



|              |                                                                                   |
|--------------|-----------------------------------------------------------------------------------|
| Title        | 機械構造の減衰能に関する基礎的研究                                                                 |
| Author(s)    | 久米, 靖文                                                                            |
| Citation     | 大阪大学, 1982, 博士論文                                                                  |
| Version Type | VoR                                                                               |
| URL          | <a href="https://hdl.handle.net/11094/2694">https://hdl.handle.net/11094/2694</a> |
| rights       |                                                                                   |
| Note         |                                                                                   |

*The University of Osaka Institutional Knowledge Archive : OUKA*

<https://ir.library.osaka-u.ac.jp/>

The University of Osaka

# 機械構造の減衰能に関する基礎的研究

昭和 57 年 1 月

久 米 靖 文

# 目 次

|                          |    |
|--------------------------|----|
| 論 文 概 要                  | 1  |
| 緒 論                      | 5  |
| 主 な 記 号                  | 11 |
| 主な無次元量                   | 18 |
| <br>                     |    |
| 第 1 章 接合面をもつ振動系の解析       | 19 |
| 1 . 1 ま え が き            | 19 |
| 1 . 2 矩形波状応答発生限界         | 19 |
| 1 . 3 矩形波状応答が発生する場合の挙動   | 25 |
| 1 . 4 ま と め              | 33 |
| <br>                     |    |
| 第 2 章 材料減衰能の評価法          | 35 |
| 2 . 1 ま え が き            | 35 |
| 2 . 2 材料減衰能の評価           | 35 |
| 2 . 3 エネルギー吸収関数          | 36 |
| 2 . 4 応力分布関数             | 37 |
| 2 . 5 曲げ振動によるはりの応力分布     | 38 |
| 2 . 6 両端単純支持はりの材料減衰能     | 40 |
| 2 . 7 片持ちはりと両端自由はりの材料減衰能 | 48 |
| 2 . 8 実験と考察              | 56 |
| 2 . 9 ま と め              | 59 |

|           |                                 |     |
|-----------|---------------------------------|-----|
| 第 3 章     | 局部すべりによる減衰能                     | 61  |
| 3 . 1     | まえがき                            | 61  |
| 3 . 2     | 球と平面の接触による消散エネルギーと接触トルク         | 61  |
| 3 . 3     | 減衰能の評価                          | 65  |
| 3 . 4     | 実験装置と実験方法                       | 65  |
| 3 . 5     | 実験結果と考察                         | 70  |
| 3 . 6     | ま と め                           | 73  |
| 第 4 章     | カップリング状モデルの矩形波状応答発生限界           | 75  |
| 4 . 1     | まえがき                            | 75  |
| 4 . 2     | カップリング状モデル                      | 75  |
| 4 . 3     | 矩形波状応答発生限界の解析                   | 77  |
| 4 . 4     | 実験装置と実験方法                       | 80  |
| 4 . 5     | 実験結果と考察                         | 83  |
| 4 . 6     | ま と め                           | 89  |
| 第 5 章     | カップリング状モデルの正弦波状応答領域での減衰能        | 90  |
| 5 . 1     | まえがき                            | 90  |
| 5 . 2     | 接合面が固着した場合のカップリング状モデルの減衰能       | 90  |
| 5 . 2 . 1 | 応力分布関数とエネルギー吸収関数                | 91  |
| 5 . 2 . 2 | カップリング状モデルの材料減衰能の評価             | 95  |
| 5 . 2 . 3 | 実 験                             | 100 |
| 5 . 3     | カップリング状モデルの局部すべりによる減衰能          | 102 |
| 5 . 3 . 1 | 一端固定の中空丸棒で軸に直角な接合面をもつ場合の<br>減衰能 | 102 |
| 5 . 3 . 2 | カップリング状モデルの接触面上の静力学             | 107 |

|         |                                   |     |
|---------|-----------------------------------|-----|
| 5.3.3   | 実験方法と結果                           | 108 |
| 5.3.4   | 減衰能の評価と考察                         | 111 |
| 5.4     | 接合面が固着の状態に近い場合のカップリング状モデル<br>の減衰能 | 113 |
| 5.4.1   | 接合面が固着の状態に近い場合の減衰能の評価             | 114 |
| 5.4.2   | 実験方法と実験結果                         | 116 |
| 5.4.3   | 考 察                               | 118 |
| 5.5     | ま と め                             | 120 |
| 第 6 章   | カップリング状モデルの矩形波状応答領域での振動特性と<br>減衰能 | 121 |
| 6.1     | まえがき                              | 121 |
| 6.2     | 矩形波状応答が発生する場合のカップリング状モデルの<br>挙動   | 122 |
| 6.3     | 矩形波状応答領域での減衰能                     | 127 |
| 6.4     | 実験と考察                             | 127 |
| 6.5     | ま と め                             | 132 |
| 結 論     |                                   | 134 |
| 参 考 文 献 |                                   | 137 |
| 謝 辞     |                                   | 147 |

## 論 文 概 要

本論文は機械振動における減衰の問題に関して研究を行い、減衰の機構を明らかにして、その大きさを推定する方法を確立しようとしたものである。すなわち機械を構成している各要素のもつ材料減衰と、機械要素の結合部接合面の減衰について解析し、実験を行ってこの解析を検討したものである。

古くから工作機械や内燃機関のような機械の振動特性は研究されてきたが、まだ解決されていない問題点も多い。たとえば共振での振幅を知ろうとしても減衰特性がわからないので、共振振幅が推定できないこともその一つである。また最近では電子計算機の発達とともに機械構造の動特性に関する研究が多く行われているが、機械構造における減衰特性に関しては、やはり未知の問題として残っている部分が多い。現在までの減衰に関する研究をみると、Lazanらの行った材料減衰、Goodmanらの接合面における減衰の研究などがみられるが、機械構造の減衰の大きさを明確に見積る手法は確立されているとはいえない。そこで本研究では二要素の接合面をもつモデルを考え、このモデルの振動特性を取り扱い、材料減衰、接合面減衰を解析し、その特性を明らかにして機械構造の減衰特性を知る手段を確立しようとした。

この解析では系に正弦波状の励振力が加わった場合に接合面において、全体すべり運動を行う場合、局部すべり運動を行う場合、固着運動を行う場合を考え、材料減衰、接合面減衰を解析した。そしてこの解析結果をカップリング状モデルやその他のモデルを用いて実験し、減衰の大きさを測定し、解析した結果と比較した。以下本論文の内容を簡単に述べると次のようになる。

緒論では従来のこの方面での研究と成果を述べ、まだ明らかにされていない問題点を指摘し、本研究の目的を明らかにした。

第1章では機械構造がもっている接合面の動特性を考察するために二要素から成

り、一要素に弾性部をもつような振動系を考え、これに正弦波状の励振力を加え、二要素間の接合面で全体すべり運動が発生する場合の挙動を取り扱った。この振動系は一要素に正弦波状の励振力を加えた場合、接合面を介して弾性支持されている他の一要素の応答は2つの場合に分けられる。一つは正弦波状の応答であり、一つは矩形波状の応答である。まず矩形波状の応答が発生する限界の条件を静的摩擦力と軸荷重との関係から求め、結合部の接合面では固着運動、局部すべり運動、全体すべり運動をすることを指摘した。つぎに矩形波状応答領域での振動特性を解析し、接合面での付着時間は励振力の励振振動数が高く、接合面での最大静止摩擦力が小さく、固着時の伝達摩擦力の振幅が大きくなると減少すること、および矩形波状応答波形上の減衰振動波形の最大振幅は、振動数比、最大静止摩擦力と固着時の伝達摩擦力の振幅との比、等価粘性減衰比で表すことができることを明らかにした。

第2章では機械を構成している部材の材料減衰について述べている。これは接合面が固着して運動している場合の減衰の大きさを取り扱うためである。材料減衰については多くの研究があるが、今までの研究では慣性力を考慮していないので高次の振動モードの場合の材料減衰を求めることができない。そこで、本研究では高次の振動モードの場合でも材料減衰能を求められるように振動モードを考慮して材料減衰能を求める方法を提案した。まず材料減衰を求める手順を示し、つぎに両端単純支持はり、片持ちはり、両端自由はりのそれぞれの場合の材料減衰を求める方法を解析した。そして片持ちはりについては実験を行い、解析した結果を確かめた。その結果、機械を構成している要素の材料減衰を考える場合、損失係数と最大応力振幅との関係は振動モードの次数には影響されないこと、および損失係数の値は0.001～0.005の範囲になることが明らかになった。

第3章では接合面が局部すべり運動しているときの減衰機構を明らかにするために球と平面の接触部分における減衰を検討した。本章で取扱ったモデルは球が平面に接触し、球と平面との間に相対的な回転運動が存在する場合である。すなわち、一つの平板が一定の締付力によって、2球で締付けられ、平板が周期的なねじりモ

ーメントをうける。研究の結果，このようなモデルの接合面では局部すべりが発生し，すべりのある領域とすべりがなく固着している領域にわけられることが明らかになった。またすべりのある領域での表面応力の接線成分は一定の摩擦係数と垂直応力成分との積であると仮定して解析し，接合面減衰能を求め，減衰能と回転角，減衰能と固着比との関係を明らかにした。すなわち局部すべりによる接合面減衰能は回転角の増加とともに増加し，固着比が増加すると減少することを示した。そして実験を行って解析結果が妥当であることを確かめた。

第4章においては二平面接合部の挙動および減衰能を考察するために製作したカップリング状モデルの特徴について述べ，第1章で明らかにした矩形波状応答発生限界の解析をねじり振動系に変換し，モデルの接合面を介しての応答が矩形波状になる場合の限界を計算して解析が妥当であることを明らかにした。

第5章ではカップリング状モデルにおいて接合面を介しての応答が正弦波状になる場合の減衰能を解析した。まず第2章で述べた材料減衰能の評価方法をねじり振動系に応用してカップリング状モデルの接合面が固着した場合の減衰能を計算した。すなわち丸棒のねじり振動による材料減衰能を振動モードを考慮して求める方法を検討した。その結果，一端固定，他端に慣性質量のついた中空丸棒のねじり振動の場合についても，部材の各振動モードでの応力分布関数は振動モードを表す規準関数から計算することができ，この応力分布関数から材料減衰能を評価することが可能であることが明らかになった。この理論解析を考慮しながらカップリング状モデルの接合面が固着した場合の実験結果を考察すると，軸荷重が大きくなるにつれて，モデルの接合面は固着の状態になり，接合面での減衰能は減少し，中空円筒部の材料減衰能に近づくという結果を得た。つぎに第3章で述べた方法によってカップリング状モデルの接合面での局部すべりによる減衰能を計算した。ここではねじり軸に垂直な接合面をもつねじり円筒の挙動を解析してこれをカップリング状モデルに適用した。その結果，局部すべりによる減衰能が存在することが明らかになり，カップリング状モデルの局部すべりによる減衰能は結合部の接合面での摩擦係数，締



付圧力，せん断応力分布に依存し，また減衰能を最大にする締付圧力が存在することが明らかになった。

第 6 章ではカップリング状モデルの矩形波状応答領域での振動特性を解析した。すなわち弾性支持されたカップリング状モデルに正弦波状のトルクを加え，モデルの接合面で全体すべり運動が発生する場合の挙動を第 1 章の解析を応用して明らかにした。またモデルの運動を理論的に解析し，この結果を実験によって確かめ，矩形波状応答波形上の減衰自由振動波形から減衰能を求める方法を述べた。

最後の結論においてはこの研究の総括を行い，得られた結果をまとめた。

機械振動における減衰特性については多くの研究がみられるが、まだ解決されていない問題点が多い。

工作機械のような機械構造物における減衰能に関する研究<sup>1)~16)</sup>によると、実際の機械構造物には3つの減衰源があり、部材の周囲の流体によるもの、構成部材の内部摩擦によるもの、ボルト・ナットその他で結合されている構造部品間の相対すべりによるものである。これらの減衰源からの減衰はそれぞれ雰囲気減衰能、材料減衰能、接合面減衰能と呼ばれている。そのうち材料減衰能と接合面減衰能とからなっている減衰を構造減衰能と言っている。

一方、複雑な構造物が振動する場合には、振動の1周期あたりの減衰エネルギーは振動数に関係なく、ほぼ振幅の2乗に比例することが実験的に確かめられている。このことから、構造物の減衰力として、振動数に関係せず振幅だけに比例するような数学モデルを用いて構造減衰能を評価する場合があるが、このモデルは減衰機構を考慮して作られたものではない。Lazanらの研究では、構造減衰能のうち構成部材の内部摩擦による材料減衰能は構成部材の材料の成分や組織だけでなく、応力振幅や部材の応力分布に依存することが指摘されている。これに対して接合面減衰能の場合は接合面の挙動、接触機構、摩擦特性などが減衰能に大きく影響する。また材料減衰能を測定することは実験物理学をはじめ多くの分野（構造工学、応用力学、金属学、物理化学、ゴム工学、音響学、流体力学など）においてなされているが、これらの分野の間で減衰能の尺度は統一されていない。<sup>17)~20)</sup>しかしそれぞれの測定結果から分子共振、転位、熱拡散、磁場での運動などについて多くの情報を得ているし、一方では、材料減衰が振動振幅を小さくするということが注目されている。<sup>21)~23)</sup>

材料減衰能については多くの研究<sup>24)~38)</sup>があるが、実験的なものが多い。その中で

<sup>33)</sup>  
Lazan<sup>33)</sup>らは構成材料の材料特性によって決まるエネルギー吸収関数と、部材の断面形状や負荷状態によって決まる応力分布関数とから材料減衰能を損失係数で評価している。しかし応力分布関数が部材の準静的な変形から求められているので、慣性力の影響や振動モードの影響については言及されていない。

つぎに結合部の接合面減衰能についての今までの研究をみると、実験的研究が多く、理論的研究は少ない。減衰能を評価しようとする結合部の接合面は一般に平面あるいは円筒である場合が多く、2つの部品は互いに締付力によって締付けられている。この締付力のはめあいによるものとか、予荷重などによるものである。またこの接合面の相対運動には、一對の面を分離する方向と一對の面をせん断する方向の運動がある。消散エネルギーが大きい運動は後者の場合で、変動する外荷重が加えられたとき、接合面のところにせん断応力が発生し、そのせん断応力が増加するにつれて、すべりが増加する。このすべりの面積は変動外荷重と同じように増加・減少のサイクルを繰り返す。また一對の面をせん断する方向の運動には全体すべりと局部すべりがある。局部すべりは接合面の一部がすべり、他は固着する場合で、接合面での固着と弾性変形のためにすべりが全接合面に広がらない。一方、全体すべりはすべりが全接合面に広がる場合である。

また局部すべりについてはつぎのような報告<sup>55)</sup>がある。局部すべりには局部すべりを始めるのに最小の励振荷重を必要とする場合と荷重が加えられるとすぐに局部すべりが始まる場合がある。前者の場合は減衰エネルギーを最大にする最適締付力が存在し、極端に高い締付力あるいは極端に低い締付力ではエネルギーの消散が少なくなる。そして後者の場合においては、エネルギーの消散が最大荷重と最小荷重の差の3乗に比例し、局部すべりを生じさせるのに必要なせん断応力（限界せん断応力）の大きさに反比例するということが述べられている。このように局部すべりの場合は接合面の一部がすべり、他は固着しているので複雑な減衰機構になる。

以上に述べたように、接合面減衰能に大きく影響するのは接触機構であり、これに関するものはHertzによって研究された弾性接触論が発表されて以来、多くの研

39)～54) が発表されている。しかし接触面で相対すべりが発生する場合の弾性接触論についてはあまり研究されていない。ただ Galin<sup>112)</sup> は剛体と弾性体との間に相対すべりがある場合の接触問題を解いている。また弾性接触のコンプライアンスについては Mindlin<sup>40)</sup>、Lubkin<sup>41)</sup> の研究があるが減衰能に関しては触れていない。

局部すべりによる減衰機構に関する研究としては Johnson, Goodman の研究<sup>55)～58)</sup> があり、いずれも球と平面の接触における相対運動が直線的である場合を検討している。またこの研究の外に Goodman<sup>58)</sup>、益子<sup>61)</sup> は 2 枚合せはりによって局部すべりによる減衰機構を明らかにしている。しかしこれらの研究は回転運動の場合は検討していない。

つぎに接合面減衰能に影響するもう一つの要因である摩擦特性が影響する運動の研究としては付着・すべりの運動に関する研究すなわち摩擦振動の研究<sup>62)～78)</sup> がある。この研究において、運動は剛体同志の接触で全体すべりと完全固着の繰返しであるとして解析している。この全体すべり運動での減衰能については種々の方法で研究<sup>79)～85)</sup> されているが、挙動が非線形になり、かつ複雑になるので理論解析で減衰能を求めることが困難である。しかしこのような挙動を理論解析によって求めるために、線分近似の方法を用いて振動現象を解析した研究<sup>86)～95)</sup> もある。

以上のような研究を基礎にして、本論文では、まずすべり方向で拘束がない、弾性結合体を取り扱い、その振動特性から、接合面が固着運動、局部すべり運動、全体すべり運動をすることを明らかにしている。このためにモデルを設定して解析した。ここで設定した振動モデルに類似したモデルについては亘理、岡村、西村、Sinclair らによって研究されている。しかし亘理<sup>67)</sup> らの解析モデルや岡村<sup>73)</sup> らの解析モデルでは駆動速度が一定であり、西村<sup>70)</sup> らの解析モデルでは励振される要素の質量を無視し、質量とばね定数によって決まる無減衰の固有振動数が励振振動数に比べて低い場合であり、また Sinclair<sup>66)</sup> の解析モデルは駆動力は正弦波状であるが、ばねを介して駆動されるという機構である。本論文で取り扱っている振動モデルでは駆動速度が一定でなく、励振される要素の質量が考慮に入れられ、また質量とば

ね定数できまる無減衰の固有振動数が励振振動数に比べて高い場合である。またここで設定したモデルの力の流れは一つの要素が正弦波状の駆動力で駆動されると、接合面での摩擦によって力が接合面を介してもう一つの要素の被駆動系に伝達されるという場合である。

つづいて本論では接合面が固着している場合の減衰能を考察する際に必要な材料減衰能について高次の振動モードでも求めることができる方法を提案している。また接合面での減衰能を評価する方法を検討して機械構造の結合部の減衰能を評価することを試みている。

本論文は6章からなり、まず接合面をもつ振動系の挙動を明らかにし、その減衰機構を検討している。そしてこれらの解析を工作機械の接合面などの二平面接合部を単純化したカップリング状モデルに適用して解析が妥当であることを確かめている。

第1章では機械構造がもつ接合面の動特性を明らかにすることを目的として、二要素から成り、弾性部をもつ振動系に正弦波状の励振力を加え、接合面で全体すべり運動をする場合の振動系の挙動を明らかにしている。この二要素のうち一要素を正弦波状に励振した場合でも、接合面を介して弾性支持されている他の一要素の応答は正弦波状になったり矩形波状になったりする。まずこの矩形波状の応答が発生する限界の条件を検討した。そして全体すべり運動が発生する場合の振動系の挙動を解析した。

第1章において、接合面では固着運動、局部すべり運動、全体すべり運動が行われることを明らかにした。第2章では接合面が固着運動している場合の減衰能に大きく影響すると思われる材料減衰能について述べている。

前述したように材料減衰能については多くの研究があるが、いずれも慣性力を考慮していないので、高次の振動モードの場合は材料減衰能を求めることができない。そこでLazanの方法を拡張し、振動モードを考慮して材料減衰能を求める方法を提案している。まず材料減衰能を求める手順を示し、つぎに両端単純支持はり、片持

ちはり、両端自由はりのそれぞれの場合の材料減衰能を求め、片持ちはりについてはそれを実験で確かめている。

つぎに第3章では接合面が局部すべり運動をしているときの減衰機構を球と平面の接触による減衰能を求めることによって明らかにしようとしている。ここで取扱ったモデルは球が平面に接触し、球と平面との間に相対的な回転運動が存在する場合である。すなわち一つの平板が一定の締付力によって2球で締付けられ、平板が周期的なねじりモーメントをうけるモデルである。また解析においてはすべりのある領域での表面応力の接線成分は一定の摩擦係数と垂直応力成分との積であるとして減衰エネルギーを計算し、接合面減衰能を求めている。

第4章では工作機械の接合面などの二平面接合部を単純化したカップリング状モデルの特性について述べ、そのカップリング状モデルを正弦波状に励振した場合に、接合面を介した系の応答の波形が、正弦波状になるか矩形波状になるかの限界の条件を、第1章の解析を応用して求めている。

つづいて第5章では、接合面を介しての応答の波形が正弦波状になる場合の減衰能を求めている。まずカップリング状モデルの接合面が固着した場合の減衰能を求める。このために第2章で述べた材料減衰能の評価方法をねじり振動系に応用して、丸棒のねじり振動による材料減衰能を、振動モードを考慮して求めている。そしてこの解析を用いて、一端固定、他端に慣性質量のついた中空丸棒のねじり振動の理論解析をしている。この理論解析と接合面が固着した場合のカップリング状モデルの実験結果とを比較している。つぎに第3章で述べた方法によって、カップリング状モデルの接合面での局部すべりによる減衰能を評価している。ここでは、ねじり軸に垂直な接合面をもつねじり円筒の挙動を解析し、その解析をカップリング状モデルに適用して局部すべりによる減衰能を計算している。

第6章ではカップリング状モデルの矩形波状応答領域での減衰能を求めることを試みている。まず第1章の解析を応用してカップリング状モデルの矩形波状応答領域での振動特性を解析し、カップリング状モデルの接合面で全体すべり運動が発生

する場合の挙動を明らかにしている。そしてこの結果を実験によって確かめている。  
つぎに、矩形波状応答波形上の減衰自由振動波形から減衰能を評価する方法を述べている。

## 主 な 記 号

|            |                             |
|------------|-----------------------------|
| $A_1$      | 初期条件によって決まる定数               |
| $A_2$      | 初期条件によって決まる定数               |
| $A_r$      | はりの横断面積                     |
| $A$        | 境界条件によって決まる定数               |
| $a$        | 接触円の半径                      |
| $B$        | 境界条件によって決まる定数               |
| $C$        | 境界条件によって決まる定数               |
| $c$        | 粘性減衰定数                      |
| $c_t$      | ねじり粘性減衰定数                   |
| $c_{eff}$  | 等価粘性減衰定数                    |
| $D$        | 境界条件によって決まる定数               |
| $D_{cyc}$  | 1周期あたりの消散エネルギー              |
| $D_0$      | $\frac{1}{4}$ 周期あたりの消散エネルギー |
| $\Delta D$ | 微小面積での消散エネルギー               |
| $E$        | 縦弾性係数                       |
| $E_1$      | 球の縦弾性係数                     |
| $E_2$      | 平面の縦弾性係数                    |
| $\Delta E$ | 1周期あたりの系全体で消散されるエネルギー       |
| $e$        | 自然対数の底                      |
| $\Delta e$ | 1周期あたりの接合面以外で消散されるエネルギー     |
| $F$        | 伝達摩擦力                       |
| $F_a$      | 励振力の振幅                      |



|           |                                  |
|-----------|----------------------------------|
| $F_c$     | 接触円周上での摩擦力                       |
| $F_0$     | 固体摩擦力の絶対値                        |
| $F_s$     | 接合面が固着した場合の伝達摩擦力の振幅              |
| $F_u$     | 要素 $A$ に外部から加わる励振力               |
| $F_{u0}$  | 要素 $A$ に外部から加わる励振力の振幅            |
| $f_r$     | 励振振動数                            |
| $G$       | 横弾性係数                            |
| $h$       | はりの厚さ                            |
| $I$       | はりの断面 2 次モーメント                   |
| $I_2$     | 丸棒の先端についている質量慣性モーメント             |
| $I_p$     | 極断面 2 次モーメント                     |
| $J$       | 材質によって決まる定数                      |
| $J_A$     | 要素 $A$ の質量慣性モーメント                |
| $J_B$     | 要素 $B$ の質量慣性モーメント                |
| $J_S$     | 要素 $A$ , $B$ が一体となった場合の質量慣性モーメント |
| $j$       | 虚数単位                             |
| $k$       | ばね定数                             |
| $k_{eff}$ | 等価スティッフネス                        |
| $k_l$     | 回転レバを支持するばねのばね定数                 |
| $k_t$     | ねじりばね定数                          |
| $l_l$     | 回転レバの長さの $\frac{1}{2}$           |
| $l_0$     | 中心からおもりを吊したところまでの距離              |
| $l_1$     | 励振点の $x$ 座標                      |
| $m_A$     | 要素 $A$ の質量                       |
| $M_i$     | $i$ 次の振動モードでの曲げモーメント             |
| $M_0$     | 励振トルクの振幅                         |

|                   |                      |
|-------------------|----------------------|
| $M_T$             | $x = l$ でのトルク        |
| $m_B$             | 要素 $B$ の質量           |
| $m_{eff}$         | 等価マス                 |
| $N$               | 垂直力                  |
| $n$               | 振動モードの次数             |
| $n'$              | 材質によって決まる定数          |
| $P$               | 軸荷重                  |
| $P_c$             | 締付力                  |
| $p$               | 接触圧力                 |
| $p_e$             | 励振角振動数               |
| $q$               | 規準座標                 |
| $\Delta q$        | 相対すべり量               |
| $R$               | 球の半径                 |
| $R[\quad][\quad]$ | $[\quad][\quad]$ の実部 |
| $r$               | 半径                   |
| $r_1$             | 内半径                  |
| $r_2$             | 外半径                  |
| $r_a$             | 接触円すい面の半径            |
| $r_m$             | 最大応力になる位置での半径        |
| $r_p$             | 中空円筒部の内径             |
| $r_q$             | 中空円筒部の外径             |
| $r_0$             | すべりの限界半径             |
| $\Delta s$        | 微小面積                 |
| $T$               | トルク                  |
| $T_{cr}$          | 最大静止摩擦トルク            |
| $t$               | 時間                   |

|            |                               |
|------------|-------------------------------|
| $t_d$      | 伝達摩擦トルク                       |
| $t_{d0}$   | 固体摩擦トルクの絶対値                   |
| $t_{ds}$   | 接合面が固着した場合の伝達摩擦トルクの振幅         |
| $t_u$      | 要素 $A$ に外部から加わるトルク            |
| $t_{u0}$   | 要素 $A$ に外部から加わるトルクの振幅         |
| $U$        | 最大弾性エネルギー                     |
| $\Delta U$ | 比減衰エネルギー                      |
| $dU$       | 微小体積での最大弾性エネルギー               |
| $V$        | 体積                            |
| $dV$       | 微小体積                          |
| $V_i$      | あるせん断応力以下になっている部分の体積          |
| $V_n$      | $n$ 次の振動モードである応力以下になっている部分の体積 |
| $V_t$      | 全体積                           |
| $v_0$      | 速度振幅                          |
| $W$        | 1 周期中に振動系に蓄えられる最大エネルギー        |
| $W_i$      | $i$ 次の振動モードの規準関数              |
| $W_{mn}$   | $n$ 次の規準関数の最大値                |
| $W_0$      | 締付力を加えないときの荷重                 |
| $W_p$      | 締付力を加えたときの荷重                  |
| $\Delta W$ | 1 周期中に消散されるエネルギー              |
| $w$        | はりの横変位                        |
| $w_a$      | はりの中央での横変位                    |
| $X$        | 変位振幅                          |
| $x_A$      | 要素 $A$ の振動変位                  |
| $x_{A0}$   | 要素 $A$ の振動変位振幅                |
| $x$        | 長さ方向の座標                       |

|               |                        |
|---------------|------------------------|
| $x_e$         | 回転レバの端末での変位            |
| $x_m$         | 最大応力になる点の $x$ 座標       |
| $x_B$         | 要素 $B$ の振動変位           |
| $x_{B0}$      | 要素 $B$ の振動変位振幅         |
| $x_p$         | 変位を測定する点の $x$ 座標       |
| $x_1$         | 等応力線とはりの外皮との交点の $x$ 座標 |
| $y$           | 厚さ方向の座標                |
| $y_m$         | 応力が最大になる点の $y$ 座標      |
| $Z$           | 共振振動数での機械インピーダンス       |
| $Z_0$         | 比インピーダンス               |
| $Z_p$         | 極断面係数                  |
| $\alpha$      | 円すい半角                  |
| $\delta$      | $x_B$ と $F_u$ との位相差    |
| $\zeta$       | 減衰比                    |
| $\eta$        | 損失係数                   |
| $\theta$      | 要素 $A$ のねじり角変位         |
| $\theta_i$    | $i$ 次のねじり振動モードの規準関数    |
| $\theta_0$    | 要素 $A$ のねじり角変位振幅       |
| $\theta$      | 要素 $B$ のねじり角変位         |
| $\theta_a$    | ねじり角振幅                 |
| $\theta_{ai}$ | $i$ 次の振動モードのねじり角振幅     |
| $\theta_i$    | $i$ 次の振動モードのねじり角       |
| $\theta_0$    | 要素 $B$ のねじり角変位振幅       |
| $\theta_p$    | 初期回転角                  |
| $\theta_m$    | 球の最大ねじれ角               |
| $\theta_{s0}$ | 共振角振動数でのねじれ角振幅         |

|               |                               |
|---------------|-------------------------------|
| $\theta_1$    | 締付力を加えていないときの1周期後の回転角         |
| $\theta'_1$   | 締付力を加えたときの1周期後の回転角            |
| $\lambda$     | 固有値                           |
| $\lambda_i$   | $i$ 次の固有値                     |
| $\mu$         | 摩擦係数                          |
| $\mu_c$       | 接合面上の摩擦係数                     |
| $\mu_m$       | 最大静止摩擦係数                      |
| $\mu_{eq}$    | 等価最大静止摩擦係数                    |
| $\rho$        | 密度                            |
| $\sigma$      | 応力振幅                          |
| $\sigma_f$    | 疲労強度                          |
| $\sigma_m$    | 最大応力振幅                        |
| $\sigma_{mn}$ | $n$ 次の振動モードでの最大応力振幅           |
| $\sigma_n$    | $n$ 次の振動モードでの応力振幅             |
| $\sigma_{nr}$ | 垂直応力                          |
| $\tau$        | せん断応力                         |
| $\tau_a$      | 接合面が固着した場合の半径 $a$ のところでのせん断応力 |
| $\tau_{ai}$   | $i$ 次の振動モードでのせん断応力振幅          |
| $\tau_i$      | $i$ 次の振動モードでのせん断応力成分          |
| $\tau_{mai}$  | $i$ 次の振動モードでの最大せん断応力振幅        |
| $\tau_{ma}$   | 最大せん断応力振幅                     |
| $\tau_0$      | 限界せん断応力                       |
| $\tau_1$      | 接合面が固着した場合の内径でのせん断応力          |
| $\tau_2$      | 接合面が固着した場合の外径でのせん断応力          |
| $\tau_f$      | 疲労強度                          |
| $\Phi$        | 減衰能 ( $D_{cyc}/U$ )           |

|                |                           |
|----------------|---------------------------|
| $\phi_c$       | $\theta$ と $\Theta$ との位相差 |
| $\phi_{0c}$    | $t_d$ と $\theta$ との位相差    |
| $\phi_s$       | $x_A$ と $x_B$ との位相差       |
| $\omega$       | 角振動数                      |
| $\omega_i$     | $i$ 次の振動モードでの固有角振動数       |
| $\omega_A$     | 要素 $A$ の角振動数              |
| $\omega_{res}$ | 共振角振動数                    |
| $\pi$          | 円周率                       |
| $t_s$          | 付着時間                      |
| $\phi_{0s}$    | $F$ と $x_B$ との位相差         |

# 主 な 無 次 元 量

$$B_0 = \frac{\mu \sigma_{nr}}{\tau_2}$$

$$C_s = \frac{x_{A0} k \pi}{F_0 \varepsilon_s}$$

$$C_c = \frac{\Theta_0 k_t \pi}{t_{d0} \varepsilon_c}$$

$$D_s = \frac{x_{B0} k \pi}{F_0 \varepsilon_s}$$

$$D_c = \frac{\theta_0 k_t \pi}{t_{d0} \varepsilon_c}$$

$$k_0 = \frac{\sigma_f}{\sigma_{mn}}$$

$$n_s = \sqrt{\frac{k}{m_A}}$$

$$n_c = \sqrt{\frac{k_t}{J_B}}$$

$$n_r = \frac{r_1}{r_2}$$

$$S_s = \frac{k x_B}{F_s}$$

$$S_c = \frac{k_t \theta}{t_{ds}}$$

$$u_s = \frac{k x_B}{F_0}$$

$$v_s = \frac{k x_A}{F_0}$$

$$x_t = \frac{k_t \Theta_0}{t_{d0}}$$

$$y_t = \frac{k_t \Theta}{t_{d0}}$$

$$\alpha_s = \frac{k x_{A0}}{F_0}$$

$$\alpha_t = \frac{k_t \Phi_0}{t_{d0}}$$

$$\alpha_r = \frac{r_p}{r_0}$$

$$\beta_s = \frac{k x_{B0}}{F_0}$$

$$\beta_0 = \frac{r_0}{a}$$

$$\beta_t = \frac{k_t \theta_0}{t_{d0}}$$

$$\varepsilon_s = \frac{\pi n_s}{\omega}$$

$$\varepsilon_c = \frac{\pi n_c}{\omega}$$

$$\zeta_0 = \frac{\sigma_n}{\sigma_{mn}}$$

$$\eta_t = \frac{k_t \theta_0}{t_{ds}}$$

$$\kappa_s = \frac{m_A}{m_B}$$

$$\kappa_c = \frac{J_A}{J_B}$$

$$\mu_s = \frac{\omega_A}{n_s}$$

$$\mu_t = \frac{\omega_c}{n_c}$$

$$\nu_s = \frac{x_{B0}}{x_{A0}}$$

$$\nu_t = \frac{\theta_0}{\Theta_0}$$

$$\sigma_s = \frac{F_0}{F_s}$$

$$\sigma_t = \frac{t_{d0}}{t_{ds}}$$

$$\tau_s = n_s t$$

$$\tau_c = n_c t$$

$$h_s = \frac{c}{2\sqrt{m_B k}}$$

$$h_c = \frac{c t}{2\sqrt{J_B k_t}}$$

$$H_s = \frac{\sqrt{1 - h_s^2}}{h_s}$$

$$H_c = \frac{\sqrt{1 - h_c^2}}{h_c}$$

$$x_t = \frac{k_t \theta}{t_{d0}}$$

$$y_t = \frac{k_t \Theta}{t_{d0}}$$

$$\eta_s = \frac{k x_{B0}}{F_s}$$

$$\tau_{ss} = n_s t_s$$

$$\tau_{sc} = n_c t_s$$

## 第 1 章 接合面をもつ振動系の解析

### 1.1 ま え が き

本章は工作機械などの機械構造中に存在する結合部の減衰機構を明らかにするために、まず結合部を単純化した接合面をもつ振動模型を解析したものである。この種の研究は摩擦振動の研究として知られていて、亘理，岡村，西村，Sinclair らによって振動模型を設定して研究されており，それぞれの模型には特徴があるが，しかし図 1.1 のような振動模型で A，B 2 つの要素の質量を考慮して，B の固有振動数が励振振動数に比べて高い場合については解かれていない。したがって，本章では A，B 2 つの要素の質量を考慮して，B の固有振動数が励振振動数に比べて高い場合の振動系について解析を行う。

### 1.2 矩形波状応答発生限界

図 1.1 のような振動系の動特性を明らかにして，矩形波状応答発生限界を求める。要素 A，B から成るすべり結合部をもつモデルであり，この系の運動は A と B が一

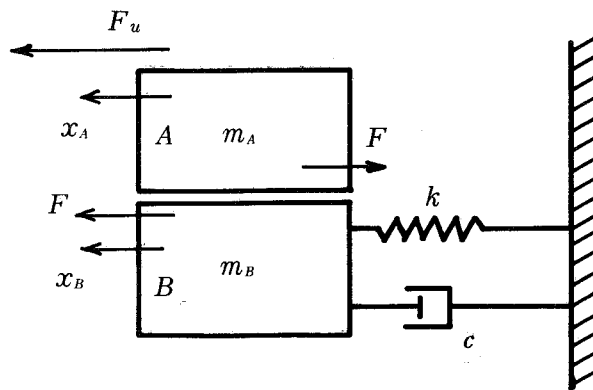


図 1.1 接合面をもつ振動模型



体となって運動する場合と A と B の間に相対すべりが存在する場合とがある。これらの 2 つの場合の接合面の接触機構は異なり、後者の場合、A と B の間には相対すべりが発生するので、A と B の間の相対すべり速度に関する摩擦力が振動系 B の外力となる。

質量  $m_A$  の剛体 B には、ばね定数  $k$  のばねと粘性抵抗係数  $c$  の減衰がそれぞれ固定され、角振動数  $\omega_A$  で振動する剛体 A と接合している。この剛体と剛体の間には、解析を簡単にするために、クローン摩擦を仮定して固体摩擦力  $F$  が作用するものとする。いま、B の変位を  $x_B$  とするとき、運動方程式はつぎのようになる。

$$m_B \frac{d^2 x_B}{dt^2} + c \frac{dx_B}{dt} + k x_B = F \quad (1.1)$$

振動する要素 A の変位を  $x_A$ 、振幅を  $x_{A0}$ 、 $x_B$  と位相差を  $\phi_s$  とすると

$$x_A = \overline{x_{A0}} e^{j\omega_A t} = x_{A0} e^{j(\omega_A t + \phi_s)} \quad (1.2)$$

となる。ただし、 $\overline{x_{A0}} = x_{A0} e^{j\phi_s}$  で複素振幅であり、 $\phi_s$  は  $x_B$  が正弦波状でない場合には励振振動数の振幅成分との位相差である。つぎに固体摩擦力の絶対値を  $F_0$  とすると  $F_0$  は両物体の相対速度の大きさに関係なく一定で、その向きは相対速度と反対になり、 $F$  はつぎのように表すことができる。

$$F = -F_0 S \left[ \frac{dx_B}{dt} - \frac{dx_A}{dt} \right] \quad (1.3)$$

ただし、 $S$  は符号関数であって、 $[ ]$  内が正になるかあるいは負になるかによってそれぞれ  $+1$ 、あるいは  $-1$  になる。解析を簡単にするためにつぎのように無次元化する。

$$\begin{aligned} n_s &= \sqrt{\frac{k}{m_B}} & h_s &= \frac{c}{2\sqrt{m_B k}} & u_s &= \frac{k x_B}{F_0} & \tau_s &= n_s t & v_s &= \frac{k x_A}{F_0} \\ \varepsilon_s &= \frac{\pi n_s}{\omega_A} & C_s &= \frac{x_{A0} k \pi}{F_0 \varepsilon_s} & D_s &= \frac{x_{B0} k \pi}{F_0 \varepsilon_s} & \alpha_s &= \frac{k x_{A0}}{F_0} & \mu_s &= \frac{\omega_A}{n_s} \end{aligned}$$

$$\nu_s = \frac{x_{B0}}{x_{A0}} \quad \kappa_s = \frac{m_A}{m_B} \quad (1.4)$$

ここで  $x_{B0}$  は  $B$  の変位振幅である。したがって式 (1.1) はつぎのようになる。

$$\ddot{u}_s + 2h_s \dot{u}_s + u_s = -S \quad (1.5)$$

また式 (1.2) より

$$\dot{v}_s = jC_s e^{j(\frac{\pi}{\epsilon_s} \tau_s + \phi_s)} \quad (1.6)$$

となり、式 (1.3) は

$$S \left[ \frac{dx_B}{dt} - \frac{dx_A}{dt} \right] = S \left[ n_s \frac{F_0 du_s}{kd\tau_s} - n_s \frac{F_0 dv_s}{kd\tau_s} \right] = S [\dot{u}_s - \dot{v}_s] \quad (1.7)$$

となる。ドット記号はすべて  $\tau_s$  についての導関数を表している。

さて、 $\dot{u}_s = \dot{v}_s$  になる瞬間にすべりが止って、その後ただちにすべりが起こるものとすれば、非線形振動の場合も含めて、 $\ddot{u}_s \neq \ddot{v}_s$  でなければならない。すなわち、すべり続けるためには

$$\left. \begin{array}{l} \ddot{u}_s > \ddot{v}_s \\ \ddot{u}_s < \ddot{v}_s \end{array} \right\} \quad (1.8)$$

が成立しなければならない。 $\ddot{u}_s$  は式 (1.5) から

$$\ddot{u}_s = -2h_s \dot{u}_s - u_s - S$$

となり、

条件 (1.8) の上の式では  $S$  は  $+1$  となるから

$$2h_s \dot{u}_s + u_s + 1 < \ddot{v}_s,$$

条件 (1.8) の下の式では  $S$  は  $-1$  となるので、

$$-2h_s \dot{u}_s - u_s + 1 < \ddot{v}_s$$

が得られる。この関係式からすべるための必要な条件は

$$|\ddot{v}_s + 2h_s \dot{u}_s + u_s| > 1 \quad (1.9)$$

が導びかれる。以下の解析においては  $\ddot{v}_s + 2h_s \dot{u}_s + u_s > 1$  を満足すれば、 $\ddot{v}_s +$

$2h_s\dot{u}_s + u_s < -1$  も成立するので、以後は  $\ddot{v}_s + 2h_s\dot{u}_s + u_s > 1$  の条件を解析する。  
式(1.4)を考慮するとつぎのようになる。

$$-\frac{\kappa_s}{\varepsilon_s} C_s e^{j(\frac{\pi}{\varepsilon_s} \tau_s + \phi_s)} + j2h_s D_s e^{j(\frac{\pi}{\varepsilon_s})\tau_s} + \frac{\varepsilon_s}{\pi} D_s e^{j(\frac{\pi}{\varepsilon_s})\tau_s} > 1 \quad (1.10)$$

整理すると

$$C_s \sqrt{\left(\frac{\varepsilon_s}{\pi} \nu_s - \frac{\pi}{\varepsilon_s} \cos \phi_s\right)^2 + \left(2h_s \nu_s - \frac{\pi}{\varepsilon_s} \sin \phi_s\right)^2} e^{j(\phi_s + \frac{\pi}{\varepsilon_s} \tau_s)} > 1 \quad (1.11)$$

となる。ここで

$$\phi_s = \tan^{-1} \left\{ \left(2h_s \nu_s - \frac{\pi}{\varepsilon_s} \sin \phi_s\right) / \left(\frac{\varepsilon_s}{\pi} \nu_s - \frac{\pi}{\varepsilon_s} \cos \phi_s\right) \right\}$$

である。

式(1.11)が成立するためには次式が成立しなければならない。

$$C_s \sqrt{\left(\frac{\varepsilon_s}{\pi} \nu_s - \frac{\pi}{\varepsilon_s} \cos \phi_s\right)^2 + \left(2h_s \nu_s - \frac{\pi}{\varepsilon_s} \sin \phi_s\right)^2} > 1 \quad (1.12)$$

式(1.4)を考慮して変形すると

$$\alpha_s > \frac{1}{\sqrt{\nu_s^2 - 2\nu_s \mu_s^2 \cos \phi_s + \mu_s^4 + 4h_s^2 \nu_s^2 \mu_s^2 - 4h_s \nu_s \mu_s^3 \sin \phi_s}} \quad (1.13)$$

となる。上式の右辺は

$$\begin{aligned} & \lim_{\nu_s \rightarrow 1, \phi_s \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{\nu_s^2 - 2\nu_s \mu_s^2 \cos \phi_s + \mu_s^4 + 4h_s^2 \nu_s^2 \mu_s^2 - 4h_s \nu_s \mu_s^3 \sin \phi_s}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{(1 - \mu_s^2)^2 + (2h_s \mu_s)^2}} \end{aligned} \quad (1.14)$$

となる。また  $\ddot{u}_s = \ddot{v}_s$  の場合

$$\ddot{u}_s = -\left(\frac{\pi}{\varepsilon_s}\right)^2 \frac{k x_{B0}}{F_0} e^{j\frac{\pi}{\varepsilon_s} \tau_s}$$

$$\ddot{v}_s = - \left( \frac{\pi}{\varepsilon_s} \right)^2 \frac{k x_{A0}}{F_0} e^{j(\frac{\pi}{\varepsilon_s} \tau_s + \phi_s)}$$

となる。したがって

$$x_{B0} = x_{A0} \quad , \quad \phi_s = 0 \quad (1.15)$$

となる。式(1.15)より  $u_s = v_s$  となり、AとBとは一体運動することになるので、すべり出す限界では

$$F = F_0 e^{j(\omega_A t + \phi_{0s})} \quad (\phi_{0s} \text{ は } x_B \text{ との位相差}) \quad (1.16)$$

となり、式(1.16)を式(1.1)に代入して無次元化すると

$$\ddot{u}_s + 2h_s \dot{u}_s + u_s = e^{j(\frac{\pi}{\varepsilon_s} \tau_s + \phi_{0s})}$$

となる。したがって

$$\alpha_s = \frac{1}{\sqrt{(1 - \mu_s^2)^2 + (2h_s \mu_s)^2}} \quad (1.17)$$

となる。式(1.14)も考慮して、この式がすべり発生限界となる。すなわちこれは一体運動から相対すべり運動に移る限界を表している。また式(1.17)が表す曲線 は接合面での摩擦力の振幅  $F_0$  が最大静止摩擦力に等しい場合の励振力の振幅と応答振幅との関係を表す周波数応答曲線である。実験では  $F$  の測定は困難であるから、すべり発生限界において、Aに外部から加わる振動力  $F_u$  の振幅  $F_{u0}$  と応答振幅との関係を求めてみる。接合面での摩擦力の振幅  $F_0$  はあくまでも最大静止摩擦力に等しいことになる。すると、次式が成立する。

$$F_u = F + m_A \frac{d^2 x_A}{dt^2} \quad (1.18)$$

前述したように  $F = F_0 e^{j(\omega_A t + \phi_{0s})}$  である。したがって  $F_u = F_{u0} e^{j(\omega_A t + \delta)}$  とすると式(1.18)と式(1.1)から

$$(m_B + m_A) \frac{d^2 x_B}{dt^2} + c \frac{dx_B}{dt} + kx_B = F_{u0} e^{j(\omega_A t + \delta)} \quad (\delta \text{ は } x_B \text{ との位相差}) \quad (1.19)$$

を得る。式(1.4)によって、式(1.19)を無次元化すると

$$(1 + \kappa_s) \ddot{u}_s + 2h_s \dot{u}_s + u_s = \frac{F_{u0}}{F_0} e^{j(\mu_s \tau_s + \delta)} \quad (1.20)$$

となる。したがって

$$\beta_s = \frac{k x_{B0}}{F_{u0}} = \alpha_s \frac{F_0}{F_{u0}} = \frac{1}{\sqrt{\{1 - (1 + \kappa_s) \mu_s^2\}^2 + (2h_s \mu_s)^2}} \quad (1.21)$$

となり、式(1.21)、式(1.17)から

$$\frac{F_0}{F_{u0}} = \frac{\sqrt{(1 - \mu_s^2)^2 + (2h_s \mu_s)^2}}{\sqrt{\{1 - (1 + \kappa_s) \mu_s^2\}^2 + (2h_s \mu_s)^2}} \quad (1.22)$$

を得る。この式(1.21)を図1.2に示す。また式(1.22)は伝達される力と外部か

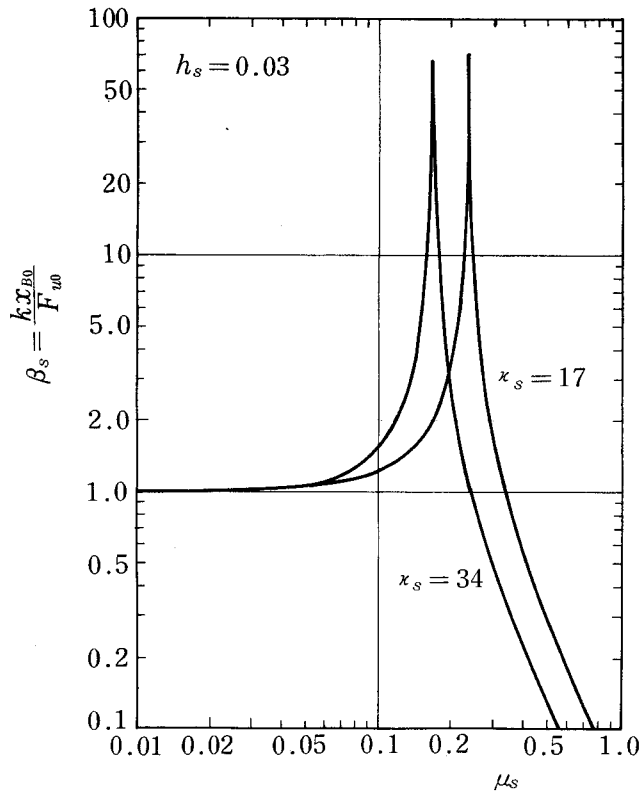


図 1.2  $\beta_s$  と  $\mu_s$  との関係

ら  $A$  に加わる力の比と励振振動数，2 要素の質量比，減衰能との関係を示している。

### 1.3 矩形波状応答が発生する場合の挙動

前節では矩形波状応答発生限界を明らかにした。要素  $B$  は摩擦振動を行うので，ここではこの運動を明らかにするためにつぎのような仮定のもとで解析を進める。

- (1) 付着・すべりが完全に生じる。
- (2) 要素  $A$  を励振する力は正弦波状である。
- (3) 全体すべりが発生した状態ではクーロンの摩擦の法則が成立する。
- (4) 最大静止摩擦力の時間依存性はないものとする。

これらの仮定を用いると，付着・すべりが発生する場合，付着の状態とすべりの状態で摩擦力  $F$  が異なり図 1.3 のようになる。また図 1.4 には  $A$ ， $B$  の要素の変位と伝達摩擦力の時間履歴を示している。いま， $B$  の変位  $x_B$  の時間履歴のうちで， $t_1$  か

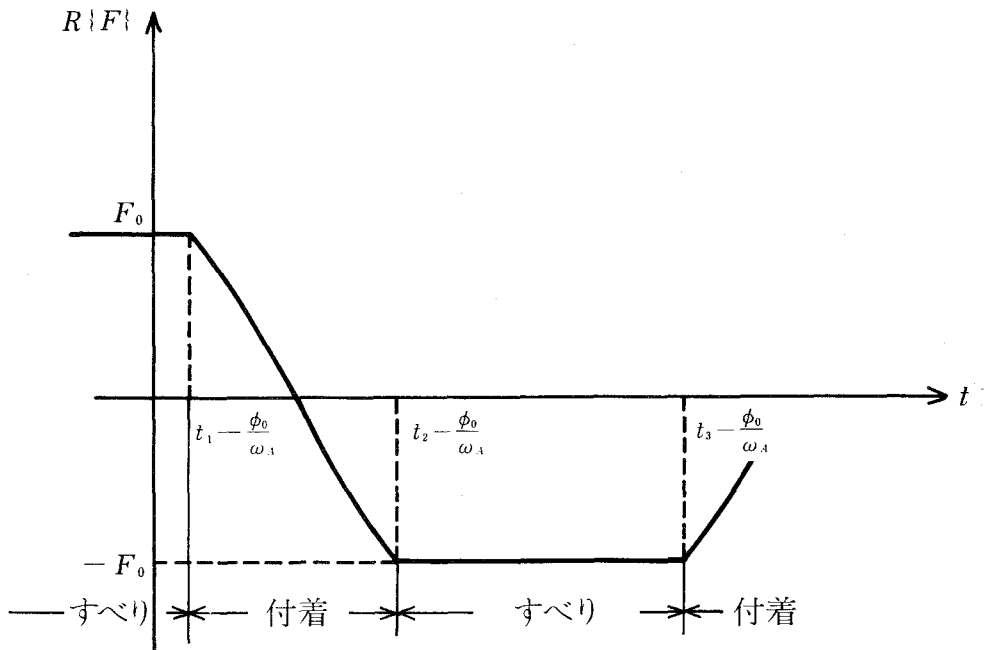


図 1.3 伝達摩擦力の時間履歴

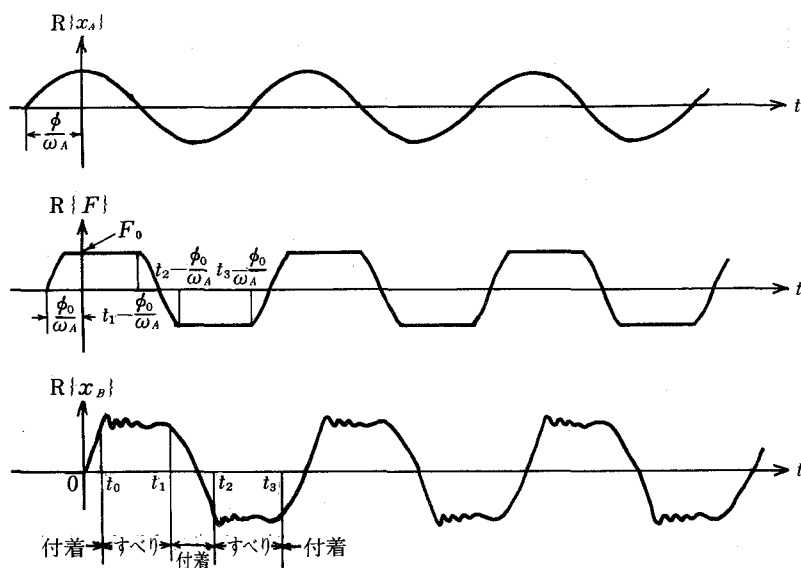


図 1.4 要素  $A, B$  の変位と伝達摩擦力の時間履歴

ら  $t_2$  の時間を付着時間領域,  $t_2$  から  $t_3$  の時間をすべり時間領域として, それぞれの領域にわけて解析する。要素  $A$  は角振動数  $\omega_A$ , 励振力  $F_u$  で励振され, 要素  $A$  の質量  $m_A$  は要素  $B$  の質量  $m_B$  に比べて無視できない大きさである。そして要素  $B$  は  $A$  と  $B$  の接合面での摩擦力によって励振され,  $m_B$  と  $k$  で決まる固有角振動数が  $\omega_A$  に比べて大きい場合を解析する。要素  $B$  の運動方程式は式 (1.1) から

$$m_B \frac{d^2 x_B}{dt^2} + c \frac{dx_B}{dt} + kx_B = F \quad (1.23)$$

であり, 付着領域では  $x_B$  と  $F$  との位相差を  $\phi_0$  とすると  $F$  は  $F_s e^{j(\omega_A t + \phi_0)}$  と表すことができるので, 式 (1.23) は

$$m_B \frac{d^2 x_B}{dt^2} + c \frac{dx_B}{dt} + kx_B = F_s e^{j(\omega_A t + \phi_0)} \quad (1.24)$$

となる。ここで

$$\beta_s = \frac{k x_{B0}}{F_0} \quad \eta_s = \frac{k x_{B0}}{F_s} \quad S_s = \frac{k x_B}{F_s} \quad \sigma_s = \frac{F_0}{F_s} \quad (1.25)$$

とすると、式(1.24)は次のようになる。

$$\ddot{S}_s + 2h_s \dot{S}_s + S_s = e^{j(\mu_s \tau_s + \phi_0)} \quad (1.26)$$

ここで、ドットは  $\tau_s$  についての導関数を表す。要素  $B$  の変位  $x_B$  は

$$x_B = x_{B0} e^{j\omega_A t} \quad (1.27)$$

とし、式(1.25)を用いて変形すると

$$S_s = \eta_s \cdot e^{j\mu_s \tau_s} \quad (1.28)$$

となる。式(1.28)を式(1.26)に代入して整理すると

$$\eta_s = \frac{1}{\sqrt{(1 - \mu_s^2)^2 + (2h_s \mu_s)^2}} \quad (1.29)$$

$$\phi_0 = \tan^{-1} \frac{2h_s \mu_s}{1 - \mu_s^2} \quad (1.30)$$

となる。次に要素  $A$  の変位  $x_A$  を振幅  $x_{A0}$ 、励振角振動数を  $\omega_A$  とし、 $x_B$  との位相角を  $\phi_s$  とすると

$$x_A = x_{A0} e^{j(\omega_A t + \phi_s)} \quad (1.31)$$

となる。すべり領域では固体摩擦力  $F$  が作用しているので、全体すべりが発生している場合は固体摩擦力の絶対値を  $F_0$  とする。 $F$  は両物体の相対速度に関係なく一定で、その向き相対速度と反対になるので、 $F$  を次のように表すことができる。

$$F = -F_0 S \left[ \frac{dx_B}{dt} - \frac{dx_A}{dt} \right] \quad (1.32)$$

ただし、 $S$  は符号関数である。図1.3から、 $t_2 - \phi'_0/\omega_A$  と  $t_3 - \phi_0/\omega_A$  との間の時間では  $F$  は  $-F_0$  となるので、運動方程式は

$$m_B \frac{d^2 x_B}{dt^2} + c \frac{dx_B}{dt} + k x_B = -F_0 \quad (1.33)$$

となる。ただし、すべり領域での粘性減衰定数  $c$  は接合面の特性によって決まる減衰能も含めたものを考える。式(1.4)を式(1.33)に適用すると

$$\ddot{u}_s + 2h_s \dot{u}_s + u_s = -1 \quad (1.34)$$



のように変形することができる。式(1.34)を解くと、 $u_s$ は

$$u_s = A_1 e^{(-h_s + j\sqrt{1-h_s^2})\tau_s} + A_2 e^{(-h_s - j\sqrt{1-h_s^2})\tau_s} - 1 \quad (1.35)$$

となる。ここで、 $A_1$ 、 $A_2$ は初期条件によって決まる積分定数である。図1.4から初期条件は

$$u_s = \frac{S_s}{\sigma_s} \quad (\tau_s = \tau_2) \quad (1.36)$$

$$\dot{u}_s = \frac{\dot{S}_s}{\sigma_s} \quad (\tau_s = \tau_2) \quad (1.37)$$

となる。式(1.35)、(1.28)と式(1.36)から

$$\frac{1}{\sigma_s} \eta_s e^{j\mu_s \tau_2} + 1 = A_1 e^{(-h_s + j\sqrt{1-h_s^2})\tau_2} + A_2 e^{(-h_s - j\sqrt{1-h_s^2})\tau_2} \quad (1.38)$$

となり、式(1.35)、(1.28)と式(1.37)から

$$\begin{aligned} & A_1 (-h_s + j\sqrt{1-h_s^2}) e^{(-h_s + j\sqrt{1-h_s^2})\tau_2} + A_2 (-h_s - j\sqrt{1-h_s^2}) e^{(-h_s - j\sqrt{1-h_s^2})\tau_2} \\ &= j\mu_s \frac{\eta_s}{\sigma_s} e^{j\mu_s \tau_2} \end{aligned} \quad (1.39)$$

となる。式(1.38)と式(1.39)から $A_1$ 、 $A_2$ は次のように求まる。

$$A_1 = \frac{e^{(h_s - j\sqrt{1-h_s^2})\tau_2}}{2\sqrt{1-h_s^2}} \left[ -j \left( \frac{\eta_s}{\sigma_s} e^{j\mu_s \tau_2} + 1 \right) e^{j \tan^{-1} \left[ \frac{\sqrt{1-h_s^2}}{h_s} \right]} + \mu_s \frac{\eta_s}{\sigma_s} e^{j\mu_s \tau_2} \right] \quad (1.40)$$

$$A_2 = \frac{e^{(h_s + j\sqrt{1-h_s^2})\tau_2}}{2\sqrt{1-h_s^2}} \left[ j \left( \frac{\eta_s}{\sigma_s} e^{j\mu_s \tau_2} + 1 \right) e^{j \tan^{-1} \left[ -\frac{\sqrt{1-h_s^2}}{h_s} \right]} - \mu_s \frac{\eta_s}{\sigma_s} e^{j\mu_s \tau_2} \right] \quad (1.41)$$

式(1.40)と式(1.41)を式(1.35)に代入して変形すると

$$u_s = \frac{e^{h_s(\tau_2 - \tau_s)}}{\sqrt{1-h_s^2}} \left\{ \left( \frac{\eta_s}{\sigma_s} \cos \mu_s \tau_2 + 1 \right) (\sin \tan^{-1} H_s \cos T_s - \cos \tan^{-1} H_s \sin T_s) \right.$$

$$\begin{aligned}
& + \mu_s \frac{\eta_s}{\sigma_s} \sin \mu_s \tau_2 \sin H_s \Big\} + j \frac{e^{h_s(\tau_2 - \tau_s)}}{\sqrt{1 - h_s^2}} \Big\{ \frac{\eta_s}{\sigma_s} \sin \mu_s \tau_2 (\sin \tan^{-1} H_s \cos T_s \\
& - \cos \tan^{-1} H_s \sin T_s) - \mu_s \frac{\eta_s}{\sigma_s} \cos \mu_s \tau_2 \sin T_s \Big\} - 1
\end{aligned} \tag{1.42}$$

を得る。ここで

$$H_s = \sqrt{1 - h_s^2} / h_s, \quad T_s = \sqrt{1 - h_s^2} \quad (\tau_2 - \tau_s) \tag{1.43}$$

である。したがって、 $u_s$  は複素数になるが、要素  $B$  の挙動を明らかにするために、これ以後  $u_s$  の実部について検討する。 $u_s$  の実部を  $R[u_s]$  とすると、式 (1.42) から

$$R[u_s] = u_{sa} \sin \{ \sqrt{1 - h_s^2} (\tau_2 - \tau_s) + \phi_t \} - 1 \tag{1.44}$$

となる。ここで

$$\begin{aligned}
u_{sa} = & \frac{e^{h_s(\tau_2 - \tau_s)}}{\sqrt{1 - h_s^2}} \Big\{ \mu_s \frac{\eta_s}{\sigma_s} \sin \mu_s \tau_2 - h_s \left( \frac{\eta_s}{\sigma_s} \cos \mu_s \tau_2 + 1 \right) \Big\}^2 \\
& + \left\{ \left( \frac{\eta_s}{\sigma_s} \cos \mu_s \tau_2 + 1 \right) \sqrt{1 - h_s^2} \right\}^2 \Big\}^{1/2}
\end{aligned} \tag{1.45}$$

$$\phi_t = \tan^{-1} \left\{ \frac{\left( \frac{\eta_s}{\sigma_s} \cos \mu_s \tau_2 + 1 \right) \sqrt{1 - h_s^2}}{\mu_s \frac{\eta_s}{\sigma_s} \sin \mu_s \tau_2 - h_s \left( \frac{\eta_s}{\sigma_s} \cos \mu_s \tau_2 + 1 \right)} \right\} \tag{1.46}$$

である。式 (1.44) の  $u_{sa} \sin \{ \sqrt{1 - h_s^2} (\tau_2 - \tau_s) + \phi_t \}$  を  $u_{ss}$  とすると、 $u_{ss}$  が最大になるのは  $u_{ss} = u_{sa}$  が成立するときで、

$$\tau_s = \tau_2 - \frac{\pi}{2\sqrt{1 - h_s^2}} + \frac{1}{\sqrt{1 - h_s^2}} \tan^{-1} \left\{ \frac{\left( \frac{\eta_s}{\sigma_s} \cos \mu_s \tau_2 + 1 \right) \sqrt{1 - h_s^2}}{\mu_s \frac{\eta_s}{\sigma_s} \sin \mu_s \tau_2 - h_s \left( \frac{\eta_s}{\sigma_s} \cos \mu_s \tau_2 + 1 \right)} \right\} \tag{1.47}$$

となる。次に付着時間を解析する。要素  $B$  の挙動が矩形波状になるときには接合面の運動が付着運動から付着すべり運動に変化する。この運動の限界を決定する要因

は伝達摩擦力  $F$  である。付着運動の場合は  $F$  は  $F_s e^{j(\mu_s \tau_2 + \phi_0)}$  になる。ただし、 $F_s \leq F_0$  である。しかし  $F_s$  が大きくなって、 $F_s > F_0$  になったならば、 $R\{F_s e^{j(\mu_s \tau_s + \phi_0)}\} \leq \pm F_0$  のときは付着運動であり、 $R\{F_s e^{j(\mu_s \tau_s + \phi_0)}\} > \pm F_0$  のときはすべり運動である。したがって、 $R\{F_s e^{j(\mu_s \tau_s + \phi_0)}\} = \pm F_0$  になる  $\tau_s$  で接合面ではすべり運動から付着運動あるいは付着運動からすべり運動になる。図 1.4 にも示されているように  $t = t_2$  すなわち  $\tau_s = \tau_2$  では次式が成立する。

$$-F_0 = R\{F_s e^{j(\mu_s \tau_2 + \phi_0)}\} \quad (1.48)$$

さらに、式 (1.25) の無次元量を用いて変形すると

$$-\sigma_s = R\{e^{j(\mu_s \tau_2 + \phi_0)}\} \quad (1.49)$$

となる。したがって、次式が成立する。

$$\cos(\mu_s \tau_2 + \phi_0) = -\sigma_s \quad (1.50)$$

式 (1.30) と式 (1.50) から

$$\tau_2 = \frac{1}{\mu_s} \left\{ \cos^{-1}(-\sigma_s) - \tan^{-1}\left(\frac{2h_s \mu_s}{1 - \mu_s^2}\right) \right\} \quad (1.51)$$

となり、同様にして  $\tau_1$  は

$$\tau_1 = \frac{1}{\mu_s} \left\{ \cos^{-1}(\sigma_s) - \tan^{-1}\left(\frac{2h_s \mu_s}{1 - \mu_s^2}\right) \right\} \quad (1.52)$$

となる。 $\tau_{ss}$  は図 1.4 から  $\tau_2 - \tau_1$  であるので

$$\tau_{ss} = \frac{1}{\mu_s} \{ \cos^{-1}(-\sigma_s) - \cos^{-1}(\sigma_s) \} \quad (1.53)$$

となる。

式 (1.53) から  $\tau_{ss}$  と  $\sigma_s$  との関係を  $\mu_s$  をパラメータとして示すと図 1.5 のようになる。図 1.5 から  $\sigma_s$  が 0 に近いとき、すなわち  $F_0$  が  $F_s$  に比べて非常に小さいときは  $\tau_{ss}$  は 0 に近くなり、付着時間  $t_s$  はほとんど 0 に等しくなることがわかる。また  $\sigma_s = 1$  すなわち  $F_0$  が  $F_s$  に等しいときは  $t_s = 1/(2f_r)$  となる。ここで  $f_r$  は励振振動数である。これは常に接合面が付着していることを意味する。付着時間は最大静

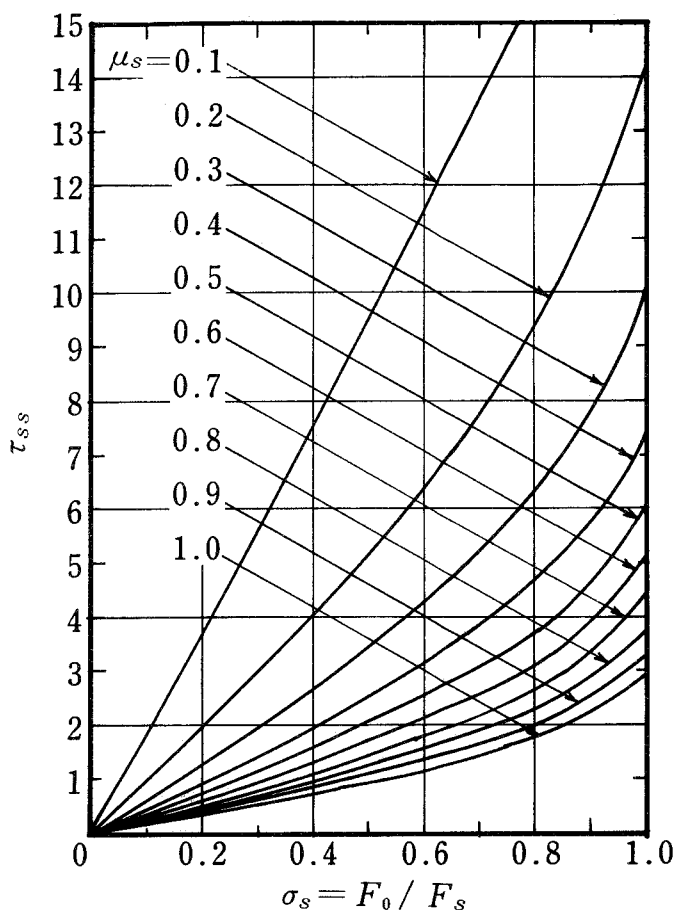


図 1.5  $\tau_{ss}$  と  $\sigma_s$  との関係

止摩擦力が大きくなり、励振力が小さくなれば増加することがわかる。このことは励振力が一定の場合は軸荷重が増加すれば付着時間が増加することを意味している。また励振力と最大静止摩擦力が等しい場合は接合面は常に付着している。付着時間は要素  $B$  の減衰比  $h_s$  と無関係であるが、最大静止摩擦力と励振力に依存する。また  $\mu_s$  の低いところすなわち要素  $B$  の固有振動数に比べて励振振動数が低いときは付着時間が長くなる。

次に矩形波状応答波形上に現われる減衰自由振動波形の最大振幅  $u_{s \max}$  を考えてみる。 $u_{s \max}$  は励振振動数を表す変数  $\mu_s$  と締付荷重を表す変数  $\sigma_s$  と要素  $B$  の減衰

能を表す変数  $h_s$  との関数である図 1.6 は式 (1.45) に式 (1.29), (1.47), (1.51) を代入して  $\mu_s = 0.12$  のときの  $u_{s\max}$  と  $h_s$  との関係を  $\sigma_s$  をパラメータとして

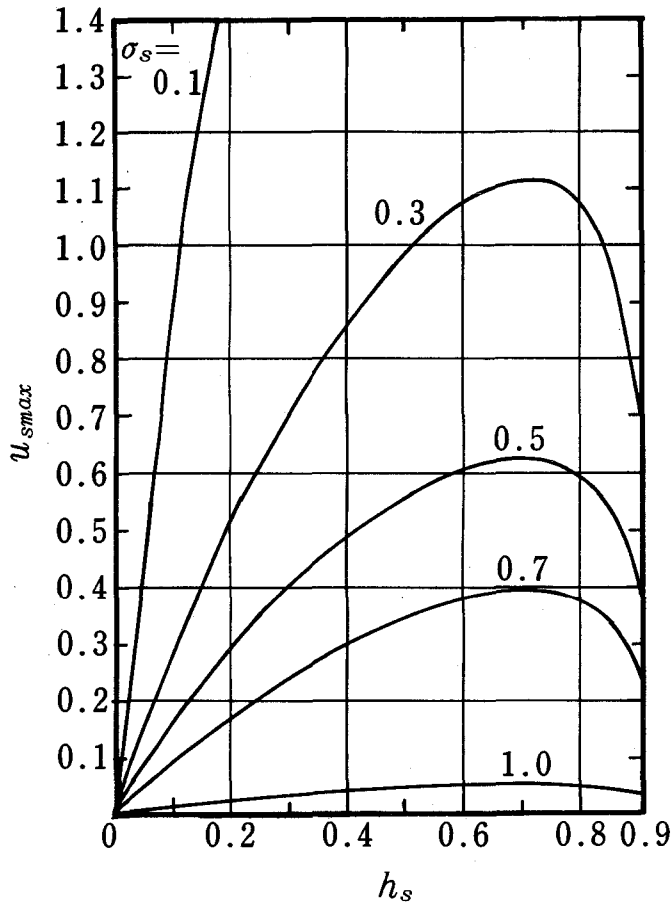


図 1.6 自由振動波形の最大振動振幅  
と減衰能との関係 ( $\mu_s = 0.12$ )

表している。減衰能  $h_s$  が 0.7 付近で最大振幅  $u_{s\max}$  は最大になる。図 1.7 は  $h_s = 0.3$  のときの最大振幅  $u_{s\max}$  と  $\sigma_s$  の関係を振動数比  $\mu_s$  をパラメータとして表したものである。 $\mu_s$  が一定の場合は  $\sigma_s$  が増加すれば、 $u_{s\max}$  は減少する。図 1.6, 図 1.7 に示したように  $u_{s\max}$ ,  $\mu_s$ ,  $\sigma_s$  が決まれば、要素 B の等価粘性減衰比  $h_s$  を評価することができることにもなる。

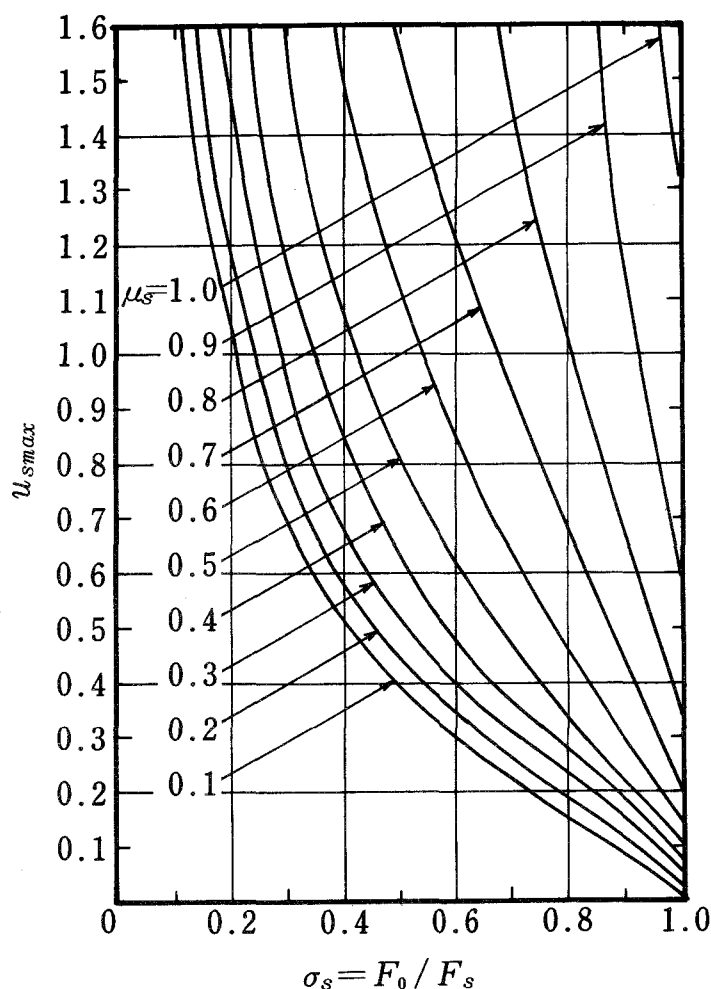


図 1.7 自由振動波形の最大振動振幅と軸荷重との関係 ( $h_s = 0.3$ )

#### 1.4 ま と め

すべり方向で拘束がなく，二要素の質量を考慮に入れ，しかも固有振動数が励振振動数に比べて高い場合の振動模型について，矩形波状応答発生限界とすべりの挙動を解析した。その結果をつぎのようにまとめることができる。

1. 接合面を介した系の応答が矩形波状になるかあるいは正弦波状になるかは，励振振動数，励振振幅，最大静止摩擦力，ばね定数，要素の質量，減衰定数に関係

し、軸荷重が大きくなるにつれて、最大静止摩擦力が大きくなるので、矩形波状応答は発生しにくくなる。

2. 接合面の付着時間は励振振動数が高くなればなるほど、短くなり、最大静止摩擦力と伝達摩擦力の振幅が等しいときは接合面は完全に付着し、最大静止摩擦力が大きくなり、励振力が小さくなるほど長くなる。
3. 矩形波状応答波形上の最大振幅は振動数比と等価粘性減衰比と、最大静止摩擦力と励振力の振幅との比で表すことができる。

## 第 2 章 材料減衰能の評価法<sup>96)</sup>

### 2.1 ま え が き

機械構造の減衰能を評価するときには，結合部の接合面での減衰能と各構成部材の材料減衰能を評価することができなければならない。特に結合部の締付力が大きく，接合面が完全に固着しているときは構成部材の材料減衰能が重要になる。そこで，本章では，Lazanの方法を拡張して振動モードを考慮したはりの材料減衰能を求める方法を述べる。

この方法では慣性力や振動モードを考慮して，部材の応力分布関数を求め，この関数と材料の特性であるエネルギー吸収関数とから材料減衰能を求める。このうち応力分布関数は部材の形状と負荷方法とに依存し，材料特性には依存しないという特徴をもっており，またエネルギー吸収関数は材料特性のみに依存し，部材の形状や負荷方法には依存しないという特徴をもっている。そしてこのエネルギー吸収関数として，Lazanらが消散エネルギーは応力振幅のみに依存するとして求めたものを用いる。つぎにここで提案した方法によって，簡単な部材である両端単純支持はり，片持ちはり，両端自由はりの曲げ振動による材料減衰能を計算し，片持ちはりについては実験で確かめた。

### 2.2 材料減衰能の評価

部材の材料減衰能はいろいろの尺度で評価されるが，本章では以下に述べるように損失係数で評価する。その損失係数 $\eta$ は最大弾性エネルギーを $U$ とし，応力分布が一樣でない場合も含めて1周期あたりの消散エネルギーを $D_{cyc}$ とすると

$$\eta = \frac{D_{cyc}}{2\pi U} \quad (2.1)$$



で表される。<sup>97)</sup>しかし、部材の全体が一様な応力ならば、次式のようにになる。

$$\eta = \frac{\Delta U}{2\pi U/V_t} \quad (2.2)$$

ここで、 $\Delta U$  は比減衰エネルギーすなわち 1 サイクル、単位体積あたりの消散エネルギーであり、<sup>98)</sup>  $V_t$  は部材の体積である。

### 2.3 エネルギー吸収関数

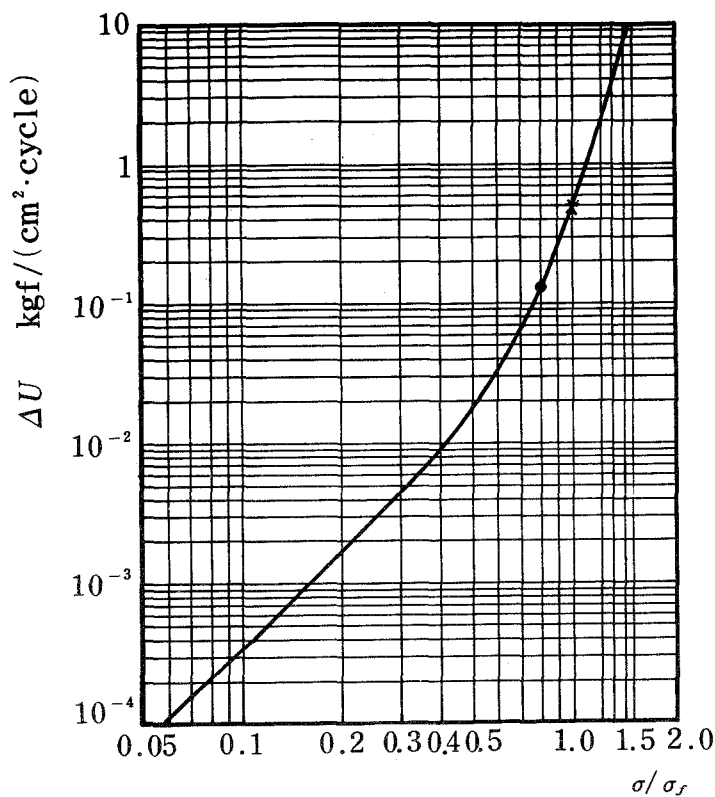
比減衰エネルギーは応力振幅、周波数、温度、応力履歴に影響されるといわれ、<sup>99)</sup> 簡単な形状の試験片で実験することによって求められるが、とくに応力振幅の影響が大きい。比減衰エネルギーと応力振幅との関係を表す関数をエネルギー吸収関数といい、Lazan, Yorgiadis は

$$\Delta U(\sigma) = J\sigma^{n'} \quad (2.3)$$

を提案している。<sup>100)</sup> ここで、 $J, n'$  は材質によって決まる定数である。この式では疲労限度  $\sigma_f$  の両側で  $n'$  の値が変わる。本研究では Lazan が多くの実験をまとめて改良した次式<sup>101)</sup>を用いることにする。

$$\Delta U(\sigma) = 0.0703 \left( \frac{\sigma}{\sigma_f} \right)^{2.3} + 0.422 \left( \frac{\sigma}{\sigma_f} \right)^8 \quad (2.4)$$

ここで、 $\Delta U(\sigma)$  [kgf/cm<sup>2</sup> · cycle] は  $\sigma$  の関数であり、 $\sigma_f$  は疲労限度、 $\sigma$ 、 $\sigma_f$  の単位は kgf/cm<sup>2</sup> である。材料の変形が線形ならば、比減衰エネルギー  $\Delta U$  は  $(\sigma/\sigma_f)^2$  に比例する。したがって、第 1 項が顕著になる低い応力振幅ではエネルギー吸収関数は近似的に線形になり、式 (2.4) は図 2.1 のようになる。＊印は応力振幅が疲労強度になるところで、比減衰エネルギーは 0.5 kgf/(cm<sup>2</sup> · cycle) となる。また●印は疲労強度の 80% の大きさの応力振幅で Lazan はこれを周期応力感度限界<sup>102)</sup>と呼んでおり、比減衰エネルギーの値は 0.12 kgf/(cm<sup>2</sup> · cycle) となる。 $\sigma/\sigma_f$  の値が 0.8 を越えると、比減衰エネルギーは急激に大きくなることがわかる。



$\Delta U$  : 比減衰エネルギー,  $\sigma$  : 応力振幅,  
 $\sigma_f$  : 疲労限度, 材質 (鋼)

図 2.1 エネルギー吸収関数

## 2.4 応力分布関数

部材に働く応力が一様である場合は式 (2.2) で損失係数を求めることができるが, 一般には部材が変形すると内部での応力分布が一様でない。この一様でない応力分布の状態を表す関数を応力分布関数という。この関数はある応力振幅  $\sigma$  以下になっている部分の体積を  $V$  とし, 最大応力振幅を  $\sigma_m$  として

$$f\left(\frac{\sigma}{\sigma_m}\right) = \frac{d(V/V_t)}{d(\sigma/\sigma_m)} \quad (2.5)$$

なる形で定義される。<sup>103)</sup> いま微小体積  $dV$  での部分での最大弾性エネルギー  $dU$  は  $\sigma^2 dV / (2E)$  (ここに  $E$  は縦弾性係数である) で表されるが, この  $dV$  に式 (2.5) を用いると

$$U = \frac{V_t}{2E\sigma_m} \int_0^{\sigma_m} \sigma^2 f\left(\frac{\sigma}{\sigma_m}\right) d\sigma \quad (2.6)$$

となり、また  $dV$  部分に対応する  $dD$  は  $\Delta U \cdot dV$  で表される。そこで式 (2.6) と同様に式 (2.5) を用いて

$$D = \frac{V_t}{\sigma_m} \int_0^{\sigma_m} \Delta U(\sigma) f\left(\frac{\sigma}{\sigma_m}\right) d\sigma \quad (2.7)$$

となる。式 (2.1), (2.6), (2.7) から

$$\eta = \frac{E \int_0^{\sigma_m} \Delta U(\sigma) f\left(\frac{\sigma}{\sigma_m}\right) d\sigma}{\pi \int_0^{\sigma_m} \sigma^2 f\left(\frac{\sigma}{\sigma_m}\right) d\sigma} \quad (2.8)$$

となる。式 (2.8) の  $\Delta U(\sigma)$  と  $f(\sigma/\sigma_m)$  が求まれば、部材の材料減衰能を損失係数で評価することができる。また  $f(\sigma/\sigma_m)$  を求めるときに振動モードを考慮すると、振動モードを考慮した材料減衰能を求めることができる。

## 2.5 曲げ振動によるはりの応力分布

曲げ振動状態でのはりの応力分布関数を求めるためにはまず強制振動の解析を行わなければならない。断面が一様なはりの曲げ強制振動方程式から、はりの  $l_1$  点に  $F_a \sin p_e t$  の強制力が働く場合の定常状態でのはりのたわみの式は

$$w(x, t) = \frac{F_a}{\rho A_r} \sin p_e t \sum_{i=1}^{\infty} \frac{[W_i(x)]_{x=l_1} W_i(x)}{(\omega_i^2 - p_e^2) \int_0^l W_i(x)^2 dx} \quad (2.9)$$

となる。<sup>104)</sup> ここで、 $W_i(x)$  は  $i$  次の振動モードの規準関数、 $W_i(l_1)$  は  $l_1$  点での規準関数、 $\rho$  は部材の密度、 $A_r$  ははりの横断面積、 $\omega_i$  は  $i$  次の振動モードの固有角振動数、 $p_e$  は強制角振動数、 $t$  は時間である。たわみ変形から応力を求めるために、次のような仮定を置く。

- 1) 部材を構成する材料の性質は等方等質であり、振動中もフックの法則が成立す

る。

- 2) 部材を構成する材料の引張弾性係数と圧縮弾性係数は等しい。
- 3) 部材の縦繊維に直交していた横断面は部材が変形した後も平面を保ち、かつ部材の縦繊維に直交する。
- 4) 部材の幅方向の振動状態は一様である。
- 5) 曲げ応力に比べてせん断応力は小さいとして、せん断応力による変形は無視する。

以上のような仮定のもとでの曲げ応力  $\sigma(x, y, t)$  とたわみ  $w(x, t)$  との関係式は

$$\sigma(x, y, t) = -E y \frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial x^2} \quad (2.10)$$

となる。ここで、 $E$  は縦弾性係数、 $y$  は厚さ方向の座標である。また式 (2.9) から強制振動しているはりの  $i$  次の振動モードのたわみの式は次のようになる。

$$w_i(x, t) = C_{fi} W_i(x) \sin p_e t \quad (2.11)$$

ここで

$$C_{fi} = \frac{F_a}{\rho A_r} \frac{W_i(l_1)}{(\omega_i^2 - p_e^2) \int_0^l W_i(x)^2 dx} \quad (2.12)$$

である。はりの断面 2 次モーメントを  $I$  とすると、 $i$  次の振動モードの曲げモーメント  $M_i$  は

$$M_i = -E I C_{fi} \sin p_e t \frac{d^2 W_i(x)}{dx^2} \quad (2.13)$$

となる。また式 (2.10) と式 (2.13) から曲げ応力は

$$\sigma_i(x, y, t) = C_{fi} \xi_i \sin p_e t \quad (2.14)$$

となる。ここで

$$\xi_i(x, y) = \frac{y}{I} \left\{ -E I \frac{d^2 W_i(x)}{dx^2} \right\} \quad (2.15)$$

である。このときの応力振幅  $\sigma(x, y)$  は

$$\sigma(x, y) = C_{fi} \xi_i = \frac{-EI C_{fi} \frac{d^2 W_i(x)}{dx^2} y}{I} \quad (2.16)$$

である。 $(x_m, y_m)$  点で  $\sigma$  が最大になるとすると、 $i$  次の振動モードの応力振幅の最大値  $\sigma_m$  は

$$\sigma_m = \frac{-EI C_{fi} \left[ \frac{d^2 W_i(x)}{dx^2} \right]_{x=x_m} y_m}{I} \quad (2.17)$$

となる。式 (2.16) と (2.17) とから等応力線の式は

$$y\left(\frac{\sigma}{\sigma_m}, x\right) = \frac{y_m \left[ \frac{d^2 W_i(x)}{dx^2} \right]_{x=x_m} \frac{\sigma}{\sigma_m}}{\frac{d^2 W_i(x)}{dx^2}} \quad (2.18)$$

となる。次に応力分布関数を求めるために解析をすすめる。 $\sigma/\sigma_m$  以下の応力振幅比である部分のはりの体積  $V$  は

$$V = 2b \int_0^l y\left(\frac{\sigma}{\sigma_m}, x\right) dx \quad (2.19)$$

である。ここで  $b$  ははりの幅である。 $V_t$  をはりの全体積とすると、体積応力関数  $V/V_t$  は次のようになる。

$$\frac{V}{V_t} = \frac{2b}{V_t} \int_0^l y\left(\frac{\sigma}{\sigma_m}, x\right) dx \quad (2.20)$$

はりの応力分布関数は式 (2.20) を (2.5) から

$$f\left(\frac{\sigma}{\sigma_m}\right) = \frac{d}{d(\sigma/\sigma_m)} \left[ \frac{2b}{V_t} \int_0^l y\left(\frac{\sigma}{\sigma_m}, x\right) dx \right] \quad (2.21)$$

となる。

## 2.6 両端単純支持はりの材料減衰能<sup>105)</sup>

はりの曲げ振動において、片持ちはりや両端自由はりは規準関数が複雑になるので、損失係数を解析的に求めることが困難である。しかし両端単純支持はりの場合は曲げ振動の規準関数が簡単になるので、この規準関数から、応力分布、体積応力関数、応力分布関数を解析的に求めることが比較的容易である。したがって、ここでは両端単純支持はりについて検討している。

長さ  $l$ 、厚さ  $h$  の長さ方向に一様な等方体の細いはりを両端単純支持とし、図 2.2 のように座標をとる。断面 2 次モーメントを  $I$ 、はりの単位長さ当りの質量を  $\mu_0$  とし、無減衰として、このはりの固有振動をしらべる。はりの  $y$  方向の変位の振幅

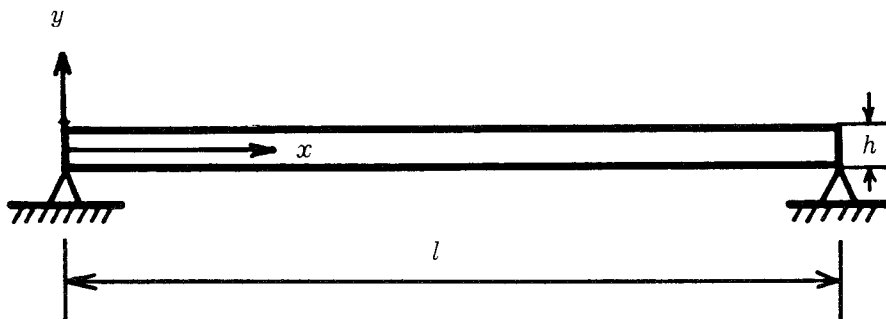


図 2.2 両端単純支持はり

を  $W(x)$ 、時間因子を  $\cos \omega t$  (ここで  $\omega$  は角振動数) とすると、よく知られているように

$$\frac{d^4 W}{dx^4} - \left( \frac{\lambda}{l} \right)^4 W = 0 \quad (2.22)$$

$$\left( \frac{\lambda}{l} \right)^4 = \frac{\mu_0 \omega^2}{EI} \quad (2.23)$$

が成立する。この解としては、 $\cosh(\lambda x/l)$ 、 $\sinh(\lambda x/l)$ 、 $\cos(\lambda x/l)$ 、 $\sin(\lambda x/l)$  の 4 つあるが、両端単純支持の条件より、最後のものだけとなり、 $\sin \lambda = 0$  を得る。

よって

$$\lambda = n\pi \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (2.24)$$

となり、また、第  $n$  次モードの振幅  $W_n(x)$  として

$$W_n = C \sin(n\pi x/l) \quad (2.25)$$

を得る。ここに  $C$  は定数である。次に第  $n$  次モードにおける応力振幅  $\sigma_n(x, y)$  は

$$\sigma_n = -E y \frac{d^2 W_n}{dx^2} = E y C \left( \frac{n\pi}{l} \right)^2 \sin \left( n\pi \frac{x}{l} \right) \quad (2.26)$$

となる。 $\sigma_n$  が最大になる場所を  $x_m, y_m$  とすると、 $x_m$  はまた  $W_n$  が最大になる位置でもある。 $x_m, y_m$  の値の組は  $2n$  とおりあるが、代表として図 2.2 において一番左上に位置するものを考えると、

$$\begin{aligned} x_m &= l/(2n) \\ y_m &= h/2 \end{aligned} \quad (2.27)$$

である。 $\sigma_n, W_n$  の最大値を  $\sigma_{mn}, W_{mn}$  とすると、

$$\sigma_{mn} = \frac{h}{2} E \left( \frac{n\pi}{l} \right)^2 W_{mn} \quad (2.28)$$

である。一方、式 (2.26) と式 (2.28) から

$$y = \frac{h}{2} \frac{1}{\sin(n\pi x/l)} \frac{\sigma_n}{\sigma_{mn}} \quad (2.29)$$

となる。

式 (2.8) に示したように、両端単純支持はりの材料減衰能は両端単純支持はりの応力分布関数  $f(\sigma/\sigma_m)$  とエネルギー吸収関数  $4U(\sigma)$  が求まれば損失係数  $\eta$  で表すことができる。応力分布関数はつぎのようにして求める。式 (2.29) から、はりの外皮と等応力線との交点のうち一番左のものを求めると、 $x$  座標は

$$\frac{x}{l} = \frac{1}{n\pi} \sin^{-1} \left[ \frac{\sigma_n}{\sigma_{mn}} \right] \quad (2.30)$$

となる。 $\sigma_n$  より小さい応力になっている部分のはりの体積  $V_n$  はつぎのようにして

求めることができる。式(2.29)から両端単純支持はりの等応力線は  $n$  次の振動モードでは図2.3のようになる。 $x$  の0から  $l$  までの斜線の部分の面積は  $0M_1$  の斜線

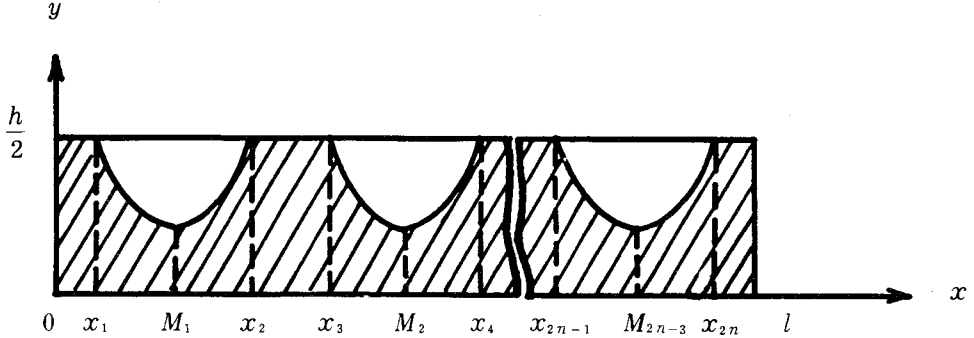


図 2.3 等応力線（両端単純支持はり， $n$  次の振動モード）

の部分の面積の  $2n$  倍になる。またはりの等応力線は  $x$  軸に関して対称であるから、 $0 \leq y \leq h/2$  の範囲で計算してこれを2倍すればよい。以上のことから  $V_n$  ははりの幅を  $b$  とすると

$$V_n = 4nb \left( \frac{h}{2} x_1 + \int_{x_1}^{\frac{l}{2n}} y dx \right) \quad (2.31)$$

となる。さて、式(2.30)の  $x_1$  と式(2.29)の  $y$  とを式(2.31)の右辺に代入して積分演算をすすめる。すると、ややめんどろな演算ののちに、 $V_n/V_t$  すなわち  $V_n/bhl$  を  $\sigma_n/\sigma_{mn}$  だけの関数として求めることができる。これを式(2.5)の右辺に用いると、 $f(\sigma_n/\sigma_{mn})$  を求めることができる。さらにこれを式(2.8)の右辺に代入して式(2.4)を用いると、 $\eta$  を求めることができる。以上を数値計算に便利ないようにまとめると、次のようになる。

$$\zeta_0 = \sigma_n/\sigma_{mn} \quad (2.32)$$

$$k_0 = \sigma_f/\sigma_{mn} \quad (2.33)$$

$$\varphi = (1 - \zeta_0^2)^{-1/2} \quad (2.34)$$



$$\phi = \tan \{ (\sin^{-1} \zeta_0) / 2 \} \quad (2.35)$$

$$\frac{V_n}{V_t} = \frac{2}{\pi} (\sin^{-1} \zeta_0 - \zeta_0 \log \phi) \quad (2.36)$$

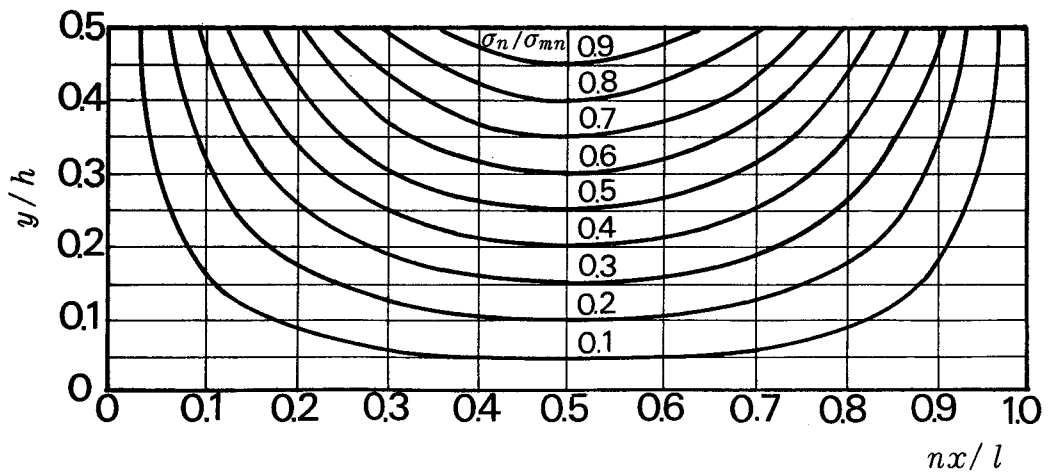
$$f = \frac{2}{\pi} \left\{ \varphi - \log \phi - \frac{\zeta_0 \varphi}{2} \left( \frac{1}{\phi} + \phi \right) \right\} \quad (2.37)$$

$$\Delta U = 0.0703 \left( \frac{\zeta_0}{k_0} \right)^{2.3} + 0.422 \left( \frac{\zeta_0}{k_0} \right)^8 \quad (2.4)'$$

$$\eta = \frac{E \int_0^1 \Delta U \cdot f \cdot d\zeta_0}{\pi \sigma_{mn}^2 \int_0^1 \zeta_0^2 \cdot f \cdot d\zeta_0} \quad (2.38)$$

なお  $E$  と  $\sigma_{mn}$  との単位は  $\text{kgf/cm}^2$  である。

こうして、両端単純支持はりについて、体積応力関数は式(2.36)で、応力分布関数は式(2.37)で、さらに式(2.4)'のエネルギー吸収関数の場合の損失係数は式(2.38)で表すことができる。そこでこのように求まった損失係数から材料減衰能を評価することができる。



$h$  : はりの厚さ,  $l$  : はりの長さ,  $\sigma_n$  : 応力振幅,  $\sigma_{mn}$  : 最大応力振幅

図 2.4 a  $n$  次の振動モードの等応力曲線

なお式(2.25)からも予見できたことではあるが、 $V_n/V_t$ 、 $f$ 、 $\eta$ が振動モードの次数には無関係であることが、式(2.32)～(2.38)からもわかる。

以上の解析結果を具体的に計算するとつぎのようになる。図2.4 a は式(2.29)を図にしたものである。全長  $l$  のうち左の  $l/n$  の部分であり、全体はこのような図が  $n$  回繰返される。両端単純支持はりの第  $n$  次の振動モードでは  $nx/l$  が 0.5 のとき腹となり、 $nx/l$  が 0 と 1 のとき節となる。また図 2.4 b は応力分布と振動モードの関係を示している。

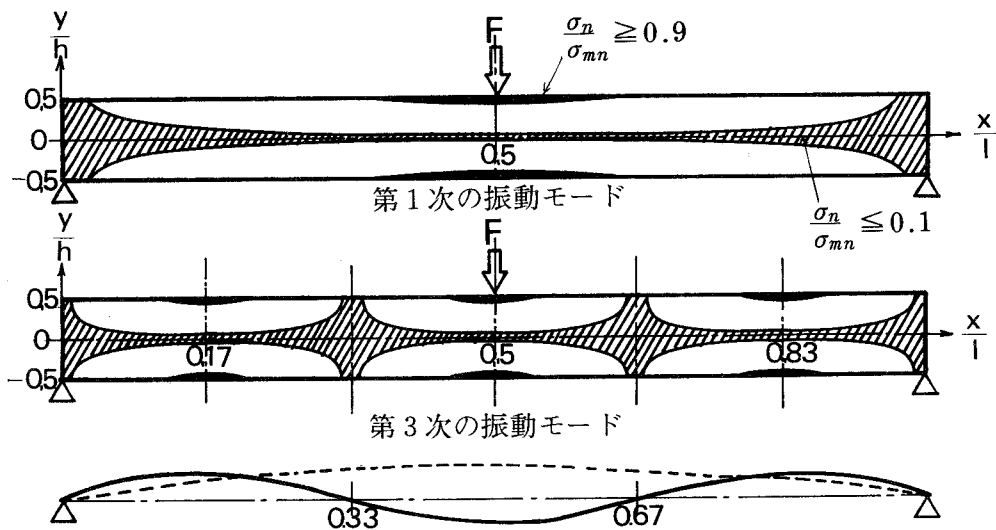
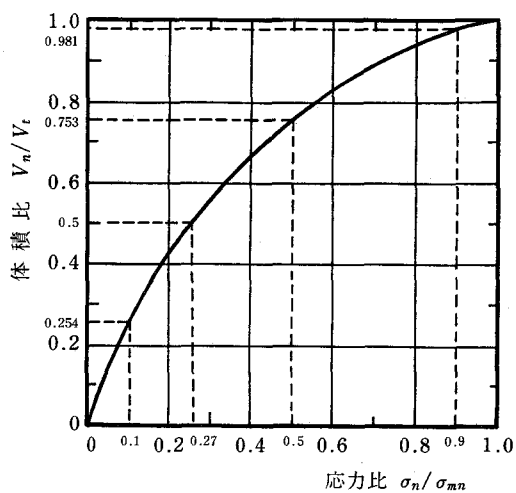


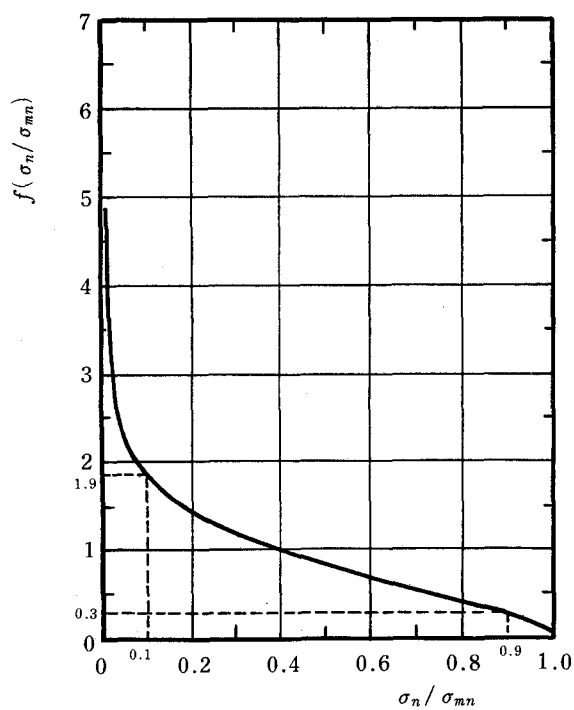
図 2.4 b 応力分布と振動モード

図 2.5 は式(2.36)を計算したものであり、 $\sigma_n/\sigma_{mn}$  が 0.5 以下の体積は全体積の 75.3% となる。また応力比  $\sigma_n/\sigma_{mn}$  の値が 0.27 以下の体積は全体積の 50% となる。また応力比が 0.1 以下の場合の体積は全体積の 25.4% となり、応力比が 0.9 以上の場合の体積は全体の 2% となる。この体積応力関数をもとにして、ある応力レベルのときに、その応力レベル以下の体積を、どのくらい増加させるかを表している応力分布関数を求めると、図 2.6 のようになる。この図は式(2.37)から求められ、この関数が振動モードの次数に影響されないのは式(2.25)から明らかであ



$V_n$ : 体積,  $V_t$ : 全体積,  $\sigma_n$ : 応力振幅  
 $\sigma_{mn}$ : 最大応力振幅

図 2.5 体積応力関数



$\sigma_n$ : 応力振幅,  $\sigma_{mn}$ : 最大応力振幅

図 2.6 応力分布関数

る。

つぎに式(2.38)から、最大応力振幅と損失係数との関係を計算すると、図2.7のようになる。この図が両端単純支持はりの損失係数と最大応力振幅との関係を表している。最大応力振幅の増加とともに損失係数は増加する傾向があり、最大応力振幅が疲労強度に等しい場合、 $\eta$ は0.032で、最大応力振幅が疲労強度の80%のときの損失係数 $\eta$ は0.012となる。また実際によく知られている材料減衰能の値は損失係数 $\eta$ で表すと軟鋼の場合、0.002~0.006であるといわれている。<sup>106)</sup>この値

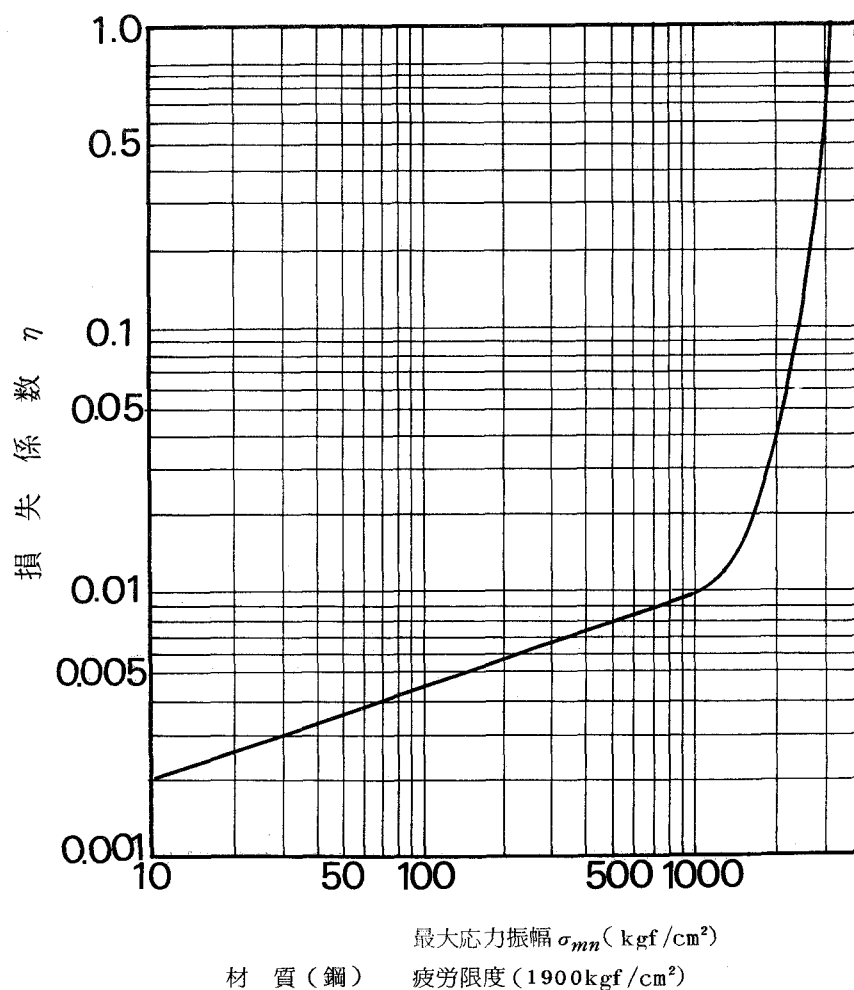


図 2.7 最大応力振幅と損失係数との関係

は図 2.7 によると、 $\sigma_m$  が  $10 \sim 200 \text{ kgf/cm}^2$  となる。

また両端単純支持はりの場合は図 2.4 a から、中央でしかも外皮のところに最大応力が働くので、その最大応力振幅とたわみとの関係を明らかにする。式 (2.28) から最大応力振幅とはりの中央での横変位振幅との関係は  $l$  を  $70 \text{ cm}$ 、 $h$  を  $0.34 \text{ cm}$ 、 $x_p/l$  を  $0.5$  とし、 $E$  は鋼の  $2.1 \times 10^6 \text{ kgf/cm}^2$  を用いると、固有値が  $3.1416$  である第 1 次の振動モードでは

$$\sigma_m = 0.0719 \times 10^4 w_a \quad (2.39)$$

となり、第 3 次の振動モードでは固有値が  $9.4248$  であるので

$$\sigma_m = 0.647 \times 10^4 w_a \quad (2.40)$$

となる。ここで  $\sigma_m$  は  $\text{kgf/cm}^2$  であり、 $w_a$  は  $\text{cm}$  である。一般にここで取扱った寸法の両端単純支持はりが部材として用いられる場合、許容される中心でのたわみ量は  $1 \text{ mm}$  位と考えられるので、最大応力が働く中心で  $1 \text{ mm}$  たわむとすると、第 1 次の振動モードでは式 (2.39) から最大応力振幅が  $72 \text{ kgf/cm}^2$  となり、損失係数  $\eta$  は  $0.004$  となる。また第 3 次の振動モードでは式 (2.40) から最大応力振幅は  $647 \text{ kgf/cm}^2$  で損失係数  $\eta$  は  $0.0085$  となる。以上のように損失係数は振動モードの次数には無関係で部材の最大応力振幅によって決まることがわかり、両端単純支持はりの材料減衰能を振動モードの次数を考慮して損失係数で評価することができた。

## 2.7 片持ちはりと両端自由はりの材料減衰能

2.6 節で述べたように損失係数を評価するには図 2.8 のような手順で行えばよい。片持ちはりと両端自由はりの応力分布関数を求めるために図 2.8 の手順にしたがって等応力線を求める。それぞれのはりの振動数方程式はつぎのようになる。

$$\text{片持ちはり} \quad 1 + \cosh \beta l \cos \beta l = 0 \quad (2.41)$$

$$\text{両端自由はり} \quad \cosh \beta l \cos \beta l - 1 = 0 \quad (2.42)$$

また  $i$  次の振動モードの規準関数は片持ちはりの場合

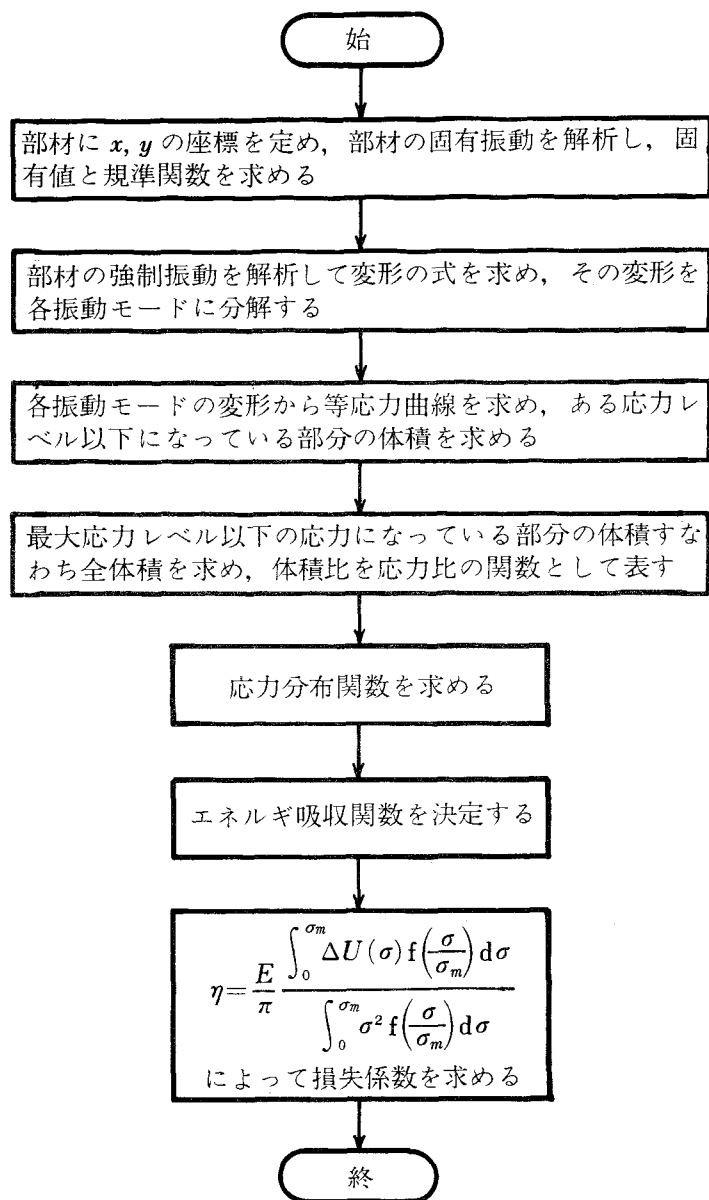


図 2.8 損失係数を求める手順

$$\begin{aligned}
 W_i(x) = & C \{ (\sinh \beta_i l + \sin \beta_i l) (\cosh \beta_i x - \cos \beta_i x) \\
 & - (\cosh \beta_i l - \cos \beta_i l) (\sinh \beta_i x + \sin \beta_i x) \}
 \end{aligned} \tag{2.43}$$

となり，また両端自由はりの場合

$$W_i(x) = C \left\{ \cosh \beta_i x + \cos \beta_i x - \left( \frac{\cosh \beta_i l - \cos \beta_i l}{\sinh \beta_i l - \sin \beta_i l} \right) \right. \\ \left. \times (\sinh \beta_i x + \sin \beta_i x) \right\} \quad (2.44)$$

となる。ここで  $C$  は定数である。最大応力が働く位置が  $x = x_m$ ， $y = y_m$  であるとすると，片持ちはりの場合は  $x_m = 0$ ， $y_m = h/2$  となるので，これらの値と式 (2.43) と式 (2.18) から等応力線は

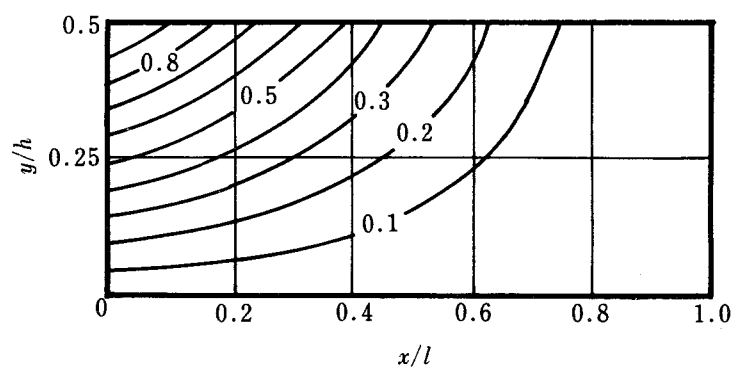
$$y\left(\frac{\sigma}{\sigma_m}, x\right) = \frac{h \frac{\sigma}{\sigma_m} (\sinh \beta_i l + \sin \beta_i l)}{(\sinh \beta_i l + \sin \beta_i l)(\cosh \beta_i x + \cos \beta_i x) - (\cosh \beta_i l + \cos \beta_i l)(\sinh \beta_i x + \sin \beta_i x)} \quad (2.45)$$

となる。式 (2.44) と式 (2.18) とから両端自由はりの等応力線は

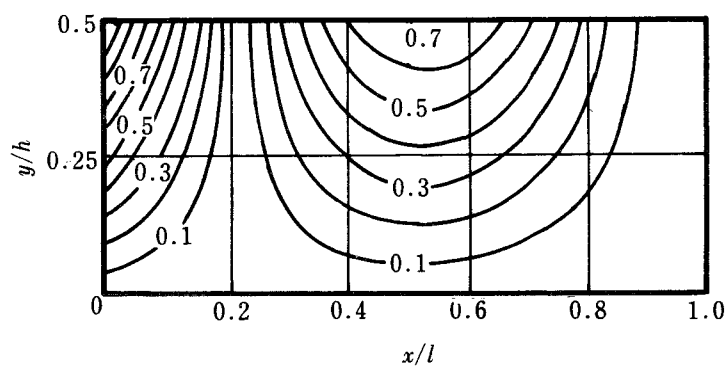
$$y\left(\frac{\sigma}{\sigma_m}, x\right) = \frac{y_m \left\{ \cosh \beta_i x_m - \cos \beta_i x_m - \left( \frac{\cosh \beta_i l - \cos \beta_i l}{\sinh \beta_i l - \sin \beta_i l} \right) \right.}{\cosh \beta_i x - \cos \beta_i x - \left( \frac{\cosh \beta_i l - \cos \beta_i l}{\sinh \beta_i l + \sin \beta_i l} \right)} \\ \left. \times (\sinh \beta_i x_m - \sin \beta_i x_m) \right\} \frac{\sigma}{\sigma_m}}{\times (\sinh \beta_i x - \sin \beta_i x)} \quad (2.46)$$

となる。式 (2.45) で計算した結果を図 2.9 に示す。また式 (2.46) については第 1 次と第 3 次の振動モードのみについて計算し，その結果を図 2.10 に示す。これらの結果から，第 1 次の振動モード，第 2 次の振動モード，第 3 次の振動モードの等応力振幅比以下の部分は，その形状は異なるが体積はほぼ等しいことがわかる。

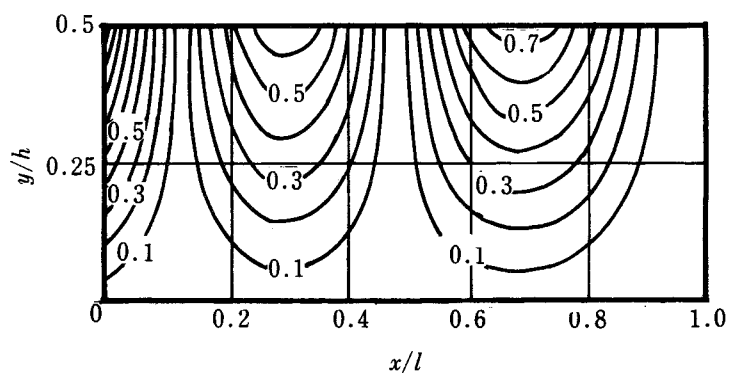
等応力線から応力分布関数を求めるために，式 (2.45) と (2.46) を式 (2.20) に代入すると体積応力関数は図 2.11 のようになる。この図において，各はりの振



1 次の振動モード



2 次の振動モード

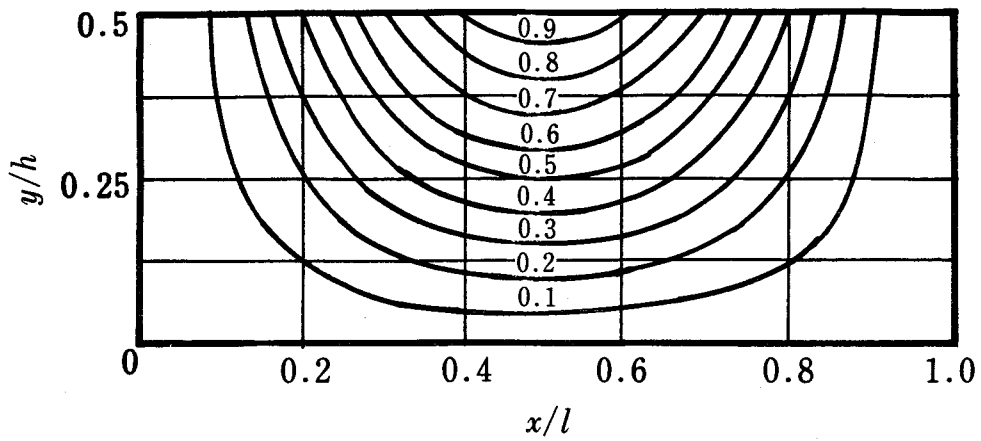


3 次の振動モード

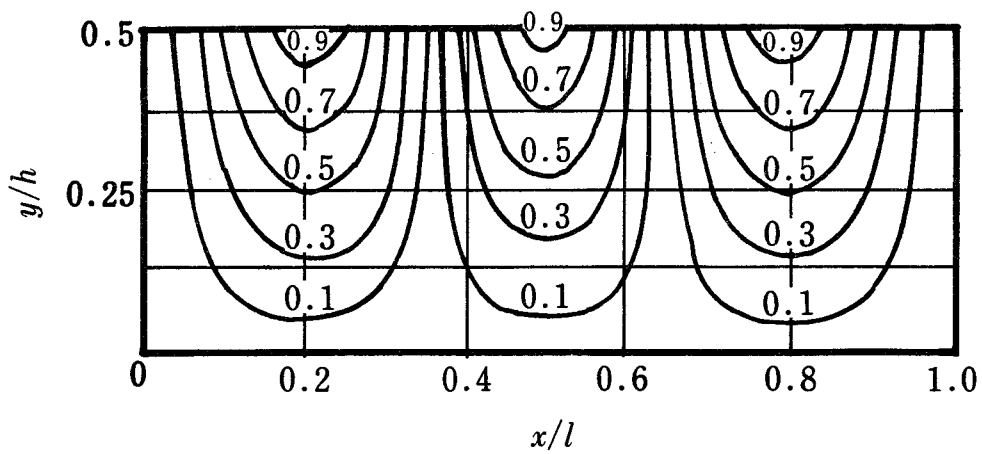
$\sigma$  : 応力振幅,  $\sigma_m$  : 最大応力振幅,  $h$  : はりの厚さ  
 $l$  : はりの長さ, パラメータ :  $\sigma/\sigma_m$

図 2.9 片持ちはりの等応力線図





1 次の振動モード



3 次の振動モード

$\sigma$  : 応力,  $\sigma_m$  : 最大応力,  $h$  : はりの厚さ  
 $l$  : はりの長さ, パラメータ :  $\sigma/\sigma_m$

図 2.10 両端自由はりの等応力線図

動モードが変化しても体積応力関数はあまり変化しないことがわかる。これらの体積応力関数と式(2.21)から、応力分布関数  $f(\sigma/\sigma_m)$  を計算すると、片持ちはりの場合、第1次、第2次、第3次の振動モードでは、それぞれ

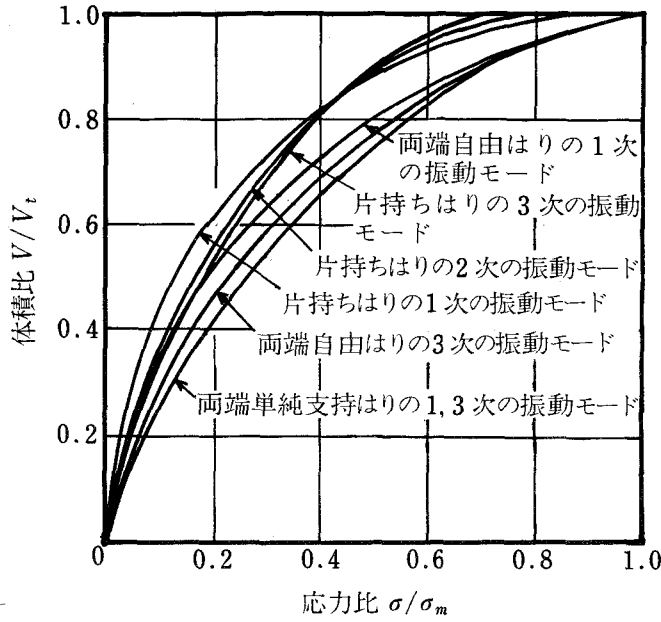


図 2.11 体積応力関数

$$\begin{aligned}
 f\left(\frac{\sigma}{\sigma_m}\right) = & 10.9 - 223\left(\frac{\sigma}{\sigma_m}\right) + 2130\left(\frac{\sigma}{\sigma_m}\right)^2 - 10300\left(\frac{\sigma}{\sigma_m}\right)^3 \\
 & + 26500\left(\frac{\sigma}{\sigma_m}\right)^4 - 34600\left(\frac{\sigma}{\sigma_m}\right)^5 + 13400\left(\frac{\sigma}{\sigma_m}\right)^6 \\
 & + 17800\left(\frac{\sigma}{\sigma_m}\right)^7 - 22200\left(\frac{\sigma}{\sigma_m}\right)^8 + 7200\left(\frac{\sigma}{\sigma_m}\right)^9 \quad (2.47)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 f\left(\frac{\sigma}{\sigma_m}\right) = & 7.25 - 123\left(\frac{\sigma}{\sigma_m}\right) + 1130\left(\frac{\sigma}{\sigma_m}\right)^2 - 5420\left(\frac{\sigma}{\sigma_m}\right)^3 \\
 & + 13900\left(\frac{\sigma}{\sigma_m}\right)^4 - 18000\left(\frac{\sigma}{\sigma_m}\right)^5 + 6700\left(\frac{\sigma}{\sigma_m}\right)^6 \\
 & + 9730\left(\frac{\sigma}{\sigma_m}\right)^7 - 11700\left(\frac{\sigma}{\sigma_m}\right)^8 + 3740\left(\frac{\sigma}{\sigma_m}\right)^9 \quad (2.48)
 \end{aligned}$$

$$f\left(\frac{\sigma}{\sigma_m}\right) = 6.38 - 97.0\left(\frac{\sigma}{\sigma_m}\right) + 876\left(\frac{\sigma}{\sigma_m}\right)^2 - 4180\left(\frac{\sigma}{\sigma_m}\right)^3$$

$$\begin{aligned}
& + 10700 \left( \frac{\sigma}{\sigma_m} \right)^4 - 13800 \left( \frac{\sigma}{\sigma_m} \right)^5 + 5030 \left( \frac{\sigma}{\sigma_m} \right)^6 \\
& + 7840 \left( \frac{\sigma}{\sigma_m} \right)^7 - 9340 \left( \frac{\sigma}{\sigma_m} \right)^8 + 2990 \left( \frac{\sigma}{\sigma_m} \right)^9 \quad (2.49)
\end{aligned}$$

となる。また両端自由はりの場合，第1次の振動モードでは

$$f\left(\frac{\sigma}{\sigma_m}\right) = 4.74 - 28.7 \left( \frac{\sigma}{\sigma_m} \right) + 76.8 \left( \frac{\sigma}{\sigma_m} \right)^2 - 88.2 \left( \frac{\sigma}{\sigma_m} \right)^3 + 35.9 \left( \frac{\sigma}{\sigma_m} \right)^4 \quad (2.50)$$

となり，第3次の振動モードでは

$$f\left(\frac{\sigma}{\sigma_m}\right) = 3.87 - 20.3 \left( \frac{\sigma}{\sigma_m} \right) + 51.7 \left( \frac{\sigma}{\sigma_m} \right)^2 - 58.5 \left( \frac{\sigma}{\sigma_m} \right)^3 + 23.5 \left( \frac{\sigma}{\sigma_m} \right)^4 \quad (2.51)$$

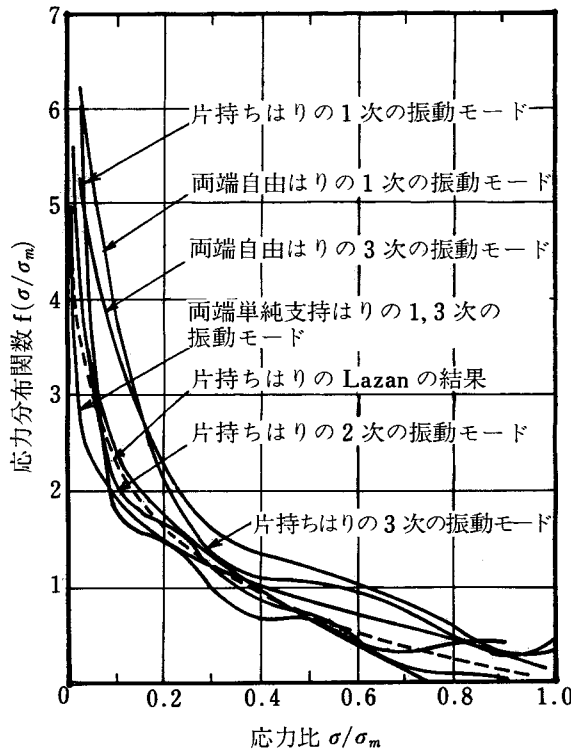
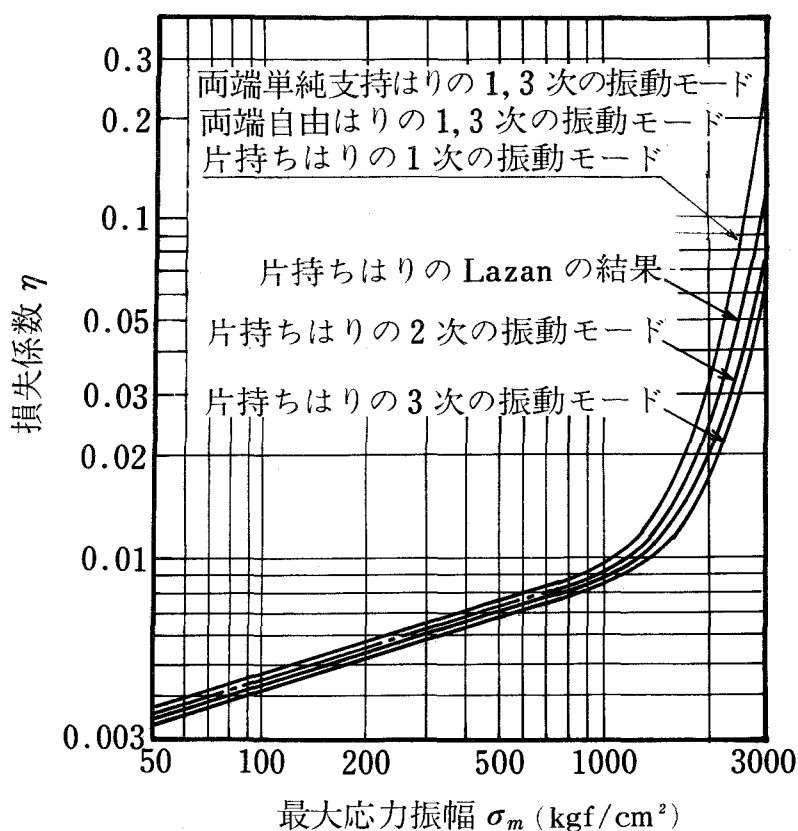


図 2.12 応力分布関数

となる。これらは図 2.12 のようになり、各はりとも応力分布関数は振動モードによる差が少ない。

応力分布関数の式 (2.47) ~ (2.51) とエネルギー吸収関数の式 (2.4) を式 (2.8) に代入して、損失係数と最大応力振幅との関係を求めると図 2.13 のようになる。この図によると、はりの境界条件の異なる片持ちはり，両端自由はり，両端単純支持はりによる差，また振動モードによる差がほとんどないことがわかる。したがって，振動モードは損失係数に影響しないことになる。また Lazan は片持ちはりで慣



疲労限度  $\sigma_f = 1900 \text{ kgf/cm}^2$ , 材質 (鋼)

図 2.13 損失係数と最大応力振幅との関係

性力を無視して、応力分布関数を

$$f\left(\frac{\sigma}{\sigma_m}\right) = -\ln \frac{\sigma}{\sigma_m} \quad (2.52)$$

のように求めている。この応力分布関数から損失係数を求めると図 2.13 の一点鎖線のようにになる。おおよそ Lazan の求めた値で近似できる。したがって、本章で振動モードの影響を検討してみたが、どの振動モードにおいても近似的には Lazan の方法で損失係数を計算することができることが明らかになった。

## 2.8 実験と考察

片持ちはりの材料減衰能の値を実験で確かめるために以下に述べるような実験を行った。材料減衰能を評価するために製作したモデルを図 2.14 に示す。このモデルは重量 100 kgf で、片持ちはりの固定端の固定の条件を満足するように一体ものの鋼材から図のようなモデルを削り出し、このモデルを平板に溶接接合したものを、さらに 4000 kg の定盤に固定して実験を行った。励振力は動電型の励振器で発生さ

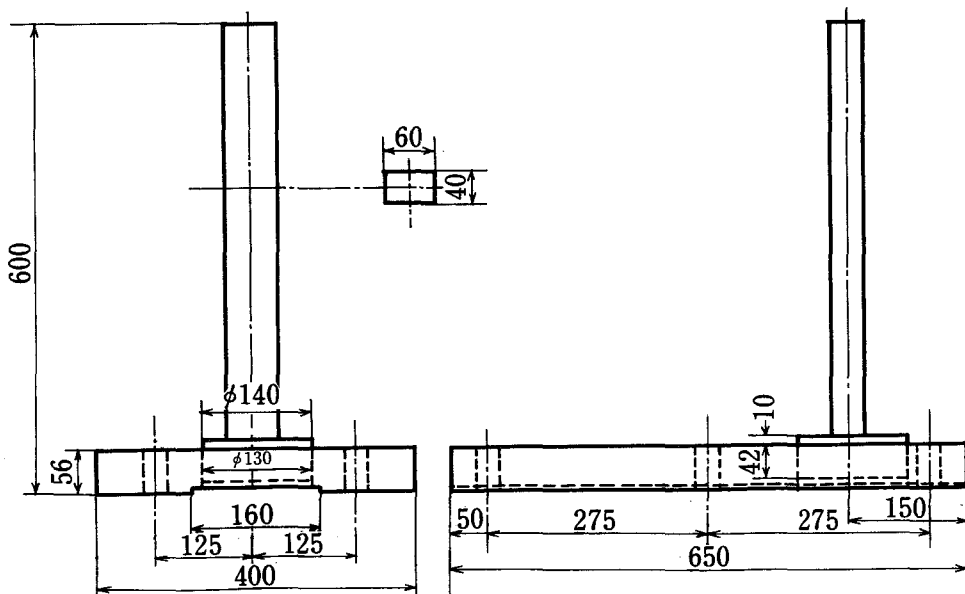


図 2.14 片持ちはり状モデル

せ、曲げ振動の検出器にはインピーダンスヘッドと容量型の変位計を用いた。また記録装置としてはX-Yレコーダ、電磁オシログラフ、オシロスコープを使用した。この実験装置の概略を図2.15に示す。モデルを励振して得た周波数特性は図2.16

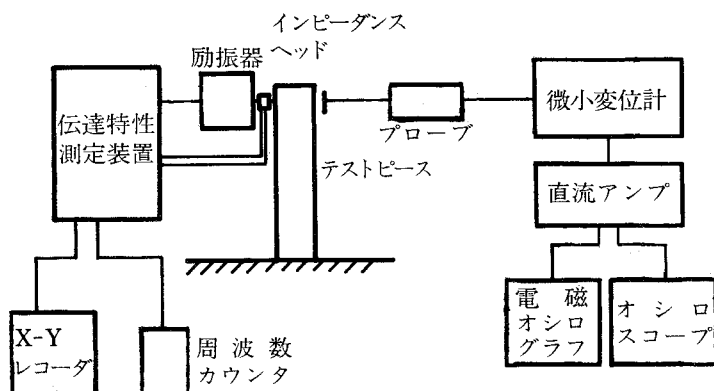


図 2.15 強制振動実験系統図

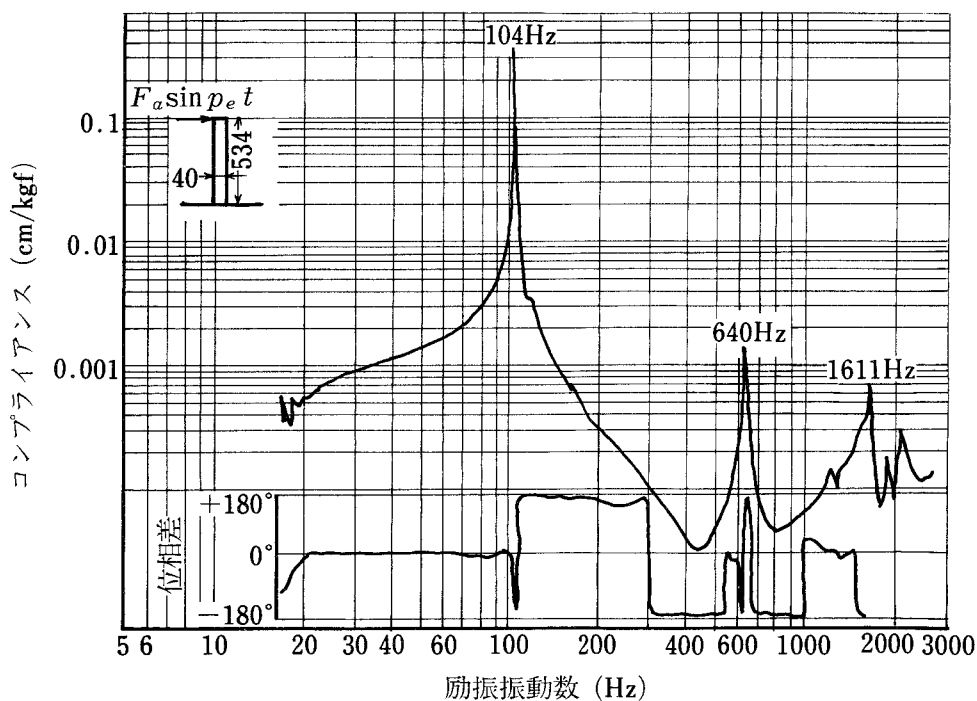


図 2.16 片持ちはり状モデルの周波数特性

のようになる。共振振動数は 104 Hz, 640 Hz, 1611 Hz になるが、励振器の励振力が小さいときや励振振動数が高いときには装置全体が複雑な挙動するので、640 Hz と 1611 Hz での入出力波形が非常に乱れる。したがって、本実験では、第 1 次の共振振動数すなわち 104 Hz での減衰能は理論値と比較することができるが、第 2 次、第 3 次の共振点での減衰能の値はモデル以外の減衰能が加わっていると思われるので理論値と比較しがたい。なお、励振実験によって、各振動モードの減衰能を求める場合には、他の振動モードの影響が比較的少ない共振点を選んだ。

実験の手順は次のようになる。まず励振振動数を共振振動数に近づけ、その点でのコンプライアンスと振動数とを測定する。またコンプライアンスが共振点での値から 3 dB 落ちる値をデシベル計で測定し、その振動数を周波数カウンターで観測し、損失係数  $\eta$  を計算する。すなわちバンド幅法で損失係数を求めた。さらに容量型の微小変位計でそのときの振幅を測定した。また強制振動の実験によって求めた損失係数  $\eta$  と関係づけられる  $i$  次の振動モードの最大応力振幅  $\sigma_{mi}$  は次式で求めた。

$$\sigma_{mi} = \frac{\left[ w_{ai} \right]_{x=x_p} \left[ \xi_i \right]_{y=y_m}^{x=x_m}}{\left[ W_i(x) \right]_{x=x_p}} \quad (2.53)$$

ここで、 $x_p$  はたわみの測定点で、 $(x_m, y_m)$  は最大応力が働く座標である。このモデルの第 1 次、第 2 次、第 3 次の振動モードでは

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{m1} &= 0.593 \times 10^4 w_{a1} \\ \sigma_{m2} &= 3.70 \times 10^4 w_{a2} \\ \sigma_{m3} &= 10.3 \times 10^4 w_{a3} \end{aligned} \right\} \quad (2.54)$$

の関係が成立する。ここで、 $w_{a1}$ ,  $w_{a2}$ ,  $w_{a3}$  は自由端での変位振幅で単位は cm である。また  $\sigma_{m1}$ ,  $\sigma_{m2}$ ,  $\sigma_{m3}$  は最大応力振幅で単位は kgf/cm<sup>2</sup> である。このようにして求めた実験値と理論値を比較するために図 2.17 を作成した。この図の 4 本の実線は各振動モードの応力分布関数とエネルギー吸収関数から求めた理論値で、○印は第 1 次の振動モードでの実験値である。第 2 次、第 3 次の振動モードの実験値は前述したように実験装置全体の減衰能も含まれているので、信頼できる実験値ではな

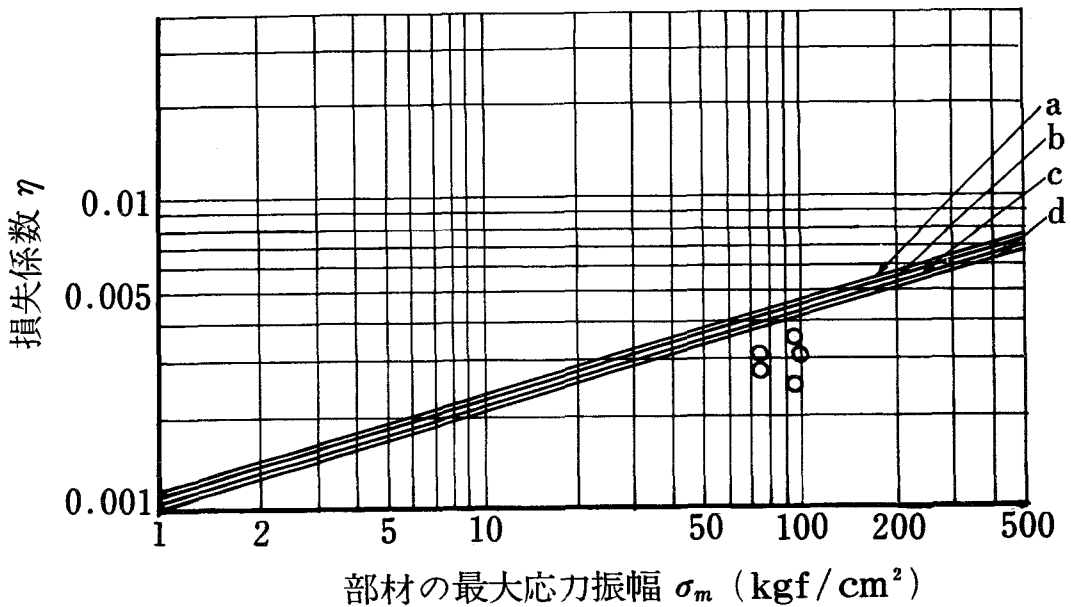


図 2.17 理論値と実験値との比較

い。したがって、図 2.17 には第 1 次の振動モードの実験値のみを記した。第 1 次の振動モードの共振点における実験値と理論値を比較してみると、実験値は理論値より低いが大體一致している。また自由振動法で求めた損失係数の値は 0.003 ~ 0.006 となり理論値より少し高い値になった。

## 2.9 ま と め

高次の振動モードの材料減衰能を求めるために、部材の応力分布関数を無減衰振動の解析を行って求め、材料減衰能を損失係数で評価してみた。その結果をつぎのようにまとめることができる。

1. 部材の各振動モードでの応力分布関数は振動モードを表す規準関数から計算することができ、振動モードが変化しても変らない。



2. 部材の各振動モードでの材料減衰能は各振動モードでの応力分布関数とエネルギー吸収関数とから求まるので，振動モードの次数には無関係で部材の最大応力振幅によって決まる。
3. **Lazan**らの求めたエネルギー吸収関数を用いれば，材料減衰能を損失係数で評価することが比較的容易である。実際に用いられる応力状態での損失係数の値は，材料が鋼の場合， $0.004 \sim 0.008$ になることが予想される。

## 第3章 局部すべりによる減衰能<sup>107)</sup>

### 3.1 ま え が き

構造減衰能は材料内部のエネルギー消散による材料減衰能と結合部接合面でのエネルギー消散による接合面減衰能の2つから成っている。また接合面をもつ結合部の接合面減衰能は接触面間の局部すべりや1周期で接合面全体にすべりが発生するときがある全体すべりによる。本章では接合面が局部すべり運動をしているときの減衰機構を球と平面の接触によるモデルによって明らかにした。取り扱ったモデルは球が平面に接触し、球と平面との間に相対的な回転運動が存在する場合である。一つの平板が一定の締付力によって2球で締付られ、平板が周期的なねじりモーメントをうける。このモデルの接合面では局部すべりが発生し、すべりのある領域とすべりがなく固着している領域にわけられることを明らかにした。そして局部すべりによる接合面減衰能を評価し、減衰能と回転角との関係、減衰能と固着比との関係を求め、これらの関係を実験で確かめた。

### 3.2 球と平面の接触による消散エネルギーと

#### 接触トルク

球と平面から成るモデルにおいて球と平面に垂直力 $N$ を加える。球をねじり振動させ、その球と平面の接触による減衰能を解析的に求めてみる。図3.1のように垂直力 $N$ で押付けられている球と平面の場合、ヘルツの理論から、接触面は円形となる。接触面の半径 $a$ が球の半径 $R$ に比べて非常に小さいならば、次のようになる。

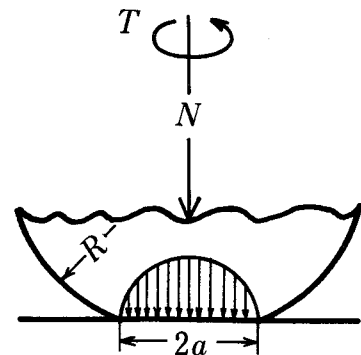


図3.1 球と平面の接触

$$a = 0.881 \left\{ NR \left( \frac{1}{E_1} + \frac{1}{E_2} \right) \right\}^{\frac{1}{3}} \quad (3.1)$$

ここで、 $E_1, E_2$ は球と平面の縦弾性係数である。また接触面上の圧力分布  $p(r)$  は

$$p(r) = \frac{3}{2} \frac{N}{\pi a^2} \left( 1 - \frac{r^2}{a^2} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (3.2)$$

となる。またここでは解析を簡単にするために次のような仮定をおいて、球にねじり振動を加えたときの挙動を考える。

- 1) 接触面上では摩擦係数は摩擦速度やすべり量の関数でなく、クーロン型の摩擦特性を持ち、このクーロン摩擦による摩擦損失エネルギーのみが消散エネルギーとなる。
- 2) 完全固着の場合の接触面上でのせん断応力  $\tau$  は中心で  $0$  の値から半径  $a$  の最大値  $\tau_a$  まで直線的に変化する。

したがって、接触面上でのせん断応力  $\tau$  と単位面積あたりの摩擦力  $\mu p(r)$  の分布は図 3.2 のようになる。接触面上でのせん断応力が単位面積

あたりの摩擦力より大きくなる領域で相対すべりが発生し、 $\tau_0 = \mu p(r_0)$  となる  $r_0$  のところが境界となる。また  $r_0$  は摩擦速度の影響を受けられるが、この報告では仮定 1) から  $r_0$  は摩擦速度の影響がないとする。

$\tau < \mu p(r)$  となる領域は固着していると考えることができる。また固着している場合でも微小すべりによる広義の摩擦損失エネルギーが生じると考えることができるが、この解析ではこれを無視する。すべり領域での相対すべり量はせん断応力と単位面積あたりの摩擦力  $\mu p(r)$  の差に比例して変化すると仮定すると、任意の半径  $r$  での相対すべり量  $\Delta q$  は

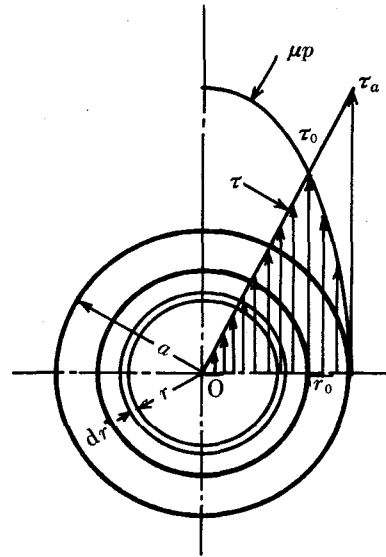


図 3.2 接触面上のせん断応力分布

$$\Delta q = [\tau - \mu p(r)] \frac{a \theta_m}{\tau_a} \quad (3.3)$$

となる。ここで、 $\theta_m$ は球の最大ねじれ角である。式(3.3)に、仮定2)の $\tau = \tau_a r/a$ を代入すると

$$\Delta q = \left( \frac{\tau_a}{a} r - \mu p(r) \right) \frac{a \theta_m}{\tau_a} \quad (3.4)$$

となる。微小面積 $\Delta s$ に生ずる消散エネルギー $\Delta D$ は次のようになる。

$$\Delta D = \mu p(r) \cdot \Delta s \cdot \Delta q \quad (3.5)$$

$\Delta s = r \cdot \Delta \theta \cdot \Delta r$  であるので、式(3.4)を式(3.5)に代入して整理すると消散エネルギー $D_0$ は

$$D_0 = \frac{\mu a \theta_m}{\tau_a} \int_0^{2\pi} \int_{r_0}^a r p(r) \left[ \frac{\tau_a}{a} r - \mu p(r) \right] dr d\theta \quad (3.6)$$

となる。さらにこの式に式(3.2)を代入すると、

$$\begin{aligned} D_0 &= \frac{3 \mu N \theta_m}{a \tau_a} \left[ \frac{\tau_a}{a} \int_{r_0}^a r^2 \left( 1 - \frac{r^2}{a^2} \right)^{\frac{1}{2}} dr - \frac{3 \mu N}{2 \pi a^2} \int_{r_0}^a r \left( 1 - \frac{r^2}{a^2} \right) dr \right] \\ &= \frac{3 \mu a N \theta_m}{32} \left\{ \left[ 2\pi - 4 \sin^{-1} \frac{r_0}{a} + \sin \left( 4 \sin^{-1} \frac{r_0}{a} \right) \right] \right. \\ &\quad \left. - \frac{12 \mu N}{\pi a^2 \tau_a} \left[ 1 - \frac{r_0^2}{a^2} \left( 2 - \frac{r_0^2}{a^2} \right) \right] \right\} \quad (3.7) \end{aligned}$$

となる。またすべり領域の境界 $r_0$ では、せん断応力 $\tau$ と単位面積あたりの摩擦力 $\mu p(r)$ とが等しいので、 $\tau_0 = \tau_a r_0/a$ ,  $\mu p(r_0) = 3 \mu N a (1 - r_0^2/a^2)^{\frac{1}{2}} / (2 \pi a^2)$ とする

と

$$\tau_a = \frac{3 \mu N}{2 \pi a^2} \frac{a}{r_0} \left( 1 - \frac{r_0^2}{a^2} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (3.8)$$

となる。式(3.8)を式(3.7)に代入すると

$$D_0 = \frac{3\mu a N \theta_m}{32} \left\{ \left[ 2\pi - 4 \sin^{-1} \frac{r_0}{a} + \sin \left( 4 \sin^{-1} \frac{r_0}{a} \right) \right] \right. \\ \left. - \frac{12\mu N}{\pi a^2} \cdot \frac{2\pi a^2}{3\mu N} \cdot \frac{r_0}{a} \left( 1 - \frac{r_0^2}{a^2} \right)^{-\frac{1}{2}} \left[ 1 - \frac{r_0^2}{a^2} \left( 2 - \frac{r_0^2}{a^2} \right) \right] \right\}$$

となる。ここで  $\beta_0 = r_0/a$  とし、これを固着比と呼ぶと、

$$D_0 = \frac{3\mu a N \theta_m}{32} \left\{ 2\pi - 4 \sin^{-1} \beta_0 + \sin(4 \sin^{-1} \beta_0) - 8\beta_0(1 - \beta_0^2)^{\frac{3}{2}} \right\} \quad (3.9)$$

となる。式(3.9)は1/4 サイクルあたりの消散エネルギーであるから、1 サイクルあたりの消散エネルギー  $D_{cyc}$  は次のようになる。

$$D_{cyc} = 4D_0 = \frac{3\mu a N \theta_m}{8} \left[ 2\pi - 4 \sin^{-1} \beta_0 + \sin(4 \sin^{-1} \beta_0) - 8\beta_0(1 - \beta_0^2)^{\frac{3}{2}} \right] \quad (3.10)$$

である。また球と平面の材質が同じであると、式(3.1)より接触円の半径は

$$a = 1.11 \left( \frac{NR}{E} \right)^{\frac{1}{3}} \quad (3.11)$$

となるので、

$$D_{cyc} = \frac{3.33}{8} \mu \theta_m N^{\frac{4}{3}} \left( \frac{R}{E} \right)^{\frac{1}{3}} \left[ 2\pi - 4 \sin^{-1} \beta_0 + \sin(4 \sin^{-1} \beta_0) - 8\beta_0(1 - \beta_0^2)^{\frac{3}{2}} \right] \quad (3.12)$$

となる。次に球を  $\theta_m$  だけねじったとき、接触面で生ずるトルクはせん断応力  $\tau$  と単位面積あたりの摩擦力  $\mu p(r)$  によって発生する。すべり領域では単位面積あたりの摩擦力  $\mu p(r)$  が作用し、固着領域ではねじりによるせん断応力  $\tau$  が作用している。

したがって、全接触面内でのトルク  $T$  は、

$$T = \int_0^{2\pi} \int_0^{r_0} \tau r^2 dr d\theta + \int_0^{2\pi} \int_{r_0}^a \mu p(r) r^2 dr d\theta \\ = \frac{\pi r_0^3}{2} \tau_0 + 2\pi \mu \int_{r_0}^a r^2 p(r) dr \quad (3.13)$$

となる。式(3.13)に式(3.2)を代入して変形すると、

$$T = \frac{\pi r_0^3}{2} \tau_0 + \frac{3\mu a N}{32} \left[ 2\pi - 4 \sin^{-1} \frac{r_0}{a} + \sin \left( 4 \sin^{-1} \frac{r_0}{a} \right) \right] \quad (3.14)$$

となる。 $\tau_0 = \mu p(r_0)$  であるので、

$$T = \frac{3\mu N r_0}{4} \frac{r_0^2}{a^2} \left( 1 - \frac{r_0^2}{a^2} \right)^{\frac{1}{2}} + \frac{3\mu a N}{32} \left[ 2\pi - 4 \sin^{-1} \frac{r_0}{a} + \sin \left( 4 \sin^{-1} \frac{r_0}{a} \right) \right] \quad (3.15)$$

となる。 $\beta_0 = r_0/a$  において整理すると

$$T = \frac{3\mu a N}{32} \left[ 2\pi - 4 \sin^{-1} \beta_0 + \sin(4 \sin^{-1} \beta_0) + 8\beta_0^3 (1 - \beta_0^2)^{\frac{1}{2}} \right] \quad (3.16)$$

となる。式(3.16)に式(3.11)を代入すると、球と平面の材質が同じ場合の接触トルク  $T$  は次のようになる。

$$T = \frac{3.33}{32} \mu N^{\frac{4}{3}} \left( \frac{R}{E} \right)^{\frac{1}{3}} \left[ 2\pi - 4 \sin^{-1} \beta_0 + \sin(4 \sin^{-1} \beta_0) + 8\beta_0^3 (1 - \beta_0^2)^{\frac{1}{2}} \right] \quad (3.17)$$

### 3.3 減衰能の評価

接触面上で発生する減衰能を見積るために式(3.9)と式(3.16)から、消散エネルギーを表す  $D_0$  と最大弾性エネルギーを表す  $T\theta_m$  の比を求めると

$$\frac{D_0}{T\theta_m} = \frac{2\pi - 4 \sin^{-1} \beta_0 + \sin(4 \sin^{-1} \beta_0) - 8\beta_0 (1 - \beta_0^2)^{\frac{3}{2}}}{2\pi - 4 \sin^{-1} \beta_0 + \sin(4 \sin^{-1} \beta_0) + 8\beta_0^3 (1 - \beta_0^2)^{\frac{1}{2}}} \quad (3.18)$$

となる。式(3.18)は固着比  $\beta_0 = r_0/a$  とエネルギー消散率  $D_0/T\theta_m$  との関係を表している。

### 3.4 実験装置と実験方法

図3.3のような実験装置で実験を行う。また図3.4には実験装置と測定系の概略を示している。回転レバー⑨の質量慣性モーメントは  $0.3766 \text{ kgf} \cdot \text{cm} \cdot \text{s}^2/\text{rad}$  であ

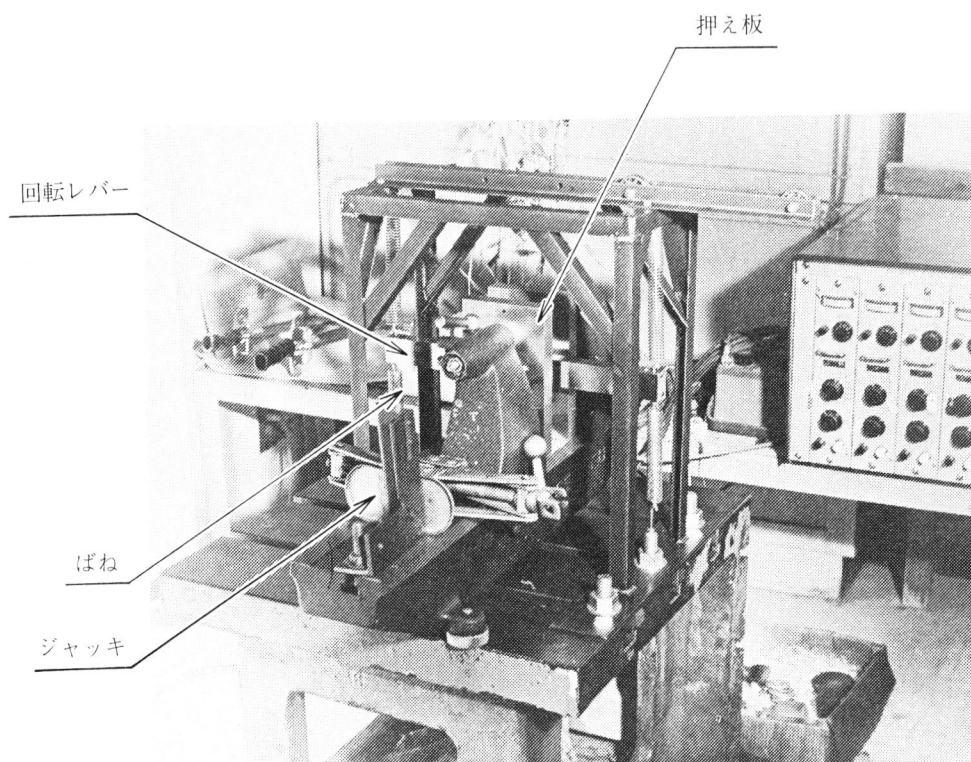


図 3.3 実験装置

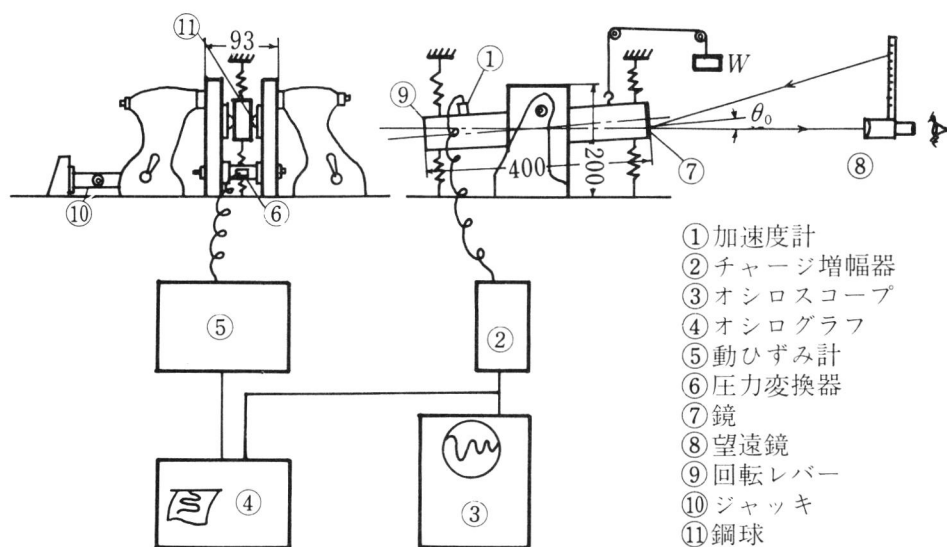


図 3.4 実験装置と測定系の概略図

り，これを支持している4本のばねのばね定数は  $0.285 \text{ kgf/cm}$  である。また2枚の鋼板に取付けられた球⑪を回転レバー⑨に押付ける。締付力はジャッキ⑩で与え，ひずみゲージをはった圧力変換器⑥でその大きさを測定する。この信号を動ひずみ計⑤で増幅して電磁オシログラフ④に記録する。回転レバーにおもりをつるして初期回転角  $\theta_p$  を与える。この回転角は回転レバーにはりつけた鏡⑦で測定した。またおもりをつるしている糸を焼き切って自由振動させ，この振動波形を加速度検出器①で検出する。この信号をチャージ増幅器②で増幅してオシロスコープ③でモニターしながら電磁オシログラフに記録した。回転レバーを模型化すると図3.5のような

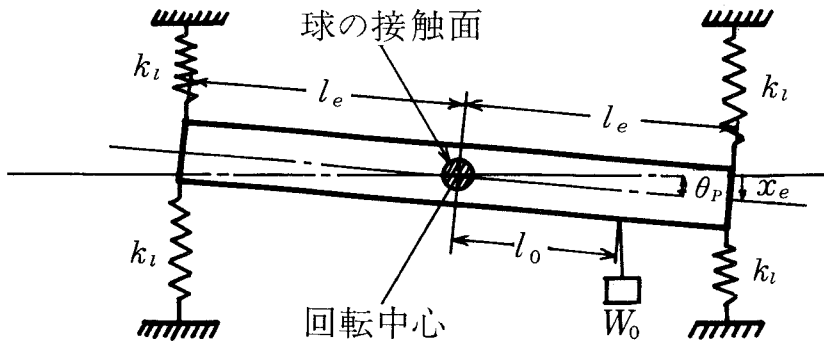


図 3.5 回転レバーの模型図

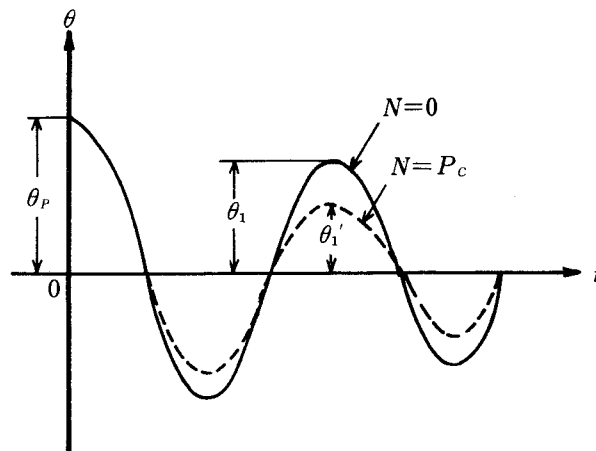


図 3.6 自由振動波形



振動系になる。中心から  $l_0$  のところにおもりをつるし、初期回転角  $\theta_p$  を与える。おもりの糸を焼き切って自由振動させると図 3.6 のようになり、締付力が 0 の場合は実線のようになる。また締付力  $N$  が  $P_c$  の場合は破線のようになる。 $N = P_c$  の場合、 $\theta_p$  が  $\theta_1'$  になる消散エネルギーと  $N = 0$  の場合  $\theta_p$  が  $\theta_1$  になる消散エネルギーとの差をとると、この差が接合面での消散エネルギーになる。したがって、回転角  $\theta_p$  で、締付力  $N = 0$  のときの荷重  $W_0$ 、1 サイクル後の回転角  $\theta_1$ 、そして締付力を加えたときの荷重  $W_p$ 、1 サイクル後の回転角  $\theta_1'$  を測定すれば、次のようにしてエネルギー消散率  $D_0/T\theta_m$  を求めることができる。1 サイクルあたりに系全体で消散されるエネルギーを  $\Delta E$ 、1 サイクルあたりに接合面以外の系で消散されるエネルギーを  $\Delta e$ 、接合面で 1 サイクルに消散されるエネルギーを  $\Delta D_0$  とすると接合面で消散されるエネルギーは次のようになる。

$$\Delta D_0 = \Delta E - \Delta e \quad (3.19)$$

となり、また

$$\Delta E = \frac{1}{2} W_0 l_0 \theta_p \left( 1 - \frac{\theta_1'}{\theta_p} \right) \quad (3.20)$$

$$\Delta e = \frac{1}{2} W_0 l_0 \theta_p \left( 1 - \frac{\theta_1}{\theta_p} \right) \quad (3.21)$$

となる。式 (3.19)、(3.20)、(3.21) から

$$D_0 = \frac{1}{8} W_0 l_0 (\theta_1 - \theta_1') \quad (3.22)$$

となる。また接合面上で働くトルク  $T$  は

$$T = (W_p - W_0) l_0 \quad (3.23)$$

となり、式 (3.22) と式 (3.23) から

$$\frac{D_0}{T \theta_p} = \frac{W_0 (\theta_1 - \theta_1')}{8 (W_p - W_0) \theta_p} \quad (3.24)$$

となる。球の回転角  $\theta$  と固着比  $\beta_0$  との関係は実験によって求めることができる。式

(3.16)に $\beta_0$ の値を代入して得られるトルクを球に加えて、 $\theta$ を測定し、回転角 $\theta$ と固着比 $\beta_0$ との関係を求めればよい。この実験で用いる球と平面は同じ材質の鋼であるので、式(3.17)を用いた。鋼球の直径は1 inであり、また球と回転レバーの材質は鋼であるので、縦弾性係数 $E$ は $2 \times 10^4 \text{ kgf/mm}^2$ である。球と回転レバーとの接合面はアセトンでふいて脱脂しているので鋼と鋼の接触になる。動的な摩擦係数を求めることが困難であるので、ここでは文献<sup>58)</sup>を参考にして摩擦係数 $\mu$ を0.58とすると、式(3.17)は

$$T = 0.00516 N^{\frac{4}{3}} \left[ 2\pi - 4 \sin^{-1} \beta_0 + \sin(4 \sin^{-1} \beta_0) + 8 \beta_0^3 (1 - \beta_0^2)^{\frac{1}{2}} \right] \quad (3.25)$$

となる。図3.7は式(3.25)によって得られた接触トルク $T$ と固着比 $\beta_0$ との関係を締付力 $N$ をパラメータとした線図である。この図から球に加わる締付力の大きさ、および外部から球に作用するトルクを求めることができれば固着比 $\beta_0$ を決定することができる。したがって、球にある大きさのトルクが作用する場合に、球が回転す

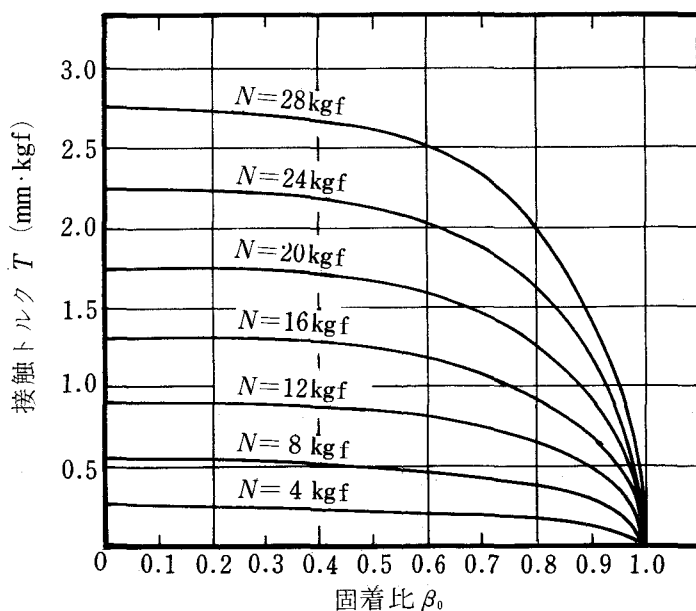


図 3.7 接触トルクと固着比との関係

る回転角を求めることができれば、球の回転角  $\theta$  と固着比  $\beta_0$  との関係を決定することができる。次に球に作用するトルク  $T$  と球の回転角  $\theta$  の関係を求めるために図3.8のような実験を行った。図のように平行な平面をもつ軟鋼の円板に糸をまきつけ、

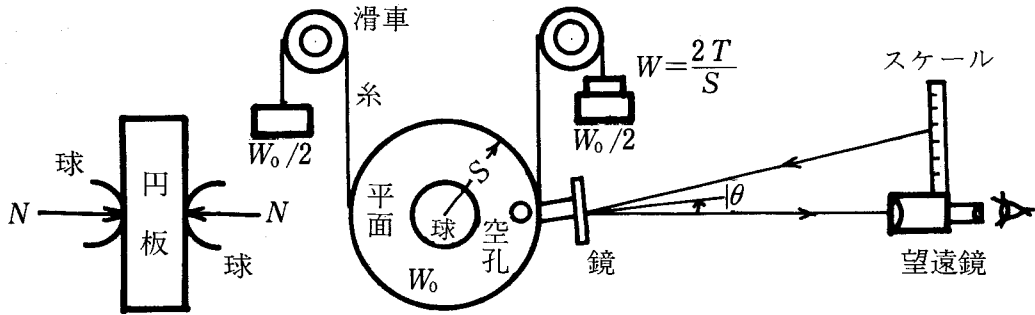


図 3.8  $T$  と  $\theta$  との関係を求める実験装置の概略図

滑車を介してその糸に円板の重さと同じ重さの重りをつるした。そして球に締付力を加えて、円板に押し付け、つりさげたおもりの片方にさらにおもりを加え、回転が静止したところでの回転角  $\theta$  を読む。

### 3.5 実験結果と考察

以上のような実験装置と実験方法で実験すると以下のような実験結果が得られた。静的な回転トルクすなわち接触トルクと回転角との関係を求めてみると、図3.9のようになる。回転角が一定のとき、締付力が4～26 kgfまで増加すると、回転トルクも増加する。また締付力が一定のときは回転角の増加とともに局部すべりが発生するので、ねじり剛性が小さくなり、全体すべりが発生する。この実験によって、回転角の増加とともに、接触面上では局部すべり、全体すべりが発生することがわかる。図3.10は接触面の50倍の顕微鏡写真である。この写真は局部すべりが発生していることを示している。この写真の左側は研削面であり、内側（白くなったところ）が接触面である。接触面の内側には白い部分と黒い部分があり、黒くなった部分は球と平面の相対すべりによってできた擦過跡であると思われる。接触面内での

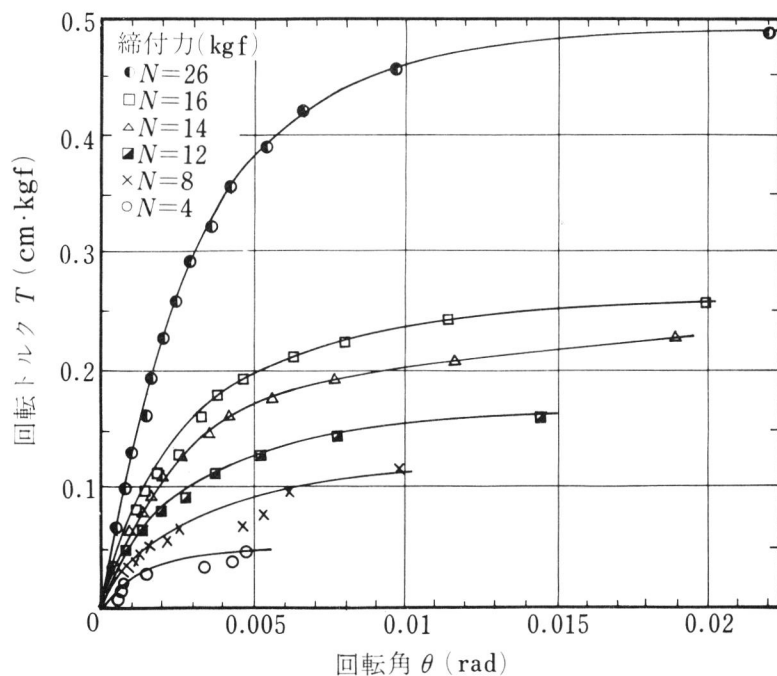
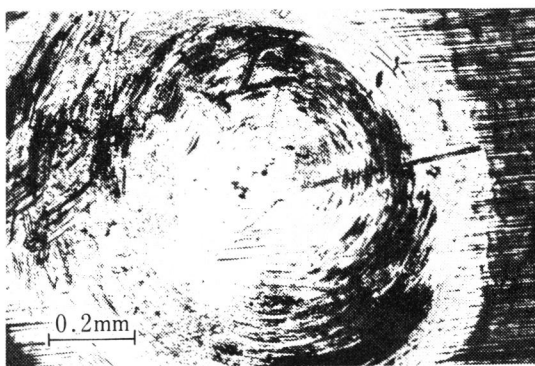


図 3.9 回転トルクと回転角との関係



締付力：16 kgf    回転角：0.002 rad

図 3.10 接 触 面

外側と内側で白くなっているが、内側では鋼球と軟鋼板が固着しているので、相対すべりがなく擦過跡もない。しかし外側では相対すべりが大きいにもかかわらず、

圧力が小さいので、擦過跡がはっきり現れないものと思われる。この写真による観察結果によって、球と平面を接触させ、相対的なねじり運動をさせると接触面上で局部すべりが存在する場合があることが明らかになった。また球に作用するトルクと回転角との関係を表している図3.9と球に作用するトルクと回着比 $\beta_0$ の関係を表している図3.7とから図3.11のような関係が求まる。この図によると、締付力に

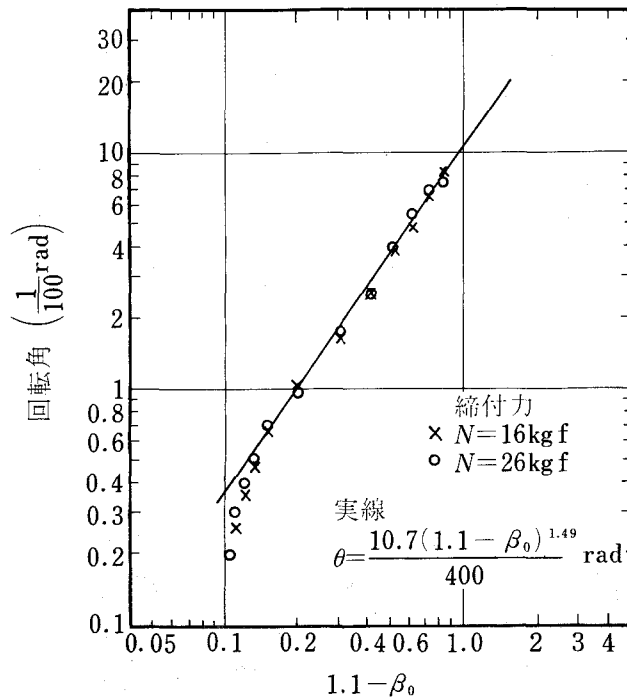


図 3.11 回転角とすべり領域比との関係

は関係なく、両対数グラフ上で1本の直線で表すことができる。このことから、接触面の局部すべりの程度を表す固着比 $\beta_0$ は球と平面が同じ材質の場合、締付力の大きさには関係なく、球と平面の相対回転角 $\theta$ のみに依存する。 $\beta_0$ が0.13から0.95の範囲では $\theta = 10.7(1.1 - \beta)^{1.49}/400$ で表すことができる。ここで $\theta$ の単位はradである。この式を用いると回転角 $\theta$ を固着比 $\beta_0$ に変換することができる。次に前述した実験装置および実験方法に従って式(3.24)を用いて求めたエネルギー消散率と初期回転角との関係を求めた結果、エネルギー消散率は初期回転角の増加とともに

に増加する傾向を示した。このエネルギー消散率と初期回転角との関係を図 3.11 に求められた  $\theta$  と  $\beta_0$  の関係を用いて、エネルギー消散率と固着比  $\beta_0$  との関係を整理したのが図 3.12 である。この図で実線は式 (3.18) によって計算した理論曲線である。

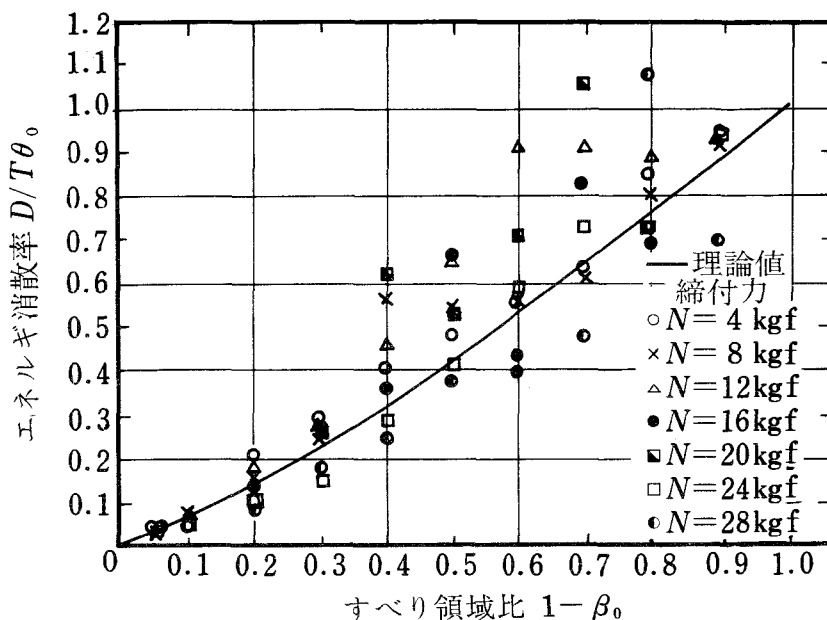


図 3.12 減衰能とすべり領域との関係

横の  $1-\beta_0$  はすべりの程度を表す量で、すべり領域比という。このすべり領域比の増加とともにエネルギー消散率が増加する傾向がある。この結果は局部すべりは減衰能をもつことを示している。以上のことから、球の半径、球と平面との接触面間の介在物やそれらの材質によって決まる摩擦係数、球と平面の縦弾性係数が決まれば、球に作用するトルクと回転角との関係を用いて、球と平面の相対回転角  $\theta$  と固着比  $\beta_0$  との関係が決まり、球と平面の接触面上の局部すべりによる減衰能であるエネルギー消散率を求めることができる。したがってエネルギー消散率は局部すべりの程度を表す固着比  $\beta_0$  に依存することになる。

### 3.6 ま と め

機械構造の結合部の接合面での減衰機構を明らかにするために、単純なモデルの球と平面の接触の状態での減衰能を解析的に評価した。これを実験で確かめた結果、つぎのようなことが明らかになった。

1. 球と平面を接触させて、相対的なねじり運動をさせると、接触面上では局部すべりが存在する場合があります、その局部すべり運動が減衰能をもつ。
2. 接触面の局部すべりの程度を表す固着比は球と平面が同じ材質で鋼の場合、締付力の大きさには関係なく球と平面の相対回転角のみに依存する。
3. 回転角と固着比の関係が求まれば、接触面の局部すべりによる減衰能であるエネルギー消散率を求めることができ、そのエネルギー消散率は局部すべりの程度を表す固着比に依存する。

## 第4章 カップリング状モデルの 矩形波状応答発生限界

### 4.1 ま え が き

本章では，はじめに機械構造の結合部の接合面での減衰能を見積るために工作機械の接合面などの二平面接合部を単純化して設定したカップリング状モデルの形状，材質，寸法などについて述べ，そのカップリング状モデルを正弦波状に励振した場合に，接合面を介した系の応答が正弦波状波形になるかあるいは矩形波状の波形になるかの限界を，第1章の解析方法を応用して求めた。

### 4.2 カップリング状モデル

カップリング状モデルは図4.1に示されるように円すい接合面をもつ回転振動系で，回転中心軸のずれを防ぐことができる。材料は軟鋼で，接合面は＃600のラップ剤で仕上げられ，粗さは $R_{\max}$ で $6\mu\text{m}$ である。このモデルは機械構造のどの部分というように具体的に示すことができないが，工作機械のすべり面などの二平面接

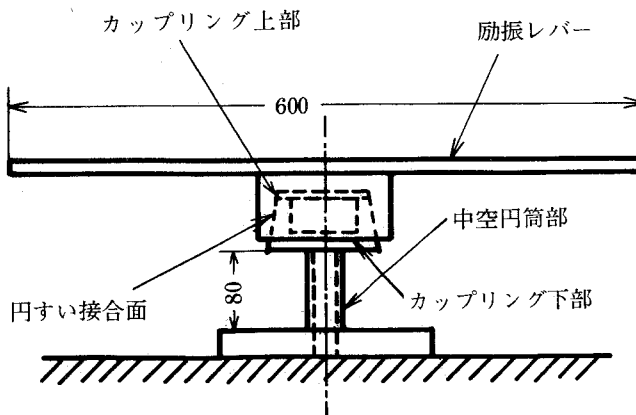


図4.1 カップリング状モデル



合部に応用できる基礎的なモデルと考えることができる。

構造結合部の状態はつぎのようにまとめることができる。

1. 結合部が弾性支持されている。
2. 結合部の締付力が大きい場合は接合面は一体もののような挙動をする。
3. 締付力が小さくなるにつれて接合面では局部すべりが発生する。
4. 締付力がさらに小さくなると、接合面では全体すべりが発生する。

カップリング状モデルはこれらの状態を模擬することができるモデルである。軸荷重により接合面の面圧を変えることができ、このモデルが励振された場合、接合面が固着して一体運動をする場合と局部すべりが起る場合と全体すべりが起る場合などの運動が比較的容易に得られる利点がある。図1.1のように2平面が直線運動する場合は接合面がかたあたりなどによる食い込み現象とか浮き上りが発生し、解析が困難になるが、このモデルのような回転振動系では実験が容易である。このモデルの主な寸法と振動特性は表4.1のようになる。

表 4.1 カップリング状モデルの主な特性値

|                                  | 計 算 値                               | 実 験 値                            |
|----------------------------------|-------------------------------------|----------------------------------|
| 円すい半角度                           | $10^{\circ}$                        |                                  |
| 薄肉円筒部の長さ<br>(固定端より首下まで)          | 80mm                                |                                  |
| 薄肉円筒部のばね定数                       | $4.89 \times 10^6$<br>mm・kgf/rad    | $4.94 \times 10^6$<br>mm・kgf/rad |
| カップリング凹部の質量慣性モーメント               | 1.08<br>mm・kgf・s <sup>2</sup> /rad  |                                  |
| カップリング凸部の質量慣性モーメント               | 0.416<br>mm・kgf・s <sup>2</sup> /rad |                                  |
| 励振レバーの質量慣性モーメント                  | 13.10<br>mm・kgf・s <sup>2</sup> /rad |                                  |
| カップリング凸部のねじりの固有振動数               | 544 c/s                             | 500 c/s                          |
| カップリング凹部凸部レバーが一体となった場合のねじりの固有振動数 | 92.3 c/s                            | 88.3 c/s                         |

またカップリング上部には励振レバーをボルト（M10）6本で結合し、この励振レバーの中心から 250 mm のところにジョイントを取りつけて回転トルクを与える。カップリング状モデルと励振レバーの寸法を図 4.2 に示す。

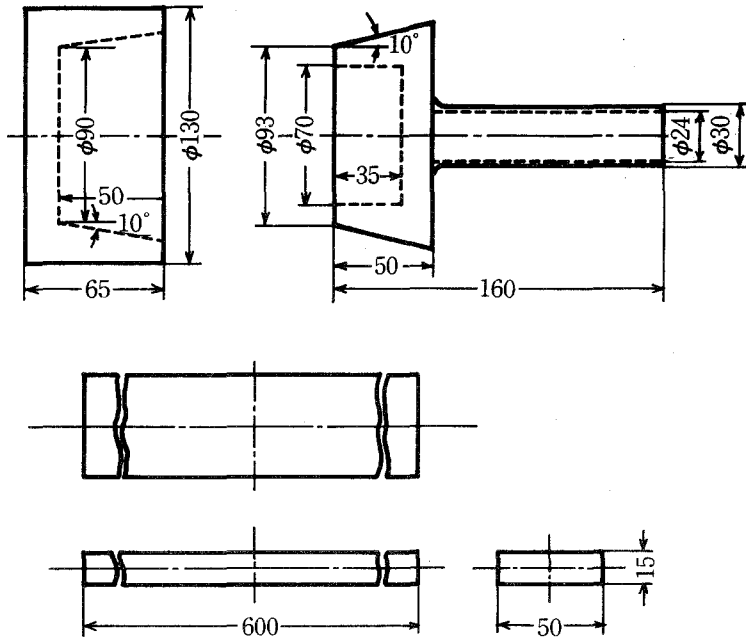


図 4.2 カップリング状モデルと励振レバーの寸法

#### 4.3 矩形波状応答発生限界の解析<sup>108)</sup>

図 4.3 のようなねじり振動系の動特性を明らかにする。カップリング上部を A、カップリング下部を B とすると、この系の運動は A と B が一体となる場合と A と B の間に相対すべりが存在する場合とがある。A と B の間に相対すべりが起ってしまうえば、A に加わるトルクは問題でなくなって、A と B の間の相対すべり角速度によって発生する摩擦トルクが振動系 B の外力となる。

質量慣性モーメント  $J_B$  の剛体 B には、ねじりばね定数  $k_t$  のばねと粘性抵抗係数  $c_t$  の減衰がそれぞれ固定されている。この系が角振動数  $\omega_c$  で振動する剛体 A と接合している。この剛体と剛体の間には、固体摩擦トルク  $t_d$  が作用し、中心軸は変形後も直線を保つと仮定する。いま B の角変位を  $\theta$  とするとき、運動方程式は式 (1.1) と

同様に

$$J_B \frac{d^2\theta}{dt^2} + c_t \frac{d\theta}{dt} + k_t \theta = t_d \quad (4.1)$$

となる。また振動する A の角変位  $\theta$  は振幅を  $\theta_0$ ，角振動数を  $\omega_c$ ， $\theta$  との位相差を  $\phi$  とすると，

$$\theta = \bar{\theta}_0 e^{j\omega_c t} = \theta_0 e^{j(\omega_c t + \phi)} \quad (4.2)$$

のように表すことができる。ここで， $\bar{\theta}_0 = \theta_0 e^{j\phi}$  で複素振幅である。 $\phi$  は  $\theta$  が正弦波状でない場合には励振振動数成分との位相差である。つぎに固体摩擦トルクの絶対値を  $t_{d0}$  とすると，式 (1.3) と同様に  $t_d$  は

$$t_d = -t_{d0} S \left[ \frac{d\theta}{dt} - \frac{d\theta}{dt} \right] \quad (4.3)$$

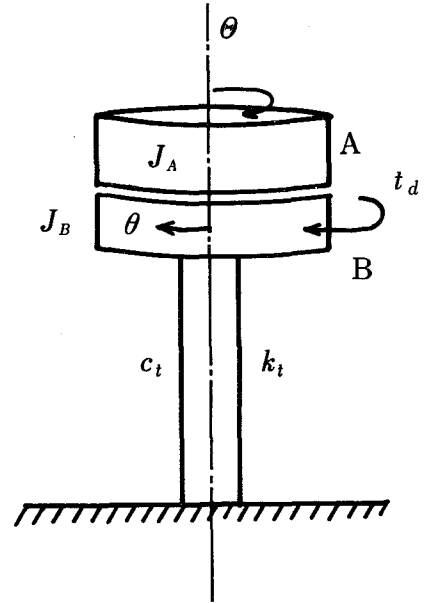


図 4.3 振動模型

となる。解析を簡単にするために，つぎのように無次元化する。

$$\begin{aligned} n_c &= \sqrt{\frac{k_t}{J_B}} & h_c &= \frac{c_t}{2\sqrt{J_B k_t}} & x_t &= \frac{k_t \theta}{t_{d0}} & \tau_c &= n_c t & y_t &= \frac{k_t \theta}{t_{d0}} \\ \varepsilon_c &= \frac{\pi n_c}{\omega_c} & C_c &= \frac{\theta_0 k_t \pi}{t_{d0} \varepsilon_c} & D_c &= \frac{\theta_0 k_t \pi}{t_{d0} \varepsilon_c} & \alpha_t &= \frac{k_t \theta_0}{t_{d0}} & \mu_t &= \frac{\omega_c}{n_c} \\ \nu_t &= \frac{\theta_0}{\theta_0} & \kappa_c &= \frac{J_A}{J_B} & & & & & & (\pi = 3.14159 \dots) \end{aligned} \quad (4.4)$$

ここで  $\theta_0$  は B の角変位振幅である。以上のことから式 (4.1) は

$$\ddot{x}_t + 2h_c \dot{x}_t + x_t = -S \quad (4.5)$$

のように変形することができ，式 (4.2) は

$$\dot{y}_t = jC_c e^{j\left(\frac{\pi}{\varepsilon_c} \tau_c + \phi\right)} \quad (4.6)$$

となる。また式 (4.3) の  $S$  は

$$S\left[\frac{d\theta}{dt} - \frac{d\theta}{dt}\right] = S\left[n_c \frac{t_{d0}}{k_t} \frac{dx}{d\tau_c} - n_c \frac{t_{d0}}{k_t} \frac{dy_t}{d\tau_c}\right] = S[\dot{x}_t - \dot{y}_t] \quad (4.7)$$

となる。ドット記号はすべて  $\tau_c$  についての導関数を表している。すべるためには

$$\begin{aligned} \ddot{x}_t &> \ddot{y}_t \\ \ddot{x}_t &< \ddot{y}_t \end{aligned} \quad (4.8)$$

が成立しなければならない。したがって、すべるための必要条件は

$$|\ddot{y}_t + 2h_c \dot{x}_t + x_t| > 1 \quad (4.9)$$

となる。 $\ddot{y}_t + 2h_c \dot{x}_t + x_t > 1$  を満足すれば  $\ddot{y}_t + 2h_c \dot{x}_t + x_t < -1$  も成立するので、以後は  $\ddot{y}_t + 2h_c \dot{x}_t + x_t > 1$  の条件で解析をすすめて行く。式(4.4)を考慮すると次式のように変形することができる。

$$C_c \sqrt{\left(\frac{\varepsilon_c}{\pi} v_t - \frac{\pi}{\varepsilon_c} \cos\phi\right)^2 + \left(2h_c v_t - \frac{\pi}{\varepsilon_c} \sin\phi\right)^2} e^{j(\phi_c + \frac{\pi}{\varepsilon_c} \tau_c)} > 1, \quad (4.10)$$

ここで

$$\phi_c = \tan^{-1} \left\{ \left(2h_c v_t - \frac{\pi}{\varepsilon_c} \sin\phi\right) / \left(\frac{\varepsilon_c}{\pi} v_t - \frac{\pi}{\varepsilon_c} \cos\phi\right) \right\} \quad (4.11)$$

である。式(4.10)が成立するためには、次式を満足しなければならない。

$$\alpha_t > \frac{1}{\sqrt{v_t^2 - 2v_t \mu_t^2 \cos\phi + \mu_t^4 + 4h_c^2 v_t^2 \mu_t^2 - 4h_c v_t \mu_t^3 \sin\phi}} \quad (4.12)$$

式(4.12)の右辺は

$$\begin{aligned} &\lim_{v_t \rightarrow 1, \phi \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{v_t^2 - 2v_t \mu_t^2 \cos\phi + \mu_t^4 + 4h_c^2 v_t^2 \mu_t^2 - 4h_c v_t \mu_t^3 \sin\phi}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{(1 - \mu_t^2)^2 + (2h_c \mu_t)^2}} \end{aligned} \quad (4.13)$$

となる。また

$$\ddot{x}_t = - \left(\frac{\pi}{\varepsilon_c}\right)^2 \frac{k_t \theta_0}{t_{d0}} e^{j \frac{\pi}{\varepsilon_c} \tau_c}$$

$$\ddot{y}_t = - \left( \frac{\pi}{\varepsilon_c} \right)^2 \frac{k_t \theta_0}{t_{d0}} e^{j(\frac{\pi}{\varepsilon_c} \tau_c + \phi)}$$

となるので、 $\ddot{x}_t = \ddot{y}_t$  の場合

$$\theta_0 = \Theta_0, \quad \phi = 0 \quad (4.14)$$

となり、 $\dot{x}_t = \dot{y}_t$  となる。AとBは一体運動をすることになるので、すべり出す限界では

$$t_d = t_{d0} e^{j(\omega_c t + \phi_0)} \quad (\phi_0 \text{ は } \theta \text{ との位相差}) \quad (4.15)$$

となり、式(4.15)と式(4.1)からすべり出す限界の式は

$$\alpha_t = \frac{1}{\sqrt{(1 - \mu_t^2)^2 + (2 h_c \mu_t)^2}} \quad (4.15)$$

である。

つぎにすべり発生限界で、外部からAに加わるトルク  $t_u$  の振幅  $t_{u0}$  と応答振幅との関係を求める。接合面での摩擦トルクの振幅  $t_{d0}$  が最大静止摩擦トルクに等しいとすれば、

$$t_u = t_d + J_A \frac{d^2 \theta}{dt^2} \quad (4.16)$$

となる。式(1.21)と同様にして

$$\frac{k_t \theta_0}{t_{u0}} = \alpha_t \frac{t_{d0}}{t_{u0}} = \frac{1}{\sqrt{\{1 - (1 + \kappa_c) \mu_t^2\}^2 + (2 h_c \mu_t)^2}} \quad (4.17)$$

が得られ、式(4.15)と(4.17)から

$$\frac{t_{d0}}{t_{u0}} = \frac{\sqrt{(1 - \mu_t^2)^2 + (2 h_c \mu_t)^2}}{\sqrt{\{1 - (1 + \kappa_c) \mu_t^2\}^2 + (2 h_c \mu_t)^2}} \quad (4.18)$$

となる。この式(4.17)を図4.7，図4.8に実線で示す。また式(4.18)は伝達されるトルクと外部からAに加わるトルクとの関係を示している。

#### 4.4 実験装置と実験方法

実験装置は円すい接合面をもつ回転振動系と励振装置とねじり振動を検出する装置からなっている。ここで，カップリング状モデルが直接励振される側を入力側，接合面を介して励振される側を出力側とする。カップリング状モデルの挙動を大別すると図4.4のようになる。図のaは入力波形であり，bは出力波形である。出力

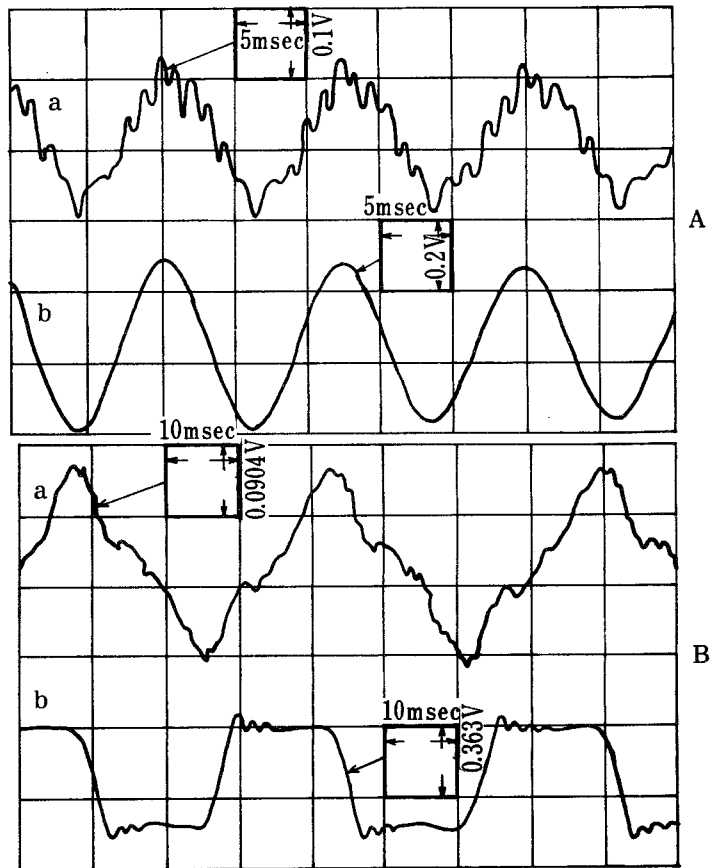


図 4.4 正弦波状領域と矩形波状領域での応答波形

側の波形が正弦波状になる領域を正弦波状領域，矩形波状になる領域を矩形波状領域とし，その限界を矩形波状応答発生限界とした。

矩形波状領域においては2要素的挙動（剛体的すべりを起こす）をすると考えられるが，正弦波状領域においては2要素的挙動（弾性的すべりを起こす）と1要素的挙動（剛体的すべりも弾性的すべりも起こさないで接合面が完全に固着する）を

する場合が考えられる。また振動系を模型化するとき、1要素的挙動は1自由度系として簡単に取り扱い、2要素的挙動の剛体的すべりの場合はクーロンスライドを考えた。

1要素的挙動をしている場合においてすべりはじめる限界の摩擦トルクを $T_{cr}$ とすれば、 $T_{cr}$ は接合面上の静力学によって次のようになる。

$$T_{cr} = \frac{\mu_f r_a}{\sin \alpha + \mu_f \cos \alpha} P = F r_a \quad (4.19)$$

ここで、 $\mu_f$ は最大静止摩擦係数、 $P$ は軸荷重、 $r_a$ は接触円すい面の半径、 $\alpha$ は円すいの半角、 $F$ は接触平均半径円周上での摩擦力である。

励振トルク発生装置は市販の動電型の励振装置を用い、カップリング状モデルの励振レバーの中心より250mmのところにジョイントを取りつけて励振して、励振トルクを発生させた。

振動検出装置としては上部カップリングに取りつけられている加速度が用いられ、入力側の $\theta$ が検出される。加速度計は圧電型のものを用いた。またこの加速度は曲げ振動をひろわぬように励振方向と直角方向の振動を測定するようにしている。出力側のねじり振動 $\theta$ の測定はカップリング下部と一体になっている薄肉円筒部にロゼット型の抵抗線ひずみゲージをはり、これをトランスデューサーとして行なった。

記録装置としてはオシロスコープ、データレコーダ、万能接写装置を用い、励振振動数はタイムカウンターによって観測した。

実験は接合面の潤滑の状態を一定にするため、潤滑油はSWARUBE RO 400（丸善石油製）を室温で用い、潤滑油を一定の圧力で接合面に注入し、励振器によってカップリングにねじり振動を与えて、応答の振動を測定した。データ処理は写真撮影あるいは伝達特性測定装置で行った。この測定系の概略を図4.5に示す。

軸荷重としてはこじれを防ぐために、1/2" 鋼球を介し、てこを用いておもりをつるす。またてことカップリング上部（カップリング凹部とレバー）の荷重を取り除くために、凹部カップリングの四点を絹糸でつるし、それらをばね定数の小さい

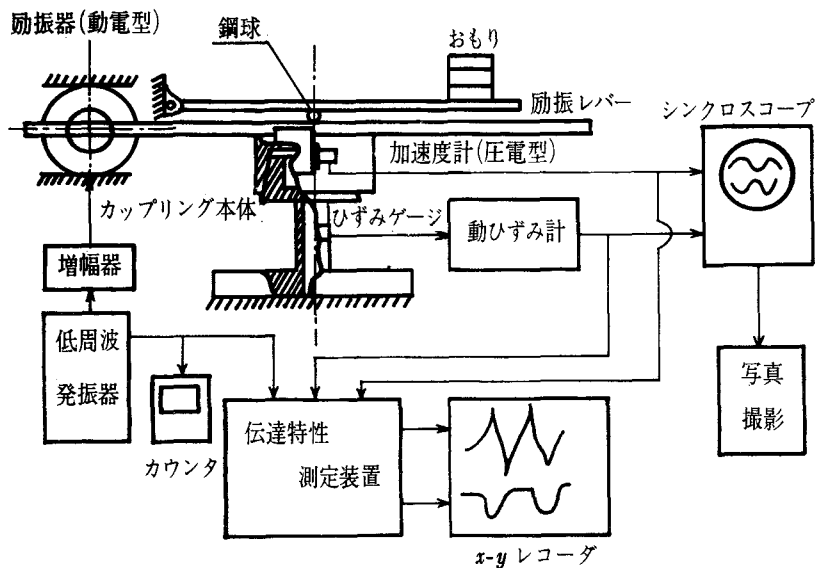


図 4.5 測定系概略図

コイルばねでつるしている。法線力は式(4.19)によって求めることができる。

矩形波状応答発生限界の測定値は励振振動数を一定にして、励振振幅を徐々に増加し、応答波形が正弦波状から矩形波状に移る限界をシンクロスコープで観測しながら、正弦波状領域のところの励振変位振幅あるいは励振加速度振幅を測定して求めた。

#### 4.5 実験結果と考察

静的なトルクで実験して得られた最大静止摩擦トルクと軸荷重との関係を図4.6に示す。軸荷重と最大静止摩擦トルクには直線的な関係があることが明らかになった。接合面には一定の圧力で上部カップリングにあけられた穴から油を注入し、別の穴から流出させた場合が○印で、そうでない場合が×印である。油圧は軸荷重を除荷する方向に働いている。軸荷重 $P$ と最大静止摩擦トルク $T_{cr}$ の間には $T_{cr} = \mu_{eq}P$ の関係が成立する。ここで $\mu_{eq}$ は定数で等価摩擦係数と考えることができる。



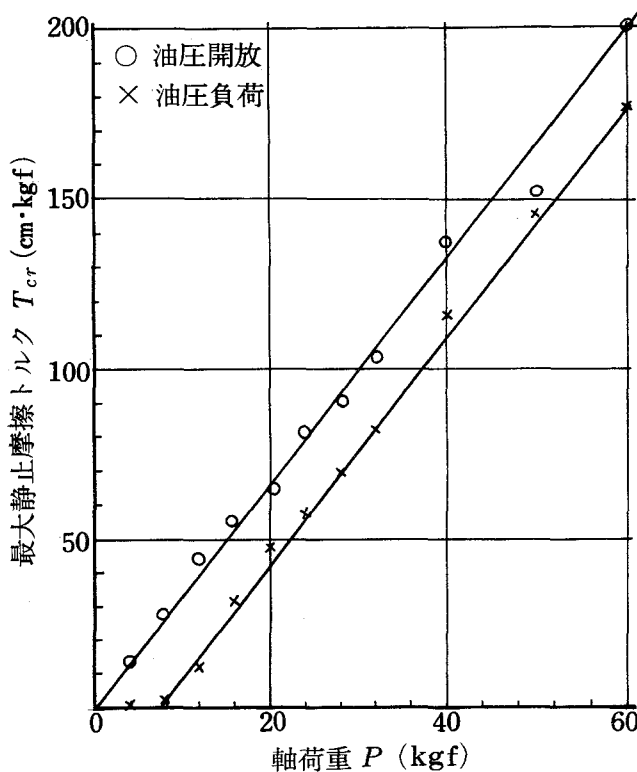


図 4.6 最大静止摩擦トルクと軸荷重

式 (4.19) より  $\mu_{eq} = (\mu_f r_a) / (\sin \alpha + \mu_f \cos \alpha)$  となる。この式より  $\mu_f$  を求めると約 0.3 になる。ただしこの値は円すい面の圧力分布が一定であると仮定している。また円すい面の母線方向の摩擦を無視すると、 $\mu_{eq} = (\mu_f r_a) / \sin \alpha$  となり、この式によって  $\mu_f$  を求めると 0.1 になる。圧力分布の影響、摩擦の働き方も含めて  $\mu_{eq}$  を考えることは有効である。

実験結果によると軸荷重が小さく、励振振幅が大きいほど矩形波状応答が発生する。この限界点を式 (4.4) の無次元量に変形して、図 4.7, 図 4.8 に示す。図 4.7 は油圧を開放した場合で、図 4.8 は油圧を開放しない場合である。これらの限界点の上側では矩形波状応答が発生し、下側では正弦波状応答になる。一定振動数 ( $20 \text{ } \frac{\text{C}}{\text{s}}$ ) で矩形波への移り変りの様子を観察してみると、入力  $\theta$ , 出力  $\theta$  ともほぼ正弦波に近い波形から振幅がだんだん増加するにつれてすべり始める応答波形になることが写真観察により明らかに

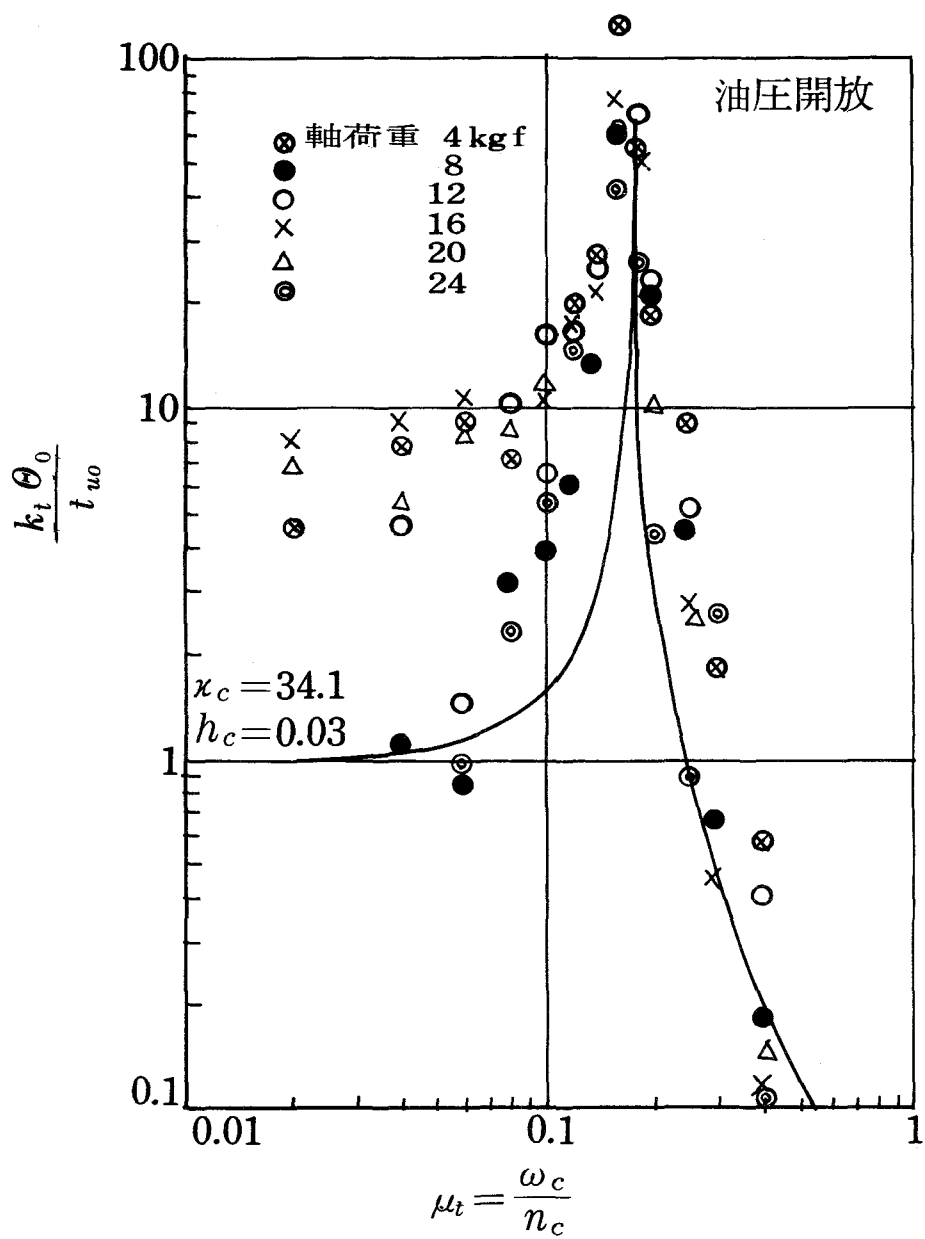


図 4.7 油圧を開放した場合のカップリング状モデルの矩形波状応答発生限界

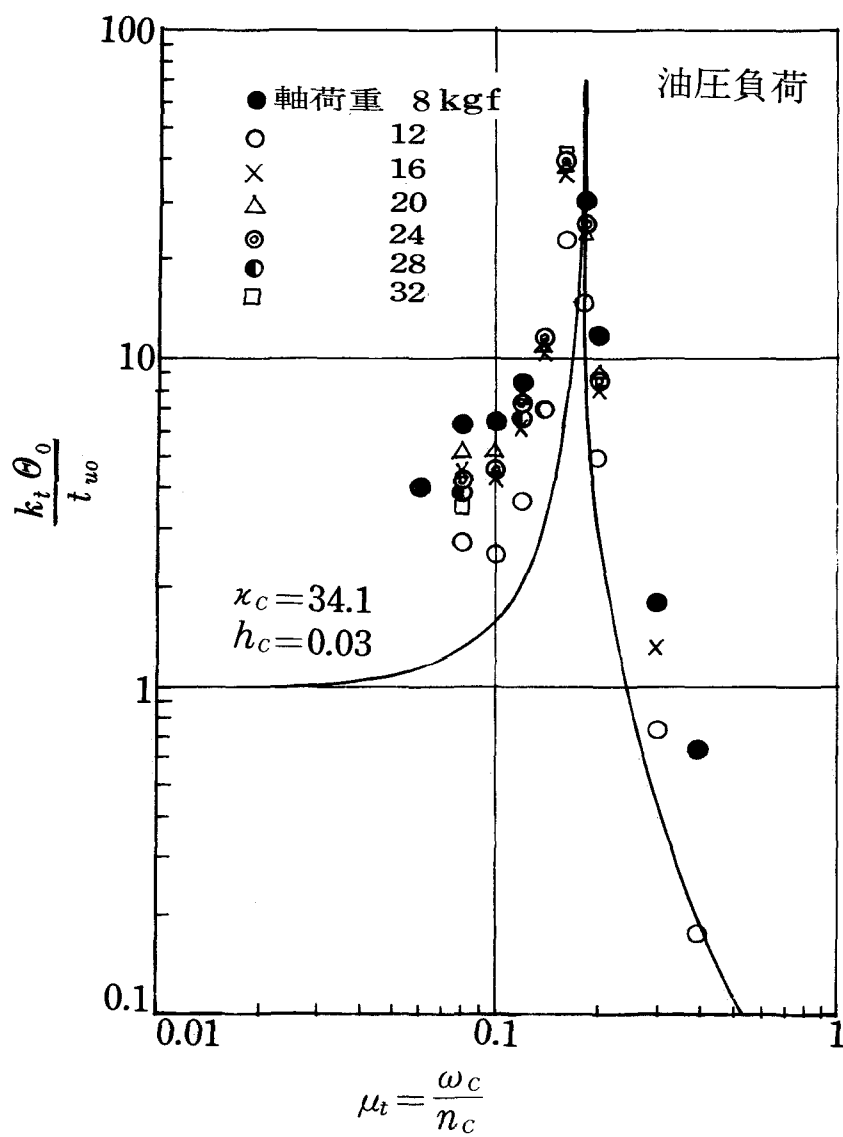


図 4.8 油圧を負荷した場合のカップリング状  
モデルの矩形波状応答発生限界

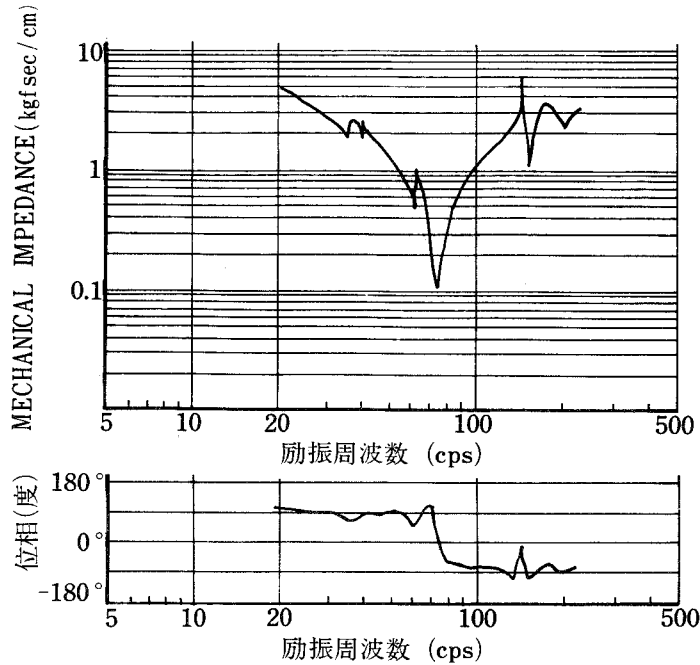


図 4.9 励振レバー加振点での駆動点インピーダンス

なった。カップリング上部から下部への振動の伝達はその接合面間の摩擦によることが大である。カップリング上部上の荷重を小さく励振振幅を大きくすると復元力が摩擦力よりも大きくなり、矩形波状の応答が得られる。軸荷重が大きくなると、一体運動に近づくので、この曲線によく一致するが軸荷重が小さく、低い周波数では実験点はこの曲線よりずれる。この周波数領域ではオシロスコープによる正弦波と矩形波の区別が困難であるので実験点はばらついているように思われる。またこのカップリング状の模型によると、高周波数領域では、矩形波と判断できるのは  $\mu_t$  が 0.4 以下でそれ以上では困難である。図 4.9 は正弦波状の応答の場合の励振レバーのところでの駆動点インピーダンスである。一定の周波数のときの駆動点インピーダンスの値を読み、 $k_t \theta_0 / t_{w0}$  と  $\mu_t$  との関係に変形して図 4.10 に示す。また  $\theta$  と  $\Theta$  との伝達周波数応答関数は図 4.11 のようになる。この図によって矩形波が発生しないときは接合面で相対すべりが発生しないことがわかる。

本章で求めた矩形波状応答発生限界は系のすべりの挙動を区別することになる。

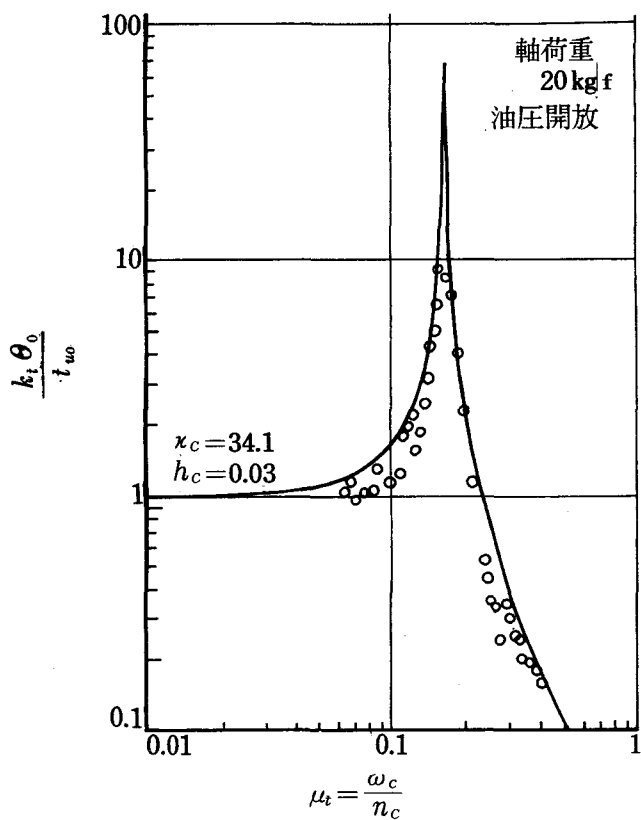


図 4.10

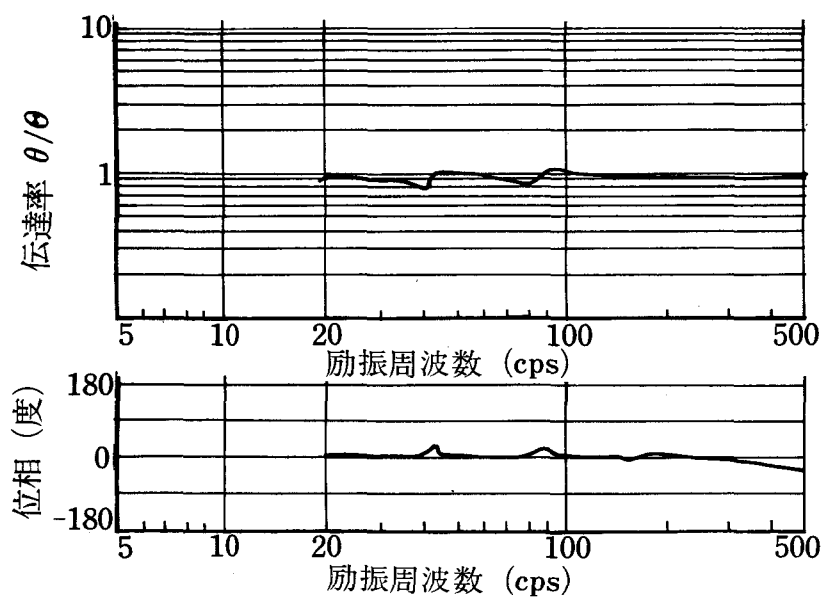


図 4.11 伝達周波数応答線図

矩形波状応答の場合は剛体すべりを考えて、減衰能を評価することができるし、正弦波状応答の場合は接合している部分が弾性的である場合と接合面のない剛体と等価な運動をしている場合とになる。

#### 4.6 ま と め

第1章の解析を二平面接合部を単純化したカップリング状モデルに適用して矩形波状応答発生限界を求め、それを実験で確かめた結果をつぎのようにまとめることができる。

1. カップリング状モデルの接合面を介した系の応答が矩形波状になるかあるいは正弦波状になるかは励振振動数，カップリング上部の振動振幅，最大静止摩擦トルク，ねじりばね定数，カップリングの質量慣性モーメント，ねじり減衰定数が関係する。
2. 軸荷重が大きくなるにつれて，最大静止摩擦トルクが大きくなるので，矩形波状応答は発生しにくくなる。
3. カップリング上部の振動振幅が大きくなれば矩形波状応答が発生する。振動数比が0.04～0.2の周波数範囲での正弦波領域では接合面は固着している。

## 第5章 カップリング状モデルの正弦波状 応答領域での減衰能

### 5.1 ま え が き

ここでは接合面を介しての応答が正弦波状になる場合の減衰能を求めた。最初に第2章で述べた材料減衰能の評価方法をねじり振動系に応用してカップリング状モデルの材料減衰能を求めた。そのためにまず丸棒のねじり振動による材料減衰能を振動モードを考慮して述べる方法を述べ、一端固定、他端に慣性質量のついた中空丸棒のねじり振動の場合について計算した。

つぎに第3章で述べた方法によってカップリング状モデルの接合面で局部すべりがある場合の減衰能を評価した。ここではねじり軸に垂直な接合面をもつねじり円筒の挙動を解析して、この場合の減衰能を評価し、この結果をカップリング状モデルで実験して確かめた。

### 5.2 接合面が固着した場合のカップリング状モデルの減衰能<sup>109)</sup>

第2章で示した材料減衰能の評価法をねじり振動系に応用してカップリング状モデルの材料減衰能を求めた。

第4章では接合面の減衰能を見積るために、接合面をもつ振動系を模型化したカップリング状モデルの矩形波状応答発生限界を明らかにした。この結果からカップリング状モデルの接合面を介した系の応答が正弦波状の場合には接合面での状態が2つの場合に分かれることが予想される。一つは局部すべり運動を行っている場合で、他は接合面が完全に固着して一体運動を行っている場合である。

ここでは、接合面が完全に固着している場合の減衰能を求める解析を行った。この場合の減衰能は材料内部の変形によってエネルギーが消散される材料減衰能である。

第2章で述べた振動モードを考慮したはりの材料減衰能の評価方法を応用して振動モードの影響を考慮した場合の丸棒の材料減衰能の求め方について述べ、カップリング状モデルの材料減衰能を計算した。そしてこの結果を実験で確かめ、接合面が固着している場合の減衰能の特性を明らかにした。

### 5.2.1 応力分布関数とエネルギー吸収関数

カップリング状モデルの接合面が完全に固着している場合は図5.1のような等価ねじり振動系におきかえることができる。

ねじり角変位を $\theta$ 、密度を $\rho$ 、横弾性係数を $G$ とすると振動方程式は

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} = \frac{G}{\rho} \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} \quad (5.1)$$

となり、 $x = l_c$ でのトルク $M_T$ は

$$[M_T(x)]_{x=l_c} = -I_2 \left[ \frac{\partial^2 \theta(x, t)}{\partial t^2} \right]_{x=l_c}$$

(5.2)

となる。 $I_2$ は丸棒の先端についている質量の質量慣性モーメントである。また $x = l_c$ のところで円筒部の内部トルクは

$$[M_T(x)]_{x=l_c} = G I_p \left[ \frac{\partial \theta(x, t)}{\partial x} \right]_{x=l_c} \quad (5.3)$$

である。式(5.2)と(5.3)から、 $x = l_c$ での境界条件は

$$G I_p \left[ \frac{\partial \theta(x, t)}{\partial x} \right]_{x=l_c} = -I_2 \left[ \frac{\partial^2 \theta(x, t)}{\partial t^2} \right]_{x=l_c} \quad (5.4)$$

となる。また式(5.1)の $\theta(x, t)$ は次のように表すことができる。

$$\theta(x, t) = \theta(x) \cdot q(t) = \left( C \cos \lambda \frac{x}{l_c} + D \sin \lambda \frac{x}{l_c} \right) (A \cos \omega t + B \sin \omega t) \quad (5.5)$$

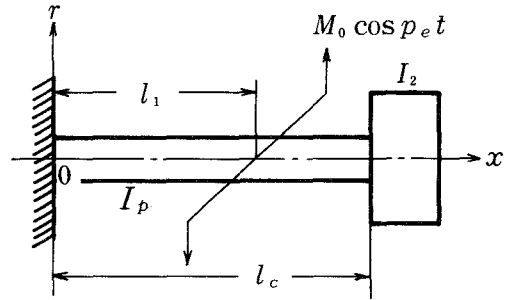


図5.1 解析モデル



したがって、境界条件は

$$\begin{aligned} x = 0 \text{ のとき} \quad & \theta(x) = 0 \\ x = l_c \text{ のとき} \quad & \frac{d\theta(x)}{dx} = \frac{\omega^2 I_2}{G I_p} \theta(x) \end{aligned} \quad (5.6)$$

となる。振動数方程式は

$$\lambda_t \tan \lambda_t = \frac{I_p}{I_2} \rho l_c \quad (5.7)$$

となり、ここで  $\lambda_t$  は固有値で  $\lambda_t = \sqrt{\omega^2 \rho / l_c^2 G}$ 、 $I_p$  は中空円筒部の極断面 2 次モーメント、 $l_c$  は円筒部の長さである。 $i$  次のねじり振動モードの規準関数は式 (5.5) と (5.6) からつぎのようになる。

$$\theta_i(x) = C \sin \lambda_i \frac{x}{l_c} \quad (5.8)$$

ここで  $C$  は定数である。つぎに中空円筒部の応力分布を求めるために、つぎのような仮定を設ける。

1. 横断面は円筒部がねじれた後も平面を保つ。
2. 等間隔の 2 横断面間のねじれの関係はすべて等しい。
3. 横断面上の半径はねじれ後も直線を保つ。
4. ねじれは小さく、ねじれのために生ずるせん断応力は構成する材料のせん断弾性限度以下であり、応力とひずみの関係は Hooke の法則が成立し、材料は等質等方性をもつ。

このような仮定のもとでは、せん断応力  $\tau$  とせん断ひずみ  $\partial \theta(x, t) / \partial x$  との関係は

$$\tau(x, r, t) = G r \frac{\partial \theta(x, t)}{\partial x} \quad (5.9)$$

となる。 $x = l_1$  のところに励振トルク  $M_0 \cos p_c t$  が働いた場合の  $\theta(x, t)$  は

$$\theta(x, t) = \frac{M_0}{\rho I_p} \cos p_e t \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{\lambda_n}{l_c} l_1 \sin \frac{\lambda_n}{l_c} x}{(\omega_n^2 - p_e^2) \left( \frac{l_c}{2} - \frac{l_c}{4\lambda_n} \sin 2\lambda_n \right)} \quad (5.10)$$

となる。式 (5.10) と (5.9) から

$$\tau(x, r, t) = \frac{M_0}{\rho I_p} \cos p_e t \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{\lambda_n}{l_c} l_1 \cdot Gr \left( \frac{\lambda_n}{l_c} \right) \cdot \cos \frac{\lambda_n}{l_c} x}{(\omega_n^2 - p_e^2) \left( \frac{l_c}{2} - \frac{l_c}{4\lambda_n} \sin 2\lambda_n \right)} \quad (5.11)$$

となる。第  $i$  次の振動モードのせん断応力成分  $\tau_i$  は式 (5.11) から

$$\tau_i(x, r, t) = \frac{M_0 \sin \frac{\lambda_i}{l_c} l_1 \cdot Gr \left( \frac{\lambda_i}{l_c} \right) \cos \lambda_i \frac{x}{l_c}}{\rho I_p (\omega_i^2 - p_e^2) \left( \frac{l_c}{2} - \frac{l_c}{4\lambda_i} \sin 2\lambda_i \right)} \quad (5.12)$$

となる。式 (5.12) から、 $\tau_i$  が一定のときの  $r$  と  $x$  の関係は

$$r(x, t) = \frac{(\omega_i^2 - p_e^2) \rho I_p \left( \frac{l_c}{2} - \frac{l_c}{4\lambda_i} \sin 2\lambda_i \right) \tau_i}{\cos p_e t M_0 G \frac{\lambda_i}{l_c} \sin \frac{\lambda_i}{l_c} l_1 \cos \frac{\lambda_i}{l_c} x} \quad (5.13)$$

となる。式 (5.13) は  $\tau_i$  が一定のときの等応力曲線である。また最大応力  $\tau_{mi}$  が働く位置を  $r = r_m$  ,  $x = x_m$  とすると

$$r_m(x, t) = \frac{(\omega_i^2 - p_e^2) \rho I_p \left( \frac{l_c}{2} - \frac{l_c}{4\lambda_i} \sin 2\lambda_i \right) \tau_{mi}}{\cos p_e t M_0 G \frac{\lambda_i}{l_c} \sin \frac{\lambda_i}{l_c} l_1 \cos \frac{\lambda_i}{l_c} x_m} \quad (5.14)$$

となり、式 (5.13) と (5.14) から

$$\frac{r}{r_m} = \frac{\cos \lambda_i \frac{x_m}{l_c} \tau_i}{\cos \lambda_i \frac{x}{l_c} \tau_{mi}} \quad (5.15)$$

となる。この式が無次元化された等応力線となる。また最大応力が働くところは  $x_m = 0$  ,  $r_m = r_q$  となるので、等応力曲線は

$$\frac{r}{r_q} = \frac{1}{\cos \lambda_i \frac{x}{l_c}} \frac{\tau_i}{\tau_{mi}} \quad (5.16)$$

となる。 $r_q$  は中空円筒部の外半径である。つぎに  $\tau_i$  以下のせん断応力になっている部分の体積を  $V_i$  とすると、この体積  $V_i$  は

$$V_i = \pi \int_0^{l_c} r(x, t)^2 dx - \pi r_p^2 l = \pi \int_0^{l_c} r(x, t)^2 dt - \pi \alpha_r^2 r_q^2 l \quad (5.17)$$

となる。ここで、 $r_p$  は中空円筒部の内半径、 $\alpha_r = r_p/r_q$  である。 $0 \leq \tau_i/\tau_{im} \leq \cos \lambda_i$  の場合は式 (5.17) と (5.13) から

$$V_i = \left[ \frac{(\omega_i^2 - p_e^2) \rho I_p \left( \frac{l_c}{2} - \frac{l_c}{4\lambda_i} \sin 2\lambda_i \right) \tau_i}{\cos p_e t M_0 G \left( \frac{\lambda_i}{l_c} \right) \sin \lambda_i \frac{l_1}{l_c}} \right]^2 \int_0^{l_c} \frac{1}{\cos^2 \lambda_i \frac{x}{l}} dx - \pi \alpha_r^2 r_q^2 l_c \quad (5.18)$$

となる。式 (5.16) を用いて整理すると

$$V_i = \pi r_q^2 l \left\{ \left( \frac{\tau_i}{\tau_{mi}} \right)^2 \frac{1}{\lambda_i} \tan \lambda_i - \alpha_r^2 \right\} \quad (5.19)$$

となる。最大せん断応力  $\tau_{mi}$  以下のせん断応力になる体積を  $V_t$  とすると

$$V_t = \pi r_q^2 l_c (1 - \alpha_r^2) \quad (5.20)$$

となるので、式 (5.19) と (5.20) から

$$\frac{V_i}{V_t} = \frac{1}{(1 - \alpha_r^2)} \left\{ \left( \frac{\tau_i}{\tau_{mi}} \right)^2 \frac{1}{\lambda_i} \tan \lambda_i - \alpha_r^2 \right\} \quad (5.21)$$

となる。したがって、応力分布関数はつぎのようになる。

$$f\left(\frac{\tau_i}{\tau_{mi}}\right) = \frac{d(V_i/V_t)}{d(\tau_i/\tau_{mi})} = \left(\frac{1}{1 - \alpha_r^2}\right) \frac{2}{\lambda_i} \left(\frac{\tau_i}{\tau_{mi}}\right) \tan \lambda_i \quad (5.22)$$

つぎに部材のすべてにおいて均一な周期応力になっている場合、1 周期、単位体積あたりのエネルギー吸収量を表しているエネルギー吸収関数は応力分布関数とは対照

的に部材の形状や負荷方法には依存しないで、材料固有の特性を表す関数である。

Lazan らの求めた実験式をせん断応力の場合に変換して、つぎの実験式をエネルギー吸収関数とする。

$$\Delta U(\tau) = 0.0703 \left( \frac{\tau}{\tau_f} \right)^{2.3} + 0.422 \left( \frac{\tau}{\tau_f} \right)^8 \quad (5.23)$$

ここで、 $\tau_f$  は疲労限度で、鋼の場合は  $895.7 \text{ kgf/cm}^2$  であり、 $\Delta U$  の単位は  $\text{kgf} \cdot \text{cm}/(\text{cm}^3 \cdot \text{cycle})$  である。

### 5.2.2 カップリング状モデルの材料減衰能の評価

前述したように、ある部材に荷重が加わったとき、応力分布を表す応力分布関数が求まる。この応力分布関数  $f(\tau/\tau_m)$  とエネルギー吸収関数  $\Delta U(\tau)$  からつぎの式で材料減衰能を損失係数  $\eta$  で評価することができる。

$$\eta = \frac{G \int_0^{\tau_m} \Delta U(\tau) f\left(\frac{\tau}{\tau_m}\right) d\tau}{\pi \int_0^{\tau_m} \tau^2 f\left(\frac{\tau}{\tau_m}\right) d\tau} \quad (5.24)$$

カップリング状モデルの中空円筒部の材料減衰能は式 (5.22)、(5.23) と (5.24) から

$$\eta = \frac{G \int_0^{\tau_{mi}} \left\{ 0.0703 \left( \frac{\tau_i}{\tau_f} \right)^{2.3} + 0.422 \left( \frac{\tau_i}{\tau_f} \right)^8 \right\} \left\{ \left( \frac{1}{1-\alpha_r^2} \right) \frac{2}{\lambda_i} \left( \frac{\tau_i}{\tau_{mi}} \right) \tan \lambda_i \right\} d\tau_i}{\pi \int_0^{\tau_{mi}} \tau_i^2 \left\{ \left( \frac{1}{1-\alpha_r^2} \right) \frac{2}{\lambda_i} \left( \frac{\tau_i}{\tau_{mi}} \right) \tan \lambda_i \right\} d\tau_i} \quad (5.25)$$

となる。カップリング部は薄肉円筒と一体になっているので、この円筒部の材料減衰能を計算することになる。表 4.1 の値を用いて、固有値と固有振動数を計算すると表 5.1 のようになり、端末に付加された慣性質量の影響が大きい。つぎに式 (5.16) から等応力線を求めると図 5.2 のようになる。カップリング状モデルの第 1 次の振動モードでは  $\lambda_i x/l_c$  は  $0 \sim 0.0147$  となるので長さ方向での応力分布はあまり

表 5.1 接合面が固着した場合の  
カップリング状モデルの  
固有値と固有振動数

| 振動<br>モード | 固 有 値 $\lambda_t$ | 固有振動数 (Hz) |
|-----------|-------------------|------------|
| 1         | 0.0147            | 94.2       |
| 2         | 3.142             | 20120      |
| 3         | 6.283             | 40240      |
| 4         | 9.425             | 60360      |
| 5         | 12.57             | 80470      |

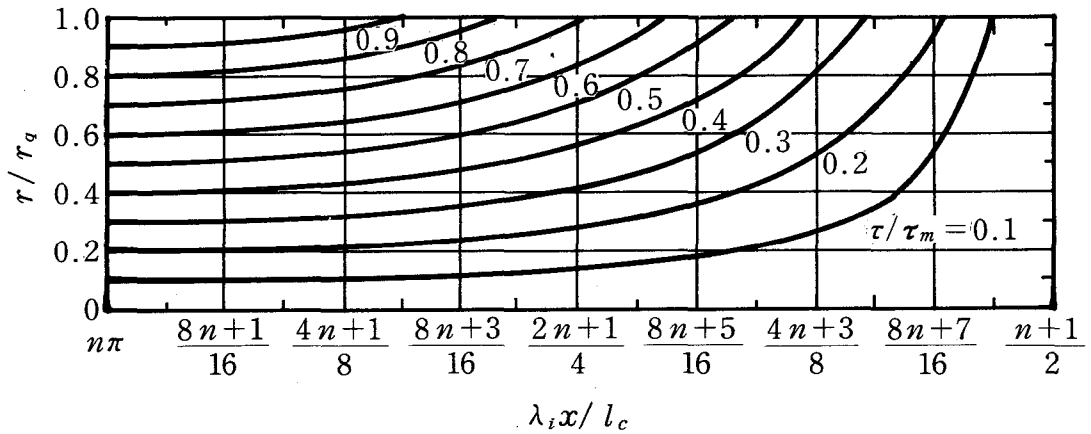


図 5.2 中実丸棒のねじりの等応力線 ( $n = 0, 1, 2, \dots$ )

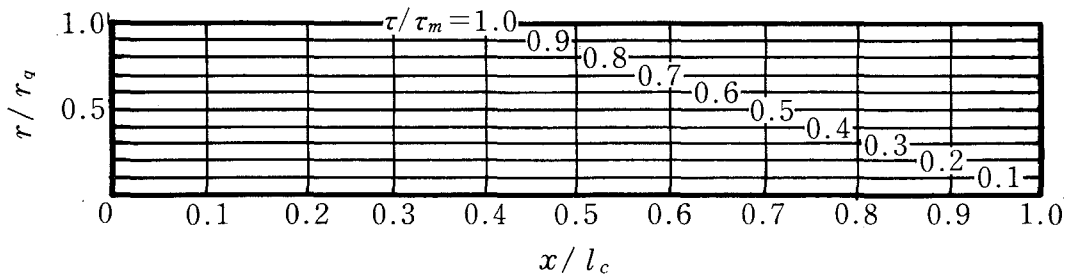


図 5.3 中実丸棒に慣性質量がついた場合の等応力線

変化がなく半径方向の距離に依存する。この関係を図5.3に示している。また第1次の振動モードでは式(5.18)が成立するための条件を満足するので、式(5.21)を用いて体積応力関数を計算すると図5.4のようになる。 $r/r_q$ が0から0.8までは

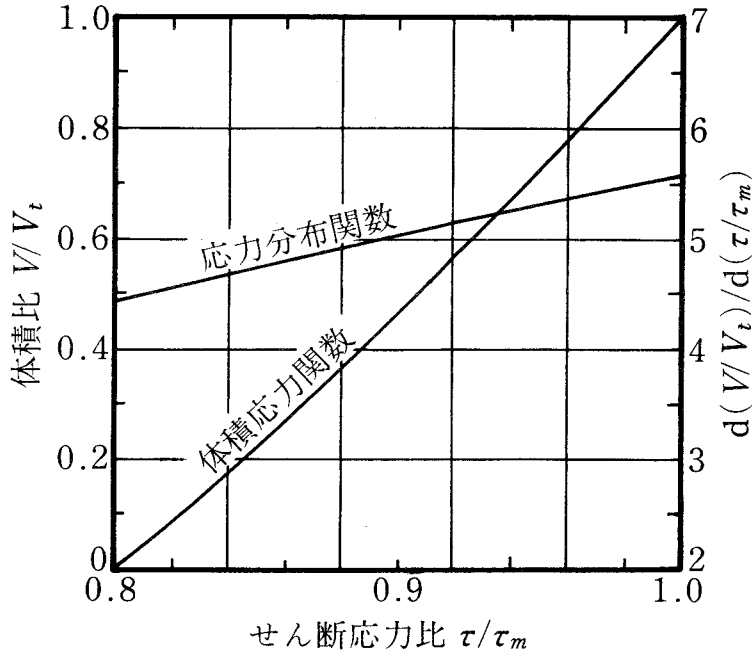


図5.4 体積応力関数と応力分布関数  
(第1次の振動モード  $\lambda_i = 0.0147$ )

中空になっているので、 $\tau/\tau_m$ が0.8のとき $V/V_t$ は0となり、 $\tau/\tau_m$ が1.0のとき、 $V/V_t$ が1.0となるまで、この間の $V/V_t$ は直線的に増加する傾向がある。またこの図の応力分布関数は式(5.22)から計算することができ、応力比 $\tau/\tau_m$ による変化はあまり大きくない。式(5.25)によってカップリング状モデルの損失係数と最大応力振幅との関係を求めると図5.5のようになる。疲労限付近から、最大応力振幅の増加とともに損失係数が急激に増加する。つぎにカップリング状モデルが固着運動しているときのねじり角と最大せん断応力との関係を求める。式(5.10)と(5.8)から強制ねじり振動している中空丸棒の*i*次の振動モードのねじり角は

$$\theta_i(x, t) = C_{fi} \theta_i \cos p_e t \quad (5.26)$$

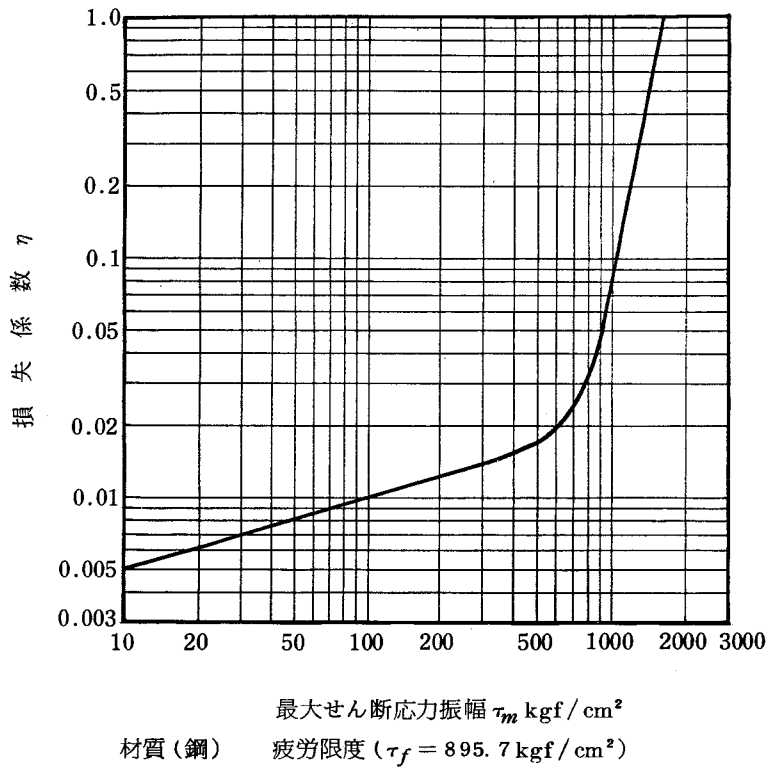


図 5.5 接合面が固着した場合のカップリング状モデルの材料減衰能(第1次の振動モード)

となる。ここで

$$C_{fi} = \frac{M_0 \theta_i(l_1)}{\rho I_p (\omega_i^2 - p_e^2) \int_0^{l_1} \theta_i(x)^2 dx} \quad (5.27)$$

であり,  $l_1$  は励振点の  $x$  座標を表す。したがって, ねじり角振幅を  $\theta_{ai}(x)$  とすると

$$\theta_{ai}(x_p) = C_{fi} \theta_i(x_p) \quad (5.28)$$

となる。 $\theta_{ai}(x_p)$  と  $x_p$  が与えられると,  $C_{fi}$  は決まる。また式(5.9)と(5.26)から,  $i$  次のねじり振動モードのせん断応力は

$$\tau_i(x, r, t) = C_{fi} Gr \frac{d\theta_i(x)}{dx} \cos p_e t \quad (5.29)$$

となる。このときのせん断応力振幅は

$$\tau_{ai}(x, r) = C_{fi} Gr \frac{d\theta_i(x)}{dx} \quad (5.30)$$

となる。最大せん断応力が働く位置を  $x = x_m$ ,  $r = r_m$  とすると、最大せん断応力振幅  $\tau_{mai}$  は

$$\tau_{mai} = C_{fi} Gr_m \left[ \frac{d\theta_i(x)}{dx} \right]_{x=x_m} \quad (5.31)$$

となる。ここで

$$\zeta_i = Gr \frac{d\theta_i(x)}{dx} \quad (5.32)$$

とすると、式(5.28), (5.31), (5.32)から

$$\tau_{mai} = - \frac{[\theta_{ai}]_{x=x_p}}{\theta_i(x_p)} [\zeta_i]_{\substack{x=x_m \\ r=r_m}}$$

となる。式(5.8)と(5.33)から

$$\tau_{mai} = G \cdot r_m \frac{\lambda_i \cos \lambda_i \frac{x_m}{l_c}}{l_c \sin \lambda_i \frac{x_p}{l_c}} [\theta_{ai}]_{x=x_p} \quad (5.34)$$

となる。この式を用いて、第1次のねじり振動モードの場合の最大せん断応力と、 $x = l$  のところでのねじり角との関係を求める。 $r_m = r_0 = 1.5 \text{ cm}$ ,  $\lambda_1 = 0.01471$ ,  $l_c = 8 \text{ cm}$ ,  $G = 0.81 \times 10^6 \text{ kgf/cm}^2$ ,  $x_p = l_c$ ,  $x_m = 0$  なので、式(5.34)から

$$\tau_{ma} = 1.5189 \times 10^5 \theta_a \quad (5.35)$$

となる。ただし、 $\theta_a$  は  $x = l_c$  でのねじり角振幅である。また  $\theta_a$  は rad で、 $\tau_{ma}$  は  $\text{kgf/cm}^2$  で表される量である。



### 5.2.3 実 験

以上の理論解析すなわち一端固定，他端に慣性質量のついた中空円筒部の材料減衰能の解析を実験によって確かめた。まずはじめに図4.1に示されるカップリング状モデルの励振レバーを打撃して，減衰ねじり自由振動を行わせた。このとき，接合面でのすべりによる減衰能ならびに固定端部でのエネルギー消散による減衰能を無視できるように打撃力を小さくした。その波形が図5.6に示されている。この図の

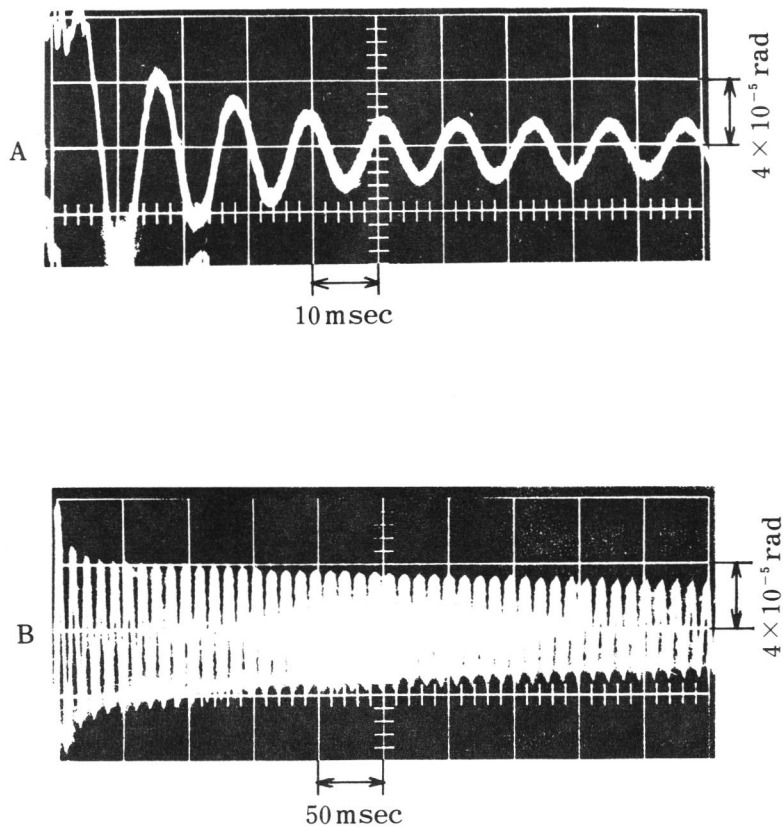


図 5.6 カップリング状モデルの自由振動波形

A の波形から振動数を，B の波形から損失係数を計算する。その結果，振動数は 86.6 Hz となった。損失係数  $\eta$  の値は減衰ねじり自由振動波形の 5 つの波から，次式によって求めた。

$$\eta = \frac{1}{\pi n} l_n \frac{A_n}{A_0} \quad (5.36)$$

ここで、 $A_0$  は 1 番目の波、 $A_n$  は  $n+1$  番目の波であり、 $n=4$  とした。そしてこのときの最大せん断応力振幅はこの 5 つの波の平均振幅から計算した。この結果と理論解析の図 5.5 とを比較しているのが図 5.7 である。この実験から接合面が固着し

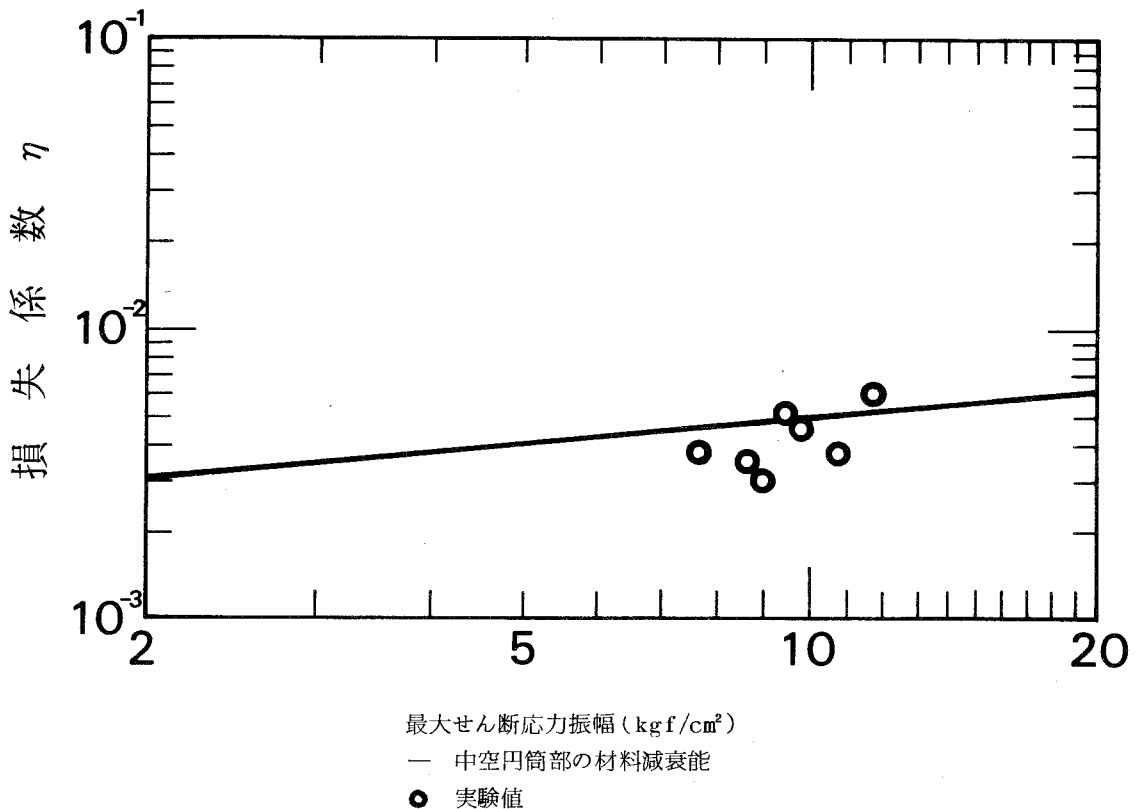


図 5.7 接合面が固着した場合のカップリング状モデルの減衰能

ている場合のカップリング状モデルの減衰能は一端固定、他端に慣性質量のついた中空円筒の材料減衰能であると考えてもよいといえよう。

以上の結果をまとめると、接合面が固着した場合のカップリング状モデルの減衰能は弾性支持部である中空円筒部の材料減衰能であると考えられ、理論解析が妥当であることが確かめられた。

### 5.3 カップリング状モデルの局部すべりによる減衰能

第3章の方法によってカップリング状モデルの接合面での局部すべりによる減衰能を評価した。

カップリング状モデルのような系の挙動の応答が正弦波状である場合の接触機構には2つの場合があると考えられる。一つはカップリング状モデルの接合面で局部すべり運動が発生する場合で他は接合面ではすべりが発生せずに固着の状態で運動している場合である。ここでは、カップリング状モデルの局部すべりによる減衰の機構に関する一考察を述べる。解析する場合、摩擦特性は簡単なクーロンの法則を用い、接触機構については単純化した機構を考えて、近似的な局部すべりによる減衰の機構を考察した。減衰能には面圧と摩擦係数が影響し、面間介在物と面あらしは摩擦係数に影響を与えると仮定して解析を行った。解析モデルとしては一端固定の中空丸棒のねじりの挙動を想定する。その中空丸棒は軸と直角に接合面をもち、接合面が完全に固着結合した場合の1次のねじり振動モードのみを考えて、減衰能を評価する。次にカップリング状モデルを用いて実験を行い、減衰能を測定して、減衰能と面圧との関係を明らかにした。

#### 5.3.1 一端固定の中空丸棒で軸に直角な接合面をもつ場合の減衰能

接合面での局部すべりによる減衰の機構を明らかにするために、ここでは、図5.8のような一端固定の中空丸棒が軸に直角な接合面をもつ場合を考察する。解析においては、次のような仮定を設定した。

1. 丸棒の中心軸は変形後も直線を保つ。

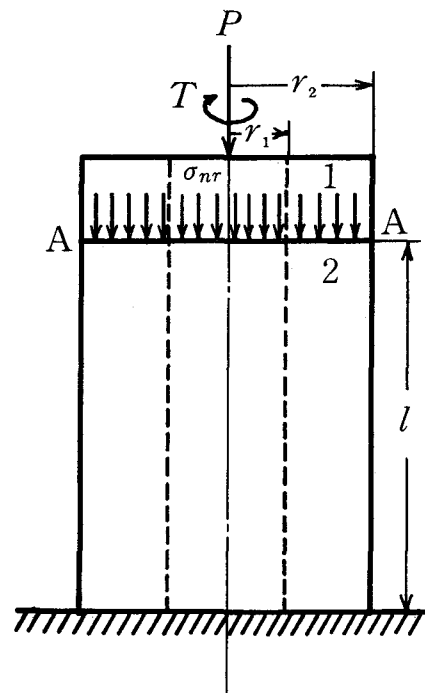


図5.8 解析モデル

2. 接合面上ではクーロン型の摩擦特性をもつ。
  - a. 摩擦係数は同じ面を何回繰返しすべらせても等しい。
  - b. 摩擦係数は荷重，見掛けの接触面積に関係しない。
  - c. 静摩擦係数と運動摩擦係数の大きさが等しい。
3. 接合面上の面圧は一定とする。

図5.8に示されるように，一端固定の中空丸棒が接合面A-Aで接合しており，接合面には垂直応力 $\sigma_{nr}$ が等分布荷重として作用しており，1の要素にねじり振動が加わっている。このとき接合面は丸棒の軸と垂直である。そして接合面が完全固着結合をしたと考えたときの1次のね

じり振動モードのみを考えると，接合面のせん断応力分布は図5.9のようになる。 $\tau$ は完全固着の場合のせん断応力分布である。この接合面上での摩擦係数を $\mu$ とすると，面に沿って働く摩擦力は単位面積あたり $\mu \cdot \sigma_{nr}$ となる。この $\mu \cdot \sigma_{nr}$ とせん断応力 $\tau$ とが等しいところがすべりの限界となる。この限界せん断応力を $\tau_0$ とすると， $\tau_0$ より大きいせん断応力のところでは相對すべりが発生し， $\tau_0$ より小さいせん断応力では相對すべりは発生しない。すべり領域は半径方向で， $r_0$ から $r_2$ となり，斜線の部分が相對すべりが発生している領域となる。そのときのねじれ角を $\theta_0$ とすると次式が成立する。

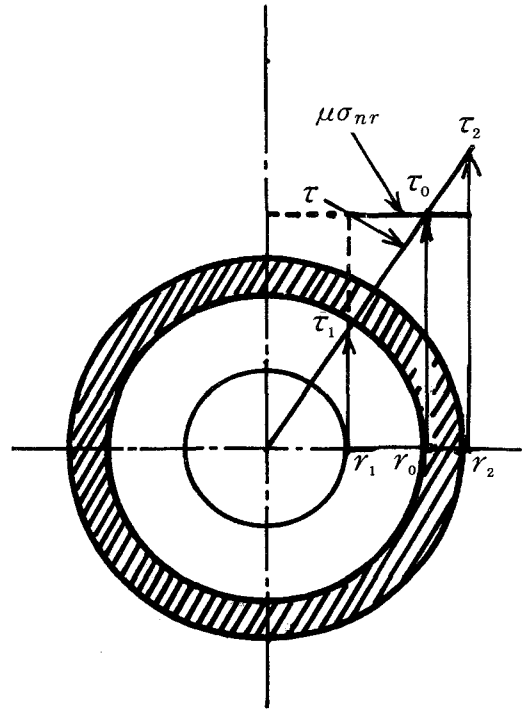


図 5.9 接合面のせん断応力分布

$$\tau_0 = \frac{Gr_0}{l} \theta_0 \quad (5.40)$$

相対すべりが発生している領域では，図 5.8 のモデルの 1 の部分は  $r\theta_0$  の変位をし，2 の部分は  $r_0\theta_0$  の変位をする。したがって，この領域での相対すべりの大きさは  $r\theta_0 - r_0\theta_0$  となり，微小面積  $\Delta S$  に生ずる消散エネルギー  $\Delta D$  は次のようになる。

$$\Delta D = (r\theta_0 - r_0\theta_0) \mu \sigma_{nr} \Delta S \quad (5.41)$$

$\Delta S = \Delta r \cdot r \cdot \Delta \theta$  であるので，消散されるエネルギー  $D_0$  は

$$D_0 = \int_0^{2\pi} \int_{r_0}^{r_2} \mu \cdot \sigma_{nr} r (r\theta_0 - r_0\theta_0) dr d\theta \quad (5.42)$$

となり， $\mu$  と  $\sigma_{nr}$  は接合面上で一定であると

$$D_0 = \mu \cdot \sigma_{nr} \theta_0 \left\{ \frac{2}{3} \pi (r_2^3 - r_0^3) - \pi r_0 (r_2^2 - r_0^2) \right\} \quad (5.43)$$

となる。 $\tau_0 = \mu \sigma_{nr}$ ， $r_0/r_2 = \tau_0/\tau_2$  を代入すると

$$D_0 = \frac{\pi l r_2^2}{G} \left\{ \frac{1}{3} \frac{1}{\tau_2^2} \mu^4 \sigma_{nr}^4 - \mu^2 \sigma_{nr}^2 + \frac{2}{3} \tau_2 \mu \sigma_{nr} \right\} \quad (5.44)$$

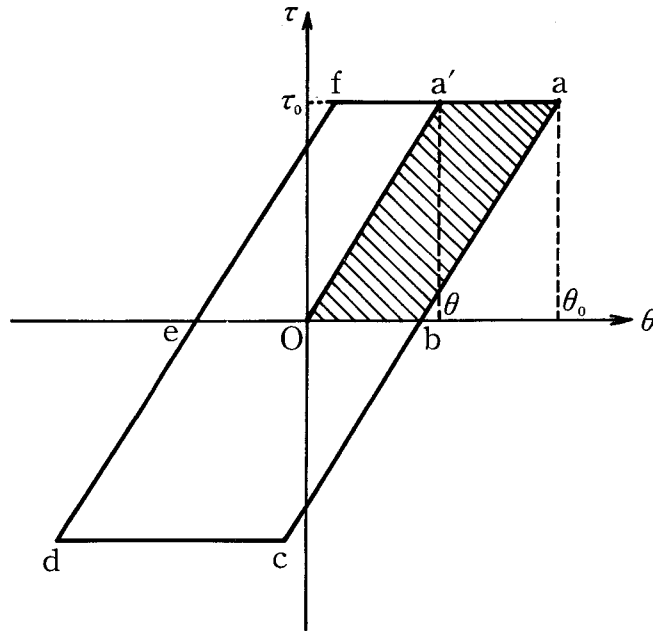


図 5.10 せん断応力とねじり角のヒステリシスループ

となる。式(5.44)より最適な $\sigma_{nr}$ を求めてみると

$$\sigma_{nr} = 0.366 \tau_2 / \mu \quad (5.45)$$

となり、式(5.45)は最適な締付圧力を示している。また $\mu = 0.366 \tau_2 / \sigma_{nr}$ は $\sigma_{nr}$ が与えられたときの最適摩擦係数となる。次に1サイクルあたりに消散されるエネルギーを $D_{cyc}$ とすると、図5.10から明らかなように、 $D_{cyc}$ すなわち $\square a c d f$ は $\square O a' a b$ の4倍である。したがって

$$D_{cyc} = 4 D_0 = \frac{4\pi l r_2^2}{G} \left\{ \frac{1}{3} \frac{1}{\tau_2^2} \mu^4 \sigma_{nr}^4 - \mu^2 \sigma_{nr}^2 + \frac{2}{3} \tau_2 \mu \sigma_{nr} \right\} \quad (5.46)$$

となる。ここで $U$ をこのモデルの接合面が固着しているときの最大ひずみエネルギーとすると

$$U = \frac{I_p l \tau_2^2}{2 G r_2^2} \quad (5.47)$$

となる。ここで $I_p$ は極断面2次モーメントである。減衰能を評価する無次元量 $\Phi$ を次式で表す。

$$\Phi = \frac{D_{cyc}}{U} \quad (5.48)$$

したがって、 $\Phi$ は

$$\Phi = \frac{8\pi r_2^4 l}{I_p \tau_2^2} \left\{ \frac{1}{3} \frac{\mu^4 \sigma_{nr}^4}{\tau_2^2} - \mu^2 \sigma_{nr}^2 + \frac{2}{3} \tau_2 \mu \sigma_{nr} \right\} \quad (5.49)$$

となる。 $I_p = \pi(1 - n_r^4) r_2^4 / 2$ ,  $n_r = r_1 / r_2$ ,  $B_0 = \mu \sigma_{nr} / \tau_2$ とすると、

$$\Phi = \frac{16}{(1 - n_r^4)} \left\{ \frac{1}{3} B_0^4 - B_0^2 + \frac{2}{3} B_0 \right\} \quad (5.50)$$

となる。 $n_r$ をパラメータとして横軸に $B_0 = \mu \sigma_{nr} / \tau_2$ 、縦軸 $\Phi = D_{cyc} / U$ をとると、式(5.50)は図5.11のようになる。式(5.42)で表されるように消散エネルギーは摩擦力と相対すべりの積である。したがって、この図は接合面の摩擦係数と励振トルクを一定にしたとき、 $B_0$ が0.366になるまでは $\sigma_{nr}$ を増加させると、減衰能 $\Phi$ は

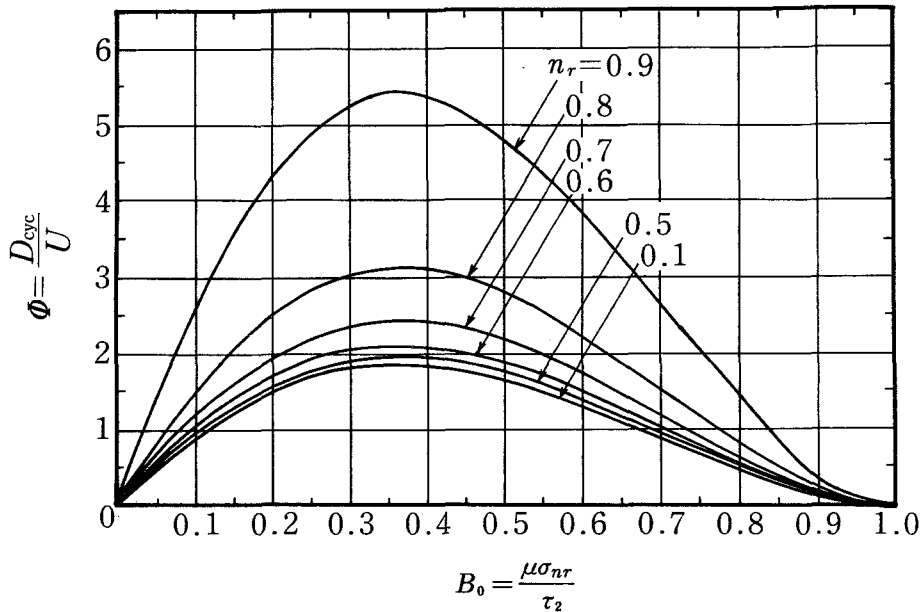


図 5.11  $\phi$  と  $B_0$  との関係

大きくなるが、 $B_0$  が 0.366 を越えると、 $\sigma_{nr}$  が増加するという事は相対すべりが発生するのを妨げることになるので、消散エネルギーは小さくなり、減衰能  $\phi$  も小さくなることを示している。また接合面の摩擦係数と法線圧力を一定にすると  $B_0$  が 0.366 までは、励振トルクが大きくなると、減衰能は小さくなる。これは励振トルクが大きくなると、相対すべり量が大きくなって、相対すべり量と摩擦力の積である消散エネルギーは大きくなるが、このことよりも、励振トルクが大きくなり、最大弾性エネルギーが大きくなる効果の方が大きくなるので減衰能は小さくなるのである。 $B_0$  が 0.366 以上では、 $\tau_2$  すなわち励振トルクが小さくなるにつれて、 $\phi$  が小さくなる。これは  $\tau_2$  が小さくなることにより、相対すべりも最大弾性エネルギーも小さくなるが、この弾性エネルギーに比べて、相対すべりと摩擦力の積である消散エネルギーが小さくなるからである。次に、 $n_r$  すなわち  $r_1/r_2$  が大きくなると、半径に比べて肉厚が薄くなる。肉厚が薄くなると、摩擦力は小さくなるけれども相対すべりが大きくなって、減衰能が大きくなることを示している。

### 5.3.2 カップリング状モデルの接触面上での静力学

ここでは最大静止摩擦トルク  $T_{cr}$  と軸荷重  $P$  との関係を求めるために次のような解析をする。いま図 5.12 のように、任意の半径を  $r$  とすると、小幅の円周の長さ

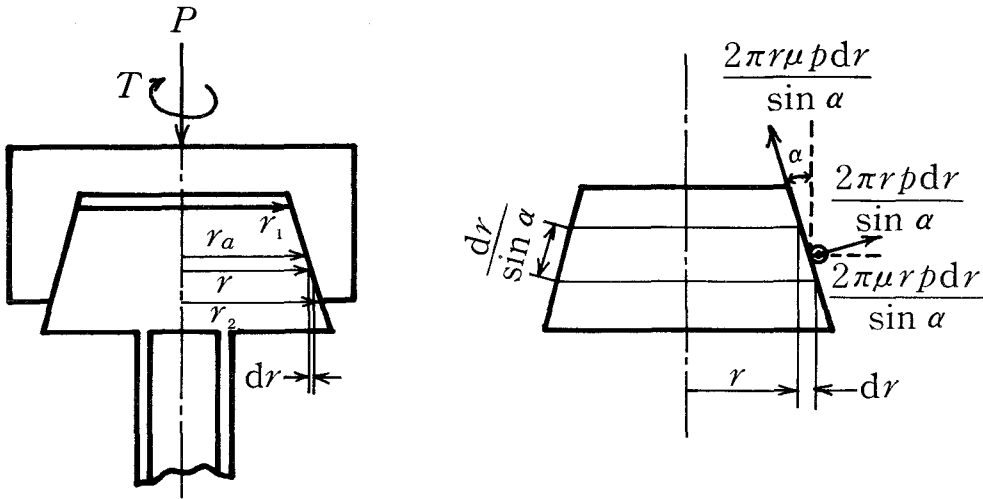


図 5.12 接合面に働く静的な力

は  $2\pi r$  となり、微小円すい台の面積は  $2\pi r \cdot dr / \sin \alpha$ 、円すいの面の法線力は  $2\pi r \cdot dr \cdot p / \sin \alpha$ 、円すい面の法線力の軸方向分力は  $2\pi r \cdot p \cdot dr$ 、円すい面の法線力による円すい面上の摩擦力は  $2\pi r \cdot \mu \cdot dr \cdot p / \sin \alpha$ 、円すい面上の摩擦力の軸方向の分力は  $2\pi \mu \cdot r \cdot dr \cdot p \cdot \cos \alpha / \sin \alpha$  となる。したがって、軸荷重  $P$  は次のようになる。

$$P = 2\pi \int_{r_1}^{r_2} p r dr + 2\pi \mu (\cos \alpha / \sin \alpha) \int_{r_1}^{r_2} p r dr \quad (5.51)$$

圧力  $p$  は円すい面上で一様分布していると仮定すると、

$$P = \pi p (r_2^2 - r_1^2) \left( 1 + \mu \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} \right) \quad (5.52)$$

となる。円すい面上の法線力による円周方向の摩擦力は  $2\pi r \cdot \mu \cdot dr \cdot p / \sin \alpha$  であるので、摩擦トルクは  $2\pi r^2 \cdot \mu \cdot dr \cdot p / \sin \alpha$  である。したがって、伝達ねじりモーメントは次のようになる。



$$T = \frac{2\pi\mu}{\sin\alpha} \int_{r_1}^{r_2} pr^2 dr = \frac{2}{3} \frac{\pi p\mu}{\sin\alpha} (r_2^3 - r_1^3) \quad (5.53)$$

伝達ねじりモーメント  $T$  と軸荷重  $P$  との比をとると式 (5.52) と式 (5.53) から

$$\frac{T}{P} = \frac{2}{3} \mu \frac{r_2^2 + r_2 r_1 + r_1^2}{(r_2 + r_1)(\sin\alpha + \mu \cos\alpha)} \quad (5.54)$$

となる。したがって、伝達摩擦トルクと軸荷重との関係は次のようになる。

$$T = \frac{2}{3} \frac{\mu(r_2^2 + r_2 r_1 + r_1^2)}{(r_2 + r_1)(\sin\alpha + \mu \cos\alpha)} P \quad (5.55)$$

この式から、最大静止摩擦係数  $\mu_m$  と内径  $r_1$ 、外径  $r_2$ 、軸荷重  $P$ 、円すい半角  $\alpha$  を与えれば、最大静止摩擦トルク  $T_{cr}$  は決まることがわかる。また式 (5.55) から最大静止摩擦トルク  $T_{cr}$  と軸荷重  $P$  が決まれば、等価最大静止摩擦係数  $\mu_{eq}$  が求まることがわかる。

### 5.3.3 実験方法と結果

実験は接合面の潤滑の状態を一定にするために、潤滑油は Swarube RO 400 を使用し、一定温度（室温）、一定圧力（高さ 1235 mm から注入）で注入した。文献<sup>58)</sup>によると金属間接触と潤滑剤が混在する状態がケーロンの摩擦特性に近い挙動をするということが述べられている。最大静止摩擦トルクと軸荷重との関係は次のようにして測定する。カップリング状モデルの軸荷重は鋼球（1/2"）を介したてこにおもりをつるして加えた。この状態でカップリング状モデルにトルクを加え、すべりが発生する限界のところでの中空円筒部のひずみを測定して、これをトルクに換算し、最大静止摩擦トルクとした。図 5.13 は最大静止摩擦トルクと軸荷重との関係を示している。軸荷重が 8 kgf 以下と 40 kgf 以上では少し実験値がばらついてはいるが、この図の実線のような直線であると仮定して実験値を整理した。そして次のような実験式で表した。

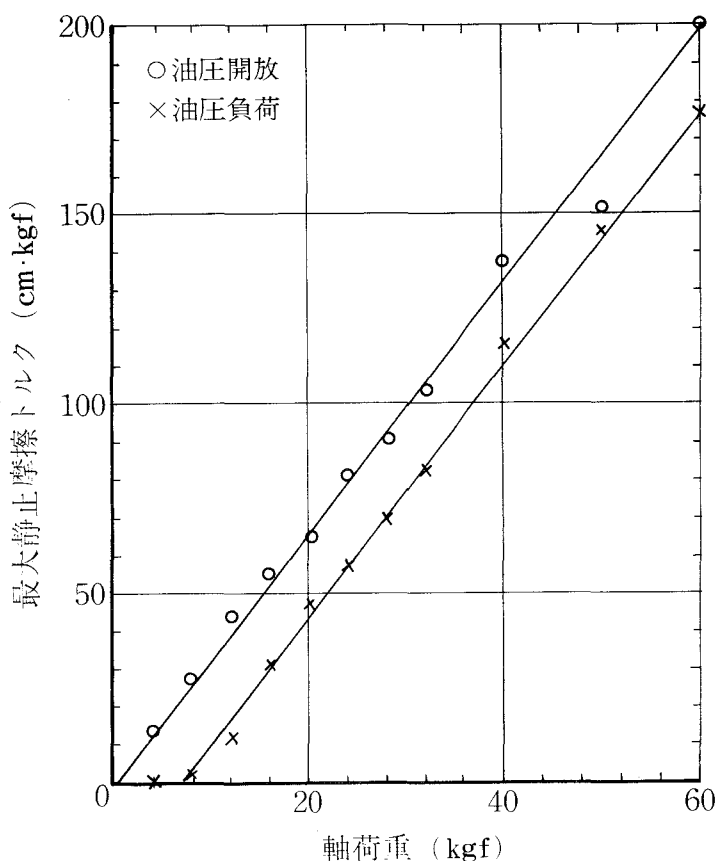


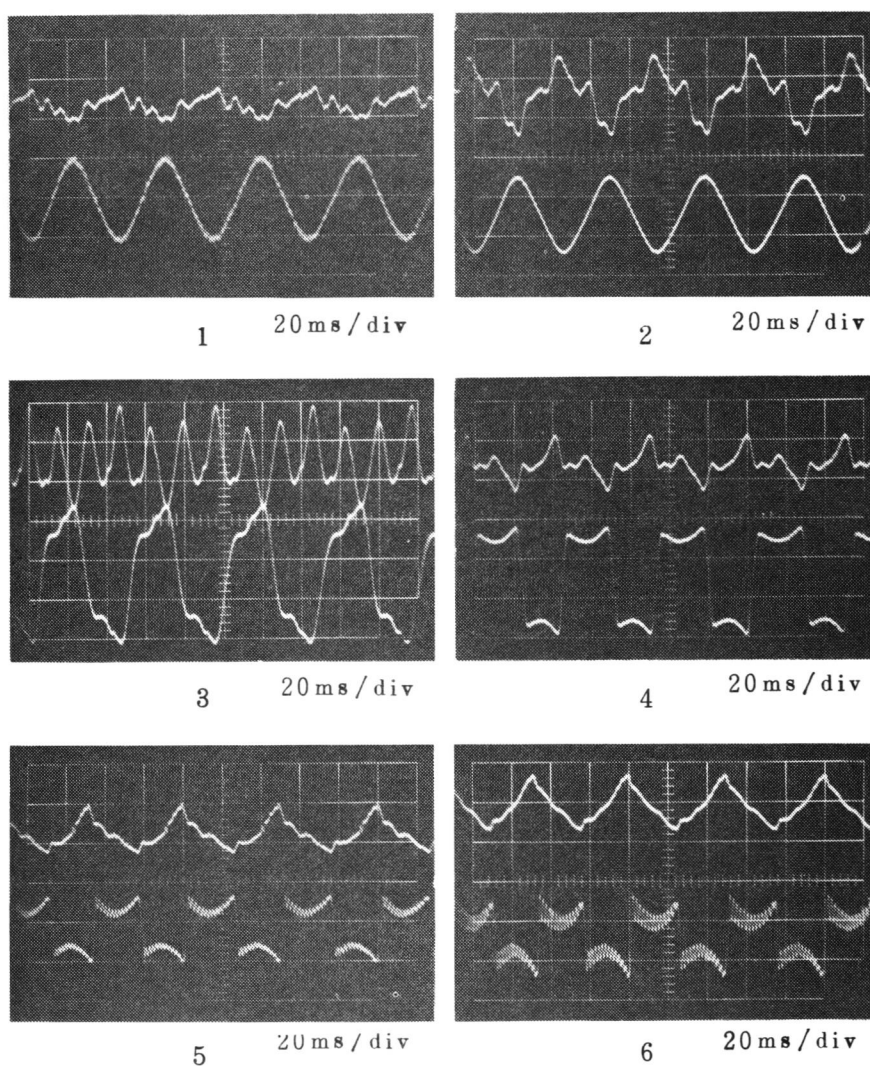
図 5.13 最大静止摩擦トルクと軸荷重との関係

$$T_{cr} = 3.376 P \quad (\text{○印の実験結果}) \quad (5.56)$$

$$T_{cr} = 3.376 - 23.56 \quad (\text{×印の実験結果})$$

ここで、 $T_{cr}$  は  $\text{cm} \cdot \text{kgf}$  で、 $P$  は  $\text{kgf}$  である。この図で○印は油圧を開放（一定圧力で流入して別の穴φ6から流出させる）した場合であるが、×印は油圧負荷（φ6の穴を閉じる）した場合である。このような静的な実験では油圧は摩擦トルクを小さくする働きをしていることがわかる。ある軸荷重に注目すると、油圧負荷の場合は最大静止摩擦トルクが減少している。この原因は接合面の摩擦係数の減少と油圧による摩擦抵抗トルクの減少とが考えられる。もしも接合面の摩擦係数が減少しているとする、この直線の勾配が減少するはずである。しかし2本の直線の勾配は

等しい。したがって、油圧負荷は摩擦トルクを小さくする働きをしていると考えられる。また式(5.56)と(5.55)から最大静止摩擦係数を求めることができる。次に減衰能を評価するとき必要な励振振幅を以下のような方法で測定した。励振振動数を一定にして励振振幅を増加させ、オシロスコープで観察すると、図5.14のようになる。この図で写真の上側は上部カップリングに取付けた加速度計の信号で、下側は下部カップリングの薄肉円筒部にはられたひずみゲージの信号である。1は



励振振動数：20 Hz，軸荷重：4 kgf

図 5.14 カップリング状モデルの振動波形

励振振幅が小さいときで、3は矩形波状応答波形になる限界である。4では矩形波状応答波形になり、さらに励振振幅を大きくすると、5、6のようになり、矩形波状応答波形上の自由振動波形の振幅が大きくなる。この図の3の状態が正弦波状領域から矩形波状領域へ移る限界であり、このときの励振振幅を測定した。軸荷重は4～32 kgf を4 kgfおきに変化させて実験を行った。励振装置は動電型励振器（励振力10 kgf）を使用した。

#### 5.3.4 減衰能の評価と考察

前節で述べた実験方法では面圧の分布状態を測定していないので、直接、消散エネルギーを測定することができない。そこで、ここでは減衰能を次式を用いて、等価粘性減衰定数  $C_{eff}$  として表した。

$$C_{eff} = \frac{T_0}{\theta_{s0} \omega_{res}} \quad (5.57)$$

ここで、 $T_0$ は励振トルク振幅で、限界の正弦波状領域では $T_{cr}$ に等しくなる。また $T_{cr}$ は図5.13から軸荷重 $P$ によって決まる。また $\omega_{res}$ は共振角振動数であり、 $\theta_{s0}$ は共振角振動数でのねじれ角振幅である。このようにして求めた等価ねじり減衰定数 $C_{eff}$ と質量慣性モーメント $J_s = 14.57 \text{ (mm} \cdot \text{kgf} \cdot \text{s}^2 / \text{rad)}$ とねじりばね定数 $k_t = 4.89 \times 10^6 \text{ (mm} \cdot \text{kgf} / \text{rad)}$ から、減衰比 $\zeta$ は次のようになる。

$$\zeta = \frac{C_{eff}}{2\sqrt{J_s k_t}} \quad (5.58)$$

以上のことから減衰比と軸荷重の関係が明らかになる。図5.15はこれを示している。軸荷重8 kgf 付近では矩形波状応答発生限界の実験値を得ることが非常に困難であった。12 kgf 以上では軸荷重とともに単調に減少するという傾向を示した。これは軸荷重の増加とともに相対すべりの領域を減少させるものと思われる。実験で減衰能を求める場合は矩形波状応答発生限界のねじれ角振幅から求めている。したがって、消散エネルギーは円すい接合面での局部すべりによって消散されるエネルギー

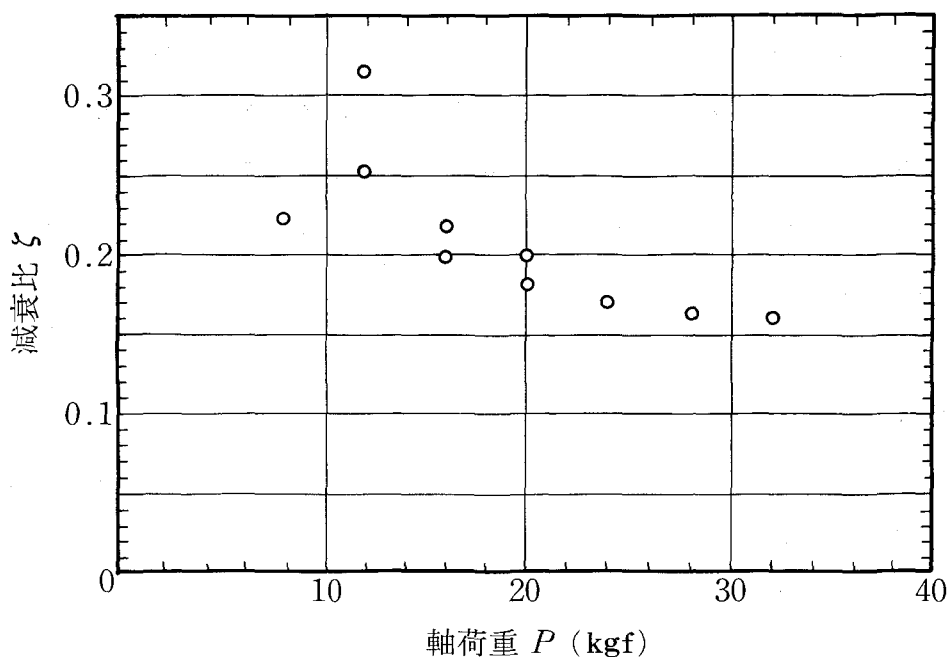


図 5.15 カップリング状モデルの減衰能

とねじり角の検出器となっている中空円筒部での材料減衰能による消散エネルギーが含まれている。また、この場合は接合面でのすべり領域が大きく全体すべりに近い状態である。次に図 5.16 のようなカップリング状モデルの減衰能を評価するために、軸に直角な接合面をもつ一端固定の中空丸棒のねじり振動の場合の減衰能の式 (5.49) を、極断面係数  $Z_p = I_p / r_2$  を用いて次のように変形した。

$$\phi = 8\pi \frac{r_2^3}{Z_p \tau_2^2} \left\{ \frac{1}{3} \frac{\mu^4 \sigma_{nr}^4}{\tau_2^2} - \mu^2 \sigma_{nr}^2 + \frac{2}{3} \tau_2 \mu \sigma_{nr} \right\} \quad (5.59)$$

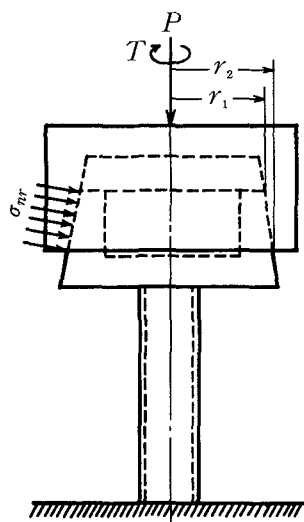


図 5.16 等価モデル

ここで、 $Z_p = 108.5 \text{ cm}^3$ 、 $r_2 = 5.3815 \text{ cm}$ 、 $\mu = 0.1$ 、 $\sigma_{nr}$  と  $\tau_2$  は

$$\sigma_{nr} = \frac{P}{A_a (\sin\alpha + \mu \cos\alpha)}, \quad \tau_2 = \frac{T_{cr}}{Z_p} \quad (5.60)$$

で求めた。 $T_{cr}$  は式 (5.56) を用い、また  $A_a = 136 \text{ cm}^2$ ,  $\alpha = 10^\circ$  とすると図 5.11 の  $\phi$  と  $B_0$  の関係は式 (5.59) から  $\phi$  と  $P$  の関係に変換できる。そして  $0 \leq B_0 \leq 1.0$  は  $P \leq 0$ ,  $P \geq 7.635$  となり、この結果が図 5.17 の実線である。また減衰

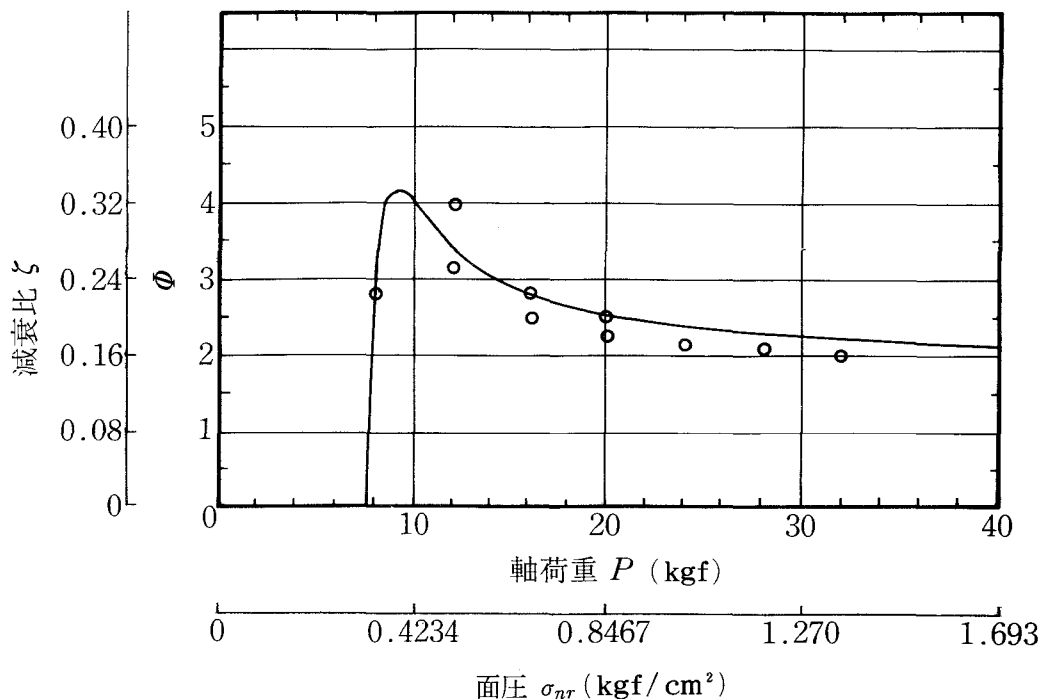


図 5.17 カップリング状モデルの減衰能の理論値と  
実験値との比較

比  $\zeta$  と  $\phi$  との関係は  $\zeta = \phi/4\pi$  となり、面圧と減衰能の関係には減衰能を最大にする最適面圧が存在することが明らかになった。

#### 5.4 接合面が固着の状態に近い場合のカップリング状モデルの減衰能

5.2 では接合面が固着した場合について、また 5.3 では、接合面のすべり領域が大きく、全体すべりに近い状態での局部すべりについての減衰能を検討してきた。

ここでは、実機の機械構造中の結合部によく見られる接合面が固着の状態に近い場合のカップリング状モデルの減衰能について考察してみた。

#### 5.4.1 接合面が固着の状態に近い場合の減衰能の評価

図 5.18 に示されるようにカップリング状モデルの励振レバーと励振器との間にジョイントを挿入して励振レバーの中心（カップリングの中心軸）から 250mm 離れた点を励振し、励振レバー、上部カップリングが一体となる回転運動をさせ、軸

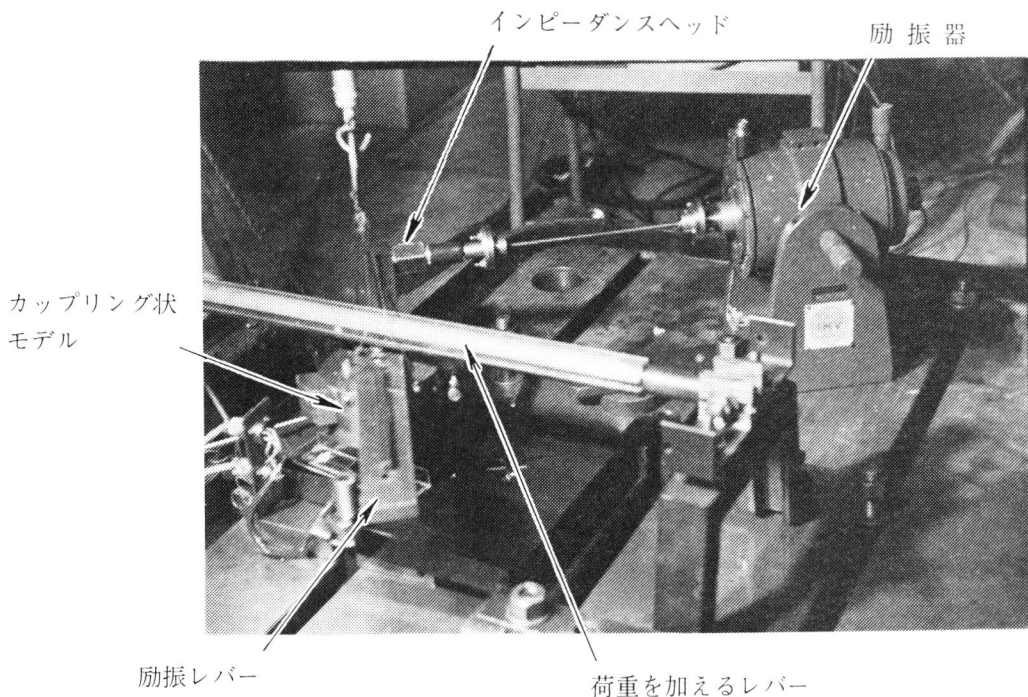


図 5.18 カップリング状モデルの励振方法

荷重を増加させて接合面を固着の状態に近づける。上部カップリングに導入された回転振動は接合面を介して下部カップリングに伝達され、中空丸棒を含む下部カップリングがねじり振動をするという系を考察する。この場合の減衰能をあげてみるとつぎのようになる。

1. カップリング状モデルの接合面でのすべりによる減衰能
2. 軸荷重を負荷するための球の接触による減衰能
3. 中空円筒部の材料減衰能
4. カップリング状モデルの固定端部での減衰能
5. 空気をかき回すために起るふん囲気減衰能
6. インピーダンスヘッドと励振レバーとの結合部の減衰能

これらの減衰能のうち、軸荷重を増加しても変化しないと思われる減衰能は中空円筒部の材料減衰能、固定端部の減衰能、ふん囲気減衰能、インピーダンスヘッドと励振レバーとの結合部の減衰能であるといえる。軸荷重が増加すると、接合面での減衰能とモデルと球の接触による減衰能とが変化する。そこで、カップリング状モデルの接合面でのすべりによる減衰、軸荷重を負荷するための球の接触による減衰、カップリング状モデルの中空円筒部の材料減衰、カップリング状モデルの固定端部での減衰<sup>113)</sup>、空気をかき回すために起るふん囲気減衰、インピーダンスヘッドと励振レバーとの結合部の減衰の1サイクル中に消散されるエネルギーをそれぞれ $W_s, W_b, W_p, W_e, W_a, W_c$ とすると、

$$\eta_t = \frac{D}{2\pi U} = \frac{W_s + W_p + W_b + W_e + W_a + W_c}{2\pi U_p} \quad (5.61)$$

となり、式(5.24)を考慮するとつぎのように変形できる。

$$\eta_t = \frac{G}{\pi} \frac{\int_0^{\tau_m} dU(\tau) f\left(\frac{\tau}{\tau_m}\right) d\tau + \frac{\tau_m}{V_t} (W_s + W_b + W_e + W_a + W_c)}{\int_0^{\tau_m} \tau^2 f\left(\frac{\tau}{\tau_m}\right) d\tau} \quad (5.62)$$

また、いま  $\eta_s = W_s / (2\pi U_p)$ ,  $\eta_p = W_p / (2\pi U_p)$ ,  $\eta_b = W_b / (2\pi U_p)$ ,  $\eta_e = W_e / (2\pi U_p)$ ,  $\eta_a = W_a / (2\pi U_p)$ ,  $\eta_c = W_c / (2\pi U_p)$  とすると、式(5.61)は

$$\eta_t = \eta_s + \eta_p + \eta_b + \eta_e + \eta_a + \eta_c \quad (5.63)$$

となる。



#### 5.4.2 実験方法と実験結果

図 5.18 のような励振方法でカップリング状モデルを励振し，軸荷重を増加して接合面を固着の状態に近づけた。ジョイントと励振レバーとの間に取り付けられているインピーダンスヘッドによって，力と加速度を検出し，図 5.19 のような Bode

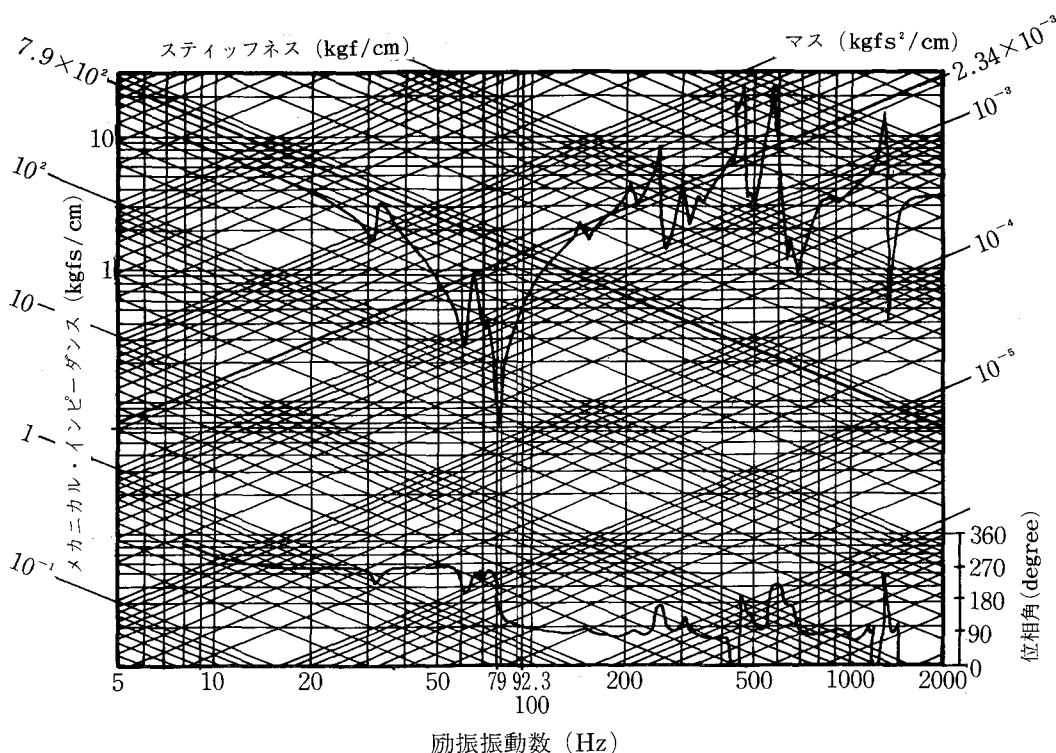


図 5.19 カップリング状モデルの周波数特性（軸荷重 24 kgf）

線図を描かせる。この図からつぎのようにして減衰能を損失係数で評価する。損失係数  $\eta$  は次式のように表すことができる。

$$\eta = \frac{\Delta W}{2\pi W} \quad (5.64)$$

ここで， $W$  は 1 サイクル中に振動系に蓄えられる最大のエネルギーであり， $\Delta W$  は 1 サイクル中に消散されるエネルギーである。共振振動数において，力と速度を測定することによって入力エネルギーを求めることができる。定常振動では入力エネルギーと

消散エネルギーとが等しくなるので

$$\Delta W = \frac{\pi F_a v_0}{\omega_{res}} \quad (5.65)$$

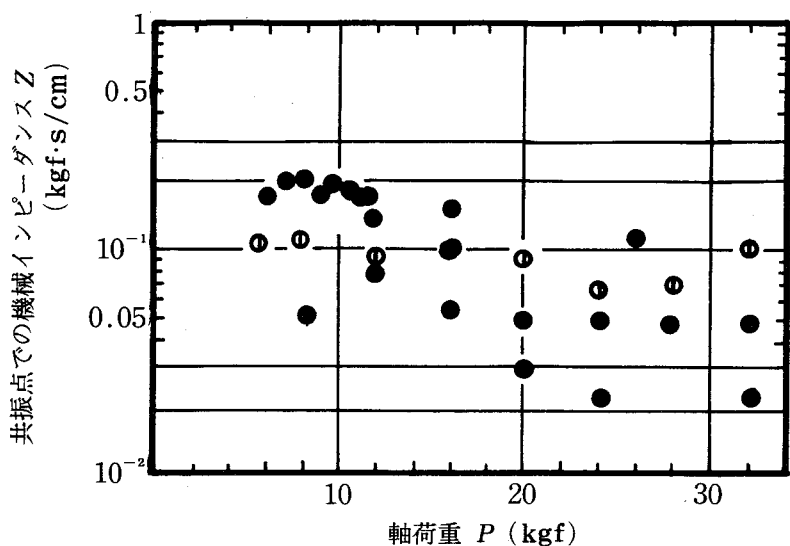
となる。ここで  $F_a$  は励振力の振幅、 $v_0$  は速度振幅、 $\omega_{res}$  は共振角振動数である。蓄えられるエネルギーは運動のエネルギーとポテンシャルエネルギーの和であり、これはほとんど一定であるので、蓄えられる最大エネルギーはいずれか一方の最大値を測定すればよい。したがって、蓄えられる最大エネルギーは次式によって求めることができる。

$$W = \frac{1}{2} k_{eff} X^2 = \frac{1}{2} k_{eff} \left( \frac{v_0}{\omega_{res}} \right)^2 = \frac{1}{2} m_{eff} v_0^2 \quad (5.66)$$

ここで、 $X$  は変位振幅であり、 $k_{eff}$  は等価スティッフネス、 $m_{eff}$  は等価マスである。式 (5.65)、(5.66) と式 (5.64) から

$$\eta = \frac{F_a / v_0}{k_{eff} / \omega_{res}} = \frac{F_a / v_0}{m_{eff} \omega_{res}} = \frac{Z}{Z_0} \quad (5.67)$$

となる。ここで、 $Z$  は共振振動数での機械インピーダンスすなわち最小の機械インピーダンスであり、 $Z_0$  は比インピーダンスである。図 5.19 の右上りの  $2.34 \times 10^{-3} \text{ kgf s}^2/\text{cm}$  の等価マスの線はカップリング状モデルの質量慣性モーメントから計算した等価マスであり、右下りの太線はカップリング状モデルのねじりばね定数から計算したスティッフネスである。図 5.19 から  $m_{eff}$  を  $2.34 \times 10^{-3} \text{ kgf s}^2/\text{cm}$  として  $Z_0$  を計算した。次に軸荷重を増加させ、接合面が固着する状態を知るために多くの実験を行った。この実験によって得られた共振振動数での機械インピーダンスを求めて軸荷重との関係をまとめると図 5.20 のようになる。この実験値のうち①印は機械インピーダンスを求めるときに回転角も測定した値である。機械インピーダンスを観察すると、軸荷重が 24 kgf 以上になると、軸荷重を増加させても機械インピーダンスは減少しなくなる。図 5.20 の①印の値と等価スティッフネスならびに等価マスとを用いて、式 (5.67) によって損失係数の値を計算すると、それぞれ  $\eta_k$ ,



●回転角を測定していない値    ○回転角を測定している値

図 5.20 共振点での機械インピーダンスと軸荷重

表 5.2 軸荷重を変化させた場合のカップリング状モデルの減衰能（実験値）

| 軸 荷 重<br>kgf | 励振レバーの駆動点インピーダンスから求めた損失係数 |          | 励振レバーの<br>回転角変位<br>$\times 10^{-4}$<br>rad |
|--------------|---------------------------|----------|--------------------------------------------|
|              | $\eta_k$                  | $\eta_m$ |                                            |
| 6            | 0.066                     | 0.099    | 7.6                                        |
| 8            | 0.072                     | 0.109    | 7.1                                        |
| 16           | 0.062                     | 0.091    | 8.5                                        |
| 20           | 0.082                     | 0.077    | 6.1                                        |
| 24           | 0.040                     | 0.058    | 12.7                                       |
| 28           | 0.042                     | 0.063    | 12.0                                       |
| 32           | 0.060                     | 0.091    | 8.5                                        |

$\eta_k$ ：等価スティフネスを用いて計算した損失係数

$\eta_m$ ：等価マスをを用いて計算した損失係数

$\eta_m$  のようになる。そのときの回軸角とともに表 5.2 に示す。24 kgf では、接合面は固着の状態に近くなっている、接合面での減衰能は非常に小さくなっていると考えられる。28, 32 kgf になると、第 3 章で述べたように球のところでのすべりが非常に小さくなるので回転運動が拘束され、ねじり運動以外での減衰能が増加して、損失係数が増加するものと思われる。

#### 5.4.3 考 察

表 (5.2) の回軸角と式 (5.35) から最大せん断応力振幅を計算し、この最大応力振幅のときの一端固定、他端に慣性質量のついた中空円筒部の材料減衰能を 5.2 で述べた方法で計算した。また接合面での局部すべりによる減衰能は 5.3 の方法で計算し、軸荷重を加えるための球の接触による減衰能は第 3 章の方法で求めた。空気をかき回すためのふん囲気減衰とインピーダンスヘッドと励振レバーとの結合部の減衰は他の減衰と比べて減衰能は小さいものとして無視した。式 (5.62) によって計算した結果と実験値とを比較したものが表 5.3 である。球のところでの減衰能

表 5.3 接合面が固着に近い状態でのカップリング状モデルの損失係数

| 軸荷重<br>kgf | 接合面が固着に近い状態<br>でのカップリング状モデル<br>の損失係数 |              | 中空円筒部の<br>材料減衰能に<br>よる損失係数 | 接合面での局<br>部すべりによ<br>る損失係数 | 固定端部でのエ<br>ネルギー消散によ<br>る損失係数 |
|------------|--------------------------------------|--------------|----------------------------|---------------------------|------------------------------|
|            | 実験値 $\eta_k$                         | 理論値 $\eta_t$ | $\eta_p$                   | $\eta_s$                  | $\eta_e$                     |
| 6          | 0.066                                | 0.024        | 0.011                      | 0.011                     | 0.0017                       |
| 8          | 0.072                                | 0.029        | 0.011                      | 0.016                     | 0.0017                       |
| 16         | 0.060                                | 0.041        | 0.012                      | 0.027                     | 0.0017                       |
| 20         | 0.082                                | 0.060        | 0.011                      | 0.047                     | 0.0017                       |
| 24         | 0.040                                | 0.042        | 0.013                      | 0.027                     | 0.0017                       |
| 28         | 0.042                                | 0.048        | 0.013                      | 0.033                     | 0.0017                       |
| 32         | 0.060                                | 0.068        | 0.012                      | 0.054                     | 0.0017                       |

$$\eta_t = \eta_p + \eta_s + \eta_e$$

は他の減衰能に比べて小さいので省略した。実験値の  $\eta_k$  と理論値の  $\eta_t$  を比較してみると、軸荷重が小さいところでは差が大きいですが、軸荷重が大きいところではよく一致しているといえる。軸荷重が小さいところでは曲げ方向の変形による減衰能が加わって減衰能が大きくなっていると思われる。

## 5.5 ま と め

以上のような理論解析と実験の結果をつぎのようにまとめることができる。

1. カップリング状モデルのように一端固定，他端に慣性質量のついた中空丸棒のねじりの振動の場合も部材の各振動モードでの応力分布関数は振動モードを表す規準関数から計算することができ，その応力分布関数から材料減衰能を計算することができる。
2. 接合面が固着した場合のカップリング状モデルの減衰能は弾性支持部である中空円筒部の材料減衰能になる。
3. 接合面での局部すべりと接合面減衰能との関係を明らかにし，接合面減衰能が摩擦係数，接合面圧，せん断応力分布に依存することを示した。また接合面と弾性部をもつ振動系は減衰能を最大にする面圧が存在することを明らかにした。
4. 接合面が固着に近い状態でのカップリング状モデルの減衰能を接合面での局部すべりによる減衰，中空円筒部での材料減衰，固定端での減衰を考慮して求めることができた。

## 第 6 章 カップリング状モデルの矩形波状

### 応答領域での振動特性と減衰能

#### 6.1 ま え が き

第 1 章で解析したようにカップリング状モデルの矩形波状応答領域ではモデルの振動挙動が複雑になると考えられる。本章では弾性支持されたカップリング状モデルに正弦波状のトルクを加え、モデルの接合面で全体すべり運動が発生する場合のモデルの運動を理論的に解析し、この結果を実験によって確かめ、矩形波状応答波形上の減衰自由振動波形から減衰能を評価する方法を述べている。

カップリング状モデルのようにすべり方向で拘束のない結合体ではすべり領域が全接合面に広がると全体すべり運動を行う。この全体すべり運動によってカップリング状モデルの挙動が複雑になると思われる。そこで、まずカップリング状モデルが全体すべり運動をしているときの付着・すべり挙動を解析し、付着すべりに影響する要因と付着時間との関係を求めた。

またここに述べているカップリング状モデルでは、正弦波状の励振トルクによって励振された場合でも結合部接合面は固着運動をしたり、局部すべり運動したり、全体すべり運動をしたりする。また第 1 章の結果より、全体すべり運動を行っている場合は正弦波状の励振を行った場合でも被駆動系の運動は矩形波状になり、そして励振振動数に比べて接合面を介した被駆動系の固有振動数が高い場合には矩形波状の応答波形上に減衰自由振動波形が現われることがわかる。この現象は摩擦によって振動が発生し、その振動は摩擦の影響をうけることになる。したがって、接合面圧や励振振動数などの変化によって、応答波形がどのように変化するかを解析する場合に重要な要因は接合面の摩擦特性である。ここでは全体すべりが発生する場合、接合面の摩擦特性は第 1 次近似としてクーロンの摩擦の法則に従うとしている。

したがって運動方程式は非線形になるが、摩擦トルクの向きが一定である時間領域で解析すれば、線形微分方程式で解くことができるので、この方法で解析した。

## 6.2 矩形波状応答が発生する場合のカップリング状モデルの挙動<sup>111)</sup>

図6.1のようなカップリング状モデルに正弦波状のトルクが加わって全体すべりが発生すると、要素Aに正弦波状の励振トルク  $t_u$  を加えていても、要素Bのねじれ角  $\theta$  の波形は矩形波状になる。図6.2はこの状態を示している。上の波形は要素Aに取付られた加速度の信号で、高次の振動を拾っているが、積分して変位するとこの影響は小さくなるものとして解析ではこ

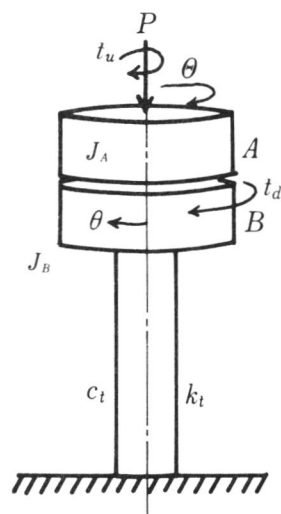
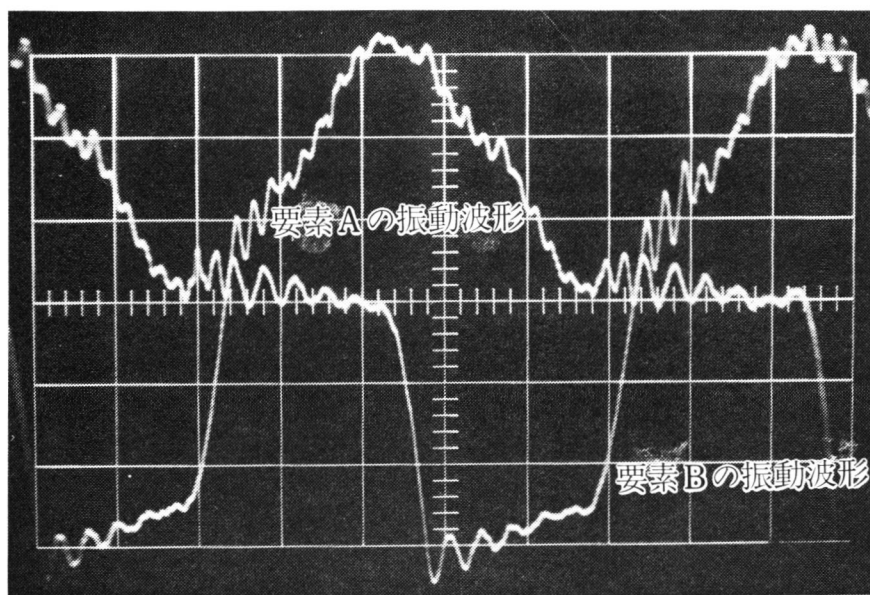


図 6.1 振動模型



横軸：5 ms / div.

図 6.2 全体すべり運動をしている場合のカップリング状モデルの振動波形

れを無視した。下の波形は要素  $B$  のねじり振動を検出しているひずみゲージの信号である。この矩形波状の波形がカップリング状モデルの矩形波状応答である。要素  $B$  は摩擦振動を行うと考えることができるので、1.3 と同じような仮定において運動方程式をたてる。要素  $A$  は角振動数  $\omega_c$  の励振トルク  $t_u$  で励振され、要素  $A$  の質量慣性モーメント  $J_A$  は要素  $B$  の質量慣性モーメント  $J_B$  に比べて無視できない大きさである。そして要素  $B$  は  $A$  と  $B$  の接合面での摩擦トルクによって励振され、 $J_B$  と  $k_t$  で決まる角振動数が  $\omega_c$  に比べて大きい場合を解く。要素  $B$  の運動方程式は式 (1.23) から

$$J_B \frac{d^2\theta}{dt^2} + c_t \frac{d\theta}{dt} + k_t \theta = t_d \quad (6.1)$$

となる。付着領域では  $\theta$  と  $t_d$  との位相差を  $\phi_{0c}$  とすると  $t_d$  は  $t_{ds} e^{j(\omega_c t + \phi_{0c})}$  と表すことができるので、式 (6.1) は

$$J_B \frac{d^2\theta}{dt^2} + c_t \frac{d\theta}{dt} + k_t \theta = t_{ds} e^{j(\omega_c t + \phi_{0c})} \quad (6.2)$$

となる。ここで、無次元量を式 (4.4) に加えて

$$\beta_t = \frac{k_t \theta_0}{t_{d0}}, \quad \eta_t = \frac{k_t \theta_0}{t_{ds}}, \quad S_c = \frac{k_t \theta}{t_{ds}}, \quad \sigma_t = \frac{t_{d0}}{t_{ds}} \quad (6.3)$$

とすると、式 (6.2) は次のようになる。

$$\ddot{S}_c + 2 h_c \dot{S}_c + S_c = e^{j(\mu_t \tau_c + \phi_{0c})} \quad (6.4)$$

ここで、ドットは  $\tau_c$  についての導関数を表す。要素  $B$  の角変位  $\theta$  を

$$\theta = \theta_0 e^{j\omega_c t} \quad (6.5)$$

とし、式 (6.3) を用いて変形すると

$$S_c = \eta_t \cdot e^{j\mu_t \tau_c} \quad (6.6)$$

となる。式 (6.6) を式 (6.4) に代入して整理すると

$$\eta_t = \frac{1}{\sqrt{(1 - \mu_t^2)^2 + (2 h_c \mu_t)^2}} \quad (6.7)$$



$$\phi_{0c} = \tan^{-1} \frac{2 h_c \mu_t}{1 - \mu_t^2} \quad (6.8)$$

となる。次に要素  $A$  の角変位  $\theta$  と振幅  $\theta_0$ ，励振角振動数を  $\omega_c$  とし， $\theta$  との位相角を  $\phi_c$  とすると

$$\theta = \theta_0 e^{j(\omega_c t + \phi_c)} \quad (6.9)$$

となる。すべり領域では固体摩擦トルク  $t_d$  が作用しているので，全体すべりが発生している場合は固体摩擦トルクの絶対値を  $t_{d0}$  とする。 $t_{d0}$  は両物体の相対速度に関係なく一定で，その向きは相対速度と反対になるので， $t_d$  をつぎのように表すことができる。

$$t_d = -t_{d0} S \left[ \frac{d\theta}{dt} - \frac{d\theta}{dt} \right] \quad (6.10)$$

ただし， $S$  は符号関数であって， $[\ ]$  内の正または負によって，それぞれ  $+1$ ， $-1$  となる。 $t_2 - \phi_{0c}/\omega_c$  と  $t_3 - \phi_{0c}/\omega_c$  との間の時間では  $t_d$  は  $-t_{d0}$  となるので運動方程式は

$$J_B \frac{d^2\theta}{dt^2} + c_t \frac{d\theta}{dt} + k_t \theta = -t_{d0} \quad (6.11)$$

となる。ただし，すべり領域でのねじり減衰定数  $c_t$  は接合面の特性によって決まる減衰能も含めたものを考える。式 (6.3) を式 (6.11) に代入すると

$$\ddot{x}_t + 2h\dot{x}_t + x_t = -1 \quad (6.12)$$

のように変形することができる。式 (6.12) を解くと  $x_t$  は

$$x_t = A_1 e^{(-h_c + j\sqrt{1-h_c^2})\tau_c} + A_2 e^{(-h_c - j\sqrt{1-h_c^2})\tau_c} - 1 \quad (6.13)$$

となる。ここで， $A_1$ ， $A_2$  は初期条件によって決まる積分定数である。初期条件は

$$x_t = \frac{S_c}{\sigma_t} (\tau_c = \tau_2) \quad (6.14)$$

$$\dot{x}_t = \frac{\dot{S}_c}{\sigma_t} (\tau_c = \tau_2) \quad (6.15)$$

となる。式 (6.13), (6.6) と式 (6.14) から

$$\frac{1}{\sigma_t} \eta_t e^{j\mu_t \tau_2} + 1 = A_1 e^{(-h_c + j\sqrt{1-h_c^2})\tau_2} + A_2 e^{(-h_c - j\sqrt{1-h_c^2})\tau_2} \quad (6.16)$$

となり、式 (6.13), (6.6) と式 (6.15) から

$$\begin{aligned} A_1 (-h_c + j\sqrt{1-h_c^2}) e^{(-h_c + j\sqrt{1-h_c^2})\tau_2} \\ + A_2 (-h_c - j\sqrt{1-h_c^2}) e^{(-h_c - j\sqrt{1-h_c^2})\tau_2} = j\mu_t \frac{\eta_t}{\sigma_t} e^{j\mu_t \tau_2} \end{aligned} \quad (6.17)$$

となる。したがって  $x_t$  は

$$\begin{aligned} x_t = \frac{e^{h_c(\tau_2 - \tau_c)}}{\sqrt{1-h_c^2}} & \left\{ \left( \frac{\eta_t}{\sigma_t} \cos \mu_t \tau_2 + 1 \right) \left( \sin \tan^{-1} H_c \cos T_c - \cos \tan^{-1} H_c \sin T_c \right) \right. \\ & + \mu_t \frac{\eta_t}{\sigma_t} \sin \mu_t \tau_2 \sin H_c \left. \right\} + j \frac{e^{h_c(\tau_2 - \tau_c)}}{\sqrt{1-h_c^2}} \left\{ \frac{\eta_t}{\sigma_t} \sin \mu_t \tau_2 \left( \sin \tan^{-1} H_c \cos T_c \right. \right. \\ & \left. \left. - \cos \tan^{-1} H_c \sin T_c \right) - \mu_t \frac{\eta_t}{\sigma_t} \cos \mu_t \tau_2 \sin T_c \right\} - 1 \end{aligned} \quad (6.18)$$

となる。ここで

$$H_c = \sqrt{1-h_c^2}/h_c, \quad T_c = \sqrt{1-h_c^2} (\tau_2 - \tau_c) \quad (6.19)$$

である。したがって、 $x_t$  は複素数であるが、これ以後、カップリング状モデルの挙動を明らかにするために  $x_t$  の実部について検討する。 $x_t$  の実部を  $R[x_t]$  とすると、式 (6.18) から

$$R[x_t] = x_{sa} \sin \{ \sqrt{1-h_c^2} (\tau_2 - \tau_c) + \phi_t \} - 1 \quad (6.20)$$

となる。ここで

$$\begin{aligned} x_{sa} = \frac{e^{h_c(\tau_2 - \tau_c)}}{\sqrt{1-h_c^2}} & \left[ \left\{ \mu_t \frac{\eta_t}{\sigma_t} \sin \mu_t \tau_2 - h_c \left( \frac{\eta_t}{\sigma_t} \cos \mu_t \tau_2 + 1 \right) \right\}^2 \right. \\ & \left. + \left\{ \left( \frac{\eta_t}{\sigma_t} \cos \mu_t \tau_2 + 1 \right) \sqrt{1-h_c^2} \right\}^2 \right]^{1/2} \end{aligned} \quad (6.21)$$

$$\phi_t = \tan^{-1} \left\{ \frac{\left( \frac{\eta_t}{\sigma_t} \cos \mu_t \tau_2 + 1 \right) \sqrt{1 - h_c^2}}{\mu_t \frac{\eta_t}{\sigma_t} \sin \mu_t \tau_2 - h_c \left( \frac{\eta_t}{\sigma_t} \cos \mu_t \tau_2 + 1 \right)} \right\} \quad (6.22)$$

である。式(6.20)の  $x_{sa} \sin\{\sqrt{1 - h_c^2}(\tau_2 - \tau_c) + \phi_t\}$  を  $x_s$  とすると、 $x_s$  が最大になるのは  $x_s = x_{sa}$  が成立するときで、

$$\begin{aligned} \tau_c = \tau_2 - \frac{\pi}{2\sqrt{1 - h_c^2}} + \frac{1}{\sqrt{1 - h_c^2}} \\ \times \tan^{-1} \left[ \frac{\left( \frac{\eta_t}{\sigma_t} \cos \mu_t \tau_2 + 1 \right) \sqrt{1 - h_c^2}}{\mu_t \frac{\eta_t}{\sigma_t} \sin \mu_t \tau_2 - h_c \left( \frac{\eta_t}{\sigma_t} \cos \mu_t \tau_2 + 1 \right)} \right] \end{aligned} \quad (6.23)$$

となる。次に付着時間を解析する。カップリング状モデルの応答が矩形波状になるとときには接合面での運動が付着運動から付着すべり運動に変化する。この運動の限界を決める要因は伝達摩擦トルク  $t_d$  である。付着運動の場合は  $t_d$  は  $t_{ds} e^{j(\mu_t \tau_c + \phi_{0c})}$  になる。ただし  $t_{ds} \leq t_{d0}$  である。しかし  $t_{ds}$  が大きくなって、 $t_{ds} > t_{d0}$  になったならば、 $R\{t_{ds} e^{j(\mu_t \tau_c + \phi_{0c})}\} \leq \pm t_{d0}$  のときは付着運動であり、 $R\{t_{ds} e^{j(\mu_t \tau_c + \phi_{0c})}\} > \pm t_{d0}$  のときはすべり運動である。したがって、 $R\{t_{ds} e^{j(\mu_t \tau_c + \phi_{0c})}\} = \pm t_{d0}$  になる  $\tau_c$  で接合面ではすべり運動から付着運動あるいは付着運動からすべり運動になる。 $t = t_2$  すなわち  $\tau_c = \tau_2$  では次式が成立する。

$$-t_{d0} = R\{t_{ds} e^{j(\mu_t \tau_2 + \phi_{0c})}\} \quad (6.24)$$

さらに式(6.3)の無次元量を用いて変形して  $\tau_{sc}$  を求めると、図1.4から  $\tau_{sc}$  は  $\tau_2 - \tau_1$  なので

$$\tau_{sc} = \frac{1}{\mu_t} \{ \cos^{-1}(-\sigma_t) - \cos^{-1}(\sigma_t) \} \quad (6.25)$$

となる。 $\sigma_t$  が0に近いとき、すなわち  $t_{d0}$  が  $t_{ds}$  に比べて非常に小さいときは  $\tau_{sc}$  は0に近くなり、付着時間  $t_s$  はほとんど0に近くなることがわかる。また  $\sigma_t = 1$  すな

わち  $t_{d0}$  が  $t_{ds}$  に等しいときは  $t_s = 1/(2f_r)$  となり、カップリング状モデルの接合面が常に付着していることを意味する。付着時間は最大静止摩擦トルクが大きくなり、励振トルクが小さくなればなるほど増加することがわかる。このことは励振トルクが一定の場合は軸荷重が増加すれば付着時間が増加することを意味している。また励振トルクと最大静止摩擦トルクが等しい場合はカップリング状モデルの接合面は常に付着している。付着時間は要素  $B$  の減衰比  $h_c$  とは無関係であるが、最大静止摩擦トルクと励振トルクに依存する。また  $\mu_t$  の低いところすなわち要素  $B$  の固有振動数に比べて、励振振動数が低いときは付着時間が長くなる。

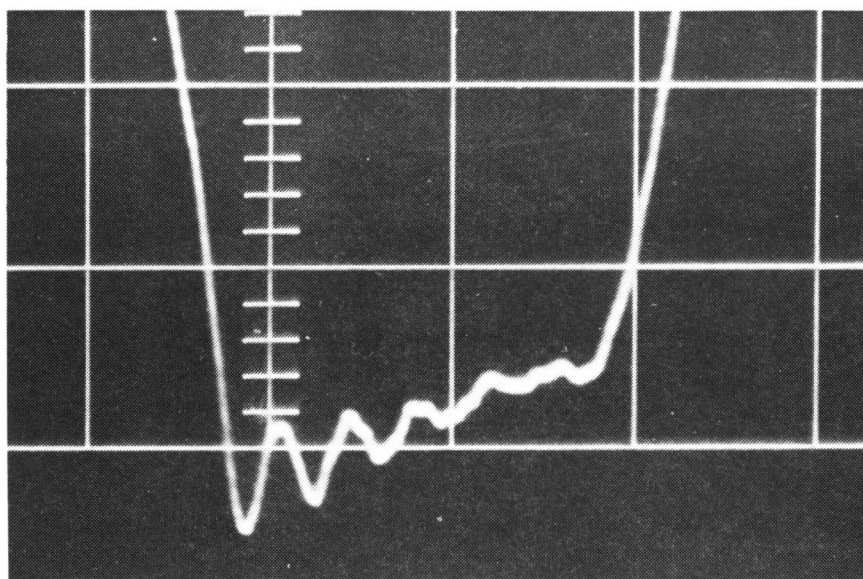
次に矩形波状応答波形上に現われる減衰自由振動波形の最大振幅  $x_{smax}$  は励振振動数を表す変数  $\mu_t$  と締付力を表す変数  $\sigma_t$  と要素  $B$  の減衰能を表す変数  $h_c$  の関数である。減衰能  $h_c$  が 0.7 付近で最大振幅  $x_{smax}$  は最大となる。また  $\mu_t$  が一定の場合は  $\sigma_t$  が増加すれば、 $x_{smax}$  は減少する。

### 6.3 矩形波状応答領域での減衰能

前節では矩形波状応答が発生する場合のカップリング状モデルの挙動を明らかにしたが図 6.2 にも示したように、矩形波状応答波形上に減衰自由振動波形が現われる。このような挙動での減衰能を理論的に評価するためには、まず 1 サイクル中に消散されるエネルギーを理論的に評価しなければならないが、これは現段階では挙動が複雑であるので困難である。第 1 章、第 4 章、第 6 章で解析に用いた  $C_{eff}$  と  $C_c$  は接合面の特性、油を含めた減衰能を考えているので、全体すべりが発生したときの接合面での減衰能が評価されていると思われる。したがって、ここでは矩形波状応答波形上に現われる減衰自由振動波形から対数減衰率をもとめ、これを減衰比に換算して、矩形波状応答領域での減衰能を減衰比と最大振幅との関係として実験的に求めた。

### 6.4 実験と考察

理論解析で得られた結果を確かめるためにカップリング状モデルで強制ねじり振動の実験を行った。実験装置は前述したものをを用い、まず要素 *A* に加える励振トルクの振幅を徐々に増加し、それに対する要素 *B* の応答をみて、正弦波状応答から矩形波状応答への移り変わりの様子をオシロスコープで観察した。その結果の一例として、いま励振振動数 40 Hz，軸荷重 4 kgf の要素 *B* の減衰自由振動波形を示すと図 6.3 のようになる。この矩形波状の応答波形を観察し、縦軸に付着時間，横軸に



横軸：5 ms / div.

図 6.3 要素 *B* の矩形波上の減衰自由振動波形

軸荷重をとり、励振振動数をパラメータとして整理した。図 6.4 にはこの関係を示している。付着時間は軸荷重の増加とともに増加し、励振振動数の増加とともに減少する傾向がある。次に減衰自由振動波形の最大振幅と軸荷重との関係を図 6.5 に示す。縦軸はオシロスコープ上に現われた波形の最大振幅を電圧で読み、ねじり角変位に換算したもので、横軸は軸荷重である。軸荷重の増加とともにねじり角変位が増大する傾向がある。図 6.4 の値を無次元化して理論値と比較したものが図 6.6

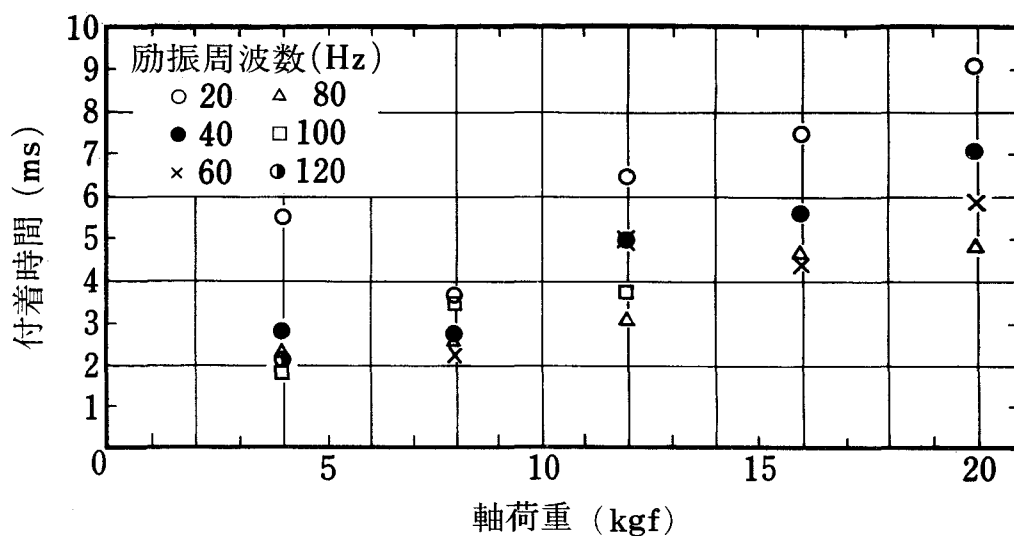


図 6.4 付着時間と軸荷重との関係

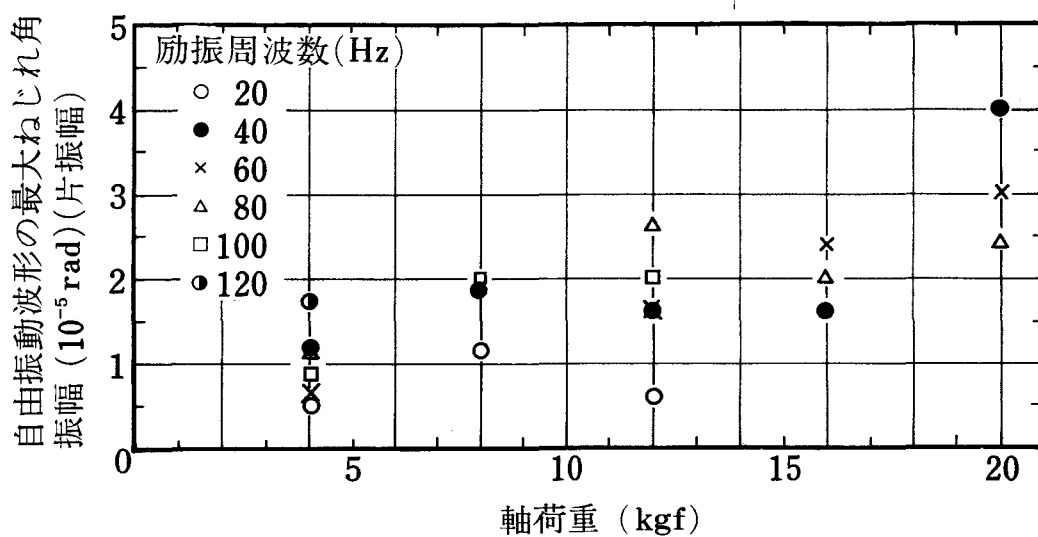


図 6.5 自由振動波形の最大振動振幅と  
軸荷重との関係

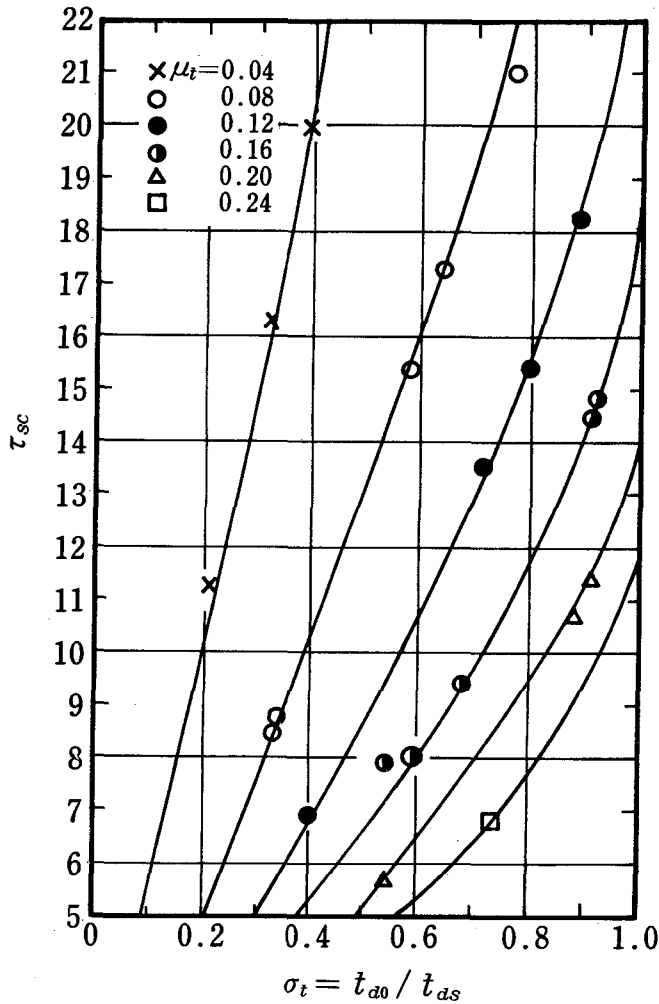


図 6.6 付着時間の理論値と実験値との比較

である。少しばらついているが定性的には一致している。また図 6.5 の値を無次元化して理論値と比較すると図 6.7 のようになる。実験が不安定であるので実験値はばらついているが、 $x_{smax}$  が  $\sigma_t$  の増加とともに減少し、 $\mu_t$  の増加とともに増加する傾向は出ているように思われる。したがって、矩形波状応答波形の最大振幅は振動数比  $\mu_t$  と要素  $B$  の等価粘性減衰比  $h_c$  と最大静止摩擦トルクと励振トルクとの比  $\sigma_t$  で表すことができる。

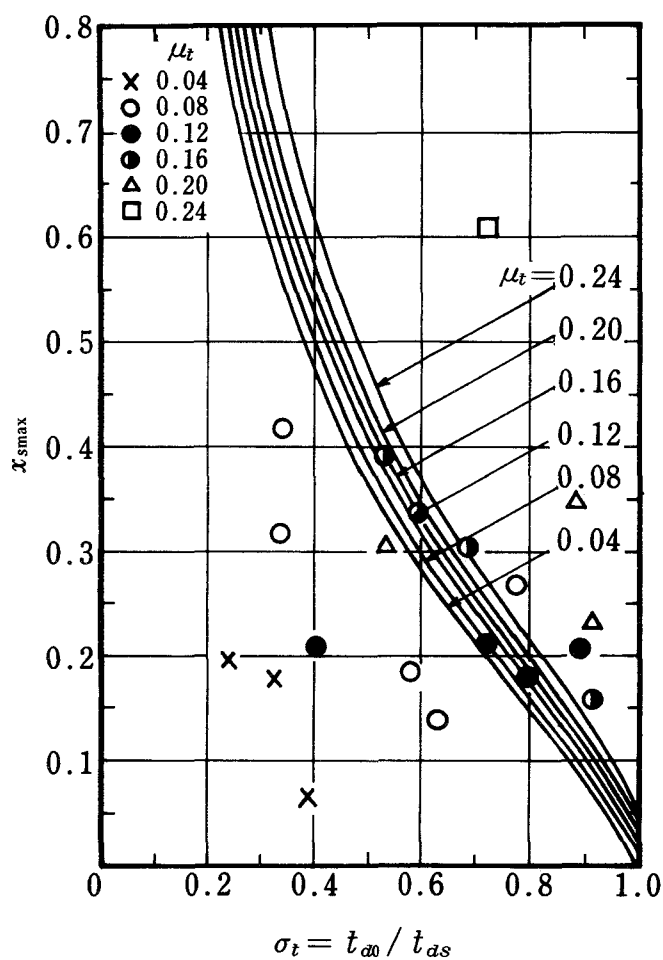


図 6.7 自由振動波形の最大振幅の理論値  
と実験値との比較

つぎに矩形波状応答領域での減衰能を評価するために、カップリング上部にとりつけた加速度計で測定した振幅を励振振幅とし、減衰自由振動波形から対数減衰率を求めて、減衰比に変換し、これらの関係を求めた。その結果を図 6.8 に示す。実験が十分でないが、軸荷重が大きくなるにつれて、減衰能が大きくなるという傾向がある。この実験から矩形波状応答領域でのカップリング状モデルの減衰能は損失係数で 0.02 ～ 0.05 になると言える。



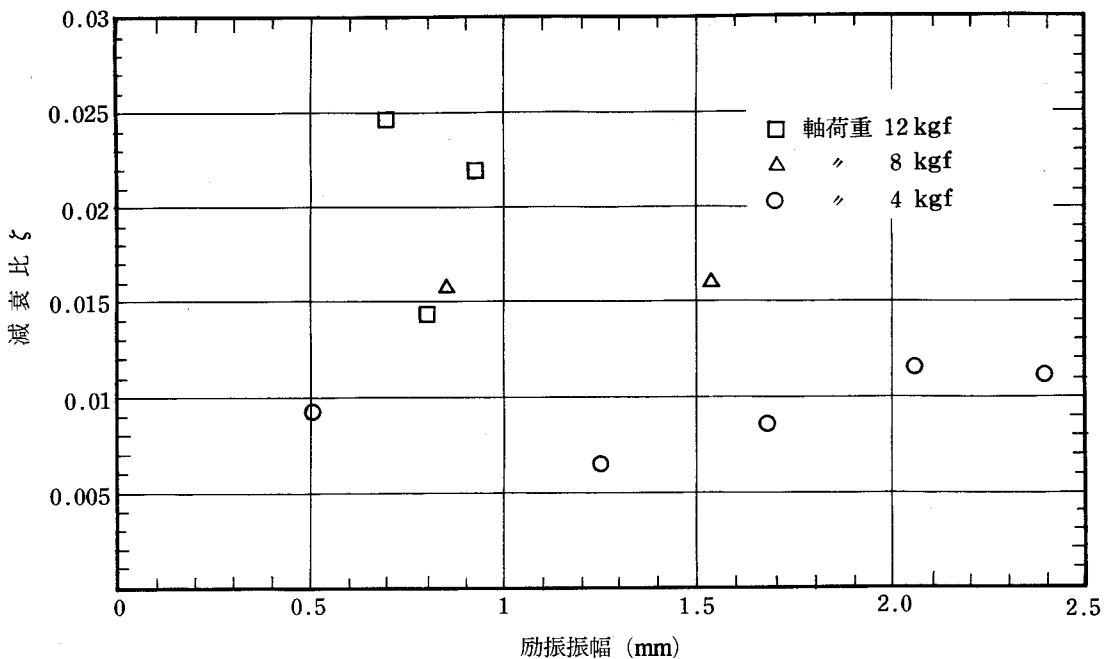


図 6.8 減衰比と励振振幅との関係

## 6.5 ま と め

カップリング状モデルすなわち一要素に正弦波状のトルクが加わり，そのトルクが接合面を介して他の要素に伝達されるようなモデルにおいて，接合面を介しての他の要素の応答が矩形波状になる場合の運動を解析し，そして接合面での減衰能についても検討した。その結果次のような結論を得た。

1. カップリング状モデルを励振する励振振動数が高くなればなるほど，接合面の付着時間は短くなる。
2. カップリング状モデルの接合面の付着時間は最大静止摩擦トルクが大きくなり，励振トルクが小さくなればなるほど増加する。このことは励振トルクが一定の場合は軸荷重が増加すれば付着時間が増加する。
3. 最大静止摩擦トルクと励振トルクとの比が 0 に近い場合は付着時間は 0 に近くなる。
4. 最大静止摩擦トルクと伝達摩擦トルクの振幅が等しいときは付着時間は周期の

半分となり，カップリング状モデルの接合面は常に付着する。

5. 矩形波状応答波形の最大振幅は振動数比，等価粘性減衰比，最大静止摩擦トルクと励振トルクの振幅との比で表すことができる。
6. 矩形波状応答領域での減衰能は損失係数で  $0.02 \sim 0.05$  になる。

## 結 論

本研究は機械構造における減衰機構を研究したものであり，機械構造の減衰能のなかでとくに機械構造を構成する各要素がもつ材料減衰能と結合部接合面での減衰能の減衰機構について検討したものである。

まず，二要素が結合されすべり方向で拘束がなく，弾性支持された系の振動特性から結合部の接合面が固着運動，局部すべり運動，全体すべり運動をすることを明らかにした。

つぎにLazanの方法を拡張して結合部の接合面が固着している場合の減衰能に大きく影響すると思われる材料減衰能を高次の振動モードでも評価できる方法を提案した。また結合部の接合面が局部すべり運動をする場合の減衰能の評価方法も提案し，これらの評価法をカップリング状モデルに応用して理論解析し，これを実験で確かめた。

第1章では，二要素が結合され，すべり方向で拘束がなく，二要素の質量を考慮に入れ，しかも固有振動数が励振振動数に比べて高い場合の振動模型について，矩形波状応答発生限界とすべりの挙動を解析した。

第2章では，部材の応力の分布状態を表す応力分布関数を用いて減衰振動の解析を行って求め，高次の振動モードでの材料減衰能を損失係数で評価することができた。

第3章では，機械構造の結合部の接合面での減衰機構を明らかにするために，単純なモデルである球と平面の接触状態での局部すべりによる減衰能を理論解析で評価し，これを実験で確かめた。その結果，このモデルの接合面では局部すべりが発生し，すべりのある領域とすべりがなく固着している領域にわけられることを明らかにした。そして減衰能と回転角，減衰能と固着比との関係を求めた。

第4章においては機械構造における二平面接合部を単純化したカップリング状モ

デルについて述べ、そして第1章で明らかにした矩形波状応答発生限界の解析をねじり振動系に変換してカップリング状モデルの接合面を介しての応答が矩形波状になる限界を計算し、実験で確かめた。その結果、第1章の解析が妥当であることが確かめられ、カップリング状モデルの接合面を介しての系の応答が矩形波状になるか正弦波状になるかは、励振振動数、カップリング上部の振動振幅、最大静止摩擦トルク、カップリングの質量慣性モーメント、ねじりばね定数、ねじり減衰定数によることが明らかになった。

第5章では、カップリング状モデルの接合面を介しての系の応答が正弦波状になる場合の減衰能を求めた。まず第2章で述べた材料減衰能の評価方法をねじり振動系に応用して一端固定、他端に慣性質量のついた中空丸棒のねじり振動の場合を解析した。この場合も部材の各振動モードでの応力分布関数は振動モードを表す規準関数から計算することができ、この応力分布関数から材料減衰能を評価することができることを明らかにした。そしてこの結果とカップリング状モデルの実験結果と比較すると、カップリング状モデルの接合面が固着した場合の減衰能は中空円筒部の材料減衰能であることを予想することができた。つぎに第3章で述べた方法によってカップリング状モデルの接合面での局部すべりによる減衰能を評価した。これを実験で確かめた結果、局部すべりによる減衰能が存在することが明らかになり、カップリング状モデルの局部すべりによる減衰能は結合部の接合面での摩擦係数、締付圧力、せん断応力分布に依存し、減衰能が最大になる締付圧力が存在することが明らかになった。

第6章では、カップリング状モデルの接合面を介した系の応答が矩形波状になる場合の振動特性を解析し、接合面で全体すべり運動が発生する場合の挙動を明らかにした。

以上の研究の結果をまとめるとつぎのようになる。

1. すべり方向で拘束がなく、弾性支持された二要素結合体の振動解析をして振動特性と矩形波状応答発生限界を求め、実機の結合部の挙動を知るうえで必要な二

平面接合部における接合面の挙動すなわち固着運動，局部すべり運動，全体すべり運動を明らかにした。

2. 材料減衰能を求める場合にエネルギー吸収関数とともに重要な関数である応力分布関数を，Lazanの方法を拡張して高次の振動モードで求めることができるようにし，材料減衰能を損失係数で評価する方法を確立した。この方法によって両端単純支持はり，片持ちはり，両端自由はりの曲げ振動における減衰能を，損失係数と最大応力振幅との関係で示すと，最大応力振幅が等しい場合，損失係数は振動モードによる差がほとんどないことを指摘した。
3. 接合面の局部すべり運動での減衰能は接合面上の応力分布と摩擦特性に依存することが明らかになった。
4. カップリング状モデルについて減衰能を損失係数で評価してみると，接合面が完全に固着した場合の材料減衰能は  $0.005 \sim 0.01$ ，全体すべりに近い状態での局部すべりによる減衰能は  $0.40 \sim 0.60$ ，全体すべりによる減衰能は  $0.02 \sim 0.05$  となった。

以上のように本論文で述べた減衰能の評価方法がおおよそ妥当であることが確認されたが，十分な解析であるとはいえない。しかし機械構造の結合部の減衰能を評価する場合の問題点を明らかにすることができたと思われる。

## 参 考 文 献

- 1) T.H.H. Pian: Structural Damping of a Simple Built-up Beam with Riveted Joints in Bending, J. Appl., Trans. ASME, 25 (1957) 35.
- 2) J.E. Ruzicka: Damping Structural Resonances Using Viscoelastic Shear-Damping Mechanisms, Part 1 Design Configurations, J. Eng. Ind., Trans. ASME, 83 (1961) 403.
- 3) J.E. Ruzicka: Damping Structural Resonances Using Viscoelastic Shear-Damping Mechanisms Part 2 Experimental Results, J. Eng. Ind., Trans. ASME 83 (1961) 414.
- 4) H. Ziegler: Ein abstimmbares Dampfungselement für Werkzeugmaschinen, Maschinenmarkt, Nr. 72-6 (1963) 23.
- 5) R. Bell & M. Burdekin: Dynamic Behaviour of Plain Slideways, Proc. Instn. Mech. Engrs., 181, 8 (1966-67) 169.
- 6) T.J. Mentel: Joint Interface Layer Damping, J. Eng. Ind., Trans. ASME 89 (1967) 797.
- 7) S.W.E. Earles: Theoretical Estimation of the Frictional Energy Distribution in a Simple Lap Joint, J. Mech. Eng. Sci., 8, 2 (1966) 207.
- 8) S.W.E. Earles & M.G. Philpot: Energy Dissipation at Plane Surface in Contact, J. Mech. Eng. Sci., 9, 2 (1967) 86.
- 9) 伊東誼, 益子正己: ボルト結合部の減衰能に関する研究 (第1報, 締結条件の影響), 日本機械学会論文集, 37, 295 (1971) 622.
- 10) 伊東誼, 益子正己: ボルト結合部の減衰能に関する研究 (第2報, 接合面状態の影響), 日本機械学会論文集 (1973)

- 11) 吉村允孝：機械構造物の振動特性における減衰能のシミュレーション，日本機械学会講演会論文集，№ 750-14 (1975) 33.
- 12) 鈴木栄司：構造物における固体摩擦による構造減衰について（第1報，断片的接触による解と等価粘性減衰による近似解），日本機械学会論文集，43, 366 (1977) 504.
- 13) 鈴木栄司：構造物における固体摩擦による構造減衰について（第2報，摩擦力をフーリエ級数に展開した近似解），日本機械学会論文集，43, 368 (1977) 1290.
- 14) 鈴木栄司：構造物における固体摩擦による構造減衰について（第3報，高次の強制振動及び自由振動），日本機械学会論文集，43, 368 (1977) 1300.
- 15) 塩崎進，古川勇二，水兼正博：工作機械の送り駆動系の動剛性（第1報，すべり面の減衰能に関する理論解析），日本機械学会論文集，45, 398 (1979) 1143.
- 16) 水兼正博，古川勇二，塩崎進：工作機械送り駆動系の動剛性（第2報，すべり面の減衰能に関する実験的検討），日本機械学会論文集，45, 398 (1979) 1151.
- 17) C. Zener: Internal Friction in Solids, Proceeding of Physical Society, 52 (1940) 152.
- 18) A. L. Kimball: Friction and Damping in Vibration, Trans. ASME, A 13-A 41 (1941)
- 19) R. Plunkett: Measurement of Damping, Structural Damping, Pergamon Press, London (1960) 122.
- 20) 久米靖文：工作機械構造および要素の減衰能とその測定方法について，琉球大学理工学部紀要 工学篇，9 (1975. 3).
- 21) 杉本孝一：防振合金—その基礎と展望，日本金属学会会報，14, 7

- (1975) 491.
- 22) 杉本孝一：防振合金の現状について，自動車技術，30，3 (1979) 154.
- 23) B. J. Lazan: Damping of Materials and Members in Structural Mechanics, Pergamon Press, London (1968).
- 24) 木谷要一：金属の疲と内部摩擦とに就て，日本機械学会論文集，5，18 (1939) 104.
- 25) 遠藤貞一：鋼の減衰能の実験とその基礎的取扱いに就て，日本金属学会誌，4，2 (1940) 59.
- 26) 木谷要一，山本弥一郎：Al-Si 合金の焼戻硬化と内部摩擦とに就て，日本金属学会誌，4，5 (1940) 152.
- 27) 木谷要一，財満鎮雄：炭素鋼の内部摩擦に就て，日本機械学会論文集，9，36 (1943) I-125.
- 28) 遠藤貞一：内部摩擦定数を持つ擬弾性振動力学の基礎方程式に就て，日本機械学会論文集，7，27 (1941) I-15.
- 29) B. J. Lazan: Some Mechanical Properties of Plastics and Metals under Sustained Vibration, Trans. ASME, 10 (1943) 87.
- 30) J. M. Robertson & A. J. Yorgiadis: Internal Friction in Engineering Materials, J. Appl. Mech., Trans. ASME, 13 (1946) A173.
- 31) E. Volterra: Vibrations of Elastic Systems Having Hereditary Characteristics, J. Appl. Mech., Trans. ASME, 17 (1950) 363.
- 32) A. W. Cochardt: The Origin of Damping in High-strength Ferromagnetic Alloys, J. Appl. Mech., Trans. ASME, 20 (1953) 196.
- 33) B. J. Lazan: Effect of Damping Constants and Stress Distribution on the Resonance of Members, J. Appl. Mech., Trans. ASME, 21 (1954) 201.
- 34) A. Yorgiadis: Damping Capacity of Materials, Prod. Eng. (1954) 201.



- 35) W. C. Hagel & J. W. Clark: The Specific Damping Energy of Fixed-fixed Beam Specimens, J. Appl. Mech., Trans. ASME, 24 (1957) 426.
- 36) H. Drum: Beitrag zur Reibungsdämpfung, Der Maschinenmarkt, 79 - 2 (1959) 35.
- 37) Nadai: Theory of Flow and Fracture of Solids, Vol. 2, Chap. XVI, Sec. VII, Mc Graw-Hill Book Company Inc., New York (1963).
- 38) 山田嘉昭, 橋本紘吉: 材料減衰を考慮した動的応力解析の研究, 昭和46年度 塑性加工春季講習会前刷 (1971).
- 39) 南大路謙一, 大久保肇: 表面摩擦による丸棒の捩れ, 日本機械学会誌, 45, 309 (1942) 786.
- 40) R. D. Mindlin: Compliance of Elastic Bodies in Contact, J. Appl. Mech., Trans. ASME, 16 (1949) 259.
- 41) J. L. Lubkin: The Torsion of Elastic Spheres in Contact, J. Appl. Mech., Trans. ASME, 19 (1951) 73.
- 42) S. Timoshenko & V. N. Goodier: Theory of Elasticity, McGraw-Hill, New York, N. Y. (1951) 372.
- 43) L. E. Goodman & G. E. Bowie: Experiments on Slip Damping at Rounded Contacts, Wright Air Development Division Technical Report, 60-161, Part 1 (1960).
- 44) R. D. Mindlin & H. Deresiewicz: Elastic Spheres in Contact under Varying Oblique Force, J. Appl. Mech., Trans. ASME, 20 (1953) 327.
- 45) K. L. Johnson: Surface Interaction between Elastically Loaded Bodies under Tangential Forces, Proc. Roy. Soc., A. 230 (1955) 531.
- 46) 池田馨, 中川元, 光永公一: ボルトの締付けについて, 日本機械学会論文集, 36, 290 (1960) 1735.

- 47) 加藤仁, 山口勝美, 山田又久: 工具, 被削材の境界面に働く応力分布, 日本機械学会論文集, 37, 298 (1961) 1229.
- 48) L. E. Goodman: Contact Stress Analysis of Normally Loaded Rough Spheres, J. Appl. Mech., Trans. ASME, 29 (1962) 515.
- 49) K. L. Johnson: Tangential Traction and Micro-Slip in Rolling Contact, Rolling Contact Phenomena, Elsevier Publishing Company (1962) 6.
- 50) G. M. Hamilton & L. E. Goodman: The Stress Field Created by a Circular Sliding Contact, J. Appl. Mech., Trans. ASME, 33 (1966) 371.
- 51) M. Masuko & Y. Ito: Distribution of Contact Pressure on Machine Tool Slideways, Mach. Tool Des. Res., 8 (1968) 641.
- 52) T. C. T. Ting: Contact Problems in the Linear Theory of Viscoelasticity J. Appl. Mech., Trans. ASME, 35 (1968) 248.
- 53) J. S. Courtney-Pratt & E. Eisner: The Effect of a Tangential Force on the Contact of Metallic Bodies, Proc. Roy. Soc., A 238 (1957) 529.
- 54) 堤正臣, 伊東諄, 益子正己: 工作機械のボルト結合部の動的挙動—固体接触状態の場合—, 精密機械, 43, 1 (1977) 105.
- 55) L. E. Goodman: A Review of Progress in Analysis of Interfacial Slip Damping, Structural Damping, Pergamon Press, London (1960) 37-38.
- 56) L. E. Goodman & G. E. Bowie: Experiments on Damping at Contacts of a Sphere with Flat Plates, Experimental Mechanics (1961) 48.
- 57) L. E. Goodman & C. B. Brown: Energy Dissipation in Contact Friction Constant Normal and cyclic Tangential Loading, J. Appl. Mech., Trans. ASME, 29 (1962) 17.
- 58) L. E. Goodman & J. H. Klumpp: Analysis of Slip Damping with Reference to Turbine-Blade Vibration, J. Appl. Mech., Trans. ASME, 23 (1956) 421.

- 59) S.W.E.Earles & N.Mott : A Response Prediction and Optimisation of a Frictionally Damped Structure, Mach. Tool des. Res. 12 (1972) 31.
- 60) S.W.E.Earles & C.F.Beards : Some Aspects of Frictional Damping as Applied to Vibrating Beams, Int. J. Mach. Tool Des. Res., 10 (1970) 123.
- 61) 益子正己, 伊東諄, 吉田敬三 : 2枚合せ板構造の減衰能発生機構, 日本機械学会論文集, 39, 317 (1973) 382.
- 62) 横山恭男 : 静摩擦係数に及ぼす振動の影響 (第1報) — 3軸方向の振動の影響一, 精密機械, 32, 6 (1966) 403.
- 63) 横山恭男, 岡部佐規一 : 静摩擦係数に及ぼす振動の影響 (第2報) — 任意の一方向の振動の影響一, 精密機械, 33, 8 (1967) 509.
- 64) 北御門良夫 : 滑り摩擦による振動の一例, 日本機械学会誌, 42, 267 (1939) 380.
- 65) 北御門良夫 : 滑り摩擦に依る振動の一例, 日本機械学会誌, 44 (1941) 886.
- 66) David Sinclair : Frictional Vibration, J. Appl. Mech., Trans. ASME 22 (1955) 207.
- 67) 亘理厚, 杉本隆尚 : 摩擦による振動, 日本機械学会論文集, 20, 200 (1963) 769.
- 68) 松崎淳 : 直動型油圧送りテーブルのスティック・スリップ・発生限界について, 日本機械学会論文集, 29, 206 (1963) 1615.
- 69) R. Singh : The Study of the Critical Velocity of Stick-slip Sliding, Trans. ASME, J. Eng. Ind. (1960) 393.
- 70) 西村源六郎, 神保泰雄, 高野政晴 : 長周期振動計 (第1報), 精密機械, 32, 2 (1966) 133.
- 71) 西村源六郎, 神保泰雄, 高野政晴 : 長周期振動計 (第2報), 精密機械,

32, 9 (1966) 614.

- 72) M. Polacek & Z. Vara: The Influence of Different Types of Guideways on the Static and Dynamic Behaviour of Feed Drives, Mach. Tool Des. Res. (1967) 1127.
- 73) 岡村健二郎, 松原十三生, 野呂周平, 山根崇広: 摩擦振動の理論的解析, 精密機械, 34, 11 (1968) 731.
- 74) 岡村健二郎, 松原十三生, 野呂周平: 摩擦振動に関する実験的解析, 精密機械, 34, 12 (1968) 774.
- 75) 岡村健二郎, 松原十三生, 大西紘夫, 井上芳政: しゅう動面摩擦特性の解析, 精密機械, 35, 4 (1969) 215.
- 76) 加藤仁, 松林恒雄, 佐藤則夫: 案内面の静摩擦特性に関する一考察, 日本機械学会論文集, 37, 299 (1971) 1427.
- 77) 平野富士夫, 桑野則行: スピン摩擦に関する一実験, 日本機械学会論文集, 37, 303 (1971) 2215.
- 78) 岡村健三郎, 松原十三生: 工作機械すべり案内面の摩擦振動発生限界, 精密機械, 38, 6 (1972) 503.
- 79) R. Bell & M. Burdekin: The Frictional Damping of Plain Slideways for Small Fluctuations of the Velocity of Sliding, Mach. Tool Des. Res. (1967) 1107.
- 80) J. Peters & P. Vanherck: Theory and Practice of Fluid Dampers in Machine Tools, Mach. Tool Des. (1969) 57.
- 81) A. F. Metherell & S. V. Diller: Instantaneous Energy Dissipation Ratio in a Lap Joint-Uniform Clamping Pressure, J. Appl. Mech., Trans. ASME, 35 (1968) 123.
- 82) W. D. Iwan: Steady-State Dynamic Response of a Limited Slip Systems, J. Appl. Mech., Trans. ASME, 35 (1968) 323.

- 83) 岡村健二郎, 松原十三生, 青柳建夫: しゅう動面油膜挙動に関する基礎解析, 精密機械, 35, 8 (1969) 490.
- 84) 岡村健二郎, 松原十三生: 工作機械しゅう動面のしゅう動特性の研究—しゅう動面固有値と摩擦振動発生限界の関係—, 精密機械, 35, 9 (1969) 561.
- 85) 加藤仁, 丸井悦男: 機械振動学, コロナ社 (1958) 152.
- 86) E. I. Ergin: Transient Response of a Nonlinear System by a Bilinear Approximation Method, J. Appl. Mech., Trans. ASME, 23 (1956) 635.
- 87) W. T. Thomson: Analog Computer for Nonlinear System with Hysteresis, J. Appl. Mech., Trans. ASME, 24 (1957) 245.
- 88) T. K. Caughey: Sinusoidal Excitation of a System with Bilinear Hysteresis, J. Appl. Mech., Trans. ASME, 27 (1960) 640.
- 89) T. K. Caughey: Forced Oscillations of a Semi-Infinite Rod Exhibiting weak Bilinear Hysteresis, J. Appl. Mech., Trans. ASME, 27 (1960) 644.
- 90) T. K. Caughey: Random Excitation of a System with Bilinear Hysteresis, J. Appl. Mech., Trans. ASME, 27 (1960) 649.
- 91) W. D. Iwan: The Steady-State Response of a Two-Degree-of Freedom Bilinear Hysteretic System, J. Appl. Mech., Trans. ASME, 32 (1965) 151.
- 92) S. F. Felszeghy & W. T. Thomson: Probability Distribution of Bilinear System Response to Impulse Excitation, J. Appl. Mech., Trans. ASME, 33 (1966) 384.
- 93) W. D. Iwan: A Distributed-Element Model for Hysteresis and Its Steady-State Dynamic Response, J. Appl. Mech., Trans. ASME, 33 (1966) 893.

- 94) R.N.Brown: Analog Simulation of a Bilinear Hysteretic System Undergoing Random Vibration, J. Eng. Ind., Trans. ASME, 36 (1969) 1051.
- 95) P.F.Rogers & G.Boothroyd: Damping at Metallic Interfaces Subjected to Oscillating Tangential Load, J. Eng. Ind., Trans. ASME, 97 (1975) 1087.
- 96) 久米靖文, 橋本文雄: 振動モードを考慮したはりの材料減衰能の評価方法, 精密機械, 45, 3 (1979) 329.
- 97) W. T. Thomson: Theory of Vibration with Application (Prentice-Hall, 1972) 67.
- 98) C.M.Harris & C.E.Crede: Shock and Vibration Handbook (McGraw-Hill, 1976) 36-5.
- 99) 例えばフロイデンタール(西村源六郎ほか訳): 工業材料と構造物の非弾性挙動, コロナ社 (1970) 267.
- 100) B. J. Lazan: Damping of Materials and Members in Structural Mechanics, Pergamon Press, London (1968) 156.
- 101) B. J. Lazan: Damping of Materials and Members in Structural Mechanics, Pergamon Press, London (1968) 135.
- 102) B. J. Lazan: Damping of Materials and Members in Structural Mechanics, Pergamon Press, London (1968) 130.
- 103) B. J. Lazan: Damping of Materials and Members in Structural Mechanics, Pergamon Press, London (1968) 154.
- 104) 例えば, 亘理厚著: 機械振動, 丸善 (1966) 141.
- 105) 久米靖文, 前田節雄, 橋本文雄: 両端単純支持はりの材料減衰能, 日本音響学会誌, 36, 3 (1980) 135.
- 106) J.Peters: Damping in Machine Tool Construction, Mach. Tool Des.

Res., 23 (1965) 22.

- 107) 久米靖文, 橋本文雄: 球と平面の接触による減衰能, 精密機械, 44, 9 (1978) 81.
- 108) 橋本文雄, 久米靖文: カップリング状モデルの矩形波応答発生限界, 精密機械, 38, 10 (1972) 62.
- 109) 久米靖文, 橋本文雄: 接合面が固着した場合のカップリング状モデルの減衰能, 精密機械, 46, 11 (1980) 8.
- 110) 久米靖文, 橋本文雄: カップリング状モデルの局部すべりによる減衰能, 精密機械, 45, 7 (1979) 5.
- 111) 久米靖文, 橋本文雄: カップリング状モデルの矩形波状応答領域での振動特性, 精密機械, 45, 2 (1979) 130.
- 112) ガーリン著, 佐藤常三訳: 弾性接触論, 日刊工業新聞社, (1958) 152.
- 113) H.S.Paul & K.Sridharen: Forced torsional vibration of an elastic circular rod on an elastic half space and on an elastic stratum, J. Acoust. Soc. Am., 65(2), Feb., (1979) 391.

## 謝

## 辞

本論文を執筆するにあたり，多大の御指導と御配慮を賜った大阪大学精密工学教室 中川憲治教授ならびに山田朝治教授に深く感謝の意を表します。そして有益な御助言を賜った津和秀夫教授ならびに井川直哉教授に感謝いたします。また本研究を遂行するにあたり，御指導，御鞭撻をいただいた大阪府立大学経営工学教室 橋本文雄教授，および貴重な御助言と激励をいただいた航空工学教室 関谷壮教授，本研究を継続するに際して御配慮をいただいた琉球大学機械工学科 平敷兼貴教授をはじめ諸先生方に心から感謝いたします。また本研究をまとめるにあたり御配慮いただいた大阪府立大学船舶工学教室 室津義定助教授に謝意を表します。

最後に，御支援いただいた大阪府立大学経営工学教室の諸先生方に謝意を表すとともに本研究の一部は文部省科学研究費補助金による援助を受けたことを記して謝意を表す次第です。





発 表 論 文

|    | 論 文 題 目                                                                                        | 著 者 名                                           | 発 表 誌 名                                                                       | 本 論 文 連<br>との 関 連 |
|----|------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------|-------------------|
| 1  | カップリング状モデルの矩形波応答発生限界<br>工作機械構造の接合面の動特性に関する基礎的研究(第1報)                                           | 橋 本 文 雄<br>久 米 靖 文                              | 精密機械, 38巻 10号<br>昭和47年10月 (1972年)                                             | 第 1 章<br>第 4 章    |
| 2  | Fundamental Studies on Dynamic Characteristics of Contact<br>Surface in Machine Tool Structure | Yasufumi KUME<br>Fumio HASHIMOTO                | Bulletin of University of Osaka Prefecture,<br>Series A, Vol. 21, № 2 (1972年) | 〃                 |
| 3  | 球と平面の接触による減衰能                                                                                  | 久 米 靖 文<br>橋 本 文 雄                              | 精密機械, 44巻 9号<br>昭和53年9月 (1978年)                                               | 第 3 章             |
| 4  | カップリング状モデルの矩形波応答領域での振動特性<br>工作機械構造の接合面の動特性に関する基礎的研究(第2報)                                       | 久 米 靖 文<br>橋 本 文 雄                              | 精密機械, 45巻 2号<br>昭和54年2月 (1979年)                                               | 第 1 章<br>第 6 章    |
| 5  | 振動モードを考慮したはりの材料減衰能の評価方法                                                                        | 久 米 靖 文<br>橋 本 文 雄                              | 精密機械, 45巻 3号<br>昭和54年3月 (1979年)                                               | 第 2 章             |
| 6  | Method of Estimating for Material Damping of Beam on<br>Consideration of Mode of Vibration     | Yasufumi KUME<br>Fumio HASHIMOTO                | Bulletin of Japan Society of Precision<br>Engineering, Vol. 15, № 2 (1981年)   | 〃                 |
| 7  | カップリング状モデルの局部すべりによる減衰能<br>工作機械構造の接合面の動特性に関する基礎的研究(第3報)                                         | 久 米 靖 文<br>橋 本 文 雄                              | 精密機械, 45巻 7号<br>昭和54年7月 (1979年)                                               | 第 5.3 節           |
| 8  | 振動モードを考慮した両端単純支持はりの材料減衰能                                                                       | 久 米 靖 文<br>前 田 節 雄<br>橋 本 文 雄                   | 日本音響学会誌 36巻 3号<br>昭和55年3月 (1980年)                                             | 第 2.5 節           |
| 9  | 接合面が固着した場合のカップリング状モデルの減衰能<br>工作機械構造の接合面の動特性に関する基礎的研究(第4報)                                      | 久 米 靖 文<br>橋 本 文 雄                              | 精密機械, 46巻 11号<br>昭和55年11月 (1980年)                                             | 第 5.2 節           |
| 10 | Material Damping of Cantilever Beam                                                            | Yasufumi KUME<br>Fumio HASHIMOTO<br>Setuo MAEDA | Journal of Sound and Vibration Vol. 79,<br>№ 4 (1981年)                        | 第 2.6 節           |
| 11 | Material Damping and Radiation Sound Pressure of<br>Simply Supported Beam under Vibration      | Yasufumi KUME<br>Setuo MAEDA<br>Fumio HASHIMOTO | Bulletin of University of Osaka Prefecture,<br>Series A, Vol. 29, № 1 (1980年) | 第 2.5 節           |