとき、閉ループ系(3.23)、(3.25)、(3.64)は、まとめると

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A - Bh'C & -Bg' \\ EC - Fh'C & D - Fg' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ z \end{bmatrix} \quad (3.65)$$

と表わされる。 $e = z - Sx$ と置き、(3.26)～(3.28)を用いると、(3.65)は、次式のように変形することができる。

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{e} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A - Bk' & -Bg' \\ 0 & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ e \end{bmatrix} \quad (3.66)$$

この式より、全系の固有値は $A - Bk'$ の固有値と D の固有値より成ることがわかる。

3.5 おわりに

本章では、状態オブザーバおよび汎関数オブザーバの構成法について述べた。状態オブザーバとしては、Luenberger の n 次元状態オブザーバと Gopinath による最小次元状態オブザーバの構成法について、簡単に要約した。次に、汎関数オブザーバの構成法を提案した。仮定(3.34)を満たすシステムに対する汎関数オブザーバの構成法を導き、定理1および定理2としてまとめた。定理2では汎関数オブザーバは、正準形におけるシステムパラメータと、設計パラメータとを陽に含む形で表現されている。この定理1および2の構成法を使用するには、対象システムを正準形に変換する必要がある。元のシステムパラメータを陽に含む構成法が得られれば、より設計に便利である。 $q=2$ の場合にはこれが可能で、定理3のような簡単な構成法を導くことができた。

第4章 倒立振り子システムに対する安定化制御系の構成

4.1 はじめに

本章では、第2章で示した3種類の倒立振り子システムに対し、状態フィードバックによる安定化、実験装置で示した二つの位置変数を出力として測定している場合の、最小次元状態オブザーバによる安定化、および汎関数オブザーバによる安定化について、それぞれ安定化制御系の構成法を示す。

二つの位置変数と二つの速度変数よりなる状態ベクトルを x とするとき、3種類の倒立振り子はすべて

$$\dot{x} = Ax + bu \quad (4.1)$$

の形の状態方程式で記述される。さらに、二つの位置変数からなるベクトルを x_1 、二つの速度変数からなるベクトルを x_2 とすると、倒立振り子の状態方程式(4.1)は、次の形をしている。((2.13), (2.32), (2.48))。

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= A_{21}x_1 + A_{22}x_2 + b_2u \end{aligned} \quad (4.2)$$

なお、(4.1)、(4.2)は不安定な平衡状態 $(x, u) = 0$ のまわりで局所線形化を行なうことにより得られたものであるから、平衡状態 $(x, u) = 0$ の近傍での動特性を表わすものであり、倒立振り子の大域的な挙動は、非線形状態方程式

$$\dot{x} = Ax + bu + g(x, u) \quad (4.3)$$

あるいは

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= A_{21}x_1 + A_{22}x_2 + b_2u + g_2(x, u) \end{aligned} \quad (4.4)$$

によって記述される。ただし、 $g(x, u)$ および $g_2(x, u)$ は局所線形化に際して無視した x, u の2次以上の項である。

第2章では、倒立振り子システムを記述する線形状態方程式(4.1)または(4

. 2) の可制御性, および一部の状態変数を出力として測定する場合の可観測性について詳しく調べ, その必要十分条件を与えた。もし可制御条件が満たされ線形系 (4.1) が可制御ならば, 状態フィードバックによって閉ループ系の固有値を自由に設定することができ²³⁾, 従ってこれを安定化することができる。一部の状態変数を出力として測定している場合には, さらに可観測条件が満たされているならば, オブザーバを用いたフィードバックにより閉ループ系の固有値を自由に設定することができ, 従ってこれを安定化することができる (第3章)。以上の安定化制御則が非線形系 (4.3) または (4.4) に対しても安定化制御則となることを, 以下で示すことにする。

4.2 状態フィードバックによる安定化制御系の構成

線形系 (4.1) が可制御ならば, 状態フィードバック制御

$$u = -k'x \quad (4.5)$$

により, 閉ループ系

$$\dot{x} = (A - bk')x \quad (4.6)$$

の固有値を自由に設定できる。このことは多入力系に対し一般的に Wonham²³⁾ により示されているが, ここでは可制御な1入力系に対して, よく知られている閉ループ固有値の設定法を要約しておく。

まず, 系 (4.1) を可制御正準形に変換する。A の特性多項式

$$d(s) = \det(sI - A) = s^n + d_1 s^{n-1} + \dots + d_{n-1} s + d_n \quad (4.7)$$

の係数 d_1, d_2, \dots, d_n を用いて, 変換行列 T を

$$T = [b, Ab, \dots, A^{n-1}b] \begin{bmatrix} d_{n-1} & d_{n-2} & \dots & 1 \\ & d_{n-2} & \dots & 0 \\ & \vdots & \dots & \vdots \\ & 1 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \quad (4.8)$$

と置き, 変数変換 $x = T\bar{x}$ を行なうと, (4.1) より次式が得られる。

$$\dot{\bar{x}} = \bar{A}\bar{x} + \bar{b}u \quad (4.9)$$

ここで、

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \\ -d_m & -d_{n-1} & \cdots & -d_1 & \end{bmatrix}, \quad \bar{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (4.10)$$

いま、閉ループ系の固有値として設定したい複素数を $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$ (重複複素数は必ず含まれているものとする) とし、

$$\begin{aligned} d_c(s) &= (s - \lambda_1)(s - \lambda_2) \cdots (s - \lambda_m) \\ &= s^n + \hat{d}_1 s^{n-1} + \cdots + \hat{d}_{n-1} s + \hat{d}_n \end{aligned} \quad (4.11)$$

とする。 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$ には重複複素数がすべて含まれているから、 $\hat{d}_1, \hat{d}_2, \dots, \hat{d}_m$ はすべて実数である。このとき、ベクトル \bar{k}' を

$$\bar{k}' = [\hat{d}_m - d_m, \dots, \hat{d}_2 - d_2, \hat{d}_1 - d_1] \quad (4.12)$$

とおくと、明らかに

$$\bar{A} - \bar{b} \bar{k}' = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \\ -\hat{d}_m & -\hat{d}_{n-1} & \cdots & -d_1 & \end{bmatrix} \quad (4.13)$$

であり、 $\bar{A} - \bar{b} \bar{k}'$ の特性多項式は $d_c(s)$ である。ここで、

$$\begin{aligned} \bar{k}' &= \bar{k}' T^{-1} \\ &= \begin{bmatrix} \hat{d}_n - d_n \\ \vdots \\ \hat{d}_2 - d_2 \\ \hat{d}_1 - d_1 \end{bmatrix}' \left\{ [b, Ab, \dots, A^{n-1}b] \begin{bmatrix} d_{n-1} & d_{n-2} & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ d_{n-2} & \vdots & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \right\}^{-1} \end{aligned} \quad (4.14)$$

とおくと

$$\begin{aligned} A - b \bar{k}' &= T \bar{A} T^{-1} - T \bar{b} \bar{k}' T^{-1} \\ &= T (\bar{A} - \bar{b} \bar{k}') T^{-1} \end{aligned} \quad (4.15)$$

すなわち、 $A - b \bar{k}'$ と $\bar{A} - \bar{b} \bar{k}'$ は相似である。相似な行列の固有値は等しいか

置 r ，内部物体を移動する型式の場合(傾き角 θ など)を考へ，これを目標値 v_d により自由に制御できるように，制御則を

$$u = K(-\tilde{k}'x + v_d) \quad (4.20)$$

あるいは

$$u = -\tilde{k}'x + K v_d \quad (4.21)$$

とする。目標値 v_d のステップ変化に対し，制御量 v が定常偏差なしで追従するようにするため，目標値 v_d から制御量 v への定常ゲインが1になるように，定数ゲイン K を定める。状態フィードバック(4.20)および(4.21)による安定化制御系のブロック線図を，それぞれ図4.1(a)および(b)に示す。パラメータの測定誤差などのため，目標値 v_d に対して v には定常偏差が生ずることが多い。このような場合，(b)の構成では閉ループ固有値に影響を与えずに K の値を修正できる利点がある。

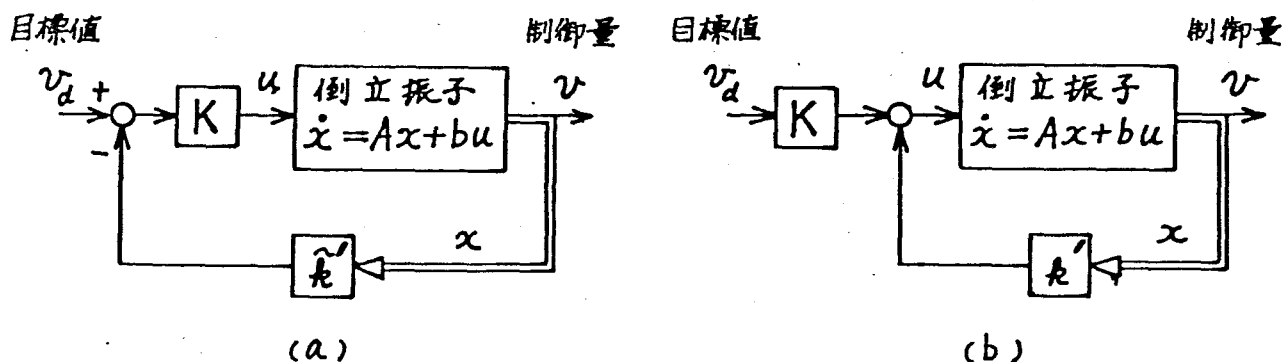


図4.1 状態フィードバックによる安定化制御系

4.3 最小次元状態オブザーバによる安定化制御系の構成

ここでは，二つの位置変数，すなわち(4.2)の x_1 を出力として測定しているときの，最小次元状態オブザーバによる安定化制御系の構成法について述べる。

系(4.2)の x_2 を推定する最小次元状態オブザーバは，(3.18)より

$$\begin{aligned} \dot{z} &= (A_{22} - L)z + \{A_{21} + (A_{22} - L)L\}x_1 + b_2 u \\ \hat{x}_2 &= z + Lx_1 \end{aligned} \quad (4.22)$$

となる。あるいは変形してより簡単にすれば，

$$\begin{aligned}\dot{\hat{x}} &= A_{21}x_1 + (A_{22} - L)\hat{x}_2 + b_2u \\ \hat{x}_2 &= \hat{y} + Lx_1\end{aligned}\quad (4.22)'$$

と表わすこともできる。制御則は推定値 \hat{x}_2 を用いて

$$u = -k_1'x_1 - k_2'\hat{x}_2 \quad (4.23)$$

$$k' = [k_1' \quad k_2'] \quad (4.24)$$

とする。閉ループ系 (4.1), (4.22), および (4.23) は,

$$e = \hat{x}_2 - x_2 \quad (4.25)$$

と置くと、まとめて次式のように表わすことができる。

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{e} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A - bk' & -bk_2' \\ 0 & A_{22} - L \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ e \end{bmatrix} \quad (4.26)$$

全系の固有値は、 $A - bk'$ の固有値と $A_{22} - L$ の固有値から成る。制御対象 (4.1) が可制御なら、前節で示したように $A - bk'$ の固有値は k' の選択により自由に設定できる。また、 $A_{22} - L$ の固有値を L の選択により自由に設定できることは、明らかである。よってすべての閉ループ固有値の実部が負となるように、 k と L を定めれば、閉ループ系を安定化することができる。このとき、倒立振子の大域的な挙動は、

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{e} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A - bk' & -bk_2' \\ 0 & A_{22} - L \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ e \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} g(x, -k_1'x - k_2'e) \\ g_2(x, -k_1'x - k_2'e) \end{bmatrix} \quad (4.27)$$

なる非線形状態方程式に支配されるが、線形部分のすべての固有値の実部が負でありかつ非線形項は (x, e) によって2次以上の項であるから、平衡点 $(x, e) = 0$ は漸近安定である。²⁶⁾

第5章の最小次元状態オブザーバを用いる実験では、目標値は導入せず、単に安定化のみを行なったので、目標値についての論議は略す。

最小次元状態オブザーバによる安定化制御系の構成を、図4.2に示す。

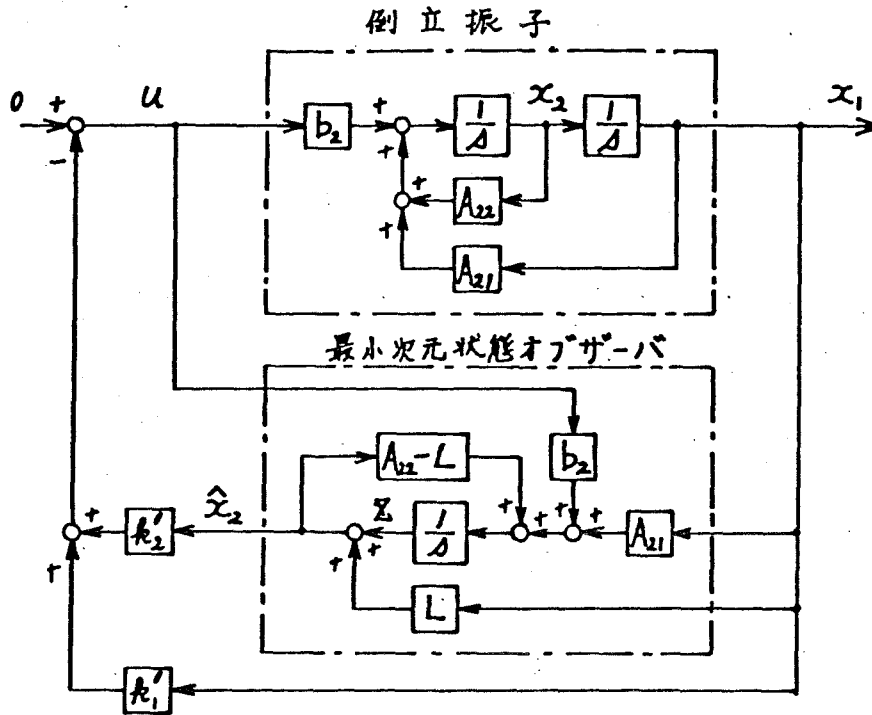


図4.2 最小次元状態オブザーバによる安定化制御系

4.4 汎関数オブザーバによる安定化制御系の構成

ここでは、二つの位置変数、すなわち(4.2)の x_1 を出力として測定しているときの、汎関数オブザーバによる安定化制御系の構成法について述べる。

系(4.2)に対し、状態の線形結合

$$f = k'x = k_1'x_1 + k_2'x_2 \quad (4.28)$$

を推定する汎関数オブザーバは、(3.62), (3.63)から

$$\dot{z} = dz + Ex_1 + Fu \quad (4.29)$$

$$\hat{f} = z + h'x_1$$

$$E = k_2' \{ A_{21} + d(A_{22} - dI) \}$$

$$F = k_2' b_2 \quad (4.30)$$

$$h' = k_1' + k_2'(A_{22} - dI)$$

で与えられる。制御則は f の推定値 \hat{f} を用いて

$$u = -\hat{f} \quad (4.31)$$

とする。閉ループ系(4.1), (4.29), (4.31)は,

$$e = \hat{f} - f \quad (4.32)$$

と置くとき, まとめて次式のように表わすことができる。

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{e} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A - bk' & -b \\ 0 & \alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ e \end{bmatrix} \quad (4.33)$$

全系の固有値は $A - bk'$ の固有値と α とから成る。制御対象(4.1)が可制御なら, $A - bk'$ の固有値は k' の選択により自由に設定できる。また, α はオブザーバの設計パラメータだから自由に選択できる。よって, すべての閉ループ固有値の実部が負となるように k' と α を定めれば, 閉ループ系を安定化することができる。

このとき, 倒立振り子の大域的な挙動は

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{e} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A - bk' & -b \\ 0 & \alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ e \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} g(x, -k'x - e) \\ -k_2 g_2(x, -k'x - e) \end{bmatrix} \quad (4.34)$$

なる非線形状態方程式に支配されるが, 線形部分のすべての固有値の実部が負でありかつ非線形項は (x, e) について2次以上の項であるから, 平衡点 $(x, e) = 0$ は漸近安定である。²⁶⁾

実際に制御系を構成する場合には, 適当な制御量 v_d を考え, これに対する目標値 v_d を導入して, 制御則を

$$u = -\hat{f} + K v_d \quad (4.35)$$

とする。あるいは, 右辺を K でくくり

$$u = K(-\hat{f} + v_d) \quad (4.36)$$

という形にする。ここに, \hat{f} は

$$\hat{f} = \frac{f}{K} = \tilde{k}' x, \quad \tilde{k}' \triangleq \frac{k'}{K} \quad (4.37)$$

の推定値であり, $\tilde{k}' = [\tilde{k}'_1, \tilde{k}'_2]$ として, 汎関数オブザーバ(4.29), (4.30)において k'_1, k'_2 を $\tilde{k}'_1, \tilde{k}'_2$ で置き換えたものにより推定する。

制御則(4.35)および(4.36)による安定化制御系の構成を, それぞれ図4.3(a)および(b)に示す。

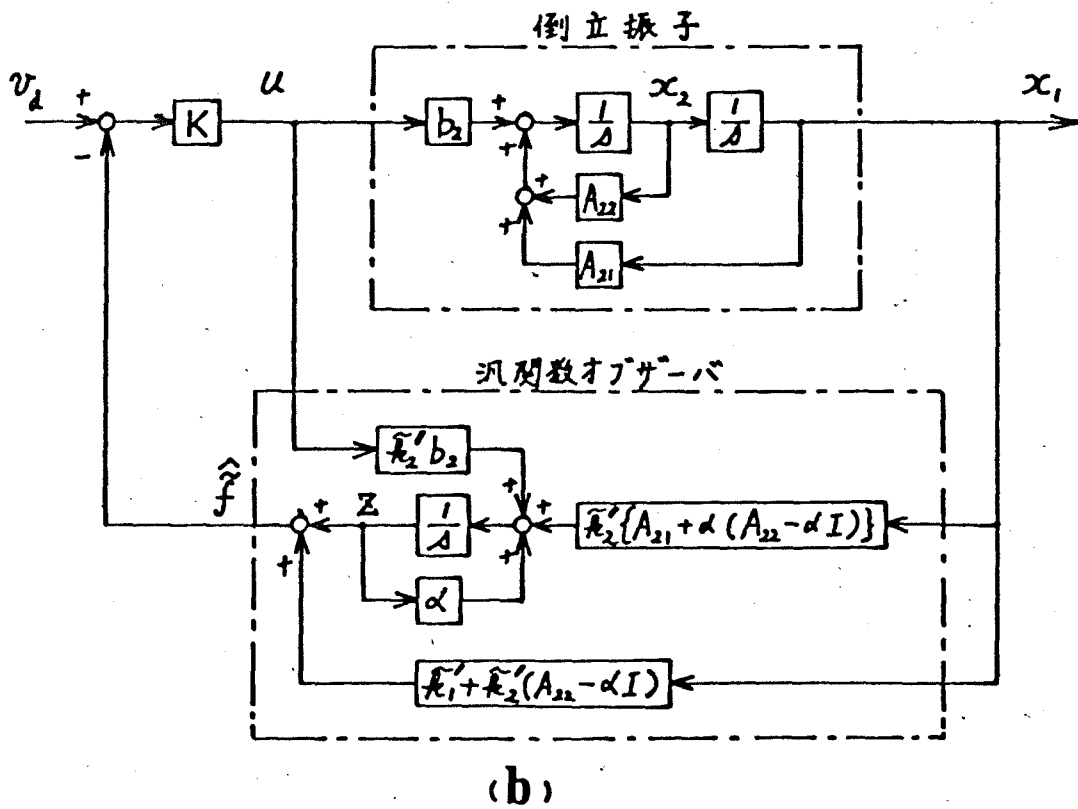
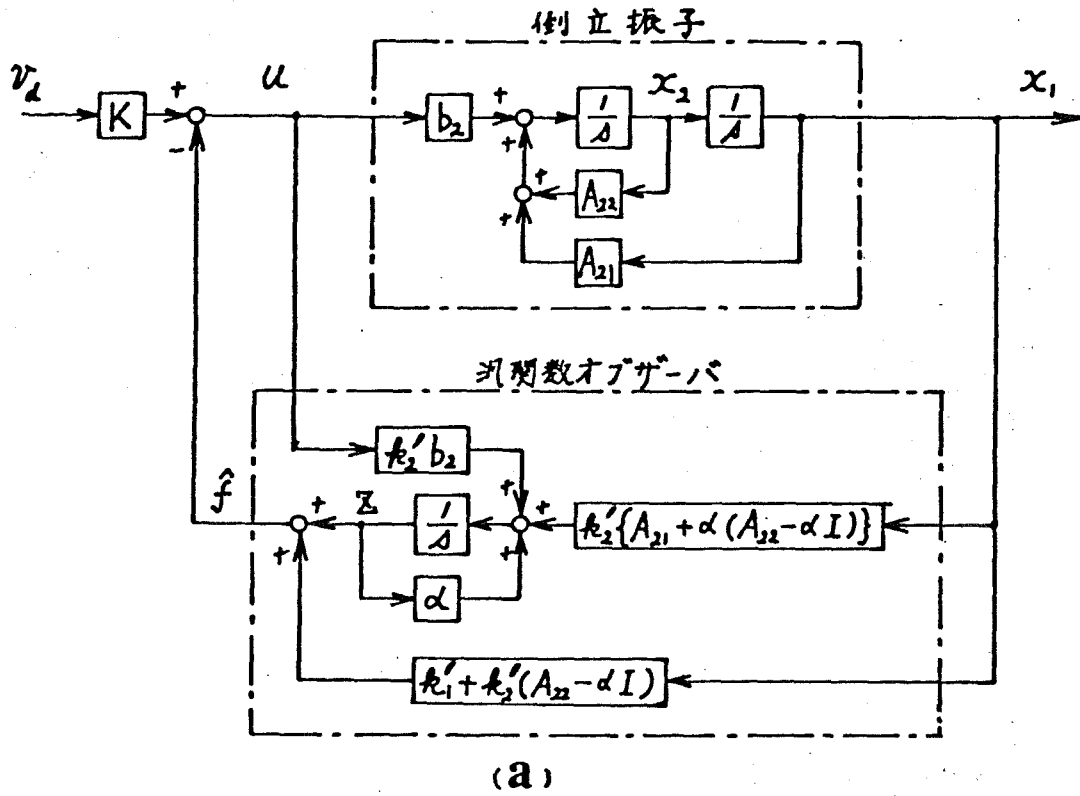


図4.3 汎関数オブザーバによる安定化制御系

4.5 おわりに

本章では、第2章で示したる種類の倒立振り子システムに対する安定化制御系として、状態フィードバックによる安定化制御系、二つの位置変数を出力とするときの最小次元状態オブザーバによる安定化制御系、二つの位置変数を出力とするときの汎関数オブザーバによる安定化制御系の構成法をそれぞれ与えた。対象とする倒立振り子が可制御なる、このいずれの方法によっても倒立振り子を安定化することができる。しかし、対象とする倒立振り子は非線形方程式(4.3)に支配されており、本章で示した方法は、不安定な平衡点である原点を局所的に漸近安定な平衡点に変えるだけであり、安定領域は原点の近傍のある領域に限られる。もしこの安定領域が非常に小さければ、理論的に安定化できるはずであっても、実験的には安定化が困難であると予想される。もし安定領域が理論的に広いことが示されたとしても、第2章の解析には種々の仮定を置いており、実験的に安定化できるかどうかは別の問題である。そこで、次章において、本章の方法で構成した安定化制御を実験的に検討する。

また、倒立振り子の可制御条件(2.38)、(2.57)などが満たされても、両者の値が非常に近いときには、 $\det[b, Ab, \dots, A^{n-1}b]$ がゼロに近い値となり、従って(4.14)により求めるフィードバック係数が非常に大きな値となることが予想される。モータ増幅器の能力には限界があるので、この場合には実際上安定化が困難になる。このことについては、さらに5.5節で考察する。

第5章 安定化制御の実験的検討

5.1 はじめに

本章では、倒立振り子システムに対して第4章で示した安定化制御を、実験的に検討する。第2章で示した3種類の倒立振り子システム、(1) 平行二輪車、(2) 内部物体を横方向に直線変位させる型式の倒立振り子、(3) 内部物体を回転変位させる型式の倒立振り子、についてそれぞれ二つの位置変数を出力として測定し、4.4節で示した汎関数オブザーバによる安定化制御の実験を行なう。また、直線変位型倒立振り子については、4.3節で示した最小次元状態オブザーバによる安定化制御の実験も行なう。ところで、測定しないう二つの速度変数は、オブザーバを用いて推定する代わりに、測定する二つの位置変数から微分により求めることもできる。純粋な微分は、もし実行できたとしても、ノイズを増幅するなど問題があるので、ここでは近似的な微分器を用いて速度変数を求め、状態フィードバック制御を行なう方法について、平行二輪車と直線変位型倒立振り子に対し実験的に検討することとする。

以上の実験において、倒立振り子の倒立状態を安定に維持することができたが、その挙動には持続振動が多くの場合に見られた。5.5節において、この原因について考察する。

なお、本章における実験では、安定化制御器はアナログ計算機(日本電気 A-300)を用いて実現することとした。

5.2 平行二輪車の安定化制御

実験に用いる平行二輪車のパラメータの値を表5.1に示す。車体の慣性モーメント I は微小角自由振動から、等価粘性摩擦定数 C はステップ応答からそれぞれ測定した。これから、(2.12)と(2.13)により状態方程式、(2.15)と(2.16)により伝達関数を計算すると表5.2に示すようになる。開ループ系の固有値は

表 5.1 平行二輪車のパラメータの値

$m = 8.019 \text{ kg}$	$l_1 = 0.451 \text{ m}$
$m_1 = 5.789 \text{ kg}$	$a = 0.112 \text{ m}$
$m_2 = 2.195 \text{ kg}$	$c_1 = 0.648 \text{ kg}\cdot\text{m}^2/\text{sec}$
$m_h = 0.035 \text{ kg}$	$G = 13.1 \text{ N}\cdot\text{m/V}$
$I_1 = 1.603 \text{ kg}\cdot\text{m}^2$	$g = 9.8 \text{ m}/\text{sec}^2$
$I_2 = 0.00710 \text{ kg}\cdot\text{m}^2$	$I_a = 0.1309 \text{ kg}\cdot\text{m}^2$
$I_\alpha = 0.0232 \text{ kg}\cdot\text{m}^2$	$I_b = 0.4023 \text{ kg}\cdot\text{m}^2$
$I_\beta = 0.00218 \text{ kg}\cdot\text{m}^2$	$I_o = 2.296 \text{ kg}\cdot\text{m}^2$

表 5.2 平行二輪車の状態方程式と伝達関数

$$\dot{x} = A x + b u, \quad x = [\phi(\text{rad}), \theta(\text{rad}), \dot{\phi}(\text{rad}/\text{sec}), \dot{\theta}(\text{rad}/\text{sec})]'$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -74.4 & -10.7 & 0 \\ 0 & 24.2 & 1.88 & 0 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -217 \\ 38.0 \end{bmatrix}$$

$$\frac{\phi(s)}{u(s)} = \frac{n_1(s)}{d(s)}, \quad \frac{\theta(s)}{u(s)} = \frac{n_2(s)}{d(s)}$$

$$n_1(s) = -217s^2 + 2420 = -217(s+3.34)(s-3.34)$$

$$n_2(s) = 38.0s^2$$

$$d(s) = s^4 + 10.7s^3 - 24.2s^2 - 120s = s(s+11.9)(s+2.63)(s-3.82)$$

$$(-11.9, -2.63, 0, 3.82)$$

であり、開ループ系は不安定である。

ここでは、閉ループ系の固有値を -3 (4重), -4 (4重), -5 (4重) と設定する場合について、それぞれ安定化制御実験を行なうこととした。そのためにまず、4.2節に従い、状態フィードバック制御則

$$u = -k'x + K r_d \quad (5.1)$$

のパラメータを求めた。これを表 5.3 に示す。ここで、 r_d は二輪車の物動距離 r に対する目標値である。

表5.3 平行二輪車に対する状態フィードバック係数

閉ループ固有値	k'				K
	(V/rad	V/rad	V/(rad/s)	V/(rad/s))	
-3(4-ple)	(0.03347	2.247	0.0912	0.5701)	0.2988
-4(4-ple)	(0.1058	3.764	0.1554	1.025)	0.9444
-5(4-ple)	(0.2583	6.050	0.2560	1.705)	2.306

次に, (4.29), (4.30), (4.35)により, 上表の状態の線形結合を推定する汎関数オブザーバによる安定化制御器

$$\begin{aligned} \dot{z} &= \alpha z + E x_1 + F u, & x_1 &= [\phi \ \theta]' \\ \hat{f} &= z + h' x_1, \\ u &= -\hat{f} + K r_d \end{aligned} \quad (5.2)$$

を構成した。これを表5.4に示す。ここで, オブザーバの固有値 α は, 閉ループ固有値 $-3 \sim -5$ に比べて速い応答をするように, -10 とした。

表5.4 平行二輪車に対する汎関数オブザーバ制御器(5.2)のパラメータの値(Kの値は表5.3参照)

実験	閉ループ固有値	α	E	F	h'
1	-3(4-ple)	-10	(-10.0 -50.2)	1.26	(1.04 7.95)
2	-4(4-ple)	-10	(-18.1 -89.2)	5.27	(1.92 14.0)
3	-5(4-ple)	-10	(-30.2 -148)	9.33	(3.28 23.1)

表5.4の三つの場合について, 平行二輪車の汎関数オブザーバによる安定化制御の実験を行なった。汎関数オブザーバによる制御器のアナログ計算機の結線図の例を, 図5.1に示す。平行二輪車は, 実験を行なった三つの場合とも, 微小な持続振動(リミットサイクル)が生じたけれども, 安定に自立した。この時間応答を, 二輪車の初動距離 r , 車体の傾き角 θ , および操作量 u について, 図5.2に示す。図の(b), (c)では, 目標値 r_d のステップ変化に対する応答も示している。なお, 持続振動の原因は, 5.5節で明らかにするように, 主として駆動伝達系の固体摩擦であると考えられる。

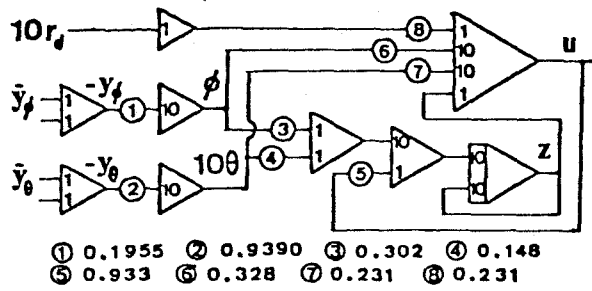
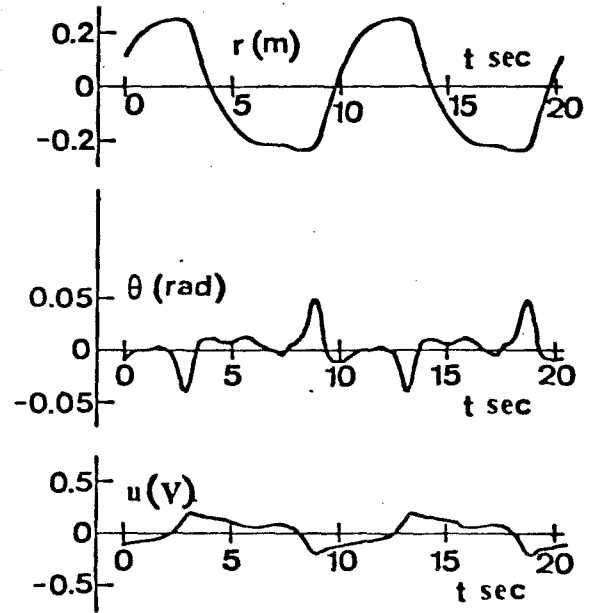
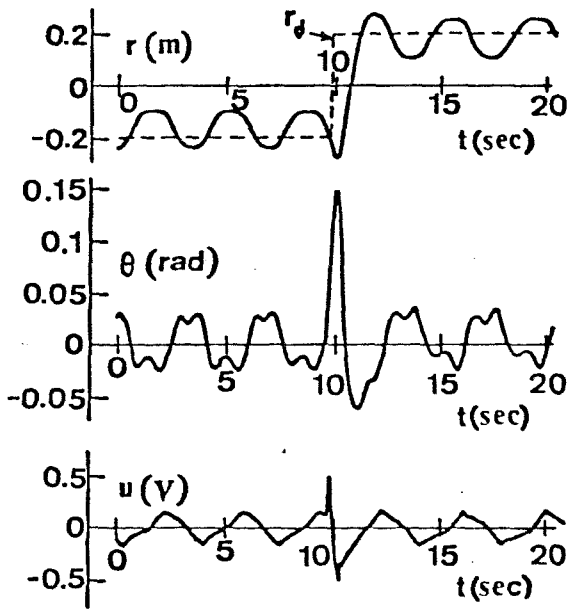


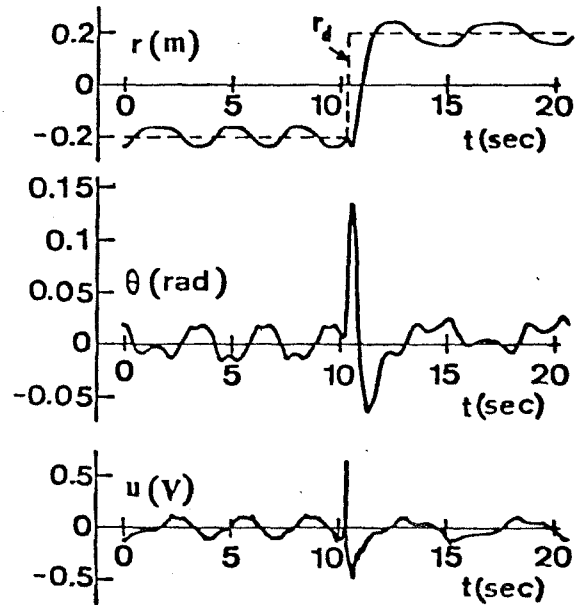
図5.1 平行二輪車に対する汎関数オプザバ制御器のアナログ計算機の結線図の例



(a) 実験1



(b) 実験2



(c) 実験3

図5.2 平行二輪車の時間応答

次に、近似微分器を用いる方法により安定化制御の実験を行なう。近似微分器として $\frac{s}{1+Ts}$ を採用し、状態フィードバック制御則(5.1)の代わりに、次の制御則を用いることとした。

$$\begin{aligned}
 u &= -k'_1 x_1 - \frac{s}{1+Ts} (k'_2 x_1) \\
 x_1 &= [\phi \quad \theta]', \quad k' = [k'_1 \quad k'_2]
 \end{aligned}
 \tag{5.3}$$

$T = 0.1$ 秒とし、表 5.3 の閉ループ極を -3 (4重) と設定する場合と -4 (4重) と設定する場合のフィードバック係数について実験を行なった。この二つの場合とも、微小な持続振動が生じたけれども、平行二輪車は安定に自立した。使用

した制御器のアナログ計算機の結線図の例を、図 5.3 に示す。持続振動の様子は、汎関数オブザーバを用いた図 5.2 と同様であったので、時間応答の波形は省略し、持続振動の周期と振幅を、汎関数オブザーバによる安定化の場合とまとめて、表 5.5 に示す。なお、近似微分による安定化における実際の閉ループ固有値は、名目的な固有値 -3 , -4 に対しそれぞれ

$$(-1.04, -1.13 \pm 2.45j, -8.72 \pm 5.55j)$$

$$(-1.30, -1.31 \pm 3.09j, -8.41 \pm 10.2j)$$

であった。

表 5.5 平行二輪車に生じたリミットサイクルの周期と θ および θ の振幅

	-3	-4	-5
汎関数オブザーバによる安定化	9 sec 0.25 m 0.045 rad	5 sec 0.07 m 0.025 rad	4 sec 0.04 m 0.017 rad
近似微分による安定化	4 sec 0.13 m 0.040 rad	3 sec 0.036 m 0.016 rad	

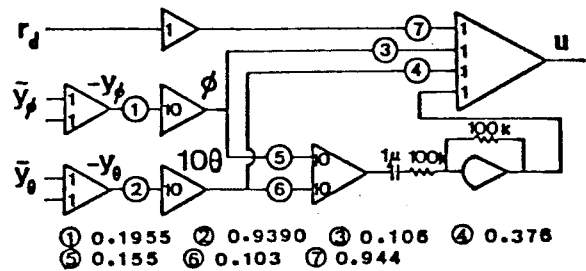


図 5.3 平行二輪車に対する近似微分器を用いた安定化制御器のアナログ計算機の結線図の例。

5.3 直線変位型倒立振子の安定化制御

実験に用いる直線変位型倒立振子のパラメータの値を、表 5.6 に示す。これは

最初に述べる最小次元状態オブザーバによる安定化制御，および近似微分による安定化制御の実験におけるパラメータの値である。その後述べる汎用教オブザーバによる安定化制御，および積分補償による定常特性の改善の実験に際しては，倒立振子のフレームの部分を一部手直ししたため，約60g質量が増加し，これに伴ってパラメータの値も表5.6の括弧の中に示す値に変わった。なお，振り全体の慣性モーメント I_0 と支持軸の粘性摩擦定数 C_1 は微小角自由振動から，駆動伝達系の等価粘性摩擦定数 C_2 はステップ応答からそれぞれ測定した。

表5.6 直線変位型倒立振子のパラメータの値

$m = 10.30(10.36)$ kg	$l = 0.611(0.612)$ m
$m_1 = 9.09(9.15)$ kg	$l_1 = 0.623(0.624)$ m
$m_2 = 1.21$ kg	$l_2 = 0.5176$ m
$m_{2a} = 1.065$ kg	$c_1 = 0.115$ kg·m ² /sec
$m_a = 2.27$ kg	$c_2 = 24.6$ kg/sec
$m_{2b} = 0.0177$ kg·m	$G = 80.7$ N/V
$m_b = 0.643$ kg·m	$g = 9.8$ m/sec ²
$I_0 = 6.03(6.08)$ kg·m ²	$ml = 6.29(6.34)$ kg·m

最初に，最小次元状態オブザーバによる安定化，および近似微分による安定化について述べる。表5.6の値から，(2.31)と(2.32)により状態方程式，(2.34)と(2.35)により伝達関数を計算すると，表5.7に示すようになる。開ループ固有値は

$$(-11.1, -3.20, -0.09, 3.20)$$

であり，開ループ系は不安定である。

最小次元状態オブザーバによる安定化制御器として，(4.22)', (4.23) すなわち

$$\begin{aligned} \dot{z} &= A_{21} x_1 + (A_{22} - L) \hat{x}_2 + b_2 u, \quad x_1 = [r \ \theta]' \\ \hat{x}_2 &= z + L x_1 \end{aligned} \quad (5.4)$$

$$u = -k_1' x_1 - k_2' \hat{x}_2, \quad k' = [k_1' \ k_2']$$

を用いる。制御器のパラメータ k と L は，閉ループ固有値 ($A - b k'$ の固有値) が

表5.7 直線変位型倒立振子の状態方程式と伝達関数
(最小次元状態オブザーバと近似微分の実験の場合)

$$\dot{x} = A x + b u, \quad x = [r(m), \theta(\text{rad}), \dot{r}(\text{m/sec}), \dot{\theta}(\text{rad/sec})]'$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -0.573 & 2.39 & -11.2 & 0.00554 \\ 2.03 & 9.97 & 1.19 & -0.0196 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 36.6 \\ -3.90 \end{bmatrix}$$

$$\frac{r(s)}{u(s)} = \frac{n_1(s)}{d(s)}, \quad \frac{\theta(s)}{u(s)} = \frac{n_2(s)}{d(s)}$$

$$n_1(s) = 36.6s^2 + 0.695s - 374 = 36.6(s+3.21)(s-3.19)$$

$$n_2(s) = -3.90s^2 + 71.9 = -3.90(s+4.29)(s-4.29)$$

$$d(s) = s^4 + 11.8s^3 - 9.19s^2 - 114s - 10.5$$

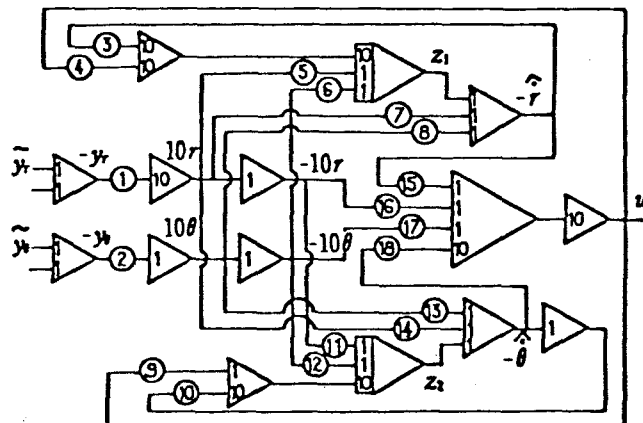
$$= (s+11.1)(s+3.20)(s+0.09)(s-3.20)$$

表5.8 最小次元状態オブザーバ制御器のパラメータの値

オブザーバのパラメータ	$L = \begin{bmatrix} 3.84 & 0.006 \\ 1.19 & 12.0 \end{bmatrix}$	
オブザーバの固有値	-12, -15	
実験	閉ループ固有値	フィードバック係数 k'
		(V/m) (V/rad) (V/(m/s)) (V/(rad/s))
1	-3(4重)	4.148 22.87 0.7803 7.111
2	-4(4重)	7.277 41.57 1.511 12.95
3	-5(4重)	11.77 70.14 2.559 21.75

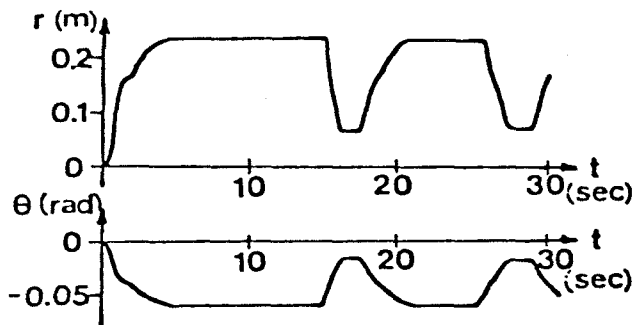
それぞれ -3(4重), -4(4重), -5(4重)となるように k' を定め, オブザーバの動特性を表わす行列 $A_{22} - L$ の固有値が -12, -15 となるように L を定めた. これらの値を表5.8に示す. 表5.8の三つの場合について, 最小次元状態オブザーバによる安定化制御の実験を行なった. 最小次元状態オブザーバによる制御器のアナログ計算機の結線図の例を, 図5.4に示す. 倒立振子は, 実験を行なった三つの場合とも, 微小な持続振動が生じたけれども, 安定に自立した. こ

の持続振動の様子を、おもりの位置
 r と倒立振子の傾き角 θ について、
図5.5に示す。5.5節で明らか
にするように、この持続振動は主と
して駆動伝達系の固体摩擦(モータ
の不感帯も含める)によるものと考え
られる。図の(b), (c)の高い波形
は外乱に対する応答であり、外乱に
対して十分な安定性を持つことがわ
かる。(手で倒立振子に外乱を加え
た。) なお、閉ループ固有値を -2
(4重)と設定する場合についても
実験を行なったが、安定とならな
かった。これは固体摩擦により生ずる
持続振動の振幅が大きくなり、実際
上安定化できなかつたものと考えら
れる。

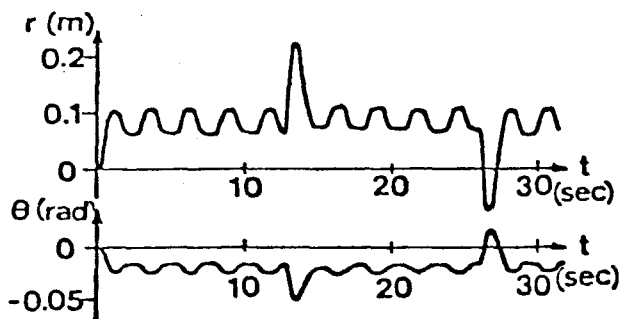


- ① 0.1276, ② 0.5092, ③ 0.1500, ④ 0.3660, ⑤ 0.0573
- ⑥ 0.2390, ⑦ 0.3840, ⑧ 0.0006, ⑨ 0.3900, ⑩ 0.1200
- ⑪ 0.2030, ⑫ 0.9970, ⑬ 0.1200, ⑭ 0.1190, ⑮ 0.2559
- ⑯ 0.1177, ⑰ 0.7014, ⑱ 0.2175

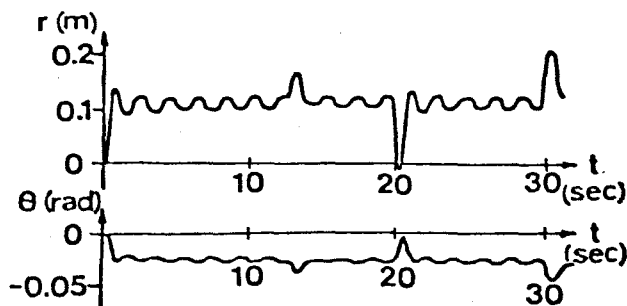
図5.4 直線変位型倒立振子に対する最
小次元状態オブザーバによる安
定化制御器のアナログ計算機の
結線図の例



(a) 実験1



(b) 実験2



(c) 実験3

図5.5 直線変位型倒立振子の時間応答(最小次元状態オブザーバによる安
定化)

次に、近似微分器を用いる方法による安定化制御の実験を行なう。制御則として

$$u = -\frac{1}{1+T_0s} \left(k_1' x_1 + \frac{s}{1+T_i s} k_2' x_1 \right) \quad (5.5)$$

を採用する。すなわち、近似微分 $\frac{s}{1+T_i s}$ により速度変数を求め、状態の線形結合を計算した後にフィルタ $\frac{1}{1+T_0 s}$ を通して操作量とする。閉ループ固有値を -5 (4重) とする状態フィードバック係数長 (表 5.8) について、 T_i と T_0 を変えていくつかの実験を行なった。この結果を表 5.9 に示す。表からわかるように、 T_i が $0.1 \sim 0.01$ sec, T_0 が 0.05 sec のときに良い安定度が得られた。そこで、 $T_i = 0.01$ sec, $T_0 = 0.05$ sec として、表 5.8 の閉ループ固有値を -3 (4重) とする場合と -4 (4重) とする場合のフィードバック係数長についても安定化制御の実験を行ない、ともに倒立振子を安定に自立させることができた。閉ループ固有値が -5 のときには、静止状態で自立したが、 -3 と -4 のときには持続振動が生じた。持続振動の周期と振幅を、最小次元オブザーバによる安定化の場合もまとめて、表 5.10 に示す。5.5 節で明らかにするように、この持続振動は、主として駆動伝達系の固体摩擦によるものと考えられる。

表 5.9 直線変位型倒立振子の近似微分による安定化制御: T_0 と T_i の影響

$T_0 \backslash T_i$	0.1 sec	0.01 sec	0.005 sec
0.05 sec	安定 (振幅 0.037m 周期 1.19sec) の持続振動が生じる。	安定 (静止状態で自立)	安定 (静止状態で自立)
0.005 sec	安定 (静止状態で自立)	安定 (高い振動数で微小振幅の振動が存在。 外乱に対し不安定。)	不安定 (高い振動数で微小振幅の振動も存在。)
0 sec	安定 (静止状態で自立)	安定 (高い振動数で微小振幅の振動と低い振動数で大きな振幅の振動とが存在。 微小外乱に対し不安定)	不安定 (激しく振動しながら倒れる。)

表5.10 直線変位型倒立振子に与じたりミットサイクルの周期と r および θ の振幅

	-3	-4	-5
最小次元状態オブザーバによる安定化	11 sec 0.085 m 0.02 rad	2.5 sec 0.023 m 0.004 rad	1.9 sec 0.012 m 0.002 rad
近似微分による安定化	8 sec 0.19 m 0.036 rad	6 sec 0.04 m 0.008 rad	静止状態で自立

次に、汎関数オブザーバによる安定化、および積分補償による定常特性の改善について述べる。表5.6の括弧の中の値から、(2.31)と(2.32)により状態方程式、(2.34)と(2.35)により伝達関数を計算すると表5.11に示すようになる。開ループ固有値は

$$(-11.1, -3.19, -0.09, 3.19)$$

である。なお、表5.11の値は、前の実験における表5.7とほとんど同じである

表5.11 直線変位型倒立振子の状態方程式と伝達関数
(汎関数オブザーバと積分補償の実験の場合)

$$\dot{x} = A x + b u, \quad x = [r(m), \theta(\text{rad}), \dot{r}(\text{m/sec}), \dot{\theta}(\text{rad/sec})]'$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -0.570 & 2.40 & -11.2 & 0.0055 \\ 2.01 & 9.97 & 1.18 & -0.0196 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 36.7 \\ -3.88 \end{bmatrix}$$

$$\frac{r(s)}{u(s)} = \frac{n_1(s)}{d(s)} \quad \frac{\theta(s)}{u(s)} = \frac{n_2(s)}{d(s)}$$

$$n_1(s) = 36.7s^2 + 0.694s - 375 = 36.7(s+3.20)(s-3.20)$$

$$n_2(s) = -3.88s^2 + 71.6 = -3.88(s+4.29)(s-4.29)$$

$$d(s) = s^4 + 11.2s^3 - 9.19s^2 - 115s - 10.5$$

$$= (s+11.1)(s+3.19)(s+0.09)(s-3.19)$$

る。

まず、状態フィードバック制御則

$$u = K(-\hat{k}'x + \theta_d) \quad (5.6)$$

を考え、閉ループ固有値を -3 (4重), -4 (4重), -5 (4重)と設定する場合について、4.2節に従いそれぞれフィードバック係数を計算すると、表5.12が得られる。ここで、 θ_d は倒立振子の傾き角 θ の目標値であり、 K は θ_d から θ への定常ゲインが1となるように定める。

表5.12 直線変位型倒立振子に対するフィードバック係数

閉ループ固有値	\hat{k}'				K
-3 (4重)	3.71	20.6	0.696	6.40	1.13
-4 (4重)	2.06	11.8	0.426	3.69	3.58
-5 (4重)	1.37	8.18	0.296	2.54	8.74

次に、(4.29), (4.30), (4.36)により、上表の状態の線形結合 $\hat{k}'x$ を推定する汎関数オブザーバによる安定化制御器

$$\begin{cases} \dot{z} = \alpha z + E x_1 + F u, & x_1 = [r \quad \theta]' \\ \hat{f} = z + h' x_1 \\ u = K(-\hat{f} + \theta_d) \end{cases} \quad (5.7)$$

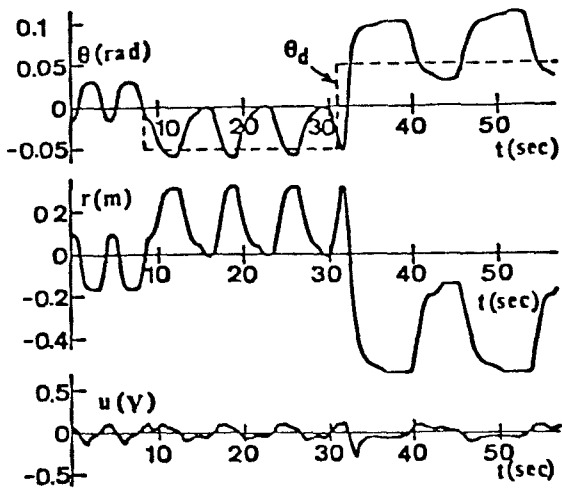
$$\begin{cases} E \triangleq \hat{k}'_2 \{A_{21} + \alpha(A_{22} - dI)\} & , \quad \hat{k}' = [\hat{k}'_1 \quad \hat{k}'_2] \\ F \triangleq \hat{k}'_2 b_2 \\ h' \triangleq \hat{k}'_1 + \hat{k}'_2 (A_{22} - dI) \end{cases} \quad (5.8)$$

を、 $\alpha = -10$ と置いて構成すると、表5.13を得る。この表の三つの場合について、直線変位型倒立振子の汎関数オブザーバによる安定化制御の実験を行なった。

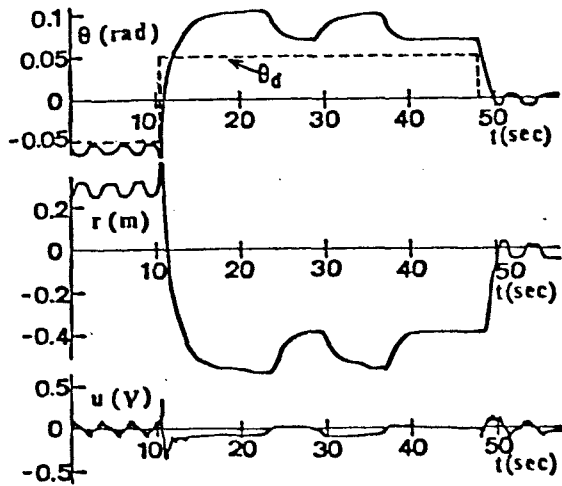
表5.13 直線変位型倒立振子に対する汎関数オブザーバ制御器の係数

実験	閉ループ固有値	α	E	F	h'	K
1	-3 (4重)	-10	(-54.7 -573)	0.689	(10.4 84.5)	1.13
2	-4 (4重)	-10	(-31.2 -330)	1.34	(5.90 48.6)	3.58
3	-5 (4重)	-10	(-21.5 -227)	1.01	(4.00 33.5)	8.74

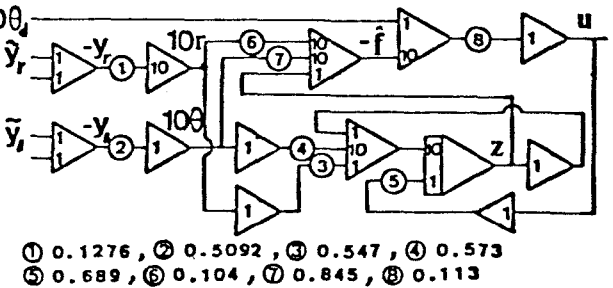
汎関数オブザーバによる制御器のアナログ計算機の結線図の例を、図5.6に示す。倒立振子は実験を行なった三つの場合とも、微小な持続振動が生じたけれども、安定に自立した。この持続振動の様子および目標値 θ_d のステップ変化に対する応答を、図5.7に示す。持続振動の周期と振幅は、 θ_d の値によって、すなわち倒立振子の姿勢によってかなり異なっている。これはおもりに軌道間の固体摩擦が場所により異なること、倒立振子の姿勢によって線形状態方程式のパラメータが変化することなどによるものと考えられる。また、目標値 θ_d と振動の中央の θ の値が異なっているのは、同様の原因のほかにはパラメータの測定誤差の影響も考えられる。前向きループゲイン K を調整すれば、振動の中央の θ の値を目標値 θ_d に一致させ



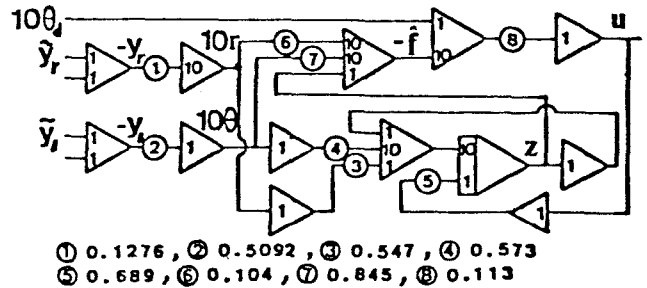
(a) 実験1



(b) 実験2



(c) 実験3



- ① 0.1276, ② 0.5092, ③ 0.547, ④ 0.573
- ⑤ 0.689, ⑥ 0.104, ⑦ 0.845, ⑧ 0.113

図5.6 直線変位型倒立振子に対する汎関数オブザーバ制御器のアナログ計算機の結線図の例.

図5.7 直線変位型倒立振子の時間応答 (汎関数オブザーバによる安定化)

ることは可能であるが、温度の変化などにより摩擦の状態などが変わると、 K の値を再調整する必要が生ずる。そこで、次に積分補償を行なう方法により、この偏差をなくすことにする。

積分補償を含む状態フィードバック制御則

$$u = -k'x - K \int^t (\theta - \theta_d) dt \quad (5.9)$$

を考える。積分器の導入により、閉ループ系は5次系となる。閉ループ固有値を、 -3 (5重), -4 (5重), -5 (5重)と設定する場合について、4.2節の方法によりフィードバック係数 k' , K を計算すると、表5.14が得られる。(4.29), (4.30)により、この表の状態の線形結合 $k'x$ を推定する汎用教オプザバによる制御器

$$\dot{z} = \alpha z + E x_1 + F u, \quad x_1 = [r \quad \theta]' \quad (5.10)$$

$$\hat{f} = z + h' x_1$$

$$u = -\hat{f} - K \int^t (\theta - \theta_d) dt \quad (5.11)$$

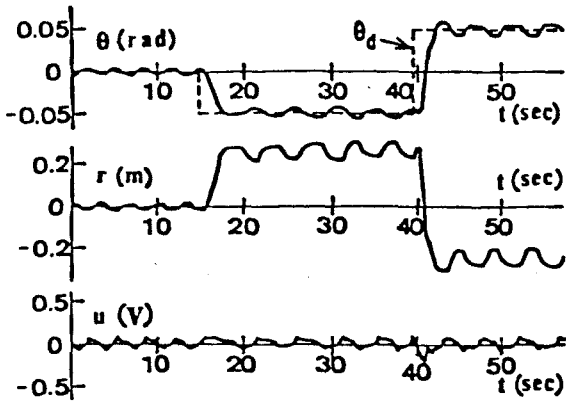
を $\alpha = -10$ と置いて構成すると、表5.15を得る。この表の三つの場合について、積分補償による定常特性改善の実験を行なった。制御器のアナログ計算機の結線図の例を図5.8に示す。実験を行なった三つの場合とも、目標値 θ_d のステップ変化に対し良い定常特性が得られた。この応答を図5.9に示す。

表5.14 直線変位型倒立振り子に対する積分補償を含む状態フィードバックの係数

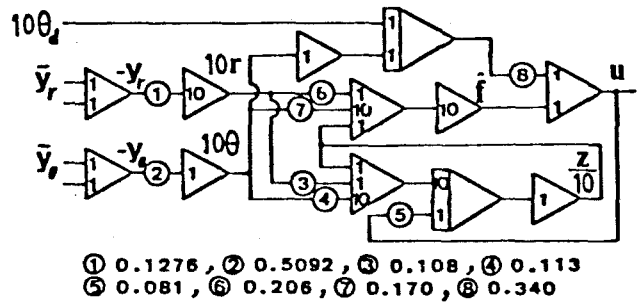
閉ループ固有値	k'				K
-3 (5重)	(7.39	44.5	1.35	12.6)	3.40
-4 (5重)	(14.5	94.1	2.95	26.6)	14.3
-5 (5重)	(43.7	180	5.57	50.3)	43.7

表5.15 直線変位型倒立振り子に対する積分補償を含む制御器のパラメータ

実験	閉ループ固有値	α	E	F	h'	K
1	-3 (5重)	-10	(-108 -113)	0.812	(20.6 170)	3.40
2	-4 (5重)	-10	(-227 -2380)	4.83	(42.4 360)	14.3
3	-5 (5重)	-10	(-429 -4510)	8.92	(78.7 683)	43.7

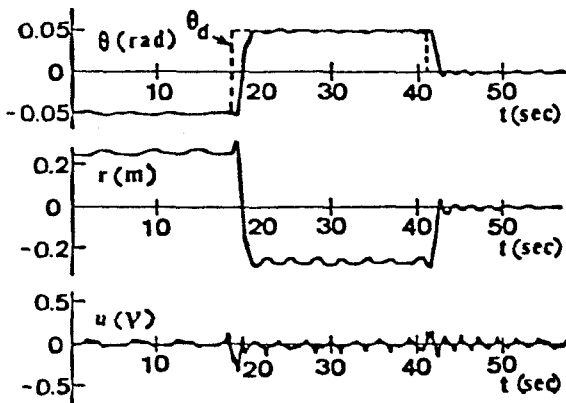


(a) 実験1

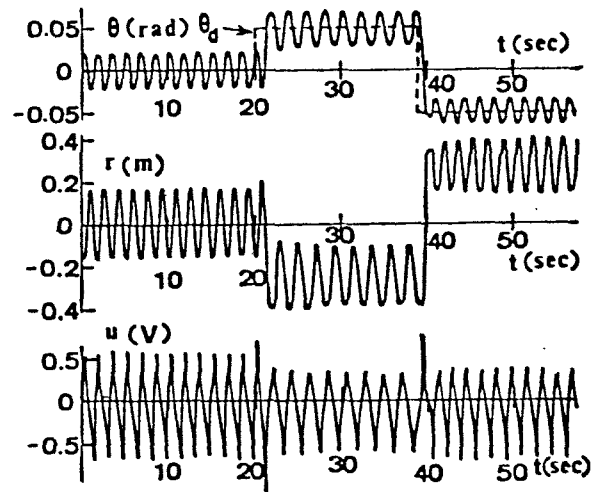


① 0.1276, ② 0.5092, ③ 0.108, ④ 0.113
⑤ 0.081, ⑥ 0.206, ⑦ 0.170, ⑧ 0.340

図5.8 直線変位型倒立振子に対する積分補償を含む制御器のアナログ計算機の結線図の例



(b) 実験2



(c) 実験3

図5.9 直線変位型倒立振子の時間応答 (積分補償による定常特性の改善)

5.4 回転変位型倒立振子の安定化制御

実験に用いる回転変位型倒立振子のパラメータの値を、表5.16に示す。これは内部物体の重心がその支軸より下にあるときの平衡点での値を示しており、内部物体の重心がその支軸より上にあるときの平衡点での値は、異なるものについて括弧の中に示した。

最初に、内部物体の重心がその支軸より下にあるときの平衡点の安定化について述べる。表5.16の値から、(2.47), (2.48)により状態方程式, (2.50), (2.51)により伝達関数を計算すると、表5.17に示すように

表5.16 回転変位型倒立振子のパラメータの値

$m = 5.683 \text{ kg}$	$l_t = 0.490 \text{ m}$
$m_1 = 4.713 \text{ kg}$	$c_1 = 0 \text{ kg m}^2/\text{sec}$
$m_2 = 0.970 \text{ kg}$	$c_2 = 8.17 \text{ kg}\cdot\text{m}^2/\text{sec}$
$I_1 = 0.886 \text{ kg}\cdot\text{m}^2$	$G = 48.2 \text{ N/V}$
$I_2 = 0.110 \text{ kg}\cdot\text{m}^2$	$g = 9.8 \text{ m/sec}^2$
$I_{2a} = 0.232 \text{ kg}\cdot\text{m}^2$	$I_a = 0.342 \text{ kg}\cdot\text{m}^2$
$I_{2b} = -0.0039 \text{ kg}\cdot\text{m}^2$	$I_b = 0.041(-0.253) \text{ kg}\cdot\text{m}^2$
$l = 0.3526(0.4582) \text{ m}$	$I_o = 0.935(1.523) \text{ kg}\cdot\text{m}^2$
$l_1 = 0.388 \text{ m}$	$ml = 2.004(2.604) \text{ kg}\cdot\text{m}$
$l_2 = 0.309(-0.309) \text{ m}$	

表5.17 回転変位型倒立振子の状態方程式と伝達関数
(内部物体の重心がその支点より下にある場合)

$$\dot{x} = A x + b u, \quad x = [\phi(\text{rad}), \theta(\text{rad}), \dot{\phi}(\text{rad}/\text{sec}), \dot{\theta}(\text{rad}/\text{sec})]'$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -9.02 & 6.11 & -24.0 & 0 \\ 3.54 & 20.8 & 1.05 & 0 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 142 \\ -6.21 \end{bmatrix}$$

$$\frac{\phi(s)}{u(s)} = \frac{n_1(s)}{d(s)}, \quad \frac{\theta(s)}{u(s)} = \frac{n_2(s)}{d(s)}$$

$$n_1(s) = 142s^2 - 2980 = 142(s+4.58)(s-4.58)$$

$$n_2(s) = 6.21s^2 - 445 = 6.21(s+8.47)(s-8.47)$$

$$d(s) = s^4 + 24.0s^3 - 11.7s^2 - 505s - 209$$

$$= (s+23.6)(s+4.57)(s+0.421)(s-4.59)$$

なる。開ループ固有値は

$$(-23.6, -4.57, -0.421, 4.59)$$

であり、開ループ系は不安定である。

状態フィードバック制御則

$$u = K(-\hat{L}'x + \theta_d) \quad (5.12)$$

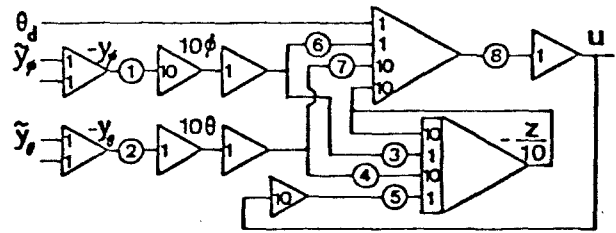
を考え、閉ループ固有値を -4 (4重), -5 (4重)と設定するときのフィードバック係数を、4.2節の方法に従って計算すると、表5.18に示すようになる。次に、(4.29), (4.30)により、この表の状態の線形結合 \hat{x} を推定する汎関数オブザーバによる制御器

$$\dot{z} = \alpha z + E x_1 + F u \tag{5.13}$$

$$\hat{f} = z + h' x_1$$

$$u = K(-\hat{f} + \theta_d) \tag{5.14}$$

を、 $\alpha = -10$ と置いて構成すると、表5.19を得る。この表の二つの場合について、内部物体の重心がその支点より下にあるときの回転変位型倒立振子の汎関数オブザーバによる安定化制御の実験を行なった。制御器のアナログ計算機の結線図の例を図5.10に示す。倒立振子は実験を行なった二つの場合とも、静止状態で安定に自立した。目標値 θ_d のステップ変化に対する応答を、図5.11に示す。目標値に対してかな



① 0.1116, ② 0.3818, ③ 0.170, ④ 0.260
⑤ 0.140, ⑥ 0.481, ⑦ 0.479, ⑧ 0.575

図5.10 回転変位型倒立振子に対する汎関数オブザーバ制御器のアナログ計算機の結線図 ($l_2 > 0$ の場合)

表5.18 回転変位型倒立振子に対する状態フィードバック係数 (内部物体の重心がその支点より下にある場合)

閉ループ固有値	\tilde{k}'	K
-4 (4重)	(1.99 15.1 0.0450 3.28)	0.575
-5 (4重)	(1.24 9.60 0.0712 2.09)	1.40

表5.19 回転変位型倒立振子に対する汎関数オブザーバ制御器の係数 (内部物体の重心がその支点より下にある場合)

実験	閉ループ固有値	α	E	F	h'	K
1	-4 (4重)	-10	(-17.0 -260)	-14.0	(4.81 47.9)	0.575
2	-5 (4重)	-10	(-5.24 -165)	-2.88	(2.44 30.5)	1.40

りの定常偏差が生じているが、この原因としてはパラメータの測定誤差、伝達系と支持軸の固体摩擦、伝達系のバックラッシなどが考えられる。

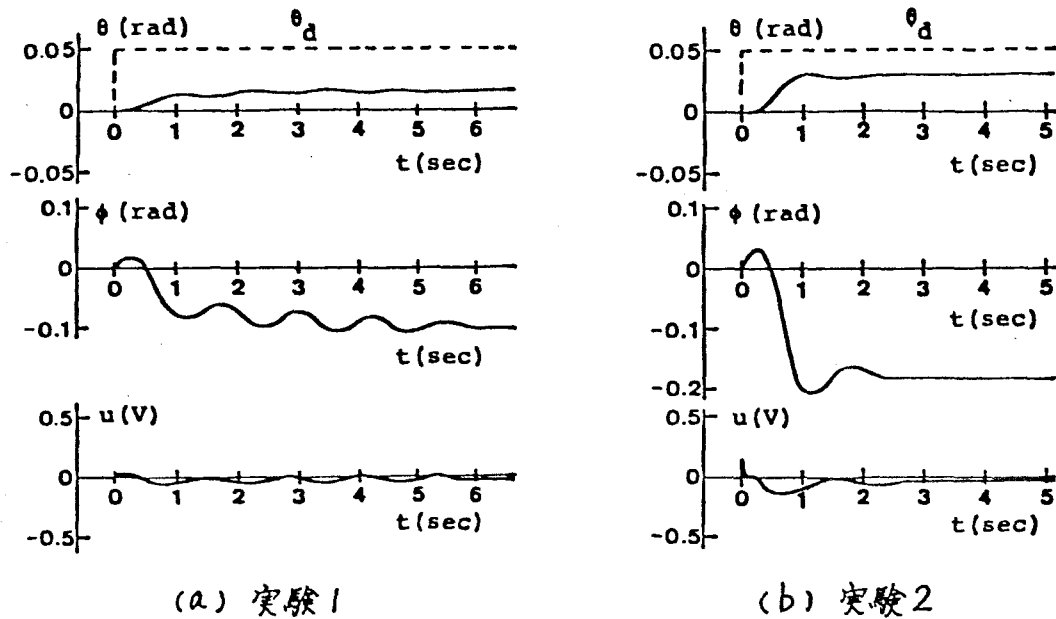


図5.11 回転変位型倒立振子の時間応答

(内部物体の重心がその支軸より下にある場合)

次に、内部物体の重心がその支軸より上にあるときの平衡点での安定化制御の実験について述べる。表5.16の値(括弧がある場合は括弧の中の値)から、(2.47)、(2.48)により状態方程式、(2.50)、(2.51)により伝達関数をそれぞれ計算すると、表5.20に示すようになる。開ループ固有値は

$$(-27.7, -4.09, 0.315, 4.10)$$

であり、開ループ系は不安定である。

まず、状態フィードバック制御則

$$u = K(-\hat{L}'x + \theta_d) \quad (5.15)$$

を考え、開ループ固有値を -5 (4重)、 -6 (4重)と設定するときのフィードバック係数を、4.2節の方法に従って計算すると、表5.21を得る。次に、(4.29)、(4.30)により、この表の状態の線形結合 $\hat{L}'x$ を推定する汎関数オブザーバによる制御器

$$\dot{\hat{x}} = \alpha \hat{x} + E x_1 + F u, \quad x_1 = [\phi \quad \theta]'$$

表5.20 回転変位型倒立振子の状態方程式と伝達関数
(内部物体の重心がその支点より上にある場合)

$$\dot{x} = A x + b u, \quad x = [\phi(\text{rad}), \theta(\text{rad}), \dot{\phi}(\text{rad/sec}), \dot{\theta}(\text{rad/sec})]'$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 8.17 & 4.34 & -27.2 & 0 \\ -0.573 & 17.5 & -4.52 & 0 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 161 \\ 26.7 \end{bmatrix}$$

$$\frac{\phi(s)}{u(s)} = \frac{n_1(s)}{d(s)}, \quad \frac{\theta(s)}{u(s)} = \frac{n_2(s)}{d(s)}$$

$$n_1(s) = 161s^2 - 2700 = 161(s+4.10)(s-4.10)$$

$$n_2(s) = 26.7s^2 - 310 = 26.7(s+3.41)(s-3.41)$$

$$d(s) = s^4 + 27.2s^3 - 25.7s^2 - 457s + 145$$

$$= (s+27.7)(s+4.09)(s-0.315)(s-4.10)$$

表5.21 回転変位型倒立振子に対する状態フィードバック係数
(内部物体の重心がその支点より上にある場合)

閉ループ固有値	\hat{k}'	K
-5(4重)	(1.52 -12.4 0.525 -3.02)	-2.01
-6(4重)	(1.15 -9.10 0.373 -2.22)	-4.16

$$\hat{z} = z + h'x, \quad (5.16)$$

$$u = K(-\hat{z} + \theta_d) \quad (5.17)$$

を $\alpha = -10$ と置いて構成すると、表5.22を得る。この表の二つの場合について、内部物体の重心がその支点より上にあるときの回転変位型倒立振子の汎関数オプティマイザによる安定化制御の実験を行なった。制御器のアナログ計算機の結線図の例を、図5.12に示す。倒立振子は実験を行なった二つの場合とも、数秒間振動的に倒立状態を維持した後に倒れた。この時間応答を図5.13に示す。実験1では倒立を維持している最初の間は、操作量 u は直流電力増幅器が飽和する入力電圧

表5.22 回転変位型倒立振り子に対する汎関数オブザーバ制御器の係数
(内部物体の重心がその支桌より上にある場合)

実験	閉ループ固有値 α	E	F	h'	K
1	-5 (4重)	-10 (-40.3 252)	3.60	(6.15 -42.6)	-2.01
2	-6 (4重)	-10 (-31.6 184)	0.791	(4.74 -31.3)	-4.16

約 ± 0.6 V (図2.4参照) を越えていないが、実験2ではかなり大きく越えている。このことは実験1では線形制御則(5.16), (5.17)がそのまま実行されているが、実験2では線形制御則が実行されず、実際にはリレー制御に近い制御がなされたことを示している。安定化できなかった原因としては、伝達系と支持軸の固摩擦、伝達系のバックラッシュ、直流電力増幅器およびモータの能力の不足などが考えられる。

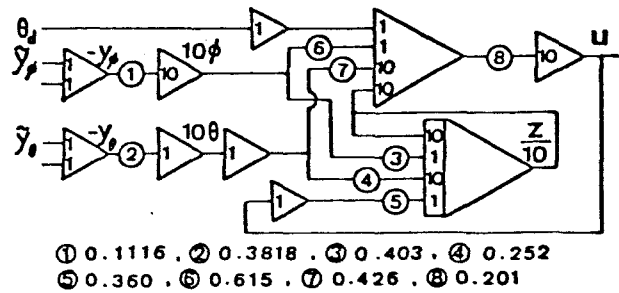


図5.12 回転変位型倒立振り子に対する汎関数オブザーバ制御器のアナログ計算機の結線図
($h_2 < 0$ の場合)

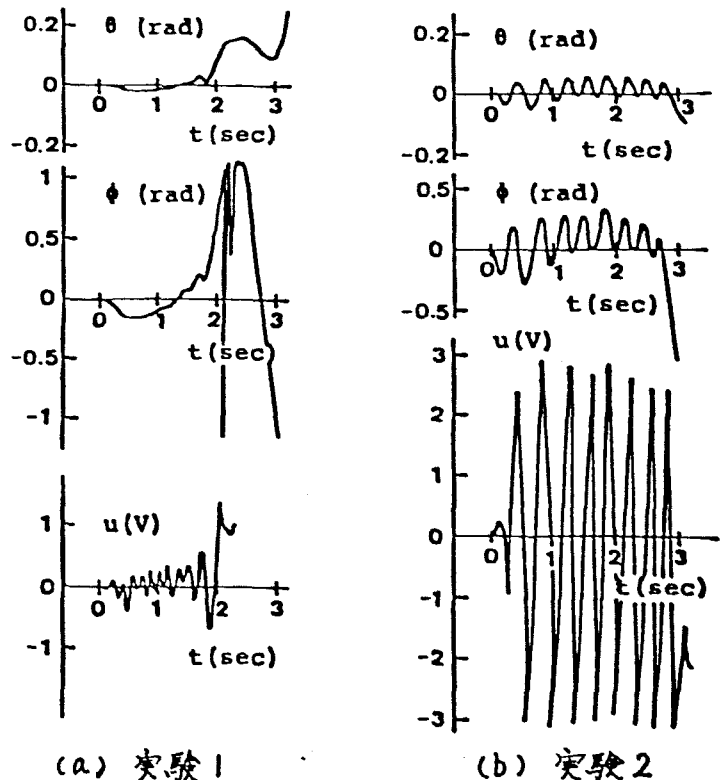


図5.13 回転変位型倒立振り子の時間応答
(内部物体の重心が支桌より上にある場合)

5.5 実験結果の検討

5.2 ~ 5.4節において、3種類の倒立振子の安定化制御の実験について述べた。汎関数オブザーバによる安定化、最小次元状態オブザーバによる安定化、および近似微分による安定化のいずれの方法によっても、倒立振子の倒立状態を安定に維持することができた。しかし、平行二輪車と直線変位型倒立振子の場合には、理論的には予想されなかった持続振動（リミットサイクル）が生じた。また、回転変位型倒立振子の場合においては、 $l_2 > 0$ の場合（内部物体の重心がその支点より下にある場合）には、静止状態で安定に倒立を維持することができたが、 $l_2 < 0$ の場合には安定化できなかった。

以上の実験結果は、第2章の解析と第4章の安定化制御が倒立振子を安定化する上で十分なものであることを示していると同時に、持続振動などの実験結果については、第2章の解析にあたり設定した仮定について再検討する必要があることを示している。次の5.5.1節では、記述関数法²⁷⁾を用いて持続振動の解析を行い、この原因が主として駆動伝達系の固体摩擦（モータの不感帯も含める）にあることを明らかにする。次の5.5.2節では、 $l_2 < 0$ の回転変位型倒立振子が安定化できなかったことも含め、各倒立振子の可制御条件について考察する。

5.5.1 記述関数法によるリミットサイクルの解析

平行二輪車と直線変位型倒立振子に生じた持続振動（リミットサイクル）の原因として、まず固体摩擦が考えられる。各実験装置の固体摩擦（動摩擦）の測定値を表5.23に示す。ここで、伝達系の固体摩擦はステップ応答から、支持軸の固体摩擦は微小角自由振動から求めた。ただし、平行二輪車の場合には測定が困難であったので、静摩擦の値を示している。以下では、固体（動）摩擦が一定の大きさで

表5.23 各倒立振子実験装置の固体摩擦

	平行二輪車	直線変位型	回転変位型
伝達系	0.66 N·m	3.08 N	1.02 N·m
支持軸		0.0410 N·m	0.103 N·m

相対速度と逆の方向に作用すると仮定し、平行二輪車と直線変位型倒立振子について表5.23の値を用いて、記述関数法による解析を行なうこととする。

(a) 平行二輪車の場合

最初に平行二輪車の場合について解析する。駆動伝達系の固体摩擦トルクを T_f [N・m] とする。(T_f は車軸部分に換算したトルクで、車輪を ϕ 方向に回転させるのを正の方向とする。) このとき、平行二輪車の状態方程式は、(2.12) に代わって、次式で表わすことができる。

$$\dot{x} = Ax + b\left(u - \frac{T_f}{G}\right), \quad x \triangleq [\phi \quad \theta \quad \dot{\phi} \quad \dot{\theta}]' \quad (5.18)$$

操作量 u は、状態フィードバック制御の場合には、(5.1) で $r_d = 0$ と置いた

$$u = -k'x \quad (5.19)$$

であり、汎関数オブザーバによる安定化では、(5.2) で $r_d = 0$ と置いた

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= \alpha x_1 + Ex_1 + Fu, \quad x_1 \triangleq [\phi \quad \theta]' \\ \hat{f} &= \alpha + h'x_1 \\ u &= -\hat{f} \end{aligned} \quad (5.20)$$

$$E \triangleq k_2' \{A_{21} + \alpha(A_{22} - \alpha I)\}$$

$$F \triangleq k_2' b_2, \quad h' \triangleq k_1' + k_2'(A_{22} - \alpha I)$$

であり、そして逆微分による安定化では、(5.3) すなわち

$$u = -k_1' x_1 - \frac{s}{1+Ts} (k_2' x_1) \quad (5.21)$$

である。また、固体摩擦トルク T_f は

$$T_f = -C_f \operatorname{sgn}(\dot{\phi}), \quad C_f = 0.66 \text{ [N}\cdot\text{m]} \quad (5.22)$$

とする。

Σ の制御則の場合も全システムは、線形要素 $S(s)$ と非線形要素 N に分けて、図5.14の形にまとめることができる。線形要素の伝達関数 $S(s)$ は、制御則(5.19)、(5.20)、および(5.21)に対応して、それぞれ次式のようになる。

$$S(s) = -\frac{s m_4(s)}{d_c(s)} \quad (5.23)$$

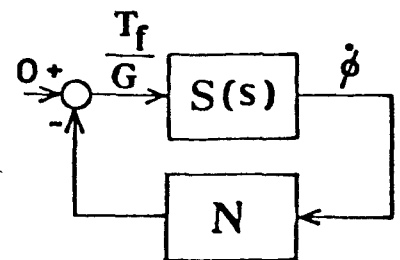


図5.14

$$S(s) = - \frac{S(s+F-d)M_1(s)}{(s-d)d_c(s)} \quad (5.24)$$

$$S(s) = - \frac{S(1+Ts)M_1(s)}{Ts(d(s)+k_{11}M_1(s)+k_{12}M_2(s))+d_c(s)} \quad (5.25)$$

ここで、 $M_1(s)$ 、 $M_2(s)$ 、 $d(s)$ は (2.16) で与えられるところの伝達関数の分子および分母の多項式、 $d_c(s)$ は閉ループ特性多項式 (状態フィードバックによる)、 k_{11} 、 k_{12} はベクトル k_1 の第1成分と第2成分である

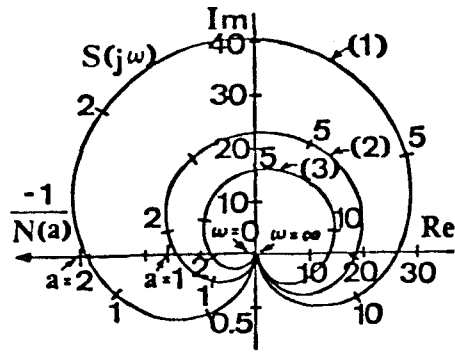
記述関数法は厳密な方法ではないが、持続振動 (リミットサイクル) の存在を解析する実用上便利な方法である。いま、リミットサイクルが存在するとすると、非線形要素 N は (5.22) のようなリレー要素であるから、同期関数 T_f は正弦波ではない。しかし、線形部分の伝達関数 $S(s)$ が、周波数の増加に伴って減衰の増す特性であるとする、第1近似としては、 T_f の基本波成分のみが $S(s)$ の出力側に伝達されると考えることができる。従って、非線形要素 N の入力 ϕ は正弦波すなわち $\phi = a \sin \omega t$ と仮定することができる。(5.22) で表わされる非線形要素 N の記述関数 $N(a)$ 、すなわち正弦波入力と出力の基本波との入出力特性は

$$N(a) = \frac{4C_f}{\pi G a} \quad (5.26)$$

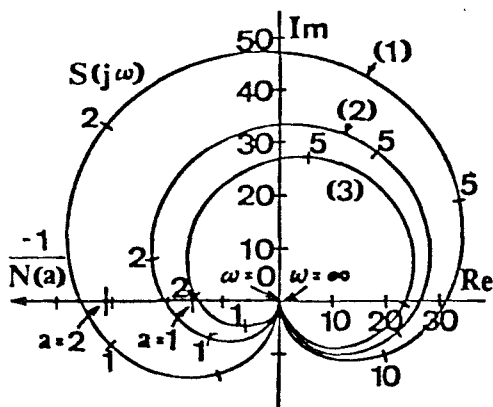
となる。持続振動存在の条件は、 $1 + N(a)S(j\omega) = 0$ 、すなわち

$$S(j\omega) = - \frac{1}{N(a)} \quad (5.27)$$

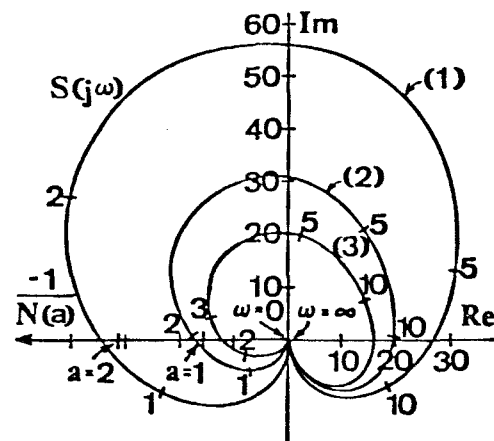
である。²⁹⁾ そこで、状態フィードバックによる安定化、汎関数オブザーバによる安定化、および近似微分による安定化の三つの場合について、 $S(j\omega)$ の Nyquist 軌跡と $-\frac{1}{N(a)}$ の軌跡を表5.1 ~ 表5.4の数値を用いて描くと、それぞれ図5.15の(a)、(b)、(c)が得られる。図の軌跡(1)、(2)、(3)は閉ループ固有値設定が-3、-4、-5の場合にそれぞれ対応している。 $S(j\omega)$ の軌跡は ω が0から ∞ に近づく間に、原点から出発して、第3象限、第2象限、第1象限、第4象限を順次過って原点に向かっている。これに対し $-\frac{1}{N(a)}$ の軌跡は、 a が0から ∞ に近づく間に、原点から出発して実軸を負の方向に向かう。図5.15のすべての場合に両軌跡は交わっており、これはリミットサイクルが存在することを示している。交差における ω と a が、持続振動の角振動数と ϕ の振幅の推定値を表わしており、これから ν と θ の振幅も推定することができる。これを表5.24に示す。こ



(a) 状態フィードバックによる安定化



(b) 汎関数オブザーバによる安定化



(c) 近似微分による安定化

の解析結果を表5.5の実験結果と比較すると、固体摩擦を(5.22)で近似したことなどを考えると、かなり良く合っている。従って、リミットサイクルの主な原因は、駆動伝達系の固体摩擦(モータの不感帯も含める)であるといえる。

図5.15 $S(j\omega)$ のNyquist軌跡と $-\frac{1}{N(a)}$ の軌跡
(平行二輪車の場合)

表5.24 記述関数法による解析から求めた平行二輪車のリミットサイクルの周期と r および θ の振幅の推定値

	-3	-4	-5
状態フィードバックによる安定化	5.1sec 0.17m 0.034rad	3.8sec 0.059m 0.019rad	3.0sec 0.027m 0.012rad
汎関数オブザーバによる安定化	5.1sec 0.21m 0.039rad	3.9sec 0.090m 0.027rad	3.2sec 0.051m 0.021rad
近似微分による安定化	4.4sec 0.17m 0.042rad	3.3sec 0.061m 0.025rad	2.5sec 0.029m 0.017rad

また、解析と実験の結果から次の事がわかる。

- 1) 閉ループ固有値を s 平面において、より左に設定すれば、リミットサイクルの振幅は小さくなる傾向がある。
- 2) 固体摩擦の大きさが異なっても、リミットサイクルの周期、従って振動数には影響しない。
- 3) リミットサイクルの振幅は固体摩擦の大きさに比例する。

(b) 直線変位型倒立振り子：駆動伝達系にのみ固体摩擦がある場合

次に、直線変位型倒立振り子について、駆動伝達系にのみ固体摩擦がある場合を解析する。駆動伝達系の固体摩擦力を F_f [N] とする。(おもりを右方向に物動かせるのを正の方向とする。) このとき、直線変位型倒立振り子の状態方程式は、(2.31) に代わって、次式で表わすことができる。

$$\dot{x} = Ax + b\left(u + \frac{F_f}{G}\right), \quad x = [r \quad \theta \quad \dot{r} \quad \dot{\theta}]' \quad (5.28)$$

操作量 u は、状態フィードバック制御の場合には

$$u = -k'x \quad (5.29)$$

であり、最小次元状態オブザーバによる安定化では、(5.4) すなわち

$$\begin{aligned} \dot{\hat{x}} &= A_{21}x_1 + (A_{22}-L)\hat{x}_2 + b_2u, \quad x_1 = [r \quad \theta]' \\ \hat{x}_2 &= z + Lx_1 \end{aligned} \quad (5.30)$$

$$u = -k_1'x_1 - k_2'\hat{x}_2, \quad k' = [k_1' \quad k_2']$$

である。また、固体摩擦力 F_f は

$$F_f = -C_f \operatorname{sgn}(\dot{r}), \quad C_f = 3.08 \text{ [N]} \quad (5.31)$$

とする。

全システムは、線形要素 $S(s)$ と非線形要素 N に分けて、図5.16の形にまとめることができる。線形要素の伝達関数 $S(s)$ は、制御則(5.29)、(5.30)に対応して、それぞれ次式のようになる。

$$S(s) = \frac{Sm_1(s)}{d_c(s)} \quad (5.32)$$

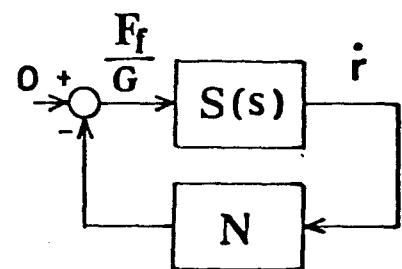


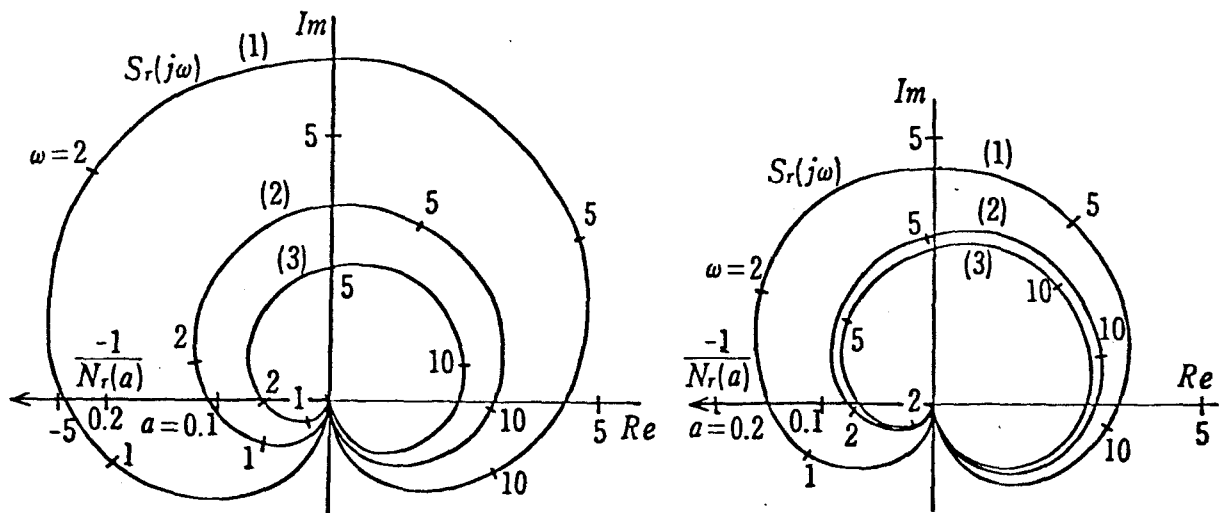
図5.16

$$S(s) = \frac{s m_1(s) \{1 + k_2'(sI - A_{22} + L)^{-1} b_2\}}{d_c(s)} \quad (5.33)$$

ここで、 $m_1(s)$ は (2.35) で与えられる伝達関数の分子多項式、 $d_c(s)$ は閉ループ特性多項式である。いま、 r が正弦波である、すなわち $\dot{r} = a \sin \omega t$ と仮定すると、非線形要素 N の記述関数は次式のようになる。

$$N(a) = \frac{4C_f}{\pi G a} \quad (5.34)$$

状態フィードバックによる安定化と最小次元状態オブザーバによる安定化の二つの場合について、 $S(j\omega)$ の Nyquist 軌跡と $-\frac{1}{N(a)}$ の軌跡を表 5.6 ~ 表 5.8 の数値を用いて描くと、それぞれ図 5.17 の (a)、(b) が得られる。図の軌跡 (1)、(2)、(3) は閉ループ固有値が -3 、 -4 、 -5 の場合にそれぞれ対応している。 $S(j\omega)$ の軌跡は、 $\omega=0$ のときに原点から出発し、 ω が増加するに従って第 3 象限、第 2 象限、第 1 象限、第 4 象限を順次巡って原点に向かっている。これに対し、 $-\frac{1}{N(a)}$ の軌跡は a が増加するに従い、原点から出発して実軸を負の方向に向かっている。両軌跡は交わっており、リミットサイクルが存在する。交差の ω と a から、リミットサイクルの周期と振幅の推定値を求めると、表 5.25 を得る。



(a) 状態フィードバックによる安定化

(b) 最小次元状態オブザーバによる安定化

図 5.17 $S(j\omega)$ の Nyquist 軌跡と $-\frac{1}{N(a)}$ の軌跡

(直線変位型倒立振子：駆動伝達系の固体摩擦の場合)

表5.25 記述関数法による解析から求めた直線変位型倒立振子のリミットサイクルの周期とトおよび θ の振幅の推定値

	-3	-4	-5
状態フィードバックによる安定化	5.06 sec 0.188 m 0.034 rad	3.80 sec 0.066 m 0.011 rad	3.04 sec 0.030 m 0.0050 rad
最小次元状態オブザーバによる安定化	4.59 sec 0.112 m 0.02 rad	2.98 sec 0.036 m 0.006 rad	1.77 sec 0.019 m 0.0028 rad

この解析結果を表5.10の実験結果と比較すると、記述関数による近似を行なっていることと固体摩擦の測定誤差などを考えると、良く合っているといえる。従って、次に行なう支持軸の固体摩擦の解析結果も含めて考えると、直線変位型倒立振子のリミットサイクルの主な原因も、平行二輪車の場合と同じく、駆動伝達系の固体摩擦（モータの不感帯も含める）であるといえる。また、解析と実験の結果から次の事がわかる。

- 1) 閉ループ固有値を S 平面で、より左に設定すれば、リミットサイクルの振幅は小さくなる傾向がある。
- 2) 駆動伝達系の固体摩擦の大きさが異なっても、リミットサイクルの周期、従って振動数は変わらない。
- 3) リミットサイクルの振幅は伝達系の固体摩擦の大きさに比例する。

(C) 直線変位型倒立振子：支持軸にのみ固体摩擦がある場合

次に、直線変位型倒立振子において、支持軸にのみ固体摩擦がある場合について考える。支持軸の固体摩擦トルクを T_f [N・m]とする。（倒立振子を θ の正の方向に回転させるような場合を正とする。）このとき、直線変位型倒立振子の状態方程式は、(2.31)に代わって、次式で表わすことができる。

$$\dot{x} = Ax + bu + b_f T_f, \quad x = [r \quad \theta \quad \dot{r} \quad \dot{\theta}]' \quad (5.35)$$

ここで、

$$b_f = \left[0, 0, -\frac{m_b}{D}, \frac{m_a}{D} \right]' \quad (5.36)$$

操作量 u は、状態フィードバック制御の場合には (5.29)、最小次元状態オブザーバによる安定化の場合には (5.30) で与えられる。また、固体摩擦トルク T_f は

$$T_f = -C_f \operatorname{sgn}(\dot{\theta}), \quad C_f = 0.0410 \text{ [N}\cdot\text{m]} \quad (5.37)$$

とする。

全システムは、線形要素 $S(s)$ と非線形要素 N に分けて、図 5.18 の形にまとめることができる。線形要素の伝達関数 $S(s)$ は、制御則 (5.29)、(5.30) に対応して、それぞれ次式のようになる。

$$S(s) = \frac{s \left\{ n_{f\theta}(s) + \frac{G}{D} (k_{11} + k_{21}s) \right\}}{d_c(s)} \quad (5.38)$$

$$S(s) = \frac{s \left\{ n_{f\theta}(s) + \frac{G}{D} (k_{11} + k_{21}s) + n_2(s) k_2' (sI - A_{22} + L)^{-1} b_{f2} \right\}}{d_c(s)} \quad (5.39)$$

ここで、 $n_2(s)$ は (2.35) で与えられる u から θ への伝達関数の分子多項式、 $n_{f\theta}(s)$ は T_f から θ への伝達関数の分子多項式で

$$n_{f\theta}(s) = \frac{m_a}{D} s^2 + \frac{C_2}{D} s \quad (5.40)$$

k_{11} , k_{21} はベクトル k の第 1 成分と第 3 成分、 b_{f2} はベクトル b_f の第 3 成分と第 4 成分からなるベクトルである。また、 $d_c(s)$ は閉ループ特性多項式である。

持続振動の存在を調べるため、 $\dot{\theta} = a \sin \omega t$ と仮定する。このとき (5.37) で表わされる非線形要素 N の記述関数は

$$N(a) = \frac{4 C_f}{\pi a} \quad (5.41)$$

となる。状態フィードバックによる安定化と最小次元状態オブザーバによる安定化の二つの場合について、 $S(j\omega)$ の Nyquist 軌跡と $-\frac{1}{N(a)}$ の軌跡を表 5.6 ~ 表 5.8 の数値を用いて描くと、それぞれ図 5.19 の (a), (b) が得られる。図の軌跡 (1), (2), (3) は閉ループ固有値設定が -3 , -4 , -5 の場合にそれぞれ

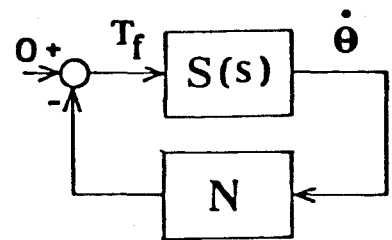
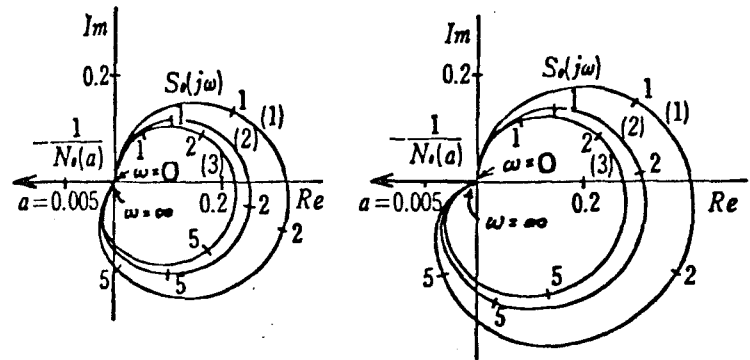


図 5.18

れ対応している。 $S(j\omega)$ の軌跡は原点から出発し、第1象限、第4象限、第3象限を順次通って原点に向かっていく。これに対し、 $-\frac{1}{N(a)}$ の軌跡は原点から出発して実軸を負の方向に向かっていく。両軌跡には原点以外に交点がなく、従ってリミットサイクルは生じない。

すなわち、支持軸の固体摩擦のみの存在では、リミットサイクルは生じない。



(a) 状態フィードバックによる安定化

(b) 最小次元状態オブザーバによる安定化

図 5.19 $S(j\omega)$ の Nyquist 軌跡と $-\frac{1}{N(a)}$ の軌跡
(直線変位型倒立振子：支持軸の固体摩擦の場合)

5.5.2 可制御条件についての考察

各倒立振子の実験装置はもちろん可制御条件を満たしている。直線変位型倒立振子および回転変位型倒立振子の $l_2 > 0$ の場合と $l_2 < 0$ の場合について、それぞれ水の可制御条件 (2.38), (2.57) の両辺の値を、表 5.26 に示す。右辺は振子全体の相当単振子の長さを示している。この三つの場合とも、可制御条件は十分満たされている。しかし、回転変位型の $l_2 < 0$ の場合には、良い実験結果が得られなかった。この理由の一つとして、この場合が他の場合に比して安定化しにくい、あるいは制御しにくいという構造を持っているのではないかと考えている。

表 5.26 内部物体を物動させる型式の倒立振子実験装置の可制御条件 (2.38), (2.57) の両辺の値

	左辺	右辺
直線変位型 (2.38)式	532 ± 4 mm	959 mm
回転変位型 ($l_2 > 0$) (2.57)式	136 ± 0 mm	467 mm
回転変位型 ($l_2 < 0$) (2.57)式	844 ± 0 mm	585 mm

えられる。この場合の実験の結果，図5.13(b)を見ると，操作量 u が直流増幅器の飽和する入力電圧，約 $\pm 0.6V$ を大きく越えており，線形フィードバック制御が実現できていないことがわかる。これは，フィードバック係数が大きいためである。そこで，回転変位型の $l_2 > 0$ の場合と $l_2 < 0$ の場合について，同じ閉ループ固有値の -5 （4重）を設定する場合の状態フィードバック係数の値を比較すると，表5.18および表5.21から

$$l_2 > 0 \text{ のとき } \quad k' = K \tilde{k}' = [1.74, 13.4, 0.0997, 2.93]$$

$$l_2 < 0 \text{ のとき } \quad k' = K \tilde{k}' = [-3.06, 24.9, -1.06, 6.07]$$

となり， $l_2 < 0$ の場合の方がかなり大きな値となっている。このことから，同じ固有値を設定するときの状態フィードバック係数の絶対値の大小が，制御の容易さ，困難さの一つの指標になると考えることができる。

次に，可制御条件の不等式が満たされているけれども，両辺の値が非常に近いような場合について考える。直線変位型倒立振り子について考え，簡単のため支持軸の粘性摩擦定数 C_1 はゼロであるとする。直線変位型倒立振り子の伝達関数(2.34)，(2.35)に，固有値設定により状態フィードバック係数を求める式(4.18)を適用して $C_1 = 0$ と置くと，次式を導くことができる。

$$k = \frac{D}{G(m_2 g I_0 - m l g m_b)} \begin{bmatrix} 0 & m_2 g & 0 & m_b \\ 0 & m l g & 0 & I_0 \\ m_2 g & 0 & m_b & 0 \\ m l g & 0 & I_0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{d}_1 - \frac{I_0 C_2}{D} \\ \hat{d}_2 + \frac{m_a m l g - 2 m_b m_2 g}{D} \\ \hat{d}_3 + \frac{m l g C_2}{D} \\ \hat{d}_4 + \frac{m_2^2 g^2}{D} \end{bmatrix} \quad (5.42)$$

この式の分母は

$$G(m_2 g I_0 - m l g m_b) = G m_2 m l g \left\{ l_e - \left(l_2 + \frac{m_{2b}}{m_2} \right) \right\}$$

と変形できる。 $C_1 = 0$ のときの可制御条件は，(2.38)より $l_2 + \frac{m_{2b}}{m_2} \neq l_e$ であるが，この両辺の値を等しい値に近づけてゆくと，(5.42)の分母はゼロに近づき，分子は通常ゼロでない定数に近づく。従って，可制御条件の両辺の値が非常に近い場合には，状態フィードバック係数は非常に大きな値となり，實際上安

定化は不可能である。

以上のように、可制御条件が満たされていても、 ϵ の両辺の値が非常に近い場合は安定化が困難である。また、制御の容易さ、困難さは、同じ固有値指定によるフィードバック係数の絶対値の大小で、ある程度判断することができる。

5.6 おわりに

本章では倒立振子の安定化制御を実験的に検討した結果、汎関数オブザーバによる安定化、最小次元状態オブザーバによる安定化、近似微分による安定化の三つの方法とも、倒立振子を安定に倒立させることができた。オブザーバによる安定化は、近似微分を用いる場合のようにフィルタをどうするかを考えることなく設計できるので、有用である。特に汎関数オブザーバによる安定化は、最小次元状態オブザーバに比べてかなり簡単な制御回路により同等以上の制御結果が得られ、非常に有用である。本章の結果により、フィードバック制御における汎関数オブザーバの有効性が明らかとなった。また、3章で提案した汎関数オブザーバの構成法の有用性も示された。

安定に倒立を維持する倒立振子には、多くの場合に微小な持続振動が生じた。本章ではこれについて検討を加え、駆動伝達系の固体摩擦（モータの不感帯も含める）がこの主な原因であることがわかった。

第6章 内部検出情報に基づく倒立振子の安定化

6.1 はじめに

前章では3種類の倒立振子システムを、出力として測定した二つの位置変数をフィードバックすることによりそれぞれ安定化した。ここでは、二つの位置変数のうちの一つである倒立振子の姿勢角は、床を利用する外部的な方法で測定した。しかし、歩行ロボットの製作などを考えると、床に依存することなく内部検出情報のみに基づいて安定化できることが望ましい。ところで、姿勢角以外のもう一つの位置変数のみを出力とする場合も、3種類の倒立振子は通常、可観測である。従って、第4章で示したように、オブザーバを用いたフィードバック制御により、理論的には安定化可能である。しかし、例えば平行二輪車の場合には、操作量 u から車輪の相対角変位 ϕ への伝達関数は、表5.2より極3.82と零実3.34が近い値であり、直線変位型倒立振子の場合には、操作量 u からおもりの位置 x への伝達関数は、極3.20と零実3.19が非常に近い値にある。このことから、姿勢角以外のもう一つの位置変数を出力とする場合可観測性の程度が低く、従ってこれをフィードバックするだけでは安定化が困難であると考えられる。従って、内部検出情報のみに基づいて倒立振子を安定化するためには、内部的に姿勢角を測定するなどの別の方法を用いる必要がある。ジャイロスコープを用いれば、姿勢角の内部的な直接測定も不可能ではないが、手法としては平凡である。本研究では、倒立振子に補助振子を取り付ける方法を提案する。第2章の倒立振子システムに補助振子を取り付け、倒立振子と補助振子のなす角を出力として測定することにすると、2出力6次元系となる。このとき、補助振子を取り付けないで姿勢角以外の位置変数を出力とする1出力4次元系と比べて、可観測性の程度が高くなり安定化が容易になると考える。本章ではこの方法を平行二輪車に適用し、実験的に検討する。

6.2 補助振子を取り付けた平行二輪車の基礎方程式

制御対象は、図6.1に示すように、2.2節で示した平行二輪車に対し、姿勢角 θ を測定するための補助車輪を取りはずし、内部検出情報を増すための補助振子を取り付けたものである。このシステムの入力は、モータの電機子側に接続された直流電力増幅器の入力端電圧 u [V]であり、出力はそれぞれポテンシオメータで測定される車輪の相対角変位 ϕ [rad]と補助振子の車対に対する相対角変位 ψ [rad]である。

座標系を図6.2に示す。基礎方程式を導くにあたり2.2節と同様の仮定を設け、さらに補助振子の支点における摩擦として粘性摩擦のみを考慮するものとする。

以下の解析では、2.2節で定義した記号を用い、補助振子に関する記号は次のように定める。

- ψ 補助振子と車体のなす角 [rad]
- m_s 補助振子の質量 [kg]
- I_s 補助振子の支点まわりの慣性モーメント [$\text{kg}\cdot\text{m}^2$]
- l_s 補助振子の重心から支点までの長さ [m]
- l_t 補助振子の支点の車軸からの高さ [m]
- c_s 補助振子の支点における粘性摩擦定数 [$\text{kg}\cdot\text{m}^2/\text{sec}$]

Lagrange の運動方程式を用いることにより、このシステムを記述する微分方程式として、次式を導くことができる。

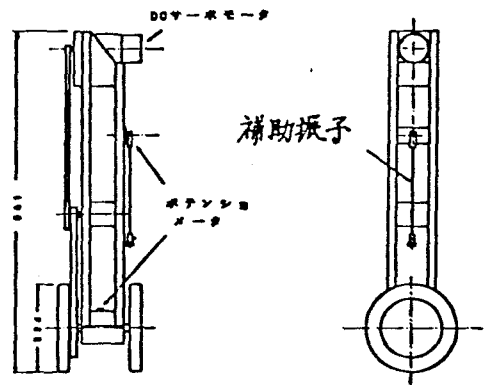


図6.1 補助振子を取り付けた平行二輪車

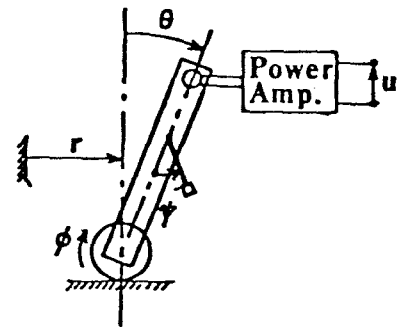


図6.2 座標系

$$\begin{aligned}
& \begin{bmatrix} I_a + I_{sa} & \tilde{I}_b + \tilde{I}_{sb} & m_s l_s a \cos(\psi - \theta) \\ \tilde{I}_b + \tilde{I}_{sb} & \tilde{I}_o + \tilde{I}_{so} & \tilde{I}_{sc} \\ m_s l_s a \cos(\psi - \theta) & \tilde{I}_{sc} & I_s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\phi} \\ \ddot{\theta} \\ \ddot{\psi} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} -c_1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & -c_s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\phi} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ (m_s l_t + m_s l_s)g & m_s l_s g \\ 0 & -m_s l_s g \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sin \theta \\ \sin(\psi - \theta) \end{bmatrix} \\
&+ \begin{bmatrix} (m_s l_t + m_s l_s) a \sin \theta & m_s l_s l_t \sin(\psi - \theta) \\ (m_s l_t + m_s l_s) a \sin \theta - m_s l_s l_t \sin \psi & m_s l_s a \sin(\psi - \theta) + m_s l_s l_t \sin \psi \\ m_s l_s l_t \sin \psi & 0 \end{bmatrix} \\
&\times \begin{bmatrix} \dot{\theta}^2 \\ (\dot{\psi} - \dot{\theta})^2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -G \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u \quad (6.1)
\end{aligned}$$

ここで

$$\begin{aligned}
I_a &= m a^2 + I_2 + I_d, \quad \tilde{I}_b = m a^2 + I_2 + I_\beta + m_s l_t a \cos \theta \\
\tilde{I}_o &= m a^2 + I_1 + I_2 + 2 m_s l_t a \cos \theta, \quad I_{sa} = m_s a^2 \\
\tilde{I}_{sb} &= m_s a^2 + m_s l_t a \cos \theta - m_s l_s a \cos(\psi - \theta) \\
\tilde{I}_{so} &= I_s + m_s a^2 + m_s l_t^2 + 2 m_s l_t a \cos \theta - 2 m_s l_s a \cos(\psi - \theta) - 2 m_s l_s l_t \cos \psi \\
\tilde{I}_{sc} &= -I_s + m_s l_s l_t \cos \psi + m_s l_s a \cos(\psi - \theta) \quad (6.2) \\
c_1 &= c_1' + \frac{N^2 K_t K_v}{R_a}, \quad G = \frac{N K_t K_a}{R_a}
\end{aligned}$$

(6.1) を $\phi = \theta = \psi = \dot{\phi} = \dot{\theta} = \dot{\psi} = 0$ の近傍で線形化することにより、次の微分方程式を得る。

$$\begin{aligned}
& \begin{bmatrix} I_a + I_{sa} & m_s l_s a & I_b + I_{sb} \\ I_b + I_{sb} & I_{sc} & I_o + I_{so} \\ m_s l_s a & I_s & I_{sc} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\phi} \\ \ddot{\psi} \\ \ddot{\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -c_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -c_s & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\phi} \\ \dot{\psi} \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} \\
&+ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & m_s l_s g & \{m_s l_t + m_s(l_t - l_s)\}g \\ 0 & -m_s l_s g & m_s l_s g \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi \\ \psi \\ \theta \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -G \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u \quad (6.3)
\end{aligned}$$

ここで

$$\begin{aligned} I_a &= ma^2 + I_2 + I_d, & I_b &= ma^2 + I_2 + I_\beta + m_1 l_1 a \\ I_o &= ma^2 + I_1 + I_2 + 2m_1 l_1 a, & I_{sa} &= m_s a^2 \\ I_{sb} &= m_s a(a + l_t - l_s), & I_{sc} &= -I_s + m_s l_s(a + l_t) \\ I_{so} &= I_s + m_s(a + l_t)(a + l_t - 2l_s) \end{aligned} \quad (6.4)$$

なお、(6.3)式はまとめて次のように書くことができる。

$$P \ddot{x} = Q \dot{x} + R x + d u, \quad x = [\phi \ \psi \ \theta]^\prime \quad (6.3)'$$

ここで、 P , Q , R , および d は対応する行列またはベクトルである。

(6.3)から、状態方程式

$$x = [\phi \ \psi \ \theta \ \dot{\phi} \ \dot{\psi} \ \dot{\theta}]^\prime \quad (6.5)$$

$$\dot{x} = A x + b u \quad (6.6)$$

を容易に求めることができる。ここで、 A および b は次の形となる。

$$A = \begin{bmatrix} 0 & I \\ P^{-1}R & P^{-1}Q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & a_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{45} & 0 \\ 0 & a_{52} & a_{53} & a_{54} & a_{55} & 0 \\ 0 & a_{62} & a_{63} & a_{64} & a_{65} & 0 \end{bmatrix} \quad (6.7)$$

$$b = \begin{bmatrix} 0 \\ P^{-1}d \end{bmatrix} = [0 \ 0 \ 0 \ b_4 \ b_5 \ b_6]^\prime$$

また、特に $c_s = 0$ のときには、 $a_{45} = a_{55} = a_{65} = 0$ となる。

6.3 安定化制御系の構成

ここでは、最小次元状態オブザーバによる安定化制御を考える。車輪の相対角変位 ϕ と補助振子の相対角変位 ψ を出力として測定しているので、制御対象 (6.6), (6.7) を次の形で表わすのが便利である。

$$x_1 = [\phi \ \psi]', \quad x_2 = [\theta \ \dot{\theta} \ \dot{\psi} \ \dot{\theta}]' \quad (6.8)$$

$$\dot{x}_1 = A_{12} x_2 \quad (6.9)$$

$$\dot{x}_2 = A_{21} x_1 + A_{22} x_2 + b_2 u$$

ここで、係数 A_{12} , A_{21} , A_{22} , b_2 は A , b の対応する部分行列である。入力 u と出力 x_1 から、システムの内部状態 x_2 を推定する最小次元状態オブザーバは、(3.18) より、次式で構成することができる。

$$\begin{aligned} \dot{z} &= (A_{22} - LA_{12})z + \{A_{21} + (A_{22} - LA_{12})\}x_1 + b_2 u \\ \hat{x}_2 &= z + Lx_1 \end{aligned} \quad (6.10)$$

あるいは、変形してより簡単な形にすると

$$\begin{aligned} \dot{z} &= A_{21}x_1 + (A_{22} - LA_{12})\hat{x}_2 + b_2 u \\ \hat{x}_2 &= z + Lx_1 \end{aligned} \quad (6.11)$$

となる。制御則は

$$u = -k_1' x_1 - k_2' \hat{x}_2 \quad (6.12)$$

とする。閉ループ系 (6.9), (6.11), (6.12) は、まとめて次式のように表わすことができる。

$$e = \hat{x}_2 - x_2, \quad k' = [k_1' \ k_2'] \quad (6.13)$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{e} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A - bk' & -bk_2' \\ 0 & A_{22} - LA_{12} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ e \end{bmatrix} \quad (6.14)$$

閉ループ系の固有値は、 $A - bk'$ の固有値と $A_{22} - LA_{12}$ の固有値からなる。従って (A, b) が可制御かつ (A_{12}, A_{22}) が可観測ならば、 k , L を適当に選ぶことにより、閉ループ系を安定にすることができる。

6.4 実験的検討

前章の実験に用いた平行二輪車のサーボモータが故障したので、本章の実験は、サーボモータと直流電力増幅器を別のものに取り替えて行なった。実験装置の概要を、表6.1に示す。

平行二輪車および補助振子のパラメータの値を、表6.2, 表6.3にそれぞれ

表 6.1 補助振子を取り付けた平行二輪車実験装置の概要

直流サ-ボモ-タ	型式	M605-002 (山洋電気)
	励磁方式	永久磁石
	定格出力	50 W
	電機子電圧	75 V
	電機子電流	1.1 A
	電機子慣性能率	$0.33 \times 10^{-3} \text{ kgf}\cdot\text{cm}\cdot\text{sec}^2$
	機械的時定数	12 msec (25°C)
	電氣的時定数	1.44 msec (25°C)
	電機子抵抗	13.2 Ω (25°C)
	電機子インダクタンス	19 mH (25°C)
	トルク定数	1.91 kgf·cm/A
	逆起電力定数	20.3 V/Krpm
質量	1.1 kg	
直流電力増幅器	ゲイン	9.985 V/V
	入力電圧	$\pm 6 \text{ V}$
	出力電圧	$\pm 60 \text{ V}$
ポテンシオメータ (ϕ 測定用)	型式	CPP45 (緑測器)
		1回転形, 5K Ω
	変換率	0.6517 rad/V (*)
ポテンシオメータ (ψ 測定用)	型式	CP-2U-32 (緑測器)
		無接点形
	変換率	0.01767 rad/V (**)

* 両端30V負荷のとき, ** 両端5V負荷, 約50倍のアンプで増幅したとき.

示す。この値から、(6.3) ~ (6.7)により状態方程式を計算すると、表6.4を得る。閉ル-フ系の固有値は

$$(-14.5, -2.83, 0, \pm 5.99j, 3.81)$$

である。複素固有値 $\pm 5.99j$ は補助振子によるものであり、その他の固有値は平行二輪車本来のものと考えることができる。

前節で示した最小次元状態オブザーバによる制御器(6.11), (6.12)を具体的に構成するためには、パラメータ ρ , L を決めなければならぬ。ここでは閉ル-フ固有値を設定することにより、 ρ と L を決めることとした。 $A-b\rho'$ の固有値を定めると、4.2節の方法により、フィードバック係数 ρ が一意に求め

られる。しかし、 $A_{22} - LA_{12}$ の固有値を定めても、 4×2 行列 L は一意に決まらずに無数に存在する。そこで、 4×2 行列 L の第 1 列ベクトルを L_1 、第 2 列ベクトルを L_2 、 2×4 行列 A_{12} の第 1 行ベクトルを $A_{12}(1)$ 、第 2 行ベクトルを $A_{12}(2)$ と表わすと

$$A_{22} - LA_{12} = A_{22} - L_1 A_{12}(1) - L_2 A_{12}(2) \quad (6.15)$$

となることを利用して、4.2 節の方法を用いて、まず中間段階として設定した図

表 6.2 平行二輪車のパラメータの値

$m = 6.610 \text{ kg}$	$l_1 = 0.4027 \text{ m}$
$m_1 = 4.415 \text{ kg}$	$a = 0.112 \text{ m}$
$m_2 = 2.195 \text{ kg}$	$c_1 = 0.661 \text{ kg} \cdot \text{m}^2 / \text{sec}$
$I_1 = 1.031 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$	$G = 2.11 \text{ N} \cdot \text{m} / \text{V}$
$I_2 = 0.0071 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$	$g = 9.8 \text{ m} / \text{sec}^2$
$I_\alpha = 0.0144 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$	$I_a = 0.1049 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$
$I_\beta = 0.00173 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$	$I_b = 0.2908 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$
	$I_o = 1.519 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$

表 6.3 補助振子のパラメータの値

$m_s = 0.0902 \text{ kg}$	$l_s = 0.218 \text{ m}$
$I_s = 0.005433 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$	$l_t = 0.492 \text{ m}$
$c_s = 0 \text{ kg} \cdot \text{m}^2 / \text{sec}$	

表 6.4 補助振子を取り付けた平行二輪車の状態方程式

$$\dot{x} = Ax + bu, \quad x = [\phi \quad \psi \quad \theta \quad \dot{\phi} \quad \dot{\psi} \quad \dot{\theta}]'$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -0.05185 & -70.11 & -13.57 & 0 & 0 \\ 0 & -35.79 & 34.42 & 2.419 & 0 & 0 \\ 0 & 0.2859 & 24.85 & 2.597 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -43.30 \\ 7.722 \\ 8.289 \end{bmatrix}$$

固有値を行列 $A_{22} - L_1 A_{12}(1)$ が持つような L_1 を求め、次に最終段階として設定した固有値を行列 $A_{22} - L_1 A_{12}(1) - L_2 A_{12}(2)$ が持つような L_2 を求めるというような2段階の手順で固有値設定を行なうこととし、この中間段階の固有値設定の自由度を用いて、制御器 (6.11), (6.12) の動特性を表わす行列 $A_{22} - L A_{12} - b_2 k_2'$ の固有値の不安定の程度が小さく (固有値の実部が小さく) なるようにすることとした。

制御器 (6.11), (6.12) は4次元のシステムであり複雑なので、ディジタル計算機 (ミニコンビュ - タ HP 2108A 21MX (YHP)) を用いてこれを實現することとした。このために、制御器 (6.11), (6.12) を次式のように差分化した。

$$\begin{aligned} z(i+1) &= z(i) + \{A_{21} x_1(i) + (A_{22} - L A_{12}) \hat{x}_2(i) + b_2 u(i)\} T \\ \hat{x}_2(i) &= z(i) + L x_1(i) \\ u(i) &= -k_1' x_1(i) - k_2' \hat{x}_2(i) \end{aligned} \quad (6.16)$$

ここで、 T はサンプリング周期であり、また各変数の引数 i および $i+1$ はそれぞれ iT , $(i+1)T$ を意味するものとする。(6.16) に基づいて作成したオブザ - バによる制御器のプログラムの例を付録3に示し、そのフローチャートを図6.3に示す。なお、サンプリング周期は8.25 msec であった。

以上の方法により、表6.4のパラメータの値により種々の固有値設定に対する k , L を求めて、安定化制御の実験を行なった。ミニコンによる平行二輪車安定化制御系の構成を、図6.4に示す。多くの実験を行なったが、平行二輪車は安定とならなかった。その時間応答の例を図6.5に示す。この例は

$$\begin{aligned} k &= [0.2256 \quad 19.65 \quad 10.49 \quad 0.6545 \quad -1.302 \quad 5.890]' \\ L &= \begin{bmatrix} 0.1043 & -10.57 & 1.676 & 2.187 \\ 2.587 & -11.61 & 12.00 & 13.59 \end{bmatrix}' \end{aligned}$$

を用いた場合であり、 $A - b k'$ の固有値は -4 (6重), $A_{22} - L A_{12}$ の固有値は $(-3.5, -3.5, -4, -4)$, 制御器の $A_{22} - L A_{12} - b_2 k_2'$ の固有値は、 $(-34.5, 0.942, 4.09 \pm 6.29j)$ である。

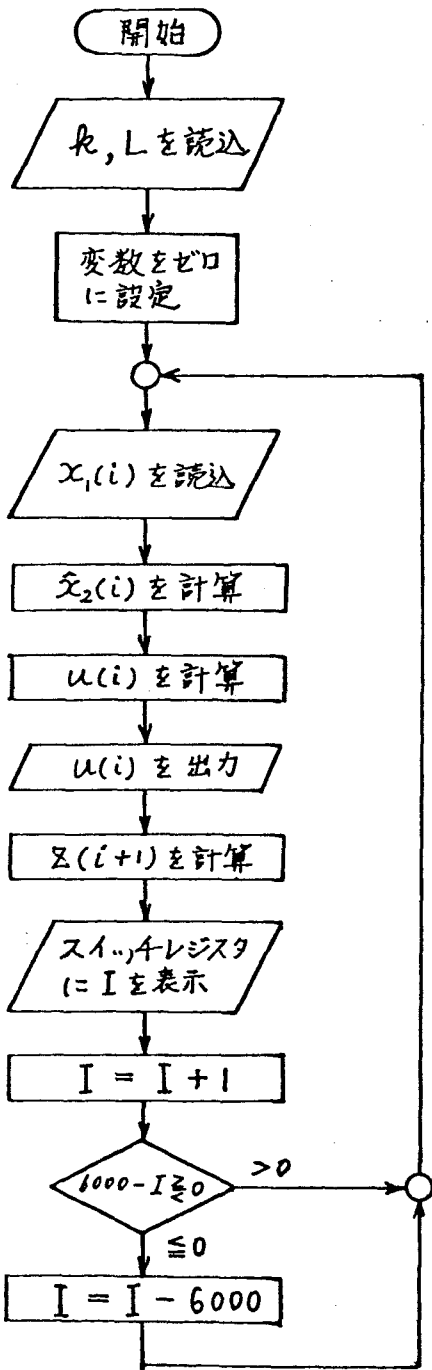


図 6.3 制御プログラムのフローチャート

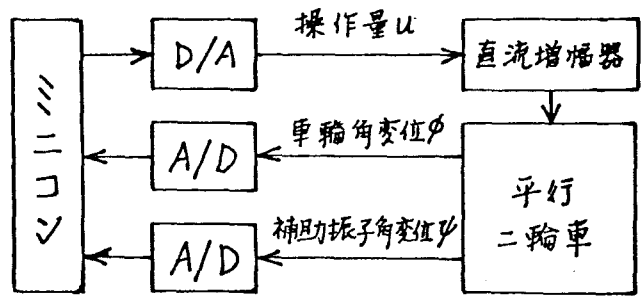


図 6.4 ミニコンによる平行二輪車安定化制御系の構成

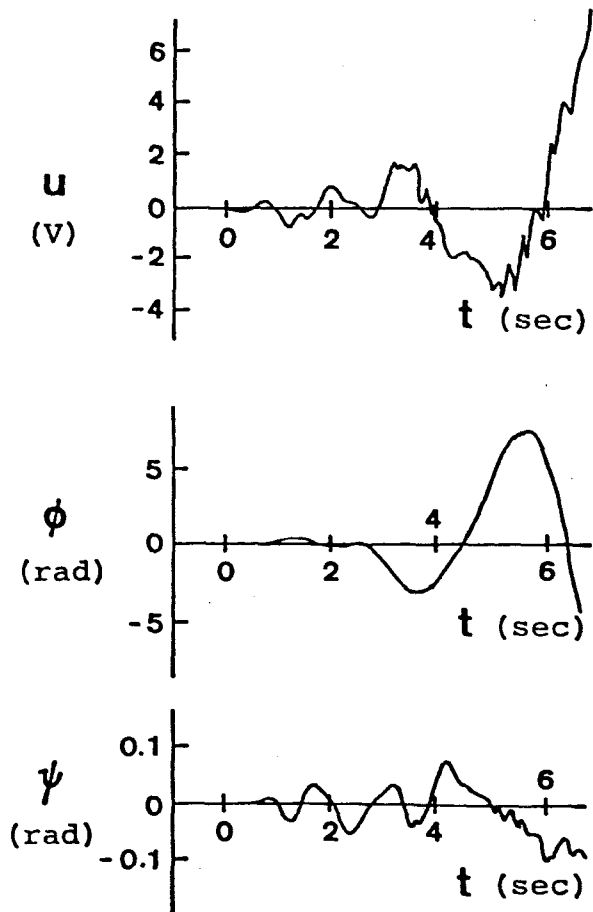


図 6.5 平行二輪車の時間応答の例 (表 6.4 のパラメータに基づいて R, L を定めた場合)

以上の実験において平行二輪車を安定化できなかったのは、駆動伝達系の固体摩擦を全く考慮しなかったためであると考えられる。そこで、まず固体摩擦を考慮して、等価ゲイン定数 G を修正する方法を試みた。伝達系の固体摩擦を測定すると、車軸部におけるトルクに換算して 0.54 [N·m] 程度であった。いま、 2 V の入力 u を加えた場合を考えると、車輪に伝わるトルクは

$$2.11 \text{ [N·m/V]} \times 2 \text{ [V]} - 0.54 \text{ [N·m]} = 3.68 \text{ [N·m]}$$

である。従って、 2 V の入力に対しては、ゲイン定数 G は実質的に

$$G = \frac{3.68 \text{ [N·m]}}{2} = 1.84 \text{ [N·m/V]}$$

である。このような考えに基づいて、種々の入力レベルに対する実質的なゲイン定数 G を求め、それぞれ G について (6.6), (6.7) から状態方程式を求めて、これに対する固有値設定から、 λ と L を定めて種々の安定化制御の実験を行った。この結果、 $G = 1.84$ を採用した場合、適当な固有値設定により λ と L を定めると、平行二輪車を安定化することができた。この時間応答の例を、図 6.6 に示す。 G をこのように修正すると、状態方程式の行列 A は変わらないが、 b は

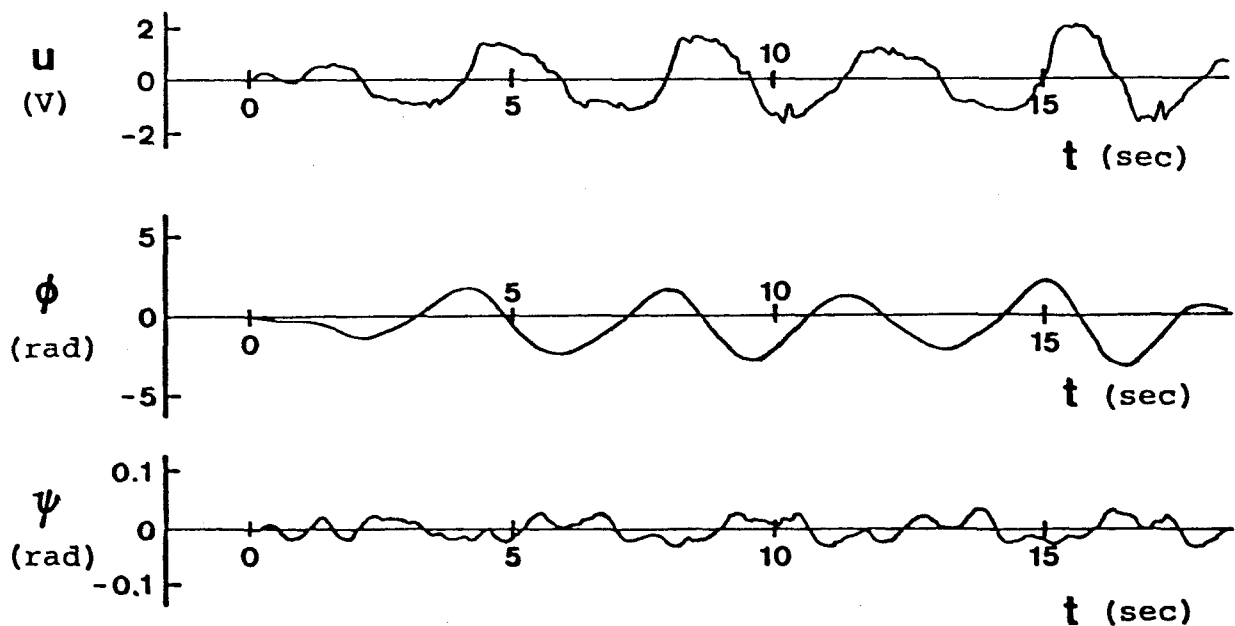


図 6.6 平行二輪車の時間応答 (線形のオブザーバ制御器による安定化)

$$b = [0 \quad 0 \quad 0 \quad -37.76 \quad 6.734 \quad 7.229]'$$

となる。図 6.6 の応答は

$$k = [0.2604 \quad 22.54 \quad 12.03 \quad 0.7499 \quad -1.499 \quad 6.472]'$$

$$L = \begin{bmatrix} 0.1043 & -10.57 & 1.676 & 2.187 \\ 2.587 & -11.61 & 12.00 & 13.59 \end{bmatrix}'$$

を用いた場合であり、 $A - b k'$ の固有値は -4 (6 重)、 $A_{22} - L A_{12}$ の固有値は ($-3.5, -3.5, -4, -4$) である。また、この実験に用いた制御プログラムを付録 3 に示した。

以上のように、固体摩擦を考察してパラメータ G を修正することにより、オブザーバ制御器 (6.16) を用いて平行二輪車を安定化することができた。しかし、このような線形制御器では、図 6.6 のように大きな振幅の持続振動が生じる。そこで、次に固体摩擦の影響を打ち消すように、オブザーバ制御器を修正した非線形制御を行なうことにする。

駆動伝達系の固体(動)摩擦は、制御対象の式 (6.9) を次式のように修正して表わすことができる。

$$\dot{x}_1 = A_{12} x_2$$

$$\dot{x}_2 = A_{21} x_1 + A_{22} x_2 + b_2 (u + h(\dot{\phi}))$$

(6.17)

ここで、 $h(\dot{\phi})$ は固体摩擦を等価的に入力電圧に換算したものであり、通常図 6.7 に示すような原点で不連続な原点对称の関数と考えることができる。

固体摩擦を考慮した安定化制御器として、(6.11)、(6.12) を次式のように修正する。

$$\dot{z} = A_{21} x_1 + (A_{22} - L A_{12}) \hat{x}_2 + b_2 (u + \hat{h}(\dot{\phi}))$$

$$\hat{x}_2 = z + L x_1 \quad (6.18)$$

$$u = -k_1' x_1 - k_2' \hat{x}_2 - \hat{h}(\dot{\phi})$$

ここで、 $\hat{h}(\dot{\phi})$ は $h(\dot{\phi})$ の摩擦項を打ち消すための非線形項である。 $\hat{h}(\dot{\phi}) = h(\dot{\phi})$ とすることができれば、持続振動のない良い実験結果が得られるはずである。この

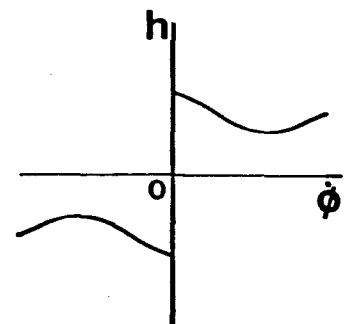


図 6.7 $h(\dot{\phi})$

制御則をデジタル計算機で実現するために、次式のように差分化する。

$$z(i+1) = z(i) + \left[A_{21} x_1(i) + (A_{22} - LA_{12}) \hat{x}_2(i) + b_2 \left\{ u(i) + \hat{h} \left(\frac{\phi(i+1) - \phi(i)}{T} \right) \right\} \right] \quad (6.19)$$

$$\hat{x}_2(i) = z(i) + L x_1(i)$$

$$u(i) = -k_1' x_1(i) - k_2' \hat{x}_2(i) - \hat{h} \left(\frac{\phi(i+1) - \phi(i)}{T} \right)$$

制御器(6.19)をデジタル計算機で実現し、パラメータ k と L は固定して $\hat{h}(\dot{\phi})$ を変えて、安定化制御の実験を行なった。 k および L は

$$k = [0.9951 \quad 20.44 \quad 36.47 \quad 1.552 \quad -5.517 \quad 15.52]'$$

$$L = \begin{bmatrix} 0.1043 & -10.57 & 1.676 & 2.187 \\ 2.767 & -8.171 & 13.00 & 15.95 \end{bmatrix}$$

とした。これは表6.4の値に対して、 $A - b k'$ の固有値を -5 (6重)、 $A_{22} - LA_{12}$ の固有値を -4 (4重)と設定して求めたものである。 $\hat{h}(\dot{\phi})$ としては、

$$\hat{h}(\dot{\phi}) = p_1 \operatorname{sgn}(\dot{\phi}) \quad (6.20)$$

を用いる場合を、まず検討した。この結果、 $p_1=0$ としたときにはかなり不安定で約4秒で倒れたのに対して、 $p_1=0.135$ のときに最も良い実験結果が得られ、数十秒の間、平行二輪車の倒立状態を維持することができた。この場合の応答を図6.8に示す。図のように

一応、安定なリミットサイクルとなっているのに倒れるのは、 $\dot{\phi} = (\phi(i+1) - \phi(i))/T$ と近似しているので、外乱やノイズの影響を受けやすいためと考えられる。

次に、 $\hat{h}(\dot{\phi})$ として

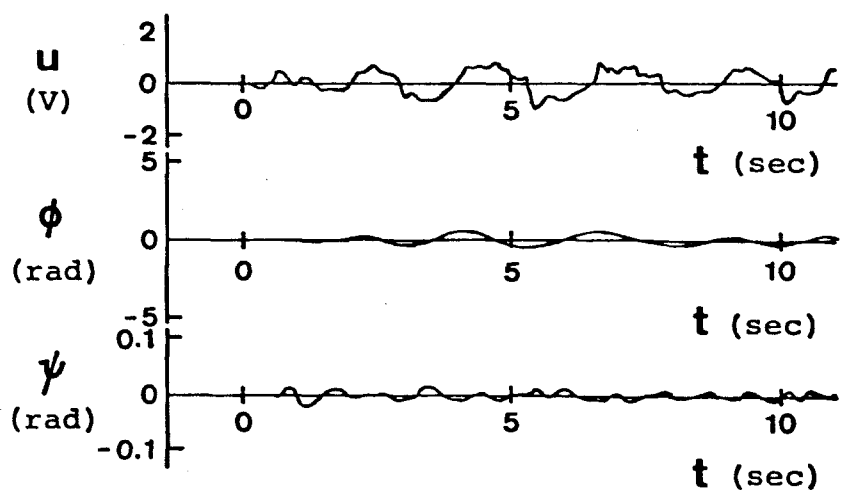


図6.8 平行二輪車の時間応答
($\hat{h}(\dot{\phi}) = p_1 \operatorname{sgn}(\dot{\phi})$, $p_1 = 0.135$ の場合)

$$\hat{h}(\dot{\phi}) = (p_1 + p_2 \dot{\phi}^2) \text{sgn}(\dot{\phi}) \quad (6.21)$$

を用いる場合を検討した。 $p_1=0.13$, $p_2=0.3 \times 10^{-3}$ のとき、前の場合よりさらに良い実験結果が得られた。その応答を図6.9に示す。図6.8と比較して、持続振動の振幅はあまり改善されてはいるが、長時間倒立状態を維持するようになった。

関数(6.20)および(6.21)の中で良い実験結果が得られたものを、図5.10の破線と実線で示す。このような非線形項 $\hat{h}(\dot{\phi})$ を含む制御を行なったときの持続振動の振幅は、線形制御則の場合(図6.6)に比べてかなり小さくなっている。これは非線形制御による効果である。関数 $\hat{h}(\dot{\phi})$ を測定するのは困難であるが、より正確な $\hat{h}(\dot{\phi})$ を用いれば、さらに良い制御結果が得られると考えることができる。

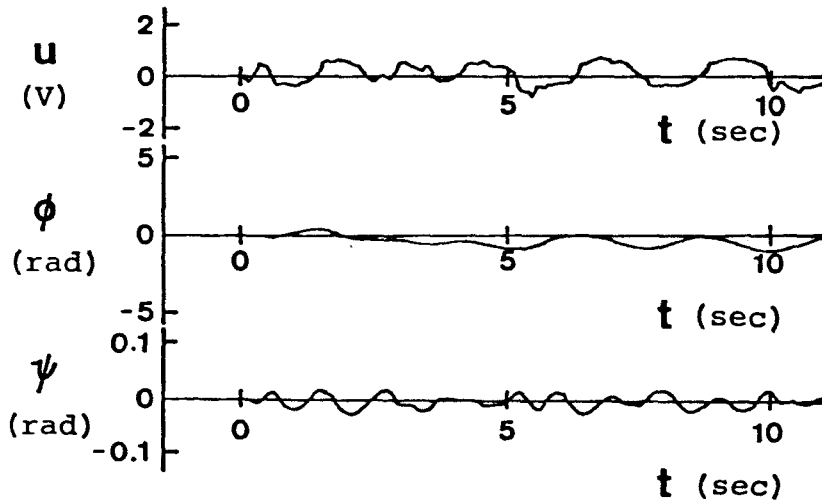


図6.9 平行二輪車の時間応答

$$\left(\begin{array}{l} \hat{h}(\dot{\phi}) = (p_1 + p_2 \dot{\phi}^2) \text{sgn}(\dot{\phi}), p_1 = 0.13 \\ p_2 = 0.3 \times 10^{-3} \text{ の場合} \end{array} \right)$$

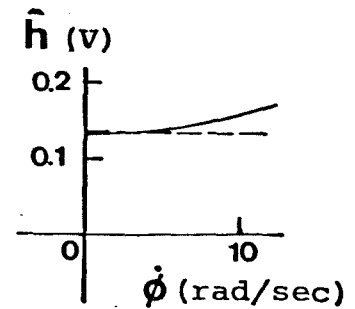


図6.10 $\hat{h}(\dot{\phi})$

6.5 おわりに

本章では内部検出情報に基づく倒立振子の安定化の方法として、補助振子を取り付ける方法を提案し、平行二輪車に適用した。出力として測定した車輪の相対角変位 ϕ と補助振子の相対角変位 ψ から、残りの四つの状態変数を最小次元状態オブザーバを用いて推定し、フィードバック制御を行なった。種々の実験的検討の結果、この方法によって平行二輪車を安定に自立させることができた。定式化に際して無視した駆動伝達系の固体摩擦、モータの不感帯や電気的時定数などの存在と、固有値設定により構成した制御器が不安定なシステムになることが、この方法で実験的に平行二輪車を安定化するのを困難にしていると考えられる。このため、制御系の構成に次の2案の工夫を行なった。

- 1) 閉ループ固有値、すなわち行列 $A-bk'$ の固有値と行列 $A_{22}-LA_{12}$ の固有値を設定すると、 k' は一意に決まるが L には自由度がある。そこで、この L の自由度を利用して、制御器の行列 $A_{22}-LA_{12}-b_2k_2'$ の固有値の実部ができるだけ小さくなるようにした。安定な制御器を得ることができなかったが、制御器の不安定固有値の実部を5程度に抑えることができた。
- 2) 駆動伝達系の固体摩擦を考慮して制御系を構成した。これには二つの方法を考えた。一つは摩擦を考慮してパラメータ G を修正し、これに基づいて制御系を構成する方法である。もう一つは、固体摩擦の影響を打ち消すような非線形項を線形制御則に付け加え、非線形制御を行なう方法である。

以上の2案の工夫により、実験的に平行二輪車を安定化することができた。安定化された平行二輪車には持続振動が生じたが、固体摩擦を考慮した非線形制御により、線形制御の場合に比べて振幅をかなり小さくすることができた。

第7章 結論

本論文では、不安定機械系として3種類の倒立振り子システム、(1) 平行二軸車、(2) 内部物体を横方向に直線変位させる型式の倒立振り子、(3) 内部物体を回転変位させる型式の倒立振り子、を取り上げ、安定化制御について研究した。

3種類の倒立振り子システムについて、動特性を表わす基礎方程式を導き、次に不安定な平衡状態のまわりで局所線形化を行なうことにより線形状態方程式を導いた。次に、この線形状態方程式の可制御性と可観測性を調べ、それぞれの必要十分条件を導いた。

3種類の倒立振り子システムはいずれも2自由度系であり、二つの位置変数と二つの速度変数とを状態変数とする4次系である。これらのシステムが二つの位置変数を出力とする場合には、可観測指数 ν が2となり $\nu-1=1$ 次元のシステムで状態の線形結合を推定する汎関数オブザーバを構成することが可能である。本論文では、このような場合を含む、より一般的な場合に対する汎関数オブザーバの構成法を提案した。この構成法は従来の方法に比べて簡単である。

次に、3種類の倒立振り子システムに対し、状態フィードバックによる安定化制御、最小次元状態オブザーバによる安定化制御、汎関数オブザーバによる安定化制御についてそれぞれその構成法を示し、これを実験的に検討した。3種類の倒立振り子システムはすべて、汎関数オブザーバを用いたフィードバック制御により安定化することができた。これにより、フィードバック制御における汎関数オブザーバの有効性と、本論文で提案する汎関数オブザーバの構成法の有用性を示すことができた。直線変位型倒立振り子に対しては、最小次元状態オブザーバによる安定化制御も行なった。実験結果は汎関数オブザーバを用いた場合とほぼ同じであったが、制御回路はかなり複雑になった。このことから、汎関数オブザーバによる安定化は、最小次元状態オブザーバによる安定化に比べて簡単な制御回路で同程度の制御効果が得られるので、実用上便利であるといえる。平行二輪車および直線変位型倒立振り子に対

しては、出力として測定している二つの位置変数から近似微分を用いて速度変数を求めフィードバックする方法についても検討した。近似微分器およびフィルタの時定数が適当な値のとき、汎関数オブザーバによる安定化の場合と同程度の実験結果が得られた。このことから、近似微分による安定化もノイズに対するフィルタ効果を十分検討すれば、実用上有効であることがわかった。安定化された倒立振子の挙動には、多くの場合に持続振動（リミットサイクル）が生じた。記述関数法による解析により、リミットサイクルの生じる主な原因が、駆動伝達系の固体系摩擦（モータの不感帯も含める）であることがわかった。

本論文では最後に、倒立振子に補助振子を取り付けて内部検出情報のみによって安定化することを考え、実験的にこの方法による安定化が可能であることも指摘した。

謝辞

本研究の遂行にあたり終始懇切な御指導を頂きました増淵正美教授ならびに嘉納秀明助教授に深甚なる感謝の意を表します。

また本研究に御協力頂いた研究室の各位，特に直線変位型倒立振子の製作と実験に御協力頂いた平子敬一氏（東芝），回転変位型倒立振子の製作に御協力頂いた桑島透氏（東亜三洋），平行二輪車の製作および実験に御協力を頂いた古荘純次氏（大阪大学工学部），太田宗司氏（松下電器），川田誠一氏（大阪大学大学院），田宮義光氏（三菱重工），村上勝志氏（大阪大学大学院）に深く感謝します。

引用文献

- 1) D.G.Luenberger: Observers for multivariable systems, IEEE, Vol.AC-11, No.2, 190/197 (1966)
- 2) T.F.Schaefer & R.H.Canon: On the control of unstable mechanical systems, 3rd IFAC, 6C1/6C13 (1966)
- 3) D.P.Lindorff: Relay control of system with parameter uncertainties, 4th IFAC, Sec4 55/70 (1969)
- 4) W.D.Koenigsberg & D.K.Frederick: Output feedback control with application to unstable linear system, JACC, 674/682 (1970)
- 5) W.R.Sturgeon & W.V.Loscutoff: Application of modal control and dynamic observers to control of a double inverted pendulum, JACC, 857/865 (1972)
- 6) 森, 西原, 古田: 倒立振子制御用ハイブリッド制御系, 計測自動制御学会論文集, Vol.12, No.4, 482/487 (1976)
- 7) S.Mori & H Nishihara & K.Furuta: Control of unstable mechanical system - Control of pendulum, Int.J.Control, Vol.23, No.5, 673/692 (1976)
- 8) 酒井, 江村: 重心移動による倒立振子の姿勢制御, 精密機械学会東北支部講演会前刷, 9/12 (1972)
- 9) 林, 嘉納, 増淵: 倒立二重振子の安定化, 日本機械学会関西支部第237回講演論文集, 23/25 (1977)
- 10) H.Hemami & W.C.Weimer & S.H.Koozekanami: Some aspect of the inverted pendulum problem for modelling of locomotion system, JACC, 132/140 (1973)
- 11) C.L.Golliday & H.hemami: Postural stability of the two-degree-of-freedom biped by general linear feedback, IEEE, Vol.AC-21, No.1, 74/79 (1976)
- 12) 江村, 酒井: 反動力によって立位を維持する倒立振子の研究, バイオメカニズム 2, 321/328 (1973)
- 13) 磯部: 人形を直立させる実験, 物理の散歩道 (ロケルキスト著), 岩波, 77/84 (1963)
- 14) 林, 嘉納, 増淵: 一輪車の前後方向の安定化, 第20回自動制御連合講演会前刷, 139/140 (1977)
- 15) 林, 古荘, 嘉納, 増淵: 振子型角度検出器を用いた一輪車の前後方向の姿勢制御, 第17回SICE学術講演会前刷, S10-2 273/274 (1978)

- 16) 林, 嘉納, 増淵: 倒立振子の姿勢制御-質量の横方向物動による安定化, 計測自動制御学会論文集, Vol.13, No.5, 425/432 (1977)
- 17) 林, 嘉納, 増淵: おもりの横方向物動による倒立振子の姿勢制御, 第19回自動制御連合講演会前刷, 229/230 (1976)
- 18) T.E.Fortman & D.Williamson: Design of low-order observers for linear feedback control laws, IEEE, Vol.AC-17, No.3, 301/308 (1972)
- 19) 前田: 線形関数観測器の構成, システムと制御, Vol.16, No.7, 580/584 (1972)
- 20) 井上: 線形制御系の状態変数の線形関数観測オブザーバ, 計測自動制御学会論文集, Vol.10, No.4, 487/492 (1974)
- 21) 近藤: 関数オブザーバの正準形と最適設計, 計測自動制御学会論文集, Vol.14, No.1, 1/7 (1978)
- 22) 伊藤, 木村, 細江: 線形制御系の設計理論, 計測自動制御学会 (1978)
- 23) W.M.Wonham: On pole assignment in multi-input controllable linear systems, IEEE, Vol.AC-12, No.6, 660/665 (1967)
- 24) B.Gopinath: On the control of linear multiple input-output systems, Bell Syst. Tech. J., Vol.50, No.3, 1063/1081 (1971)
- 25) D.G.Luenberger: Canonical forms for linear multivariable systems, IEEE, Vol.AC-12, No.3, 290/293 (1967)
- 26) J.La Salle & S.Lefschetz: Stability by Liapunov's direct method, Academic Press, New York (1961)
- 27) J.E.Gibson: Nonlinear automatic control, chap.9, McGraw-Hill, New York (1963)

付録1 倒立振子の運動方程式の導出

1. 平行二輪車の運動方程式(2.6)の導出

車輪の車体に対する相対角変位 ϕ と車体の傾き角 θ を一般化座標にとる。仮想変位 $d\phi$, $d\theta$ を考えると, この間に車輪駆動トルク T_w のなす仕事 dW は

$$dW = -T_w d\phi \quad (A1.1)$$

であるから, 一般化座標 ϕ および θ に対応する一般化力は, それぞれ $-T_w$ およびゼロである。従って, この系に対する Lagrange の運動方程式は次式のようになる。

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\phi}} \right) - \frac{\partial T}{\partial \phi} = -\frac{\partial V}{\partial \phi} - \frac{\partial F}{\partial \phi} - T_w \quad (A1.2)$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}} \right) - \frac{\partial T}{\partial \theta} = -\frac{\partial V}{\partial \theta} - \frac{\partial F}{\partial \theta} \quad (A1.3)$$

ここで, T , V , および F はそれぞれ平行二輪車システムの運動エネルギー, 位置エネルギー, および散逸関数であり, 次式で表わすことができる。

$$T = \frac{1}{2} (m a^2 + I_2 + I_d) \dot{\phi}^2 + (m a^2 + I_2 + I_\beta + m_1 l_1 a \cos \theta) \dot{\phi} \dot{\theta} + \frac{1}{2} (m a^2 + I_1 + I_2 + 2 m_1 l_1 a \cos \theta) \dot{\theta}^2 \quad (A1.4)$$

$$V = m_1 l_1 g \cos \theta \quad (A1.5)$$

$$F = \frac{1}{2} c_1' \dot{\phi}^2 \quad (A1.6)$$

(A1.4), (A1.5), (A1.6) を (A1.2) および (A1.3) に代入することにより, 平行二輪車の運動方程式(2.6)を導くことができる。

2. 直線変位型倒立振子の運動方程式(2.24)の導出

おもりの中央からの変位 r と倒立振子の傾き角 θ を一般化座標にとる。仮想変位 dr , $d\theta$ を考えると, この間におもり駆動力 F_w のなす仕事 dW は

$$dW = F_w dr \quad (A1.7)$$

であるから, 一般化座標 r および θ に対応する一般化力は, それぞれ F_w およびゼロである。従って, この系に対する Lagrange の運動方程式は次式のようになる。

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{r}} \right) - \frac{\partial T}{\partial r} = - \frac{\partial V}{\partial r} - \frac{\partial F}{\partial r} + F_w \quad (A1.8)$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}} \right) - \frac{\partial T}{\partial \theta} = - \frac{\partial V}{\partial \theta} - \frac{\partial F}{\partial \theta} \quad (A1.9)$$

ここで、 T 、 V 、および F はそれぞれこの倒立振り子システムの運動エネルギー、位置エネルギー、および散逸関数であり、次式で表わすことができる。

$$T = \frac{1}{2} (m_2 + m_{2a}) \dot{r}^2 + (m_2 l_2 + m_{2b}) \dot{r} \dot{\theta} + \frac{1}{2} (I_0 + m_2 r^2) \dot{\theta}^2 \quad (A1.10)$$

$$V = m l g \cos \theta - m_2 g r \sin \theta \quad (A1.11)$$

$$F = \frac{1}{2} c_2' \dot{r}^2 + \frac{1}{2} c_1 \dot{\theta}^2 \quad (A1.12)$$

(A1.10)、(A1.11)、および(A1.12)をLagrangeの運動方程式(A1.8)および(A1.9)に代入することにより、直線変位型倒立振り子の運動方程式(2.24)を導くことができる。

3. 回転変位型倒立振り子の運動方程式(2.41)の導出

内部物体の相対角変位 ϕ と倒立振り子の傾き角 θ を一般化座標にとる。仮想変位、 $d\phi$ 、 $d\theta$ を考えると、この間に内部物体駆動トルク T_w のなす仕事 dW は

$$dW = T_w d\phi \quad (A1.13)$$

であるから、一般化座標 ϕ および θ に対応する一般化力はそれぞれ T_w およびゼロである。従って、この系に対するLagrangeの運動方程式は次式のようになる。

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\phi}} \right) - \frac{\partial T}{\partial \phi} = - \frac{\partial V}{\partial \phi} - \frac{\partial F}{\partial \phi} + T_w \quad (A1.14)$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}} \right) - \frac{\partial T}{\partial \theta} = - \frac{\partial V}{\partial \theta} - \frac{\partial F}{\partial \theta} \quad (A1.15)$$

ここで、 T 、 V 、および F はそれぞれこの倒立振り子システムの運動エネルギー、位置エネルギー、および散逸関数であり、次式で表わすことができる。

$$T = \frac{1}{2} (I_2 + I_{2a}) \dot{\phi}^2 + (m_2 l_2 l_t \cos \phi - I_2 - I_{2b}) \dot{\phi} \dot{\theta} + \frac{1}{2} (I_1 + I_2 + m_2 l_t^2 - 2 m_2 l_2 l_t \cos \phi) \dot{\theta}^2 \quad (A1.16)$$

$$V = (m_1 l_1 + m_2 l_2) g \cos \theta - m_2 l_2 g \cos(\theta - \phi) \quad (A1.17)$$

$$F = \frac{1}{2} c_2' \dot{\phi}^2 + \frac{1}{2} c_1 \dot{\theta}^2 \quad (A1.18)$$

(A1.16), (A1.17), および (A1.18) を Lagrange の運動方程式 (A1.14) および (A1.15) に代入することにより, 回転変位型倒立振り子の運動方程式 (2.41) を導くことができる。

付録 2 第 3 章の補題 1, 定理 1 ~ 3 の証明

1. 補題 1 の証明

行列 T を次式で定義する。

$$T = T_2 T_1 \quad (A 2. 1)$$

ここで

$$T_2 = \begin{bmatrix} I_m & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -A_1 & I_m & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ -A_{q-2} & -A_{q-3} & \cdots & I_m & 0 \\ -A_{q-1} & -A_{q-2} & \cdots & -A_1 & I_m \end{bmatrix} \quad (A 2. 2)$$

とする。仮定により T_1 は正則であり、また T_2 も明らかに正則であるから、 T は正則である。 $TA = \hat{A}T$, $C = \hat{C}T$ であることは容易に確かめられ、これから、 $TA T^{-1} = \hat{A}$, $CT^{-1} = \hat{C}$ を得る。

2. 定理 1 の証明

仮定 (3. 34) が満たされているとする。補題 1 により、行列 A, B, C が (3. 40) の形をしているとしても、一般性は失われぬ。 $p = q - 1$ として、 D, g を (3. 52) で定め、(3. 54), (3. 49) により S を求め、(3. 45), (3. 47), (3. 27) によりそれぞれ E, h, F を求める。 D を安定行列に選ぶと、条件 (3. 26) ~ (3. 29) はすべて満たされ、このようにして得られた $p = q - 1$ 次元の動的システム (3. 25) は、 $f = h'x$ を推定する汎関数オブザーバである。 D の特性多項式は

$$S^m = d_1 S^{m-1} - d_2 S^{m-2} \cdots - d_{p-1} S - d_p \quad (A 2. 3)$$

となるので、 d_1, d_2, \dots, d_p の選択により D の固有値を設定することができる。また、以上は任意の長に対して成り立つ。

3. 定理2の証明

(3.52) を (3.54) に代入すると

$$S_g = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ -d_1 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ -d_{p-1} & \cdots & -d_1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k'_g \\ k'_{g-1} \\ \vdots \\ k'_2 \end{bmatrix} \quad (A2.4)$$

が得られる。いま、 $p \times p$ 行列 V と pm 次元ベクトル \tilde{k} を

$$V = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 \\ \vdots & \ddots & 1 & -d_1 \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ 1 & -d_1 & \cdots & -d_{p-1} \end{bmatrix} \quad (A2.5)$$

$$\tilde{k}' = [k'_2, k'_3, \dots, k'_g] \quad (A2.6)$$

と定義すると、(A2.4) を次式のように表わすことができる。

$$S_g = (I_p \otimes \tilde{k}') (cs(V) \otimes I_m) \quad (A2.7)$$

ここで、 $cs(\cdot)$ は行列の列展開を表わす。(3.49) より

$$S_i = D^{g-i} S_g = D^{g-i} (I_p \otimes \tilde{k}') (cs(V) \otimes I_m), \quad i=1, 2, \dots, g-1 \quad (A2.8)$$

が得られる。この式に

$$\begin{aligned} D^{g-i} (I_p \otimes \tilde{k}') &= D^{g-i} \otimes \tilde{k}' = I_p D^{g-i} \otimes \tilde{k}' I_{pm} \\ &= (I_p \otimes \tilde{k}') (D^{g-i} \otimes I_{pm}) \\ &= (I_p \otimes \tilde{k}') (D^{g-i} \otimes I_p \otimes I_m) \end{aligned} \quad (A2.9)$$

を代入すると

$$\begin{aligned} S_i &= (I_p \otimes \tilde{k}') \{ (D^{g-i} \otimes I_p) \otimes I_m \} (cs(V) \otimes I_m) \\ &= (I_p \otimes \tilde{k}') \{ (D^{g-i} \otimes I_p) \cdot cs(V) \otimes I_m \} \end{aligned} \quad (A2.10)$$

が得られる。さらに

$$(D^{g-i} \otimes I_p) \cdot cs(V) = cs\{V(D')^{g-i}\} \quad (A2.11)$$

なる関係を用いると、次式を得る。

$$S_i = (I_p \otimes \tilde{k}') [cs\{V(D')^{g-i}\} \otimes I_m], \quad i=1, 2, \dots, g \quad (A2.12)$$

よって

$$S = [S_1, S_2, \dots, S_q] = (I_p \otimes \tilde{K}') (W \otimes I_m) \quad (A2.13.)$$

ここで

$$W = [cs\{V(D')^{q-1}\}, \dots, cs(VD'), cs(V)] \quad (A2.14.)$$

である。 $p^2 \times q$ 行列 W を $p \times q$ 行列 W_1, W_2, \dots, W_p に分割して

$$W = \begin{bmatrix} W_1 \\ \vdots \\ W_p \end{bmatrix} \quad (A2.15.)$$

とすると、 W_i は次式で表わされる。

$$W_i = [\{V(D')^{q-1}\}_{(i)}, \dots, (VD')_{(i)}, V_{(i)}] , \quad i=1, 2, \dots, p \quad (A2.16.)$$

ここで、 (i) は行列の第 i 列を意味する。(A2.16) は (3.52) および (A2.5) を代入し変形すると、(3.55) が得られる。

次に、(A2.13) より

$$S \text{ の第 } i \text{ 行} = \tilde{K}' (W_i \otimes I_m) \quad (A2.17.)$$

が得られ、また (A2.12) を導いたのと同様にして

$$DS_i = (I_p \otimes \tilde{K}') [cs\{V(D')^q\} \otimes I_m] \quad (A2.18.)$$

が得られるから

$$DS_i \text{ の第 } i \text{ 行} = \tilde{K}' [\{V(D')^q\}_{(i)} \otimes I_m] \quad (A2.19.)$$

である。ここで、

$$\{V(D')^q\}_{(i)} = W_i [\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p, 0]' \quad (A2.20.)$$

が成り立つことを容易に示すことができるので、この式を (A2.19) に代入すると次式が得られる。

$$DS_i \text{ の第 } i \text{ 行} = \tilde{K}' (W_i \otimes I_m) [d_1 I_m, d_2 I_m, \dots, \alpha_p I_m, 0] \quad (A2.21.)$$

まず、 E の第 i 行 e_i' を求める式 (3.56) は、(A2.17) および (A2.21) を (3.45) に代入することにより容易に導くことができる。次に、 F の第 i 行 f_i' を求める式 (3.57) は、(A2.17) を (3.27) に代入する

ことにより直ちに得られる。最後に、 h を求める式(3.59)は、(A2.17)と(3.55)から

$$S_1 \text{ の第1行} = \hat{c}' [d_1 I_m, d_2 I_m, \dots, d_p I_m]' \quad (A2.22)$$

が成り立つことを用いると、(3.47)より直ちに得られる。

4. 定理3の証明

まず、系(3.60)を正準形(3.40)に変換する。(3.35)より

$$T_1 = \begin{bmatrix} C \\ CA \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_m & 0 \\ A_{11} & A_{12} \end{bmatrix} \quad (A2.23)$$

(3.39)より

$$\begin{aligned} [A_2 \quad A_1] &= CA^2 T_1^{-1} \\ &= [A_{12} A_{21} - A_{12} A_{22} A_{12}^{-1} A_{11} \quad A_{11} + A_{12} A_{22} A_{12}^{-1}] \end{aligned} \quad (A2.24)$$

(A2.1), (A2.2)より変換行列 T は

$$\begin{aligned} T &= T_2 T_1 = \begin{bmatrix} I_m & 0 \\ -A_1 & I_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_m & 0 \\ A_{11} & A_{12} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} I_m & 0 \\ -A_{12} A_{22} A_{12}^{-1} & A_{12} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (A2.25)$$

となる。座標変換

$$\begin{bmatrix} \bar{x}_1 \\ \bar{x}_2 \end{bmatrix} = T \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_m & 0 \\ -A_{12} A_{22} A_{12}^{-1} & A_{12} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \quad (A2.26)$$

を行なうと、(3.60)より次式を得る。

$$\begin{bmatrix} \dot{\bar{x}}_1 \\ \dot{\bar{x}}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} + A_{12} A_{22} A_{12}^{-1} & I_m \\ A_{12} (A_{21} - A_{22} A_{12}^{-1} A_{11}) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{x}_1 \\ \bar{x}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_1 \\ A_{12} B_2 - A_{12} A_{22} A_{12}^{-1} B_1 \end{bmatrix} u$$

$$y = \bar{x}_1 \quad (A2.27)$$

そしてこの新しい座標系では、汎関数 f は

$$f = k_1' x_1 + k_2' x_2$$

$$= (k_1' + k_2' A_{22} A_{12}^{-1}) \bar{x}_1 + k_2' A_{12}^{-1} \bar{x}_2 \quad (A 2. 28)$$

となる。定理 2 を (A 2. 27), (A 2. 28) に適用すると, (3. 62), (3. 63) が得られる。

付録3 第6章のデジタル計算機による制御に用いた
プログラムの例.

```

0001 FTN4,L
0002     PROGRAM FOOS3
0003 C
0004 C     6-ORDER NO SYSTEM
0005 C     4-ORDER NO OBSERVER
0006 C     SUBROUTINE TRSDS TRDAS TRAD6 TRAR6
0007     DIMENSION IBUF(4)
0008     DT=0.00825
0009 C
0010     CALL EXEC(30,1)
0011     CALL DACN8(0,0)
0012     CALL EXEC(30,0)
0013     WRITE(6,100)
0014 100 FORMAT("INPUT OBSERVER MATRIX OL(4,2)")
0015     READ(5,*) OL11,OL12
0016     READ(5,*) OL21,OL22
0017     READ(5,*) OL31,OL32
0018     READ(5,*) OL41,OL42
0019 C
0020     WRITE(6,102)
0021 102 FORMAT("INPUT K(I),I=1,6")
0022     READ(5,*) FK1,FK2,FK3,FK4,FK5,FK6
0023 C
0024 202 CONTINUE
0025     IBUF(1)=1
0026     IBUF(2)=0
0027     CALL EXEC(1,412B,IBUF,2)
0028     AX1=FLOAT(IBUF(3))*0.0002037
0029     AX2=FLOAT(IBUF(4))*0.0000055204
0030     WRITE(6,200) AX1,AX2
0031 200 FORMAT(" AX1= ",F6.3," AX2= ",F6.3)
0032     WRITE(6,201)
0033 201 FORMAT("IF YOU TRY AGAIN,INPUT P=0")
0034     READ(1,*) P
0035     IF(P.EQ.0.0) GO TO 202
0036 C
0037     Z1=0.0
0038     Z2=0.0
0039     Z3=0.0
0040     Z4=0.0
0041     Q1=0.0
0042     Q2=0.0
0043     Q3=0.0
0044     Q4=0.0
0045     X1=0.0
0046     X2=0.0
0047     U=0.0
0048     I=0

```

```

0049 C
0050 OX3=Z1+OL11*X1+OL12*X2
0051 ODX1=Z2+OL21*X1+OL22*X2
0052 ODX2=Z3+OL31*X1+OL32*X2
0053 ODX3=Z4+OL41*X1+OL42*X2
0054 GO TO 800
0055 1000 CONTINUE
0056 CALL EXEC(1,412B,IEUF,2)
0057 X1=FLOAT(IEUF(3))*0.0002037
0058 X2=FLOAT(IEUF(4))*0.00005868
0059 X1=X1-AX1
0060 X2=X2-AX2
0061 OX3=Z1+OL11*X1+OL12*X2
0062 ODX1=Z2+OL21*X1+OL22*X2
0063 ODX2=Z3+OL31*X1+OL32*X2
0064 ODX3=Z4+OL41*X1+OL42*X2
0065 U=-FK1*X1-FK2*X2-FK3*OX3-FK4*ODX1-FK5*ODX2-FK6*ODX3
0066 IU=IFIX(204.8*U)
0067 CALL EXEC(30,1)
0068 CALL DACN8(0,-IU)
0069 CALL EXEC(30,0)
0070 800 CONTINUE
0071 F1=ODX3-OL11*ODX1-OL12*ODX2
0072 F2=-0.05185*X2-70.11*OX3-(13.57+OL21)*ODX1-OL22*ODX2
0073 1 -37.76*U
0074 F3=-35.79*X2+34.42*OX3+(2.419-OL31)*ODX1-OL32*ODX2
0075 1 +6.734*U
0076 F4=0.2859*X2+24.85*OX3+(2.597-OL41)*ODX1
0077 1 -OL42*ODX2+7.229*U
0078 Z1=Z1+F1*DT
0079 Z2=Z2+F2*DT
0080 Z3=Z3+F3*DT
0081 Z4=Z4+F4*DT
0082 CALL SDISP(I)
0083 I=I+1
0084 IF(6000-I) 40,40,1000
0085 40 I=I-6000
0086 GO TO 1000
0087 END

```