

Title	Poisson方程式のソース逆問題の数値解法に関する研究
Author(s)	大江, 貴司
Citation	大阪大学, 1995, 博士論文
Version Type	VoR
URL	https://doi.org/10.11501/3081471
rights	
Note	

Osaka University Knowledge Archive : OUKA

<https://ir.library.osaka-u.ac.jp/>

Osaka University

Poisson 方程式のソース逆問題の
数値解法に関する研究

1994 年 12 月

大江 貴 司

Poisson 方程式のソース逆問題の
数値解法に関する研究

1994 年 12 月

大江 貴 司

目次

緒論	5
第1章 偏微分方程式における逆問題	9
1.1 緒言	9
1.2 偏微分方程式の逆問題	9
1.2.1 工学に現れる偏微分方程式の逆問題	9
1.2.2 偏微分方程式の逆問題の分類	10
1.2.3 逆問題の不適切性	13
1.3 偏微分方程式のソース(負荷)逆問題	14
1.3.1 波動方程式のソース逆問題	14
1.3.2 拡散方程式のソース逆問題	15
1.3.3 Poisson 方程式のソース逆問題	16
1.4 結言	17
第2章 Poisson 方程式のソース逆問題	19
2.1 緒言	19
2.2 Poisson 方程式のソース逆問題	19
2.3 Poisson 方程式のソース逆問題に関する従来の理論的考察	21
2.3.1 Poisson 方程式のソース逆問題の解の一意性に関する反例	21
2.3.2 逆問題の解の一意性に関する諸定理	22
2.4 Poisson 方程式のソース逆問題に関する従来の数値的考察	27
2.4.1 境界積分を用いた数値解法	27
2.4.2 境界要素法を用いた数値解法	28
2.5 結言	30
第3章 Poisson 方程式のソース逆問題と対数ポテンシャル逆問題	31
3.1 緒言	31

3.2	Poisson 方程式の積分方程式による表現	32
3.3	境界積分表現による調和項の除去	33
3.4	対数ポテンシャル逆問題	36
3.5	対数ポテンシャル逆問題の不適切性	39
3.6	代用電荷法と対数ポテンシャル逆問題	42
3.7	結言	44
第 4 章	Poisson 方程式のソース逆問題に対する境界要素法の適用	45
4.1	緒言	45
4.2	境界要素法	45
4.3	境界要素法による対数ポテンシャルの数値計算法および誤差評価	49
4.3.1	境界要素法による対数ポテンシャルの計算法	49
4.3.2	境界要素法における誤差の評価 (一般の曲線の場合)	50
4.3.3	境界要素法における誤差の評価 (円の場合)	58
4.4	境界要素法の Poisson 方程式のソース逆問題への適用	64
4.4.1	one-point-mass model と逆問題の解法	64
4.4.2	one-point-mass model に対する逆問題の数値解の誤差評価	68
4.4.3	one-point-mass model に対する 逆問題の解法の数値例	70
4.5	結言	72
第 5 章	Point-mass model に対する対数ポテンシャル逆問題における位置推定問題	73
5.1	緒言	73
5.2	Point-mass model に対する対数ポテンシャル逆問題における位置推定問題	74
5.2.1	Point-mass model に対する逆問題の解の一意性	74
5.2.2	同一強度を持つ point-mass model に対する位置推定問題	78
5.3	離散 Fourier 変換を用いた位置推定問題の数値解法と誤差評価	80
5.3.1	離散 Fourier 変換を用いた逆問題の数値解法	80
5.3.2	離散 Fourier 変換を用いた逆問題の数値解法の誤差評価	82
5.4	離散 Fourier 変換を用いた位置推定問題の解法の数値例	85
5.5	離散 Fourier 変換に対する残差反復を用いた高精度の位置推定法	93
5.5.1	残差反復を用いた複素 Fourier 係数の近似の改良法	93
5.5.2	残差反復を用いた複素 Fourier 係数の近似法の収束性	96
5.5.3	残差反復を用いた複素 Fourier 係数の近似法の誤差評価	101
5.6	離散 Fourier 変換に対する残差反復を用いた位置推定法の数値例	103
5.7	結言	110

第 6 章 Point-mass model に対する対数ポテンシャル逆問題における個数推定問題	111
6.1 緒言	111
6.2 同一強度をもつ Point-mass model に対する個数推定問題	112
6.2.1 Point-mass model に対する個数推定問題の解の一意性	112
6.2.2 Point-mass model に対する個数推定問題の解法	116
6.3 Point-mass model に対する個数推定問題の数値解法	117
6.4 離散 Fourier 変換を用いた個数推定法の数値例	121
6.5 結言	126
総括	127
謝辞	131
参考文献	133
著者発表論文	141

緒 論

工学に現れる多くの問題の数学的, 数値的な解析は, 対象とする現象がある方程式により支配されるものとして記述し, その係数や境界条件などを与え, 方程式を解析的あるいは数値的に解くことによりおこなわれる. このように支配方程式からその解を求める問題は順問題と呼ばれる. しかし現実の問題では, 支配方程式やその係数, 境界条件などの一部が未知であり, それを何らかの形で突き止めることが必要となる. このような問題は逆問題と呼ばれる [1]. 現実の工学的問題の中で逆問題と考えられるものは数多くあり, 例として地震の震源推定, 環境汚染源推定, 逆散乱によるポテンシャル推定問題がある. 以上のことより逆問題に対する数学的, 数値的考察は, 現代の工学の重要な研究課題の一つとなっている.

さて偏微分方程式により記述される現象を解析し, 解を得るためには, その方程式はもとより方程式の定義領域や方程式の中の係数, 外力項, および解の満たす境界条件, 初期条件などを与える必要がある. したがって偏微分方程式における逆問題とは, 方程式の解に関する情報から方程式の中に現れる係数や外力項, 境界条件, 初期条件および方程式の定義領域のうち未知のものを求める問題ということができる. 偏微分方程式における逆問題は古くからその理論的研究が進められてきた. 特に固有値逆問題やシステム同定問題に関しては数多くの研究がある. しかし, それに比較して数値的な研究は最近までやや発展が遅れている. この原因の一つとして, 多くの逆問題が Hadamard が示した意味で “不適切な問題” となることがあげられる [3,4]. 中でも問題の解の一意性および安定性に関して得られている結果が少ないため, 得られた数値解に対する保証ができない場合が多く現れた. また問題を解く際に数多くのデータを必要とする場合が多く, この点でコンピュータの発達を待たなければならなかったことも原因の一つとしてあげられる. しかし近年, 実用に沿った解の一意性や安定性に関する理論的研究が進み, さらに差分法, 有限要素法, 境界要素法などさまざまな偏微分方程式の数値解法が開発された. またコンピュータの能力も向上したため, 逆問題の数値的な研究に着手するバックグラウンドは整備されてきた. 特に 1985 年以降の逆問題に関する研究成果にはめざましいものがあり, 多くの国際会議が開催され, また専門の論文誌も発行されるようになった.

工学的な問題の数値的研究を考える場合、一般にその解法の面が主に取り上げられる傾向がある。確かに問題が生じる現場では、問題が何らかの形で解けることが重要である。しかし逆問題を考える場合には問題の不適切性が生じることが多いため、単に解法のみを議論するのでは不十分である。例をあげると、問題の解の一意性が保証されない場合には目的の解と異なったものが得られている可能性が、また安定性が保証されない場合には目的の解から大きく離れたものが得られている可能性がある。したがって逆問題の数値的研究をおこなう場合には解法の面のみならず、解の一意性に関する研究や、得られた解の信頼性を評価するための誤差評価に関する研究が重要となる。また解法についても現在得られている多くの研究結果は、逆問題の解を偏微分方程式の解から直接に求める解法ではなく、解の初期値を与えたうえで偏微分方程式を順問題として繰り返し解くことにより逆問題の解を求める間接的な解法である。このことから逆問題の直接的な解法に関する研究も重要な課題となっている。

以上の点をふまえて、本論文では偏微分方程式の中で Poisson 方程式に注目し、そのソース逆問題とこの問題に関して本質的役割を持つ対数ポテンシャル逆問題に対する数値解法と誤差評価について論じる。Poisson 方程式は重力場や静電場など多くの定常現象を記述する方程式として知られ、そのソース逆問題は物質密度や電荷密度など現象の発生源となるものを求める問題である。したがってこれらの現象の内部構造を調べるという意味を持ち、工学的に重要な問題と考えられる。Poisson 方程式のソース逆問題および対数ポテンシャル逆問題に対する理論的研究は古くからおこなわれ、とくに問題の解の一意性に関する必要十分条件が 1938 年に Novikov によって得られている [5]。それ以降はこの必要十分条件を満たす具体的なモデルに関する研究が多くおこなわれた。その主な結果は star-shape model および point-mass model と呼ばれる 2 つのモデルである。これらのうち point-mass model に対する逆問題の解の一意性は Stromeyer と Ballani により 1984 年に証明された [6]。またこのモデルは、ポテンシャルの順問題の高速かつ高精度な解法として最近注目されている代用電荷法の基礎となるモデルでもある [7]。本論文ではこの point-mass model に対する Poisson 方程式のソース逆問題および対数ポテンシャル逆問題に注目して議論をおこなう。

以下に本論文の構成と内容を記す。

第 1 章では偏微分方程式の逆問題について、その工学的な意味と応用例について述べる。また本論文のテーマであるソース逆問題について二階線形偏微分方程式に注目し、その従来の研究結果を示す。

第 2 章では Poisson 方程式のソース逆問題に対する従来の理論的、数値的考察について述べる。理論的考察としては特に解の一意性に関する結果を、数値的考察としては最近提案された 2 つの数値解法を示す。

第3章では Poisson 方程式のソース逆問題と対数ポテンシャル逆問題の関係について述べる。まず Poisson 方程式の境界積分方程式表現を用いて、Poisson 方程式の解から対数ポテンシャル成分を取り出すことが可能であることを示す。さらに Poisson 方程式のソース逆問題と対数ポテンシャル逆問題の等価性を導く。また対数ポテンシャル逆問題に関する従来の研究を示す。その中で本論文で扱う point-mass model の順問題的な応用である代用電荷法を示し、対数ポテンシャル逆問題との関連について述べる。

第4章では Poisson 方程式のソース逆問題に対し境界要素法を適用した数値解法を提案する。この手法は Poisson 方程式の境界積分方程式表現に基づく方法であり、また第3章で示す Poisson 方程式のソース逆問題と対数ポテンシャル逆問題の関係を明確な形で取り扱うことのできる方法でもある。ここでは数値解法のアルゴリズムとその誤差評価を提案し、数値実験によりその有効性を示す。

第5章では point-mass model に対する対数ポテンシャル逆問題における位置推定問題について考察し、2つの数値解法を提案する。提案する解法はいずれも対数ポテンシャルの Fourier 展開に基づく方法であり、一つは離散 Fourier 変換を用いた直接的な解法、もう一方は離散 Fourier 変換の性質を用いた高精度の反復解法である。また双方の解法に対する精密な誤差評価法を提案する。さらに数値実験により提案する解法および誤差評価の有効性を示す。

第6章では point-mass model に対する対数ポテンシャル逆問題における個数推定問題について考察し、対数ポテンシャルの Fourier 展開に基づく数値解法を提案する。とくに数値解法において問題となる、Fourier 係数を離散 Fourier 変換により近似した際に生ずる誤差を考慮した判定基準を提案する。また数値実験により提案する解法および判定基準の有効性を示す。

最後に本研究で得られた成果について総括し、今後の研究課題について述べる。

第 1 章

偏微分方程式における逆問題

1.1 緒言

近年さまざまな分野で逆問題と呼ばれる問題が話題となっている [1,8,9]. 工学に現れる現象の数学的な解析の多くは, 現象を偏微分方程式を用いて記述した上でその係数や境界条件などを与え, 方程式を解析的あるいは数値的に解く順問題と呼ばれる手法によりおこなわれる. これに対し, 逆問題とは方程式の解から方程式の係数や境界条件などを求める問題をいい, 工学に現れる問題の多くが偏微分方程式における逆問題として記述される. 最近のコンピュータの発達により, 偏微分方程式の解のコンピュータシミュレーションが盛んにおこなわれるようになった [10]. それにともない, コンピュータを用いた偏微分方程式の逆問題の解析法の確立が重要となってきた [11,12].

本章では, 偏微分方程式の逆問題について, まず全体像にふれ, その工学的な応用と重要性について述べる. また久保により示された偏微分方程式の逆問題の分類について述べ, それぞれについて工学的な意味と応用例を示す [1]. 最後に偏微分方程式のソース逆問題についての従来の研究について述べ, その問題点を示す.

1.2 偏微分方程式の逆問題

1.2.1 工学に現れる偏微分方程式の逆問題

工学で扱われる多くの現象は偏微分方程式を用いて数学的に定式化される. また偏微分方程式により記述される現象の数学的な解析は, 方程式を解析的あるいは数値的に解き, その解を用いておこなわれる. 偏微分方程式を解く際には, 方程式の形はもとより方程式に現れるさまざまな係数や外力項, さらに境界条件および初期条件などが必要とされる. 偏

微分方程式を解くとはこれらのものから結果である解を調べることと考えることができ、このような問題は順問題と呼ばれる。

ところが現実の問題では、偏微分方程式の係数や外力項、境界条件などの一部が未知である場合がある。この場合には偏微分方程式を解くことは不可能であり、現象の解析をおこなうことができない。したがって、偏微分方程式の解から方程式の係数や外力項、境界条件などのうち未知のものを何らかの形で求める研究が必要となる。このような問題を順問題に対して逆問題と呼ぶ [2,13,14]。偏微分方程式の逆問題の工学における代表的な応用例としては、X線 CT, 資源探査, 最適設計, 逆散乱問題があげられる。偏微分方程式の逆問題は、偏微分方程式を表現する係数や外力項、条件などの中で未知とする対象によりさまざまに分類される。以下でその代表的な分類法を示す。

1.2.2 偏微分方程式の逆問題の分類

本節では実 n 次元空間における線形偏微分方程式を考え、偏微分方程式の逆問題の代表的な分類法について述べる。ある現象が実 n 次元空間 R^n 内の領域 Ω 内で定義された線形偏微分方程式

$$\sum_{j=0}^N \sum_{k=0}^j \sum_{1 \leq l_1 \leq l_2 \leq \dots \leq l_{j-k} \leq n} a_{k,l_1,l_2,\dots,l_{j-k}}(t, x_1, x_2, \dots, x_n) \frac{\partial^j u}{\partial t^k \partial x_{l_1} \partial x_{l_2} \dots \partial x_{l_{j-k}}} = f(t, x_1, x_2, \dots, x_n), \quad t \in [0, T], (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \Omega \quad (1.1)$$

で記述されているものとする。方程式 (1.1) を $u(t, x_1, x_2, \dots, x_n)$ について解析的、あるいは数値的に解くためには多くの場合、次の 5 つの情報が必要である [15]。

- (a) 定義領域 Ω
- (b) 係数 $a_{k,l_1,l_2,\dots,l_{j-k}}(t, x_1, x_2, \dots, x_n)$
- (c) 非同次項 $f(t, x_1, x_2, \dots, x_n)$
- (d) 解の満たす境界条件
- (e) 解の満たす初期条件

これらの 5 つの情報が適切に与えられたとき方程式 (1.1) は解を持ち、その解が何らかの形で得ることができる。例として拡散方程式

$$\frac{\partial u}{\partial t} - k(x_1, x_2, \dots, x_n) \Delta u = f(t, x_1, x_2, \dots, x_n), \quad t \in [0, T], (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \Omega \quad (1.2)$$

を考えると、

- (a) 二回連続微分可能な境界を持つ有界な領域 Ω

- (b) 領域 Ω で C^2 級かつ正の拡散係数 $k(x_1, x_2, \dots, x_n)$
- (c) 時間 t および空間 (x_1, x_2, \dots, x_n) について有界かつ C^1 級である非同次項
 $f(t, x_1, x_2, \dots, x_n)$
- (d) Dirichlet 境界条件

$$u(t, x_1, x_2, \dots, x_n) = g(t, x_1, x_2, \dots, x_n), \quad t \in [0, T], \quad (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \Gamma \equiv \partial\Omega \quad (1.3)$$

ただし $g(t, x_1, x_2, \dots, x_n)$ は時間 t および空間 (x_1, x_2, \dots, x_n) について有界かつ C^2 級

- (e) 初期条件

$$u(0, x_1, x_2, \dots, x_n) = h(x_1, x_2, \dots, x_n), \quad (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \Omega \quad (1.4)$$

ただし $h(x_1, x_2, \dots, x_n)$ は空間 (x_1, x_2, \dots, x_n) について有界かつ C^1 級

が与えられたとき, t について C^1 級, (x_1, x_2, \dots, x_n) について C^2 級の解をただ一つ持つことが知られている [16].

偏微分方程式の逆問題とは, これら 5つの情報の中で 1つあるいはそれ以上の情報が欠落している場合に, それを推定する問題といえることができる. 久保は上記の情報のうち欠落している情報を基に偏微分方程式の逆問題の分類をおこなった [1]. 以下にその分類と工学における例を示す.

(1) 境界値/初期値逆問題

境界値逆問題とは (d) の境界条件が, 初期値逆問題とは (e) の初期条件がそれぞれ未知の場合に, それらを推定する問題を指す. 初期値逆問題は初期時刻 $t=0$ が実 $n+1$ 次元空間 R^{n+1} における領域 $[0, T] \times \Omega$ における部分境界を表すことから, 境界値逆問題の範疇に入ると考えることができる. 境界値/初期値逆問題は境界や初期時刻における現象の状態が直接に観測できない環境, たとえば超高温環境, 腐食環境, 生体内環境にあり, それを推定することが要求される場合に生じる問題である. 工学的な応用例としては, 心臓表面における電気ポテンシャル分布推定, ガルバニック腐食の腐食表面における電気ポテンシャル, および電流密度推定, 温度場における初期温度推定があげられ, さまざまな研究がある [17-19]. また数学的な研究もいくつかおこなわれている [20-22].

(2) ソース (負荷) 逆問題

ソース (負荷) 逆問題とは, (c) の非同次項 (ソース項あるいは負荷項とも呼ばれる) が未知の場合にそれを推定する問題を指す. ソース (負荷) 逆問題は物体内に熱源や電荷, あるいは残留応力などが分布し, それらを物体を破壊することなしに推定することが要求される場合に生じる問題である [23]. 工学的な応用例としては, 資源探査における質量密度推定, 環境汚染における汚染源推定, 騒音源推定, 弾性体の残留応力推定があげられ, さまざまな研究がある [24-29]. 数学的な研究については第 1.3 節で述べる.

(3) 領域 (境界) 逆問題

領域 (境界) 逆問題とは, (a) の偏微分方程式が定義される領域の範囲あるいはその境界が未知の場合に, それを推定する問題を指す. 領域 (境界) 逆問題は時間により境界の位置が変動するような自由境界を持つ物質を扱う場合や物質内に内部境界がある場合に, その境界を推定することが要求される場合に生じる問題である. 工学的な応用例としては, Stefan 問題, ダム問題に代表される自由境界問題, タービン翼の形状, トランスのコアの形状などの最適設計問題, 物質の内部亀裂の推定問題があげられる [30-32]. 数学的な研究も自由境界問題, 最適設計に関して多くの研究がある [33-35].

(4) 材料特性逆問題

材料特性逆問題とは, (b) の支配方程式に含まれる係数が未知の場合に, それを推定する問題を指す. 支配方程式に含まれる係数は拡散方程式 (1.2) では拡散係数 $k(x_1, x_2, \dots, x_n)$ に対応し, そのためこの問題は材料特性逆問題と呼ばれる. この問題は対象とする物質の内部構造を推定する問題であり, そのため逆問題のなかでも最も活発に研究がおこなわれてきた分野である. 工学的な応用例としては, X線 CT 法, 逆散乱法によるポテンシャル分布推定, 振動固有値を用いた材質弾性係数の推定があげられ, 多くの研究がある. また数学的な研究も多く, 一次元の固有値逆問題については Gelfand-Levitan の理論により完全に解かれている [36,37]. 2次元以上についても多くの研究がある [38-42].

(5) 支配方程式逆問題

支配方程式逆問題とは, 偏微分方程式の次数や型そのものが未知である場合, それを推定する問題を指す. 広い意味では, 運動方程式や Maxwell の電磁方程式そのものの推定もこの逆問題の一つと考えることができる. 問題が大規模なためあまりとり扱われることはないが, 制御の分野におけるシステム同定ではシステムを記述する常微分方程式に対し, その次数を推定する問題が現実に取り扱われている [43]. また偏微分方程式についてもいくつかの検討がある [4,44].

以上の5つの分類のほかに、これらを複数组み合わせた逆問題も考えられ、それぞれに對しささまざまな検討が加えられている。

1.2.3 逆問題の不適切性

逆問題においては現象の結果から原因を追求するため、しばしば問題の不適切性という困難が生じる。ここで言う問題の不適切性とは Hadamard により定義された問題の適切性に対する言葉である。Hadamard は問題が適切であることを問題の解に對し、(1) 問題の解の存在、(2) 問題の解の一意性、(3) 問題の解の連続性あるいは安定性の3つの性質が保証されることと定義した。逆に Hadamard の意味で不適切な問題とは (1),(2),(3) の少なくとも1つが保証されない問題を指す [3]。多くの逆問題で生じる不適切性は、(2) あるいは (3) の条件が保証されないことである。ここでは Fredholm の第一種積分方程式を (3) の条件が保証されない例として示す。

Fredholm の第一種積分方程式は、一般に関数 $A(t, s)$ および $g(t)$ を与えたとき

$$g(t) = \int_0^T A(t, s)f(s)ds \quad (1.5)$$

を満たす関数 $f(t)$ を求める問題として定義される。ここで関数 $f(t)$ および $g(t)$ がいずれも区間 $[0, T]$ で2乗可積分な関数空間 $L^2[0, T]$ の元であるとし、 $A(t, s)$ は連続関数であるとして問題を考える。ただし $A(t, s) \neq 0$ とする。まず関数 $f(t)$ を方程式 (1.5) の解とし、関数 $h_n(t)$ を

$$h_n(t) \equiv \int_0^T A(t, s) \sin \frac{2\pi}{T} ns ds \quad (1.6)$$

と定義する。関数 $h_n(t)$ について、関数 $A(t, s)$ が s, t について連続であることより $h_n \in L^2[0, T]$ であり、さらに Riemann-Lebesgue の定理を用いて

$$h_n \rightarrow 0 \text{ as } n \rightarrow \infty \text{ in } L^2[0, T] \quad (1.7)$$

を得る。ここで

$$b_n = \left\{ \int_0^T |h_n(t)|^2 dt \right\}^{1/2} \quad (1.8)$$

とし、

$$g_n(t) = g(t) + \frac{1}{\sqrt{b_n}} h_n(t) \quad (1.9)$$

とおくと、

$$g_n \rightarrow g \text{ as } n \rightarrow \infty \text{ in } L^2[0, T] \quad (1.10)$$

であり、また方程式

$$g_n(t) = \int_0^T A(t, s)f_n(s)ds \quad (1.11)$$

の解 $f_n(t)$ は

$$f_n(t) = f(t) + \frac{1}{\sqrt{b_n}} \sin \frac{2\pi}{T} nt \quad (1.12)$$

で表現される. ところが式 (1.7) より, $f_n - f$ の $L^2[0, T]$ におけるノルムは

$$\int_0^T |f_n(t) - f(t)|^2 dt = \int_0^T \frac{1}{b_n} \left| \sin \frac{2\pi}{T} nt \right|^2 dt \rightarrow \infty \text{ as } n \rightarrow \infty \quad (1.13)$$

となり発散してしまう. すなわち問題の解の連続性が保たれない.

なおこれらの不適切性の回避することを問題の適切化, あるいは正則化と呼ぶ. 問題の適切化は, (2) の条件が保証されない場合は解の空間の制限が用いられ, (3) の条件が保証されない場合は Tikhonov regularization として知られる解の平滑化などがよく用いられる [45-52]. 最近では, 解の安定性を得るためにどのような先験情報が必要かという観点からの研究もおこなわれている [53, 54].

1.3 偏微分方程式のソース (負荷) 逆問題

本論文では前章で示した偏微分方程式の逆問題に関する分類のうち, ソース (負荷) 逆問題について論じる. そのため本節では工学的分野でよく扱われる二階偏微分方程式のうち, 波動方程式, 拡散方程式, Poisson 方程式のソース逆問題について, 従来の数学的, 数値的研究を述べる.

1.3.1 波動方程式のソース逆問題

実 n 次元空間における有界で単連結な領域 Ω を考え, その境界は C^2 級のなめらかさをもつものとする. 領域 Ω における波動方程式

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 u}{\partial x_j^2} = f(t, x_1, x_2, \dots, x_n), \quad t \in [0, T], (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \Omega \quad (1.14)$$

を考える. 方程式 (1.14) は, 非同次項 $f(t, x_1, x_2, \dots, x_n)$ が時間 t および空間 (x_1, x_2, \dots, x_n) について C^1 級であるとき, Dirichlet 境界条件

$$u(t, x_1, x_2, \dots, x_n) = g(t, x_1, x_2, \dots, x_n), \quad t \in [0, T], (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \Gamma \equiv \partial\Omega \quad (1.15)$$

および初期条件

$$u(0, x_1, x_2, \dots, x_n) = h_1(x_1, x_2, \dots, x_n), \quad (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \Omega \quad (1.16)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}(0, x_1, x_2, \dots, x_n) = h_2(x_1, x_2, \dots, x_n), \quad (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \Omega \quad (1.17)$$

のもとで t, x_1, x_2, \dots, x_n いずれについても C^2 級の解 $u(t, x_1, x_2, \dots, x_n)$ を持つ. ただし $g(t, x_1, x_2, \dots, x_n)$ は C^2 級, $h_1(x_1, x_2, \dots, x_n)$ は C^3 級, $h_2(x_1, x_2, \dots, x_n)$ は C^2 級の関

数である [15,55]. 波動方程式 (1.14) のソース逆問題は非同次項 $f(t, x_1, x_2, \dots, x_n)$ を解 $u(t, x_1, x_2, \dots, x_n)$ に関する情報から推定する問題である. 中でも注目されているものは, 境界 Γ における解 $u(t, x_1, x_2, \dots, x_n)$ およびその法線方向微分 $\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}(t, x_1, x_2, \dots, x_n)$ を用いて推定する問題である.

この問題に対する理論的な研究として $f(t, x_1, x_2, \dots, x_n)$ が

$$f(t, x_1, x_2, \dots, x_n) = \sigma(t) \cdot \chi(x_1, x_2, \dots, x_n) \quad (1.18)$$

の形で与えられ, $\sigma(t)$ が既知である場合に対する解の一意性および安定性に関する研究がおこなわれている [56-59]. また数値的な研究として, 二次元の場合に $f(t, x, y)$ が式 (1.18) で表現され

$$\sigma(t) = \begin{cases} h & 0 \leq t \leq T_0 \\ 0 & T_0 < t \leq T \end{cases} \quad (1.19)$$

$$\chi(x, y) = \delta(x - x_1, y - y_1) \quad (1.20)$$

で与えられる場合に対する研究がおこなわれている [60].

1.3.2 拡散方程式のソース逆問題

実 n 次元空間における有界で単連結な領域 Ω を考え, その境界は C^2 級のなめらかさをもつものとする. 領域 Ω における拡散方程式

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 u}{\partial x_j^2} = f(t, x_1, x_2, \dots, x_n), \quad t \in [0, T], (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \Omega \quad (1.21)$$

を考える. 方程式 (1.21) は, 非同次項 $f(t, x_1, x_2, \dots, x_n)$ が時間 t および空間 (x_1, x_2, \dots, x_n) について有界かつ C^1 級であるとき, Dirichlet 境界条件

$$u(t, x_1, x_2, \dots, x_n) = g(t, x_1, x_2, \dots, x_n), \quad t \in [0, T], (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \Gamma \quad (1.22)$$

および初期条件

$$u(0, x_1, x_2, \dots, x_n) = h(x_1, x_2, \dots, x_n), \quad (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \Omega \quad (1.23)$$

のもとで t について C^1 級, (x_1, x_2, \dots, x_n) について C^2 級の解 $u(t, x_1, x_2, \dots, x_n)$ を持つ. ただし $g(t, x_1, x_2, \dots, x_n)$ は C^2 級の, $h(x_1, x_2, \dots, x_n)$ は C^1 級のいずれも有界な関数である [16].

方程式 (1.21) のソース逆問題は非同次項 $f(t, x_1, x_2, \dots, x_n)$ を解 $u(t, x_1, x_2, \dots, x_n)$ に関する情報から推定する問題である. 中でも注目されているものは波動方程式と同様に,

境界 Γ における解 $u(t, x_1, x_2, \dots, x_n)$ およびその法線方向微分 $\frac{\partial u}{\partial n}(t, x_1, x_2, \dots, x_n)$ を用いて推定する問題である. 理論的なものとして $f(t, x_1, x_2, \dots, x_n)$ が

$$f(t, x_1, x_2, \dots, x_n) = \sigma(t) \cdot \chi(x_1, x_2, \dots, x_n) \quad (1.24)$$

の形で与えられ, $\sigma(t)$ が既知である場合に対する解の一意性および安定性に関する研究がおこなわれている [61-68]. また数値的な研究として, 二次元の場合に $f(t, x, y)$ が

$$f(t, x, y) = \sum_{j=1}^M \delta(x - x_j, y - y_j) \quad (1.25)$$

で与えられた場合に対する研究がおこなわれている [69-71].

1.3.3 Poisson 方程式のソース逆問題

実 n 次元空間における有界で単連結な領域 Ω を考え, その境界は C^2 級のなめらかさをもつものとする. 領域 Ω における Poisson 方程式

$$-\sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 u}{\partial x_j^2} = f(x_1, x_2, \dots, x_n), \quad (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \Omega \quad (1.26)$$

を考える. 方程式 (1.26) は, 非同次項 $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ が C^1 級である場合, Dirichlet 境界条件

$$u(x_1, x_2, \dots, x_n) = g(x_1, x_2, \dots, x_n), \quad (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \Gamma \quad (1.27)$$

のもとで C^3 級の解 $u(x_1, x_2, \dots, x_n)$ を持つ [72-74]. ただし $g(x_1, x_2, \dots, x_n)$ は C^2 級の関数である.

方程式 (1.26) のソース逆問題は非同次項 $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ を解 $u(x_1, x_2, \dots, x_n)$ に関する情報から推定する問題である. 特に注目されているものは上記の二つと同様に, 境界 Γ における解 $u(x_1, x_2, \dots, x_n)$ および法線方向微分 $\frac{\partial u}{\partial n}(x_1, x_2, \dots, x_n)$ を用いて推定する問題である. この問題に対する数学的研究として, 解の一意性を保証する $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ のモデルに関する研究と, 解の安定性に関する研究がいくつかおこなわれている [5, 46, 53, 75-78]. 数値的研究についてもいくつか報告があるが, 研究の詳細は第 2 章で述べる.

以上, 二階線形偏微分方程式のソース逆問題について述べたが, 解の一意性が保証されるための非同次項 f の制限が, 波動方程式, 拡散方程式に比較して Poisson 方程式では強いことが知られている. また得られる解の安定性も Poisson 方程式に関して得られている結果は, 波動方程式, 拡散方程式に比較して満足なものではない. またいずれの方程式に関するソース逆問題についても理論的な結果を数値的に応用した例は少なく, これからの研究課題となっている.

1.4 結言

本章では偏微分方程式の逆問題について、その定義と従来の研究について述べた。まず偏微分方程式の代表的な分類を示し、それぞれに対し工学的な応用例と数学的な研究を紹介した。さらに本論文の主題である偏微分方程式のソース (負荷) 逆問題について、二階線形偏微分方程式に対しその型別に分類し、従来の研究結果を紹介した。

偏微分方程式のソース逆問題は、解の一意性に関する理論的な研究は比較的進んでいるが、安定性に関する研究は少ない。また数値的な研究もいくつかおこなわれているが、理論的な研究成果を応用した例は少なく、これからの研究が望まれる分野である。本論文では Poisson 方程式のソース逆問題、およびこの問題に対し本質的な役割を持つ対数ポテンシャル逆問題を数値解析的な立場から考察し、その解法と誤差評価について論じる。

第 2 章

Poisson 方程式のソース逆問題

2.1 緒言

前章で述べたように偏微分方程式の逆問題は、現在の多くの工学的問題に現れる重要な問題となっており、多くの研究がおこなわれている。偏微分方程式のなかでも Poisson 方程式は重力場、静電場、定常熱伝現象などの多くの定常現象を記述する方程式として知られている。Poisson 方程式は Laplace 方程式に対する非同次方程式であり、非同次項であるソース項は境界条件とともに現象を特徴づける重要なものである。またソース項は領域内部で定義されるため、Poisson 方程式のソース逆問題は現象を引き起こす内部構造を明らかにする意味をもっている。本章では Poisson 方程式のソース逆問題に関して、現在までに得られた結果を紹介する。まず問題の定式化を示し、問題を考える際に方程式の解に関して必要な情報について述べる。次にこの問題に対する従来 of 理論的考察を示すが、問題の解の一意性が一般には成立しないことを反例により示す。またその帰結として解の一意性を保証するソース項のモデルに関する研究が重要となったが、その主な結果を紹介する。最後に問題に対する従来 of 数値的考察として、境界積分を用いた解法と境界要素法を用いた解法について述べる。

2.2 Poisson 方程式のソース逆問題

本章では実 n 次元空間 \mathbf{R}^n を考え、 \mathbf{x} を用いて \mathbf{R}^n 上の点 (x_1, x_2, \dots, x_n) を表す。領域 Ω を \mathbf{R}^n における有界で単連結な領域とし、その境界 Γ は C^3 級であるものとする。また $f(\mathbf{x})$ を Ω における可測関数とし、領域 Ω における Poisson 方程式

$$-\Delta u(\mathbf{x}) \equiv -\left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \dots + \frac{\partial^2}{\partial x_n^2}\right)u(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \Omega \quad (2.1)$$

を考える. 方程式 (2.1) は $f(\mathbf{x})$ が C^1 級の関数である時, Dirichlet 境界条件

$$u(\mathbf{x}) = g(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \Gamma \quad (2.2)$$

あるいは Neumann 境界条件

$$\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}(\mathbf{x}) = h(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \Gamma \quad (2.3)$$

に

$$-\int_{\Gamma} h(\mathbf{x}) d\Gamma(\mathbf{x}) = \int_{\Omega} f(\mathbf{x}) d\Omega(\mathbf{x}) \quad (2.4)$$

$$\int_{\Gamma} u(\mathbf{x}) d\Gamma(\mathbf{x}) = c \quad (2.5)$$

を付加した条件のもとで, 領域 Ω において C^3 級の解 $u(\mathbf{x})$ をただ一つ持つことが知られている [72-74]. ここで $\frac{\partial}{\partial \mathbf{n}}$ は境界 Γ における外向き法線方向微分を表す. また $g(\mathbf{x})$ および $h(\mathbf{x})$ は C^2 級の関数で, c は定数である.

通常 “Poisson 方程式を解く” とは, ソース項 $f(\mathbf{x})$ を既知とし, 方程式 (2.1) および Dirichlet 境界条件あるいは Neumann 境界条件を満たす関数 $u(\mathbf{x})$ を求めることを指す. これを Poisson 方程式の順問題と呼ぶ. これに対しソース逆問題は, ソース項 $f(\mathbf{x})$ を未知とし, これを境界条件および解 $u(\mathbf{x})$ に関する何らかの付加情報を用いて推定することを指す. さて解 $u(\mathbf{x})$ に関する付加情報を考える場合, 工学に現れる問題では対象物の内部に情報を得るための測定器を置くことは困難であり, また対象物の破壊につながる場合が考えられる. そのため対象物の表面, すなわち領域の境界における情報のもとで問題を考えることが重要となる. 以下では解に関する情報として, 境界上における解 $u(\mathbf{x})$ およびその法線方向微分 $\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}(\mathbf{x})$ が与えられたもとにおける Poisson 方程式のソース逆問題を考え, この問題を単に “Poisson 方程式のソース逆問題” と呼ぶ. 本節の最後に本論文で考察する Poisson 方程式のソース逆問題を数学的に定式化し, その順問題との比較を図 2.1 に示す.

[問題](Poisson 方程式のソース逆問題)

領域 Ω で定義された関数 $f(\mathbf{x})$, $u(\mathbf{x})$, および境界 Γ 上で定義された関数 $\varphi(\mathbf{x})$, $\psi(\mathbf{x})$ が次の関係式を満たすものとする.

$$-\Delta u(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \Omega \quad (2.6)$$

$$u(\mathbf{x}) = \varphi(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \Gamma \quad (2.7)$$

$$\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}(\mathbf{x}) = \psi(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \Gamma \quad (2.8)$$

ここで $\varphi(\mathbf{x})$, $\psi(\mathbf{x})$ を与えたとき, $f(\mathbf{x})$ を決定せよ.

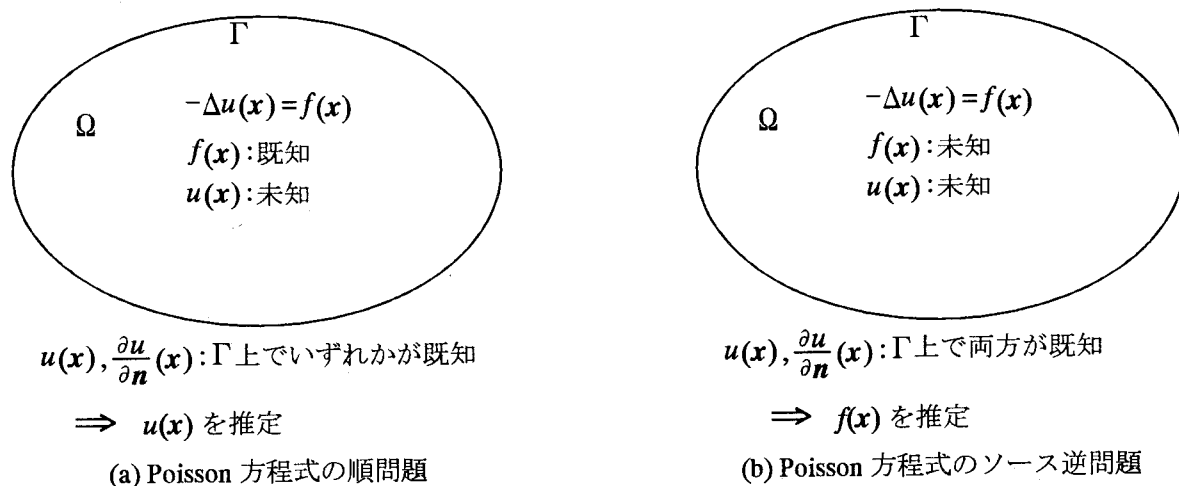


図 2.1 Poisson 方程式の順問題とソース逆問題

2.3 Poisson 方程式のソース逆問題に関する従来の理論的考察

まず Poisson 方程式のソース逆問題に関する従来の理論的研究について述べる. 数学的には問題の解の存在および一意性に関する研究があげられるが, この逆問題に関しては主として解の一意性に関する研究がおこなわれてきた. 本節では, 現在までに得られている解の一意性に関する主な結果を紹介する.

2.3.1 Poisson 方程式のソース逆問題の解の一意性に関する反例

Poisson 方程式のソース逆問題において, 解 u に関する情報として $u(\mathbf{x})$ が領域 Ω 全体において与えられている場合, 問題は

$$-\left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \cdots + \frac{\partial^2}{\partial x_n^2}\right) u(\mathbf{x}) \quad (2.9)$$

を計算することに帰着する. また問題の解の一意性もあきらかである. しかし前節で述べたように, 工学的な問題において解 $u(\mathbf{x})$ を対象領域内全体において測定することは困難であり, 境界における測定値のみが得られる場合が多い. したがって図 2.1 に示したように, 対象領域の境界における解 $u(\mathbf{x})$ およびその法線方向微分 $\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}(\mathbf{x})$ の値 $\varphi(\mathbf{x}), \psi(\mathbf{x})$ から $f(\mathbf{x})$ を求めることが重要となる. しかしこの場合, 与えられた $\varphi(\mathbf{x}), \psi(\mathbf{x})$ に対するソース項 $f(\mathbf{x})$ の一意性は一般に保証できない. このことを例により示す.

<例 2.1>

2次元領域 $\Omega = \{(x, y) | x^2 + y^2 < 1\}$ における Poisson 方程式のソース逆問題を考える.
ソース項として

$$f_1(x, y) = \begin{cases} 1, & \sqrt{x^2 + y^2} \leq 1/2 \\ 0, & \sqrt{x^2 + y^2} > 1/2 \end{cases} \quad (2.10)$$

および

$$f_2(x, y) = \begin{cases} 4, & \sqrt{x^2 + y^2} \leq 1/4 \\ 0, & \sqrt{x^2 + y^2} > 1/4 \end{cases} \quad (2.11)$$

の 2つを考え, Poisson 方程式

$$-\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right) u_i(x, y) = f_i(x, y), \quad (x, y) \in \Omega, \quad i = 1, 2 \quad (2.12)$$

の Dirichlet 境界条件

$$u_i(x, y) = 0, \quad (x, y) \in \Gamma, \quad i = 1, 2 \quad (2.13)$$

のもとでの解 $u_i(x, y)$ を考える. 解 $u_1(x, y)$, $u_2(x, y)$ はそれぞれ

$$u_1(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{8} \ln 2 + \frac{1}{16}(1 - 4(x^2 + y^2)), & \sqrt{x^2 + y^2} \leq 1/2 \\ -\frac{1}{8} \ln(x^2 + y^2), & \sqrt{x^2 + y^2} > 1/2 \end{cases} \quad (2.14)$$

$$u_2(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{8} \ln 4 + \frac{1}{16}(1 - 16(x^2 + y^2)), & \sqrt{x^2 + y^2} \leq 1/4 \\ -\frac{1}{8} \ln(x^2 + y^2), & \sqrt{x^2 + y^2} > 1/4 \end{cases} \quad (2.15)$$

で表され, 境界における法線方向微分は

$$\frac{\partial u_1}{\partial \mathbf{n}}(x, y) = \frac{\partial u_2}{\partial \mathbf{n}}(x, y) = -\frac{1}{8}, \quad (x, y) \in \Gamma \quad (2.16)$$

となる. したがって, $u(x, y)$, $\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}(x, y)$ が境界上で一致するにも関わらず $f_1(x, y) \neq f_2(x, y)$ であり, ソース項 $f(x, y)$ が $f_1(x, y)$, $f_2(x, y)$ いずれであるかを決定することは不可能である.

2.3.2 逆問題の解の一意性に関する諸定理

例 2.1 に示したように, Poisson 方程式のソース逆問題において解の一意性は一般に成立しない. このことから問題に対する解の一意性が保証されるため, ソース項 $f(\mathbf{x})$ が属する関数の族に関する研究が数多くおこなわれた. なかでも次に示す必要十分条件はもっとも重要なものである.

[定理 2.1] (Novikov, 1938)[5]

関数 $f_1(\mathbf{x})$ および $f_2(\mathbf{x})$ を Ω 内の有界な可測関数とする. このとき Poisson 方程式

$$-\Delta u(\mathbf{x}) = f_i(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad i = 1, 2 \quad (2.17)$$

の Dirichlet 境界値問題あるいは Neumann 境界値問題の解 $u_i(\mathbf{x})$, $i = 1, 2$ に対し

$$u_1(\mathbf{x}) = u_2(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \Gamma \quad (2.18)$$

$$\frac{\partial u_1}{\partial \mathbf{n}}(\mathbf{x}) = \frac{\partial u_2}{\partial \mathbf{n}}(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \Gamma \quad (2.19)$$

が成立するための必要十分条件は, Ω 内の任意の調和関数, すなわち

$$\Delta v(\mathbf{x}) = 0, \quad \mathbf{x} \in \Omega \quad (2.20)$$

を満たす関数 $v(\mathbf{x})$ に対し

$$\int_{\Omega} f_1(\mathbf{x})v(\mathbf{x})d\Omega(\mathbf{x}) = \int_{\Omega} f_2(\mathbf{x})v(\mathbf{x})d\Omega(\mathbf{x}) \quad (2.21)$$

が成立することである.

定理 2.1 はソース項 $f(\mathbf{x})$ がある関数族の元であるとき, その族において逆問題の解の一意性が成立するための必要十分条件を示している. しかし, 解の一意性が成立するような族の具体的な表現については述べていない. このことから定理 2.1 を満たすソース項 $f(\mathbf{x})$ を表す具体的なモデルに関する研究がおこなわれた. 以下の定理はその主な結果である. なお以下の定理において, ソース項 $f(\mathbf{x})$ は第 2.2 節に示した Poisson 方程式の解の存在条件を満たさないが, 区分的に C^3 級の解をもつことを示すことができる.

[定理 2.2] (Novikov, 1938)[5]

ソース項 $f_i(\mathbf{x})$, $i = 1, 2$ が次の条件を満たしているものとする.

1. ソース項 $f_i(\mathbf{x})$ は D_i を Ω 内の領域として,

$$f_i(\mathbf{x}) = \rho \cdot \chi_{D_i}(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad i = 1, 2 \quad (2.22)$$

で表される. ここで ρ は 0 でない実数で, $\chi_D(\mathbf{x})$ は領域 D の定義関数, すなわち

$$\chi_D(\mathbf{x}) = \begin{cases} 1, & \mathbf{x} \in D \\ 0, & \mathbf{x} \notin D \end{cases} \quad (2.23)$$

である.

2. 領域 D_i の境界 ∂D_i は Ω 内のある点 P を中心とした極座標 (r, θ) ,
 $(\theta = (\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_{n-1}))$ を用いて θ に関する一価関数 $r_i(\theta)$ により

$$\partial D_i = \{(r, \theta) \mid r = r_i(\theta)\}, \quad i = 1, 2 \quad (2.24)$$

で表される.

このとき Poisson 方程式 (2.17) の Dirichlet 境界値問題あるいは Neumann 境界値問題の解 $u_i(\mathbf{x})$ について式 (2.18), (2.19) が成立するならば, $D_1 = D_2$ である.

[定理 2.3] (Prelepko, 1966)[79]

ソース項 $f_i(\mathbf{x})$, $i = 1, 2$ が次の条件を満たしているものとする.

1. ソース項 $f_i(\mathbf{x})$ は D_i を Ω 内の領域として,

$$f_i(\mathbf{x}) = \rho(\mathbf{x}) \cdot \chi_{D_i}(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad i = 1, 2 \quad (2.25)$$

で表される.

2. 定理 2.2 の条件 2 を満たす.
 3. 関数 $\rho(\mathbf{x})$ は条件 2 で用いた極座標に対し

$$\rho(r, \theta) > 0 \quad (2.26)$$

$$\frac{\partial}{\partial r}(r^n \rho(r, \theta)) > 0 \quad (2.27)$$

を満たす.

このとき Poisson 方程式 (2.17) の Dirichlet 境界値問題あるいは Neumann 境界値問題の解 $u_i(\mathbf{x})$ について, 式 (2.18), (2.19) が成立するならば, $D_1 = D_2$ である.

[定理 2.4] (Prelepko, 1967)[80]

ソース項 $f_i(\mathbf{x})$, $i = 1, 2$ が次の条件を満たしているものとする.

1. 定理 2.3 の条件 1 を満たす.
 2. 定理 2.2 の条件 2 を満たす.
 3. 関数 $\rho(\mathbf{x})$ は関数 λ, μ を用いて

$$\rho(\mathbf{x}) = \lambda(\mathbf{x})\mu(\mathbf{x}) \quad (2.28)$$

で表される. ただし, $\rho(\mathbf{x}) \neq 0$ であり, 関数 λ, μ は条件 2 で用いた極座標に対し

$$\frac{\partial \lambda}{\partial r} = 0 \quad (2.29)$$

および

$$\mu(r, \theta) > 0 \quad (2.30)$$

$$\frac{\partial}{\partial r}(r^n \mu(r, \theta)) > 0 \quad (2.31)$$

を満たす.

このとき Poisson 方程式 (2.17) の Dirichlet 境界値問題あるいは Neumann 境界値問題の解 $u_i(\mathbf{x})$ について式 (2.18), (2.19) が成立するならば, $D_1 = D_2$ である.

[定理 2.5] (Strakhov and Brodsky, 1986)[75]

領域 Ω を 2次元の有界で単連結かつなめらかな境界を持つ領域とし, ソース項 $f_i(x, y)$, $i = 1, 2$ は次の条件を満たしているものとする.

1. ソース項 $f_i(x, y)$ は D_i を Ω 内の領域として,

$$f_i(x, y) = \rho \cdot \chi_{D_i}(x, y) \quad (2.32)$$

で表される. ただし ρ は 0 でない実数である.

2. 領域 D_i , $i = 1, 2$ はいずれも多角形で, $D_1 \cap D_2$ および $\Omega \setminus \{\overline{D_1} \cup \overline{D_2}\}$ はいずれも連結である.

このとき Poisson 方程式 (2.17) の Dirichlet 境界値問題あるいは Neumann 境界値問題の解 $u_i(x, y)$ について式 (2.18), (2.19) が成立するならば, $D_1 = D_2$ である.

[定理 2.6] (Brodsky, 1986)[81]

領域 Ω を 3次元の有界で単連結かつなめらかな境界を持つ領域とし, ソース項 $f_i(x, y, z)$, $i = 1, 2$ は次の条件を満たしているものとする.

1. ソース項 $f_i(x, y, z)$, $i = 1, 2$ は D_i , $i = 1, 2$ を Ω 内の領域として,

$$f_i(x, y, z) = \rho \cdot \chi_{D_i}(x, y, z), \quad i = 1, 2 \quad (2.33)$$

で表される. ただし ρ は 0 でない実数である.

2. 領域 D_i ($i = 1, 2$) はいずれも多面体で, $D_1 \cap D_2$ および $\Omega \setminus \{\overline{D_1} \cup \overline{D_2}\}$ はいずれも連結である.

このとき Poisson 方程式 (2.17) の Dirichlet 境界値問題あるいは Neumann 境界値問題の解 $u_i(x, y, z)$ に対し式 (2.18), (2.19) が成立するならば, $D_1 = D_2$ である.

[定理 2.7] (Stromeyer and Ballani, 1984)[6]

領域 Ω を 2次元の有界で単連結かつなめらかな境界を持つ領域とし, ソース項 $f_i(x, y)$, $i = 1, 2$ は Ω 内の点集合 $\{(x_{1,j}, y_{1,j}), j = 1, 2, \dots, N_1\}$ および $\{(x_{2,j}, y_{2,j}), j = 1, 2, \dots, N_2\}$ を用いて, それぞれ

$$f_1(x, y) = \sum_{j=1}^{N_1} q_{1,j} \delta(x - x_{1,j}, y - y_{1,j}) \quad (2.34)$$

$$f_2(x, y) = \sum_{j=1}^{N_2} q_{2,j} \delta(x - x_{2,j}, y - y_{2,j}) \quad (2.35)$$

で表されているものとする. ただし $q_{i,j} \neq 0$ であり, $\delta(x, y)$ は 2次元の Dirac の delta 関数を表す. このとき Poisson 方程式 (2.17) の Dirichlet 境界値問題あるいは Neumann 境界値問題の解 $u_i(x, y)$ に対し式 (2.18), (2.19) が成立するならば, $\{(x_{1,j}, y_{1,j})\} = \{(x_{2,j}, y_{2,j})\}$ である. また各 $(x_{1,j}, y_{1,j})$ に対応する $\{(x_{2,j}, y_{2,j})\}$ 内の点をあらためて $(x_{2,j}, y_{2,j})$ とおくと, $q_{1,j} = q_{2,j}$ が成り立つ.

[定理 2.8] (Stromeyer and Ballani, 1984)[6]

領域 Ω を 3次元の有界で単連結かつなめらかな境界を持つ領域とし, ソース項 $f_i(x, y, z)$, $i = 1, 2$ は Ω 内の点集合 $\{(x_{1,j}, y_{1,j}, z_{1,j}), j = 1, 2, \dots, N_1\}, \{(x_{2,j}, y_{2,j}, z_{2,j}), j = 1, 2, \dots, N_2\}$ を用いて, それぞれ

$$f_1(x, y, z) = \sum_{j=1}^{N_1} q_{1,j} \delta(x - x_{1,j}, y - y_{1,j}, z - z_{1,j}) \quad (2.36)$$

$$f_2(x, y, z) = \sum_{j=1}^{N_2} q_{2,j} \delta(x - x_{2,j}, y - y_{2,j}, z - z_{2,j}) \quad (2.37)$$

で表されているものとする. ただし $q_{i,j} \neq 0$ であり, $\delta(\cdot)$ は 3次元の Dirac の delta 関数を表す. このとき Poisson 方程式 (2.17) の Dirichlet 境界値問題あるいは Neumann 境界値問題の解 $u_i(x, y, z)$ に対し式 (2.18), (2.19) が成立するならば, $\{(x_{1,j}, y_{1,j}, z_{1,j})\} = \{(x_{2,j}, y_{2,j}, z_{2,j})\}$ である. また各 $(x_{1,j}, y_{1,j}, z_{1,j})$ に対応する $\{(x_{2,j}, y_{2,j}, z_{2,j})\}$ 内の点をあらためて $(x_{2,j}, y_{2,j}, z_{2,j})$ とおくと, $q_{1,j} = q_{2,j}$ が成り立つ.

以上の定理のほかにもいくつかの結果があるが, ここでは省略する [82-84]. 以上の定理のうち, 定理 2.2 から定理 2.4 はすべてソース項が

$$f(\mathbf{x}) = \rho(\mathbf{x}) \chi_D(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \Omega \quad (2.38)$$

で表され, さらに領域 D の境界 ∂D が Ω 内のある点 P を中心とした極座標 (r, θ) を用いて, θ に関する一価関数 $r(\theta)$ により

$$\partial D = \{(r, \theta) \mid r = r(\theta)\} \quad (2.39)$$

で表されている: このソース項のモデルは領域 D の形が星型になっていることから star-shape model と呼ばれる. また, 定理 2.7 および 2.8 のソース項のモデルは, 質点あるいは点電荷が領域内に散在している状態を表すものと考えられ, point-mass model と呼ばれる. 図 2.2 に 2次元の場合の star-shape model と point-mass model を示す.

上に述べた定理は逆問題の解の一意性を保証する具体的なモデルを表している. しかし証明には背理法を用いており, これらのモデルを用いた場合に対する解法については述べていない. このことからその具体的な解法に対する研究が重要となっている.

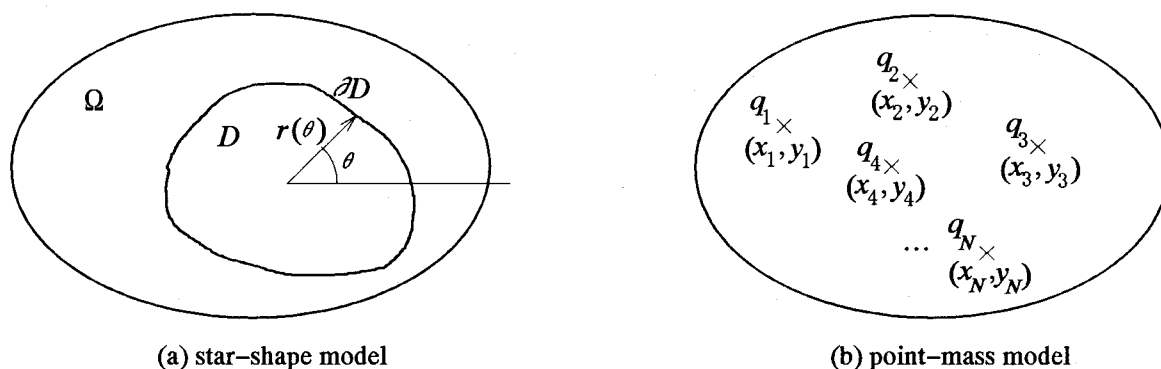


図 2.2 Star-shape model と point-mass model

2.4 Poisson 方程式のソース逆問題に関する従来の数値的考察

Poisson 方程式のソース逆問題に関する数値的研究は, 数学的な解の一意性に関する研究と比較して数少ない. この原因は多くの逆問題において生じる問題の不適切性が, Poisson 方程式のソース逆問題にも現れるためと考えられる. この不適切性は第 4 章で述べる. 本節では最近提案された 2 つの数値解法を紹介する.

2.4.1 境界積分を用いた数値解法

領域 Ω における Poisson 方程式

$$-\Delta u(x) = f(x), \quad x \in \Omega \quad (2.40)$$

と Laplace 方程式

$$-\Delta v(\mathbf{x}) = 0, \quad \mathbf{x} \in \Omega \quad (2.41)$$

を考える. 式 (2.41) において Δ が自己随伴作用素であることから, Laplace 方程式はそれ自身の随伴方程式になっている. ここで方程式 (2.41) を満たす関数, すなわち調和関数 $v(\mathbf{x})$ を考え, 式 (2.40) の両辺にかけ, 領域 Ω において積分すると

$$-\int_{\Omega} v(\mathbf{x}) \Delta u(\mathbf{x}) d\Omega(\mathbf{x}) = \int_{\Omega} v(\mathbf{x}) f(\mathbf{x}) d\Omega(\mathbf{x}) \quad (2.42)$$

となる. さらに左辺に対し Gauss-Green の定理を用いると

$$-\int_{\Gamma} v(\mathbf{x}) \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}(\mathbf{x}) d\Gamma(\mathbf{x}) + \int_{\Gamma} \frac{\partial v}{\partial \mathbf{n}}(\mathbf{x}) u(\mathbf{x}) d\Gamma(\mathbf{x}) = \int_{\Omega} v(\mathbf{x}) f(\mathbf{x}) d\Omega(\mathbf{x}) \quad (2.43)$$

を得る. したがって境界上における $u(\mathbf{x})$ および $\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}(\mathbf{x})$ の値からソース項 $f(\mathbf{x})$ に関する情報として

$$\int_{\Omega} v(\mathbf{x}) f(\mathbf{x}) d\Omega(\mathbf{x}) \quad (2.44)$$

を得ることができる. 久保らは $f(\mathbf{x})$ をいくつかのパラメータを用いて表し, $v(\mathbf{x})$ として適当な個数の調和関数を取って式 (2.43) の左辺を計算することにより, パラメータに関する方程式が得られることを示した. さらに得られた方程式を解くことにより逆問題を解く方法を提案している [29]. この方法は, 定理 2.1 による必要十分条件を直接に用いている点で注目される方法である. 彼らは数値例として単一の point mass が矩形領域内にある場合を考え, 方法の有効性を示した.

また, 2次元 Poisson 方程式のソース逆問題について, ソース項が複数個の point mass からなる point-mass model で表される場合に対し, 調和関数として極座標表現を用いて

$$c_n(r, \theta) = r^n \cos n\theta, \quad n = 1, 2, \dots \quad (2.45)$$

$$s_n(r, \theta) = r^n \sin n\theta, \quad n = 1, 2, \dots \quad (2.46)$$

で表される関数を用いた反復解法を山谷らが提案している [85].

2.4.2 境界要素法を用いた数値解法

Poisson 方程式からは離れるが, 次章で述べる境界要素法を用いた逆問題の数値解法と関連して, 拡散方程式のソース逆問題の境界要素法を用いた数値解法に関する結果を紹介する.

領域 Ω を R^n における有界で単連結な領域とし, その境界 Γ は C^2 級であるものとする. 領域 Ω における拡散方程式

$$\frac{\partial u}{\partial t}(t, \mathbf{x}) - \Delta u(t, \mathbf{x}) = f(t, \mathbf{x}), \quad 0 \leq t \leq T, \quad \mathbf{x} \in \Omega \quad (2.47)$$

のソース逆問題を考える. 式 (2.47) の両辺に拡散方程式の基本解

$$u^*(t, \mathbf{x}; t', \mathbf{x}') = \frac{1}{4\pi(t-t')^{n/2}} \exp\left\{-\frac{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|^2}{4(t-t')}\right\} \quad (2.48)$$

をかけ, t' について $[0, t]$ で, \mathbf{x}' について Ω で積分すると

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \int_0^t u^*(t, \mathbf{x}; t', \mathbf{x}') \left(\frac{\partial u}{\partial t}(t', \mathbf{x}') - \Delta u(t', \mathbf{x}') \right) dt' d\Omega(\mathbf{x}') \\ &= \int_{\Omega} \int_0^t u^*(t, \mathbf{x}; t', \mathbf{x}') f(t', \mathbf{x}') dt' d\Omega(\mathbf{x}'), \end{aligned} \quad (2.49)$$

となる. ただし

$$|\mathbf{x}-\mathbf{x}'| = \left\{ \sum_{j=1}^n (x_j - x'_j)^2 \right\}^{1/2} \quad (2.50)$$

である. さらに式 (2.49) の左辺に対し, 領域 Ω における Gauss-Green の定理を用いると, 拡散方程式 (2.47) の解 $u(t, \mathbf{x})$ に関し

$$\begin{aligned} & c(\mathbf{x})u(t, \mathbf{x}) - \int_{\Gamma} \int_0^t u^*(t, \mathbf{x}; t', \mathbf{x}') \frac{\partial u}{\partial n}(t', \mathbf{x}') dt' d\Gamma(\mathbf{x}') \\ &+ \int_{\Gamma} \int_0^t \frac{\partial u^*}{\partial n(t, \mathbf{x})}(t, \mathbf{x}; t', \mathbf{x}') u(t', \mathbf{x}') dt' d\Gamma(\mathbf{x}') + \left[\int_{\Omega} u^*(t, \mathbf{x}; t', \mathbf{x}') u(t, \mathbf{x}) d\Omega(\mathbf{x}') \right]_{t'=0}^{t'=t} \\ &= \int_{\Omega} \int_0^t u^*(t, \mathbf{x}; t', \mathbf{x}') f(t', \mathbf{x}') dt' d\Omega(\mathbf{x}') \end{aligned} \quad (2.51)$$

なる表現を得る. ただし

$$c(\mathbf{x}) = \begin{cases} 1, & \mathbf{x} \in \Omega \\ \frac{1}{2}, & \mathbf{x} \in \Gamma \end{cases} \quad (2.52)$$

である. 式 (2.51) を拡散方程式の積分表現と呼ぶ.

未知のソース項 $f(t, \mathbf{x})$ が既知関数 $Z_i(t, \mathbf{x})$ の線形結合として

$$f(t, \mathbf{x}) = \sum_k^N a_k Z_k(t, \mathbf{x}) \quad (2.53)$$

で表されている場合を考える. 境界における $u(t, \mathbf{x})$ および $\frac{\partial u}{\partial n}(t, \mathbf{x})$ の値を与えることにより式 (2.51) の左辺を計算することができ, さらに式 (2.53) を式 (2.51) に代入すれば, パラメータ a_k に関する方程式が得ることができる. この方程式を a_k について解くことにより逆問題を解く方法を大中らは提案した [69-71]. 彼らは数値例として, 2次元拡散方程式のソース逆問題においてソース項が

$$f(t, \mathbf{x}) = a\delta(\mathbf{x}-\xi) \quad (2.54)$$

で表される場合を考え, 境界上の点 \boldsymbol{x}_j , $j = 1, 2, \dots, M$ において

$$\begin{aligned}
 g(t, \boldsymbol{x}_j) \equiv & \int_{\Gamma} \int_0^t u^*(t, \boldsymbol{x}_j; t', \boldsymbol{x}') \frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}}(t', \boldsymbol{x}') dt' d\Gamma(\boldsymbol{x}') \\
 & - \int_{\Gamma} \int_0^t \frac{\partial u^*}{\partial \boldsymbol{n}(t', \boldsymbol{x}')} (t, \boldsymbol{x}_j; t', \boldsymbol{x}') u(t', \boldsymbol{x}') dt' d\Gamma(\boldsymbol{x}') \\
 & - \left[\int_{\Omega} u^*(t, \boldsymbol{x}_j; t', \boldsymbol{x}') u(t', \boldsymbol{x}') d\Omega(\boldsymbol{x}') \right]_{t'=0}^{t'=t} \\
 & + \int_{\Omega} \int_0^t u^*(t, \boldsymbol{x}_j; t', \boldsymbol{x}') f(t', \boldsymbol{x}') dt' d\Omega(\boldsymbol{x}'), \tag{2.55}
 \end{aligned}$$

を境界要素法により計算した. さらに $g(t, \boldsymbol{x}_j)$ と境界上における $u(t, \boldsymbol{x}_j)$ との差を

$$J(t) = \sum_{j=1}^M \left\{ \frac{c(\boldsymbol{x}_j)u(t, \boldsymbol{x}_j) - g(t, \boldsymbol{x}_j)}{c(\boldsymbol{x}_j)u(t, \boldsymbol{x}_j)} \right\}^2 \tag{2.56}$$

により評価し, $J(t)$ を最小化するパラメータ a および ξ を非線形最適化により求めた結果を示した. なお大中らはこの方法を波動方程式に対しても適用し, その有効性を示している [60].

2.5 結 言

本章では Poisson 方程式のソース逆問題についてその解の一意性に関する理論的結果といくつかの数値解法について述べた. しかし解の一意性に関する理論的結果を数値的に応用した例は少ない. また数値解法についても, 方法の実用的な有効性については議論されているが, 手法の安定性や収束性, および誤差評価という点についてはほとんど議論されていない. これは逆問題の数値的研究全体にいえることである. したがって, 理論的研究と数値的研究の橋渡しとして, 数学的な解の一意性に関する結果を考慮したアルゴリズム, およびその数値的な収束性および誤差評価に関する研究が必要となっている.

第 3 章

Poisson 方程式のソース逆問題と対数ポテンシャル逆問題

3.1 緒言

ソース項を持つ偏微分方程式の解は、一般にソース項に関する特殊解と、同次方程式に関する一般解から構成されている。偏微分方程式のソース逆問題を考える場合、注目するソース項に関する情報を持つものは上記のうち特殊解である。したがって解の中から一般解を除去し、特殊解のみを取り出すことができればソース逆問題を考察する上で都合がよい。Poisson 方程式においては特殊解として 2次元の場合は対数ポテンシャル、3次元以上の場合には Newton ポテンシャルを、一般解としては調和関数を考えることができる。本章の前半部では、Poisson 方程式の積分方程式表現を用いることにより、解の中から一般解である調和関数項を除去し、対数 (Newton) ポテンシャルを取り出すことが可能であることを導く。さらに Poisson 方程式のソース逆問題が境界上における対数 (Newton) ポテンシャルを生成するソース項を求める問題と等価であることを示す定理を与える。なお対数 (Newton) ポテンシャルからそれを生成するソース項を求める問題は対数 (Newton) ポテンシャル逆問題と呼ばれる。

本章の後半部では 2次元の場合に注目し、対数ポテンシャル逆問題に対する従来の研究結果について述べる。まず対数ポテンシャル逆問題と Poisson 方程式のソース逆問題の等価性を用いて、対数ポテンシャル逆問題の解の一意性を保証するいくつかのソースモデルを示す。また理論的によく研究されているソースモデルのうち star-shape model を用いる際に生ずる問題の不適切性について述べる。さらにもう一つの重要なモデルである point-mass model について順問題的な応用である代用電荷法にふれ、その対数ポテンシ

ル逆問題との関連について述べる.

3.2 Poisson 方程式の積分方程式による表現

本章も前章と同様に実 n 次元空間 \mathbf{R}^n を考え, \mathbf{x} を用いて \mathbf{R}^n 上の点 (x_1, x_2, \dots, x_n) を表す. 有界で C^2 級のなめらかさの境界を持つ領域 $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ における Laplace 演算子 Δ に対し, 超関数の意味で

$$-\Delta u^*(\mathbf{x}; \mathbf{x}') = \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \quad (3.1)$$

を満たす関数 $u^*(\mathbf{x}; \mathbf{x}')$ を考える. このような関数 $u^*(\mathbf{x}; \mathbf{x}')$ は $\mathbf{x} = \mathbf{x}'$ を特異点として持ち $\mathbf{x} \neq \mathbf{x}'$ において C^∞ 級の関数である. さらに関数 $f(\mathbf{x})$ が C^∞ 級でその support が Ω に含まれる場合, 関数

$$v(\mathbf{x}) \equiv \int_{\Omega} f(\mathbf{x}') u^*(\mathbf{x}; \mathbf{x}') d\Omega(\mathbf{x}') \quad (3.2)$$

は微分方程式

$$-\Delta v(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}) \quad (3.3)$$

を満たすことが知られている. 関数 $u^*(\mathbf{x}; \mathbf{x}')$ は Laplace 方程式の基本解と呼ばれる. 基本解 $u^*(\mathbf{x}; \mathbf{x}')$ は具体的なものとして

$$u^*(\mathbf{x}; \mathbf{x}') = \begin{cases} -\frac{1}{2\pi} \ln |\mathbf{x} - \mathbf{x}'|, & n = 2 \\ \frac{\Gamma(\nu)}{4\pi^{\nu+1}} |\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^{2-n}, & n \geq 3 \end{cases} \quad (3.4)$$

で表現されるものがよく用いられる. ここで $\Gamma(\cdot)$ は gamma 関数であり,

$$|\mathbf{x} - \mathbf{x}'| = \left\{ \sum_{j=1}^N (x_j - x'_j)^2 \right\}^{1/2} \quad (3.5)$$

$$\nu = (n-2)/2 \quad (3.6)$$

である.

次に同一の領域 Ω における Poisson 方程式

$$-\Delta u(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \Omega \quad (3.7)$$

を考える. 方程式 (3.7) の両辺に Laplace 方程式の基本解 $u^*(\mathbf{x}; \mathbf{x}')$ をかけ, \mathbf{x}' について Ω で積分すると

$$-\int_{\Omega} u^*(\mathbf{x}; \mathbf{x}') \Delta u(\mathbf{x}') d\Omega(\mathbf{x}') = \int_{\Omega} u^*(\mathbf{x}; \mathbf{x}') f(\mathbf{x}') d\Omega(\mathbf{x}') \quad (3.8)$$

となる. 左辺は Gauss-Green の定理より, \boldsymbol{x} が Ω の内点のとき

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} u^*(\boldsymbol{x}; \boldsymbol{x}') \Delta u(\boldsymbol{x}') d\Omega(\boldsymbol{x}') \\ &= -u(\boldsymbol{x}) + \int_{\Gamma} u^*(\boldsymbol{x}; \boldsymbol{x}') \frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}}(\boldsymbol{x}') d\Gamma(\boldsymbol{x}') - \int_{\Gamma} \frac{\partial u^*(\boldsymbol{x}; \boldsymbol{x}')}{\partial \boldsymbol{n}(\boldsymbol{x})} u(\boldsymbol{x}') d\Gamma(\boldsymbol{x}') \end{aligned} \quad (3.9)$$

\boldsymbol{x} が Ω の境界上の点であるとき

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} u^*(\boldsymbol{x}; \boldsymbol{x}') \Delta u(\boldsymbol{x}') d\Omega(\boldsymbol{x}') \\ &= -\frac{1}{2}u(\boldsymbol{x}) + \int_{\Gamma} u^*(\boldsymbol{x}; \boldsymbol{x}') \frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}}(\boldsymbol{x}') d\Gamma(\boldsymbol{x}') - \int_{\Gamma} \frac{\partial u^*(\boldsymbol{x}; \boldsymbol{x}')}{\partial \boldsymbol{n}(\boldsymbol{x})} u(\boldsymbol{x}') d\Gamma(\boldsymbol{x}') \end{aligned} \quad (3.10)$$

に変形することができる. 式 (3.9), (3.10) において関数 $c(\boldsymbol{x})$ を

$$c(\boldsymbol{x}) = \begin{cases} 1, & \boldsymbol{x} \in \Omega \\ \frac{1}{2}, & \boldsymbol{x} \in \Gamma \end{cases} \quad (3.11)$$

と定義すると, Poisson 方程式 (3.7) の解 $u(\boldsymbol{x})$ に関する方程式

$$\begin{aligned} c(\boldsymbol{x})u(\boldsymbol{x}) + \int_{\Gamma} \frac{\partial u^*(\boldsymbol{x}; \boldsymbol{x}')}{\partial \boldsymbol{n}(\boldsymbol{x})} u(\boldsymbol{x}') d\Gamma(\boldsymbol{x}') - \int_{\Gamma} u^*(\boldsymbol{x}; \boldsymbol{x}') \frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}}(\boldsymbol{x}') d\Gamma(\boldsymbol{x}') \\ = \int_{\Omega} u^*(\boldsymbol{x}; \boldsymbol{x}') f(\boldsymbol{x}') d\Omega(\boldsymbol{x}') \end{aligned} \quad (3.12)$$

を得る. 方程式 (3.12) を Poisson 方程式の積分方程式表現, あるいは単に積分表現という. 特に \boldsymbol{x} が境界 Γ 上の点の場合には境界積分方程式表現, あるいは境界積分表現という [72,73].

3.3 境界積分表現による調和項の除去

演算子 L を境界条件および初期条件などを考慮した線形微分作用素とし, 非同次項を持つ線形微分方程式

$$Lu = f \quad (3.13)$$

を考える. 方程式 (3.13) の解 u は一般に, 同次方程式

$$Lu_0 = 0 \quad (3.14)$$

の解 u_0 と非同次方程式の特殊解 u_f を用いて

$$u = u_0 + u_f \quad (3.15)$$

で表現される. 式 (3.14) より, 解 u の成分のうち u_0 はソース項 f に関する情報をもっておらず, ソース逆問題にとって一種の擾乱として働くことがわかる. したがって, 成分 u_0 を何らかの形で取り除くことができれば, ソース項に関する情報を含む成分 u_f のみを考えることができ, ソース逆問題を考える上で都合がよい. 本節では Poisson 方程式の場合に対し, 境界積分方程式表現を用いて同次方程式の解 u_0 を除去することが可能であることを示す.

Poisson 方程式の同次方程式は Laplace 方程式であり, Laplace 方程式を満たす関数は調和関数と呼ばれる. このことから Poisson 方程式の解 $u(\mathbf{x})$ は調和関数 $u_H(\mathbf{x})$ と特殊解 $u_f(\mathbf{x})$ を用いて

$$u(\mathbf{x}) = u_H(\mathbf{x}) + u_f(\mathbf{x}) \quad (3.16)$$

で表される. ここで

$$u_L(\mathbf{x}) \equiv \int_{\Omega} f(\mathbf{x}') u^*(\mathbf{x}; \mathbf{x}') d\Omega(\mathbf{x}'), \quad \mathbf{x} \in \Omega \quad (3.17)$$

とおくと, $u_L(\mathbf{x})$ は Poisson 方程式を Ω の各点でみたすことが知られており, Poisson 方程式の特殊解 $u_f(\mathbf{x})$ として用いることができる. 関数 $u_L(\mathbf{x})$ を用いると, Poisson 方程式の境界積分表現は

$$u_L(\mathbf{x}) = \frac{1}{2}u(\mathbf{x}) + \int_{\Gamma} \frac{\partial u^*(\mathbf{x}; \mathbf{x}')}{\partial \mathbf{n}(\mathbf{x})} u(\mathbf{x}') d\Gamma(\mathbf{x}') - \int_{\Gamma} u^*(\mathbf{x}; \mathbf{x}') \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}(\mathbf{x}') d\Gamma(\mathbf{x}') \quad (3.18)$$

で表される. 式 (3.18) は, 境界 Γ における $u(\mathbf{x})$ および $\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}(\mathbf{x})$ の値から解の特殊解成分 $u_L(\mathbf{x})$ の境界における値を計算することができ, 調和関数項 $u_H(\mathbf{x})$ を除去できることを示している. なお関数 $u_L(\mathbf{x})$ は, 2次元の場合は対数ポテンシャル, 3次元以上の場合には Newton ポテンシャルと呼ばれる.

上記のことを Poisson 方程式のソース逆問題の解の一意性の面から考える. 定理 2.1 によれば, 2つのソース項 $f_1(\mathbf{x})$ および $f_2(\mathbf{x})$ に対する Poisson 方程式

$$-\Delta u_i(\mathbf{x}) = f_i(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \Omega, i = 1, 2 \quad (3.19)$$

の解 $u_i(\mathbf{x})$ の境界 Γ 全体における $u_i(\mathbf{x})$ および $\frac{\partial u_i}{\partial \mathbf{n}}(\mathbf{x})$ の値が一致するための必要十分条件は, Ω における任意の調和関数 $v(\mathbf{x})$ に対し

$$\int_{\Omega} f_1(\mathbf{x}) v(\mathbf{x}) d\Omega(\mathbf{x}) = \int_{\Omega} f_2(\mathbf{x}) v(\mathbf{x}) d\Omega(\mathbf{x}) \quad (3.20)$$

が成立することである. 式 (3.20) は, 解 $u_i(\mathbf{x})$ に対し

$$\int_{\Omega} \Delta u_1(\mathbf{x}) v(\mathbf{x}) d\Omega(\mathbf{x}) = \int_{\Omega} \Delta u_2(\mathbf{x}) v(\mathbf{x}) d\Omega(\mathbf{x}) \quad (3.21)$$

が成立することと同値である．ここで解 $u_i(\mathbf{x})$ を

$$u_i(\mathbf{x}) = u_{i,H}(\mathbf{x}) + u_{i,L}(\mathbf{x}) \equiv u_{i,H}(\mathbf{x}) + \int_{\Omega} f_i(\mathbf{x}') u^*(\mathbf{x}; \mathbf{x}') d\Omega(\mathbf{x}'), \quad i = 1, 2 \quad (3.22)$$

で表すと, $u_{i,H}(\mathbf{x})$ が調和関数であることより

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \Delta u_i(\mathbf{x}) v(\mathbf{x}) d\Omega(\mathbf{x}) &= \int_{\Omega} \Delta (u_{i,H}(\mathbf{x}) + u_{i,L}(\mathbf{x})) v(\mathbf{x}) d\Omega(\mathbf{x}) \\ &= \int_{\Omega} \Delta u_{i,L}(\mathbf{x}) v(\mathbf{x}) d\Omega(\mathbf{x}) \end{aligned} \quad (3.23)$$

を得る．さらに $v(\mathbf{x})$ が調和関数であることから, Gauss-Green の定理を用いると式 (3.23) は

$$\int_{\Omega} \Delta u_{i,L}(\mathbf{x}) v(\mathbf{x}) d\Omega(\mathbf{x}) = \int_{\Gamma} \frac{\partial u_{i,L}}{\partial \mathbf{n}}(\mathbf{x}) v(\mathbf{x}) d\Gamma(\mathbf{x}) - \int_{\Gamma} u_{i,L}(\mathbf{x}) \frac{\partial v}{\partial \mathbf{n}}(\mathbf{x}) d\Gamma(\mathbf{x}) \quad (3.24)$$

となる．関数 $u_{i,L}(\mathbf{x})$ をそのまま R^n に拡張し

$$u_{i,L}(\mathbf{x}) \equiv \int_{\Omega} f_i(\mathbf{x}') u^*(\mathbf{x}; \mathbf{x}') d\Omega(\mathbf{x}'), \quad \mathbf{x} \in R^n \quad (3.25)$$

を考えると, 関数 $u_{i,L}(\mathbf{x})$ は

$$\Delta u_{i,L}(\mathbf{x}) = 0, \quad \mathbf{x} \in R^n \setminus \Omega \quad (3.26)$$

を満たし, また

$$u_{i,L}(\mathbf{x}) \rightarrow \begin{cases} O(-Q_i \ln |\mathbf{x}|) & \text{as } |\mathbf{x}| \rightarrow \infty, \quad n = 2 \\ 0 & \text{as } |\mathbf{x}| \rightarrow \infty, \quad n \geq 3 \end{cases} \quad (3.27)$$

が成り立つ．ただし

$$Q_i = \int_{\Omega} f_i(\mathbf{x}) d\Omega(\mathbf{x}) \quad (3.28)$$

である．ここで Laplace 方程式の外部境界値問題

$$\Delta w(\mathbf{x}) = 0, \quad \mathbf{x} \in R^n \setminus \Omega \quad (3.29)$$

$$w(\mathbf{x}) = g(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \Gamma \quad (3.30)$$

$$w(\mathbf{x}) \rightarrow \begin{cases} O(-Q \ln |\mathbf{x}|) & \text{as } |\mathbf{x}| \rightarrow \infty, \quad n = 2 \\ 0 & \text{as } |\mathbf{x}| \rightarrow \infty, \quad n \geq 3 \end{cases} \quad (3.31)$$

を考えると, これはただ一つの解を持つことが知られており, 境界 Γ 上における $\frac{\partial w}{\partial \mathbf{n}}(\mathbf{x})$ は $g(\mathbf{x})$ から一意に定まる．このことは対数ポテンシャル $u_L(\mathbf{x})$ の境界上における値から $\frac{\partial u_L}{\partial \mathbf{n}}(\mathbf{x})$ の値が一意に決定されることを意味する．結果として次の定理を得る．

[定理 3.1]

ソース項 $f_1(\mathbf{x})$, $f_2(\mathbf{x})$ に対する Poisson 方程式

$$-\Delta u_1(\mathbf{x}) = f_1(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \Omega \quad (3.32)$$

$$-\Delta u_2(\mathbf{x}) = f_2(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \Omega \quad (3.33)$$

の Dirichlet 境界値問題, あるいは Neumann 境界値問題の解 $u_1(\mathbf{x})$, $u_2(\mathbf{x})$ について

$$u_1(\mathbf{x}) = u_2(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \Gamma \quad (3.34)$$

$$\frac{\partial u_1}{\partial n}(\mathbf{x}) = \frac{\partial u_2}{\partial n}(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \Gamma \quad (3.35)$$

が成立するための必要十分条件は, $f_1(\mathbf{x})$, $f_2(\mathbf{x})$ に対する対数 (Newton) ポテンシャル $u_{1,L}(\mathbf{x})$, $u_{2,L}(\mathbf{x})$ について

$$u_{1,L}(\mathbf{x}) = u_{2,L}(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \Gamma \quad (3.36)$$

が成立することである.

定理 3.1 より, 本論文で考察する問題は, 境界上における対数 (Newton) ポテンシャルを与えるソース項を求める問題と同値であることがわかる. 対数 (Newton) ポテンシャルからそのソース項を求める問題は対数 (Newton) ポテンシャル逆問題と呼ばれ, 以下の節でその詳細について述べる.

3.4 対数ポテンシャル逆問題

本章の以下の節では実 2次元空間 \mathbf{R}^2 を考え, \mathbf{R}^2 上の点を (x, y) で表す. 対数ポテンシャル逆問題とは, 2次元領域 Ω における対数ポテンシャル

$$u_L(x, y) \equiv -\frac{1}{2\pi} \int_{\Omega} f(x', y') \ln \sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2} d\Omega(x') \quad (3.37)$$

に関する情報から, 対数ポテンシャルを生成するソース項 $f(x, y)$ を求める問題であり, 数学的には積分方程式の範疇にはいる. 第 3.2 節で示したように, 式 (3.37) で与えられる対数ポテンシャルは Poisson 方程式

$$-\Delta u_L(x, y) = f(x, y), \quad (x, y) \in \Omega \quad (3.38)$$

を満たす. したがって領域 Ω 全体における対数ポテンシャル $u_L(x, y)$ が既知の場合, その Laplacian を計算することによりソース項 $f(x, y)$ を求めることができる. しかし実際の工学的問題では, 領域内部に測定器をおくことは困難であり, 対象領域 Ω の外部あるいは

は境界における値のみが測定可能である場合が多い. このことを考慮して, 領域 Ω の外部あるいは境界における対数ポテンシャルの値からソース項 $f(x, y)$ を推定する問題が主として研究されてきた. 以下では, 下に示すように定式化される, 領域 Ω の境界における対数ポテンシャルの値からソース項 $f(x, y)$ を求める対数ポテンシャル逆問題を考える.

[問題](対数ポテンシャル逆問題)

領域 Ω で定義された関数 $f(x, y)$, $u_L(x, y)$, および境界 Γ 上で定義された関数 $\varphi(x, y)$ が次の関係式を満たすものとする.

$$u_L(x, y) = -\frac{1}{2\pi} \int_{\Omega} f(x', y') \ln \sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2} d\Omega(x', y'), \quad (x, y) \in \Omega \quad (3.39)$$

$$u_L(x, y) = \varphi(x, y), \quad (x, y) \in \Gamma \quad (3.40)$$

ここで $\varphi(x, y)$ を与えたとき, $f(x, y)$ を決定せよ.

対数ポテンシャル逆問題の解の一意性が一般に保証されないことは, 前節に示した Poisson 方程式のソース逆問題と対数ポテンシャル逆問題の等価性からわかる. さらに解の一意性に関し次の定理が導かれる.

[定理 3.2] (Novikov, 1938)[5]

ソース項 $f_1(x, y)$ および $f_2(x, y)$ を Ω 内の有界な可測関数で

$$\int_{\Omega} f_1(x, y) d\Omega(x, y) = \int_{\Omega} f_2(x, y) d\Omega(x, y) \quad (3.41)$$

を満たすものとする. これらのソース項が生成する対数ポテンシャルをそれぞれ $u_{L,1}(x)$, $u_{L,2}(x)$ とするとき, 境界 Γ において二つの対数ポテンシャルの値が一致する, すなわち

$$u_{L,1}(x, y) = u_{L,2}(x, y), \quad (x, y) \in \Gamma \quad (3.42)$$

となるための必要十分条件は, Ω 内の任意の調和関数 $v(x, y)$ に対し

$$\int_{\Omega} f_1(x, y) v(x, y) d\Omega(x, y) = \int_{\Omega} f_2(x, y) v(x, y) d\Omega(x, y) \quad (3.43)$$

が成立することである.

[定理 3.3] (Novikov, 1938)[5]

ソース項 $f_i(x, y)$, $i = 1, 2$ が定理 2.2 の条件 1, 2 をいずれも満たし, 式 (3.41) が成り立つものとする. このとき式 (3.42) が成立するならば, 定理 2.2 の条件 1 の領域について $D_1 = D_2$ である.

[定理 3.4] (Prelepko, 1966)[79]

ソース項 $f_i(x)$, $i = 1, 2$ が定理 2.3 の条件 1,2,3 をいずれも満たし, 式 (3.41) が成り立つものとする. このとき式 (3.42) が成立するならば, 定理 2.3 の条件 1 の領域について $D_1 = D_2$ である.

[定理 3.5] (Prelepko, 1967)[80]

ソース項 $f_i(x)$, $i = 1, 2$ が定理 2.4 の条件 1,2,3 をいずれも満たし, 式 (3.41) が成り立つものとする. このとき式 (3.42) が成立するならば, 定理 2.4 の条件 1 の領域について $D_1 = D_2$ である.

[定理 3.6] (Strakhov and Brodsky, 1986)[75]

ソース項 $f_i(x)$, $i = 1, 2$ が定理 2.7 の条件 1,2,3 をいずれも満たし, 式 (3.41) が成り立つものとする. このとき式 (3.42) が成立するならば, 定理 2.7 の条件 1 の多角形について $D_1 = D_2$ である.

[定理 3.7] (Stromeyer and Ballani, 1984)[6]

ソース項 $f_i(x, y)$, $i = 1, 2$ は Ω 内の点集合 $\{(x_{1,j}, y_{1,j}), j = 1, 2, \dots, N_1\}$, $\{(x_{2,j}, y_{2,j}), j = 1, 2, \dots, N_2\}$ を用いて

$$f_1(x, y) = \sum_{j=1}^{N_1} q_{1,j} \delta(x - x_{1,j}, y - y_{1,j}) \quad (3.44)$$

$$f_2(x, y) = \sum_{j=1}^{N_2} q_{2,j} \delta(x - x_{2,j}, y - y_{2,j}) \quad (3.45)$$

で表されているものとする. ここで $i \neq j$ のとき $(x_{1,i}, y_{1,i}) \neq (x_{1,j}, y_{1,j})$, $(x_{1,i}, y_{1,i}) \neq (x_{1,j}, y_{1,j})$ であり, $\delta(x, y)$ は 2次元の Dirac の delta 関数を表す. また $q_{i,j} \neq 0$ とする. これらのソース項が生成する対数ポテンシャル $u_{L,1}(x)$, $u_{L,2}(x)$ について式 (3.42) が成立し, さらに

$$\sum_{j=1}^{N_1} q_{1,j} = \sum_{j=1}^{N_2} q_{2,j} \quad (3.46)$$

を満たすならば, $\{(x_{1,j}, y_{1,j})\} = \{(x_{2,j}, y_{2,j})\}$ である. また各 $(x_{1,j}, y_{1,j})$ に対応する $\{(x_{2,j}, y_{2,j})\}$ 内の点をあらためて $(x_{2,j}, y_{2,j})$ とおけば, $q_{1,j} = q_{2,j}$ が成り立つ.

上記の定理のうち定理 3.3 から 3.5 のソース項のモデルは star-shape model と, 定理 3.7 のソース項のモデルは point-mass model と呼ばれる. Star-shape model を用いた場合, 対数ポテンシャル逆問題はその境界を求める問題に帰着される. しかし次節で述べる問題の不適切性が生じ, 数値的に非常に困難な問題となることが知られている. Point-mass

model はその表現に delta 関数を用いるため応用には不向きと考えられたが, 同心円状の質量分布の生成する対数ポテンシャルが delta 関数の生成するものと一致することから, モデルの単純化に用いられた. また第 3.6 節で述べる代用電荷法は point-mass model を基礎としており, 代用電荷法の有効性が認められるにつれて, このモデルの重要性は再認識されている.

3.5 対数ポテンシャル逆問題の不適切性

本節ではソースモデルとして star-shape model を用いた場合に生ずる対数ポテンシャル逆問題の不適切性について述べる. 前節で対数ポテンシャル逆問題の解の一意性が保証されるソース項のモデルとして star-shape model があることを示した. Star-shape model を用いた場合, 推定の対象となるものは, star-shape model の境界である. そのため対数ポテンシャル逆問題の解として決定される star-shape model の境界が, 観測点における対数ポテンシャルの変化によりどの程度変化するかについて考える.

図 3.1 に示すような二つの領域 Ω および D を考え, これらの境界が原点を中心とする極座標を用いてそれぞれ

$$\Gamma = \partial\Omega = \{(r, \theta) \mid r = R(\theta)\} \quad (3.47)$$

$$\partial D = \{(r, \theta) \mid r = r(\theta)\} \quad (3.48)$$

で表されるものとする. ただし, $R(\theta)$, $r(\theta)$ はともに一価関数である. さらに領域 D 内において $f(x, y) = Q$ とする. 領域 D の境界 ∂D が

$$\partial D' = \{(r, \theta) \mid r = r(\theta) + z(\theta)\} \quad (3.49)$$

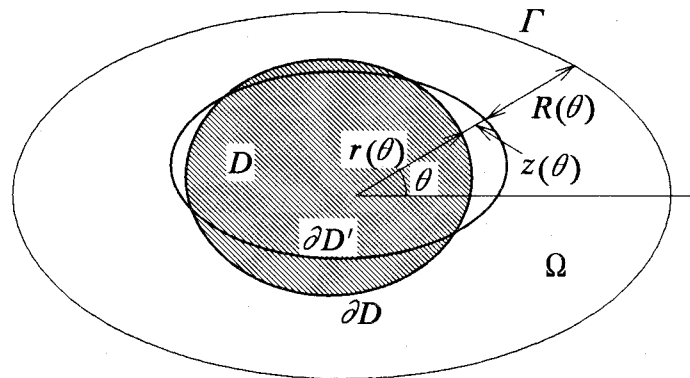


図 3.1 領域 Ω と star-shape model のパラメータ

に変化したとき, Ω の境界上の点 $(R(\theta), \theta)$ における対数ポテンシャルの変化 $\delta u_L(R(\theta), \theta)$ は

$$\begin{aligned} \delta u_L(R(\theta), \theta) &= -\frac{Q}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{z(\varphi)} d\rho (r(\varphi) + \rho) \\ &\quad \times \ln \sqrt{R(\theta)^2 + (r(\varphi) + \rho)^2 - 2R(\theta)(r(\varphi) + \rho) \cos(\theta - \varphi)} \end{aligned} \quad (3.50)$$

で表される. ここで $|z(\theta)|$ が十分小さいものとする

$$\begin{aligned} \int_0^{z(\varphi)} dt (r(\varphi) + \rho) \ln \sqrt{R(\theta)^2 + (r(\varphi) + \rho)^2 - 2R(\theta)(r(\varphi) + \rho) \cos(\theta - \varphi)} \\ \simeq r(\varphi) z(\varphi) \ln \sqrt{R(\theta)^2 + r(\varphi)^2 - 2R(\theta)r(\varphi) \cos(\theta - \varphi)} \end{aligned} \quad (3.51)$$

で近似でき

$$\begin{aligned} \delta u_L(R(\theta), \theta) \\ = -\frac{Q}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi r(\varphi) z(\varphi) \ln \sqrt{R(\theta)^2 + r(\varphi)^2 - 2R(\theta)r(\varphi) \cos(\theta - \varphi)} \end{aligned} \quad (3.52)$$

としてよい. 簡単のため, $R(\theta) = 1$, $Q = 1$ とし, $r(\theta) = r < 1$, すなわち領域 D が円の場合を考える. このとき式 (3.52) は

$$\delta u_L(\theta) \equiv \delta u_L(1, \theta) = -\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} r z(\varphi) \ln \sqrt{1 + r^2 - 2r \cos(\theta - \varphi)} d\varphi \quad (3.53)$$

となる.

形式的に $\delta u_L(\theta)$, $z(\varphi)$ を Fourier 展開し, それを

$$\delta u_L(\theta) = \frac{1}{\pi} \left\{ \frac{\mu_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (\mu_k \cos k\theta + \nu_k \sin k\theta) \right\} \quad (3.54)$$

$$z(\varphi) = \frac{1}{\pi} \left\{ \frac{\xi_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (\xi_k \cos k\varphi + \eta_k \sin k\varphi) \right\} \quad (3.55)$$

で表す. また式 (3.53) の右辺の積分核 $-\frac{1}{2\pi} \ln \sqrt{1 + r^2 - 2r \cos(\theta - \varphi)}$ の Fourier 展開は

$$-\frac{1}{2\pi} \ln \sqrt{1 + r^2 - 2r \cos(\theta - \varphi)} = \frac{1}{\pi} \left\{ \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (\alpha_k \cos k\varphi + \beta_k \sin k\varphi) \right\} \quad (3.56)$$

で表される. ただし

$$\alpha_k = \begin{cases} -\ln 1 = 0, & k = 0, \\ \frac{r^k}{2k} \cos k\theta, & k = 1, 2, \dots, \end{cases} \quad (3.57)$$

$$\beta_k = \frac{r^k}{2k} \sin k\theta, \quad k = 1, 2, \dots, \quad (3.58)$$

である. 式 (3.57), (3.58) より, 式 (3.53) の右辺は

$$\frac{1}{\pi} \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{r^{k+1}}{2k} \xi_k \cos k\theta + \frac{r^{k+1}}{2k} \eta_k \sin k\theta \right) \right\} \quad (3.59)$$

となる. また式 (3.59) より, 式 (3.54) に Fourier 展開される対数ポテンシャルの変化に対する領域 D の境界の変化の Fourier 係数に対し

$$\xi_k = \frac{2k}{r^{k+1}} \mu_k, \quad k = 1, 2, \dots, \quad (3.60)$$

$$\eta_k = \frac{2k}{r^{k+1}} \nu_k, \quad k = 1, 2, \dots, \quad (3.61)$$

を得る. 境界上における対数ポテンシャルの変化 $\delta u_L(\theta)$ について, 連続かつ

$$|\delta u_L(\theta)| < \varepsilon, \quad 0 \leq \theta < 2\pi \quad (3.62)$$

であることのみがわかる場合, その Fourier 係数について

$$|\mu_k|, |\nu_k| \sim O\left(\frac{\varepsilon}{k}\right), \quad k = 1, 2, \dots, \quad (3.63)$$

で評価されるため, 式 (3.60), (3.61) より領域 D の境界の変化の Fourier 係数は

$$|\xi_k|, |\eta_k| \rightarrow \infty \text{ as } k \rightarrow \infty \quad (3.64)$$

となる可能性がある. また Fourier 係数を有限の次数 L で打ち切った場合を考えると, $\mu_k, \nu_k, k = 1, 2, \dots, L$ から $\xi_k, \eta_k, k = 1, 2, \dots, L$ を求める $L \times L$ -行列

$$\begin{pmatrix} \frac{2}{r^2} & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \frac{4}{r^3} & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \frac{2k}{r^{k+1}} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \frac{2L}{r^{L+1}} \end{pmatrix} \quad (3.65)$$

の条件数は $\frac{L}{r^{L-1}}$ となる. この値は次数 L を大きくするほど大きくなり, 推定結果が悪化することが予想される. これは逆問題の解がそのデータの変化に対し非常に敏感であることを示しており, 問題が Hadamard の意味で不適切となっていることを表している. このため, Tikhonov の適切化などを用いた解法が必要となる [45, 47, 53]. また式 (3.62) 以外に $\delta u_L(\theta)$ に付加条件をつけた場合の解の安定性についての研究や, 間接的に関係があるものとして Laplace 方程式の初期値問題の安定性に関する研究があるが, 数値的にこれらの結果を応用したものは知られていない [46, 54, 76] また, Laplace 方程式の境界値逆問題に対し, 数値的に不適切性の程度を評価し, 数値解の安定化をはかった研究が発表されている [86].

3.6 代用電荷法と対数ポテンシャル逆問題

第3.4節において, 対数ポテンシャル逆問題の解の一意性が保証されるソース項のモデルとして point-mass model があることを示した. Point-mass model は

$$f(x, y) = \sum_{j=1}^N Q_j \delta(x - x_j, y - y_j) \quad (3.66)$$

で表され, 物理モデルとして静電場を考えた場合, N は点電荷の個数, (x_j, y_j) は各点電荷の位置, Q_j は各点電荷の強度に対応する. また点 (ξ, η) にある強度 Q の点電荷が生成する対数ポテンシャルは

$$u_L(x, y) = -\frac{Q}{2\pi} \ln \sqrt{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2} \quad (3.67)$$

で表され, (ξ, η) を除いて Laplace 方程式を満たす. この点電荷による対数ポテンシャルの重ね合わせにより, Laplace 方程式の境界値問題の解を近似する方法が代用電荷法である [7,82]. 以下にその概要を述べる.

2次元実空間における有界で C^2 級の境界 Γ をもつ領域 Ω における Laplace 方程式の Dirichlet 境界値問題

$$\Delta u(x, y) = 0, \quad (x, y) \in \Omega \quad (3.68)$$

$$u(x, y) = u_D(x, y), \quad (x, y) \in \Gamma \quad (3.69)$$

を考える. 領域 Ω の外部に図 3.2 に示すように点 (ξ_j, η_j) , $j = 1, 2, \dots, M$ をとり, それぞれに強度 Q_j , $j = 1, 2, \dots, M$ の点電荷をおく. このときそれらの点電荷により生成さ

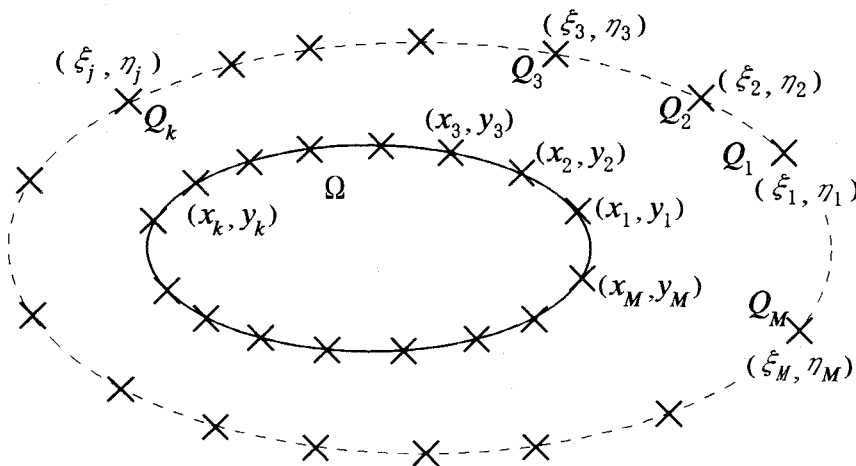


図 3.2 代用電荷法における電荷の配置と分点

れる対数ポテンシャルを $v(x, y)$ とおくと

$$v(x, y) = -\frac{1}{2\pi} \sum_{j=1}^M Q_j \ln \sqrt{(x - \xi_j)^2 + (y - \eta_j)^2} \quad (3.70)$$

で表される. 領域 Ω が点 (ξ_j, η_j) , $j = 1, 2, \dots, M$ を含まないことから, 関数 $v(x, y)$ は領域 Ω において Laplace 方程式を満たす.

ここで点 (x_j, y_j) , $j = 1, 2, \dots, M$ を領域 Ω の境界上にとり, 点電荷の強度 Q_j を方程式

$$-\frac{1}{2\pi} \sum_{j=1}^M Q_j \ln \sqrt{(x_k - \xi_j)^2 + (y_k - \eta_j)^2} = u_D(x_k, y_k), \quad k = 1, 2, \dots, M \quad (3.71)$$

を満たすように決定すると, これらの点電荷により生成される対数ポテンシャル $v(x, y)$ は

$$\Delta v(x, y) = 0, \quad (x, y) \in \Omega \quad (3.72)$$

$$v(x_k, y_k) = u_D(x_k, y_k), \quad k = 1, 2, \dots, M \quad (3.73)$$

を満たす. すなわち関数 $v(x, y)$ は Laplace 方程式の Dirichlet 境界値問題 (3.68), (3.69) を境界上の点 (x_k, y_k) , $k = 1, 2, \dots, M$ で満たしており, 一つの近似解と考えることができる. 以上が代用電荷法の原理である.

代用電荷法は原理が簡単な上, 短い計算時間で高精度の近似解が得られるという利点により注目された. また近似解が解析的な関数として表現されるため, 解の微分の計算を容易におこなうことができる利点がある. 近似解 $v(x, y)$ の精度をあげるためには, 仮想的におく点電荷の個数を増加すればよく, その場合の収束性についていくつかの研究がある [88-90]. また近似解の精度に対し点電荷の配置が大きく影響することが知られているが, その最適な配置法に関する研究が最近おこなわれた [90]. また Laplace 方程式と関係の深い複素平面における等角写像に対する代用電荷法の応用に関する研究もおこなわれている [92-97].

最後に代用電荷法と対数ポテンシャル逆問題の関係について述べる. 代用電荷法の目的は Laplace 方程式の近似解を求めることであり, その解法は Dirichlet 境界値を与える外部点電荷の強度の推定である. よってこれは point-mass model に対する対数ポテンシャル逆問題における強度推定問題と対応している. また近似解の精度をあげるための最適な電荷配置や個数の決定はそれぞれ, point-mass model に対する位置推定逆問題, および個数推定逆問題に対応する. ただし代用電荷法と対数ポテンシャル逆問題では点電荷あるいは point-mass をそれぞれ領域の外部と内部に配置することに注意しておく.

3.7 結 言

本章では Poisson 方程式のソース逆問題と対数ポテンシャル逆問題の関係について述べた。前半部では Poisson 方程式の境界積分方程式表現を示し, Poisson 方程式の解 $u(x)$ および法線方向微分 $\frac{\partial u}{\partial n}$ を用いて, 解から調和関数項を除去できることを示した。また解の一意性の観点から見たとき, Poisson 方程式のソース逆問題が対数 (Newton) ポテンシャル逆問題と等価となり, 対数 (Newton) ポテンシャル逆問題が Poisson 方程式のソース逆問題において本質的役割を持つことについて述べた。次章で述べる境界要素法は境界積分方程式表現を基礎として持つ偏微分方程式の境界値問題の解法であり, 有効な解法の一つとして近年注目されているものである。本章で得られた結果は, この境界要素法の Poisson 方程式のソース逆問題への適用可能性を示しているものと考えられるが, その詳細は次章で述べる。

また本章の後半部では 2次元の場合に注目し, 対数ポテンシャル逆問題について考察した。まず 2次元 Poisson 方程式のソース逆問題と対数ポテンシャル逆問題の等価性を用いて問題の解の一意性を保証するいくつかのソースモデルを示した。またソースモデルのうち star-shape model について, このモデルを用いた際に生じる問題の不適切性について詳しく述べた。もう一つのモデルである point-mass model について, その順問題的な応用である代用電荷法についてふれ, point-mass model に対する対数ポテンシャル逆問題との関連について述べた。

代用電荷法と point-mass model に対する対数ポテンシャル逆問題は点電荷, あるいは point-mass の配置をおこなう場所が対象領域の外部と内部で異なっているが, いずれもその最適な個数や配置, 強度の決定が重要となっており, 問題として似通ったものとなっている。代用電荷法はその高速性と高精度により, Laplace 方程式の他にもさまざまな方程式に対して応用され, その重要度を増しつつある。このことから point-mass model に対する対数ポテンシャル逆問題に関する研究が重要となっており, 以下の章ではこの逆問題に対する数値解法を考察する。

第 4 章

Poisson 方程式のソース逆問題に対する 境界要素法の適用

4.1 緒言

現在, 偏微分方程式の数値解法の主なものとしては差分法, 有限要素法および境界要素法が知られている. これらの方法はその基礎とする原理により特徴付けられる. 中でも境界要素法は偏微分方程式の境界積分方程式表現に基づく数値解法であり, 偏微分方程式の境界値問題を解く際に内点を計算に必要としない計算法である. この方法は近年急速に発達し, 偏微分方程式の有効な数値解法の一つとして確立された [98,99]. 本章では境界要素法の 2次元 Poisson 方程式のソース逆問題の数値解法への応用を提案する.

まず, Poisson 方程式の境界積分方程式を境界要素を用いて離散化した数値解法である境界要素法について述べる. 次に第 3 章で示した Poisson 方程式の境界積分方程式表現を用いた対数ポテンシャルの計算法について, これを境界要素を用いて離散化した対数ポテンシャル成分の数値計算法を提案し, 詳細な誤差評価を与える. またこの方法を Poisson 方程式のソース逆問題の数値解法として適用し, 誤差評価を与える. 最後に数値実験により提案した手法, および誤差評価の有効性を示す.

4.2 境界要素法

境界要素法は偏微分方程式の Dirichlet 境界値問題, Neumann 境界値問題, および初期値境界値問題を方程式の境界積分表現に基づき数値的に解く方法である [98,99]. 本節では

2次元 Poisson 方程式の Dirichlet 境界値問題

$$-\Delta u(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \Omega \quad (4.1)$$

$$u(\mathbf{x}) = \varphi(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \Gamma \quad (4.2)$$

の解法を例として用い, その概要を示す. ここで Ω , Γ はそれぞれ \mathbf{R}^2 内の C^2 級の境界を持つ有界な領域とその境界であり, \mathbf{x} は \mathbf{R}^2 内の点 (x, y) を表す.

2次元 Poisson 方程式の積分表現は

$$\begin{aligned} c(\mathbf{x})u(\mathbf{x}) + \int_{\Gamma} \frac{\partial u^*(\mathbf{x}; \mathbf{x}')}{\partial \mathbf{n}(\mathbf{x})} u(\mathbf{x}') d\Gamma(\mathbf{x}') - \int_{\Gamma} u^*(\mathbf{x}; \mathbf{x}') \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}(\mathbf{x}') d\Gamma(\mathbf{x}') \\ = \int_{\Omega} u^*(\mathbf{x}; \mathbf{x}') f(\mathbf{x}') d\Omega(\mathbf{x}') \end{aligned} \quad (4.3)$$

ただし

$$u^*(\mathbf{x}; \mathbf{x}') = -\frac{1}{2\pi} \ln |\mathbf{x} - \mathbf{x}'| \quad (4.4)$$

$$c(\mathbf{x}) = \begin{cases} 1, & \mathbf{x} \in \Omega \\ \frac{1}{2}, & \mathbf{x} \in \Gamma \end{cases} \quad (4.5)$$

で表される. Dirichlet 境界値問題では, 境界上における $u(\mathbf{x})$ の値 $\varphi(\mathbf{x})$ のみが既知である. しかし境界上において $u(\mathbf{x})$ と $\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}(\mathbf{x})$ は方程式

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}u(\mathbf{x}) + \int_{\Gamma} \frac{\partial u^*(\mathbf{x}; \mathbf{x}')}{\partial \mathbf{n}(\mathbf{x})} u(\mathbf{x}') d\Gamma(\mathbf{x}') - \int_{\Gamma} u^*(\mathbf{x}; \mathbf{x}') \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}(\mathbf{x}') d\Gamma(\mathbf{x}') \\ = \int_{\Omega} u^*(\mathbf{x}; \mathbf{x}') f(\mathbf{x}') d\Omega(\mathbf{x}') \end{aligned} \quad (4.6)$$

を満たしており, 方程式 (4.6) は $\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}(\mathbf{x})$ について解くことができる [72]. さらに Dirichlet 条件と方程式 (4.6) の解として得られた $\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}(\mathbf{x})$ を式 (4.3) に代入することにより領域 Ω の内点 \mathbf{x} における $u(\mathbf{x})$ の値が計算でき, Poisson 方程式の Dirichlet 境界値問題を解くことができる. この解法を数値的におこなう方法が境界要素法である.

まず境界を有限の個数 m 個の部分に分割し, それらを Γ_j ($j = 1, 2, \dots, m$) で表す. 各 Γ_j 上において $u(\mathbf{x})$ および $\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}(\mathbf{x})$ の近似関数を考え, $u_j(\mathbf{x})$ および $\frac{\partial u_j}{\partial \mathbf{n}}(\mathbf{x})$ で表す. 分割した境界 Γ_j および近似関数 $u_j(\mathbf{x})$, $\frac{\partial u_j}{\partial \mathbf{n}}(\mathbf{x})$ をあわせて境界要素と呼ぶ. 近似関数としては多項式が用いられることが多いが, 特に定数関数, 一次関数を近似関数として用いる場合には, 境界要素はそれぞれ一定要素, 一次要素と呼ばれる. 図 4.1 に境界要素分割および一定要素, 一次要素の例を示す. 以下では一定要素を用いた境界要素法について述べる.

各 Γ_j の中点を \mathbf{x}_j で表し, 近似関数を

$$u_j(\mathbf{x}) = u(\mathbf{x}_j) \equiv u_j, \quad j = 1, 2, \dots, m \quad (4.7)$$

$$\frac{\partial u_j}{\partial \mathbf{n}}(\mathbf{x}) = q_j, \quad j = 1, 2, \dots, m \quad (4.8)$$

とおく. このとき境界積分方程式 (4.6) は, 各 \mathbf{x}_j において

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2}u(\mathbf{x}_j) + \sum_{k=1}^m \int_{\Gamma_k} \frac{\partial u^*(\mathbf{x}_j; \mathbf{x}')}{\partial \mathbf{n}(\mathbf{x})} u_k(\mathbf{x}') d\Gamma(\mathbf{x}') - \sum_{k=1}^m \int_{\Gamma_k} u^*(\mathbf{x}_j; \mathbf{x}') \frac{\partial u_k}{\partial \mathbf{n}}(\mathbf{x}') d\Gamma(\mathbf{x}') \\ &= \frac{1}{2}u_j + \sum_{k=1}^m u_k \int_{\Gamma_k} \frac{\partial u^*(\mathbf{x}_j; \mathbf{x}')}{\partial \mathbf{n}(\mathbf{x})} d\Gamma(\mathbf{x}') - \sum_{k=1}^m q_k \int_{\Gamma_k} u^*(\mathbf{x}_j; \mathbf{x}') d\Gamma(\mathbf{x}') \\ &= \int_{\Omega} u^*(\mathbf{x}_j; \mathbf{x}') f(\mathbf{x}') d\Omega(\mathbf{x}') \end{aligned} \quad (4.9)$$

で近似される. 式 (4.9) を $j = 1, 2, \dots, m$ について考え

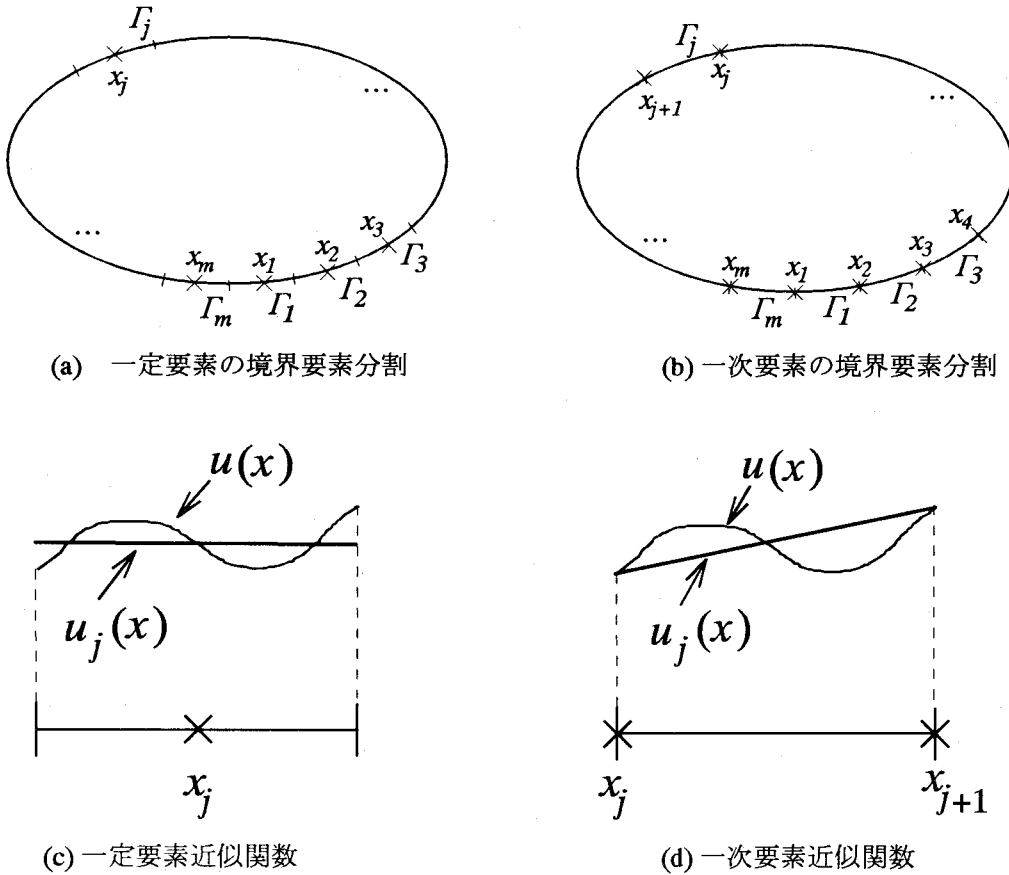


図 4.1 境界要素分割と近似関数

$$A \equiv \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mm} \end{pmatrix} \quad (4.10)$$

$$B \equiv \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1m} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{mm} \end{pmatrix} \quad (4.11)$$

$$C \equiv \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_m \end{pmatrix}, \quad U \equiv \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_m \end{pmatrix}, \quad V \equiv \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \vdots \\ q_m \end{pmatrix} \quad (4.12)$$

ただし

$$a_{jk} = \frac{1}{2} \delta_{jk} + \int_{\Gamma_k} \frac{\partial u^*(\mathbf{x}_j; \mathbf{x}')}{\partial \mathbf{n}(\mathbf{x})} d\Gamma(\mathbf{x}') \quad (4.13)$$

$$b_{jk} = - \int_{\Gamma_k} u^*(\mathbf{x}_j; \mathbf{x}') d\Gamma(\mathbf{x}') \quad (4.14)$$

$$c_j = \int_{\Omega} u^*(\mathbf{x}_j; \mathbf{x}') f(\mathbf{x}') d\Omega(\mathbf{x}') \quad (4.15)$$

$$\delta_{jk} = \begin{cases} 1, & j = k \\ 0, & j \neq k \end{cases} \quad (4.16)$$

とおくと, V に関する連立方程式

$$AU + BV = C \quad (4.17)$$

を得る. 方程式 (4.17) において, B^{-1} が存在する場合には, これを V について解くことができ, q_j すなわち $\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}(\mathbf{x})$ の近似関数を求めることができる. さらに $\mathbf{x} \in \Omega$ の場合, 式 (4.3) は式 (4.7) および (4.8) を用いて

$$\begin{aligned} u(\mathbf{x}) + \sum_{k=1}^m u_k \int_{\Gamma_k} \frac{\partial u^*(\mathbf{x}; \mathbf{x}')}{\partial \mathbf{n}(\mathbf{x})} d\Gamma(\mathbf{x}') - \sum_{k=1}^m q_k \int_{\Gamma_k} u^*(\mathbf{x}; \mathbf{x}') d\Gamma(\mathbf{x}') \\ = \int_{\Omega} u^*(\mathbf{x}; \mathbf{x}') f(\mathbf{x}') d\Omega(\mathbf{x}') \end{aligned} \quad (4.18)$$

で近似される. 式 (4.18) に u_j と方程式 (4.17) より得られた q_j を代入することにより, 領域 Ω 内の任意の点 \mathbf{x} における $u(\mathbf{x})$ の近似値が計算できる. このようにして Poisson 方程式の Dirichlet 境界値問題を数値的に解くことができる.

4.3 境界要素法による対数ポテンシャルの数値計算法および誤差評価

本節では領域 Ω は狭義凸かつ, その境界 Γ は C^3 級のなめらかさをもつものと仮定する. まず第 3 章で示した対数ポテンシャルの計算法を離散化し, 境界要素法による対数ポテンシャルの数値計算法を提案する. 次に一定要素を用いた場合の誤差評価を境界形状が一般の曲線の場合について与え, さらに円の場合について精密化した結果を示す.

4.3.1 境界要素法による対数ポテンシャルの計算法

第 3 章において境界上における Poisson 方程式の解 $u(\mathbf{x})$ および法線方向微分 $\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}(\mathbf{x})$ を用いることにより, 対数ポテンシャル $u_L(\mathbf{x})$ の値が

$$u_L(\mathbf{x}) = \frac{1}{2}u(\mathbf{x}) + \int_{\Gamma} \frac{\partial u^*(\mathbf{x}; \mathbf{x}')}{\partial \mathbf{n}(\mathbf{x})} u(\mathbf{x}') d\Gamma(\mathbf{x}') - \int_{\Gamma} u^*(\mathbf{x}; \mathbf{x}') \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}(\mathbf{x}') d\Gamma(\mathbf{x}') \quad (4.19)$$

で計算できることを示した. 本節では式 (4.19) の一定要素による離散化を考える. 境界 Γ を m 個に分割し, それらを $\Gamma_j, j = 1, 2, \dots, m$ で表す. また各 Γ_j の中点を \mathbf{x}_j で表す. 各 Γ_j における $u(\mathbf{x})$ および $\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}(\mathbf{x})$ の一定要素近似関数 $\tilde{u}(\mathbf{x})$ および $\tilde{q}(\mathbf{x})$ を

$$\tilde{u}(\mathbf{x}) = u_j \equiv u(\mathbf{x}_j), \quad \mathbf{x} \in \Gamma_j, \quad j = 1, 2, \dots, m \quad (4.20)$$

$$\tilde{q}(\mathbf{x}) = q_j \equiv \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}(\mathbf{x}_j), \quad \mathbf{x} \in \Gamma_j, \quad j = 1, 2, \dots, m \quad (4.21)$$

と定義する. このとき, 式 (4.19) の左辺は各 \mathbf{x}_j において

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2}\tilde{u}(\mathbf{x}_j) + \sum_{k=1}^m \int_{\Gamma_k} \frac{\partial u^*(\mathbf{x}_j; \mathbf{x}')}{\partial \mathbf{n}(\mathbf{x}_j)} \tilde{u}(\mathbf{x}') d\Gamma(\mathbf{x}') - \sum_{k=1}^m \int_{\Gamma_k} u^*(\mathbf{x}_j; \mathbf{x}') \tilde{q}(\mathbf{x}') d\Gamma(\mathbf{x}') \\ &= \frac{1}{2}u_j + \sum_{k=1}^m u_k \int_{\Gamma_k} \frac{\partial u^*(\mathbf{x}_j; \mathbf{x}')}{\partial \mathbf{n}(\mathbf{x}_j)} d\Gamma(\mathbf{x}') - \sum_{k=1}^m q_k \int_{\Gamma_k} u^*(\mathbf{x}_j; \mathbf{x}') d\Gamma(\mathbf{x}') \end{aligned} \quad (4.22)$$

で近似される. これを対数ポテンシャル $u_L(\mathbf{x})$ の \mathbf{x}_j における近似値とし, $\tilde{u}_{L,j}$ で表す.

式 (4.22) を用いた数値計算をおこなう場合

$$\int_{\Gamma_j} \frac{\partial u^*}{\partial \mathbf{n}}(\mathbf{x}_j; \mathbf{x}') d\Gamma(\mathbf{x}') \quad (4.23)$$

$$\int_{\Gamma_j} u^*(\mathbf{x}_j; \mathbf{x}') d\Gamma(\mathbf{x}') \quad (4.24)$$

の計算法および精度が問題となる. まず式 (4.23) について示す. 点 \mathbf{x}_j を起点として Γ に沿って測った点 \mathbf{x}' への距離を $s(\mathbf{x}')$ で表す. 関数 $s(\mathbf{x})$ は arclength parameter と呼ばれる [100]. あきらかに $d\Gamma(\mathbf{x}') = ds(\mathbf{x}')$ である. また Γ 全体の長さを l で表すと, $s_j: \Gamma \rightarrow [0, l]$ は C^3 級の一对一写像であることから, 逆関数 $\mathbf{x}': [0, l] \rightarrow \Gamma$ が存在する. 境界要素 Γ_k の両端点における s の値を $s_{j-1/2}, s_{j+1/2}$ で表すと, 式 (4.23) は

$$\int_{s_{k-1/2}}^{s_{k+1/2}} \frac{\partial u^*}{\partial \mathbf{n}}(\mathbf{x}_j; \mathbf{x}'(s)) ds \quad (4.25)$$

に変形できる. ここで \boldsymbol{x}_j において Γ に対する接線を引き, 図 4.2 に示す角度パラメータ $\theta(s)$ を導入すると

$$\frac{\partial u^*}{\partial \boldsymbol{n}}(\boldsymbol{x}_j; \boldsymbol{x}'(s)) = -\frac{1}{2\pi} \frac{d\theta}{ds} \quad (4.26)$$

が成立し, 式 (4.23) は

$$\int_{s_{k-1/2}}^{s_{k+1/2}} \frac{\partial u^*}{\partial \boldsymbol{n}}(\boldsymbol{x}_j; \boldsymbol{x}'(s)) ds = -\frac{1}{2\pi} (\theta(s_{k+1/2}) - \theta(s_{k-1/2})) \quad (4.27)$$

となる. 式 (4.27) より, 式 (4.23) の高精度の近似値を得るためには, $\theta(s)$ の計算を精度よくおこなえばよいことがわかる. また式 (4.24) の計算について, 同じく arclength parameter s を考えると

$$\int_{s_{k-1/2}}^{s_{k+1/2}} u^*(\boldsymbol{x}_j; \boldsymbol{x}'(s)) ds \quad (4.28)$$

となる. 式 (4.28) は級数展開法あるいは Gauss 積分を用いて精度よく計算できる.

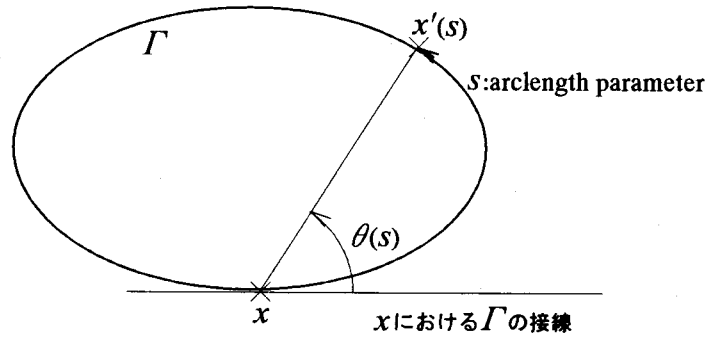


図 4.2 Arclength parameter s と角度 $\theta(s)$

4.3.2 境界要素法における誤差の評価 (一般の曲線の場合)

式 (4.22) を用いた近似による誤差の評価を考える. まず境界 Γ 上で定義された関数 $u(\boldsymbol{x})$ および $q(\boldsymbol{x})$ に対する境界積分 $K(u)(\boldsymbol{x})$ および $L(q)(\boldsymbol{x})$ を

$$K(u)(\boldsymbol{x}) \equiv -\frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} \frac{\partial u^*(\boldsymbol{x}; \boldsymbol{x}')}{\partial \boldsymbol{n}(\boldsymbol{x})} u(\boldsymbol{x}') d\Gamma(\boldsymbol{x}') \quad (4.29)$$

$$L(q)(\boldsymbol{x}) \equiv \int_{\Gamma} u^*(\boldsymbol{x}; \boldsymbol{x}') q(\boldsymbol{x}') d\Gamma(\boldsymbol{x}') \quad (4.30)$$

と定義する. 点 \boldsymbol{x} を起点とした arclength parameter s を考え, 関数 $u(\boldsymbol{x}'(s))$, $q(\boldsymbol{x}'(s))$ を改めて $u(s)$, $q(s)$ で表す. このとき積分 $K(u)(\boldsymbol{x})$ および $L(q)(\boldsymbol{x})$ はそれぞれ

$$K(u)(\boldsymbol{x}) = \int_0^l \frac{d\theta}{ds} u(s) ds \quad (4.31)$$

$$L(q)(\boldsymbol{x}) = \int_0^l u^*(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}'(s)) q(s) ds \quad (4.32)$$

で表される. 境界 Γ を m 個の部分 Γ_j , $j = 1, 2, \dots, m$ に分割し, それぞれの中点を \boldsymbol{x}_j , $j = 1, 2, \dots, m$ で表す. なお分割は $\boldsymbol{x}_1 = \boldsymbol{x}$ となるようにおこなう. また Γ_j の中点における s の値を s_j , 両端点における s の値を $s_{j-1/2}$, $s_{j+1/2}$ で表し, Γ における $u(s)$ および $q(s)$ の一定要素近似関数 $\tilde{u}(s)$, $\tilde{q}(s)$ を

$$\tilde{u}(s) \equiv u(s_j), \quad s \in [s_{j-1/2}, s_{j+1/2}), \quad j = 1, 2, \dots, m \quad (4.33)$$

$$\tilde{q}(s) \equiv q(s_j), \quad s \in [s_{j-1/2}, s_{j+1/2}), \quad j = 1, 2, \dots, m \quad (4.34)$$

で定義する. 式 (4.29), (4.30) より, 一定要素を用いた $K(u)(\boldsymbol{x})$ および $L(q)(\boldsymbol{x})$ の近似値は $K(\tilde{u})(\boldsymbol{x})$, $L(\tilde{q})(\boldsymbol{x})$ で表され, したがって評価する誤差は

$$\varepsilon_K \equiv |K(u)(\boldsymbol{x}) - K(\tilde{u})(\boldsymbol{x})| \quad (4.35)$$

$$\varepsilon_L \equiv |L(q)(\boldsymbol{x}) - L(\tilde{q})(\boldsymbol{x})| \quad (4.36)$$

である.

まず誤差 ε_K の評価を考える. 仮想的に点 $s_{j-1/2}$ および $s_{j+1/2}$ における $u(s)$ の値を考え, $u(s)$ に対する一次要素近似関数を

$$\begin{aligned} \hat{u}(s) &\equiv \frac{u(s_{j+1/2}) + u(s_{j-1/2})}{2} + \frac{u(s_{j+1/2}) - u(s_{j-1/2})}{h_j}(s - s_j) \\ &\equiv \hat{u}_j + M_{u,j}(s - s_j), \quad s \in [s_{j-1/2}, s_{j+1/2}) \end{aligned} \quad (4.37)$$

で定義する. ここで $h_j = s_{j+1/2} - s_{j-1/2}$ である. このとき ε_K は

$$\begin{aligned} \varepsilon_K &= |K(\tilde{u})(\boldsymbol{x}) - K(\hat{u})(\boldsymbol{x}) + K(\hat{u})(\boldsymbol{x}) - K(u)(\boldsymbol{x})| \\ &\leq |K(\tilde{u})(\boldsymbol{x}) - K(\hat{u})(\boldsymbol{x})| + |K(\hat{u})(\boldsymbol{x}) - K(u)(\boldsymbol{x})| \\ &\equiv I_1 + I_2 \end{aligned} \quad (4.38)$$

で評価される.

式 (4.38) の右辺のうち, まず I_2 に対する評価を考える. 仮定より領域 Ω が凸であるから

$$\frac{d\theta}{ds} \geq 0 \quad (4.39)$$

が成り立ち,

$$\begin{aligned} I_2 &= \left| \frac{1}{2\pi} \int_0^l (\hat{u}(s) - u(s)) \frac{d\theta}{ds} ds \right| \\ &\leq \frac{1}{2\pi} \int_0^l |\hat{u}(s) - u(s)| \frac{d\theta}{ds} ds \\ &= \frac{1}{2\pi} \sum_{j=1}^m \int_{s_{j-1/2}}^{s_{j+1/2}} |\hat{u}(s) - u(s)| \frac{d\theta}{ds} ds \end{aligned} \quad (4.40)$$

を得る. ここで関数 $\hat{u}(s)$ は一次要素近似関数であることより

$$|\hat{u}(s) - u(s)| \leq \frac{N_{u,j}}{2} \left(\frac{h_j}{2}\right)^2 \leq \frac{N_u}{8} h_{max}^2 \quad (4.41)$$

で評価できる. ただし

$$N_{u,j} = \sup_{s \in [s_{j-1/2}, s_{j+1/2}]} \left| \frac{d^2 u}{ds^2}(s) \right|, \quad N_u = \max_{j=1,2,\dots,m} N_{u,j}, \quad h_{max} = \max_{j=1,2,\dots,m} h_j \quad (4.42)$$

である. よって I_2 は

$$\begin{aligned} I_2 &\leq \frac{1}{2\pi} \sum_{j=1}^m \int_{s_{j-1/2}}^{s_{j+1/2}} \frac{N_u}{8} h_{max}^2 \frac{d\theta}{ds} ds \\ &= \frac{N_u}{16} h_{max}^2 \end{aligned} \quad (4.43)$$

で評価できる.

次に I_1 に対する評価を考える. 積分 I_1 は

$$\begin{aligned} I_1 &= \left| \frac{1}{2\pi} \sum_{j=1}^m \int_{s_{j-1/2}}^{s_{j+1/2}} (\tilde{u}(s) - \hat{u}(s)) \frac{d\theta}{ds} ds \right| \\ &\leq \frac{1}{2\pi} \sum_{j=1}^m \left\{ \int_{-h_j/2}^{h_j/2} |u_j - \hat{u}_j| \frac{d\theta}{dt} dt + \left| \int_{-h_j/2}^{h_j/2} M_{u,j} t \frac{d\theta}{dt} dt \right| \right\} \\ &\equiv \frac{1}{2\pi} \sum_{j=1}^m (I_{3,j} + I_{4,j}) \end{aligned} \quad (4.44)$$

で評価できる. ここで各 j に対し $t = s - s_j$ とおいた. 式 (4.44) の右辺のうち, まず $I_{3,j}$ に対する評価を考えると, 関数 $\hat{u}(s)$ が一次要素近似関数であることより

$$|u_j - \hat{u}_j| \leq \frac{N_{u,j}}{2} \left(\frac{h_j}{2}\right)^2 \leq \frac{N_u}{8} h_{max}^2 \quad (4.45)$$

が成立することから,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \sum_{j=1}^m I_{3,j} &\leq \frac{1}{2\pi} \sum_{j=1}^m \int_{s_{j-1/2}}^{s_{j+1/2}} \frac{N_u}{8} h_{max}^2 \frac{d\theta}{ds} ds \\ &= \frac{N_u}{16} h_{max}^2 \end{aligned} \quad (4.46)$$

なる評価を得る. 次に $I_{4,j}$ の評価を考える. 境界 Γ が C^3 級のなめらかさをもつことから $\frac{d\theta}{dt}$ は C^1 級の関数となる. したがって平均値の定理より

$$\frac{d\theta}{dt}(t) = \frac{d\theta}{dt}(0) + t \frac{d^2\theta}{dt^2}(\eta(t)), \quad t \in [-h_j/2, h_j/2] \quad (4.47)$$

となる関数 $\eta(t)$ が存在する. ただし $\eta(t)$ は

$$0 \leq |\eta(t)| \leq t \text{ かつ } t\eta(t) > 0, \quad t \neq 0 \quad (4.48)$$

を満たす関数である. よって $I_{4,j}$ は

$$\begin{aligned} I_{4,j} &= \left| \int_{-h_j/2}^{h_j/2} M_{u,j} t \left(\frac{d\theta}{dt}(0) + t \frac{d^2\theta}{dt^2}(\eta(t)) \right) dt \right| \\ &= \left| M_{u,j} \int_{-h_j/2}^{h_j/2} t^2 \frac{d^2\theta}{dt^2}(\eta(t)) dt \right| \\ &\leq |M_{u,j}| \int_{-h_j/2}^{h_j/2} t^2 N_{\theta,j} dt \\ &= \frac{M_u N_\theta}{12} h_{max}^3 \end{aligned} \quad (4.49)$$

で評価できる. ここで

$$M_u = \max_{j=1,2,\dots,m} |M_{u,j}|, \quad N_{\theta,j} = \sup_{[-h_j/2, h_j/2]} \left| \frac{d^2\theta}{dt^2} \right|, \quad N_\theta = \max_{j=1,2,\dots,m} N_{\theta,j} \quad (4.50)$$

である.

式 (4.43), (4.44), (4.46), (4.49) をまとめて, 誤差 ε_K に対する評価として

$$\begin{aligned} \varepsilon_K &\leq \frac{1}{2\pi} \sum_{j=1}^m (I_{3,j} + I_{4,j}) + I_2 \\ &\leq \frac{N_u}{16} h_{max}^2 + \frac{M_u N_\theta}{24\pi} m h_{max}^3 + \frac{N_u}{16} h_{max}^2 \\ &\leq \frac{N_u}{8} h_{max}^2 + \frac{M_u N_\theta}{24\pi} m h_{max}^3 \end{aligned} \quad (4.51)$$

を得る. なお各要素の幅 h_j が一樣になるように m を増加する場合, すなわち

$$C h_{min} \equiv C \min_{j=1,2,\dots,m} h_j \geq h_{max} \quad (4.52)$$

を満たす m によらない定数 C が存在する場合には,

$$m \leq \frac{l}{h_{min}} \leq \frac{Cl}{h_{max}} \quad (4.53)$$

が成立する事から, 式 (4.54) の評価を

$$\varepsilon_K \leq \left(\frac{N_u}{8} + \frac{Cl M_u N_\theta}{24\pi} \right) h_{max}^2 \quad (4.54)$$

とすることができる.

次に誤差 ε_L の評価を考える. 先に示した ε_K の評価と同様に, 仮想的に点 $s_{j-1/2}$ および $s_{j+1/2}$ における $u(s)$ における値を考え, $q(s)$ に対する一次要素近似関数

$$\begin{aligned} \hat{q}(s) &\equiv \frac{q(s_{j+1/2}) + q(s_{j-1/2})}{2} + \frac{q(s_{j+1/2}) - q(s_{j-1/2})}{h_j} (s - s_j) \\ &\equiv \hat{q}_j + M_{q,j} (s - s_j), \quad s \in [s_{j-1/2}, s_{j+1/2}] \end{aligned} \quad (4.55)$$

を定義する. このとき ε_L は

$$\begin{aligned}\varepsilon_L &= |L(\tilde{q})(\mathbf{x}) - L(\hat{q})(\mathbf{x}) + L(\hat{q})(\mathbf{x}) - L(q)(\mathbf{x})| \\ &\leq |L(\tilde{q})(\mathbf{x}) - L(\hat{q})(\mathbf{x})| + |L(\hat{q})(\mathbf{x}) - L(q)(\mathbf{x})| \\ &\equiv I_5 + I_6\end{aligned}\quad (4.56)$$

で評価できる.

式 (4.56) の右辺のうち, まず I_6 の評価をおこなう. 点 \mathbf{x} と $\mathbf{x}'(s)$ 間の Euclid 距離を $r(s) \equiv |\mathbf{x}'(s) - \mathbf{x}|$ で表すと, I_6 は

$$\begin{aligned}I_6 &= \frac{1}{2\pi} \left| \int_0^l (\hat{q}(s) - q(s)) \ln r(s) ds \right| \\ &\leq \frac{1}{2\pi} \sum_{j=1}^m \int_{s_{j-1/2}}^{s_{j+1/2}} |\hat{q}(s) - q(s)| |\ln r(s)| ds\end{aligned}\quad (4.57)$$

で評価できる. また関数 $\hat{q}(s)$ は一次要素近似関数であるから

$$|\hat{q}(s) - q(s)| \leq \frac{N_{q,j}}{2} \left(\frac{h_j}{2} \right)^2 \leq \frac{N_q}{8} h_{max}^2 \quad (4.58)$$

を得る. ここで

$$N_{q,j} = \sup_{s \in [s_{j-1/2}, s_{j+1/2})} \left| \frac{d^2 q}{ds^2} \right|, \quad N_q = \max_{j=1,2,\dots,m} N_{q,j} \quad (4.59)$$

である. したがって I_6 は

$$\begin{aligned}I_6 &\leq \frac{1}{2\pi} \sum_{j=1}^m \int_{s_{j-1/2}}^{s_{j+1/2}} \frac{N_q}{8} h_{max}^2 |\ln r(s)| ds \\ &= \frac{N_q}{8} L(\mathbf{x}) h_{max}^2\end{aligned}\quad (4.60)$$

で評価できる. ここで $L(\mathbf{x})$ は

$$L(\mathbf{x}) = \frac{1}{2\pi} \int_0^l |\ln r(s)| ds < \infty \quad (4.61)$$

で定義される, 領域 Ω の形状および点 \mathbf{x} の位置に依存する実数である.

次に I_5 に対する評価をおこなうと

$$\begin{aligned}I_5 &= \frac{1}{2\pi} \left| \int_0^l (\tilde{q}(s) - \hat{q}(s)) \ln r(s) ds \right| \\ &\leq \frac{1}{2\pi} \sum_{j=1}^m \left| \int_{s_{j-1/2}}^{s_{j+1/2}} (\tilde{q}(s) - \hat{q}(s)) \ln r(s) ds \right| \\ &= \frac{1}{2\pi} \sum_{j=1}^m \left| \int_{-h_j/2}^{h_j/2} (q_j - \hat{q}_j - M_{q,j} t) \ln r(t + s_j) dt \right|\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq \frac{1}{2\pi} \sum_{j=1}^m \int_{-h_j/2}^{h_j/2} |q_j - \hat{q}_j| |\ln r(t + s_j)| dt + \frac{1}{2\pi} \sum_{j=1}^m |M_{q,j}| \left| \int_{-h_j/2}^{h_j/2} t \ln r(t + s_j) \right| dt \\
&\equiv \frac{1}{2\pi} \sum_{j=1}^m I_{7,j} + \frac{1}{2\pi} \sum_{j=1}^m I_{8,j}
\end{aligned} \tag{4.62}$$

を得る. ここで各 j において $t = s - s_j$ とした. 式 (4.62) の右辺のうち, まず $I_{7,j}$ を考えると, 関数 $\hat{q}(s)$ は一次要素近似関数であることより

$$|q_j - \hat{q}_j| \leq \frac{N_{q,j}}{2} \left(\frac{h_j}{2} \right)^2 \leq \frac{N_q}{8} h_{max}^2 \tag{4.63}$$

が成立する. したがって

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2\pi} \sum_{j=1}^m I_{7,j} &\leq \frac{N_q}{8} h_{max}^2 \sum_{j=1}^m \frac{1}{2\pi} \int_{-h_j/2}^{h_j/2} |\ln r(t + s_j)| dt \\
&\leq \frac{N_q}{8} L(\mathbf{x}) h_{max}^2
\end{aligned} \tag{4.64}$$

なる評価を得る.

次に $I_{8,j}$ の評価を考える. 境界 Γ の曲率半径の最小値を ρ_{min} で表し, $h_{max} < \rho_{min}/4$ と仮定する. この ρ_{min} を用いて境界 Γ を図 4.3 に示す 2つの弧 G_1, G_2 に分割する. ただし G_1, G_2 はいずれも端点を含むものとする. このとき各 Γ_j は G_1, G_2 に含まれるか, あるいは G_1, G_2 の端点を含む.

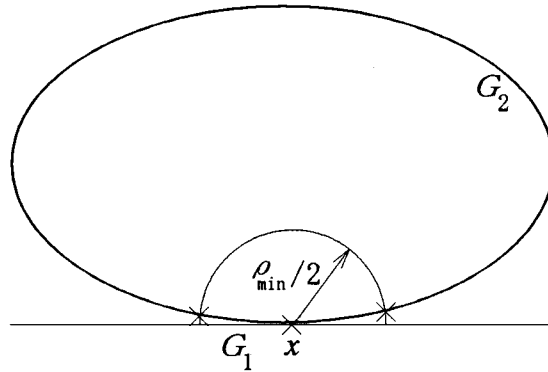


図 4.3 境界 Γ の G_1, G_2 への分割

まず G_2 に含まれる Γ_j における $I_{8,j}$ の評価を考える. 境界要素 Γ_j において $r(t + s_j) \geq \rho_{min}/2$ が成り立ち, さらに $r(t + s_j)$ が C^1 級であることから, 平均値の定理より

$$\ln r(t + s_j) = \ln r(s_j) + \frac{1}{r(\eta(t) + s_j)} \frac{dr}{dt}(\eta(t) + s_j)t \tag{4.65}$$

となる関数 $\eta(t)$ が存在する. ここで $\eta(t)$ は

$$0 < |\eta(t)| < t \text{ かつ } t\eta(t) > 0, \quad t \neq 0 \tag{4.66}$$

を満たす関数である. よって $I_{8,j}$ は

$$\begin{aligned} I_{8,j} &\leq |M_{q,j}| \left| \int_{-h_j/2}^{h_j/2} t \left\{ \ln r(s_j) + \frac{1}{r(\eta(t) + s_j)} \frac{dr}{dt}(\eta(t) + s_j)t \right\} dt \right| \\ &\leq |M_{q,j}| \int_{-h_j/2}^{h_j/2} \frac{1}{r_{m,j}} M_{r,j} t^2 dt \\ &= \frac{|M_{q,j}| M_{r,j} h_j^3}{12r_{m,j}} \end{aligned} \quad (4.67)$$

で評価される. ただし

$$r_{m,j} = \inf_{t \in [-h_j/2, h_j/2]} r(t + s_j), \quad M_{r,j} = \sup_{t \in [-h_j/2, h_j/2]} \left| \frac{dr}{dt}(t + s_j) \right| \quad (4.68)$$

である. さらに

$$r_{m,j} \geq \inf_{\mathbf{x}'(s) \in G_2} r(s) \geq \rho_{\min}/2 \quad (4.69)$$

$$M_{r,j} \leq \sup_{\mathbf{x}'(s) \in G_2} \left| \frac{dr}{ds}(s) \right| \equiv M_{r,G_2} < 1 \quad (4.70)$$

$$|M_{q,j}| \leq \max_{j=1,2,\dots,m} |M_{q,j}| \equiv M_q \quad (4.71)$$

が成立することから, 式 (4.67) は

$$I_{8,j} \leq \frac{M_q M_{r,G_2} h_{\max}^3}{6\rho_{\min}} \quad (4.72)$$

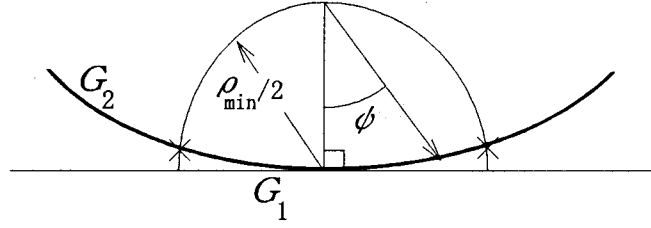
となる.

次に Γ_j が G_2 に含まれない場合について考える. 弧 G_1 の近傍を図 4.4 に示す. 境界要素 Γ_j について $h_{\max} < \rho_{\min}/4$ より G_1 内に少なくとも 4 つの Γ_j の端点が存在する. また G_1 の端点を含む Γ_j を $\Gamma_{j_1}, \Gamma_{j_2}$ ($j_1 < j_2$) で表す. まず $j \neq 1$ の場合を考える. 図 4.4 の右半分に対する評価をおこなえば十分である. このとき $r(s)$ は Γ_j について単調増加であるから, $I_{8,j}$ は

$$\begin{aligned} I_{8,j} &\leq |M_{q,j}| \left| \int_{-h_j/2}^{h_j/2} t \ln r(t + s_j) dt \right| \\ &\leq |M_{q,j}| \left| \int_0^{h_j/2} t \ln \frac{r(s_j + h_j/2)}{r(s_j - h_j/2)} dt \right| \\ &\leq \frac{M_q h_{\max}^2}{8} \ln \frac{s_{j+1/2}}{s_{j-1/2}} \end{aligned} \quad (4.73)$$

で評価できる. 次に $j=1$ について, 図 4.4 に示すパラメータ ψ を導入すると

$$0 < M_\psi < \frac{d\psi}{ds} < \frac{2}{\rho_{\min}} \quad (4.74)$$

図 4.4 弧 G_1 の近傍と角度 ψ

なる M_ψ が存在する. よって arclength parameter s について

$$|s| > r(s) > \rho_{min} \left| \sin \frac{\psi}{2} \right| > \rho_{min} \left| \sin \frac{M_\psi}{2} s \right| \quad (4.75)$$

が成立する. したがって $I_{8,1}$ に対する評価として

$$\begin{aligned} I_{8,1} &\leq |M_{q,1}| \left| \int_{-h_1/2}^{h_1/2} s \ln r(s) ds \right| \\ &\leq |M_{q,1}| \left| \int_0^{h_1/2} s \ln \frac{s}{\rho_{min} \sin \frac{M_\psi}{2} s} ds \right| \\ &\leq |M_{q,1}| \left| \int_0^{h_1/2} s \ln \frac{s}{\rho_{min} \frac{M_\psi}{2\pi} s} ds \right| \\ &\leq \frac{M_q}{8} h_{max}^2 \ln \frac{2\pi}{M_\psi \rho_{min}} \end{aligned} \quad (4.76)$$

を得る. 式 (4.72), (4.73), (4.76) をまとめると

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^m I_{8,j} &\leq I_{8,1} + \sum_{j=2}^{j_1} I_{8,j} + \sum_{j=j_1+1}^{j_2-1} I_{8,j} + \sum_{j=j_2}^m I_{8,j} \\ &\leq \frac{M_q}{8} h_{max}^2 \ln \frac{2\pi}{M_\psi \rho_{min}} + \sum_{j=2}^{j_1} \frac{M_q}{8} h_{max}^2 \ln \frac{r(s_{j+1/2})}{r(s_{j-1/2})} + \sum_{j=j_1+1}^{j_2-1} \frac{M_q}{6} h_{max}^3 \frac{M_{r,G_2}}{\rho_{min}} \\ &\quad + \sum_{j=j_2}^m \frac{M_q}{8} h_{max}^2 \ln \frac{r(s_{j-1/2})}{r(s_{j+1/2})} \\ &\leq \frac{M_q}{8} h_{max}^2 \ln \frac{2\pi}{M_\psi \rho_{min}} + \frac{M_q}{4} h_{max}^2 \ln \frac{3\pi}{M_\psi h_{max}} + \frac{M_q}{6} h_{max}^2 \frac{ClM_{r,G_2}}{\rho_{min}} \\ &\leq M_q \left\{ \frac{1}{8} \ln \frac{18\pi^3}{M_\psi^3 \rho_{min}} + \frac{ClM_{r,G_2}}{6\rho_{min}} \right\} h_{max}^2 + \frac{M_q}{4} h_{max}^2 \ln h_{max}^{-1} \end{aligned} \quad (4.77)$$

なる評価が成立する. ここで境界要素分割について式 (4.52) を仮定した.

式 (4.56),(4.60),(4.62),(4.64),(4.77) をまとめて, 誤差 ε_L は

$$\begin{aligned}
\varepsilon_L &\leq I_5 + I_6 \\
&\leq \frac{1}{2\pi} \sum_{j=1}^m I_{7,j} + \frac{1}{2\pi} \sum_{j=1}^m I_{8,j} + I_6 \\
&\leq \frac{N_q}{8} L(\mathbf{x}) h_{max}^2 + \frac{M_q}{2\pi} \left\{ \frac{1}{8} \ln \frac{18\pi^3}{M_\psi^3 \rho_{min}} + \frac{ClM_{r,G_2}}{6\rho_{min}} \right\} h_{max}^2 \\
&\quad + \frac{M_q}{8\pi} h_{max}^2 \ln h_{max}^{-1} + \frac{N_q}{8} L(\mathbf{x}) h_{max}^2 \\
&= \frac{N_q}{4} L(\mathbf{x}) h_{max}^2 + \frac{M_q}{2\pi} \left\{ \frac{1}{8} \ln \frac{18\pi^3}{M_\psi^3 \rho_{min}} + \frac{ClM_{r,G_2}}{6\rho_{min}} \right\} h_{max}^2 \\
&\quad + \frac{M_q}{8\pi} h_{max}^2 \ln h_{max}^{-1} \tag{4.78}
\end{aligned}$$

で評価できる.

結論として, (4.22) により計算された対数ポテンシャルの近似値 $\tilde{u}_{L,j}$ の誤差の評価として

$$\begin{aligned}
|u_L(x_j) - \tilde{u}_{L,j}| &\leq \varepsilon_K + \varepsilon_L \\
&\leq \left(\frac{N_u}{8} + \frac{ClM_u N_\theta}{24\pi} \right) h_{max}^2 \\
&\quad + \frac{N_q}{4} h_{max}^2 L(\mathbf{x}) + \frac{M_q}{2\pi} \left\{ \frac{1}{8} \ln \frac{18\pi^3}{M_\psi^3 \rho_{min}} + \frac{ClM_{r,G_2}}{6\rho_{min}} \right\} h_{max}^2 \\
&\quad + \frac{M_q}{8\pi} h_{max}^2 \ln h_{max}^{-1} \tag{4.79}
\end{aligned}$$

を得る.

4.3.3 境界要素法における誤差の評価 (円の場合)

式 (4.54),(4.78) による評価を境界 Γ が円の場合に適用する. 円の半径が r の場合, ε_K の評価において

$$N_\theta = 0 \tag{4.80}$$

が成立し, ε_L の評価において, $L(\mathbf{x})$ は式 (4.61) の定義より

$$\begin{aligned}
L(\mathbf{x}) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi r} \left| \ln \left(2r \sin \frac{s}{2r} \right) \right| ds \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left| \ln \left(2r \sin \frac{\theta}{2} \right) \right| r d\theta \\
&\leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left\{ |\ln 2r| + \left| \ln \sin \frac{\theta}{2} \right| \right\} r d\theta \\
&= r |\ln 2r| + r \ln 2 \tag{4.81}
\end{aligned}$$

となる. さらに

$$M_{r,G_2} \leq 1, \quad M_\psi = \frac{1}{r}, \quad \rho_{\min} = r, \quad l = 2\pi r \quad (4.82)$$

が成立することより

$$\varepsilon_K \leq \frac{N_u}{8} h_{\max}^2 \quad (4.83)$$

$$\begin{aligned} \varepsilon_L \leq & \frac{N_q}{4} r (|\ln 2r| + \ln 2) h_{\max}^2 + \frac{M_q}{2\pi} \left(\frac{1}{8} \ln 18\pi^3 r^2 + \frac{\pi C}{3} \right) h_{\max}^2 \\ & + \frac{M_q}{8\pi} h_{\max}^2 \ln h_{\max}^{-1} \end{aligned} \quad (4.84)$$

なる評価が得られる.

式 (4.83), (4.84) を Γ が m 個の等間隔の要素に分割された場合に適用すると

$$h_{\max} = \frac{2\pi r}{m}, \quad C = 1 \quad (4.85)$$

より, ε_K , ε_L の評価について

$$\varepsilon_K \leq \frac{N_u}{2} \pi^2 r^2 m^{-2} \quad (4.86)$$

$$\begin{aligned} \varepsilon_L \leq & N_q (|\ln 2r| + \ln 2) \pi^2 r^3 m^{-2} + \frac{M_q}{2} \left(\frac{1}{2} \ln \frac{9\pi}{2} + \frac{4}{3} \pi \right) \pi r^2 m^{-2} \\ & + \frac{M_q}{2} \pi r^2 m^{-2} \ln m \end{aligned} \quad (4.87)$$

が成立する. しかし, 式 (4.54), (4.78) の評価を得る際に境界の形状および要素の分割について一般性を考慮したため, 式 (4.86), (4.87) の評価はかなり大きくなっているものと考えられる. 以下では半径 r の円領域において, 境界を m 等間隔の要素に分割した場合に対する評価式 (4.86), (4.87) の精密化を考える.

まず ε_K の評価をおこなう. 境界が円の場合

$$\frac{d\theta}{ds} = \frac{1}{2r} \quad (4.88)$$

が成立することから

$$K(u)(\mathbf{x}) = \frac{1}{2\pi} \int_0^l u(s) \frac{1}{2r} ds \quad (4.89)$$

となる. したがって一定要素近似関数 $\tilde{u}(s)$ を用いた場合, $K(u)(\mathbf{x})$ の近似値は

$$K(\tilde{u})(\mathbf{x}) = \frac{1}{2\pi} \sum_{j=1}^m u_j \int_{s_{j-1/2}}^{s_{j+1/2}} \frac{1}{2r} ds = \frac{1}{2\pi} \sum_{j=1}^m u_j \frac{\pi}{m} \quad (4.90)$$

で表される. ここで

$$h \equiv h_j = s_{j+1/2} - s_{j-1/2} = \frac{2\pi r}{m}, \quad j = 1, 2, \dots, m \quad (4.91)$$

を用いた. 次に境界要素分割

$$\hat{\Gamma}_j = \{\mathbf{x}(s) \mid s \in [s_j, s_{j+1}]\}, \quad j = 1, 2, \dots, m \quad (4.92)$$

を考え, $u(\mathbf{x})$ の一次要素近似関数を

$$\hat{u}(s) = \frac{u(s_{j+1}) + u(s_j)}{2} + \frac{u(s_{j+1}) - u(s_j)}{h}(s - s_{j+1/2}), \quad s \in [s_{j-1}, s_j] \quad (4.93)$$

と定義する. 関数 $\hat{u}(s)$ を用いた $K(u)(\mathbf{x})$ の近似値は

$$\begin{aligned} K(\hat{u})(\mathbf{x}) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^l \hat{u}(s) \frac{1}{2r} ds \\ &= \frac{1}{2\pi} \sum_{j=1}^m \int_{s_j}^{s_{j+1}} \left\{ \frac{u(s_{j+1}) + u(s_j)}{2} + \frac{u(s_{j+1}) - u(s_j)}{h}(s - s_{j+1/2}) \right\} \frac{1}{2r} ds \\ &= \frac{1}{2\pi} \sum_{j=1}^m \frac{u(s_{j+1}) + u(s_j)}{2} \frac{\pi}{m} \\ &= \frac{1}{2\pi} \sum_{j=1}^m u_j \frac{\pi}{m} \end{aligned} \quad (4.94)$$

で表され, $K(\tilde{u})(\mathbf{x})$ と一致する. したがって $\varepsilon_K = |K(\tilde{u})(\mathbf{x}) - K(u)(\mathbf{x})|$ の評価を $|K(\hat{u})(\mathbf{x}) - K(u)(\mathbf{x})|$ の評価に置き換えることができる. また $\hat{u}(s)$ は一次要素近似関数であり, 各 $\hat{\Gamma}_j$ の端点で $u(s)$ と一致することから

$$|\hat{u}(s) - u(s)| \leq \frac{N_{u,j}}{2} |(s - s_j)(s - s_{j+1})|, \quad s \in [s_j, s_{j+1}] \quad (4.95)$$

なる評価が成立する. よって ε_K の評価として

$$\begin{aligned} \varepsilon_K &= |K(\hat{u})(\mathbf{x}) - K(u)(\mathbf{x})| \\ &\leq \frac{1}{2\pi} \sum_{j=1}^m \int_{s_j}^{s_{j+1}} \frac{N_{u,j}}{2} |(s - s_j)(s - s_{j+1})| \frac{1}{2r} ds \\ &\leq \frac{N_u}{6} \pi^2 r^2 m^{-2} \end{aligned} \quad (4.96)$$

を得る.

次に ε_L の評価をおこなう. 境界が円の場合, 点 \mathbf{x} と $\mathbf{x}'(s)$ の距離 $r(s)$ が

$$r(s) = \left| 2r \sin \frac{s}{2r} \right| \quad (4.97)$$

で表されることより, $L(q)(\mathbf{x})$ は

$$\begin{aligned} L(q)(\mathbf{x}) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^l q(s) \ln \left| 2r \sin \frac{s}{2r} \right| ds \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^l q(s) \ln 2r ds + \frac{1}{2\pi} \int_0^l q(s) \ln \left| \sin \frac{s}{2r} \right| ds \\ &\equiv I_1 + I_2 \end{aligned} \quad (4.98)$$

で表される. また一定要素近似関数 $\tilde{q}(s)$ を用いた場合, $L(q)(\boldsymbol{x})$ の近似値は

$$\begin{aligned} L(\tilde{q})(\boldsymbol{x}) &= \frac{1}{2\pi} \sum_{j=1}^m q_j \int_{s_{j-1/2}}^{s_{j+1/2}} \ln 2r ds + \frac{1}{2\pi} \sum_{j=1}^m q_j \int_{s_{j-1/2}}^{s_{j+1/2}} \ln \left| \sin \frac{s}{2r} \right| ds \\ &= \frac{1}{2\pi} \sum_{j=1}^m q_j \frac{2\pi r}{m} \ln 2r + \frac{1}{2\pi} \sum_{j=1}^m q_j \int_{s_{j-1/2}}^{s_{j+1/2}} \ln \left| \sin \frac{s}{2r} \right| ds \\ &\equiv \tilde{I}_1 + \tilde{I}_2 \end{aligned} \quad (4.99)$$

で表される.

まず I_1 に対する \tilde{I}_1 の誤差を評価する. 式 (4.92) に示した境界要素分割 $\hat{\Gamma}_j$ を考え, 一次要素近似関数

$$\hat{q}(s) = \frac{q(s_{j+1}) + q(s_j)}{2} + \frac{q(s_{j+1}) - q(s_j)}{h} (s - s_{j+1/2}), \quad s \in [s_{j-1}, s_j] \quad (4.100)$$

を定義する. このとき, $\hat{q}(s)$ を用いた I_1 の近似値は

$$\begin{aligned} \hat{I}_1 &\equiv \frac{1}{2\pi} \int_0^l \hat{q}(s) \ln 2r ds \\ &= \frac{1}{2\pi} \sum_{j=1}^m \int_{s_j}^{s_{j+1}} \left\{ \frac{q(s_{j+1}) + q(s_j)}{2} + \frac{q(s_{j+1}) - q(s_j)}{h} (s - s_{j+1/2}) \right\} \ln 2r ds \\ &= \frac{1}{2\pi} \sum_{j=1}^m \frac{q(s_{j+1}) + q(s_j)}{2} \frac{2\pi r}{m} \ln 2r \\ &= \frac{1}{2\pi} \sum_{j=1}^m q_j \frac{2\pi r}{m} \ln 2r \end{aligned} \quad (4.101)$$

となり, \tilde{I}_1 と一致する. したがって $|I_1 - \tilde{I}_1|$ に対する評価を $|I_1 - \hat{I}_1|$ に対する評価に置き換えることができる. また関数 $\hat{q}(s)$ は一次要素近似関数であり, 各 $\hat{\Gamma}_j$ の端点で $q(s)$ と一致することから

$$|\hat{q}(s) - q(s)| \leq \frac{N_{q,j}}{2} |(s - s_j)(s - s_{j+1})|, \quad s \in [s_j, s_{j+1}] \quad (4.102)$$

なる評価が成立する. したがって, \hat{I}_1 による I_1 の近似誤差評価として

$$\begin{aligned} |I_1 - \tilde{I}_1| &= |I_1 - \hat{I}_1| \\ &\leq \frac{1}{2\pi} \sum_{j=1}^m \int_{s_j}^{s_{j+1}} |q(s) - \hat{q}(s)| |\ln 2r| ds \\ &\leq \frac{1}{2\pi} |\ln 2r| \sum_{j=1}^m \int_{s_j}^{s_{j+1}} \frac{N_{q,j}}{2} |(s - s_j)(s - s_{j+1})| ds \\ &\leq \frac{N_q}{3} \pi^2 r^3 |\ln 2r| m^{-2} \end{aligned} \quad (4.103)$$

を得る.

次に I_2 の \tilde{I}_2 による近似誤差について考える. 仮想的に各 Γ_j の端点における $q(\mathbf{x})$ の値を考え, $q(s)$ の一次近似関数 $\hat{q}(s)$ をあらためて

$$\begin{aligned}\hat{q}(s) &= \frac{q(s_{j+1/2}) + q(s_{j-1/2})}{2} + \frac{q(s_{j+1/2}) - q(s_{j-1/2})}{h}(s - s_j) \\ &\equiv \hat{q}_j + M_{q,j}(s - s_j), \quad s \in [s_{j-1/2}, s_{j+1/2})\end{aligned}\quad (4.104)$$

で定義する. このとき

$$\begin{aligned}\hat{I}_2 &\equiv \frac{1}{2\pi} \int_0^l \hat{q}(s) \ln \left| \sin \frac{s}{2r} \right| ds \\ &= \frac{1}{2\pi} \sum_{j=1}^m \hat{q}_j \int_{s_{j-1/2}}^{s_{j+1/2}} \ln \left| \sin \frac{s}{2r} \right| ds + \frac{1}{2\pi} \sum_{j=1}^m \int_{-h/2}^{h/2} M_{q,j} t \ln \left| \sin \frac{t + s_j}{2r} \right| dt \\ &\equiv \hat{I}_3 + \hat{I}_4\end{aligned}\quad (4.105)$$

となる. ただし各 j において $t = s - s_j$ とした. したがって \tilde{I}_2 による誤差の評価として

$$\begin{aligned}|I_2 - \tilde{I}_2| &\leq |I_2 - \hat{I}_2| + |\hat{I}_2 - \tilde{I}_2| \\ &\leq |I_2 - \hat{I}_2| + |\tilde{I}_2 - \hat{I}_3| + |\hat{I}_4|\end{aligned}\quad (4.106)$$

を得る. 式 (4.106) の右辺第 1 項および第 2 項は, $\hat{q}(s)$ について

$$|q(s) - \hat{q}(s)| \leq \frac{N_{q,j}}{2} \left(\frac{h}{2} \right)^2, \quad s \in [s_{j-1/2}, s_{j+1/2}) \quad (4.107)$$

$$|q_j - \hat{q}_j| \leq \frac{N_{q,j}}{2} \left(\frac{h}{2} \right)^2 \quad (4.108)$$

が成立することから, それぞれ

$$\begin{aligned}|I_2 - \hat{I}_2| &= \left| \frac{1}{2\pi} \sum_{j=1}^m \int_{s_{j-1/2}}^{s_{j+1/2}} (q(s) - \hat{q}(s)) \ln \left| \sin \frac{s}{2r} \right| ds \right| \\ &\leq \frac{N_q}{2} \pi^2 r^3 (\ln 2) m^{-2}\end{aligned}\quad (4.109)$$

$$|\tilde{I}_2 - \hat{I}_3| \leq \frac{N_q}{2} \pi^2 r^3 (\ln 2) m^{-2} \quad (4.110)$$

で評価できる. また第 3 項について

$$\phi_j = \frac{s_j}{r}, \quad \psi = \frac{t}{r}, \quad \sigma = \frac{h}{2r} \quad (4.111)$$

とおくと

$$|\hat{I}_4| = \left| \frac{1}{2\pi} \sum_{j=1}^m \int_{-h/2}^{h/2} M_{q,j} t \ln \left| \sin \frac{t + s_j}{2r} \right| dt \right|$$

$$\begin{aligned}
&\leq \frac{r^2}{2\pi} \sum_{j=1}^m |M_{q,j}| \left| \int_{-\sigma}^{\sigma} \psi \ln \left| \sin \frac{\psi + \phi_j}{2} \right| d\psi \right| \\
&\leq \frac{M_q r^2}{2\pi} \sum_{j=1}^m \left| \int_0^{\sigma} \psi \ln \left| \frac{\sin \frac{\psi + \phi_j}{2}}{\sin \frac{-\psi + \phi_j}{2}} \right| d\psi \right| \\
&\equiv \frac{M_q r^2}{2\pi} \sum_{j=1}^m C_j
\end{aligned} \tag{4.112}$$

を得る. 式 (4.112) の C_j について, 明らかに $C_1 = 0$ であり, また $j \neq 1$ の場合, 対称性から

$$|C_j| \leq \ln \left| \frac{\sin \frac{\sigma + \phi_k}{2}}{\sin \frac{-\sigma + \phi_k}{2}} \right| \int_0^{\sigma} \psi d\psi \leq \ln \left| \frac{\sin \frac{\sigma + \phi_k}{2}}{\sin \frac{-\sigma + \phi_k}{2}} \right| \frac{1}{2} \sigma^2 \tag{4.113}$$

を得る. ここで $k = \min\{j, m - j + 2\}$ である. したがって \hat{I}_4 は

$$\begin{aligned}
|\hat{I}_4| &\leq \frac{M_q r^2}{2\pi} \sum_{j=1}^m |C_j| \\
&\leq \frac{M_q r^2}{2\pi} \cdot 2 \sum_{j=2}^{\lfloor m/2 \rfloor + 1} \ln \left| \frac{\sin \frac{\sigma + \phi_k}{2}}{\sin \frac{-\sigma + \phi_k}{2}} \right| \frac{1}{2} \sigma^2 \\
&\leq \frac{M_q \pi r^2}{2} m^{-2} \ln m
\end{aligned} \tag{4.114}$$

で評価できる.

式 (4.103), (4.109), (4.110), (4.114) をまとめて, ε_L の評価として

$$\begin{aligned}
\varepsilon_L &\leq |I_1 - \hat{I}_1| + |I_2 - \hat{I}_2| + |\tilde{I}_2 - \hat{I}_3| + |\hat{I}_4| \\
&\leq \left(\frac{1}{3} |\ln 2r| + \ln 2 \right) N_q \pi^2 r^3 m^{-2} + \frac{M_q \pi r^2}{2} m^{-2} \ln m
\end{aligned} \tag{4.115}$$

を得る.

以上の結果より, 式 (4.83) による ε_K の評価は (4.96) の 3 倍になっており, また式 (4.84) による ε_L の評価は式 (4.115) に比較して

$$\frac{2}{3} |\ln 2r| N_q \pi^2 r^3 m^{-2} + \frac{M_q}{2} \left(\frac{1}{2} \ln \frac{9\pi}{2} + \frac{4}{3} \pi \right) \pi r^2 m^{-2} \tag{4.116}$$

だけ大きくなっている. また対数ポテンシャルの近似値 $\tilde{u}_{L,j}$ の誤差は

$$\begin{aligned}
&|u_L(\mathbf{x}_j) - \tilde{u}_{L,j}| \\
&\leq \frac{N_u}{6} \pi^2 r^2 m^{-2} + \left(\frac{1}{3} |\ln 2r| + \ln 2 \right) N_q \pi^2 r^3 m^{-2} + \frac{M_q \pi r^2}{2} m^{-2} \ln m
\end{aligned} \tag{4.117}$$

で評価される. 式 (4.117) より, 誤差の収束のオーダーは, 境界要素の個数 m に対し $O(m^{-2} \ln m)$ であると考えられるが, 個数 m が小さいときは $O(m^{-2})$ の項が優越する [101]. このことを第 4.4.3 節に示す数値例で述べる.

4.4 境界要素法の Poisson 方程式のソース逆問題への適用

本節においても前節と同様に 2次元 Poisson 方程式に議論を限定し, 前節で述べた境界要素法による対数ポテンシャルの計算法をソース逆問題へ応用する. ここでは特に対数ポテンシャルの数値計算法およびその誤差評価の有効性を確認するため, ソース項として 1点の point-mass からなるモデルを用いる. 本節ではこのモデルを one-point-mass model と呼ぶことにする. また one-point-mass model に対するソース逆問題の数値解法および誤差評価を提案し, それらの有効性を数値例により示す.

4.4.1 one-point-mass model と逆問題の解法

One-point-mass model とは, 領域内にただ一つの質点が存在する状態を表すモデルであり,

$$f(\mathbf{x}) = Q\delta(\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}), \quad \mathbf{x} \in \Omega \quad (4.118)$$

で定式化される. ここで Q は質点の質量を, $\boldsymbol{\xi}$ は質点の位置を表すパラメータである. このソースモデルに対する対数ポテンシャルは

$$u_L(\mathbf{x}) = -\frac{Q}{2\pi} \ln |\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}| \quad (4.119)$$

で表される. One-point-mass model に対するソース逆問題は, これらのパラメータ $Q, \boldsymbol{\xi}$ を推定する問題となる. さらに境界上における $u(\mathbf{x})$ および $\frac{\partial u}{\partial n}(\mathbf{x})$ から式 (4.19) を用いて計算可能な対数ポテンシャルは境界上における値のみであることから, 問題は

$$-\frac{Q}{2\pi} \ln |\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}| = v(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \Gamma \quad (4.120)$$

を満たす Q および $\boldsymbol{\xi}$ を推定する問題となる. ただし $v(\mathbf{x})$ は式 (4.19) を用いて計算される対数ポテンシャルの値である. なおパラメータのうち Q は Poisson 方程式の解の存在条件

$$-\int_{\Gamma} \frac{\partial u}{\partial n}(\mathbf{x}) d\Gamma(\mathbf{x}) = \int_{\Omega} f(\mathbf{x}) d\Omega(\mathbf{x}) = Q \quad (4.121)$$

を用いて決定できることから, 以下では位置パラメータ $\boldsymbol{\xi}$ の推定のみを考える.

まずこの問題の解の一意性を証明する. 境界上における同一直線上にない 3つの点 $\mathbf{x}_j, j = 1, 2, 3$ を選ぶと, これらの点における対数ポテンシャルについて

$$-\frac{Q}{2\pi} \ln |\mathbf{x}_j - \boldsymbol{\xi}| = v(\mathbf{x}_j), \quad j = 1, 2, 3 \quad (4.122)$$

が成立する. したがって, point-mass の位置 $\boldsymbol{\xi}$ は各 \mathbf{x}_j から

$$|\mathbf{x}_j - \boldsymbol{\xi}| = \exp\left(-\frac{2\pi}{Q} v(\mathbf{x}_j)\right), \quad j = 1, 2, 3 \quad (4.123)$$

となる距離の点である。点 \boldsymbol{x}_j , $j = 1, 2, 3$ が同一直線上にないことから式 (4.123) が成り立つ点はただ一つであり、この問題の解は一意的である。

式 (4.122) より問題の解法は、連立方程式

$$W(\boldsymbol{\xi}) \equiv \begin{pmatrix} w_1(\boldsymbol{\xi}) \\ w_2(\boldsymbol{\xi}) \\ w_3(\boldsymbol{\xi}) \end{pmatrix} = 0 \quad (4.124)$$

ただし

$$w_j(\boldsymbol{\xi}) \equiv v(\boldsymbol{x}_j) + \frac{Q}{2\pi} \ln |\boldsymbol{x}_j - \boldsymbol{\xi}|, \quad j = 1, 2, 3 \quad (4.125)$$

の数値解法に帰着するが、実際には $v(\boldsymbol{x}_j)$ の数値計算において誤差を生じるため方程式 (4.124) の解の存在は保証できない。しかしここでは $v(\boldsymbol{x}_j)$ の値が正確に計算可能であると仮定して議論を進める。方程式 (4.124) は未知数の個数に対し方程式の個数が多いため、その解法として Gauss の反復法を用いる [102]。このとき位置 $\boldsymbol{\xi}$ の推定に用いる反復式は

$$\boldsymbol{\xi}_{k+1}^T = \boldsymbol{\xi}_k^T - \{J(\boldsymbol{\xi}_k)^T J(\boldsymbol{\xi}_k)\}^{-1} J(\boldsymbol{\xi}_k)^T W(\boldsymbol{\xi}_k) \quad (4.126)$$

で表される。ここで k は反復回数、 T は行列の転置を表し、 $J(\boldsymbol{\xi})$ は $W(\boldsymbol{\xi})$ の Jacobi 行列、すなわち $\boldsymbol{\xi} = (\alpha, \beta)$ とおいたとき

$$J(\boldsymbol{\xi}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial w_1}{\partial \alpha} & \frac{\partial w_1}{\partial \beta} \\ \frac{\partial w_2}{\partial \alpha} & \frac{\partial w_2}{\partial \beta} \\ \frac{\partial w_3}{\partial \alpha} & \frac{\partial w_3}{\partial \beta} \end{pmatrix} \quad (4.127)$$

を表す。ここで任意の $\boldsymbol{\xi} \in \Omega$ について $\text{rank}(J(\boldsymbol{\xi})) = 2$ であることから、 $\{J(\boldsymbol{\xi}_k)^T J(\boldsymbol{\xi}_k)\}^{-1}$ は常に存在する。

反復式 (4.126) は

$$\|W(\boldsymbol{\xi})\|^2 \equiv \sum_{j=1}^3 w_j(\boldsymbol{\xi})^2 \quad (4.128)$$

としたとき $\|W(\boldsymbol{\xi})\|^2$ を最小化する反復式となっているが、実際には局所的な極小値に収束することが多いため、極小値への収束を避ける方法が必要となる。ここで $v(\boldsymbol{x})$ を計算する点として、境界上に \boldsymbol{x}_j , $j = 1, 2, 3$ と異なる点 \boldsymbol{x}_4 を選び、方程式

$$W_M(\boldsymbol{\xi}) \equiv \begin{pmatrix} w_{j_1}(\boldsymbol{\xi}) \\ w_{j_2}(\boldsymbol{\xi}) \\ w_4(\boldsymbol{\xi}) \end{pmatrix} = 0 \quad (4.129)$$

を考える。ただし $j_1, j_2 \in \{1, 2, 3\}$ で $j_1 \neq j_2$ である。方程式 (4.129) の解は一意的であり、方程式 (4.124) の解に一致することは明かである。方程式 (4.129) に対する Gauss の反復

法の反復式は

$$\xi_{M,k+1}^T = \xi_{M,k}^T - \{J_M(\xi_k)^T J_M(\xi_k)\}^{-1} J_M(\xi_k)^T W_M(\xi_k) \quad (4.130)$$

で表される. ただし $J_M(\xi)$ は $W_M(\xi)$ の Jacobi 行列である. 反復式 (4.126), (4.130) について次の補題が成り立つ.

[補題 4.1]

どの3点も同一直線上にない4点 x_j , $j = 1, 2, 3, 4$ を考え, ξ_0 を方程式

$$W_4(\xi) \equiv \begin{pmatrix} w_1(\xi) \\ w_2(\xi) \\ w_3(\xi) \\ w_4(\xi) \end{pmatrix} = 0 \quad (4.131)$$

の解とする. 点 $\xi'_0 \neq \xi_0$ を反復式 (4.126) が収束する点とするとき, 反復式 (4.130) が点 ξ'_0 に収束しないような j_1 および j_2 を選ぶことができる.

[証明]

点 $\xi'_0 \neq \xi_0$ かつ $J(\xi'_0)^T W(\xi'_0) = 0$ となる任意の点 ξ'_0 に対し, $J_M(\xi'_0)^T W_M(\xi'_0) \neq 0$ となる $j_1, j_2 \in \{1, 2, 3\}$ を選ぶことができることを示せばよい. ベクトル $p_i(\xi'_0)$, $j = 1, 2, 3, 4$ を

$$p_j(\xi'_0) = \left(\frac{x_j - \xi'_0}{|x_j - \xi'_0|^2} \right)^T, \quad j = 1, 2, 3, 4 \quad (4.132)$$

とおくと, 点 x_j , $j = 1, 2, 3, 4$ がどの3つも一直線上にない点であることから, $p_{i_1}(\xi'_0)$, $p_{i_2}(\xi'_0)$ がいずれも $p_4(\xi'_0)$ と一次独立になるような i_1, i_2 を選ぶことができる. このとき $w_{i_1}(\xi'_0) = w_{i_2}(\xi'_0) = 0$ とすれば, $i_3 \in \{1, 2, 3\} \setminus \{i_1, i_2\}$ について

$$\begin{aligned} 0 &= J(\xi'_0)^T W(\xi'_0) \\ &= -\frac{Q}{2\pi} (w_{i_1}(\xi'_0) p_{i_1}(\xi'_0) + w_{i_2}(\xi'_0) p_{i_2}(\xi'_0) + w_{i_3}(\xi'_0) p_{i_3}(\xi'_0)) \\ &= -\frac{Q}{2\pi} w_{i_3}(\xi'_0) p_{i_3}(\xi'_0) \end{aligned} \quad (4.133)$$

より $w_{i_3} = 0$ となり, $W(\xi'_0) \neq 0$ に矛盾する. したがって $w_{i_1}(\xi'_0), w_{i_2}(\xi'_0)$ のうちいずれか一方は 0 でなく, それを j_3 で表す. $\{j_1, j_2\} = \{1, 2, 3\} \setminus \{j_3\}$ とおくと, 反復式 (4.130) に対し

$$\begin{aligned} J_M(\xi'_0)^T W_M(\xi'_0) &= -\frac{Q}{2\pi} (w_{j_1}(\xi'_0) p_{i_1}(\xi'_0) + w_{j_2}(\xi'_0) p_{i_2}(\xi'_0) + w_4(\xi'_0) p_4(\xi'_0)) \\ &\neq -\frac{Q}{2\pi} (w_{j_1}(\xi'_0) p_{i_1}(\xi'_0) + w_{j_2}(\xi'_0) p_{i_2}(\xi'_0) + w_{j_3}(\xi'_0) p_{j_3}(\xi'_0)) \\ &= 0 \end{aligned} \quad (4.134)$$

を得る. したがって反復式 (4.130) が ξ'_0 には収束しないような j_1, j_2 を選ぶことができる.

[証明終]

補題 4.1 を用いて次のアルゴリズムを得る.

[アルゴリズム 4.2]

Step 1. 境界上からどの 3 つも一直線上にない 4 点 $x_j, j = 1, 2, 3, 4$ を選ぶ.

Step 2. 4 点 $x_j, j = 1, 2, 3, 4$ から適当に 3 点 $x_{j_i}, i = 1, 2, 3$ を選ぶ.

Step 3. $W(\xi) = (w_{j_1}(\xi) w_{j_2}(\xi) w_{j_3}(\xi))^T$ とおき, $W(\xi) = 0$ の解を反復式 (4.126) により求める.

Step 4. 反復式 (4.126) が収束した点 ξ_0 について $W(\xi_0) = 0$ であれば, Step 6 へ行く.

Step 5. 3 点 $x_{j_i}, i = 1, 2, 3$ を補題 4.1 の証明のように選びなおし, Step 3 へ戻る.

Step 6. $W_4(\xi) = (w_1(\xi) w_2(\xi) w_3(\xi) w_4(\xi))^T$ とおき, $W_4(\xi) = 0$ の解を Step 4 で収束した点 ξ_0 を初期値として Gauss の反復法を用いて求める.

アルゴリズム 4.2 により局所的な極小値への収束が避けられる例を示す.

<例 4.1>

領域を $\Omega = \{(x, y) \mid x^2/9 + y^2 < 1\}$ とおき, one-point-mass model のパラメータを $\xi_0 = (-1, 0)$, $Q = 2\pi$ とする. さらに $x_j, j = 1, 2, 3, 4$ として $(0, -1)$, $(3, 0)$, $(0, 1)$, $(-3, 0)$ を選んだ場合を考える. なお $v(x)$ の値は正確に計算できたものと仮定する. まずはじめに $x_{j_i}, i = 1, 2, 3$ として $(0, 1)$, $(-3, 0)$, $(0, -1)$ を選び, 反復式 (4.126) を ξ_k の初期値を $(1, 0)$ として, 方程式 $W(\xi) = 0$ を解くことを試みる. 図 4.5 に x_j, ξ_0 , および ξ_k の初期値の配置を示す. 結果を表 4.1(a) に示す. 表 4.1(a) より反復式 (4.126) は局所的な極小点である $(0.6227, 0)$ に収束する. そこで $x_{j_i}, i = 1, 2, 3$ としてあらためて $(0, 1)$, $(-3, 0)$, $(3, 0)$ を選び, 初期値を $(0.6227, 0)$ として反復式 (4.130) を用いる. 結果を表 4.1(b) に示す. 表 4.1(b) より反復式 (4.130) は真の解である $(-1, 0)$ に収束する.

最後にアルゴリズム 4.2 は局所的な極小点への収束を避けるものとなっているが, 大域的な収束性を保証したものではないことに注意しておく.

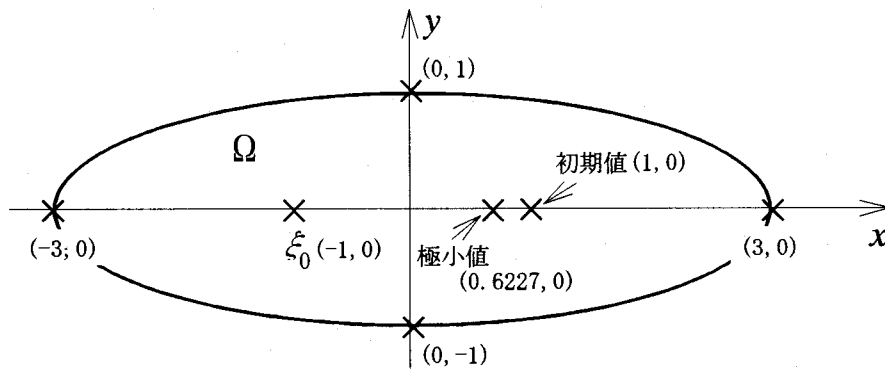
図 4.5 領域 Ω と point-mass の位置 ξ_0

表 4.1 アルゴリズム 4.2 による局所極小値への収束の回避

(a) アルゴリズム 4.2 を用いない場合			(b) アルゴリズム 4.2 を用いた場合		
反復回数	α_n	β_n	反復回数	α_n	β_n
1	1.0000	0.0000	1	1.0000	0.0000
2	0.6919	0.0000	2	0.6919	0.0000
3	0.6435	0.0000	3	0.6435	0.0000
	\vdots	\vdots		\vdots	\vdots
10	0.6227	0.0000	10	0.6227	0.0000
	\vdots	\vdots			
19	0.6227	0.0000			
20	0.6227	0.0000			

\mathbf{x}_j を選び直す

4.4.2 one-point-mass model に対する逆問題の数値解の誤差評価

アルゴリズム 4.2 を用いて得られた point-mass の位置の推定誤差の評価を考える. 式 (4.22) を用いて計算した対数ポテンシャルの値 $v(\mathbf{x}_j)$, $j = 1, 2, 3, 4$ の誤差をそれぞれ ε_j , $j = 1, 2, 3, 4$ とおく. このとき $W_4(\xi)$ の計算値 $W_{4E}(\xi)$ は

$$W_{4E}(\xi) = W_4(\xi) + \begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \end{pmatrix} \quad (4.135)$$

で表される．したがって point-mass の真の位置を ξ_0 とおくと

$$\|W_{4E}(\xi_0)\| = \sqrt{\sum_{j=1}^4 \varepsilon_j^2} \leq 2 \max_{j=1,2,3,4} |\varepsilon_j| \quad (4.136)$$

が成り立つことから，アルゴリズム 4.2 の収束判定条件として式 (4.136) を用いる．なお ε_j の評価には第 4.3 節で得られた結果を用いることができる．

アルゴリズム 4.2 を用いて得られた one-point-mass model の推定位置を ξ_E で表す．このとき関数 $W_{4E}(\xi)$ を ξ_E を中心として Taylor 展開すると

$$W_{4E}(\xi_E + \delta\xi) = W_{4E}(\xi_E) + J_4(\xi_E)\delta\xi^T + O(\|\delta\xi\|^2) \quad (4.137)$$

を得る．ここで $J_4(\xi)$ は $W_4(\xi)$ の Jacobi 行列である．さらに $\xi_E + \delta\xi = \xi_0$ とおき，式 (4.137) の二次以上の項を無視して最小 2 乗近似を用いると， $\|\delta\xi\|$ の評価として

$$\begin{aligned} \|\delta\xi\| &\leq \| \{J_4(\xi_E)^T J_4(\xi_E)\}^{-1} J_4(\xi_E)^T \| \|W_{4E}(\xi_0) - W_{4E}(\xi_E)\| \\ &\leq 4 \cdot \| \{J_4(\xi_E)^T J_4(\xi_E)\}^{-1} J_4(\xi_E)^T \| \max_{j=1,2,3,4} |\varepsilon_j| \end{aligned} \quad (4.138)$$

を得る．式 (4.138) において $\{J_4(\xi_E)^T J_4(\xi_E)\}^{-1} J_4(\xi_E)^T$ が 2×4 行列であることに注意すると，

$$\begin{aligned} &\| \{J_4(\xi_E)^T J_4(\xi_E)\}^{-1} J_4(\xi_E)^T \| \\ &\equiv \sqrt{\lambda_{\max} (\{ \{J_4(\xi_E)^T J_4(\xi_E)\}^{-1} J_4(\xi_E)^T \}^T \{J_4(\xi_E)^T J_4(\xi_E)\}^{-1} J_4(\xi_E)^T)} \\ &= \sqrt{\lambda_{\max} ((J_4(\xi_E)^T J_4(\xi_E))^{-1})} \\ &= \sqrt{\frac{\|J_4(\xi_E)^T J_4(\xi_E)\|}{\det(J_4(\xi_E)^T J_4(\xi_E))}} \end{aligned} \quad (4.139)$$

を得る．ここで $\lambda_{\max}(A)$ は 正方行列 A の固有値の最大値を表す．さらに

$$J_4(\xi_E) = -\frac{Q}{2\pi} \begin{pmatrix} p_1(\xi_E)^T \\ p_2(\xi_E)^T \\ p_3(\xi_E)^T \\ p_4(\xi_E)^T \end{pmatrix} \quad (4.140)$$

より

$$\|J_4(\xi_E)^T J_4(\xi_E)\| \leq \left(\frac{Q}{2\pi}\right)^2 \sum_{j=1}^4 \|p_j(\xi_E) p_j(\xi_E)^T\| = \left(\frac{Q}{2\pi}\right)^2 \sum_{j=1}^4 \|p_j(\xi_E)\|^2 \quad (4.141)$$

および

$$\det(J_4(\xi_E)^T J_4(\xi_E)) = \left(\frac{Q}{2\pi}\right)^4 \sum_{i < j} (\|p_i(\xi_E)\|^2 \|p_j(\xi_E)\|^2 - (p_i(\xi_E)^T p_j(\xi_E))^2) \quad (4.142)$$

であることから, 式 (4.139) の評価として

$$\| \{ J_4(\xi_E)^T J_4(\xi_E) \}^{-1} J_4(\xi_E)^T \| \leq \frac{2\pi}{Q} \sqrt{\frac{\sum_{j=1}^4 \| p_j(\xi_E) \|^2}{\sum_{i < j} (\| p_i(\xi_E) \|^2 \| p_j(\xi_E) \|^2 - (p_i(\xi_E)^T p_j(\xi_E))^2)}} \quad (4.143)$$

を得る.

式 (4.54), (4.78) と式 (4.143) の評価を式 (4.138) に代入することにより, point-mass の推定位置 ξ_E の誤差を評価することができる.

4.4.3 one-point-mass model に対する 逆問題の解法の数値例

本節では以上に述べた解法, および誤差評価に対する数値実験を示す. 領域 Ω を原点を中心とする半径 0.5 の円, すなわち $\Omega = \{(x, y) \mid \sqrt{x^2 + y^2} < 0.5\}$ とし, one-point-mass model のパラメータを $Q = 0.7 \times 2\pi$ および $\xi_0 \equiv (x_0, y_0) = (-3/40, 3\sqrt{3}/40)$ とおいた. また Poisson 方程式の解の調和項として $u_H(x, y) = 1 + \text{Re}(\exp((x + iy)/2))$ を用い, 境界上における対数ポテンシャルを計算する点 (x_j, y_j) , $j = 1, 2, 3, 4$ として $(0.5, 0)$, $(0, 0.5)$, $(-0.5, 0)$, $(0, -0.5)$ を選んだ. 図 4.6 に領域 Ω , および point-mass の位置と (x_j, y_j) , $j = 1, 2, 3, 4$ の配置を示し, 図 4.7 に境界上における Poisson 方程式の解 $u(\theta)$ とその調和関数項 $u_H(\theta)$ および対数ポテンシャル $u_L(\theta)$ の分布を示す. ここで θ は境界上の点 (x, y) の極座標表現の角度成分を表す. なお境界要素分割による誤差の収束の

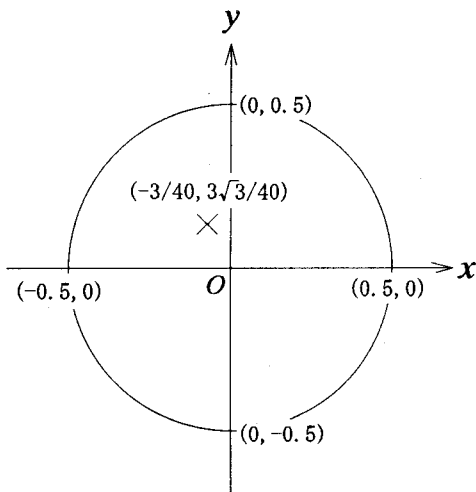


図 4.6 領域 Ω と point-mass の位置 (x_0, y_0)

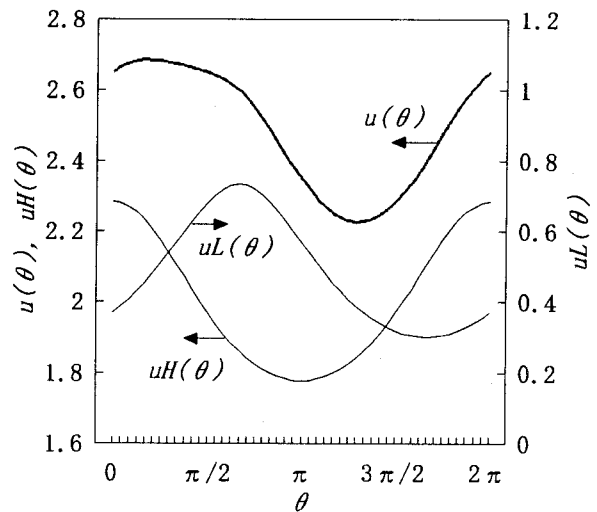


図 4.7 境界上における $u(\theta)$, $u_H(\theta)$, $u_L(\theta)$ の分布

オーダーの検証のため、境界要素法における要素分割の個数を 32, 64, 128, ..., 2048 の 7 通りにとった。その際に境界形状が円のため、誤差評価式として式 (4.96) および (4.115) を用い、それらに現れる N_u , M_q , N_q の評価に Lagrange 補間を用いた。また Gauss の反復法による収束位置のばらつきを避けるため、アルゴリズム 4.2 の初期値として 25 個の異なる点を用いた。

図 4.8 に $v(x, y)$ の計算値に対する評価誤差と実際の誤差を示し、図 4.9 に誤差評価式 (4.96), および (4.115) における $O(m^{-2})$ と $O(m^{-2} \ln m)$ の項を示す。図 4.9 より境界要素数が大きい場合には $O(m^{-2} \ln m)$ の項が優越するが、少ない場合 ($m \leq 512$) には $O(m^{-2})$ の項が優越することがわかる。また図 4.8 より全体を通して評価誤差と実際の誤差の比は約 10 倍前後となっており、評価式 (4.96), (4.115) が精度の高い評価を与えることがわかる。最後に図 4.10 に one-point-mass model の推定位置の評価誤差と実際の誤差の平均値を示す。推定位置の評価誤差と実際の誤差の比についても 10 倍前後であり、精度の高い評価を与えることがわかる。また境界要素の個数に対する収束のオーダーもよく一致している。

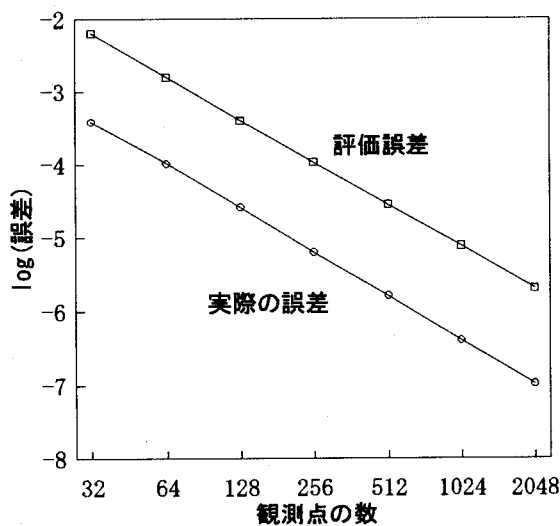


図 4.8 境界要素法を用いた $v(x, y)$ の計算における評価誤差と実際の誤差の変化

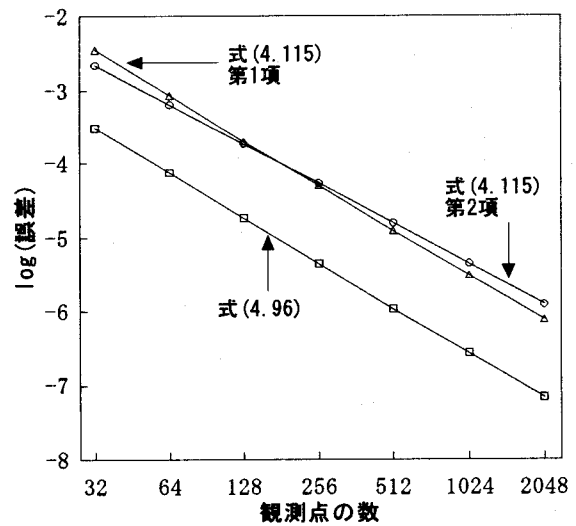


図 4.9 境界要素法を用いた $v(x, y)$ の計算における評価誤差の各成分の変化

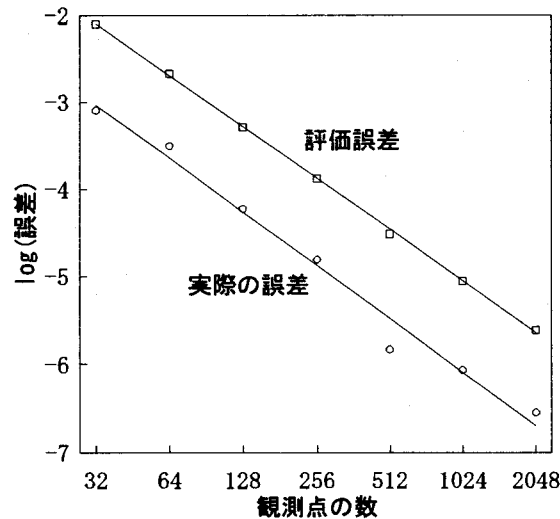


図 4.10 Point-mass の推定位置の評価誤差と実際の誤差の変化

4.5 結言

本章では Poisson 方程式のソース逆問題に対する境界要素法を用いた数値解法を提案し, その有効性について議論した. まず Poisson 方程式の境界積分表現を境界要素を用いて離散化した, 境界値問題の数値解法である境界要素法について簡単に述べた. 次に第 3 章で示した解 $u(\boldsymbol{x})$ および法線方向微分 $\frac{\partial u}{\partial n}(\boldsymbol{x})$ を用いた対数ポテンシャルの計算法を, 境界要素を用いて離散化した数値計算法を提案した. また境界積分の計算の際に, 境界要素として一定要素を用いた場合の誤差評価をおこない, 誤差の収束のオーダーを示した. 逆問題への適用例として one-point-mass model に対する Poisson 方程式のソース逆問題を考え, 解法のアルゴリズムおよび誤差評価を提案した. 最後に数値実験により提案した数値解法が有効であることを示し, 精度の高い誤差評価を与えていることを確認した.

第 5 章

Point-mass model に対する対数ポテンシャル逆問題における位置推定問題

5.1 緒言

第 3 章において 2 次元 Poisson 方程式のソース逆問題において対数ポテンシャル逆問題が非常に重要な役割を持つことを示し, また point-mass model が代用電荷法という応用を持つことから, 近年重要なソースモデルの一つとなっていることを述べた. 本章および次章では point-mass model に対する対数ポテンシャル逆問題に注目し, いくつかの問題に対する数値解法を提案する.

対数ポテンシャル逆問題において point-mass model は star-shape model とならび, 逆問題の解の一意性が保証される重要なソース項のモデルである. Point-mass model は個数, 位置, 強度という 3 種類のパラメータを持つが, 地球物理学における集中質点モデルや代用電荷法において特に重要なものは位置パラメータである. なかでも代用電荷法ではその電荷の配置が得られる結果の精度に大きく影響することが知られている. そのため電荷の最適な配置, すなわち Dirichlet 条件を近似する最適な点電荷の位置を推定する問題に関する研究が現在, 重要となっている.

以上のことを考慮し, 本章では point-mass model に対する対数ポテンシャル逆問題における位置推定問題について考察し, その数値解法を提案する. 提案する解法は対数ポテンシャルの関数展開, 特に境界における Fourier 係数と point-mass model の各パラメータの間の関係を基礎としている. まず境界上における対数ポテンシャルの Fourier 展開を示し, Fourier 係数と point-mass model のパラメータとの間の代数的関係を導く. この関係を用いることにより, 位置推定問題が代数方程式を解く問題に帰着されることを示す. 問

題の数値解法として, Fourier 係数の近似計算に離散 Fourier 変換を用いた位置推定法を示し, その誤差評価を与える. さらに離散 Fourier 変換の性質を利用した残差反復による Fourier 係数の高精度の計算法を示し, それを利用した高精度の位置推定法および誤差評価を与える. 以上の2つの解法とその誤差評価について, それぞれ数値実験によりその有効性を示す.

5.2 Point-mass model に対する対数ポテンシャル逆問題における位置推定問題

5.2.1 Point-mass model に対する逆問題の解の一意性

本章では実2次元空間 \mathbf{R}^2 を考え, \mathbf{R}^2 上の点を (x, y) で表す. Point-mass model に対する対数ポテンシャル逆問題とは, 2次元領域 Ω 内の point-mass model

$$f(x, y) = \sum_{j=1}^N Q_j \delta(x - x_j, y - y_j), \quad (x_j, y_j) \in \Omega \quad (5.1)$$

が生成する対数ポテンシャル

$$\begin{aligned} u_L(x, y) &\equiv -\frac{1}{2\pi} \int_{\Omega} f(x', y') \ln \sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2} d\Omega(x', y') \\ &= -\frac{1}{2\pi} \sum_{j=1}^N Q_j \ln \sqrt{(x - x_j)^2 + (y - y_j)^2} \end{aligned} \quad (5.2)$$

から, point-mass model の各パラメータ $N, (x_j, y_j), Q_j$ を推定する問題である. Point-mass model のパラメータ $N, (x_j, y_j), Q_j$ はそれぞれ point-mass の個数, 各 point-mass の位置, および質量をモデル化したものである. 以下では領域 Ω として原点を中心とする半径1の円領域

$$\Omega = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 < 1\} \quad (5.3)$$

を用いる. また, 対数ポテンシャルに関する情報として Ω の境界 Γ 上における値が与えられている場合を考え, point-mass model のパラメータ推定問題について考察する. なお領域の半径を1としたが, これは任意の正の半径 R の場合に一般化が可能である.

Point-mass model に対する対数ポテンシャルは, 境界 Γ において極座標を用いた場合

$$u_L(\theta) \equiv u_L(\cos \theta, \sin \theta) = -\frac{1}{2\pi} \sum_{j=1}^N Q_j \ln \sqrt{1 + r_j^2 - 2r_j \cos(\theta - \varphi_j)} \quad (5.4)$$

で表される. ただし (r_j, φ_j) は point-mass の位置 (x_j, y_j) を極座標表現したものである. 関数 $u_L(\theta)$ は無限回連続微分可能な周期関数であることから, Fourier 展開可能であり

$$u_L(\theta) = \frac{1}{\pi} \left\{ \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (\alpha_k \cos k\theta + \beta_k \sin k\theta) \right\} \quad (5.5)$$

と表される. ここで Fourier 係数として

$$\alpha_k = \int_0^{2\pi} u_L(\theta) \cos k\theta d\theta, \quad k = 0, 1, 2, \dots, \quad (5.6)$$

$$\beta_k = \int_0^{2\pi} u_L(\theta) \sin k\theta d\theta, \quad k = 1, 2, \dots, \quad (5.7)$$

で定義されるものを用いた. 式 (5.6), (5.7) は point-mass model のパラメータを用いて

$$\alpha_k = \begin{cases} -\sum_{j=1}^N Q_j \ln 1 = 0, & k = 0 \\ \frac{1}{2k} \sum_{j=1}^N Q_j r_j^k \cos k\varphi_j & k = 1, 2, \dots \end{cases} \quad (5.8)$$

$$\beta_k = \frac{1}{2k} \sum_{j=1}^N Q_j r_j^k \sin k\varphi_j, \quad k = 1, 2, \dots \quad (5.9)$$

で表すことができる [103].

ここで 2次元実空間 R^2 と 1次元複素空間 C を対応

$$z = x + iy, \quad x, y \in R, z \in C \quad (5.10)$$

を用いて同一視する. さらに複素数 z_j および γ_k を

$$z_j \equiv x_j + iy_j, \quad j = 1, 2, \dots, N \quad (5.11)$$

$$\gamma_k \equiv \alpha_k + i\beta_k, \quad k = 1, 2, \dots \quad (5.12)$$

と定義する. 式 (5.11), (5.12) において, 複素数 z_j は point-mass の位置 (x_j, y_j) を複素表現したものであり, γ_k は対数ポテンシャル $u_L(\theta)$ の複素 Fourier 係数である. 式 (5.8), (5.9) より, 複素数 z_j および γ_k について関係式

$$\gamma_k = \frac{1}{2k} \sum_{j=1}^N Q_j z_j^k, \quad k = 1, 2, \dots, \quad (5.13)$$

が成立する. 式 (5.13) を基に, 次に示す逆問題の解の一意性定理を得た.

[定理 5.1]

ソース項 $f(x, y)$ として 2つの point-mass model

$$f_1(x, y) = \sum_{j=1}^{N_1} Q_{j,1} \delta(x - x_{j,1}, y - y_{j,1}) \quad (5.14)$$

$$f_2(x, y) = \sum_{j=1}^{N_2} Q_{j,2} \delta(x - x_{j,2}, y - y_{j,2}) \quad (5.15)$$

を考える. ただし $i \neq j$ のとき $(x_{i,1}, y_{i,1}) \neq (x_{j,1}, y_{j,1})$, $(x_{i,2}, y_{i,2}) \neq (x_{j,2}, y_{j,2})$ であり, $Q_{j,k} \neq 0$, $j = 1, 2, \dots, N_k$, $k = 1, 2$ とする. さらに

$$\sum_{j=1}^{N_1} Q_{j,1} = \sum_{j=1}^{N_2} Q_{j,2} \equiv Q_T \quad (5.16)$$

を仮定し, それぞれのソース項が生成する対数ポテンシャルを $u_{L,1}(x, y)$, $u_{L,2}(x, y)$ で表す. このとき

$$u_{L,1}(x, y) = u_{L,2}(x, y), \quad (x, y) \in \Gamma \quad (5.17)$$

が成立するならば, $N_1 = N_2$, また $\{(x_{j,1}, y_{j,1}), j = 1, 2, \dots, N_2\} = \{(x_{j,2}, y_{j,2}), j = 1, 2, \dots, N_2\}$ である. さらに $(x_{j,1}, y_{j,1})$ に対応する $\{(x_{j,2}, y_{j,2})\}$ 内の点を改めて $(x_{j,2}, y_{j,2})$ で表すとき, $Q_{j,1} = Q_{j,2}$ が成り立つ.

[証明]

式 (5.14), (5.15) で表される point-mass model の各 point-mass の位置を複素数表示して

$$z_{j,1} = x_{j,1} + iy_{j,1}, \quad j = 1, 2, \dots, N_1 \quad (5.18)$$

$$z_{j,2} = x_{j,2} + iy_{j,2}, \quad j = 1, 2, \dots, N_2 \quad (5.19)$$

とおき, 各々の生成する対数ポテンシャル $u_{L,1}(\theta)$, $u_{L,2}(\theta)$ の複素 Fourier 係数を $\gamma_{k,1}$, $\gamma_{k,2}$, $k = 1, 2, \dots$, で表す. 式 (5.14), (5.15) のソース項が生成する対数ポテンシャルが境界 Γ で一致することから, 複素 Fourier 係数について

$$\gamma_{k,1} = \gamma_{k,2}, \quad k = 1, 2, \dots \quad (5.20)$$

が成立する. 式 (5.20) に式 (5.13) を代入すると

$$\frac{1}{2k} \sum_{j=1}^{N_1} Q_{j,1} z_{j,1}^k = \frac{1}{2k} \sum_{j=1}^{N_2} Q_{j,2} z_{j,2}^k, \quad k = 1, 2, \dots \quad (5.21)$$

となり, さらに

$$\sum_{j=1}^{N_1} Q_{j,1} z_{j,1}^k - \sum_{j=1}^{N_2} Q_{j,2} z_{j,2}^k = 0, \quad k = 1, 2, \dots \quad (5.22)$$

を得る.

集合 $\{z_{j,2}, j = 1, 2, \dots, N_2\}$ を $\{z_{j,1}, j = 1, 2, \dots, N_1\}$ に含まれる点の集合 A と含まれない点の集合 B に分類し, それぞれの点の個数を M_A , M_B で表す. 集合 A は j について順序を交換することにより

$$A = \{z_{j,2}, j = 1, 2, \dots, M_A\} = \{z_{j,1}, j = 1, 2, \dots, M_A\} \quad (5.23)$$

としても一般性を失わない. この分類を用いると式 (5.22) は

$$\sum_{j=1}^{M_A} (Q_{j,1} - Q_{j,2}) z_{j,1}^k + \sum_{j=M_A+1}^{N_1} Q_{j,1} z_{j,1}^k - \sum_{j=M_A+1}^{N_2} Q_{j,2} z_{j,2}^k = 0, \quad k = 1, 2, \dots, \quad (5.24)$$

となる. 複素数 $z_{1,1}, z_{2,1}, \dots, z_{N_1,1}, z_{M_A+1,2}, z_{M_A+2,2}, \dots, z_{N_2,2}$ をあらためて $\xi_j, j = 1, 2, \dots, N_3$ で表すと, 式 (5.24) は

$$\sum_{j=1}^{N_3} Q_{j,3} \xi_j^k = 0, \quad k = 1, 2, \dots, N_3 \quad (5.25)$$

で表される. ここで $i \neq j$ のとき $\xi_i \neq \xi_j$ であり

$$Q_{j,3} = \begin{cases} Q_{j,1} - Q_{j,2}, & j = 1, 2, \dots, M_A, \\ Q_{j,1}, & j = M_A + 1, M_A + 2, \dots, N_1 \\ -Q_{j-N_1+M_A,2}, & j = N_1 + 1, N_1 + 2, \dots, N_3 \end{cases} \quad (5.26)$$

である. また $N_3 = N_1 + M_B$ である. 式 (5.16) および式 (5.25) を $k = 1, 2, \dots, N_3 - 1$ について考え,

$$V \equiv \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ \xi_1 & \xi_2 & \dots & \xi_{N_3} \\ \xi_1^2 & \xi_2^2 & \dots & \xi_{N_3}^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \xi_1^{N_3-1} & \xi_2^{N_3-1} & \dots & \xi_{N_3}^{N_3-1} \end{pmatrix} \quad (5.27)$$

$$\Psi \equiv \begin{pmatrix} Q_{1,3} \\ Q_{2,3} \\ \vdots \\ Q_{N_3,3} \end{pmatrix} \quad (5.28)$$

とおくと, V と Ψ について方程式

$$V\Psi = O \quad (5.29)$$

が成立する. 行列 V の行列式は Vandermonde の行列式

$$\det V = (-1)^{N_3(N_3-1)/2} \prod_{i < j} (\xi_i - \xi_j) \quad (5.30)$$

で表され, 複素数 ξ_j について $i \neq j$ のとき $\xi_i \neq \xi_j$ であることから, この値は零でない. したがって逆行列 V^{-1} が存在し

$$\Psi = V^{-1}O = O \quad (5.31)$$

を得る. このことは

$$Q_{j,1} - Q_{j,2} = 0, \quad j = 1, 2, \dots, M_A \quad (5.32)$$

$$Q_{j,1} = 0, \quad j = M_A + 1, M_A + 2, \dots, N_1 \quad (5.33)$$

$$-Q_{j,2} = 0, \quad j = M_A + 1, M_A + 2, \dots, N_2 \quad (5.34)$$

を意味し, さらに $Q_{j,1}, Q_{j,2}$ に関する仮定より, $M_A = N_1 = N_2$ および $Q_{j,1} = Q_{j,2}$, $j = 1, 2, \dots, M_A$ でなければならない. また $\{(x_{j,1}, y_{j,1}), j = 1, 2, \dots, N_2\} = \{(x_{j,2}, y_{j,2}), j = 1, 2, \dots, N_2\}$ となる.

[証明終]

定理 5.1 より, 対数ポテンシャル $u_L(\theta)$ の複素 Fourier 係数 γ_k から point-mass model の各パラメータが一意に決定されることがわかる.

5.2.2 同一強度を持つ point-mass model に対する位置推定問題

定理 5.1 の結果から, point-mass model の各パラメータを推定するには, 対数ポテンシャル $u_L(\theta)$ の Fourier 係数を求め, 方程式 (5.13) をパラメータについて解けばよい. しかし方程式 (5.13) は非線形方程式であり, 一般に解くことは困難である. ここでは point-mass model のパラメータのうち位置パラメータ (x_j, y_j) のみを未知パラメータとした, 次に示す位置推定問題の解法について考察する.

[問題](Point-mass model に対する位置推定問題)

Point-mass model (5.1) に対する対数ポテンシャル逆問題において, パラメータのうち N および Q_j を既知とし, さらに Q_j は j によらない一定の値 $Q \neq 0$ であると仮定する. このとき未知パラメータ (x_j, y_j) , $j = 1, 2, \dots, N$ を推定せよ.

パラメータ N および Q が既知である場合, 方程式 (5.13) は

$$\gamma_k = \frac{Q}{2k} \sum_{j=1}^N z_j^k, \quad k = 1, 2, \dots \quad (5.35)$$

で表される. 式 (5.35) を変形すると, z_j に関する方程式

$$\sum_{j=1}^N z_j^k = \frac{2k}{Q} \gamma_k, \quad k = 1, 2, \dots \quad (5.36)$$

を得る. 式 (5.36) の左辺は z_j , $j = 1, 2, \dots, N$ に関する対称式となっており, これらを S_k , $k = 1, 2, \dots$, とおく. 複素数 z_j , $j = 1, 2, \dots, N$ の対称式のうち

$$s_k \equiv \sum_{j_1 < j_2 < \dots < j_k} \prod_{l=1}^k z_{j_l}, \quad k = 1, 2, \dots, N \quad (5.37)$$

で定義されるものは z_j , $j = 1, 2, \dots, N$ に関する基本対称式と呼ばれる. この基本対称式 s_k と対称式 S_k について, 次の定理が知られている.

[定理 5.2] [104,105]

複素数 z_j , $j = 1, 2, \dots, N$ の基本対称式 s_k , $k = 1, 2, \dots, N$ および対称式 S_k , $k = 1, 2, \dots$ について次の関係式が成立する.

$$S_k = \sum_{j=1}^{k-1} (-1)^{j+1} s_j S_{k-j} + (-1)^{k+1} k s_k, \quad k \leq N \quad (5.38)$$

$$S_k = \sum_{j=1}^{k-1} (-1)^{j+1} s_j S_{k-j}, \quad k > N \quad (5.39)$$

式 (5.38), (5.39) は Newton の公式と呼ばれる.

Newton の公式 (5.38) を s_k について解くと

$$s_k = \frac{(-1)^{k+1}}{k} S_k + \sum_{j=1}^{k-1} (-1)^j s_j S_{k-j}, \quad k = 1, 2, \dots, N \quad (5.40)$$

を得られ, 対称式 S_k , $k = 1, 2, \dots, N$ の値から基本対称式 s_k , $k = 1, 2, \dots, N$ の値が一意に定まることがわかる. また基本対称式について次の定理が知られている.

[定理 5.3] [104,105]

複素数 z_j , $j = 1, 2, \dots, N$ の基本対称式を s_k , $k = 1, 2, \dots, N$ とする. このとき z_j , $j = 1, 2, \dots, N$ は代数方程式

$$z^N - s_1 z^{N-1} + s_2 z^{N-2} - \dots + (-1)^N s_N = 0 \quad (5.41)$$

の解である.

定理 5.2, 5.3 および式 (5.36) を用いることにより, point-mass の位置推定問題の可解性に関する次の定理を得た.

[定理 5.4]

ソース項が, すべての point-mass が同一の強度 Q をもつ point-mass model

$$f(x, y) = \sum_{j=1}^N Q \delta(x - x_j, y - y_j) \quad (5.42)$$

で表現されるものとする. 対数ポテンシャルの N 次までの複素 Fourier 係数 γ_k , $k = 1, 2, \dots, N$ を用いて

$$S_k = \frac{2k}{Q} \gamma_k, \quad k = 1, 2, \dots, N \quad (5.43)$$

とおき, 式 (5.40) より計算される s_1, s_2, \dots, s_N を用いた代数方程式

$$z^N - s_1 z^{N-1} + s_2 z^{N-2} - \dots + (-1)^N s_N = 0 \quad (5.44)$$

を考える. 式 (5.44) の解を z_1, z_2, \dots, z_N とすると, 式 (5.42) に対する対数ポテンシャル逆問題において point-mass の位置の集合は

$$\{(x_j, y_j), j = 1, 2, \dots, N\} = \{(\operatorname{Re}z_j, \operatorname{Im}z_j), j = 1, 2, \dots, N\} \quad (5.45)$$

で表される.

5.3 離散 Fourier 変換を用いた位置推定問題の数値解法と誤差評価

前節で point-mass の位置推定問題は, 対数ポテンシャルの複素 Fourier 係数を求め, 代数方程式 (5.44) を解くことに帰着されることを示した. 本節ではこの結果を用いた数値解法を提案し, その誤差評価法を与える.

5.3.1 離散 Fourier 変換を用いた逆問題の数値解法

現実の工学的問題において, 対数ポテンシャルの測定点は境界上の離散点のみであることが多い. ここでは境界 Γ 上に等間隔にならんだ $2n$ 個の点

$$\theta_p \equiv \frac{\pi p}{n}, \quad p = 0, 1, 2, \dots, 2n-1 \quad (5.46)$$

で対数ポテンシャル $u_L(\theta)$ が与えられている場合を考える. この場合, 複素 Fourier 係数の近似法としてもっともよく知られている方法は, 離散 Fourier 変換

$$\tilde{\gamma}_k = \frac{\pi}{n} \sum_{p=0}^{2n-1} u_L(\theta_p) (\cos k\theta_p + i \sin k\theta_p), \quad k = 1, 2, \dots, N \quad (5.47)$$

である. 本節ではこの離散 Fourier 変換を複素 Fourier 係数の近似値として用いる数値解法を提案する. ここで対数ポテンシャル $u_L(\theta)$ は無限 Fourier 級数 (5.5) に展開されることから, 離散 Fourier 変換 $\tilde{\gamma}_k$ は必ず誤差を生じることを注意しておく.

まず離散 Fourier 変換により得られた複素 Fourier 係数の近似値 $\tilde{\gamma}_k$ を用いて S_k を

$$\tilde{S}_k = \frac{2k}{Q} \tilde{\gamma}_k, \quad k = 1, 2, \dots, N \quad (5.48)$$

で近似する. さらに公式 (5.40) を用いて, s_k を

$$\tilde{s}_k = \frac{(-1)^{k+1}}{k} \tilde{S}_k + \sum_{j=1}^{k-1} (-1)^j \tilde{s}_j \tilde{S}_{k-j}, \quad k = 1, 2, \dots, N \quad (5.49)$$

により近似する. 最終的に, $\tilde{s}_k, k = 1, 2, \dots, N$ を用いた代数方程式

$$z^N - \tilde{s}_1 z^{N-1} + \tilde{s}_2 z^{N-2} - \dots + (-1)^N \tilde{s}_N = 0 \quad (5.50)$$

の数値解 \tilde{z}_j , $j = 1, 2, \dots, N$ を求め,

$$\tilde{x}_j = \operatorname{Re}\tilde{z}_j, \quad \tilde{y}_j = \operatorname{Im}\tilde{z}_j, \quad j = 1, 2, \dots, N \quad (5.51)$$

とおくことにより, point-mass の推定位置 $(\tilde{x}_j, \tilde{y}_j)$ を得ることができる. この場合, 代数方程式 (5.50) の数値解法が問題となるが, ここでは Durand-Kerner 法を用いる [106]. Durand-Kerner 法は, 反復式

$$z_j^{(l+1)} = z_j^{(l)} - \frac{P(z_j^{(l)})}{\prod_{i \neq j} (z_j^{(l)} - z_i^{(l)})}, \quad j = 1, 2, \dots, N \quad (5.52)$$

を用いて N 次代数方程式

$$P(z) = z^N + a_1 z^{N-1} + a_2 z^{N-2} + \dots + a_N = 0 \quad (5.53)$$

を解く数値解法である. この方法は方程式の全根を同時に求める方法であり, また大域的な安定性をもつことが知られている.

最後に本節で提案した数値解法のフローチャートを図 5.1 に示す.

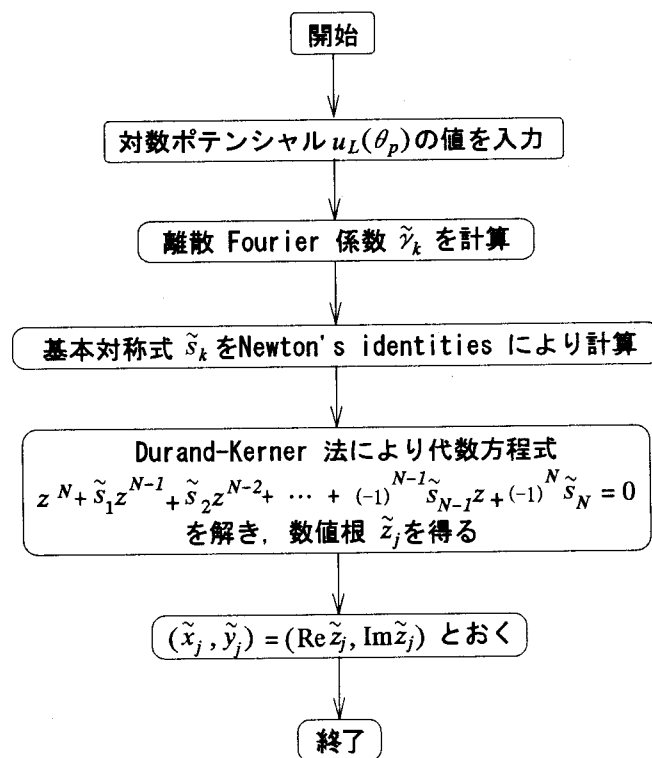


図 5.1 離散 Fourier 変換を用いた point-mass の位置推定法のフローチャート

5.3.2 離散 Fourier 変換を用いた逆問題の数値解法の誤差評価

第 5.3.1 節で提案した数値解法においては, 対数ポテンシャル $u_L(\theta)$ の Fourier 展開が無級数 (5.5) となるため離散 Fourier 変換 $\tilde{\gamma}_k$ は必ず誤差をもつという問題がある. その誤差は \tilde{S}_k および \tilde{s}_k の近似値に影響し, 最終的に代数方程式 (5.50) の数値解, すなわち point-mass の推定位置の誤差に影響する. ここでは $\tilde{\gamma}_k$ の誤差を評価し, さらに point-mass の推定位置の誤差評価法について考察する.

まず離散 Fourier 変換 $\tilde{\gamma}_k$ の近似誤差を考える. 三角関数の離散 Fourier 変換について次の補題が成立する.

[補題 5.5]

整数 $k \in \{1, 2, \dots, n\}$ および $l \in \mathbf{Z}^+ \equiv \{0, 1, 2, \dots, \}$ について次の等式が成り立つ.

$$\sum_{p=0}^{2n-1} \cos k\theta_p \cos l\theta_p = \begin{cases} 0, & k+l, k-l \not\equiv 0 \pmod{2n} \\ 2n, & k+l, k-l \equiv 0 \pmod{2n} \\ n, & \text{otherwise} \end{cases} \quad (5.54)$$

$$(5.55)$$

$$\sum_{p=0}^{2n-1} \sin k\theta_p \sin l\theta_p = \begin{cases} 0, & k+l, k-l \not\equiv 0 \pmod{2n} \\ 0, & k+l, k-l \equiv 0 \pmod{2n} \\ -n, & k+l \equiv 0 \pmod{2n}, k-l \not\equiv 0 \pmod{2n} \\ n, & k+l \not\equiv 0 \pmod{2n}, k-l \equiv 0 \pmod{2n} \end{cases} \quad (5.56)$$

$$\sum_{p=0}^{2n-1} \cos k\theta_p \sin l\theta_p = 0 \quad (5.57)$$

$$\sum_{p=0}^{2n-1} \sin k\theta_p \cos l\theta_p = 0 \quad (5.58)$$

補題 5.5 より対数ポテンシャル

$$u_L(\theta) = \frac{1}{\pi} \left\{ \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (\alpha_k \cos k\theta + \beta_k \sin k\theta) \right\} \quad (5.59)$$

の離散 Fourier 変換について

$$\begin{aligned} \tilde{\gamma}_k &= \alpha_k + \sum_{m=1}^{\infty} \alpha_{2nm+k} + \sum_{m=1}^{\infty} \alpha_{2nm-k} + i\beta_k + i \sum_{m=1}^{\infty} \beta_{2nm+k} - i \sum_{m=1}^{\infty} \beta_{2nm-k} \\ &= \begin{cases} \gamma_k + \sum_{m=1}^{\infty} \bar{\gamma}_{2nm-k} + \sum_{m=1}^{\infty} \gamma_{2nm+k}, & k < n \\ 2\alpha_k + 2 \sum_{m=2}^{\infty} \alpha_{(2m-1)n}, & k = n \end{cases} \end{aligned} \quad (5.60)$$

を得る. 式 (5.60) より, γ_k , $k = 1, 2, \dots, N$ の近似値を得るためには, 対数ポテンシャル $u_L(\theta)$ の観測点の個数について $n > N$ でなければならないことがわかる. また式 (5.60) より, 離散 Fourier 変換による複素 Fourier 係数の近似誤差は

$$\begin{aligned} |\tilde{\gamma}_k - \gamma_k| &= \left| \sum_{m=1}^{\infty} \gamma_{2nm+k} + \sum_{m=1}^{\infty} \bar{\gamma}_{2nm-k} \right| \\ &\leq \sum_{m=1}^{\infty} |\gamma_{2nm+k}| + \sum_{m=1}^{\infty} |\bar{\gamma}_{2nm-k}|, \quad k = 1, 2, \dots, N \end{aligned} \quad (5.61)$$

で評価できる. ここで複素 Fourier 係数 γ_k の絶対値は

$$\begin{aligned} |\gamma_k| = |\bar{\gamma}_k| &= \left| \frac{Q}{2k} \sum_{j=1}^N r_j^k \exp(ik\varphi_j) \right| \\ &\leq \frac{|Q|N}{2k} r_M^k, \quad k = 1, 2, \dots, \end{aligned} \quad (5.62)$$

で評価できることより, 式 (5.61) の評価は

$$\begin{aligned} |\tilde{\gamma}_k - \gamma_k| &\leq \frac{|Q|N}{2} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{r_M^{2nm+k}}{2nm+k} + \frac{|Q|N}{2} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{r_M^{2nm-k}}{2nm-k} \\ &\leq \frac{|Q|N}{2} r_M^k \sum_{m=1}^{\infty} \frac{r_M^{2nm}}{2nm} + \frac{|Q|N}{2} r_M^{n-k} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{r_M^{(2m-1)n}}{(2m-1)n} \\ &= \frac{|Q|N}{4n} r_M^k \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(r_M^{2n})^m}{m} + \frac{|Q|N}{2n} r_M^{n-k} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(r_M^n)^{2m-1}}{2m-1} \\ &= \frac{|Q|N}{4n} r_M^k \ln \frac{1}{1-r_M^{2n}} + \frac{|Q|N}{4n} r_M^{n-k} \ln \frac{1+r_M^n}{1-r_M^n} \\ &\leq \frac{|Q|N}{4n} r_M^k \cdot 2r_M^{2n} + \frac{|Q|N}{4n} r_M^{n-k} \cdot 3r_M^n \\ &= \frac{|Q|N}{4n} r_M^n (2r_M^{n+k} + 3r_M^{n-k}) \\ &\leq \frac{5|Q|N}{4n} r_M^{2n-k} \end{aligned} \quad (5.63)$$

となる. ただし

$$r_M = \max_{j=1,2,\dots,N} r_j < 1 \quad (5.64)$$

であり, r_M^{2n} の値は十分小さいものと仮定した. 式 (5.63) より離散 Fourier 変換による複素 Fourier 係数の近似誤差は $O(r_M^{2n}/n)$ のオーダーで減少することがわかる. 式 (5.63) による評価は, 未知パラメータ r_j によって決まる r_M に依存している. しかし第 5.3.1 節に示した解法により得られた推定位置 $(\tilde{x}_j, \tilde{y}_j)$ が十分に精度の高いものであれば

$$r_M \simeq \tilde{r}_M \equiv \max_{j=1,2,\dots,N} \sqrt{\tilde{x}_j^2 + \tilde{y}_j^2} \quad (5.65)$$

としてよいものと考えられる. よってこの \tilde{r}_M を式 (5.63) に代入した結果を $\tilde{\gamma}_k$ の事後誤差評価として用いる.

次に Newton の公式 (5.40) による基本対称式 \tilde{s}_k の近似誤差について考える. 実数演算における確定的な誤差の評価法として区間解析が知られている [107]. これは実数を数直線上の点ではなくある幅を持った区間として表し, その区間が演算によりどのように変化するかを評価するものである. 例として四則演算を示す. 2つの実数 a, b がそれぞれ区間 $[a_1, a_2], [b_1, b_2]$ の範囲にある場合を考える. この場合 a, b の和, 差, 積, 商について

$$a + b \in [a_1 + b_1, a_2 + b_2] \tag{5.66}$$

$$a - b \in [a_1 - b_2, a_2 - b_1] \tag{5.67}$$

$$a * b \in [\min\{a_1b_1, a_1b_2, a_2b_1, a_2b_2\}, \max\{a_1b_1, a_1b_2, a_2b_1, a_2b_2\}] \tag{5.68}$$

$$a/b \in [\min\{a_1/b_1, a_1/b_2, a_2/b_1, a_2/b_2\}, \max\{a_1/b_1, a_1/b_2, a_2/b_1, a_2/b_2\}] \tag{5.69}$$

が成立する. ただし商については $0 \notin [b_1, b_2]$ とする. 式 (5.66), (5.67), (5.68), (5.69) の右辺の区間をそれぞれ区間 $[a_1, a_2], [b_1, b_2]$ の和, 差, 積, 商と定義する. 複素数演算における区間解析は, 複素数の各成分の演算に実数の区間解析を用いて定義できる. なお複素数では範囲を表すものは区間ではなく矩形となる. 複素数では極座標表示による区間解析も考えられるが, この場合は複素数の範囲を円で表現する. 図 5.2 に複素数における和に対する区間解析を示す. 直交座標表示の区間解析と極座標表示の区間解析のどちらが有利であるかは場合によるが, この問題では複素 Fourier 係数の誤差を絶対値で評価していることから, 極座標表示によるものがよいと考えられる. したがって Newton の公式の各演算に極座標による区間解析を適用し, 基本対称式の近似値 \tilde{s}_k の誤差を評価する.

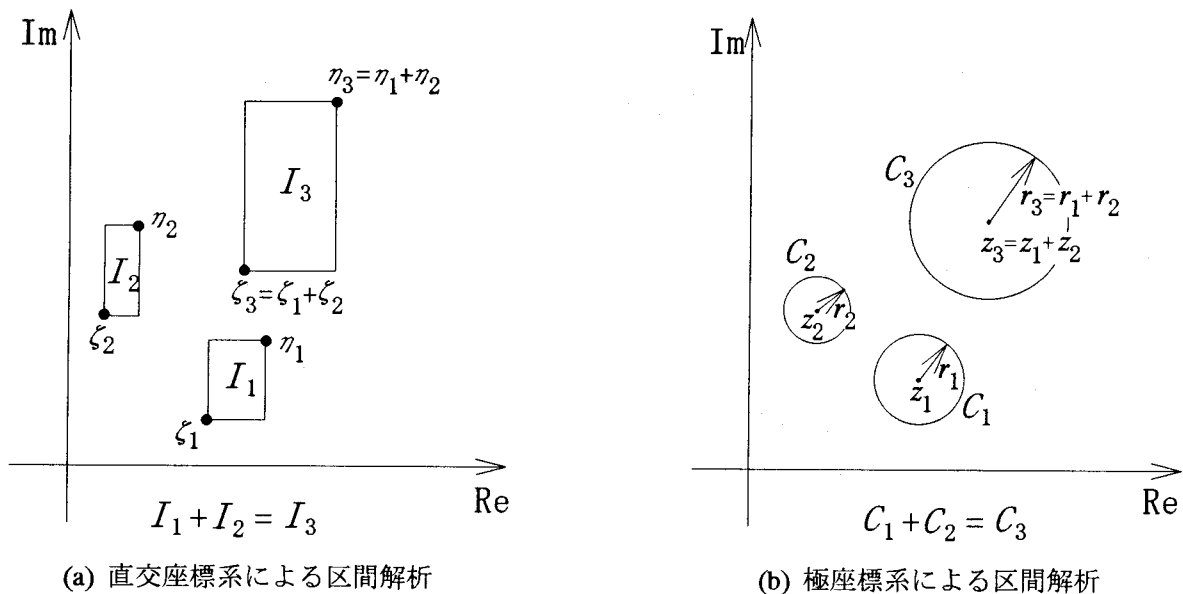


図 5.2 複素数に対する区間解析

最後に代数方程式 (5.50) の数値解の誤差評価について考える. 代数方程式の数値解の高精度の事後誤差評価を与えるものとして, 次の定理が知られている.

[定理 5.6] (Smith, 1970)[108]

N 次の代数方程式

$$P(z) = z^N + a_1 z^{N-1} + a_2 z^{N-2} + \cdots + a_N = 0 \quad (5.70)$$

と N 個の相異なる複素数 z_1, z_2, \dots, z_N を考える. このとき, 方程式 (5.70) のすべての解は閉円板

$$G_j = \left\{ z \left| |z - z_j| \leq N \left| \frac{P(z_j)}{\prod_{i \neq j} (z_j - z_i)} \right| \right. \right\} \quad (5.71)$$

の和集合に含まれる. またその連結成分の 1 つが M 個の閉円板からなれば, その中にちょうど M 個の根が存在する.

定理 5.6 の $P(z)$ として

$$z^N - \tilde{s}_1 z^{N-1} + \tilde{s}_2 z^{N-2} - \cdots + (-1)^N \tilde{s}_N \quad (5.72)$$

を用いれば, 方程式 (5.50) の数値解 \tilde{z}_j の事後誤差評価が得られ, 最終的に推定位置 $(\tilde{x}_j, \tilde{y}_j)$ の事後誤差評価を得る. ただし各係数 $\tilde{s}_j, j = 1, 2, \dots, N$ が確定的な幅の誤差を持つことから, 式 (5.71) の $P(z_j)$ の計算に区間解析を用いたものを適用する.

5.4 離散 Fourier 変換を用いた位置推定問題の解法の数値例

本節では第 5.3 節で提案した離散 Fourier 変換を用いた point-mass の位置推定法およびその誤差評価に対する数値実験を示す. まず 3 個の point-mass が領域内に存在する場合について考える. Point-mass の領域内の配置を図 5.3 に示すものとし, 図中のパラメータ r_M, r_S の値として表 5.1 に示す 12 通りのものを考えた. 各 point-mass の強度は $Q = 0.3 \times 2\pi$ とし, 境界上における対数ポテンシャルの観測点の個数を, 第 5.3.2 節に示した評価法により得られる評価誤差の値が 10^{-3} 程度になる個数とした. また代数方程式を解く際に用いる Durand-Kerner 法の収束判定条件は $\sum_{j=1}^N |z_j^{(l+1)} - z_j^{(l)}| < 10^{-20}$ とした.

表 5.1 図 5.3 における r_M および r_S の値

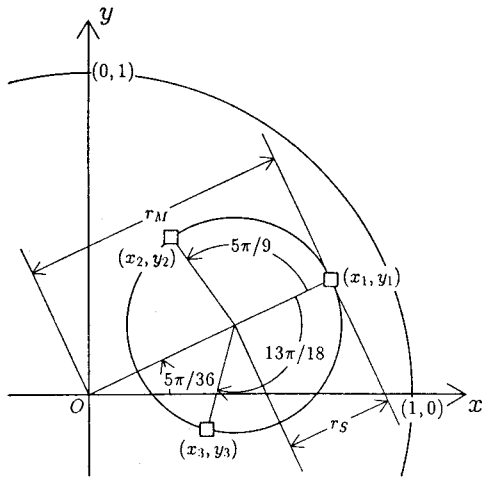


図 5.3 3点の場合の point-mass の配置

Case	r_M	r_S
Case 1.1	0.4	0.15
Case 1.2	0.5	0.15
Case 1.3	0.6	0.15
Case 1.4	0.7	0.15
Case 2.1	0.4	0.03
Case 2.2	0.5	0.03
Case 2.3	0.6	0.03
Case 2.4	0.7	0.03
Case 3.1	0.4	0.006
Case 3.2	0.5	0.006
Case 3.3	0.6	0.006
Case 3.4	0.7	0.006

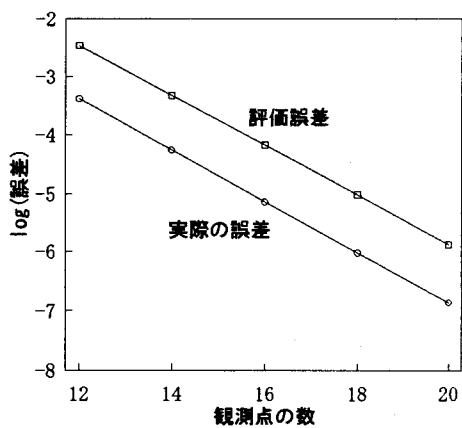
表 5.2 に推定位置の評価誤差の最大値と実際の絶対誤差の最大値を示す. 表 5.2 より第 5.3.1 節に示した位置推定法により精度の高い推定位置が得られることがわかる. 評価誤差と実際の誤差の値の比は $r_M = 0.4$ の場合で 10 倍程度, $r_M = 0.7$ の場合で 100 倍程度であり, よい評価を与えているものと考えられる. 表 5.3 に Case 1.1, 1.3, 2.1 および 3.1 について各々の point-mass の推定位置の評価誤差と実際の誤差の値を示す. 表 5.3 より各々の point-mass について, 評価誤差と実際の誤差の比はほぼ同じであることがわかる. 式 (5.63) より, r_M が大きい場合に離散 Fourier 変換による近似誤差が大きくなり, より多くの観測点が必要となることが予想されるが, 表 5.2 の観測点の個数に関する結果からこの予想は妥当であると考えられる. また代数方程式の数値解の精度は根が近接した場合に悪化することが知られている [109]. これは point-mass の位置が互いに近接した場合, すなわち r_S が小さい場合に対応し, r_S が小さくなるにしたがってより多くの観測点を必要となることが予想される. この予想も表 5.2 の観測点の個数に関する結果から妥当であるものと考えられる. 図 5.4 に Case 1.1, 1.3, 2.1 および 3.1 について, 観測点の個数を変化した場合に対する推定位置の評価誤差および実際の誤差の最大値の変化を示す. 図 5.4 より観測点の個数 $2n$ に対する誤差の減少のオーダーは $O(r_M^{2n})$ であり, 式 (5.63) による評価は実際のものとよく一致している.

表 5.2 3点の場合の point-mass の推定位置の評価誤差と実際の誤差の最大値

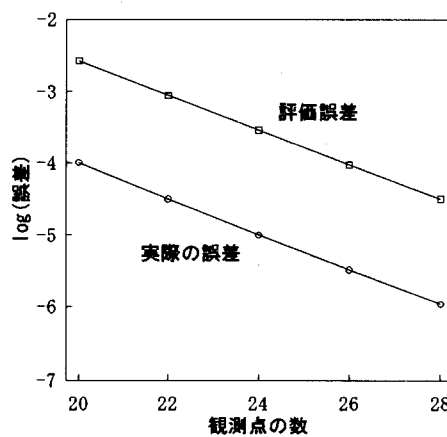
Case	観測点の個数	評価誤差の最大値	実際の誤差の最大値
Case 1.1	12	3.49E-3	4.12E-4
Case 1.2	16	1.65E-3	1.14E-4
Case 1.3	20	2.64E-3	9.83E-5
Case 1.4	30	1.03E-3	1.81E-5
Case 2.1	16	2.70E-3	2.01E-4
Case 2.2	20	3.41E-3	1.42E-4
Case 2.3	28	1.22E-3	2.41E-5
Case 2.4	38	1.68E-3	1.39E-5
Case 3.1	20	2.37E-3	1.76E-4
Case 3.2	26	1.71E-3	7.07E-5
Case 3.3	34	2.08E-3	4.18E-5
Case 3.4	48	1.69E-3	1.40E-5

表 5.3 Case 1.1,1.3,2.1,3.1 における各 point-mass に対する評価誤差と実際の誤差

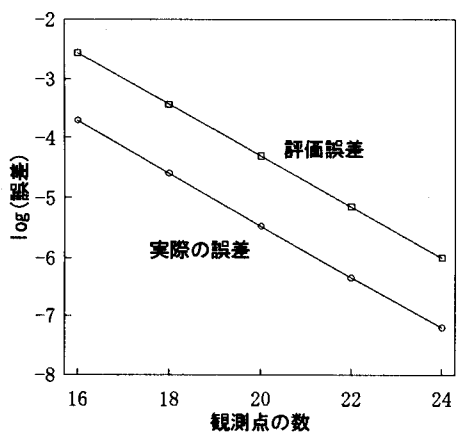
Case	位置	評価誤差 (E)	実際の誤差 (A)	E/A
Case 1.1	(x_1, y_1)	3.49E-3	4.12E-4	8.47E+0
	(x_2, y_2)	3.30E-3	3.83E-4	8.62E+0
	(x_3, y_3)	2.71E-3	3.15E-4	8.59E+0
Case 1.3	(x_1, y_1)	2.64E-3	9.83E-5	2.69E+1
	(x_2, y_2)	2.44E-3	8.50E-5	2.87E+1
	(x_3, y_3)	1.98E-3	6.85E-5	2.89E+1
Case 2.1	(x_1, y_1)	2.70E-3	2.04E-4	1.34E+1
	(x_2, y_2)	2.66E-3	1.98E-4	1.34E+1
	(x_3, y_3)	2.24E-3	1.67E-4	1.35E+1
Case 3.1	(x_1, y_1)	2.37E-3	1.76E-4	1.34E+1
	(x_2, y_2)	2.34E-3	1.75E-4	1.34E+1
	(x_3, y_3)	1.98E-3	1.48E-4	1.34E+1



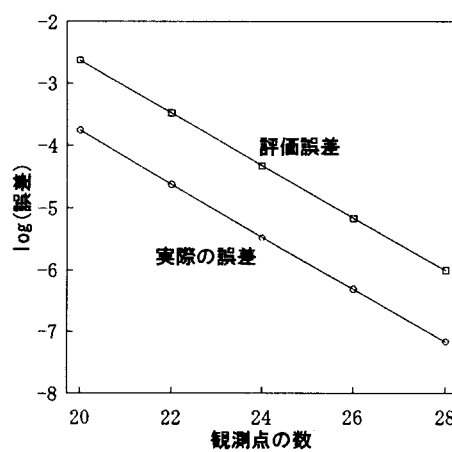
(a) Case 1.1



(b) Case 1.3



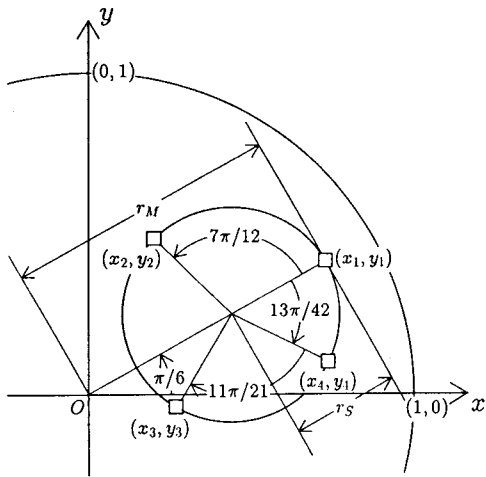
(c) Case 2.1



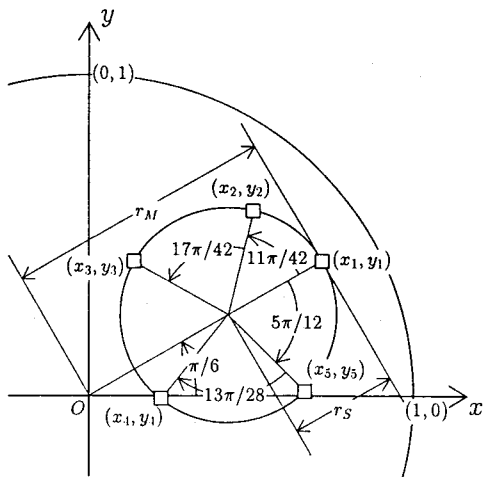
(d) Case 3.1

図 5.4 観測点の個数に対する推定位置の評価誤差と実際の誤差の変化

次に point-mass の個数を増加し, 4点および5点の point-mass が領域内に存在する場合を考える. 領域内における point-mass の配置を図 5.5 に示すものとし, 図 5.5 中のパラメータ r_M, r_S の値を表 5.4 に示す 8 通りのものを考えた. 各々の point-mass の強度を 3点の場合と同様に $Q = 0.3 \times 2\pi$ とし, 境界上における対数ポテンシャルの観測点の個数を, 評価誤差の値が 10^{-3} 程度となる個数とした. なお比較のため Case 1.3, 4.2 および 5.2 に対する境界上における対数ポテンシャルの分布を図 5.6 に示す.



(a) 4点の場合

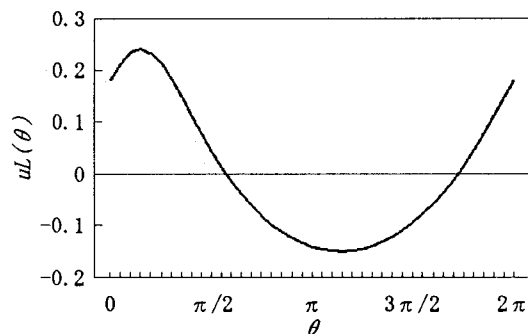


(b) 5点の場合

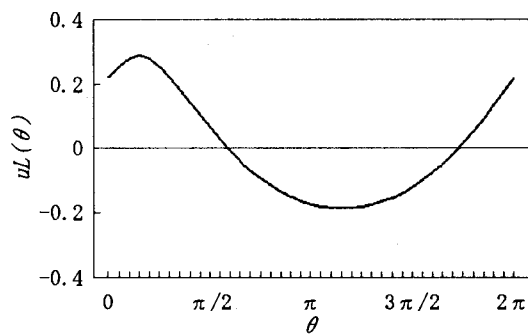
表 5.4 図 5.5 における r_M および r_S の値

Case	r_M	r_S
Case 4.1	0.3	0.2
Case 4.2	0.6	0.2
Case 4.3	0.3	0.02
Case 4.4	0.6	0.02
Case 5.1	0.3	0.2
Case 5.2	0.6	0.2
Case 5.3	0.3	0.02
Case 5.4	0.6	0.02

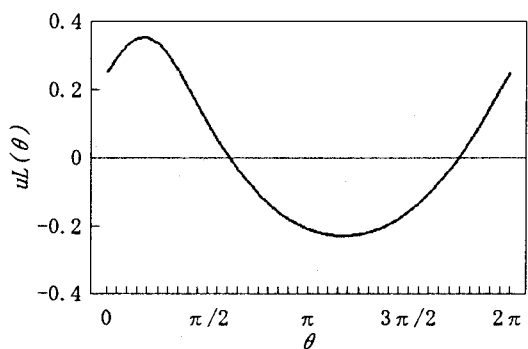
図 5.5 4点および5点の場合の point-mass の配置



(a) Case 1.3



(b) Case 4.2



(c) Case 5.2

図 5.6 Case 1.3, 4.2, 5.2 に対する境界上における対数ポテンシャルの分布

表 5.5 に推定位置の評価誤差および実際の絶対誤差の最大値を示す. 表 5.5 より第 5.3 節で示した point-mass の位置推定法は 4 点, および 5 点の場合に対しても有効であると考えられる. また評価誤差と実際の誤差の比は $r_M = 0.3$ の場合 100 倍以内であるが, $r_M = 0.6$ の場合 100 倍を越えており, r_M が大きい場合に評価が悪くなるものと予想される. 表 5.6 に Case 4.1 および 5.1 について各々の point-mass の推定位置の評価誤差と実際の誤差の値を示す. 表 5.6 より 4 点および 5 点の場合に対しても, 各々の point-mass について評価誤差と実際の誤差の比はほぼ一定であるものと考えられる.

表 5.5 4 点および 5 点の場合の point-mass の推定位置の評価誤差と実際の誤差の最大値

Case	観測点の個数	評価誤差の最大値	実際の誤差の最大値
Case 4.1	14	2.65E-4	3.43E-5
Case 4.2	24	2.51E-3	4.51E-5
Case 4.3	18	3.21E-3	2.27E-4
Case 4.4	40	1.06E-3	6.05E-6
Case 5.1	16	4.27E-4	3.74E-5
Case 5.2	30	1.12E-3	9.42E-6
Case 5.3	24	3.53E-4	1.41E-5
Case 5.4	48	2.18E-3	3.81E-6

表 5.6 4 点および 5 点の場合における各 point-mass に対する評価誤差と実際の誤差

Case	位置	評価誤差 (E)	実際の誤差 (A)	E/A
Case 4.1	(x_1, y_1)	2.53E-4	3.29E-5	7.68E+0
	(x_2, y_2)	1.41E-4	1.77E-5	7.99E+0
	(x_3, y_3)	1.53E-4	1.92E-5	7.95E+0
	(x_4, y_4)	2.65E-4	3.43E-5	7.74E+0
Case 5.1	(x_1, y_1)	4.20E-4	3.70E-5	1.14E+1
	(x_2, y_2)	4.27E-4	3.74E-5	1.14E+1
	(x_3, y_3)	2.52E-4	2.13E-5	1.18E+1
	(x_4, y_4)	1.97E-4	1.64E-5	1.21E+1
	(x_5, y_5)	2.43E-4	2.05E-5	1.19E+1

逆問題解析において, 推定値を用いて得られる状態量の値と実際の観測値とのずれを最小化することによりパラメータ推定をおこなう方法がよく用いられる. ここではそのずれを

$$J = \left\{ \sum_{p=0}^{2n-1} \left| u_L(\theta_p) + \frac{Q}{2\pi} \sum_{j=1}^N \ln \sqrt{1 + r_{j,e}^2 - 2r_{j,e} \cos(\theta_p - \varphi_{j,e})} \right|^2 \right\}^{1/2} \quad (5.73)$$

で評価する. ここで $(r_{j,e}, \varphi_{j,e})$ は各 point-mass の推定位置を表す. 第 5.3.1 節に示した推定法により得られた推定位置に対する J および

$$W = \left\{ \sum_{p=0}^{2n-1} |u_L(\theta_p)|^2 \right\}^{1/2} \quad (5.74)$$

の値を表 5.7 に示す. 結果より第 5.3.1 節に示した推定法により得られた推定位置は, 非常に小さいずれの値を与えるものと考えられる.

表 5.7 離散 Fourier 変換を用いた推定による関数 W と J の値

Case	W の値	J の値
Case 1.1	5.77E-1	2.93E-5
Case 1.2	9.30E-1	1.33E-5
Case 1.3	1.34E+1	1.90E-5
Case 1.4	2.04E+0	7.34E-6
Case 2.1	9.64E-1	9.56E-7
Case 2.2	1.38E+1	1.13E-6
Case 2.3	2.02E+1	4.00E-7
Case 2.4	2.82E+0	5.11E-7
Case 3.1	1.15E+0	3.99E-8
Case 3.2	1.66E+0	2.89E-8
Case 3.3	2.32E+0	3.44E-8
Case 3.4	3.29E+0	2.79E-8
Case 4.1	3.93E-1	7.17E-7
Case 4.2	1.80E+0	5.01E-6
Case 4.3	1.03E+0	9.12E-9
Case 4.4	3.28E+0	2.43E-9
Case 5.1	5.14E-1	2.19E-7
Case 5.2	2.05E+0	4.34E-7
Case 5.3	1.48E+0	2.10E-11
Case 5.4	4.49E+0	9.18E-11

5.5 離散 Fourier 変換に対する残差反復を用いた高精度の位置推定法

第 5.3 節において, 離散 Fourier 変換を用いた point-mass の位置推定法を提案し, 離散 Fourier 変換と複素 Fourier 係数の関係式 (5.60) を用いた誤差評価をおこなった. 式 (5.60) の第 2 項および第 3 項は離散 Fourier 係数の持つ残差を表していることから, これを修正項として用いることにより離散 Fourier 変換の近似を改良する事ができる. 本節ではその改良法を提案し, 誤差評価を示す.

5.5.1 残差反復を用いた複素 Fourier 係数の近似の改良法

第 5.3.1 節において, 離散 Fourier 変換 $\tilde{\gamma}_k$ と複素 Fourier 係数 γ_k の間に

$$\tilde{\gamma}_k = \gamma_k + \sum_{m=1}^{\infty} \bar{\gamma}_{2nm-k} + \sum_{m=1}^{\infty} \gamma_{2nm+k} \quad (5.75)$$

なる関係があることを示した. ここで

$$\hat{\gamma}_k^{(0)} = \tilde{\gamma}_k, \quad k = 1, 2, \dots, N \quad (5.76)$$

とおき, さらに

$$\hat{\gamma}_{2n \mp k}^{(0)} = \frac{Q}{2(2n \mp k)} \sum_{j=1}^N (\hat{z}_j^{(0)})^{2n \mp k}, \quad k = 1, 2, \dots, N \quad (5.77)$$

とおく. ただし $\hat{z}_j^{(0)} = \tilde{z}_j$, $j = 1, 2, \dots, N$ は $\hat{\gamma}_k^{(0)}$ を用いて得られた point-mass の推定位置である. これらを用いて γ_k の新しい近似値として

$$\hat{\gamma}_k^{(1)} = \tilde{\gamma}_k - \hat{\gamma}_{2n-k}^{(0)} - \hat{\gamma}_{2n+k}^{(0)} \quad (5.78)$$

を考える. このとき式 (5.75) より, $\hat{\gamma}_k^{(1)}$ の誤差は

$$\begin{aligned} |\hat{\gamma}_k^{(1)} - \gamma_k| &= \left| \hat{\gamma}_{2n-k}^{(0)} + \hat{\gamma}_{2n+k}^{(0)} - \sum_{m=1}^{\infty} \bar{\gamma}_{2nm-k} - \sum_{m=1}^{\infty} \gamma_{2nm+k} \right| \\ &\leq |\hat{\gamma}_{2n-k}^{(0)} - \gamma_{2n-k}| + |\hat{\gamma}_{2n+k}^{(0)} - \gamma_{2n+k}| \\ &\quad + \left| \sum_{m=2}^{\infty} \gamma_{2nm-k} \right| + \left| \sum_{m=2}^{\infty} \gamma_{2nm+k} \right| \end{aligned} \quad (5.79)$$

で評価できる. 離散 Fourier 変換 $\hat{\gamma}_k^{(0)}$ を用いた point-mass の推定位置 \hat{z}_j が真の位置 z_j に十分近いとすれば

$$|\hat{\gamma}_{2n \mp k}^{(0)} - \gamma_{2n \mp k}| \leq |\gamma_{2n \mp k}|, \quad k = 1, 2, \dots, N \quad (5.80)$$

となることが期待できる. この場合には式 (5.61), (5.79) より, $\hat{\gamma}_k^{(1)}$ の近似誤差は

$$|\hat{\gamma}_k^{(1)} - \gamma_k| \leq |\tilde{\gamma}_k - \gamma_k| \quad (5.81)$$

となり, 複素 Fourier 係数 γ_k の近似精度を高めることができる. さらに γ_k の近似値 $\hat{\gamma}_k^{(1)}$ を用いて得られた point-mass の推定位置を $\hat{z}_j^{(1)}$, $j = 1, 2, \dots, N$ とおき, γ_k の近似値を

$$\hat{\gamma}_k^{(2)} = \tilde{\gamma}_k - \hat{\gamma}_{2n-k}^{(1)} - \hat{\gamma}_{2n+k}^{(1)} \quad (5.82)$$

で更新する. ただし

$$\hat{\gamma}_{2n \mp k}^{(1)} = \frac{Q}{2(2n \mp k)} \sum_{j=1}^N \left(\hat{z}_j^{(1)} \right)^{2n \mp k}, \quad k = 1, 2, \dots, N \quad (5.83)$$

である. ここで $\hat{\gamma}_k^{(1)}$ が $\hat{\gamma}_k^{(0)}$ より高精度の γ_k の近似と考えられ, 推定位置も $\hat{z}_j^{(1)}$ が $\hat{z}_j^{(0)}$ より高精度であると考えられる. したがって γ_k の近似値として $\hat{\gamma}_k^{(2)}$ が $\hat{\gamma}_k^{(1)}$ より高精度であると期待できる. 上記の操作を繰り返し, γ_k の近似列 $\{\hat{\gamma}_k^{(l)}\}$ を反復式

$$\hat{\gamma}_k^{(l)} = \tilde{\gamma}_k - \hat{\gamma}_{2n-k}^{(l-1)} - \hat{\gamma}_{2n+k}^{(l-1)} \quad (5.84)$$

により構成する手法が本節で提案する解法である. ただし

$$\hat{\gamma}_{2n \mp k}^{(l-1)} = \frac{Q}{2(2n \mp k)} \sum_{j=1}^N \left(\hat{z}_j^{(l-1)} \right)^{2n \mp k}, \quad k = 1, 2, \dots, N \quad (5.85)$$

であり, $\hat{z}_j^{(l-1)}$ は Fourier 係数の近似値 $\hat{\gamma}_k^{(l-1)}$ を用いて得られた point-mass の推定位置である. この反復式 (5.84) は複素 Fourier 係数に対する離散 Fourier 変換の残差を繰り返し代入することにより精度を高める方法と考えられる. なお実際の計算では反復計算は $\hat{\gamma}_k^{(l)}$, および $\hat{z}_j^{(l)}$ の収束をもって停止する. 図 5.7 に本節で提案した複素 Fourier 係数の残差反復を用いた point-mass の位置推定のフローチャートを示す.

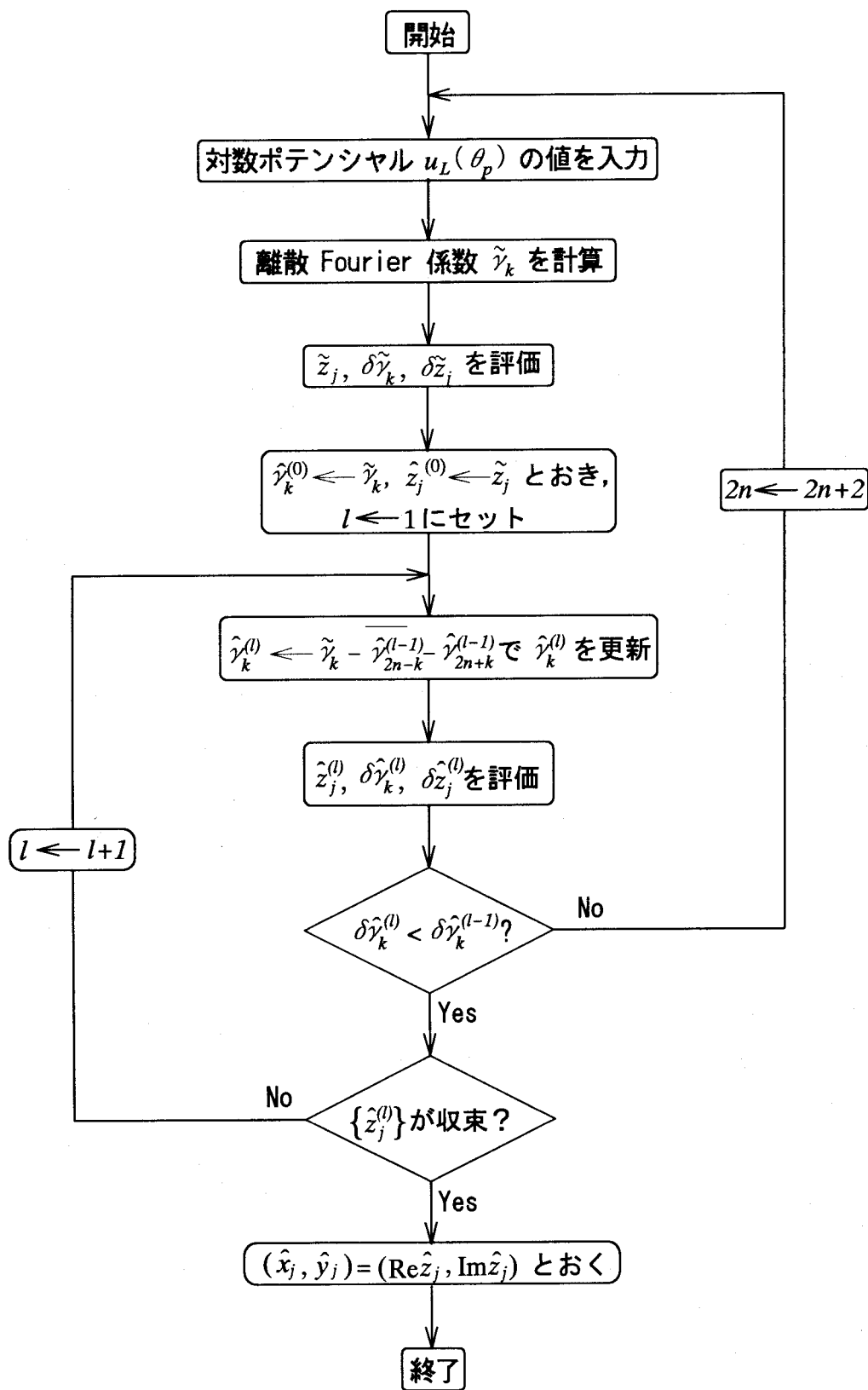


図 5.7 離散 Fourier 変換に対する残差反復を用いた point-mass の位置推定法のフローチャート

5.5.2 残差反復を用いた複素 Fourier 係数の近似法の収束性

反復式 (5.84) による複素 Fourier 係数の近似列 $\{\hat{\gamma}_k^{(l)}\}$ の収束性を証明する. まず 2つの非線形方程式

$$F(X) = 0 \quad (5.86)$$

$$F(X) + G(X) = 0 \quad (5.87)$$

を考える. ここで $X \in \mathbf{C}^N$ であり $F(X)$, $G(X)$ はいずれも \mathbf{C}^N から \mathbf{C}^N への写像である. 方程式 (5.87) は方程式 (5.86) の摂動方程式と見ることができる. 方程式 (5.86), (5.87) について次の補題を得る.

[補題 5.7]

方程式 (5.86) は解 $X_0 \in \mathbf{C}^N$ を持つものとし, 写像 $F(X)$ および $G(X)$ について次の性質を満たす正の定数 ϵ_j , $j = 1, 2, 3$ が存在することを仮定する.

- (i) 任意の $Y \in B(0; \epsilon_1)$ に対し, 方程式 $F(X) + Y = 0$ は閉球 $B(X_0; \epsilon_2)$ 内にただ一つの解をもつ. ここで $B(X; \epsilon) \equiv \{X' \mid |X - X'| \leq \epsilon\}$ である.
- (ii) 写像 $F(X)$ は連続である.
- (iii) 任意に $Y, Y' \in B(0; \epsilon_1)$ をとり, 方程式 $F(X) + Y = 0$, $F(X') + Y' = 0$ に対する解をそれぞれ X, X' とする. このとき Y, Y' に依存しない正の定数 L, α が存在し,

$$|X - X'| \leq L|Y - Y'|^\alpha \quad (5.88)$$

が成立する.

- (iv) 任意の $X \in B(X_0; \epsilon_2)$ に対し $G(X) \in B(0; \epsilon_1)$ が成立する.
- (v) 任意に $X, X' \in B(X_0; \epsilon_2)$ をとったとき, X, X' に依存しない正の定数 K が存在し,

$$|G(X) - G(X')| \leq K|X - X'|^{1/\alpha} \quad (5.89)$$

が成立する.

- (vi) (iii) および (v) の定数 K, L, α について

$$LK^\alpha \equiv \epsilon_3 < 1 \quad (5.90)$$

が成立する.

このとき, 方程式 (5.87) は $B(X_0; \epsilon_2)$ 内に少なくとも一つ解を持つ. またそのうちの一つは $B(X_0; \epsilon_2)$ 内の点列

$$\{X_l \mid X_l \text{ は } F(X) + G(X_{l-1}) = 0 \text{ の } B(X_0; \epsilon_2) \text{ 内の 解, } l = 1, 2, \dots\} \quad (5.91)$$

の極限である.

[証明]

閉球 $B(X_0; \epsilon_2)$ 内の点 X に対し, 方程式

$$F(Z) + G(X) = 0 \quad (5.92)$$

の解 $Z \in B(X_0; \epsilon_2)$ を対応させる写像を $H(X)$ と定義する. 写像 $H(X)$ は $B(X_0; \epsilon_2)$ から $B(X_0; \epsilon_2)$ への写像であり, 任意の $X, X' \in B(X_0; \epsilon_2)$ に対し

$$\begin{aligned} |H(X) - H(X')| &= |Z - Z'| \\ &\leq L|G(X) - G(X')|^\alpha \\ &\leq L(K(|X - X'|^{1/\alpha}))^\alpha \\ &= LK^\alpha|X - X'| \\ &= \epsilon_3|X - X'| \\ &< |X - X'| \end{aligned} \quad (5.93)$$

が成立する. ここで $Z = H(X)$, $Z' = H(X')$ とおいた. したがって $H(X)$ は $B(X_0; \epsilon_2)$ から $B(X_0; \epsilon_2)$ 内への縮小写像である.

閉球 $B(X_0; \epsilon_2)$ 内の点列 $\{X_l\}$ を

$$X_0 = X_0 \quad (5.94)$$

$$X_l = H(X_{l-1}), \quad l = 1, 2, \dots \quad (5.95)$$

で定義する. 定義より X_l は方程式

$$F(X_l) + G(X_{l-1}) = 0 \quad (5.96)$$

の解であり, さらに点列 $\{X_l\}$ について

$$\begin{aligned} |X_{l+1} - X_l| &= |H(X_l) - H(X_{l-1})| \\ &\leq \epsilon_3|X_l - X_{l-1}| \\ &= \epsilon_3|H(X_{l-1}) - H(X_{l-2})| \\ &\leq \epsilon_3^2|X_{l-1} - X_{l-2}| \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \vdots \\ & \leq \epsilon_3^l |X_1 - X_0| \\ & \leq 2\epsilon_2 \epsilon_3^l \end{aligned} \tag{5.97}$$

が成り立つ. したがって点列 $\{X_l\}$ は閉球 $B(X_0; \epsilon_2)$ 内の Cauchy 列であり, ただ一つの極限 $X_\infty \in B(X_0; \epsilon_2)$ が存在する. さらに仮定 (ii), (v) より写像 $F(X)$, $G(X)$ はいずれも連続であるから, $l \rightarrow \infty$ の極限を求めると

$$F(X_l) + G(X_{l-1}) = 0 \rightarrow F(X_\infty) + G(X_\infty) = 0 \tag{5.98}$$

を得る. したがって X_∞ は方程式 (5.87) の解である.

[証明終]

ここで $M < 1$ をとり,

$$X \equiv (z_1, z_2, \dots, z_N) \in B(0; M) \tag{5.99}$$

とおく. さらに関数 $F(X)$, $G(X)$ を

$$F(X) = \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^N z_j - \frac{2 \cdot 1}{Q} \tilde{\gamma}_1 \\ \sum_{j=1}^N z_j^2 - \frac{2 \cdot 2}{Q} \tilde{\gamma}_2 \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^N z_j^N - \frac{2 \cdot N}{Q} \tilde{\gamma}_N \end{pmatrix} \tag{5.100}$$

$$G(X) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2n-1} \sum_{j=1}^N \bar{z}_j^{2n-1} + \frac{1}{2n+1} \sum_{j=1}^N z_j^{2n+1} \\ \frac{2}{2n-2} \sum_{j=1}^N \bar{z}_j^{2n-2} + \frac{2}{2n+2} \sum_{j=1}^N z_j^{2n+2} \\ \vdots \\ \frac{N}{2n-N} \sum_{j=1}^N \bar{z}_j^{2n-N} + \frac{N}{2n+N} \sum_{j=1}^N z_j^{2n+N} \end{pmatrix} \tag{5.101}$$

と定義する. このとき

$$X_0 \equiv (\hat{z}_1^{(0)}, \hat{z}_2^{(0)}, \dots, \hat{z}_N^{(0)}) \tag{5.102}$$

は方程式 $F(X) = 0$ の解であり, また $F(X)$, $G(X)$ はいずれも連続である. また $F(X) = 0$ が第 5.3.1 節の方程式 (5.50) と同値であることから, $(\hat{z}_1^{(0)}, \hat{z}_2^{(0)}, \dots, \hat{z}_N^{(0)})$ がすべて異なる点の場合, 適当な $\epsilon_1 > 0$ に対し十分小さい $\epsilon_2 > 0$ をとれば, 任意の $Y \in B(0; \epsilon_2)$ について

$$F(X) + Y = 0 \tag{5.103}$$

の解 X で $X \in B(X; \epsilon_1)$ となるものがただ一つだけ存在する.

また関数 $F(X)$ の Jacobi 行列について, その行列式は

$$\begin{aligned} \det \frac{dF}{dX} &= \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 2z_1 & 2z_2 & \cdots & 2z_N \\ 3z_1^2 & 3z_2^2 & \cdots & 3z_N^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ Nz_1^{N-1} & Nz_2^{N-1} & \cdots & Nz_N^{N-1} \end{pmatrix} \\ &= N! \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ z_1 & z_2 & \cdots & z_N \\ z_1^2 & z_2^2 & \cdots & z_N^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ z_1^{N-1} & z_2^{N-1} & \cdots & z_N^{N-1} \end{pmatrix} \\ &= (-1)^{N(N-1)/2} N! \prod_{i < j} (z_i - z_j) \end{aligned} \quad (5.104)$$

となり, この値が $X = X_0$ で零でないことから $\left(\frac{dF}{dX}\right)^{-1}$ が存在する. したがって適当な $L > 0$ をとることにより, 任意の $Y, Y' \in B(0; \epsilon_2)$ に対する方程式 (5.103) の解 $X, X' \in B(X_0; \epsilon_1)$ について

$$|X - X'| \leq L|Y - Y'| \quad (5.105)$$

が成立する. また $X = (z_1, z_2, \dots, z_N)$, $X' = (z'_1, z'_2, \dots, z'_N) \in B(X_0; \epsilon_1)$ とおくと, 関数 $G(X)$ について

$$\begin{aligned} &G(X) - G(X') \\ &= \left(\begin{array}{l} \frac{1}{2n-1} \sum_{j=1}^N \bar{z}_j^{2n-1} + \frac{1}{2n+1} \sum_{j=1}^N z_j^{2n+1} \\ \frac{2}{2n-2} \sum_{j=1}^N \bar{z}_j^{2n-2} + \frac{2}{2n+2} \sum_{j=1}^N z_j^{2n+2} \\ \vdots \\ \frac{N}{2n-N} \sum_{j=1}^N \bar{z}_j^{2n-N} + \frac{N}{2n+N} \sum_{j=1}^N z_j^{2n+N} \end{array} \right) - \left(\begin{array}{l} \frac{1}{2n-1} \sum_{j=1}^N \bar{z}'_j{}^{2n-1} + \frac{1}{2n+1} \sum_{j=1}^N z'^j{}_{2n+1} \\ \frac{2}{2n-2} \sum_{j=1}^N \bar{z}'_j{}^{2n-2} + \frac{2}{2n+2} \sum_{j=1}^N z'^j{}_{2n+2} \\ \vdots \\ \frac{N}{2n-N} \sum_{j=1}^N \bar{z}'_j{}^{2n-N} + \frac{N}{2n+N} \sum_{j=1}^N z'^j{}_{2n+N} \end{array} \right) \end{aligned}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{1}{2n-1} \sum_{j=1}^N \sum_{k=1}^{2n-1} \bar{z}_j^{2n-k-1} \bar{z}'_j{}^k (\bar{z}_j - \bar{z}'_j) + \frac{1}{2n+1} \sum_{j=1}^N \sum_{k=1}^{2n+1} z_j^{2n-k+1} z'_j{}^k (z_j - z'_j) \\ \frac{2}{2n-2} \sum_{j=1}^N \sum_{k=1}^{2n-2} \bar{z}_j^{2n-k-2} \bar{z}'_j{}^k (\bar{z}_j - \bar{z}'_j) + \frac{2}{2n+2} \sum_{j=1}^N \sum_{k=1}^{2n+2} z_j^{2n-k+2} z'_j{}^k (z_j - z'_j) \\ \vdots \\ \frac{N}{2n-N} \sum_{j=1}^N \sum_{k=1}^{2n-N} \bar{z}_j^{2n-k-N} \bar{z}'_j{}^k (\bar{z}_j - \bar{z}'_j) + \frac{N}{2n+N} \sum_{j=1}^N \sum_{k=1}^{2n+N} z_j^{2n-k+N} z'_j{}^k (z_j - z'_j) \end{pmatrix} \quad (5.106)$$

を得る. ここで

$$\Xi_1 = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1N} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{N1} & a_{N2} & \cdots & a_{NN} \end{pmatrix}, \quad \Xi_2 = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1N} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{N1} & b_{N2} & \cdots & b_{NN} \end{pmatrix}, \quad Z = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_N \end{pmatrix} \quad (5.107)$$

ただし

$$a_{lj} = \frac{l}{2n-l} \sum_{k=1}^{2n-l} \bar{z}_j^{2n-k-l} \bar{z}'_j{}^k, \quad b_{lj} = \frac{l}{2n+l} \sum_{k=1}^{2n+l} z_j^{2n-k+l} z'_j{}^k, \quad c_j = (z_j - z'_j) \quad (5.108)$$

とおくと

$$\begin{aligned} |G(X) - G(X')| &= |\Xi_1 \bar{Z} + \Xi_2 Z| \\ &\leq |\Xi_1| |Z| + |\Xi_2| |Z| \\ &\leq \left(\max_{l=1,2,\dots,N} \sum_{j=1}^N |a_{lj}| + \max_{l=1,2,\dots,N} \sum_{j=1}^N |b_{lj}| \right) |X - X'| \\ &\leq \left(N \max_{l,j} |a_{lj}| + N \max_{l,j} |b_{lj}| \right) |X - X'| \\ &\leq \left(N \frac{N}{2n-N} 2nr_M^{2n-N} + N \frac{N}{2n} (2n+N)r_M^{2n-N} \right) |X - X'| \\ &\leq 4N^2 r_M^{2n-N} |X - X'| \\ &\equiv K(n) |X - X'| \end{aligned} \quad (5.109)$$

なる評価を得る. 定義より, 式 (5.109) の評価の係数 $K(n)$ は $n \rightarrow \infty$ の時, 零に収束し, したがって n を十分大きくとることにより $LK(n) < 1$ とすることができる. 以上より方程式

$$F(X) = 0 \quad (5.110)$$

$$F(X) + G(X) = 0 \quad (5.111)$$

は補題 5.7 の条件をすべて満たし, 方程式 (5.111) は閉球 $B(X_0; \epsilon_2)$ 内に少なくとも一つ解

をもつ. また補題 5.7 の点列 $\{X_l\}_{l=1,2,\dots}$ は方程式

$$\begin{pmatrix} \sum_{j=1}^N (z_j^{(l)}) - \frac{2 \cdot 1}{Q} \tilde{\gamma}_1 \\ \sum_{j=1}^N (z_j^{(l)})^2 - \frac{2 \cdot 2}{Q} \tilde{\gamma}_2 \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^N (z_j^{(l)})^N - \frac{2 \cdot N}{Q} \tilde{\gamma}_N \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{2n-1} \sum_{j=1}^N (\bar{z}_j^{(l-1)})^{2n-1} + \frac{1}{2n+1} \sum_{j=1}^N (z_j^{(l-1)})^{2n+1} \\ \frac{2}{2n-2} \sum_{j=1}^N (\bar{z}_j^{(l-1)})^{2n-2} + \frac{2}{2n+2} \sum_{j=1}^N (z_j^{(l-1)})^{2n+2} \\ \vdots \\ \frac{N}{2n-N} \sum_{j=1}^N (\bar{z}_j^{(l-1)})^{2n-N} + \frac{N}{2n+N} \sum_{j=1}^N (z_j^{(l-1)})^{2n+N} \end{pmatrix} = 0 \quad (5.112)$$

の解 $z_j^{(l)}$, $j = 1, 2, \dots, N$ で構成され, これは $\hat{z}_j^{(l)}$ と同値である. したがって反復式 (5.84) による γ_k の近似列 $\{\hat{\gamma}_k^{(l)}\}$ が収束することが証明された.

5.5.3 残差反復を用いた複素 Fourier 係数の近似法の誤差評価

次に (5.84) による複素 Fourier 係数の近似列 $\{\hat{\gamma}_k^{(l)}\}$ の誤差評価を与える. 式 (5.84) より $\hat{\gamma}_k^{(l)}$ の誤差は

$$\begin{aligned} |\hat{\gamma}_k^{(l)} - \gamma_k| &= \left| (\tilde{\gamma}_k - \bar{\gamma}_{2n-k}^{(l-1)} - \hat{\gamma}_{2n+k}^{(l-1)}) - \gamma_k \right| \\ &\leq \left| \left\{ \gamma_k + \bar{\gamma}_{2n-k} + \gamma_{2n+k} + \sum_{m=2}^{\infty} (\bar{\gamma}_{2nm-k} + \gamma_{2nm+k}) \right\} - \bar{\gamma}_{2n-k}^{(l-1)} - \hat{\gamma}_{2n+k}^{(l-1)} - \gamma_k \right| \\ &\leq \left| \bar{\gamma}_{2n-k}^{(l-1)} - \bar{\gamma}_{2n-k} \right| + \left| \hat{\gamma}_{2n+k}^{(l-1)} - \gamma_{2n+k} \right| + \left| \sum_{m=2}^{\infty} (\bar{\gamma}_{2nm-k} + \gamma_{2nm+k}) \right| \\ &\leq \left| \bar{\gamma}_{2n-k}^{(l-1)} - \gamma_{2n-k} \right| + \left| \hat{\gamma}_{2n+k}^{(l-1)} - \gamma_{2n+k} \right| + \sum_{m=2}^{\infty} (|\gamma_{2nm-k}| + |\gamma_{2nm+k}|) \quad (5.113) \end{aligned}$$

で評価できる. 式 (5.113) の第 1 項および第 2 項の評価について, 平均値の定理を用いて

$$\begin{aligned} \left| \bar{\gamma}_{2n+k}^{(l-1)} - \gamma_{2n+k} \right| &= \left| \frac{Q}{2(2n+k)} \sum_{j=1}^N \left\{ (\hat{z}_j^{(l-1)})^{2n+k} - z_j^{2n+k} \right\} \right| \\ &\leq \frac{|Q|}{2(2n+k)} \sum_{j=1}^N \left| (z_j + \delta \hat{z}_j^{(l-1)})^{2n+k} - z_j^{2n+k} \right| \\ &\leq \frac{|Q|}{2(2n+k)} \sum_{j=1}^N (2n+k) (|z| + |\delta \hat{z}_j^{(l-1)}|)^{2n+k-1} \cdot |\delta \hat{z}_j^{(l-1)}| \\ &\leq \frac{|Q|N}{2} (r_M + \delta \hat{z}_M^{(l-1)})^{2n+k-1} \cdot \delta \hat{z}_M^{(l-1)} \quad (5.114) \end{aligned}$$

を得る. ここで

$$\delta \hat{z}_j^{(l-1)} \equiv \hat{z}_j^{(l-1)} - z_j, \quad j = 1, 2, \dots, N \quad (5.115)$$

$$\delta \hat{z}_M^{(l-1)} \equiv \max_{j=1,2,\dots,N} |\delta \hat{z}_j^{(l-1)}| \quad (5.116)$$

とおいた. また式 (5.113) の第3項は

$$\begin{aligned}
\sum_{m=2}^{\infty} |\gamma_{2nm+k}| &\leq \sum_{m=2}^{\infty} \frac{|Q|}{2(2nm+k)} \sum_{j=1}^N |z_j|^{2nm+k} \\
&\leq \sum_{m=2}^{\infty} \frac{|Q|N}{2(2nm+k)} r_M^{2nm+k} \\
&= \frac{|Q|N}{2} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{2nm+2n+k} r_M^{2nm+2n+k} \\
&\leq \frac{|Q|N}{2} r_M^{2n+k} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{r_M^{2nm}}{2nm} \\
&\leq \frac{|Q|N}{4n} r_M^{2n+k} \ln \frac{1}{1-r_M^{2n}} \\
&\leq \frac{|Q|N}{2n} r_M^{4n+k} \tag{5.117}
\end{aligned}$$

で評価できる. ただし r_M^{2n} は十分小さいものと仮定した. 式 (5.114), (5.117) より $\hat{\gamma}_k^{(l)}$ の誤差評価として

$$\begin{aligned}
|\hat{\gamma}_k^{(l)} - \gamma_k| &\leq \frac{|Q|N}{2} \left\{ (r_M + \delta \hat{z}_M^{(l-1)})^{2n-k-1} + (r_M + \delta \hat{z}_M^{(l-1)})^{2n+k-1} \right\} \cdot \delta \hat{z}_M^{(l-1)} \\
&\quad + \frac{|Q|N}{2n} (r_M^{4n-k} + r_M^{4n+k}) \tag{5.118}
\end{aligned}$$

を得る.

推定位置 $(\hat{z}_1^{(l)}, \hat{z}_2^{(l)}, \dots, \hat{z}_N^{(l)})$ がすべて異なる点である場合, その誤差 $\delta \hat{z}_j^{(l)}$ のオーダーは

$$\delta \hat{z}_M^{(l)} = O(|\delta \hat{\gamma}_N^{(l)}|) \tag{5.119}$$

で評価できる. したがって, $(\hat{z}_1^{(0)}, \hat{z}_2^{(0)}, \dots, \hat{z}_N^{(0)})$ の誤差のオーダーは

$$\delta \hat{z}_M^{(0)} = O(|\delta \hat{\gamma}_N^{(0)}|) = O(r_M^{2n-N}/n) \tag{5.120}$$

で評価でき,

$$\delta \hat{\gamma}_k^{(1)} = O(r_M^{2n-k-1}) \cdot O(r_M^{2n-N}/n) + O(r_M^{4n-k-N}/n) = O(r_M^{4n-k-N-1}/n) \tag{5.121}$$

を得る. さらに

$$\delta \hat{z}_M^{(1)} = O(r_M^{4n-2N-1}/n) \tag{5.122}$$

なる評価が得られることから

$$\delta \hat{\gamma}_k^{(2)} = O(r_M^{2n-k-1}) \cdot O(r_M^{4n-2N-1}/n) + O(r_M^{4n-k}/n) = O(r_M^{4n-k}/n) \tag{5.123}$$

が成り立つ. したがって $l \geq 2$ のとき, $\hat{\gamma}_k^{(l)}$ および $\hat{z}_k^{(l)}$ の誤差のオーダーについて

$$\delta \hat{\gamma}_k^{(l)} = O(r_M^{4n-k}/n), \quad k = 1, 2, \dots, N \tag{5.124}$$

および

$$\delta \hat{z}_j^{(l)} = O(r_M^{4n-N}/n), \quad j = 1, 2, \dots, N \quad (5.125)$$

なる評価が得られる. 式 (5.63), (5.124) より, $\hat{\gamma}_k^{(l)}$ は $\tilde{\gamma}_k$ より精度の高い近似値を与えるものと考えられる.

5.6 離散 Fourier 変換に対する残差反復を用いた位置推定法の数値例

本節では第 5.5 節で提案した離散 Fourier 変換に対する残差反復を用いた point-mass の位置推定法およびその誤差評価に対する数値実験を示す. 例として用いる point-mass の個数, 配置および強度については第 5.4 節で用いたものと同じとした. 境界上における対数ポテンシャルの観測点の個数として, 図 5.7 のアルゴリズムが収束する最小の個数を用いた. また, 代数方程式を解く際に用いる Durand-Kerner 法の収束判定条件の定数を 10^{-20} とし, 残差反復に対する収束判定を $\sum_{j=1}^N |\hat{z}_j^{(l+1)} - \hat{z}_j^{(l)}| < 10^{-15}$ とおいた.

表 5.8 に残差反復を用いた推定位置と離散 Fourier 変換 (DFT) のみによる推定位置に対する評価誤差と実際の絶対誤差の最大値を示す. 表 5.8 より残差反復を用いた場合, 離散 Fourier 変換のみを用いた場合に比較して推定位置の精度が向上する事がわかる. また残差反復が収束するまでに要した反復回数も表 5.8 に示すが, 反復回数は 10 回以内となっており, 収束の速い解法であることがわかる.

表 5.8 によれば, 評価誤差と実際の誤差の比が離散 Fourier 変換のみを用いた場合に比較して大きくなっている. 図 5.8 に Case 1.1, 1.3, 2.1, および 3.1 について, 観測点の個数を変化した場合の評価誤差と実際の誤差の最大値の比の変化を示し, 図 5.9 に $\hat{\gamma}_1$ および $\hat{\gamma}_3$ に対する誤差評価式 (5.118) の第 1 項と第 2 項の変化を示す. ただし $\hat{\gamma}_k$ は $\hat{\gamma}_k^{(l)}$ の収束値を表す. 図 5.8, 5.9 より評価誤差と実際の誤差の比が大きくなる原因は式 (5.118) の第 1 項であり, これが第 2 項と比較して小さくなった場合, 離散 Fourier 変換を用いた推定とほぼ同様の比となることがわかる. なお第 1 項の評価が大きくなる原因としては平均値の定理を用いた評価であることが考えられる. また式 (5.118) より r_M が大きい場合, 離散 Fourier 変換と同様に近似誤差が大きくなり, 推定に必要とする観測点の個数が増加するものと予想されるが, 表 5.8 の観測点の個数に関する結果からこの予想は妥当であると考えられる.

図 5.10 に Case 1.1, 1.3, 2.1 および 3.1 について, 観測点の個数を変化した場合に対する推定位置の評価誤差および実際の誤差の最大値の変化を示す. 図 5.10 より観測点の個数 $2n$ に対する誤差の減少のオーダーは $O(r_M^{4n})$ であり, 式 (5.125) による評価は実際のものと同様一致している.

表 5.8 残差反復を用いた推定による point-mass の推定位置の評価誤差と実際の誤差の最大値

Case	$2n$	反復回数	残差反復を用いた推定		DFT のみによる推定	
			評価誤差	実際の誤差	評価誤差	実際の誤差
Case 1.1	12	7	3.04E-8	2.92E-9	3.49E-3	4.12E-4
Case 1.2	14	8	2.65E-7	1.41E-8	7.64E-3	5.36E-4
Case 1.3	16	9	2.02E-5	1.23E-7	2.61E-2	9.80E-4
Case 1.4	22	8	3.53E-4	8.14E-8	2.43E-2	4.57E-4
Case 2.1	14	8	2.40E-5	1.27E-9	1.94E-2	1.59E-3
Case 2.2	18	7	7.40E-6	8.13E-10	1.57E-2	6.93E-4
Case 2.3	24	6	6.07E-6	3.94E-10	1.19E-2	2.49E-4
Case 2.4	34	6	1.84E-6	1.50E-10	8.21E-3	7.03E-5
Case 3.1	18	6	7.81E-5	3.07E-11	1.33E-2	1.14E-3
Case 3.2	24	5	2.49E-6	6.71E-12	8.29E-3	3.32E-4
Case 3.3	32	5	1.36E-6	3.55E-12	6.07E-3	1.25E-4
Case 3.4	44	5	2.36E-5	3.48E-12	7.72E-3	6.56E-5
Case 4.1	12	8	8.19E-10	8.11E-11	3.71E-3	4.42E-4
Case 4.2	20	8	2.38E-4	6.14E-9	2.43E-2	4.01E-4
Case 4.3	18	5	1.84E-8	1.96E-14	3.21E-3	2.27E-4
Case 4.4	36	4	1.23E-4	1.46E-13	9.58E-3	5.77E-5
Case 5.1	14	8	9.04E-10	8.44E-12	5.89E-3	4.85E-4
Case 5.2	26	6	3.26E-6	5.77E-11	1.05E-2	8.63E-5
Case 5.3	22	5	4.12E-7	1.11E-16	4.63E-3	1.99E-4
Case 5.4	46	4	3.53E-5	1.52E-16	6.47E-3	1.17E-5

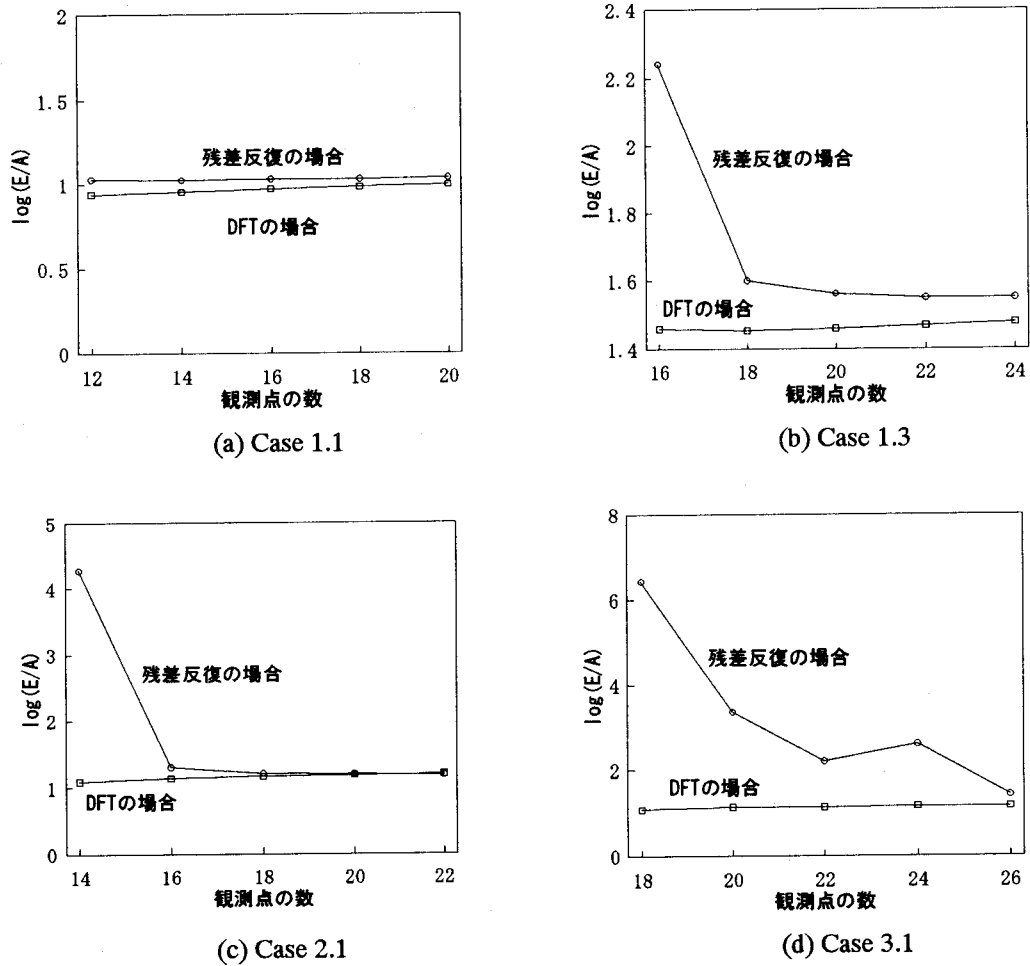
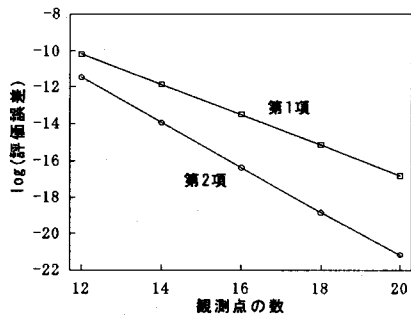
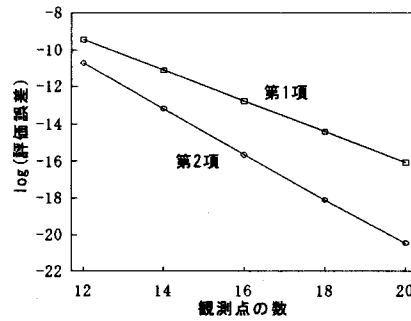


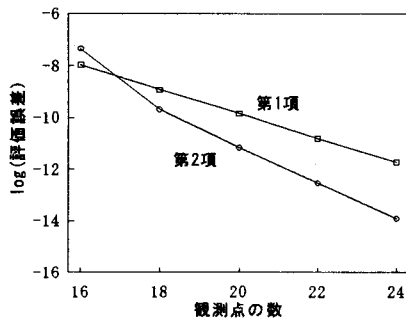
図 5.8 Case 1.1,1.3,2.1,3.1 に対する point-mass の推定位置の評価誤差と実際の誤差の比の変化



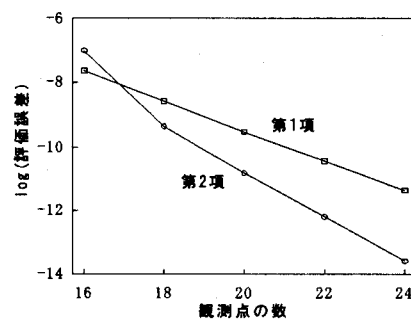
(a) Case 1.1 (for $\hat{\gamma}_1$)



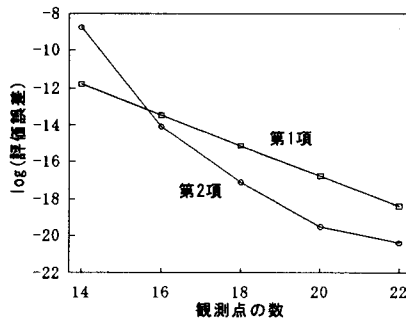
(b) Case 1.1 (for $\hat{\gamma}_3$)



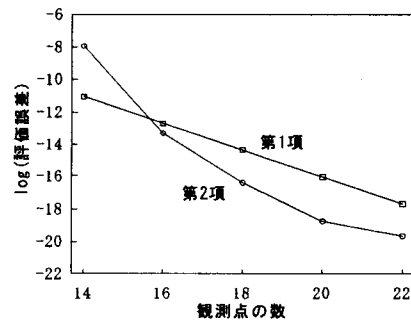
(c) Case 1.3 (for $\hat{\gamma}_1$)



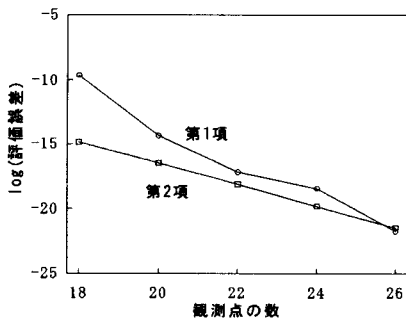
(d) Case 1.3 (for $\hat{\gamma}_3$)



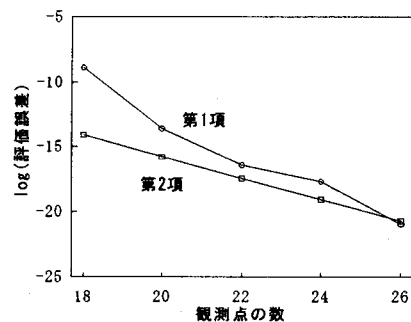
(e) Case 2.1 (for $\hat{\gamma}_1$)



(f) Case 2.1 (for $\hat{\gamma}_3$)



(g) Case 3.1 (for $\hat{\gamma}_1$)



(h) Case 3.1 (for $\hat{\gamma}_3$)

図 5.9 Case 1.1,1.3,2.1,3.1 に対する Fourier 係数の誤差評価式 (5.117) の第1項と第2項の変化

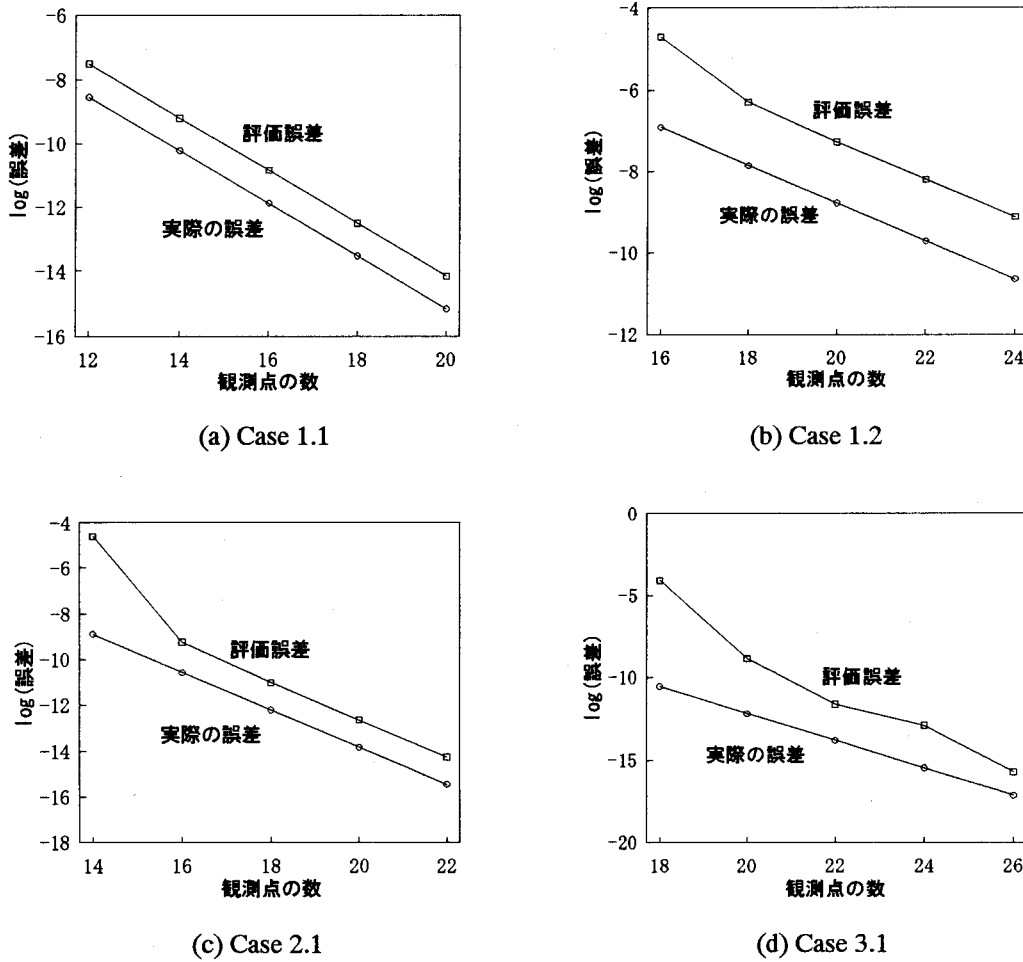


図 5.10 Case 1.1,1.3,2.1,3.1 に対する point-mass の推定位置の評価誤差と実際の誤差の変化

表 5.9 に Case 1.1, 1.3, 2.1 および 3.1 について各々の point-mass の推定位置の評価誤差と実際の誤差の値を示す. 表 5.9 より各々の point-mass に対する評価誤差と実際の誤差の比はほぼ一定であることがわかる.

最後に推定値を用いて得られる対数ポテンシャルと実際の観測値とのずれを式 (5.73) により評価した J の値と, 式 (5.74) により評価される W の値を表 5.10 に示す. 表 5.10 より残差反復を用いて得られた推定位置は, 離散 Fourier 変換を用いたものと比較してより小さいずれの値を与えることがわかる.

表 5.9 残差反復を用いた推定による各 point-mass に対する評価誤差と実際の誤差

Case	位置	評価誤差 (E)	実際の誤差 (A)	E/A
Case 1.1	(x_1, y_1)	3.04E-8	2.92E-9	1.04E+1
	(x_2, y_2)	2.88E-8	2.70E-9	1.07E+1
	(x_3, y_3)	2.36E-8	2.22E-9	1.06E+1
Case 1.3	(x_1, y_1)	2.02E-5	1.23E-7	1.64E+2
	(x_2, y_2)	1.85E-5	1.07E-7	1.74E+2
	(x_3, y_3)	1.50E-5	8.56E-8	1.75E+2
Case 2.1	(x_1, y_1)	2.40E-5	1.27E-9	1.90E+4
	(x_2, y_2)	2.37E-5	1.25E-9	1.90E+4
	(x_3, y_3)	1.99E-5	1.05E-9	1.90E+4
Case 3.1	(x_1, y_1)	7.82E-5	3.07E-11	2.55E+6
	(x_2, y_2)	7.80E-5	3.06E-11	2.55E+6
	(x_3, y_3)	6.58E-5	2.58E-11	2.55E+6
Case 4.1	(x_1, y_1)	7.80E-10	7.84E-11	9.95E+0
	(x_2, y_2)	4.36E-10	4.20E-11	1.04E+1
	(x_3, y_3)	4.70E-10	4.51E-11	1.04E+1
	(x_4, y_4)	8.19E-10	8.11E-11	1.01E+1
Case 5.1	(x_1, y_1)	8.90E-10	8.39E-12	1.06E+2
	(x_2, y_2)	9.04E-10	8.44E-12	1.07E+2
	(x_3, y_3)	5.33E-10	4.81E-12	1.11E+2
	(x_4, y_4)	4.18E-10	3.74E-12	1.12E+2
	(x_5, y_5)	5.15E-10	4.70E-12	1.10E+2

表 5.10 残差反復を用いた推定による関数 W と J の値

Case	W の値	J の値	
		残差反復を用いた場合	DFT のみの場合
Case 1.1	5.77E-1	2.02E-10	2.93E-5
Case 1.2	8.70E-1	1.59E-9	6.03E-5
Case 1.3	1.20E+0	2.04E-8	1.82E-4
Case 1.4	1.74E+0	2.75E-8	1.52E-4
Case 2.1	9.02E-1	5.92E-12	7.66E-6
Case 2.2	1.31E+0	6.41E-12	5.22E-6
Case 2.3	1.87E+0	6.13E-12	3.61E-6
Case 2.4	2.67E+0	5.23E-12	2.43E-6
Case 3.1	1.09E+0	6.78E-15	2.75E-7
Case 3.2	1.59E+0	2.68E-15	1.25E-7
Case 3.3	2.25E+0	2.93E-15	9.96E-8
Case 3.4	3.15E+0	6.83E-15	1.32E-7
Case 4.1	3.63E-1	1.64E-12	8.83E-6
Case 4.2	1.64E+0	6.45E-10	4.19E-5
Case 4.3	1.03E+0	8.03E-19	9.12E-9
Case 4.4	3.11E+0	5.76E-17	2.23E-8
Case 5.1	4.81E-1	4.40E-14	2.76E-6
Case 5.2	2.33E+0	2.47E-12	3.83E-6
Case 5.3	1.42E+0	1.59E-22	2.79E-10
Case 5.4	4.39E+0	3.64E-21	2.76E-10

5.7 結 言

本章では point-mass model に対する対数ポテンシャル逆問題における位置推定問題について考察し, 対数ポテンシャルの Fourier 展開を用いた 2つの数値解法を提案した. いずれの解法も対数ポテンシャルの Fourier 係数と point-mass model のパラメータの間の関係を基礎としており, 同一の強度を持つ point-mass の位置推定問題を代数方程式を解く問題に帰着する方法である. 第1の解法は Fourier 係数の近似に離散 Fourier 変換を用いたものであり, 第2の解法は離散 Fourier 変換と Fourier 展開の関係をを用いた残差改良を用いた反復法で, 第1の解法よりも高精度のものである. 双方の解法についてその誤差評価を与え, 残差改良による方法についてはその反復の収束性を証明した. また手法の有効性を調べるため複数の場合に対し数値実験をおこなったが, いずれの解法も point-mass の位置を正確に推定できることが確認できた. また point-mass が近接した場合についても各 point-mass を分離でき, それぞれについてその推定誤差が評価できることがわかった. 評価誤差と実際の誤差の比も比較的小さく, 実用上問題ないものと思われる. なお第1の解法は第2の解法と比較して, 精度は低下するが反復を必要としないため高速であり, さらに評価誤差と実際の誤差の比が安定しているという利点を持っている.

本章で提案した解法はいずれも円領域に対するものであるため, さらに一般の形状を持つ領域に対する解法と誤差評価法に関する考察が望まれる. また point-mass model に対し, すべての point-mass が同一の強度を持つものとし, 対数ポテンシャルの観測を領域の境界全体でおこなうものと仮定しているが, これらの点を一般化した考察も必要であると思われる.

第 6 章

Point-mass model に対する対数ポテンシャル逆問題における個数推定問題

6.1 緒言

工学的な問題を数学的に定式化する際、その自由度の決定はモデル化においておこなわれる場合が多い。しかし、確率制御における ARMA モデルの次数決定問題など、モデルの自由度の決定が問題になることがある [43]。多くの線形モデルにおける自由度の決定問題では、最適性の概念を用いた推定がよくおこなわれているが、線形モデルではその自由度の推定結果が他の結果に及ぼす影響はあまり大きくなることはない。

Point-mass model に対する対数ポテンシャル逆問題において、自由度の決定は個数パラメータの決定を意味する。したがって、位置推定問題や強度推定問題の結果は個数推定問題の結果に影響される。中でも位置推定問題においては個数パラメータの違いは位置推定に用いる代数方程式の次数の違いとなり、個数推定の結果が位置推定に大きく影響する可能性がある。これは位置推定問題が非線形問題となっていることに起因する問題であり、線形モデルにおける自由度の選択が結果に余り影響しないことと対照的である。したがって point-mass model に対する対数ポテンシャル逆問題において、正確な個数推定が重要な問題となる。

本章では、対数ポテンシャル逆問題における point-mass model の個数推定問題を考え、その数値解法を提案する。解法の基礎としては前章で述べた対数ポテンシャルの Fourier 係数と point-mass model のパラメータの間の代数的関係を用いる。まずこの関係を用いて、個数推定問題の解の一意性定理を証明する。次に仮定した個数のずれを評価する関数を定義し、これを用いた個数推定法を示す。さらに数値解法として Fourier 係数の近似に

離散 Fourier 変換を用いた場合に生ずる誤差の影響を考慮した判定基準を提案する. 最後に数値実験により提案した評価関数および判定基準の有効性を示す.

6.2 同一強度をもつ Point-mass model に対する個数推定問題

6.2.1 Point-mass model に対する個数推定問題の解の一意性

本章も前章と同様に 2次元実空間 \mathbf{R}^2 を考え, \mathbf{R}^2 上の点を (x, y) で表す. 以下では同一強度をもつ point-mass model

$$f(x, y) = Q \sum_{j=1}^N \delta(x - x_j, y - y_j), \quad (x_j, y_j) \in \Omega \quad (6.1)$$

を考える. 第5章と同様に領域 Ω を原点を中心とする半径 1 の円領域

$$\Omega = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 < 1\} \quad (6.2)$$

とおく. さらに対数ポテンシャル $u_L(x, y)$ に関する情報として領域 Ω の境界 Γ 上における値が与えられているものと仮定し, 次に示す point-mass model に対する個数・位置同時推定問題を考える.

[問題](Point-mass model に対する個数・位置同時推定問題)

Point-mass model (6.1) に対する対数ポテンシャル逆問題において, パラメータについて個数 N および位置 (x_j, y_j) はすべて未知とし, 強度は point-mass の全強度

$$Q_T \equiv QN \neq 0 \quad (6.3)$$

のみが既知であると仮定する. このとき未知パラメータ N および (x_j, y_j) , $j = 1, 2, \dots, N$ を推定せよ.

この問題において個数パラメータ N を決定することができれば, 位置パラメータ (x_j, y_j) は第5章で提案した解法を用いて推定が可能である. そのため本章では, 未知パラメータのうち個数パラメータ N の推定問題を独立して取り扱う個数推定問題を考え, その解法について考察する.

第5章に示したように, 式 (6.1) に示す point-mass model に対する対数ポテンシャルは, Γ 上で

$$u_L(\theta) \equiv u_L(\cos \theta, \sin \theta) = -\frac{Q}{2\pi} \sum_{j=1}^N \ln \sqrt{1 + r_j^2 - 2r_j \cos(\theta - \varphi_j)} \quad (6.4)$$

で表され, その Fourier 係数は point-mass model のパラメータを用いて

$$\alpha_k = \int_0^{2\pi} u_L(\theta) \cos k\theta d\theta = \begin{cases} -Q \sum_{j=1}^N \ln 1 = 0, & k = 0 \\ \frac{Q}{2k} \sum_{j=1}^N r_j^k \cos k\varphi_j, & k = 1, 2, \dots, \end{cases} \quad (6.5)$$

$$\beta_k = \int_0^{2\pi} u_L(\theta) \sin k\theta d\theta = \frac{Q}{2k} \sum_{j=1}^N r_j^k \sin k\varphi_j, \quad k = 1, 2, \dots, \quad (6.6)$$

で表される. また複素数 z_j および γ_k を

$$z_j = x_j + iy_j, \quad j = 1, 2, \dots, N \quad (6.7)$$

$$\gamma_k = \alpha_k + i\beta_k, \quad k = 1, 2, \dots \quad (6.8)$$

で定義すると, 式 (6.5), (6.6) より

$$\gamma_k = \frac{Q}{2k} \sum_{j=1}^N z_j^k, \quad k = 1, 2, \dots, \quad (6.9)$$

が成立する. 式 (6.3) を用いて, 左辺に未知パラメータ, 右辺に既知パラメータをまとめると

$$\frac{1}{N} \sum_{j=1}^N z_j^k = \frac{2k}{Q_T} \gamma_k, \quad k = 1, 2, \dots, \quad (6.10)$$

を得る. ここで複素 Fourier 係数 γ_k は計算できるものと仮定した. したがって point-mass model に対する個数推定問題は, 方程式 (6.10) を満たす複素数 $z_j, j = 1, 2, \dots, N$ が存在する整数 N を推定する問題に帰着される. 式 (6.10) を満たす整数 N に関して次の定理を得た.

[定理 6.1]

複素数 z_1, z_2, \dots, z_N を $i \neq j$ の時 $z_i \neq z_j$ となる N 個の複素数とし, M 個の複素数 y_1, y_2, \dots, y_M に関する連立代数方程式

$$\frac{1}{M} \sum_{j=1}^M y_j^k = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N z_j^k, \quad k = 1, 2, \dots, N + M \quad (6.11)$$

を考える. 方程式 (6.11) が解を持つための必要十分条件は, $M \equiv 0 \pmod{N}$ が成立することである.

[証明]

個数 M について $M \equiv 0 \pmod{N}$ が成立する場合, 方程式 (6.11) が解を持つことは明かである. したがって, $M \not\equiv 0 \pmod{N}$ の場合に方程式 (6.11) が解を持たないことを示せばよい.

背理法により証明する. 方程式 (6.11) が解 y_1, y_2, \dots, y_M を持つものと仮定すると, これらの複素数は

$$N \sum_{j=1}^M y_j^k = M \sum_{j=1}^N z_j^k, \quad k = 1, 2, \dots, N+M \quad (6.12)$$

を満たす. 複素数 y_1, y_2, \dots, y_M を集合 $\{z_1, z_2, \dots, z_N\}$ に含まれない点の集合 A と含まれる点の集合 B に分類し

$$A \equiv \{x_j, j = 1, 2, \dots, M_A\} \quad (6.13)$$

$$B \equiv \{x_{M_A+j}, j = 1, 2, \dots, M_B\} \quad (6.14)$$

とおく. ただし $j \neq k$ の時, $x_j \neq x_k$ であるものとする. さらに各 x_j に等しい y_k の個数を $\sigma(j)$ で表すと

$$\sum_{j=1}^{M_A+M_B} \sigma(j) = M \quad (6.15)$$

が成り立つ. また z_j の順序を交換することにより $x_{M_A+j} = z_{N-M_B+j}$ としても一般性を失わない. 上記の分類を用いると, 式 (6.12) は

$$\begin{aligned} & N \sum_{j=1}^{M_A} \sigma(j) x_j^k + N \sum_{j=1}^{M_B} \sigma(M_A+j) x_{M_A+j}^k - M \sum_{j=1}^{N-M_B} z_j^k - M \sum_{j=1}^{M_B} z_{N-M_B+j}^k \\ &= \sum_{j=1}^{M_A} N \sigma(j) x_j^k + \sum_{j=1}^{N-M_B} (-M) z_j^k + \sum_{j=1}^{M_B} (N \sigma(M_A+j) - M) z_{N-M_B+j}^k \\ &= 0, \quad k = 1, 2, \dots, N+M \end{aligned} \quad (6.16)$$

に変形できる. さらに $K = M_A + N$ とおき, 複素数 ξ_j および整数 λ_j を

$$\xi_j = \begin{cases} x_j, & 1 \leq j \leq M_A \\ z_{j-M_A}, & M_A+1 \leq j \leq K \end{cases} \quad (6.17)$$

$$\lambda_j = \begin{cases} N \sigma(j), & 1 \leq j \leq M_A \\ -M, & M_A+1 \leq j \leq K - M_B \\ N \sigma(j - N + M_B) - M, & K - M_B + 1 \leq j \leq K \end{cases} \quad (6.18)$$

と定義すると,

$$\sum_{j=1}^K \xi_j^k \lambda_j = 0, \quad k = 1, 2, \dots, N+M \quad (6.19)$$

を得る. 定義より $K \leq N+M$ であり, $j \neq k$ の時 $\xi_j \neq \xi_k$ である. また $M \not\equiv 0 \pmod{N}$ より, 任意の j について $\lambda_j \neq 0$ である.

式 (6.19) を $k = 1, 2, \dots, K$ について考えると

$$\begin{pmatrix} \xi_1 & \xi_2 & \cdots & \xi_K \\ \xi_1^2 & \xi_2^2 & \cdots & \xi_K^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \xi_1^K & \xi_2^K & \cdots & \xi_K^K \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_K \end{pmatrix} \equiv V\Lambda = O \quad (6.20)$$

なる方程式を得る. 式 (6.20) において, 任意の j について $\lambda_j \neq 0$ であることより $\Lambda \neq O$ である. また $\xi_j = 0$ となる j は高々1つしかないことから, すべての j について $\xi_j \neq 0$ である場合と, ただ1つの j について $\xi_j = 0$ である場合に分けて考える. まず, すべての j について $\xi_j \neq 0$ である場合, 行列 V の行列式は

$$\begin{aligned} \det V &= \xi_1 \xi_2 \cdots \xi_K \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \xi_1 & \xi_2 & \cdots & \xi_K \\ \xi_1^2 & \xi_2^2 & \cdots & \xi_K^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \xi_1^{K-1} & \xi_2^{K-1} & \cdots & \xi_K^{K-1} \end{pmatrix} \\ &= (-1)^{K(K-1)/2} \xi_1 \xi_2 \cdots \xi_K \prod_{1 \leq j < k \leq K} (\xi_j - \xi_k) \end{aligned} \quad (6.21)$$

となる. 複素数 ξ_j が $j \neq k$ の時 $\xi_j \neq \xi_k$ を満たすことから, この値は零ではなく, 行列 V の逆行列 V^{-1} が存在する. よって

$$\Lambda = V^{-1}O = O \quad (6.22)$$

を得, これは $\Lambda \neq O$ に矛盾する. 次にただ1つの j について $\xi_j = 0$ である場合を考える. この場合, $\xi_K = 0$ としても一般性を失わない. このとき, 方程式 (6.20) は

$$\begin{pmatrix} \xi_1 & \xi_2 & \cdots & \xi_{K-1} \\ \xi_1^2 & \xi_2^2 & \cdots & \xi_{K-1}^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \xi_1^{K-1} & \xi_2^{K-1} & \cdots & \xi_{K-1}^{K-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_{K-1} \end{pmatrix} \equiv V_1 \Lambda_1 = O \quad (6.23)$$

と同値であり, また $\Lambda_1 \neq O$ である. ここで行列 V_1 の行列式は

$$\begin{aligned} \det V_1 &= \xi_1 \xi_2 \cdots \xi_{K-1} \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \xi_1 & \xi_2 & \cdots & \xi_{K-1} \\ \xi_1^2 & \xi_2^2 & \cdots & \xi_{K-1}^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \xi_1^{K-2} & \xi_2^{K-2} & \cdots & \xi_{K-1}^{K-2} \end{pmatrix} \\ &= (-1)^{(K-1)(K-2)/2} \xi_1 \xi_2 \cdots \xi_{K-1} \prod_{1 \leq j < k \leq K-1} (\xi_j - \xi_k) \end{aligned} \quad (6.24)$$

となり, 式 (6.21) と同様に $\det V_1 \neq 0$ であることから逆行列 V_1^{-1} が存在する. よって

$$\Lambda_1 = V_1^{-1}O = O \quad (6.25)$$

を得, これは $\Lambda_1 \neq O$ に矛盾する.

以上により $M \not\equiv 0 \pmod{N}$ の場合, 方程式 (6.11) は解を持たない.

[証明終]

定理 6.1 は式 (6.10) を満たす z_j が存在する N は真の個数の倍数のみであることを示しており, それらをのぞいて個数推定問題の解の一意性が保証される.

6.2.2 Point-mass model に対する個数推定問題の解法

定理 6.1 を用いた個数推定法を考える. まず point-mass の個数を M と仮定し, M 個の複素数 $z_{1,M}, z_{2,M}, \dots, z_{M,M}$ を

$$\frac{1}{M} \sum_{j=1}^M z_{j,M}^k = \frac{2k}{Q_T} \gamma_k, \quad k = 1, 2, \dots, M \quad (6.26)$$

を満たすものとする. 複素数 $z_{1,M}, z_{2,M}, \dots, z_{M,M}$ に対し

$$S_{k,M} = \sum_{j=1}^M z_{j,M}^k, \quad k = 1, 2, \dots, \quad (6.27)$$

を定義すると, 定理 6.1 より

$$S_{k,M} = \frac{2kM}{Q_T} \gamma_k, \quad k \geq M+1 \quad (6.28)$$

は, M が真の point-mass の個数 N の倍数である場合にのみ成立する. したがって真の個数 N は式 (6.28) を満たす M の最小値である. なお $S_{k,M}$ は

$$S_{k,M} = \frac{2kM}{Q_T} \gamma_k, \quad k = 1, 2, \dots, M \quad (6.29)$$

とおき, さらに Newton の公式

$$s_{k,M} = \frac{(-1)^{k+1}}{k} S_{k,M} + \sum_{j=1}^{k-1} (-1)^j s_j S_{k-j}, \quad k = 1, 2, \dots, M \quad (6.30)$$

$$S_{k,M} = \sum_{j=1}^{k-1} (-1)^{j+1} s_{j,M} S_{k-j,M}, \quad k \geq M+1 \quad (6.31)$$

を用いることにより, $z_{1,M}, z_{2,M}, \dots, z_{M,M}$ を求めることなしに計算できる.

実際の問題において複素 Fourier 係数は有限の次数のみが計算可能である．ここでは有限の次数 L までの複素 Fourier 係数が与えられた場合を考える．次数 L までの複素 Fourier 係数 $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_L$ が与えられている場合，定理 6.1 が適用可能となるための必要条件の一つは，真の個数 N と仮定する個数 M に対し

$$N + M \leq L \quad (6.32)$$

が成立することである．この L に対する推定可能な最大の個数を $N_{max}(L)$ とおくと，真の個数は未知であることから

$$N, M \leq N_{max}(L) \quad (6.33)$$

でなければならない．したがって

$$2N_{max}(L) \leq L \quad (6.34)$$

となり

$$N_{max}(L) = \left\lfloor \frac{L}{2} \right\rfloor \quad (6.35)$$

を得る．ここで $\lfloor \cdot \rfloor$ は Gauss の記号を表す．以下では $N \leq N_{max} \equiv N_{max}(L)$ を仮定する．

式 (6.28) を用いて評価関数 $J(M)$ を

$$J(M) = \frac{1}{L - M} \sum_{k=M+1}^L \left| \frac{2kM}{Q_T} \gamma_k - S_{k,M} \right|, \quad 1 \leq M \leq N_{max} \quad (6.36)$$

と定義する．関数 $J(M)$ は式 (6.28) の右辺と左辺の差の絶対値の和となっていることから，明らかに $J(M) \geq 0$ である．また定理 6.1 より $J(M)$ の零点は真の個数 N の倍数のみであり，個数 N は $J(M)$ の最小の零点により決定できることがわかる．

6.3 Point-mass model に対する個数推定問題の数値解法

本節では前節に示した評価関数 $J(M)$ を用いた数値解法を提案する．第 5 章と同様に複素 Fourier 係数 γ_k を離散 Fourier 変換

$$\tilde{\gamma}_k = \frac{\pi}{n} \sum_{p=0}^{2n-1} u_L(\theta_p) (\cos k\theta_p + i \sin k\theta_p), \quad k = 1, 2, \dots, L \quad (6.37)$$

で近似する．ここで

$$\theta_p = \frac{\pi}{n} p, \quad p = 0, 1, 2, \dots, 2n - 1 \quad (6.38)$$

である．さらに

$$\tilde{S}_{k,M} = \frac{2kM}{Q_T} \tilde{\gamma}_k, \quad k = 1, 2, \dots, M \quad (6.39)$$

とおき, Newton の公式

$$\tilde{s}_{k,M} = \frac{(-1)^{k+1}}{k} \tilde{S}_{k,M} + \sum_{j=1}^{k-1} (-1)^j \tilde{s}_{j,M} \tilde{S}_{k-j,M}, \quad k = 1, 2, \dots, M \quad (6.40)$$

$$\tilde{S}_{k,M} = \sum_{j=1}^{k-1} (-1)^{j+1} \tilde{s}_{j,M} \tilde{S}_{k-j,M}, \quad k = M+1, M+2, \dots, L \quad (6.41)$$

により, $k \geq M+1$ に対する $S_{k,M}$ の近似値 $\tilde{S}_{k,M}$ を計算する. これらを用いて評価関数 $J(M)$ の近似関数

$$\tilde{J}(M) = \frac{1}{L-M} \sum_{k=M+1}^L \left| \frac{2kM}{Q_T} \tilde{\gamma}_k - \tilde{S}_{k,M} \right|, \quad 1 \leq M \leq N_{max} \quad (6.42)$$

を定義する. 第5章で述べたように対数ポテンシャル複素 Fourier 係数に対し離散 Fourier 変換が必ず誤差を持つことから, $\tilde{\gamma}_k$ に対し定理 6.1 の結果は保証されず, 評価関数 $\tilde{J}(M)$ の零点の存在は保証されない. しかし $J(M), \tilde{J}(M)$ がいずれも非負値関数であり, $J(M)$ の零点は $J(M)$ の最小値を与える点であることから, $\tilde{J}(M)$ の最小値を与える点が $J(M)$ の零点を与えるものと予想される. この点を point-mass の個数の推定値とし, 以下 N_e で表す.

この場合, 個数推定値 N_e が評価関数 $J(M)$ の零点を真に与えることを保証する必要がある. 評価関数 $\tilde{J}(M)$ の $J(M)$ に対する誤差を

$$\delta J(M) = |\tilde{J}(M) - J(M)| \quad (6.43)$$

で定義し, $\delta J(M)$ に対する上からの評価値を $\Delta J(M)$ で表す. 推定値 N_e が真の個数 N に等しい場合, N_e は $J(M)$ の零点であり, $J(M)$ の最小値を与える点となる. したがって評価関数 $\tilde{J}(M)$ の誤差を考慮する際に N_e が $J(M)$ の零点となり得り, さらに $J(M)$ の最小値を与える点となるためには, $\tilde{J}(M)$ と $\Delta J(M)$ について図 6.1 に示す関係が成立することが必要条件となる. 図 6.1 の関係を式で表現すると

$$\tilde{J}(N_e) - \Delta J(N_e) < 0 \quad (6.44)$$

$$\tilde{J}(N_e) + \Delta J(N_e) < \tilde{J}(M) - \Delta J(M), \quad M \neq N_e \quad (6.45)$$

となる. 式 (6.44) は $J(N_e) = 0$ となり得ることを示し, 式 (6.45) は N_e が真に $J(M)$ の最小値を与えることを保証する条件である. 式 (6.44), (6.45) は $\tilde{J}(M)$ を用いた推定個数 N_e が誤差を考慮した場合にも変化しないことを保証するものであり, 個数推定の判定基準として用いることができる.

実際の計算で判定基準 (6.44), (6.45) を評価するため, $\tilde{J}(M)$ の誤差 $\delta J(M)$ の評価を考える. 離散 Fourier 変換 $\tilde{\gamma}_k$ および $\tilde{S}_{k,M}$ の誤差を

$$\delta \gamma_k = \tilde{\gamma}_k - \gamma_k, \quad k = 1, 2, \dots, L \quad (6.46)$$

$$\delta S_{k,M} = \tilde{S}_{k,M} - S_{k,M}, \quad k = 1, 2, \dots, L \quad (6.47)$$

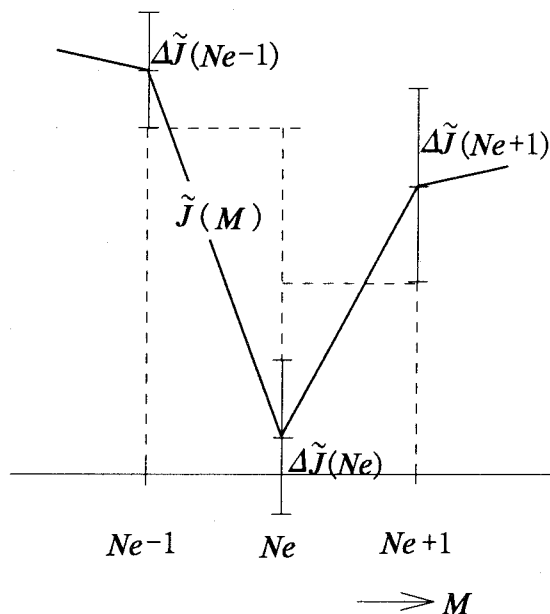


図 6.1 個数推定が正しくおこなわれた場合の関数 $\tilde{J}(M)$ および $\Delta J(M)$ の関係

と定義すると, $\tilde{J}(M)$ の誤差に対し

$$\begin{aligned}
 \delta J(M) &= \frac{1}{L-M} \left| \sum_{k=M+1}^L \left(\left| \frac{2kM}{Q_T} \tilde{\gamma}_k - \tilde{S}_{k,M} \right| - \left| \frac{2kM}{Q_T} \gamma_k - S_{k,M} \right| \right) \right| \\
 &= \frac{1}{L-M} \left| \sum_{k=M+1}^L \left(\left| \frac{2kM}{Q_T} (\gamma_k + \delta\gamma_k) - (S_{k,M} + \delta S_{k,M}) \right| - \left| \frac{2kM}{Q_T} \gamma_k - S_{k,M} \right| \right) \right| \\
 &\leq \frac{1}{L-M} \sum_{k=M+1}^L \left(\frac{2kM}{|Q_T|} |\delta\gamma_k| + |\delta S_{k,M}| \right) \quad (6.48)
 \end{aligned}$$

を得る. まず離散 Fourier 変換の誤差 $\delta\gamma_k$ は, 第 5 章の結果より

$$|\delta\gamma_k| \leq \frac{5|Q_T|}{4n} r_M^{2n-k}, \quad k = 1, 2, \dots, L \quad (6.49)$$

で評価できる. ただし

$$r_M \equiv \max_{j=1,2,\dots,N} r_j \quad (6.50)$$

である. 対称式の近似値 $\tilde{S}_{k,M}$ の誤差 $\delta S_{k,M}$ は, 誤差 $\delta\gamma_k$ の評価を考慮して, Newton の公式 (6.40), (6.41) に複素数に拡張した区間解析を適用することで評価できる. これらを式 (6.48) に代入することにより, 誤差 $\delta J(M)$ の上からの評価 $\Delta J(M)$ が得られる.

上記の手順により得られた $\tilde{J}(M)$ の評価誤差 $\Delta J(M)$ は, 式 (6.49) が point-mass の位置パラメータ r_j によって決まるパラメータ r_M に依存していることから推定個数 N_e に依存する. したがってこの $\Delta J(M)$ を式 (6.44) および (6.45) に適用する場合, 図 6.1 に示す関係の必要条件のみを評価していることになることに注意する必要がある.

最後に本節で提案した個数推定法のフローチャートを図 6.2 に示す.

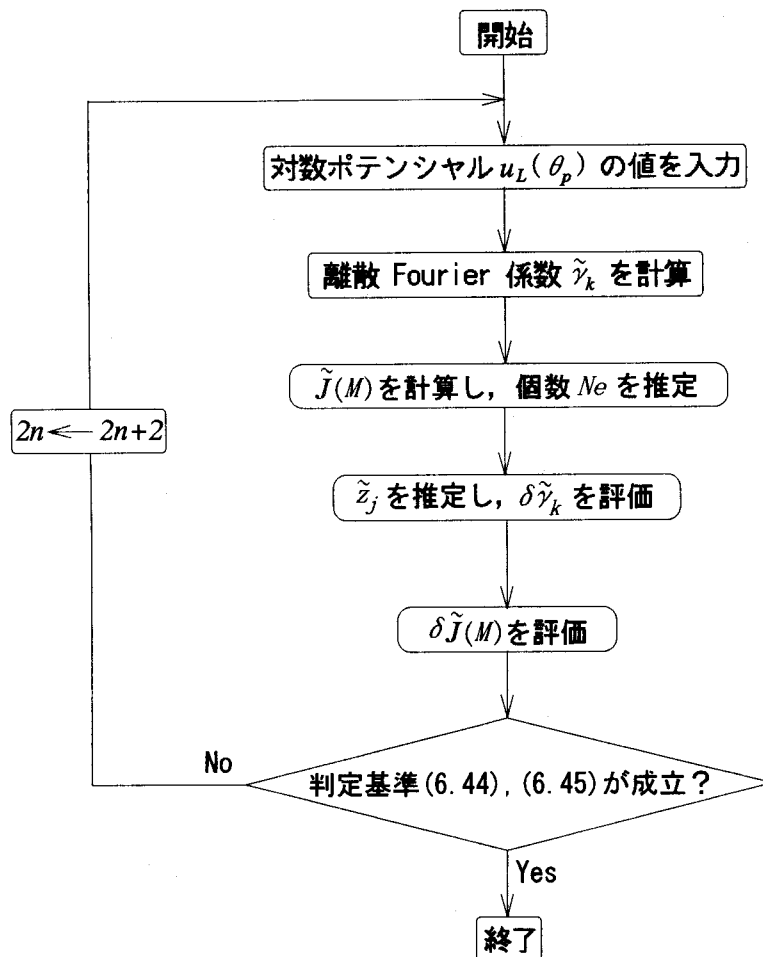


図 6.2 離散 Fourier 変換を用いた point-mass の個数推定のフローチャート

6.4 離散 Fourier 変換を用いた個数推定法の数値例

本節では第 6.3 節で提案した離散 Fourier 変換を用いた point-mass の個数推定法に対する数値実験を示す. まず 3 個の point-mass が領域内に存在する場合を考える. 領域内における point-mass の配置を図 6.3 に示すものとし, 図中のパラメータ r_M, r_S の値として表 6.1 の 5 通りの値を用いた. Point-mass の強度は全強度を $Q_T = 0.9 \times 2\pi$ とおいた. また推定に用いる離散 Fourier 変換の最大次数を $L = 10$ とした. したがって推定可能な point-mass の最大の個数は $N_{max} = 5$ である. 境界上における対数ポテンシャルの観測点の個数は初期値を $2n = 22$ とし, 推定の判定基準 (6.44), (6.45) が満たされるまで 2 個ずつ増加させた. ここで離散 Fourier 変換の誤差評価に必要となる point-mass の位置の推定をおこなう際に代数方程式を Durand-Kerner 法により解き, その収束判定基準を $\sum_{j=1}^N |z_j^{(l+1)} - z_j^{(l)}| < 10^{-20}$ とした.

表 6.1 に判定基準 (6.44), (6.45) が成立した最小の観測点の個数を示す. なお推定個数はすべて真の個数 3 に一致した. 表 6.1 より評価関数 $\tilde{J}(M)$ と判定基準 (6.44), (6.45) を併用することにより, 個数推定を正確におこなうことができると考えられる. 判定基準 (6.44), (6.45) および離散 Fourier 変換の誤差評価式 (6.49) より, パラメータ r_M の値が大きい場合, 推定および判定により多くの観測点が必要になると予想されるが, 表 6.1 よりこの予想は妥当であると考えられる. また表 6.1 より r_S が小さい, すなわち point-mass の位置が互いに近接した場合, より多くの観測点が必要となることわかる. 図 6.4 に Case

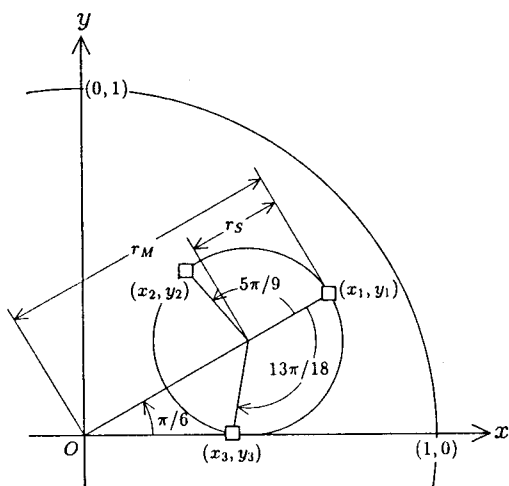


図 6.3 3点の場合の point-mass の配置

表 6.1 図 6.3 の r_M, r_S の値と判定基準 (6.44), (6.45) が成立する観測点の最小個数

Case	r_M	r_S	観測点の個数
Case 1	0.6	0.2	28
Case 2	0.6	0.02	56
Case 3	0.6	0.002	84
Case 3	0.3	0.2	22
Case 4	0.8	0.2	60

1,3,5 における判定基準 (6.44),(6.45) が成立しない場合と成立した場合に対する評価関数 $\tilde{J}(M)$ の分布を示す. 図 6.4 より判定基準 (6.44),(6.45) が成立した場合には成立しない場合と比較して, 評価関数 $\tilde{J}(M)$ の分布は真の個数において深い谷となっており, この基準が有効であることを示しているものと考えられる.

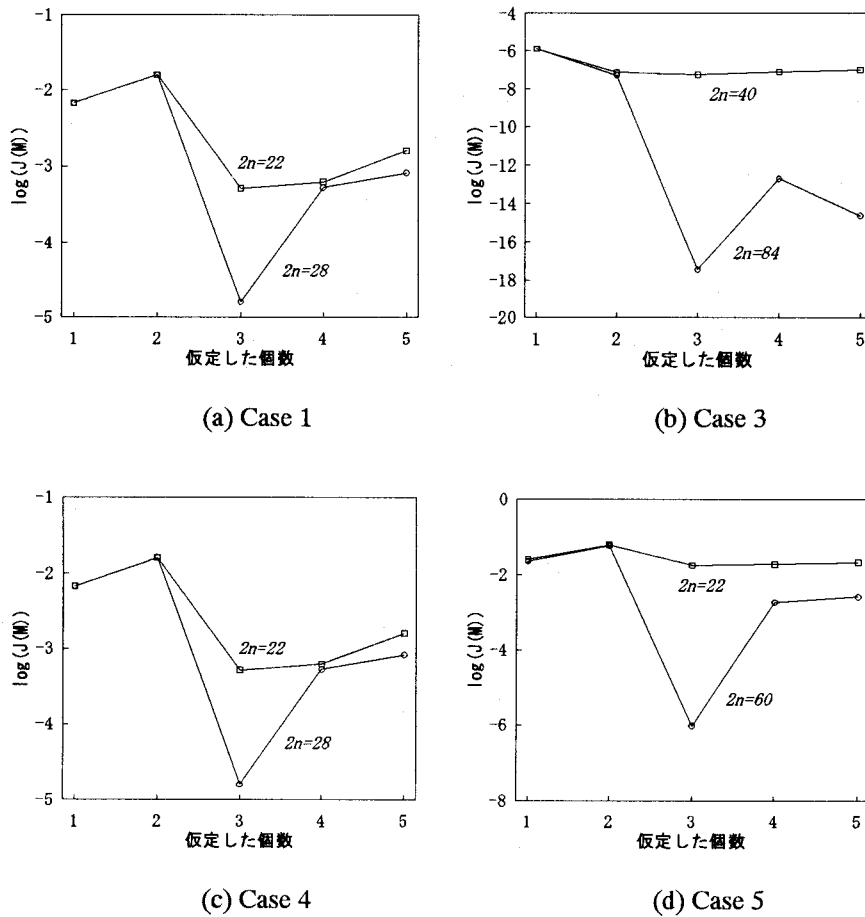


図 6.4 Case 1,3,4,5 に対する評価関数 $\tilde{J}(M)$ の分布

次に point-mass の個数を増加し, 4点および5点の point-mass が存在する場合を考える. 領域内における point-mass の配置を図 6.5 に示すものとし, 図中のパラメータ r_M, r_S として表 6.2 の値を用いた. Point-mass の強度は全強度を $Q_T = 0.9 \times 2\pi$ とおいた. なお比較のため, 図 6.6 に Case 1, 6 および 7 に対する境界上における対数ポテンシャルの分布を示す. 図 6.6 より対数ポテンシャルの分布には大きな差がないものと考えられる. また推定に用いる離散 Fourier 変換の最大の次数は Case 6,7 それぞれについて $L = 14, 18$ とした. したがって推定可能な point-mass の最大の個数はそれぞれ $N_{max} = 7, 9$ である. 境界上における対数ポテンシャルの観測点の個数は初期値を Case 6,7 それぞれについて $2n = 30, 38$ とし, 判定基準 (6.44), (6.45) が成立するまで 2個ずつ増加した.

表 6.2 に判定基準 (6.44), (6.45) が成立した最小の観測点の個数を示す. なお推定個数はいずれも真の個数に一致した. 表 6.2 より評価関数 $\tilde{J}(M)$ および判定基準 (6.44), (6.45) を併用することにより, 4点および5点の point-mass が存在する場合でも正確な個数推定

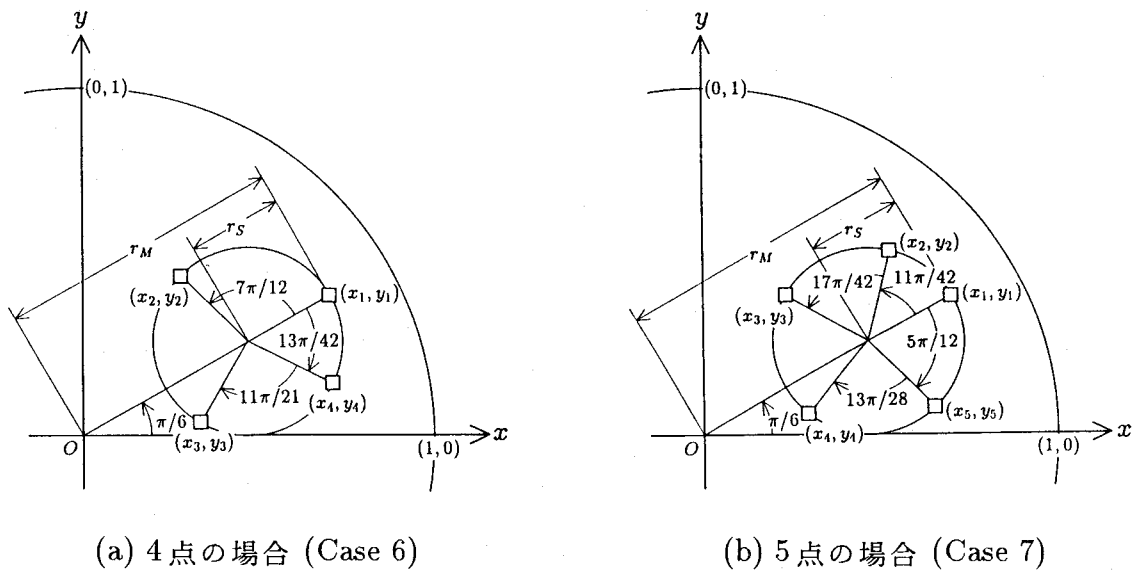
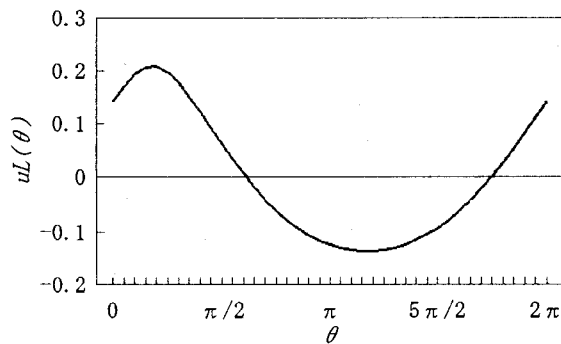


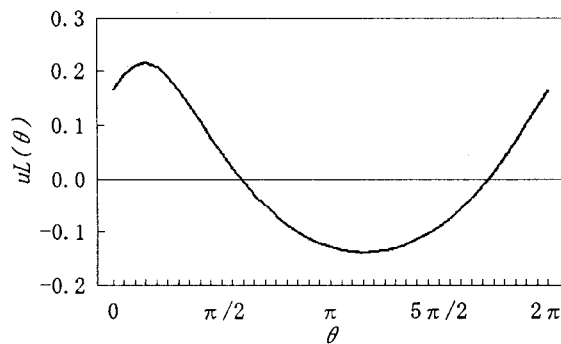
図 6.5 4点および5点の場合の point-mass の配置

表 6.2 図 6.5 中のパラメータ r_M, r_S の値と判定基準 (6.44), (6.45) が成立する観測点の最小個数

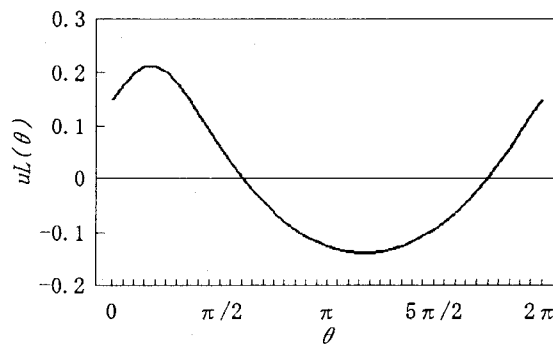
Case	r_M	r_S	観測点の個数
Case 6 ($N = 4$)	0.6	0.2	42
Case 7 ($N = 5$)	0.6	0.2	58



(a) Case 1



(b) Case 6



(c) Case 7

図 6.6 Case 1, 6, 7 に対する境界上における対数ポテンシャルの分布

が可能であるものと考えられる. 図 6.7 に Case 6, 7 において判定基準 (6.44),(6.45) が成立しない場合と成立した場合に対する評価関数 $\tilde{J}(M)$ の分布を示す. 図 6.7 より, 3点の point-mass が存在する場合と同様に判定基準 (6.44),(6.45) が成立した場合, 評価関数 $\tilde{J}(M)$ の分布は真の個数において深い谷となっていることがわかる. このことは判定基準 (6.44),(6.45) が 4点および 5点の point-mass が存在する場合においても有効であることを示しているものと考えられる.

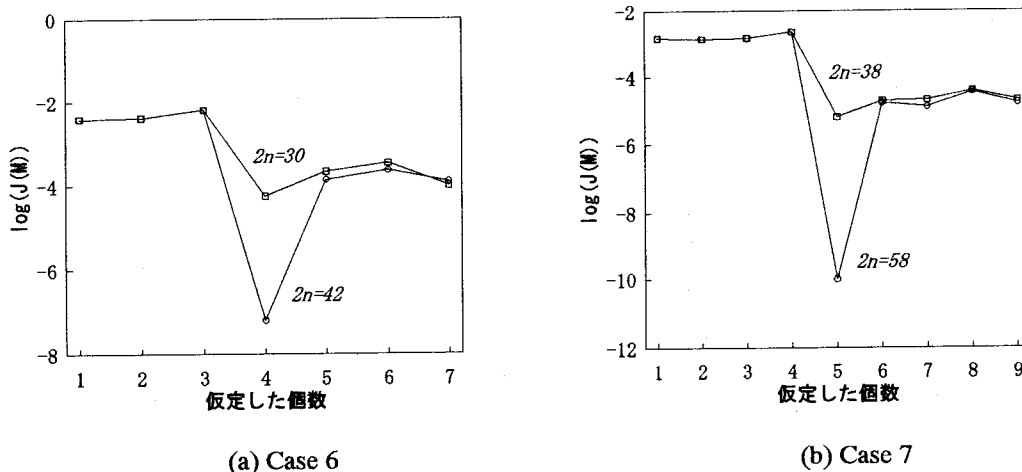


図 6.7 Case 6,7 に対する評価関数 $\tilde{J}(M)$ の分布

6.5 結言

本章では point-mass model に対する対数ポテンシャル逆問題における個数推定問題について考察し, 対数ポテンシャルの Fourier 展開を用いた数値解法を提案した. 解法は第5章で提案した位置推定法と同様に対数ポテンシャルの Fourier 係数と point-mass model のパラメータの関係を基礎としたものである. まず同一の強度を持つ point-mass model に対する対数ポテンシャルの Fourier 係数を用いて個数推定の解の一意性を証明した. この一意性定理に基づく評価関数を用いた推定法を提案した. 数値解法として Fourier 係数の近似に離散 Fourier 変換を用いたものを示し, その誤差を考慮した推定の判定基準を提案した. 手法の有効性を調べるため複数の場合に対し数値実験をおこなったが, 複数の point-mass の個数を正確に推定できることが確認でき, 各 point-mass が近接している場合でも, それらを分離できることがわかった. また誤差評価を考慮した判定基準が推定の正確さを向上することが確認できた.

本章で提案した解法は, 第5章と同様に円領域に対するものであるため, さらに一般の形状を持つ領域に対する解法に関する考察が望まれる. また point-mass model に対し, すべての point-mass が同一の強度を持つものとし, 対数ポテンシャルの観測を領域の境界全体でおこなうものと仮定している. これらの点についても一般化に関する考察が必要であると思われる.

総括

本論文では Poisson 方程式のソース逆問題および対数ポテンシャル逆問題における境界上のデータに基づく数値解法に対し、そのアルゴリズムと誤差評価法について研究した。以下では本論文を各章毎に総括し、今後の研究課題について述べる。

第 1 章では偏微分方程式の逆問題について代表的な分類を示し、それぞれの工学的な意味と応用例を紹介した。また本論文の主たるテーマであるソース逆問題について、工学によく現れる二階線形偏微分方程式の型別にその従来の研究結果を述べた。

第 2 章では Poisson 方程式のソース逆問題に対し、その定式化と従来の理論的、数値的考察について述べた。理論的考察として、問題の解の一意性が一般に保証されないことを示し、その結果として重要となった解の一意性を保証するソースモデルに関する従来の研究結果について述べた。また数値的考察として、最近提案された境界データに基づく 2 つの数値解法を紹介した。

第 3 章では Poisson 方程式のソース逆問題と対数ポテンシャル逆問題の関係について述べた。まず Poisson 方程式の境界積分方程式表現を用いて、Poisson 方程式の解からソース項に関する情報を持つ構成要素である対数 (Newton) ポテンシャルを取り出すことが可能であることを示した。さらに Poisson 方程式のソース逆問題と対数 (Newton) ポテンシャル逆問題の等価性を示した。

また対数ポテンシャル逆問題に対し、その定式化と従来の研究結果について述べた。まず対数ポテンシャル逆問題と 2 次元 Poisson 方程式のソース逆問題の等価性を用いて、逆問題の解の一意性を保証するいくつかのソースモデルを示した。次に代表的なソースモデルである star-shape model について、このモデルを用いた際に生ずる問題の不適切性について詳しく述べた。またもう一つの代表的なソースモデルである point-mass model について、その順問題的な応用である代用電荷法にふれ、対数ポテンシャル逆問題との関連を示した。

第 4 章では Poisson 方程式のソース逆問題に対し境界要素法を適用した数値解法に関する研究結果を示した。第 3 章で示した Poisson 方程式の境界積分方程式表現を境界要素を用いて離散化した対数 (Newton) ポテンシャルの計算法を提案し、2 次元の場合につい

てその誤差評価をおこなった。さらにソース逆問題に対する適用可能性を考察するため、ソース項として one-point-mass model を用いた場合について、その解法と誤差評価法を提案した。これらの提案した解法と誤差評価を数値実験により評価した。結果より境界要素法により Poisson 方程式の解から対数ポテンシャルを有効に取り出すことが可能であることが確認でき、さらに誤差評価についてもオーダおよび評価誤差と実際の誤差の差の面から有効であることが認められた。

第 5 章では point-mass model に対する対数ポテンシャル逆問題における位置推定問題について、その数値解法と誤差評価法を提案した。提案した解法は対数ポテンシャルの Fourier 展開に基づく手法である。まず対数ポテンシャルの Fourier 展開について、point-mass model のパラメータとの関係を示し、位置推定問題の解の一意性を証明した。さらに複素 Fourier 展開と Newton の公式を用いることにより、位置推定問題が代数方程式を解くことに帰着されることを示した。数値解法としてまず Fourier 係数を離散 Fourier 変換を用いて近似する解法を提案し、アルゴリズムと事後誤差評価法を与えた。次に Fourier 係数と離散 Fourier 変換の関係を用いた反復法による高精度の数値解法を提案した。提案した反復解法についてその収束性を証明し、さらに誤差評価を示すことにより離散 Fourier 変換のみを用いた解法に比較して高い精度の解法であることを示した。また双方の解法について、その誤差が観測点の個数に対し指数的に減少することを示した。提案した 2 つの解法について数値実験によりその有効性を評価した。結果より、いずれの解法も精度の高い位置推定法であり、また反復解法についてはその収束が速いものであることが確認できた。さらに誤差評価について、その収束のオーダが理論的な評価と一致し、精密な評価を与えていることがわかった。

第 6 章では point-mass model に対する対数ポテンシャル逆問題における個数推定問題について、その数値的な推定手法と判定基準を提案した。提案した手法は第 5 章の位置推定法と同様に対数ポテンシャルの Fourier 展開に基づくものである。まず対数ポテンシャルの Fourier 展開と point-mass model のパラメータとの関係を用いて個数推定問題の解の一意性を証明した。次に一意性定理から導かれる一つの評価関数を用いた個数推定法を提案した。また数値解法として Fourier 係数を離散 Fourier 変換を用いて近似する方法を示し、その際に問題となる離散 Fourier 変換の誤差を考慮した推定の判定基準を提案した。提案した評価関数および判定基準について、数値実験によりその有効性を評価した。結果より、提案した評価関数および判定基準を用いた方法により、正確な個数推定が可能であることが確認できた。

以上の研究結果より、Poisson 方程式のソース逆問題に対し、境界要素法を用いた対数 (Newton) ポテンシャルの数値計算法および誤差評価が有効であることが確認できた。また point-mass model に対する対数ポテンシャル逆問題における位置推定問題および個数

推定問題に対し、離散 Fourier 変換を用いた数値解法、誤差評価ならびに判定基準が有効であることが確認できた。以上の研究成果をふまえて、今後の研究が望まれる課題について述べる。

まず Poisson 方程式のソース逆問題の対する境界要素法の適用であるが、本論文で提案した方法は境界要素法を用いて問題を対数 (Newton) ポテンシャル逆問題に帰着させる方法と考えることができる。したがって、より直接的に境界要素法の特徴を生かした問題の数値解法に関する研究が課題となっている。

次に point-mass model に対する対数ポテンシャルの位置推定問題と個数推定問題について述べる。本論文で提案した手法はいずれも円領域に対するものであり、また観測についても領域の境界全体におけるものである。実際の工学的な問題においては領域はさまざまな形状のものが考えられ、観測についても境界の一部においてしか許されない場合も多く見受けられる。このような場合に対する解法に関する研究はまだおこなわれておらず、今後の課題といえる。

最後に、本論文では point-mass model に特定した研究をおこなったが、このモデル以外のソースモデルに対する逆問題の理論的な解の一意性ならびに数値解法に関する考察も大きな課題である。

謝 辞

本論文は大阪大学工学部数理工学教室において大阪大学大学院在学中に故山本稔教授, 大中幸三郎助教授の指導の下におこなった研究, および岡山理科大学情報処理センター在職中におこなった研究をまとめたものである.

大阪大学大学院在学中, 数学の研究に関する基礎・基本の修得について常に親切な御指導, そして多くの貴重な御助言を賜りました大阪大学工学部数理工学教室の故山本稔教授に深く感謝の意を表します.

大阪大学工学部数理工学教室の八木厚志教授には本論文の作成にあたり詳細にわたる御検討を頂き, 懇切丁寧な御指導, 御鞭撻を賜るとともに, 偏微分方程式論の見地からの貴重な御指摘を頂きました. 厚く御礼申し上げます. また, 大阪大学工学部応用物理学科の樹下行三教授, 数理工学教室の石井博昭教授には本論文作成にあたり御検討頂き, 貴重な御助言を頂きました. 心から感謝いたします.

大阪大学工学部数理工学教室の大中幸三郎助教授には偏微分方程式の逆問題の数値解析というテーマについて興味を与えて頂くとともに, 研究の遂行, 論文作成, 学会発表など直接に御指導, 御指摘を, そして温かい御助言を頂きました. 心から御礼申し上げます. 大阪大学工学部産業機械工学科の久保司郎教授には, 逆問題という理学, 工学両面にわたる問題を研究する上で多くの有益な御助言を頂き, またさまざまな学会, 研究会での発表の機会を与えて頂きました. 厚く御礼申し上げます.

岡山理科大学情報処理センター所長木村宏教授, 前所長成久洋之教授をはじめとする岡山理科大学情報処理センターの教職員の方々には, 多忙にも関わらず論文作成の時間をさいて頂きました. 心から感謝いたします.

大阪大学工学部数理工学教室の齋藤誠慈講師, 長渕裕助手には研究室の良き先輩として常に温かな御助言を頂きました. 両氏に厚く御礼申し上げます. さらに大阪大学大学院工学研究科の山谷克氏には同じ分野の研究をおこなう研究者として御助言, 御討論頂きました. 心から感謝します.

最後に6年間の大学院在学中にさまざまな形で御協力, 御援助して頂いた大阪大学工学部数理工学教室工業数学講座内外の皆様にも深く感謝します.

参 考 文 献

- [1] 久保 司郎, 逆問題, 培風館, 1992.
- [2] G. Anger, *Inverse Problems in Differential Equations*, Plenum Press, New York, 1990.
- [3] J. Hadamard, *Lectures on Cauchy's Problem in Linear Partial Differential Equations*, Yale University Press, New Haven, 1923.
- [4] V. G. Romanov, *Inverse Problems of Mathematical Physics*, VNU Science Press BV, Utrecht, 1987.
- [5] P. S. Novikov, Sur le problème inverse du potentiel, *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, 18(3):165–168, 1938.
- [6] D. Stromeier and L. Ballani, Uniqueness of the inverse gravimetric problem for point mass models, *Manuscripta Geodaetica*, 9:125–136, 1984.
- [7] 村島 定行, 代用電荷法とその応用, 森北出版, 1983.
- [8] M. Yamaguti et.al.(eds.), *Inverse Problems in Engineering Sciences*, Springer-Verlag, Tokyo, 1990.
- [9] 岡本 良夫, 逆問題とその解き方, オーム社, 1992.
- [10] 神谷 紀生, 大西 和榮, 境界要素法による計算力学, 森北出版, 1985.
- [11] 日本機械学会 (編), 逆問題のコンピュータアナリシス, コロナ社, 1991.
- [12] M. Tanaka and H. D. Bui (eds.), *Inverse Problems in Engineering Mechanics*, Springer-Verlag, Berlin, Heiderberg, 1993.
- [13] 鈴木 貴, 微分方程式の逆問題, 数理科学, (274):26–37, 1986.

- [14] D. Colton, R. Ewing and W. Rundell (eds.), *Inverse Problems in Partial Differential Equations*, SIAM, Philadelphia PA, 1990.
- [15] 溝畑 茂, 偏微分方程式論, 岩波書店, 1965.
- [16] 伊藤 清三, 拡散方程式, 紀伊國屋書店, 1979.
- [17] 田中 博, 伊原 正, 平柳 要, 谷島 一嘉, 古川 俊之, モード整合法を用いた心電図逆問題の解法, 計測自動制御学会論文誌, 18(12):1194-1201, 1982.
- [18] 青木 繁, 浦井 芳洋, 境界要素法によるガルバニック腐食逆問題の解析, 境界要素法論文集, 7:165-170, 1990.
- [19] K. Ohnaka and K. Uosaki, Boundary element approach for identification of boundary conditions of distributed-parameter systems, *Internat. J. Control*, 41(4):981-990, 1985.
- [20] T. Kobayashi, Initial state determination for distributed parameter systems, *SIAM J. Control and Optimization*, 14(5):934-944, 1976.
- [21] T. Kobayashi, A well-posed approximate method for initial state determination of discrete-time distributed parameter systems, *SIAM J. Control and Optimization*, 15(6):947-958, 1977.
- [22] D. S. Gilliam, B. A. Mair and C. F. Martin, Determination of initial states of parabolic system from discrete data, *Inverse Problems*, 6:739-747, 1990.
- [23] V. Isakov, *Inverse Source Problems*, American Mathematical Society, Providence, Rhode Island, 1990.
- [24] D. Zidarov, *Inverse Gravimetric Problem in Geoprospecting and Geodesy*, Elsevier, Amsterdam, 1990.
- [25] M. Okabe, A boundary integral approach in the geoelectrical cavity prospecting, *Comput. Meths. Appl. Mech. and Engrg*, 29:297-311, 1981.
- [26] 岡部 政之, 資源探査における逆問題, 数理科学, (274):62-70, 1986.
- [27] 田中 正隆, 矢崎 士郎, 山田 善啓, 音響インテンシティを用いた境界要素法による騒音源の同定, 境界要素法論文集, 5:46-50, 1988.
- [28] B. K. Gardner and R. J. Bernard, A noise source identification technique using an inverse Helmholtz integral equation method, *Trans. ASME Ser. L*, 110:84-90, 1986.

- [29] 久保 司郎, 大中 幸三郎, 大路 清嗣, 境界積分に基づく物体内の発熱源および荷重の同定, 日本機械学会論文集 (A 編), 54(503):1329–1334, 1988.
- [30] 久保 司郎, 阪上 隆英, 大路 清嗣, 電気ポテンシャル CT 法によるき裂同定における逆問題の解の一意性, 日本機械学会論文集 (A 編), 55(519):2316–2319, 1989.
- [31] 田中 正隆, 中村 正行, 中野 隆志, 動弾性逆問題への境界要素法の適用 (動的ひずみ応答を補助情報とする場合), 日本機械学会論文集 (A 編), 56(530):2583–2588, 1990.
- [32] N. Nishimura and S. Kobayashi, A boundary integral equation method for an inverse problem to crack detection, *Internat. J. Num. Meth. Eng.*, 32:1371–1387, 1991.
- [33] 河原田秀夫, 自由境界問題, 東京大学出版会, 1989.
- [34] O. Pironneau, *Optimal Shape Design for Elliptic Systems*, Springer-Verlag, New York, 1983.
- [35] J. Sokolowski and J. P. Zolesio, *Introduction to Shape Optimization*, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, 1992.
- [36] I. M. Gelfand and B. M. Levitan, On the determination of a differential equation from its spectral function, *Izv. Akad. Nauk USSR, Ser. Mat.*, 15:309–360, 1951.
- [37] 吉田耕作, 積分方程式論, 岩波書店, 1950.
- [38] A. Pierce, Unique identification of eigenvalues and coefficients in a parabolic problem, *SIAM J. Control Optim.*, 17:494–499, 1979.
- [39] T. Suzuki, Uniqueness and ununiqueness in an inverse problem for the parabolic problem, *J. Differential Equation*, 34:294–316, 1983.
- [40] S. Nakagiri, Identifiability of linear systems in Hilbert spaces, *SIAM J. Control Optim.*, 21:501–530, 1983.
- [41] S. Nakagiri and M. Yamamoto, Identifiability of linear retarded systems in Banach space, *J. Tokyo. Math.*, 87-6:1–22, 1987.
- [42] M. Yamamoto, Inverse eigenvalue problem for a vibration of string with viscos drag, *J. Math. Anal. Appl.*, 152:20–34, 1990.
- [43] 砂原 善文 (編), 確率システム理論, 第 I,II,III 巻, 朝倉書店, 1981,1982,1982.

- [44] 久保 司郎, 大路 清嗣, 塩尻 明夫, 場の支配方程式を推定する方法の提案, 日本機械学会論文集 (A 編), 57(541):2250–2256, 1991.
- [45] A. N. Tikhonov and V. Y. Arsenin, *Solution of ill-posed problems*, John Wiley & Sons, New York, 1977.
- [46] M. M. Lavrentiev, *Some Improperly Posed Problems of Mathematical Physics*, Springer-Verlag, Berlin, Heiderberg, 1967.
- [47] C. W. Groetsch, *The Theory of Tikhonov Regularization for Fredholm Equations of the First Kind*, Pitman, Lang Acre, London, 1984.
- [48] H. W. Engl and C. W. Groetsch, eds., *Inverse and Ill-Posed Problems*, Academic Press, Orlando, Florida, 1987.
- [49] T. Kitagawa, On the effectiveness of the method of regularization in numerical procedures for ill-conditioned linear systems, *Japan J. Appl. Math.*, 5:305–311, 1988.
- [50] 細田 陽介, 北川 高嗣, L-カーブによる不適切問題の最適正則化について, 日本応用数理学会論文誌, 2(1):55–67, 1992.
- [51] C. W. Groetsch, *Inverse Problems in the Mathematical Sciences*, Vieweg, Braunschweig; Wiesbaden, 1993.
- [52] V. A. Morozov, *Regularization Methods for Ill-Posed Problems*, CRC Press, Boca Raton, Florida, 1993.
- [53] M. M. Lavrentiev, V. G. Romanov and S. P. Shishat-skii, *Ill-posed Problems of Mathematical Physics and Analysis*, American Mathematical Society, Providence, Rhode Island, 1980.
- [54] M. Kubo, L^2 -conditional stability estimate for the Cauchy problem for the Laplace equation, *J. Inv. Ill-Posed Problems*, 2(3):253–261, 1994.
- [55] J. L. Lions and E. Magnes, *Non-Homogeneous Boundary Value Problems and Applications*, Vol.1, Springer-Verlag, Berlin, Heiderberg, 1972.
- [56] T. Kobayashi, Parameter identification for distributed parameter systems of hyperbolic type, *Internat. J. Control*, 11:247–259, 1980.

- [57] J. R. Cannon and P. Duchateau, An inverse problem for an unknown source term in a wave equation, *SIAM J. Appl. Math.*, 43(3):553–564, 1983.
- [58] M. Yamamoto, Well-posedness of some inverse hyperbolic problem by the Hilbert uniqueness theorem, (Preprint).
- [59] V. Isakov and Z. Sun, Stability estimates for hyperbolic inverse problem with local boundary data, *Inverse Problems*, 8:193–206, 1992.
- [60] K. Ohnaka and H. Oshiumi, Boundary element approach for identification of the external forces in the scalar wave equation, *Appl. Math. Modelling*, 15:46–50, 1991.
- [61] T. Kobayashi, Determination of unknown functions for a class of distributed parameter systems, *SIAM J. Control and Optimization*, 17(4):469–476, 1979.
- [62] T. Kobayashi and S. Hitotsuya, Observers and parameter determination for distributed parameter systems, *Internat. J. Control*, 33(1):31–50, 1981.
- [63] T. Kobayashi, Discrete-time observation and parameter determination for distributed parameter systems with discrete-time input-output data, *SIAM J. Control and Optimization*, 21(3):331–351, 1983.
- [64] J. R. Cannon, Determination of an unknown heat source from overspecified boundary data, *SIAM J. Numer. Anal.*, 5(2):275–286, 1968.
- [65] J. R. Cannon and R. E. Ewing, Determination of a source term in a linear parabolic partial differential equation, *Z. Angew. Math. Phys.*, 27:393–401, 1976.
- [66] J. R. Cannon and S. P. Esteva, An inverse problem for the heat equation, *Inverse Problems*, 2:395–403, 1986.
- [67] J. R. Cannon and S. P. Esteva, Some stability estimates for a heat source in terms of overspecified data in the 3-D heat equation, *J. Math. Anal. Appl.*, 147:363–371, 1990.
- [68] J. R. Cannon and S. P. Esteva, Uniqueness and stability of 3D heat sources, *Inverse Problems*, 7:57–62, 1991.
- [69] K. Ohnaka and K. Uosaki, Identification of external input of distributed-parameter systems by the boundary-element approach, *Internat. J. Control*, 43:1125–1133, 1986.

- [70] K. Ohnaka and K. Uosaki, Simultaneous identification of the external input and parameters of diffusion type distributed parameter systems, *Internat. J. Control*, 46:889–895, 1987.
- [71] K. Ohnaka and K. Uosaki, Boundary element approach for identification of point force of distributed parameter systems, *Internat. J. Control*, 49(1):119–127, 1989.
- [72] O. D. Kellogg, *Foundations of Potential Theory*, Dover, New York, 1953.
- [73] 島倉 紀夫, 楕円型偏微分作用素, 紀伊國屋書店, 1978.
- [74] 佐藤 正千代, 新濃 清志, ポテンシャル, 培風館, 1984.
- [75] V. N. Strakhov and M. A. Brodsky, On the uniqueness of the inverse logarithmic potential problem, *SIAM J. Appl. Math.*, 46(2):324–344, 1986.
- [76] C. D. Pagani, Stability of a surface determined from measures of potential, *SIAM J. Math. Anal.*, 17(1):169–181, 1986.
- [77] C. Maderna, C. D. Pagani and S. Salsa, Existence results in an inverse problem of potential theory, *Nonlinear Analysis*, 10(3):277–298, 1986.
- [78] C. Maderna, C. D. Pagani and S. Salsa, Analytic solutions to the inverse problem of the Newtonian potential, *J. Math. Anal. Appl.*, 129:71–89, 1988.
- [79] A. I. Prelepko, Uniqueness of the solution of the exterior inverse problem of the Newtonian potential, *Differentsial'nye Uravneniya*, 2(1):107–124, 1966.
- [80] A. I. Prelepko, On inverse problems in potential theory, *Differentsial'nye Uravneniya*, 3(1):30–44, 1967.
- [81] M. A. Brodsky, On the uniqueness of the inverse potential problem for homogeneous polyhedrons, *SIAM J. Appl. Math.*, 46(2):345–350, 1986.
- [82] R. A. Smith, A uniqueness theorem concerning gravity fields, *Proc. Cambridge Philos. Soc.*, 57:865–870, 1961.
- [83] M. Sakai, *Quadrature Domains*, Lecture Note in Mathematics 934, Springer-Verlag, Berlin, Heiderberg, 1982.
- [84] M. Brodsky and E. Panakhov, Concerning a priori estimates of the solutions of the inverse logarithmic potential problem, *Inverse Problems*, 6:321–330, 1990.

- [85] 山谷 克, 大中 幸三郎, 調和関数を用いたポアソン方程式に対する点ソースの位置同定, 日本機械学会第 71 期通常総会講演会予稿集, 371-373, 1994.
- [86] 桑山 真二郎, 久保 司郎, 大路 清嗣, 高橋 智和, 誤差拡大挙動と特異値の関係をを用いた境界値逆問題の解析, 第 43 回応用力学連合講演会予稿集, 515-518, 1994.
- [87] H. Singer, H. Steibigler and P. Weiss, A charge simulation method for the calculation of high voltage fields, *IEEE Trans. Power Apparatus and Systems*, 93:1660-1668, 1974.
- [88] M. Katsurada and H. Okamoto, A mathematical study of the charge simulation method I, *J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sect IA, Math.*, 35:507-518, 1988.
- [89] M. Katsurada, A mathematical study of the charge simulation method II, *J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sect IA, Math.*, 36:135-162, 1989.
- [90] 桂田 祐史, 岡本 久, ポテンシャル問題の高速解法, 応用数理, 2(3):2-20, 1992.
- [91] 内田 剛二, 上山 英三, 杉浦 洋, 電荷モデルによる等角写像, 日本応用数理学会平成 5 年度年会講演予稿集, 229-230, 1993.
- [92] 天野 要, 代用電荷法に基づく等角写像の数値計算法, 情報処理学会論文誌, 28(7):697-704, 1987.
- [93] 天野 要, 代用電荷法に基づく外部等角写像の数値計算法, 情報処理学会論文誌, 29(1):62-72, 1988.
- [94] 天野 要, 代用電荷法に基づく 2 重連結領域等角写像の数値計算法, 情報処理学会論文誌, 29(10):914-925, 1988.
- [95] 天野 要, 高松 孝安, 安倍 齋, 代用電荷法と Newton 法による逆等角写像の数値計算法, 情報処理学会論文誌, 30(4):411-418, 1989.
- [96] 天野 要, 高松 孝安, 安倍 齋, 代用電荷法と Newton 法による外部逆等角写像の数値計算法, 情報処理学会論文誌, 30(8):923-931, 1989.
- [97] 天野 要, 代用電荷法に基づく数値等角写像の誤差の性質, 情報処理学会論文誌, 32(1):1-10, 1991.
- [98] C. A. Brebbia and S. Walker, *Boundary Element Techniques in Engineering*, Butterworths, London, 1980.

- [99] C. A. Brebbia, J. C. F. Telles and L. C. Wrobel, *Boundary Element Techniques*, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, 1984.
- [100] G. Chen and Y. L. Tsai, The boundary element numerical method for two-dimensional linear quadratic elliptic problems: (I) Neumann control, *Math. Comp.*, 49:479–498, 1987.
- [101] F. de Hoog and R. Weiss, Asymptotic expansions for product integration, *Math. Comp.*, 27:295–306, 1973.
- [102] J. Kowalik and M. R. Osborne, *Method for Unconstrained Optimization Problems*, American Elsevier, New York, 1968.
- [103] 森口 繁一, 宇田川 桂久, 一松信, 岩波 数学公式, 第 1,2,3 卷, 岩波書店, 1956.
- [104] 高木 貞治, 代数学講義, 共立出版, 1965.
- [105] D. E. Knuth, *The Art of Computer Programming*, Vol.1 (2nd Ed.), Addison-Wesley, Reading, MA, 1973.
- [106] I. O. Kerner, Ein Gesamtschrittverfahren zur Berechnung der Nullstellen von Polynomen, *Numer. Math.*, 8:290–294, 1966.
- [107] R. E. Moore, *Interval Analysis*, Prentice Hall, Englewood Cliffs, 1966.
- [108] B. T. Smith, Error bounds for zeros of a polynomial based upon Gerschgorin's theorem, *J. ACM*, 17:661–674, 1970.
- [109] P. Henrici, *Applied and Computational Complex Analysis*, Vol.3, John Wiley & Sons, New York, 1986.

著者発表論文

- [1] T. Takeda and T. Ooe, Determination of cell averaged diffusion constants based on transport/diffusion perturbation theory, *J. Nucl. Sci. Technol.*, 24(12):999–1008, 1987.
- [2] T. Ohe and M. Yamamoto, On the exponentially asymptotic stability of a perturbed nonlinear system, *Proc. Japan Acad.*, 65, Ser.A:81–84, 1989.
- [3] T. Ohe and M. Yamamoto, On the perturbation of exponential-asymptotically stable nonlinear systems, *Math. Japonica*, 35(6):1173–1187, 1990.
- [4] T. Ohe and K. Ohnaka, Boundary element approach for an inverse source problem of the Poisson equation with a one-point-mass-like source, *Appl. Math. Modelling*, 18(4):216–223, 1994.
- [5] T. Ohe and K. Ohnaka, A precise estimation method for locations in an inverse logarithmic potential problem for point mass models, *Appl. Math. Modelling*, 18(8):446–452, 1994.
- [6] T. Ohe and K. Ohnaka, Determination of locations of point like masses in an inverse source problem of Poisson equation, *J. Comput. Appl. Math.* (in press).
- [7] T. Ohe and K. Ohnaka, An estimation method for the number of point masses in an inverse logarithmic potential problem using discrete Fourier transform, *Appl. Math. Modelling* (in press).