OUKA
The University of Osaka
Institutional Knowledge Archive

Title	ウオルシュ変換の性質とその応用に関する研究
Author(s)	福井, 郁生
Citation	大阪大学, 1983, 博士論文
Version Type	VoR
URL	https://hdl.handle.net/11094/2726
rights	
Note	

The University of Osaka Institutional Knowledge Archive : OUKA

https://ir.library.osaka-u.ac.jp/

The University of Osaka

ウォルシュ変換の性質とその応用に関する研究

昭和57年12月

福井郁生

ウォルシュ変換の性質とその応用に関する研究

昭和57年12月

福井郁生

A Study on the Properties of the Walsh Transform and its Applications

Ikuo FUKUI

Abstract

The Walsh transform is a kind of integral transform at mathematics and a useful technique for information processing by computer. This report is about research on a fundamental theory for systematizing the Walsh transform, its properties, applications of it to image processing, and presents two models of a Walsh transforming device.

First, mathematical structures necessary for Walsh functions and the Walsh transform are introduced; second, some of their properties are either analyzed or clarified, and third, an idea obtained through the above investigation is applied to image processing. Then, two models of devices for the Walsh transform are presented.

〔**Base**〕—(i) We adopt a residue class ring R_m of polynomials over $GF(2)$ module x^m, where $m=1,2,3,\cdots$.

(ii) We map the residue polynomial R_m onto a decimal set $D_m=\{0,1,2,\cdots,a,\cdots,2^m-1\}$, which is here named a 'dyadic ring'. Hence we can introduce multiplication to the Walsh transform theory in a natural way, which is different from the conventional one.

(iii) To deal with the Walsh function and Walsh transform easily, a dyadic scalar product and a pseudo-division are defined on D_m.

(iv) We use the dyadic scalar product as the first power of -1, and define the Coleman-type Walsh function as $(-1)^{a*x}$, which has explicit variables. This form make it possible to develop the theory of the Walsh transform, since we can carry out the multiplication operation among variables. The multiplication can not de derived an other way.

〔**Properties and formulas**〕—First, fundamental properties are introduced ;

(i) Mutual relations between the $\oplus$ and $+$ operations.

(ii) Transforming formula for obtaining 'sequency' which is an expanded frequency.

(iii) Relations with respect to cross-terms between input and output.

(iv) In the Walsh space, effects due to a dyadic trasfer or dyadic phase change in the input space.

(v) Dyadic n-th order correlation and convolution.

Next, higher properties are that ;

(vi) We assume that a multiplication in the dyadic ring D_m corresponds to an extension or reduction in geometry, which is here named a 'dyadic similarity transform'. We investigate how the dyadic similarity transform in original space influences the Walsh transform space.

(vii) In the Fourier transform theory, the Poisson's sum formula is well known We introduce the same formula to the Walsh transform theory. On the basis of this formula, we further introduce a sampling theorem in the Walsh transform theory and get the following results ;

A) When a function G has no more than N/T sequency where N is the number of original sampling data and T is the sampling period, then we can completely determine or reconstruct the original function G, using only every T period data. This is similar to the Fourier transform theory, but it is different in that data within each T period take a certain constant value.

B) When more than the N/T sequency of a function is cut, the function changes into another one such that values within a T period are exchanged for the average value of the original data within the same period. The function then takes on a stair like shape with width T.

(viii) Topologically, we change a two dimensional dyadic transfer with Cartesian coordinates, into a transfer with polar coordinates. We call this coordinate system a pseudo-polar coordinate system. The Walsh transform using the above system can analyze two dimensional patterns, or detect the features of a pattern with such directional or rotational characteristics as the Fourier spectrum and the correlation pattern of images.

(ix) We introduce the indefinite sum formula of a Coleman-type Walsh function, which is most fundamental for investigating the Walsh transform. This formula will provide a clue for obtaining the general forms of sum(or integral)functions of the Walsh transform. Furthermore, the form of the indefinite sum is composed of dyadic triangular-wave functions, and has partially complete orthogonal systems.

〔**Applications**〕— (i) On the basis of the dyadic transfer, a dyadic difference is introduced here. We can easily get a filter in the Walsh space to correspond to the dyadic difference. Applying the above filter to the Walsh space, we get a difference image from an original one. This filter has characteristics different to conventional high-pass filter.

(ii) The Walsh transform formula is essentially suitable for devising hardware ; nevertheless, it is difficult to use the transform as it is. By making a slight change in the formula, we present two types of analog devices which can easily be formed ;

A) The FFT type : a circuit that can perform the fast Fourier transform algorithm and carry out parallel processing of one-dimensional input data. According to this algorithm, the number of wire lines connecting terminals to $\log N/N$.

B) The lattice type : When we design a device using the IC technique, we decrease as many parts of the subtraction circuit as possible and increase proportionally the parts of the addition circuit. The total structure of the circuit consists of two parts ; the major is the lattice addition-part where the input line-group perpendicularly intersects to the output line-group, and the minor is the circuit where subtraction is performed only at the last stage.

ウォルシュ変換の性質とその応用に関する研究

概　要

本研究は，計算機による画像処理技術の一つであり，数学的には積分変換の一種であるウォルシュ変換の体系化を目指した「基礎理論」と「画像処理への応用」および「ウォルシュ変換装置のモデル」について考究したものである．まず「ウォルシュ関数」や「ウォルシュ変換」に必要な数学を基礎づけして，これから導かれる諸性質を解明し，応用として「画像処理」や「変換装置の提案」を以下の項目にわたって考察している．

〔**基礎**〕 (i) 基本になる数学の系として $GF(2)$ の上の多項式の剰余類としての環を採用する．(ii) 法を x^m(m は任意の正整数) として分類した $m-1$ 次の多項式に $x=2$ を代入して，10進の正整数 $(0 \sim 2^m-1)$ の上へ写像する．この環を「2進環」と名付ける．(iii)「2進スカラ積」と「擬似除法」を導いて，ウォルシュ関数やウォルシュ変換を扱いやすくするための基礎付けを行う．(iv)「コールマン形のウォルシュ関数」を「2進スカラ積」の関数として表現することにより，変数を陽の形でウォルシュ関数やウォルシュ変換を自由に展開できるようにした．(i) は既知のものであり，(ii) (iii) (iv) は本研究での独自のものである．この2進環を用いることにより，他の方式では見い出されなかった「積」を自然な形で導入することができ，数式を自由に扱えるようになった．

〔**性質・公式**〕 (Ⅰ) 以上のことから直ちに次の諸性質が導かれる．

(i)⊕演算と＋演算との関係式 (ii)周波数の拡張である「交番数」を求める変換式 (iii)クロス項についての関係式 (iv) 2進移動・2進位相変化のウォルシュ面での影響 (v) 2進n重相乗定理（相関関数，たたみこみ）．(Ⅱ)(Ⅰ)に基づいて，さらに次の諸公式が導かれる．(i) 2進相似変換―2進環の「積」を幾何における拡大縮少に対応すると考え，これを「2進相似変換」と呼ぶことにする．この変換に対するウォルシュ面での影響を調べた．(ii)ポアソンの和――フーリエ変換では「ポアソンの和の公式」が知られているが，この関係をウォルシュ変換について調べた．これを基にして，ウォルシュ変換におけるサンプリング定理について考究した．これにより次の結果を得た．(A) 関数 g_i が N/T（N は全標本点数）以上の交番数を含まないとき，区間 T ごとの g_i の値によって，すべての g_i が決定される．これはフーリエ変換の場合と同じであるが各区間内は同一の値をとる．(B) 関数 g_i があって，この関数の N/T 以上の交番数を遮断した関数 g_i は，区間 T の g_i の平均値をその区間の値としたものに等しい．(iii) 擬似極座標形式によるウォルシュ変換――直角座標系による「2次元2進移動」をトポロジカルに極座標系に対応させたのが「擬似極座標系」である．このウォルシュ変換は，径方向特性や回転特性をもっている2次元パターンの解析や特徴抽出を行うことができる．(iv) ウォルシュ関数の不定和分――ウォルシュ変換にとって基も基本的なウォルシュ関数の「不定和分公式」を求めた．これは一般的なウォルシュ変換公式を得る手がかりとなる．この不定和分関数は「2進三角波関数」であり，部分的に完備な直交系となっている．

〔**応用**〕 (i) 2進差分と画像処理への応用――2進移動に基づいた2進差分を導入した．容易に2進差分（演算子）のウォルシュ面でのフィルタを得ることができる．このフィルタにより画像の差分形を得た．このフィルタはハイパスフィルタに似た特性をもつ．(ii)アナログ形ウォルシュ変換装置――ウォルシュ変換はハードウェア化するのに好都合な性質をもっている．変換式そのままでは困難であるので，実現可能な二種類の方式を提案

している．(A)ＦＦＴ形ウォルシュ変換装置：高速ウォルシュ変換アルゴリズムを装置化するものである．このアルゴリズムは並列処理の可能な構成になっており，アナログ変換装置として実現する．従来のものと比較すると，入力データ N にたいしてコード数が $\log N/N$ にまで減る．(B) 格子状集積回路によるウォルシュ変換装置：ウォルシュ変換の減算回数を最小にして大部分を加算回路として，ＩＣ化技術により実現する．全体の構成は入力コード群と出力コード群が直交した「格子状の加算回路」と，最終段階で減算を行うための「加算回路」から成っている．

本研究に関連する発表論文

1. 福井郁生："ガロア体 GF (2) による Walsh 変換の性質"，電子通信学会論文誌（D）．J 59—D，7，pp. 496—503（昭51—07）．
2. 福井郁生："擬似極形式による Walsh 変換"，電子通信学会論文誌(D)．J 59—D，10，pp.743—744（昭51—10）．
3. 福井郁生："Dyadic 相似変換の Walsh 面での影響"，電子通信学会論文誌（D）．J 60—D，4，pp.314-316（昭52—04）．
4. 福井郁生："ウォルシュ変換における Dyadic 差分フィルタ"，電子通信学会論文誌（D），J 60—D，7，pp.555—556（昭52—07），
5. 福井郁生："二次元フーリエおよびアダマール変換装置"，電子通信学会論文誌（D）．J 55—D，3，pp.226—227（昭47—03）．
6. 福井郁生："ウォルシュ変換のサンプリングに関する性質"，電子通信学会論文誌(D)．J 60—D，11，pp.1011—1013（昭52—11）．
7. I. Fukui："Difference and indefinite sum of Walsh function"，IEEE on Pattern Analysis and Machine Intelligence（投稿中）．
8. I. Fukui："Analysis and application of dyadic difference in the Walsh Transform"，IEEE on Pattern Analysis and Machine Intelligence（投稿中）．
9. I. Fukui："Two-dimensional Walsh transform device using an integrated optical circuit"，IEEE dircuit and Systems，29，May，pp.336—339（1982）．
10. I.Fukui："TV image processing to determine the position of a robot vehicle"，Pattern Recognition，Vol. 14，Nos.1—6，pp.101—109（1981）．
11. 福井郁生："見込み角測定による位置決めとその応用"，電子通信学会論文誌(D)，J 65—D，4，pp. 427—434（昭57—04）．
12. 特許出願："ウォルシュ変換装置"，出願番号161308，昭和56年10月（出願中）．
13. I. Fukui："Two-dimesional Walsh transform device using an integrated optical circuit"，Trans. IECE Japan，E65，1，pp.61-62(1982)．
14. 福井郁生："ウォルシュ変換におけるポアソンの和，標本化定理，入出信号の関係"，電子通信学会論文誌(D)（印刷中）．
15. 福井，清水："二次元フーリエおよびアダマール変換装置"，機械試験所所報，25，2，(1971)．

Key Words : Walsh transform wave-analysis, triangular wave function, sequency, image processing, dyadic ring, Poisson's sum, sampling theorem, information engineering.

ウォルシュ変換の性質とその応用に関する研究

目　　次

第1章　序　　論…… 1
1・1　ウォルシュ関数およびウォルシュ変換に関する歴史的背景…… 1
1・2　ウォルシュ変換についての問題点…… 2
1・3　本研究の目的…… 2
1・4　本論文の構成…… 4
第2章　数学的背景 …… 5
2・1　準　　備…… 5
2・2　コールマン形ウォルシュ関数と交番数…… 7
2・3　ウォルシュ変換……10
2・4　⊕ → ＋ および ＋ → ⊕ への変換……12
第3章　ウォルシュ変換に関する理論的考察 ……14
3・1　ウォルシュ変換に関する若干の性質……14
3・2　2進相似変換……15
3・3　ポアソンの和……17
3・4　ウォルシュ変換における標本化定理……22
3・5　擬似極形式によるウォルシュ変換……27
3・6　ウォルシュ関数の差分と和分……30
3・7　2進三角波関数の部分的に完備な直交性……32
第4章　ウォルシュ変換の応用 ……36
4.1　2進差分の解析と画像処理への応用……36
4.2　アナログ形ウォルシュ変換装置……42
第5章　結　　論……46
謝 辞 ……47
参考文献 ……48

第1章 序　論

はじめに

本研究は，コンピュータによる画像処理技術の一つであり，数学的には積分変換の一種であるウォルシュ変換の体系化を目指した「基礎理論」と「画像処理への応用」および「ウォルシュ変換装置のモデル」について考究したものである．

1・1 ウォルシュ関数およびウォルシュ変換に関する歴史的背景

最近のコンピュータの発展と普及に伴い，画像情報のディジタル処理技術がますます重要なものとなってきた．しかし，基本となる手法，たとえば，増幅，強調，変調，特徴抽出，情報圧縮，評価，予値(予測)等を行うための手法は，以前から開発されてきたものであり，現在でもなおかつ有効なものである．これらの代表的なものとして，微分，相関(関数，係数)，固有値，エントロピー，平均，分散，積分変換などがある．これらのうち，積分変換の一種であるフーリエ変換やラプラス変換はよく知られており，重要な処理技術の一つとなっている．近年，この積分変換の一つであるウォルシュ変換の手法が新たに注目されるようになってきた．この変換論の基礎になるものはかなり以前から現れているので，これについて少し振返ってみよう．

まず，アダマール行列と名付けられた，各元素が＋1または－1で，かつ，任意の二つの行ベクトルが直交する正方行列の研究がJ.J.シルベスター(1852)により始められた．この変換行列の特別の場合としてJ.L.ウォルシュによるウォルシュ変換が現れた(1923)．これと独立にJ.J.バレットによる裸線交差理論が実際に適用され(1905)，以来，主に交差技術として今日に至っている．ところが近年(1960年代)になってから交番数（零交差周波数）解析の手段として利用することに着目され，1970年代になって爆発的とも言えるほどの多くの研究発表が行われた[1]．60年代までは主として数学的（組合せ論的）分野および回路網分野に限られていたのが，情報処理の手段として改めて見なおされたからである．実際はフーリエ変換が適用されている分野のウォルシュ変換への応用が多く試みられている[2]．

では，なぜこのように興味が持たれるようになったのだろうか．主たる理由は次の3点である．

(1) ウォルシュ関数系は三角関数系に似ていること．――特に直交性および周波数性の類似点が重要である．**表 1・1** を参照．三角関数系（フーリエ変換を含む）は多岐にわたって応用されている手法であり，その長所短所もよくわかっている．そこでまず，三角関数系での短所を補い，あるいは，三角関数系では得られなかった結果（特徴）を得るために，三角関数系の応用されている分野への適用である．三角関数系の重要な応用は周波数解析である[8]．これに対応してウォルシュ関数系においても交番数（sequency）解析がある．そこでこれを基本として，

(i) シーケンシ・スペクトル分析
(ii) 信号処理への応用
(iii) 通信への応用

の三つが試みられている．本研究では特に(i),(ii)を主たる対象とし，そのための理論の体系化と応用を目指している．

(2) ウォルシュ関数が＋1または－1の2値のみをとる矩形周波関数であること．――フーリエ変換は，まず入力データを正弦波関数によって変調して（掛けて）から積分する．従って変調するときに誤差が入り，積分によってさらに誤差が累積する．ところがウォルシュ変換では＋1または－1のみであるから，生のデータをそのまま加減することになるので，累積誤差を最小にすることができる．また，掛算を実行しなくてもよいので処理時間も短かい．さらに，フーリエ変換の場合はデータは複素数として出力するが，ウォルシュ変換は実数のみを出力する．これはメモリ

表 1・1　ウォルシュ変換とフーリエ変換の比較

	ウォルシュ変換	フーリエ変換
共通点	直交関数系	直交関数系
周波数	交番数(零交差周波数), Sequency, 拡張された周波数	Frequency
波形	矩形波（周期性，非周期性）	正弦波（周期性）
偶・奇関数	sal，cal（ここでは対象としない）	sin，cos
値域	＋1または－1	$-1 \leqq \sim \leqq +1$
起源	mod 2，論理的	弦の波形解析
信号の移動	⊕移動に対して不変，オクターブ和が不変	スペクトル不変
信号の回転	全く予想がつかない	一対一に対応
適用対象	コンピュータによる情報処理	広範囲な自然現象，情報処理
装置	電子回路により可，自然現象に基づく装置はない	光学系により可（2次元） 1次元装置は電気回路により可(2次元の場合は困難)
和分核	$(-1)^{a \cdot x}$	$e^{-ax\sqrt{-1}}$
スペクトル分析装置	巡回形アダマール分析器	格子形，プリズム形分析器
単位	H_m（ハルム）	H_z（ヘルツ）

ーの節約をも意味する．

(3)　ウォルシュ変換装置の製作が容易である．——フーリエ変換装置は，2次元の場合は光学系によって，また1次元の場合はアナログ電気回路によって容易に実現できる．このためにオンライン使用も可能である．しかし，ウォルシュ変換については，それに対応する自然の性質を利用した装置がないので，ディジタル回路によりつくらなければならない．ウォルシュ関数は ＋1 または －1 の値のみしかとらないから，この性質が回路製作上，都合がよいため装置化が容易である．

1・2　ウォルシュ変換についての問題点

80年代になって研究発表件数も落着きはじめた．反省期に入ったと思われる．この原因は以下のようなものであろう．

(1)　シーケンシ・スペクトルは入力データの平行移動および回転によって変化する．このために，フーリエ変換の場合と比べた場合，ウォルシュ変換の有用性が減る（ただし，ウォルシュ関数を変形することで平行移動不変のウォルシュ変換を行うことができる[23] [27] [28]）．

(2)　これまでの方法では数学的取扱いが込み入っていたので，見通しよく式を展開することができない．

(3)　ウォルシュ積分公式が得られていない．

ウォルシュ変換は mod 2 が基本になっているので，(1)を避けることはできない．従って，このことを念頭においてデータの処理を行う必要がある．入力データの前処理として「平行移動不変」「回転不変」の性質に正規化(変換)しておくのも一方法である．本研究では，(1)は対象としないで，(2)，(3) に重点を置いている．

1・3　本研究の目的

本研究では次の三つの項目を対象としている．

(1)　ウォルシュ変換を行うのに計算しやすい系や表現の導入，および，ウォルシュ変換についての諸性質(公式)の解明(導入・証明)

(2)　画像処理への応用

(3)　ウォルシュ変換装置のモデルの提案

表 1・2　ウォルシュ関数の定義

(a) 漸化式	Kronecker積(直積) 差分方程式	例えば文献[10] Harmuth[6]
(b)（矩形波周期関数の）積	Rademacher 関数	
(c) 2進群		Helm[4]
(d) －1 の巾乗		Coleman[5]

(1)については，これまでウォルシュ関数の導入には種々の方法が行われてきた．これらを整理分類すると **表 1•2** になる．これらには一長一短があるので，以下の (i)，(ii)，(iii) の考察に重点を置いてウォルシュ関数を新たに定義している．

(i) 見通しよく展開できる表現形式

表 1•2 の(a),(b),(c) は特色のある方法でウォルシュ関数を導入しており，これらはコンピュータを使用すれば容易に得られる．しかし，ウォルシュ関数やウォシュ変換についての性質を考察する場合，いつも定義に戻って式を展開しなければならず，特に他の式や関数と関連させる場合には手続きが非常に込み入ってくる．表現式を簡単にすることにより，一般的な性質が導きやすくなることは歴史的にも明かなことである．たとえば，行列•ベクトル，複素数，sin • cos よりも指数関数，演算子，微分方程式などの表現がそうである．本研究でのウォルシュ関数の定義は 表 1•2 の (d) に近い形式を採用している．(d)はウォルシュ関数を導くのも容易であり，また式の展開にも(a)，(b)，(c)のように定義式に戻る必要もない．表面(陽)に出ている記号・式のみを対象とするので，自由に数式を扱うことができる．ただ一つの難点をいえば，交番数(seqeuency)が陽の形で変数として表れていないことであろうか．

(ii) 定義域での，自然な形の加算•乗算の導入

ウォルシュ関数の性質は mod 2 に基づいている．これにより集合 $K=\{0,1\}$ での演算を定義すると．

$$0+0=0,\ 0+1=1,\ 1+0=1,\ 1+1=0$$

となる．これを，

$$i \oplus j=k,\quad i,\ j,\ k \in K$$

と表す．この K はガロア体 $GF(2)$ と呼ばれているものである．さらに，集合：

$$D_m=\{\ 0,1,2,\cdots,a,\cdots,N-1 \mid N=2^m,\ m=0,1,2,\cdots\ \}$$

に対しても拡張すると，まず，a を2進表示してその各桁ごとの加法の ⊕ 演算を行ってから，ふたたび，10進表示に戻す演算とする．これは群となり，いわゆる（加法の）2進群(dyadic group)として知られているものである．ところが，これには乗法が定義されていない．文献のなかには通常の意味での乗算を行って式を展開しているものもあるが，⊕演算と整合しないので実り多いものとは言えない，ただし，2の巾乗倍の場合のみは，⊕演算と矛盾しなくて「自然な乗算」として実行できる．というのは，桁(ビット)を左にずらす(シフト)だけでよいからである(ただし，これは2進表示されていることを前提としている)．また，D_m の mod N の性質も考慮しなければならない．では，

⊕ 演算，mod N，2^l (l は整数)倍の積

の三つの性質を保存するような乗算はできないだろうか．ここで従来の掛算を次のように考えてみよう．いま，$m=2$ として，すなわち，変数を2進表示したとき2ビットして表わされる．そこで，a,b の各々の2進表示を a_1a_0，b_1b_0 とすると，$a\times b$ は **表 1•3** の (a) のような手順で実行される．表 1•3 の (a) の最下行を10進表示に直したものが従来の掛算の答えであった（ただし，ここでは桁上りは考慮外とする)．上記の三つの条件を満たす演算として次の二つの条件を定める．

(イ) 掛算をして得られた結果の mod N をとる．すなわち，m より大きい桁(ビット)を0とする．

(ロ) 従来の ＋ 演算を ⊕ 演算に置き換える．

この乗算を2進(dyadic)乗算と呼ぶことにする．表 1•3 の (a) の従来の乗法であると，

$$a\times b=(a_1 b_0,\ a_1 b_0+a_0 b_1,\ a_0 b_0)$$

であったのが，2進乗算では，

$$a\times b=(a_1 b_0 \oplus a_0 b_1,\ a_0 b_0)$$

と定義する．表 1•3 の (b) を参照．ここで導入した2進乗算は従来の乗算を⊕演算に合うように修正したものであるが，実はこれは「ガロア体 $GF(2)$ の上の多項式の剰余類（環)」の一つの表現として，加算および乗算が統一的に導きだせることがわかった*．従って，D_m が環になっていることがわかった．

(iii)「形式」よりも「明瞭さ」•「使いやすさ」の優先

連続関数は扱わない．—— 定義域 (domain) は，0または正の整数の上で定義され，値域 (range)，すなわち，関数値は複素数まで含むものとする．得られた結果は容易に有理数域まで拡

* 喜安善市氏の指摘に負う

表 1・3 (a) 従来の掛算

（ここでは桁上りはないと仮定している）

$a \times b =$

$$\begin{array}{rcccc} & & & a_1 & a_0 \\ & & \times) & b_1 & b_0 \\ \hline & & a_1\ b_0 & a_0\ b_0 & \\ +) & a_1\ b_1 & a_0\ b_1 & & \\ \hline & a_1\ b_1 & a_1 b_0 + a_0 b_1 & a_0\ b_0 & \end{array}$$

(b) modulo 4 による掛算

（＊は mod 4 のために 0 となる）

$$\begin{array}{rcccc} & & & a_1 & a_0 \\ & & \times) & b_1 & b_0 \\ \hline & & a_1\ b_0 & a_0\ b_0 & \\ \oplus) & a_1\ b_1 & a_0\ b_1 & & \\ \hline & * & a_1 b_0 \oplus a_0 b_1 & a_0\ b_0 & \end{array}$$

張できる．しかし，実数まで拡張できるかどうかはわからない．実際問題としては，計算機にかける場合でも筆算を行う場合でも，整数，すなわちディジタル形式のほうが曖昧さがない．

形の「きれいさ」にはこだわらない．—— これまで導入されてきたウォルシュ関数 (*a*), (*b*) の定義域の多くは連続関数として

$$0 \leqq \sim \leqq 1 \quad \text{または} \quad -1/2 \leqq \sim \leqq +1/2$$

であった．この理由は三角関数の sin 関数，cos 関数に対応させるためである．sin 関数に対しては sal 関数があり，cos 関数に対しては cal 関数がある．これにより三角関数系で知られている諸公式が sal, cal 関数系についても形式的に似た公式が成立する．これは sal, cal 関数を用いる立場からは便利である．しかし，本研究では sal, cal 関数を使用していない[7]．これを導入すると，ウォルシュ関数を取扱うのにかえって複雑となり，見通しが悪くなるからである．

−1 の巾乗．—— 今までのウォルシュ関数の定義は主として(a)または(b)が使われていた．これらは，変数がそのままの形で表面に出ないので，形を変形したり，他の式と関連づけたりする場合に繁雑になった．その点，(d)は変数とウォルシュ関数とが直接，結びついているので，式の展開に都合がよい．したがって，本研究では(d)形式を採用している．

1・4 本論文の構成

これらの方法により，他の方式では得られなかった諸結果が得られている（第2章，第3章）．主なものとして，

(i)サンプリング定理における平均化

(ii)ウォルシュ関数の差分と和分

前節の(2)については，入力データをウォルシュ変換して得られるウォルシュ変換面で，フィルタをかけて信号処理する方法がある．いままでの方法では通常の算法に基づいた方法を適用しているために予想のつかない結果か，もしくは，およその見当しかつけられなかった．本研究では2進フィルタを導入することにより理論解析が可能となった．この応用として入力画像の差分形を示した．

前節の(3)については，ウォルシュ変換はデータの加減のみの操作であるから，装置化が容易な性質を持っている．ところが大量のデータを扱う装置となると多数の結線回路を必要とするので，実際上，製作が不可能である．本研究では結線数の少ない二つのウォルシュ変換装置のモデルを見いだした．一つは高速ウォルシュ変換法（FWT：fast Walsh transform)のアルゴリズムに基づいたものである．通常の方法では結線の数が $N \times N$ 本を必要としたが，この方法によると $N \times \log N$ 本に減る．これは N の値が大きいほどその効果が著しい．もう一つのモデルは，できるだけ減算部分をなくし，大部分を格子状の加算回路として実現するものである．この格子状回路は特定の交点のみで入力から出力へ信号が伝わる回路となっている．最終段階で減算回路を設けてあり，装置全体がコンパクトになる（第4章）．

第2章　数学的背景

2·1　準　　備[31]

標数2のガロア体：$GF(2)=\{0,1\}$ を K と表す．x を変数とする K の上の任意の多項式 $P(x)$ を，法$F(x)$ により剰余類に分類する．商を$Q(x)$，剰余を$R(x)$ として次式が成立する．

$$P(x)=F(x)Q(x)+R(x) \qquad (2.1)$$

$R(x)$ の集合 $\{R(x)\}$ は「$GF(2)$の上に多項式の剰余類環」と呼ばれている．さて，ここで，$F(x)$ を次のように定める．

$$F(x)=x^m, \text{ ただし } m=1,2,3,\cdots\cdots \qquad (2.2)$$

従って，$R(x)$ は次のように表現できる．$r_i \in K$ として．

$$R(x)=\sum_{i=0}^{m-1} r_i x^i \qquad (2.3)$$

ここで，$R(x)$ に二通りの写像を行って，2種類の表現を得る．一つは10進表示したもの(i)であり，もう一つは，ベクトル•行列表現したもの (ii)である．

(i) 10進表示への写像

$R(x)$ に，$x=2$ を代入する．従って，$\{R(2)\}$ は 2^m を法 (mod) とする $0\sim 2^m-1$ の整数の10進数の上への同形写像となる．これを改めて次のように記す．

$$D_m=\{0,1,\cdots,a,\cdots,N-1 \mid N=2^m, m=1,2,3,\cdots\} \qquad (2.4)$$

これを「2進環(dyadic ring)」と呼ぶことにしよう．$\{R(x)\}$ は環であるから，加法と乗法が成りたつ．この演算を D_m に対応させる．まず加法について，

$a_i, b_i, c_i \in K$，$A(x), B(x), C(x) \in \{R(x)\}$ として，(2.3) より，

$$A(x)=\sum_{i=0}^{m-1} a_i x^i,\quad B(x)=\sum_{i=0}^{m-1} b_i x^i,$$

$$C(x)=\sum_{i=0}^{m=1} c_i x^i$$

さらに，$a, b, c \in D_m$ として，

$$A(x)+B(x)=C(x) \rightarrow A(2)+B(2)=C(2) \qquad (2.5)$$

となる．ビット単位で考えると，これは，

$$\sum_{i=0}^{m-1}(a_i \oplus b_i)2^i=\sum_{i=0}^{m-1} c_i 2^i \qquad (2.6)$$

に等しい．(2.5) を D_m に対応させて表現した通常の加法＋と区別するために，⊕記号が一般的に使われている．すなわち，

$$A(2)+B(2)=C(2) \overset{10}{\rightarrow} a \oplus b=c \qquad (2.7)$$

と表すことにする．この D_m の加法は「2進(加)群 (dyadic group)」と名付けられている[19]．D_m の加法の記号 ⊕ と Kにおける加法の記号 ⊕ とは同じものであるが，変数がいずれに属しているかは容易にわかるので，気をつければ混同することはない．

次に乗法について，加法と同様に，

$$A(x)B(x)=C(x) \rightarrow A(2)B(2)=C(2) \qquad (2.8)$$

$$\overset{10}{\rightarrow} \quad ab=c \qquad (2.9)$$

となる．$a_i, b_i \in K$ であることを考慮して，(2.8) の第1式を実行すると，序論の 表 1·3 (b)と同じものになる．乗法の表現としては (2.9) の方式を採用する．乗法として特別の記号は使わない．というのは，後でスカラ積の記号も導入するので，数式の繁雑さを避けるためである．

さて，以上は，m を任意として一般的に説明してきたが，直感的に理解するために例を示す．$m=3$ とすると，$F(x)=x^3$ となり，(2.1) は，

$r_2, r_1, r_0 \in K$ として，

$$P(x)=x^3Q(x)+r_2x^2+r_1x+r_0 \qquad (2.10)$$

となる．これらの多項式の算法は昔から知られており，例えば法を x^2+1，$m=2$ とした場合は文献[26]になる．この場合の加法と乗法は，それぞれ **表 2·1**，**表 2·2** となる．さらに，$x=2$ を代入すると，D_3 の加法と乗法は **表 2·3**，**表 2·4** と

表 2・1 $\{R(x)\}$ の加法，$m=3$，$A(x)+B(x)=C(x)$

$C(x)$	0	1	x	$x+1$	x^2	x^2+1	x^2+x	x^2+x+1
0	0	1	x	$x+1$	x^2	x^2+1	x^2+x	x^2+x+1
1	1	0	$x+1$	x	x^2+1	x^2	x^2+x+1	x^2+x
x	x	$x+1$	0	1	x^2+x	x^2+x+1	x^2	x^2+1
$x+1$	$x+1$	x	1	0	x^2+x+1	x^2+x	x^2+1	x^2
x^2	x^2	x^2+1	x^2+x	x^2+x+1	0	1	x	$x+1$
x^2+1	x^2+1	x^2	x^2+x+1	x^2+x	1	0	$x+1$	x
x^2+x	x^2+x	x^2+x+1	x^2	$x+1$	x	$x+1$	0	1
x^2+x+1	x^2+x+1	x^2+x	x^2+1	x^2	$x+1$	x	1	0

表 2・2 $\{R(x)\}$ の乗法，$m=3$，$A(x)B(x)=C(x)$

$C(x)$	0	1	x	$x+1$	x^2	x^2+1	x^2+x	x^2+x+1
0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	x	$x+1$	x^2	x^2+1	x^2+x	x^2+x+1
x	0	x	x^2	x^2+x	0	x	x^2	x^2+x
$x+1$	0	$x+1$	x^2+x	x^2+1	x^2	x^2+x+1	x	1
x^2	0	x^2	0	x^2	0	x^2	0	x^2
x^2+1	0	x^2+1	x	x^2+x+1	x^2	1	x^2+x	$x+1$
x^2+x	0	x^2+x	x^2	x	0	x^2+x	x^2	x
x^2+x+1	0	x^2+x+1	x^2+x	1	x^2	$x+1$	x	x^2+1

なる．表 2•4 は（乗法の）群となっていないことがわかる．この理由は一般的に法 $F(x)=x^m$ は既約多項式ではないからである．従って，D_m は「体」にはなり得ない[13]．

(ii) ベクトル・行列への写像

まず，K の上のベクトル写像として

$$R(x)=\sum_{i=0}^{m-1} r_i x^i \overset{V}{\rightarrow} \boldsymbol{r}=\begin{pmatrix} r_{m-1} \\ r_{m-2} \\ \vdots \\ r_i \\ \vdots \\ r_0 \end{pmatrix} \tag{2.11}$$

と表すことにする．このベクトルのすべての集合 $\{\boldsymbol{r}\}$ を V_m とする．さらに，K の上の，次のよ

表 2・3 D_3 の加法

$a \oplus b$	0	1	2	3	4	5	6	7
0	0	1	2	3	4	5	6	7
1	1	0	3	2	5	4	7	6
2	2	3	0	1	6	7	4	5
3	3	2	1	0	7	6	5	4
4	4	5	6	7	0	1	2	3
5	5	4	7	6	1	0	3	2
6	6	7	4	5	2	3	0	1
7	7	6	5	4	3	2	1	0

表 2・4 D_3 の乗法

$a\,b$	0	1	2	3	4	5	6	7
1	0	1	2	3	4	5	6	7
2	0	2	4	6	0	2	4	6
3	0	3	6	5	4	7	2	1
4	0	4	0	4	0	4	0	4
5	0	5	2	7	4	1	6	3
6	0	6	4	2	0	6	4	2
7	0	7	6	1	4	3	2	5

うな三角行列の中への写像を，

$$r'_{ij}=\begin{cases}0 & , \ i>j\\ r_{i-j}. & i\leqq j\end{cases}$$

ただし，$r'_{ij},\ r_{i-j}\in K$

として，

$$R(x)=\sum_{i=0}^{m-1} r_i x^i \overset{T}{\rightarrow} R=(r'_{ij}) \qquad (2.12)$$

$$R=\begin{pmatrix} r_0\cdots\cdots r_k\cdots r_{m-2} & r_{m-1}\\ r_0\cdots\cdots r_k\cdots\cdots r_{m-2} & \\ \cdots\cdots\cdots r_k\cdots\cdots & \\ r_0\cdots\cdots\cdots\cdots r_k & \\ 0 \qquad \cdots\cdots\cdots & \\ r_0 & r_1\\ & r_0\end{pmatrix} \qquad (2.13)$$

と表すことにする．この三角行列全体の集合$\{R\}$をT_mとする．

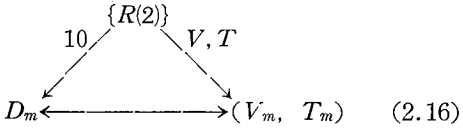
以上をまとめると，V_mとT_mによって$\{R(x)\}$の加法と乗法は次のように写像される．

$$A(x)+B(x)=C(x) \overset{V}{\rightarrow} \boldsymbol{a}\oplus\boldsymbol{b}=\boldsymbol{c} \qquad (2.14)$$

$$A(x)B(x)=C(x) \overset{V,T}{\rightarrow} A\boldsymbol{b}=\boldsymbol{c} \ \text{または} \ B\boldsymbol{a}=\boldsymbol{c} \qquad (2.15)$$

ただし，加法記号：$\oplus$．$a,b,c\in D_m$，$\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}\in V_m$，$A,B\in T_m$ $A(x),B(x),C(x)\in\{R(x)\}$

以上により，$\{R(x)\}$，D_m，$(V_m,\ T_m)$の相互に次の対応関係がなりたつ．



(2.16)

$\{R(x)\}$からD_mへの写像および$\{R(x)\}$から$(V_m,\ T_m)$への写像は一対一の対応関係があるので，D_mと$(V_m,\ T_m)$の間にも一対一の対応がなりたつ．手続きは，$r\in D_m$を2進表示した各桁の数字を(2.11)のベクトル，または，(2.12)の三角行列に対応させる．逆に(2.11)または(2.12)の行列を10進表示に変換すれば，$r\in D_m$が得られる．D_mと$(V_m,\ T_m)$の使いわけは，D_mは一般的な数式や議論を行うときに便利で，$(V_m,\ T_m)$は具体的な数値を求める場合や証明問題を扱うときに便利がよい．D_mと$(V_m,\ T_m)$の対応の表現は，次のようにする．

$$a\oplus b=c \longleftrightarrow \boldsymbol{a}\oplus\boldsymbol{b}=\boldsymbol{c} \qquad (2.17)$$

$$ab=c \longleftrightarrow A\boldsymbol{b}=\boldsymbol{c} \ \text{または} \ B\boldsymbol{a}=\boldsymbol{c} \qquad (2.18)$$

ただし，$a,\ b,\ c\in D_m$，$\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b},\ \boldsymbol{c}\in V_m$，$A,\ B\in T_m$

(iii) 2進スカラ積

V_mはベクトル集合であるから，スカラ積を定義することができる．これを2進スカラ積と呼ぶことにしよう．

$$a\cdot b=\boldsymbol{a}^*\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}^*\boldsymbol{a}=\sum_{i=0}^{m-1}\oplus a_i\,b_i\in K \qquad (2.19)$$

ただし，$*$は転置記号．$\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b}\in V_m$，$a_i,b_i\in K$，$a,b\in D_m$

この表現のD_m表示への対応は，

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}\longleftrightarrow a\cdot b\in K \qquad (2.20)$$

と示す．従って，D_mにおける二つの積の分配則は，次のように表現される．

$$a(b\oplus c)=ab\oplus ac\in D_m \qquad (2.21)$$

$$a\cdot(b\oplus c)=a\cdot b\oplus a\cdot c\in K \qquad (2.22)$$

(2.22)は後述の定理2・3の (ii) に関連している．D_mの2進スカラ積は**表 2・5** にある．

以上により，ウォルシュ関数およびウォルシュ変換を扱うための準備が整った．

表 2・5 D_3 のスカラ積

$a\cdot b$	0	1	2	3	4	5	6	7
0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	0	1	0	1	0	1
2	0	0	1	1	0	0	1	1
3	0	1	1	0	0	1	1	0
4	0	0	0	0	1	1	1	1
5	0	1	0	1	1	0	1	0
6	0	0	1	1	1	1	0	0
7	0	1	1	0	1	0	0	1

2・2 コールマン形ウォルシュ関数と交番数

表1・2にあるようなウォルシュ関数の定義は，ここで用いられているものと比較すると，

(i) 部分的に関数の符号が反転している[20].

(ii) 変数の定義域が連続で，

$0\leqq\sim\leqq 1$ または $-1/2\leqq\sim\leqq+1/2$

となっている．

(iii) 交番数を通常の周波数と対応させるために，ここで用いられている値の半分として定義されている（奇数の場合は1を引いた半分）．

しかし，関数の基本的パターンとしては（図を描くと）全く同じである．ここでは，コールマンが提案した -1 の巾乗によるウォルシュ関数を，D_m の要素を変数として，以下のように定義する．以後，これを（コールマン形）ウォルシュ関数と呼ぶことにする．**図 2•1** を参照．

$s,\ i \in D_m$ として，

$$W_s(i)=(-1)^{s\cdot i}=\begin{cases}1, & s\cdot i=0\\ -1, & s\cdot i=1\end{cases} \qquad (2.23)$$

s は交番数に関連している係数で，これを「係数表現」または「係数順位」と名づけることにしよう．交番数とは，いままでの周波数の概念を拡張したもので，単位時間内，または，単位空間内で波形が(零)軸(または横軸)と正から負，あるいは，負から正へ変化(交差)する回数を表している．零交差周波数，あるいは，シーケンシ(sequency)とも呼ばれている．(2.23)によって得られたウォルシュ関数 $W_s(i)$ の交番数 s' は次式によって得られる．

$$s'=\sum_{i=0}^{N-2}|W_s(i)-W_s(i+1)|/2 \qquad (2.24)$$

ところで，係数 s から s' が得られないだろうか．すでに，s から s'，あるいは，s' から s を得る手続きは，文献［3］により，アダマール行列との関係において詳しく述べられているが，ここでは，直接定義式 (2.24) から導こう．なお，この s は次節にでてくるシルベスタ形アダマール行列の「行の順位」を表している．

〔定理 2•1〕コールマン形ウォルシュ関数 $W_s(i)$ の交番数を s' として，s から s' あるいは s' から s を得る変換行列：A，および，A^{-1} は次のようにして得られる．

$s,\ s' \in D_m,\ s \overset{V}{\longleftrightarrow} \boldsymbol{s} \in V_m,\ s' \overset{V}{\longleftrightarrow} \boldsymbol{s}' \in V_m,$

A を K の上の行列として（A は三角行列であるが，T_m には属さない），

$$\boldsymbol{s}'=A\boldsymbol{s} \text{ または，} \boldsymbol{s}=A^{-1}\boldsymbol{s}' \qquad (2.25)$$

ただし，$A=(a_{ij})$，$A^{-1}=(b_{ij})$，$i,j \in \{1,2,3\cdots\cdots,m\}$

$$a_{ij}=\begin{cases}1, & i\geqq m-j+1\\ 0, & i<m-j+1\end{cases}$$

$$b_{ij}=\begin{cases}1, & j=m-i \text{ または，} j\\ & \quad =m-i+1\\ 0, & \text{その他}\end{cases}$$

行列表現にすると，A および，A^{-1} は次のようになる．

$$A=\begin{pmatrix}1 & & & & \\ 11 & & & & \\ 111 & & 0 & & \\ 1\cdot\cdot1 & & & & \\ 11\cdot\cdot111 & & & & \\ \cdots\cdots\cdots & & & & \\ 1111\cdot\cdot11111 & & & & \end{pmatrix},\quad A^{-1}=\begin{pmatrix}11 & & & & \\ & 11 & & & \\ 0 & & \ddots & & \\ & 11 & & & \\ & & \ddots & & \\ 11 & & & 0 & \\ 1 & & & & \end{pmatrix}$$

〔証明〕交番数の (2.24) の定義より，s' は，$(-1)^a=1-2a,\ a \in \{0,1\}$ として，

$$\begin{aligned}&\sum|W_s(i)-W_s(i+1)|/2\\ &\quad=\sum|(-1)^{s\cdot i}-(-1)^{s\cdot(i+1)}|/2\\ &\quad=\sum|s\cdot i-s\cdot(i+1)| \qquad (2.26)\end{aligned}$$

となる．$a,\ b \in K$ のとき，

$$|a-b|=a\oplus b \qquad (2.27)$$

であることから，

$$s'=\sum s\cdot[i\oplus(i+1)] \qquad (2.28)$$

となる．ここで $i\oplus(i+1)=I \overset{V}{\rightarrow} \boldsymbol{I} \in V_m$ とする．後述の例 2•2 の式を使うと $\boldsymbol{I}$ の成分 I_k は，i の 2 進表示を $i_{m-1}\cdots\cdots i_n\cdots i_0$ として，

$$I_k=\begin{cases}i_{k-1}\cdots\cdots i_n\cdots\cdots i_0, & k\neq 0\\ \qquad 1 \qquad\quad , & k=0\end{cases} \qquad (2.29)$$

となっている．そして，i_n のうちで 0 の値をもつものの最下位の桁のものを $i_l(=0)$ とすると，I_k はさらに次のように書き換えられる．

$$I_k=\begin{cases}0, & k=\ell+1,\ \cdots,\ m-1\\ 1, & k=0,\ 1,\ 2,\cdots\cdots,\ \ell\end{cases} \qquad (2.30)$$

このときの $\boldsymbol{I}$ の値は k が $\ell+1$ 以上の桁 i_{l+1}，$\cdots$，i_{m-1}，の値とは無関係に定まるので，i が 0 から $N-2$ までを順次変化していく間に同一の値を持つ $\boldsymbol{I}$ が，$i_{l+1},\cdots\cdots,i_{m-1}$ の組み合せの数だけ，すなわち，2^{m-l-1} 回発生する．また (2.30) の $\boldsymbol{I}$ は，$\ell=0\sim m-1$ であることから，m 種類の異なった値(パターン)を持つ．これより

$$s'=\sum_{i=0}^{N-2}\{i\oplus(i+1)\}\cdot s=\sum_{i=0}^{N-2}\boldsymbol{I}^*\boldsymbol{S} \qquad (2.31)$$

$$s'=\sum_{l=0}^{m-1}2^{m-l-1}(0,\cdots,0,\overbrace{1,1,\cdots,1}^{l+1\ \ l})\boldsymbol{S} \qquad (2.32)$$

（↑は行行列表現である）

$$=\sum 2^{m-l-1}(s_l\oplus\cdots\oplus s_0) \qquad (2.33)$$

ここで，$k=m-\ell-1$ と置き換えると，

$$s'=\sum_{k=0}^{m-1}2^k(s_{m-k-1}\oplus\cdots\oplus s_0) \qquad (2.34)$$

となる．ここで，$s'\xrightarrow{V}\boldsymbol{S}'\in V_m$ として $\boldsymbol{S}'$ の第 k 成分を s'_k とすると上式は成分に関して，

$$s'_k=s_{m-l-1}\oplus\cdots\cdots\oplus s_0 \qquad (2.35)$$

となる．これを行列とベクトル表示にすると定理の第一式がでてくる．$\det|A|=1$ であるから逆行列が存在する．$\boldsymbol{S}'=\boldsymbol{AS}$ を成分ごとに書き下したものを連立方程式とみなして $\boldsymbol{S}$ の成分を順次，求めていくと，A^{-1} が得られる．

［証明終］

なお，A^{-1} は文献［10］からでも得られる．s と s' の関係の具体例は **表 2・6** にある．

さて，$W_s(i)$ の例として，$m=3$ の場合を 表 2・5 を参照しながら描くと **図 2・1** になる．この図を見てもわかるように，係数 s を定めると，コールマン形ウォルシュ関数が定まり，さらに (2.25) によって，その交番数も定まる．ところが，表 1・2 の(a)にあるハルムスの漸化式によるウォルシュ関数の導入法では，交番数 s' によって，順次，ウォルシュ関数を求めていく．この漸化式を (2.23) のコールマン形の表現に書き換えてみると，次のようになる．

〔定理 2・2〕漸化式によるウォルシュ関数の定義

a,s を交番数順として，

$$W_a(i)=(-1)^{i_{m-1}\ s_{m-1}}\ W_s(2i) \qquad (2.36)$$

ただし，$s,i\in D_m$，s，i の 2 進表示をそれぞれ

$s_{m-1}\cdots\cdots s_0$ および $i_{m-1}\cdots\cdots i_0$

また，$p=0$ または 1 として，

$$\boldsymbol{a}=(p\oplus\sum_{i=0}^{m-1}s_i,\ s_{m-1},s_{m-2},\cdots,s_3,s_2,\ s_1\oplus s_0)^*$$

である．

〔例 2・1〕$m=4$，$N=16$ とすると，

$$W_a(i)=(-1)^{i_3s_3}\ W_s(2s)$$

ただし，$\boldsymbol{a}=\begin{pmatrix}a_3\\a_2\\a_1\\a_0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}p\oplus s_0\oplus s_1\oplus s_2\oplus s_3\\s_3\\s_2\\s_0\oplus s_1\end{pmatrix}$

となり，これによって求められるウォルシュ関数 $W_s(i)$，$m=4$ は，$s=0$ から始めて，係数単位として **表 2・7** (a) が得られる．(b) はそれに対応した交番数 s' を表している．この漸化式 (2.36) は，形式はハルムスのものより少し簡単な表現となっている，

さて，ウォルシュ関数についての性質はよく知られているが，変数が D_m に基づいていること，また，あとで証明に使うので定理としてあげておく．

〔定理 2・3〕 $s,t,i\in D_m$，$N=2^m$ として，

(i) $W_s(i)=W_i(s)$

(ii) $W_{s\oplus t}(i)=W_s(i)\,W_t(i)$

(iii) $\sum_{i=0}^{N-1}W_s(i)=N\,\delta_s$

ただし，$\delta_s=\begin{cases}1, & s=0\\0, & s\neq 0\end{cases}$

表 2・6 係数順位 s と交番数 s' の関係

(a) $m=3$，$N=8$

s	0	1	2	3	4	5	6	7
s'	0	7	3	4	1	6	2	5

s	0	4	6	2	3	7	5	1
s'	0	1	2	3	4	5	6	7

(b) $m=4$，$N=16$

s	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
s'	0	15	7	8	3	12	4	11	1	14	6	9	2	13	5	10

s	0	8	12	4	6	14	10	2	3	11	15	7	5	13	9	1
s'	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15

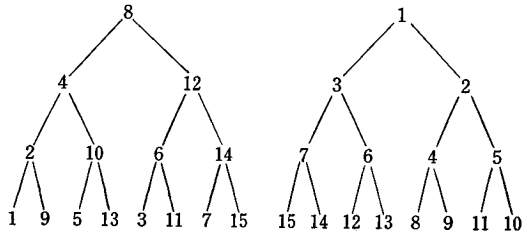
(c) $m=4$，$N=32$

s	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31
s'	0	31	15	16	7	24	8	23	3	28	12	19	4	27	11	20	1	30	14	17	6	25	9	22	2	29	13	18	5	26	10	21

s	0	16	24	8	12	28	20	4	6	22	30	14	10	26	18	2	3	19	27	11	15	31	23	7	5	21	29	13	9	25	17	1
s'	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31

表 2・7 漸化式により得られるウォルシュ関数の順序

(a) 係数順位　　(b) 交番数順位



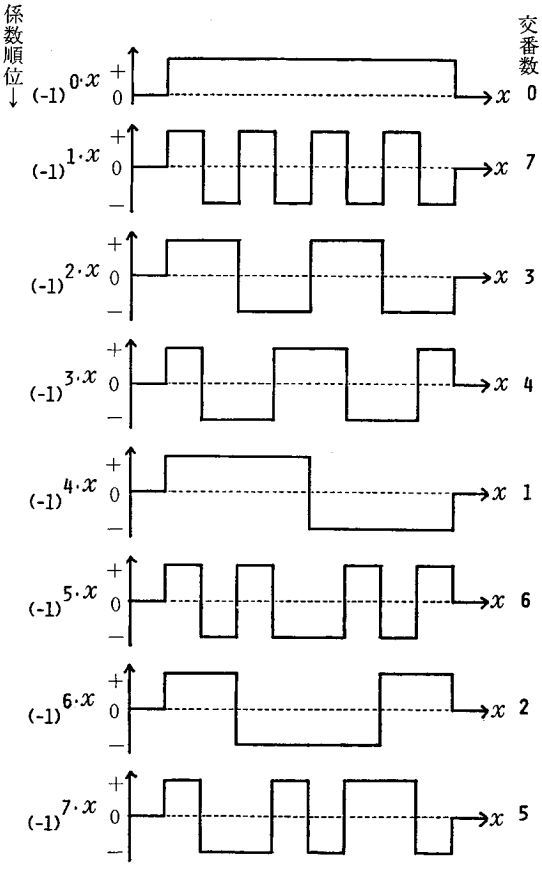


図 2・1 ウォルシュ関数，$N=8$

2・3 ウォルシュ変換

前章で定義したコールマン形ウォルシュ関数によるウォルシュ変換は次のようになる．

$s,i \in D_m$，$N=2^m$，として，

$$F_s=\sum_{i=0}^{N-1} f_i\,(-1)^{s\cdot i} \tag{2.37}$$

後述の便宜のため，この変換をつぎのように表すことにする．

$$f_i \overset{W}{\rightarrow} F_s \tag{2.38}$$

逆ウォルシュ変換は，

$$F_s \overset{W}{\rightarrow} N f_i,\quad N=2^m \tag{2.39}$$

となる．別の表現として，この変換を通常の算法としての行列ベクトルの表現で表すと，次のようになる．

$$\boldsymbol{F}=H\boldsymbol{f} \tag{2.40}$$

ただし，$\boldsymbol{f}=(f_{N-1},\ \cdots, f_i,\ \cdots, f_0)^*$

$\boldsymbol{F}=(F_{N-1},\ \cdots,\ F_s,\ \cdots,\ F_0)^*$

$H=(h_{ij})$，$h_{ij}=+1$ または -1，

ただし，$i,s\in\{0,1,\cdots,\ N-1\}$

この $N\times N$ の変換行列 H を次数 2^m のシルベスタ形アダマール行列という[21]．例として，$m=3$，4，5 の場合のアダマール行列をそれぞれ**表 2・8**，**表 2・9**，**表 2・10** にあげておく[10]．上式の s は行の順序を表していることになる．参考のために巡回形(ペーリー形)アダマール行列もあげておく[22]．**表 2・11** を参照．このタイプの行列は，すべて(今の場合は，0～11)の交番数が現われないので交番数解析には使えない．

ところで，(2・37)の定義は，1次元ウォルシュ変換式であったが，次のように k 次元ウォルシュ変換式に拡張することができる．

$$F(q_1,\ \cdots, q_i,\ \cdots, q_k)$$
$$=\sum_{p1=0}^{N-1}\cdots\sum_{pk=0}^{N-1} f(p_1,\ \cdots,\ p_i,\ \cdots,\ p_k)$$
$$\times(-1)^{q_1\cdot p_1\oplus\cdots\oplus q_i\cdot p_i\oplus\cdots\oplus q_k\cdot p_k} \tag{2.41}$$

ただし，$q_i,\ p_i\in D_m$，$f(\cdot)$，$F(\cdot)$ は k 次元表現である．

この式は後述の「2進 n 重相乗定理」の証明のときに使われる．以下にでてくるウォルシュ変換はすべて1次元，もしくは，2次元として扱っているが，(2・41)に従えば，容易に多次元表現に拡張できる．

表 2・8 $m=3,\ N=8$

以下の行列は，＋は＋1 を，－は－1 を表す．s' は交番数である．

$$H=\begin{pmatrix} +&+&+&+&+&+&+&+ \\ +&-&+&-&+&-&+&- \\ +&+&-&-&+&+&-&- \\ +&-&-&+&+&-&-&+ \\ +&+&+&+&-&-&-&- \\ +&-&+&-&-&+&-&+ \\ +&+&-&-&-&-&+&+ \\ +&-&-&+&-&+&+&- \end{pmatrix}\begin{matrix} s' \\ 0 \\ 7 \\ 3 \\ 4 \\ 1 \\ 6 \\ 2 \\ 5 \end{matrix}$$

表 2・9 $m=4,\ N=16$

$$H=\begin{pmatrix} +&+&+&+&+&+&+&+&+&+&+&+&+&+&+&+ \\ +&-&+&-&+&-&+&-&+&-&+&-&+&-&+&- \\ +&+&-&-&+&+&-&-&+&+&-&-&+&+&-&- \\ +&-&-&+&+&-&-&+&+&-&-&+&+&-&-&+ \\ +&+&+&+&-&-&-&-&+&+&+&+&-&-&-&- \\ +&-&+&-&-&+&-&+&+&-&+&-&-&+&-&+ \\ +&+&-&-&-&-&+&+&+&+&-&-&-&-&+&+ \\ +&-&-&+&-&+&+&-&+&-&-&+&-&+&+&- \\ +&+&+&+&+&+&+&+&-&-&-&-&-&-&-&- \\ +&-&+&-&+&-&+&-&-&+&-&+&-&+&-&+ \\ +&+&-&-&+&+&-&-&-&-&+&+&-&-&+&+ \\ +&-&+&-&-&+&-&+&-&+&+&-&+&-&+&- \\ +&+&+&+&-&-&-&-&-&-&-&-&+&+&+&+ \\ +&-&+&-&+&-&+&-&+&-&+&-&+&-&+&- \\ +&+&-&-&-&-&+&+&-&-&+&+&+&+&-&- \\ +&-&-&+&-&+&+&-&-&+&+&-&+&-&-&+ \end{pmatrix}\begin{matrix} s' \\ 0 \\ 15 \\ 7 \\ 8 \\ 3 \\ 12 \\ 4 \\ 11 \\ 1 \\ 14 \\ 6 \\ 9 \\ 2 \\ 13 \\ 5 \\ 10 \end{matrix}$$

表 2・10 $m=5,\ N=32$

$$H=\begin{pmatrix} +&+ \\ +&-&+&-&+&-&+&-&+&-&+&-&+&-&+&-&+&-&+&-&+&-&+&-&+&-&+&-&+&-&+&- \\ +&+&-&-&+&+&-&-&+&+&-&-&+&+&-&-&+&+&-&-&+&+&-&-&+&+&-&-&+&+&-&- \\ +&-&-&+&+&-&-&+&+&-&-&+&+&-&-&+&+&-&-&+&+&-&-&+&+&-&-&+&+&-&-&+ \\ +&+&+&+&-&-&-&-&+&+&+&+&-&-&-&-&+&+&+&+&-&-&-&-&+&+&+&+&-&-&-&- \\ +&-&+&-&-&+&-&+&+&-&+&-&-&+&-&+&+&-&+&-&-&+&-&+&+&-&+&-&-&+&-&+ \\ +&+&-&-&-&-&+&+&+&+&-&-&-&-&+&+&+&+&-&-&-&-&+&+&+&+&-&-&-&-&+&+ \\ +&-&-&+&-&+&+&-&+&-&-&+&-&+&+&-&+&-&-&+&-&+&+&-&+&-&-&+&-&+&+&- \\ +&+&+&+&+&+&+&+&-&-&-&-&-&-&-&-&+&+&+&+&+&+&+&+&-&-&-&-&-&-&-&- \\ +&-&+&-&+&-&+&-&-&+&-&+&-&+&-&+&+&-&+&-&+&-&+&-&-&+&-&+&-&+&-&+ \\ +&+&-&-&+&+&-&-&-&-&+&+&-&-&+&+&+&+&-&-&-&-&+&+&-&-&+&+&-&-&+&+ \\ +&-&-&+&+&-&-&+&-&+&+&-&+&-&-&+&+&-&-&+&-&+&+&-&+&-&-&+&+&-&-&+ \\ +&+&+&+&-&-&-&-&-&-&-&-&+&+&+&+&+&+&+&+&-&-&-&-&-&-&-&-&+&+&+&+ \\ +&-&+&-&+&-&+&-&+&-&+&-&+&-&+&-&+&-&+&-&+&-&+&-&+&-&+&-&+&-&+&- \\ +&+&-&-&+&+&-&-&+&+&-&-&+&+&-&-&+&+&-&-&+&+&-&-&+&+&-&-&+&+&-&- \\ +&-&-&+&+&-&-&+&+&-&-&+&+&-&-&+&+&-&-&+&+&-&-&+&+&-&-&+&+&-&-&+ \\ +&+&+&+&-&-&-&-&+&+&+&+&-&-&-&-&+&+&+&+&-&-&-&-&+&+&+&+&-&-&-&- \\ +&-&+&-&-&+&-&+&+&-&+&-&-&+&-&+&+&-&+&-&-&+&-&+&+&-&+&-&-&+&-&+ \\ +&+&-&-&-&-&+&+&+&+&-&-&-&-&+&+&+&+&-&-&-&-&+&+&+&+&-&-&-&-&+&+ \\ +&-&-&+&-&+&+&-&+&-&-&+&-&+&+&-&+&-&-&+&-&+&+&-&+&-&-&+&+&-&-&+ \\ +&+&+&+&+&+&+&+&-&-&-&-&-&-&-&-&-&-&-&-&+&+&+&+&+&+&+&+&-&-&-&- \\ +&-&+&-&+&-&+&-&-&+&-&+&-&+&-&+&-&+&-&+&-&+&-&+&-&+&-&+&-&+&-&+ \\ +&+&-&-&+&+&-&-&-&-&+&+&-&-&+&+&-&-&+&+&+&+&-&-&+&+&-&-&+&+&-&- \\ +&-&-&+&+&-&-&+&-&+&+&-&+&-&-&+&-&+&+&-&+&-&-&+&-&+&+&-&+&-&-&+ \\ +&+&+&+&-&-&-&-&+&+&+&+&-&-&-&-&+&+&+&+&+&+&+&+&-&-&-&-&+&+&+&+ \\ +&-&+&-&-&+&-&+&+&-&+&-&+&-&+&-&+&-&+&-&+&-&+&-&-&+&-&+&-&+&+&- \\ +&+&-&-&-&-&+&+&-&-&+&+&+&+&-&-&-&-&+&+&+&+&-&-&+&+&+&+&-&-&-&+ \\ +&-&-&+&-&+&+&-&+&-&+&-&-&+&+&-&+&-&+&-&-&+&+&-&+&-&+&-&-&+&+&- \end{pmatrix}\begin{matrix} s' \\ 0 \\ 31 \\ 15 \\ 16 \\ 7 \\ 24 \\ 8 \\ 23 \\ 3 \\ 28 \\ 12 \\ 19 \\ 4 \\ 27 \\ 11 \\ 20 \\ 1 \\ 30 \\ 14 \\ 17 \\ 6 \\ 25 \\ 9 \\ 22 \\ 2 \\ 29 \\ 13 \\ 18 \\ 5 \\ 26 \\ 10 \\ 21 \end{matrix}$$

表 2・11 巡回形(ペーリー形)アダマール行列，$N=12$

$$
H=\begin{array}{c}
\begin{array}{cc} & s' \end{array} \\
\left(\begin{array}{c}
++++++++++++ \\
++-+++---+-- \\
+-+-+++---+- \\
+--+-+++---+ \\
++--+-+++--- \\
+-+--+-+++-- \\
+--+--+-+++- \\
+---+--+-+++ \\
++---+--+-++ \\
+++---+--+-+ \\
++++---+--+- \\
+-+++---+--+
\end{array}\right)
\end{array}
\begin{array}{c} 0 \\ 5 \\ 7 \\ 6 \\ 5 \\ 7 \\ 7 \\ 6 \\ 6 \\ 6 \\ 5 \\ 6 \end{array}
$$

2・4 ⊕→＋および＋→⊕への変換

ウォルシュ関数やウォルシュ変換を扱うと，⊕演算がよくでてくる．そこでこの演算と通常の＋演算との関係を知っておくと便利がよい．

〔定理 2・4〕⊕演算から ＋ 演算への変換

$a, x \in D_m$ として，a, x の2進表示をそれぞれ，

$a_{m-1} \cdots a_i \cdots a_0$ および $x_{m-1} \cdots x_i \cdots x_0$

とする．

$$x \oplus a = x + \sum_{i=0}^{m-1} 2^i a_i (-1)^{x_i} \qquad (2.42)$$

ここで，$b=2^i$ と置き換えると，

$$x \oplus a = x + \sum_{i=0}^{m-1} a_i \ b \ W_b(x) \qquad (2.43)$$

〔証明〕 $x=\sum 2^i x^i$, $a=\sum 2^i a^i$, であるから，

$$x \oplus a = \sum 2^i (x_i \oplus a_i) \qquad (2.44)$$

となる．ところで，x_i, $a_i \in K$ とすると，

$$x_i \oplus a_i = x_i + a_i (-1)^{x_i} \qquad (2.45)$$

であるから，これを (2.44) 代入すると，

$$x \oplus a = \sum 2^i \{x_i + a_i (-1)^{x_i}\} \qquad (2.46)$$

$$= x + \sum 2^i a_i (-1)^{x_i} \qquad (2.47)$$

となる．さらに，$b=2^i$ とすると，

$$x \oplus a = x + \sum b \ a_i (-1)^{b \cdot x} \qquad (2.48)$$

$$x = + \sum a_i \ b \ W_b(x) \qquad (2.49)$$

となる． ［証明終］

この定理によると ⊕ 演算が直接，ウォルシュ関数と結びついていることがわかる．この具体例は **表 2・12** にある．

次にこの定理の逆変換として，＋演算から ⊕ 演算への変換を考えてみよう．⊕を2進表示の演

表 2・12 ⊕ 演算の ＋ 表示

$x, y, a \in D_3$ として，a の2進表示を $a_2 \ a_1 \ a_0$ とする．

$x \oplus a$	x	$+4a_2(-1)^{4 \cdot x}$	$+2a_1(-1)^{2 \cdot x}$	$+a_0(-1)^{1 \cdot x}$
$x \oplus 0$	x			
$x \oplus 1$	x			$+(-1)^{1 \cdot x}$
$x \oplus 2$	x		$+2(-1)^{2 \cdot x}$	
$x \oplus 3$	x		$+2(-1)^{2 \cdot x}$	$+(-1)^{1 \cdot x}$
$x \oplus 4$	x	$+4(-1)^{4 \cdot x}$		
$x \oplus 5$	x	$+4(-1)^{4 \cdot x}$		$+(-1)^{1 \cdot x}$
$x \oplus 6$	x	$+4(-1)^{4 \cdot x}$	$+2(-1)^{2 \cdot x}$	
$x \oplus 7$	x	$+4(-1)^{4 \cdot x}$	$+2(-1)^{2 \cdot x}$	$+(-1)^{1 \cdot x}$

算とすると，桁上りなしの加法である．従って，これは高速加算回路の一種類であるcarry-look-ahead 加算回路と等価となっている*[11]．2進演算に都合のよい表現に書き換えて次の定理とする．

〔定理 2・5〕 ＋ 演算から ⊕ 演算への変換

$x+a=y \pmod N$，$x,a,y \in D_m$ として，これらの2進表示の第 i 成分をそれぞれ x_i, a_i, y_i とする．

$$y_i=x_i\oplus a_i\oplus\sum_{k=0}^{i-1}\oplus a_k\ x_k(a_{k+1}\oplus x_{k+1})\cdots \times(a_{i-1}\oplus x_{i-1}) \qquad (2.50)$$

ただし，$i=0,1,2,\cdots\cdots,m-1$

［証明］ x,a,y の2進表示をそれぞれ，

$$x_{m-1}\cdots\cdots x_i\cdots\cdots x_0,$$
$$a_{m-1}\cdots\cdots a_i\cdots\cdots a_0,$$
$$y_{m-1}\cdots\cdots y_i\cdots\cdots y_0,$$

として，$x+a$ を通常の加算として実行する．このときの桁上りの値を b_i として，b_i，b_{i-1}，a_i，x_i および y_i の間には次のような関係がある．

$$y_i=a_i\oplus x_i\oplus b_{i-1} \qquad (2.51)$$
$$b_i=a_ix_i\oplus(a_i\oplus x_i)b_{i-1} \qquad (2.52)$$

$b_{-1}=0$ として，b_i について順次もとめていくと，定理が得られる． ［証明終］

［例 2・2］ $a=1$．$x\oplus(x+1)=I\xrightarrow{v}\boldsymbol{I}\in V_m$，$x\xrightarrow{v}\boldsymbol{x}\in V_m$ として，

$$\boldsymbol{I}=\begin{pmatrix} I_{m-1}\\ \cdot\\ \cdot\\ I_k\\ \cdot\\ I_1\\ I_0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x_{m-2}\ x_{m-3}\cdots x_k\cdots x_1\ x_0\\ x_{m-3}\cdots x_k\cdots x_1\ x_0\\ x_k\cdots x_1\ x_0\\ \cdots\cdots\cdots\\ \cdots\cdots\cdots\\ x_0\\ 1\end{pmatrix}$$

表 2・13 $y=\oplus(x+a)$ の成分表示

$y,x,a\in D_3$，$x+a=x' \bmod 8$ として，y，x の2進表示をそれぞれ，$y_2\,y_1\,y_0$，$x_2\,x_1\,x_0$，とする．

ただし，$\overline{x_i}=x_i\oplus 1$

y	y_2	y_1	y_0
$x\oplus(x+0)$	0	0	0
$x\oplus(x+1)$	$x_1\ x_0$	x_0	1
$x\oplus(x+2)$	x_1	1	0
$x\oplus(x+3)$	$x_1\oplus\overline{x_1}\ x_0$	$\overline{x_0}$	1
$x\oplus(x+4)$	1	0	0
$x\oplus(x+5)$	$\overline{x_1\ x_0}$	x_0	1
$x\oplus(x+6)$	$\overline{x_1}$	1	0
$x\oplus(x+7)$	$\overline{x_1\oplus\overline{x_1}\ x_0}$	$\overline{x_0}$	1

ただし，右辺の成分は x_k の積になっていることに注意．なお．これと同じ内容のものを ギブスも得ているが[18]，非常に複雑な表現になっている．例として，$m=3$，$N=8$ の場合の **表 2・13** を参照．

［例 2・3］ $m=5$．ベクトルと行列で表現すると，表 2・13 の形式より見通しがよく，m が定まれば機械的に書き表すことができる．

$$\boldsymbol{x}+\boldsymbol{a}=\boldsymbol{x}\oplus\boldsymbol{a}\oplus\boldsymbol{\Delta} \qquad (2.53)$$

とすると，

$$\boldsymbol{\Delta}=\begin{pmatrix} 0 & 1 & x_3\oplus a_3 & (x_3\oplus a_3)(x_2\oplus a_2) & (x_3\oplus a_3)(x_2\oplus a_2)(x_1\oplus a_1)\\ 0 & 0 & 1 & (x_2\oplus a_2) & (x_2\oplus a_2)(x_1\oplus a_1)\\ 0 & 0 & 0 & 1 & (x_1\oplus a_1)\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_4\ x_4\\ a_3\ x_3\\ a_2\ x_2\\ a_1\ x_1\\ a_0\ x_0\end{pmatrix}$$

となる．

* 喜安善市氏の指摘による

第3章　ウォルシュ変換に関する理論的考察

3・1　ウォルシュ変換に関する若干の性質

〔定理 3・1〕　クロス項について，

$f_i \overset{W}{\rightarrow} F_s$, $g_i \overset{W}{\rightarrow} G_s$, $N=2^m$, $i, s \in D_m$ として，

$$\sum_{i=0}^{N-1} f_i \overline{g_i} = (1/N) \sum_{i=0}^{N-1} F_s \overline{G_s} \qquad (3.1)$$

ただし，g, G のそれぞれの共後複素数を $\overline{g}$, $\overline{G}$, とする．

［証明］

$$F_s = \sum_{i=0}^{N-1} f_i (-1)^{s \cdot i}, \quad G_s = \sum_{j=0}^{N-1} g_j (-1)^{s \cdot j}$$

として，

これらを (3.1) の右辺に代入すると，定理 2・3 の(iii)より，

$$\sum_{s=0}^{N-1} F_s \overline{G_s} = \sum_{s=0}^{N-1} \{ \sum_{i=0}^{N-1} f_i (-1)^{s \cdot i} \sum_{j=0}^{N-1} \overline{g_j} (-1)^{s \cdot j} \}$$

$$= \sum_{i=0}^{N-1} f_i \sum_{j=0}^{N-1} \overline{g_j} \sum_{s=0}^{N-1} (-1)^{s \cdot (i \oplus j)}$$

$$= N \sum_{i=0}^{N-1} f_i \sum_{j=0}^{N-1} \overline{g_j}\, \delta_{i \oplus j} = N \sum f_i \overline{g_i}$$

［証明終］

［例 3・1］　$f_i = g_i$ とすると，「パーシバルの法則」が成立する．

$$\sum |f|^2 = 1/N \sum |F|^2 \qquad (3.2)$$

次に移動について考える．入力データが平行移動(シフト)した場合は，フーリエ変換面では位相だけが変化するが，ウォルシュ変換面では複雑な変化を起す．これは(数学)構造が mod 2 に基づいているからである．ウォルシュ変換では平行移動のかわりに 2 進 (dyadic) 移動がそれに対応する．この 2 進移動に対してウォルシュ面では，形式的にフーリエ変換の場合と同じような結果が得られる．2 進移動とは数学的には，⊕演算に相当する．

〔定理 3・2〕　2 進移動 および 2 進位相変化に対するウォルシュ面での影響

$f_i \overset{W}{\rightarrow} F_s$ として，

$$f_{i \oplus b} (-1)^{a \cdot i} \overset{W}{\rightarrow} F'_s = F_{s \oplus a} (-1)^{b \cdot (s \oplus a)} \qquad (3.3)$$

［証明］　題意より，

$$F'_s = \sum_{i'=0}^{N-1} f_{i' \oplus b} (-1)^{a \cdot i'} (-1)^{s \cdot i'} \qquad (3.4)$$

となり，$i' \oplus b = i$ として，

$$F'_s = \sum_{i=b}^{(N-1) \oplus b} f_i (-1)^{(i \oplus b) \cdot (a \oplus s)}$$

$$= (-1)^{b \cdot (a \oplus s)} \sum_{i=0}^{N-1} f_i (-1)^{i \cdot (a \oplus s)}$$

$$= (-1)^{b \cdot (a \oplus s)} F_{s \oplus a} \qquad (3.5)$$

［証明終］

画像処理技術においては，フーリエ変換に関して，相関・たたみ込み (convolution) 理論がある．これに対するのが次の n 次の 2 進相関定理である．

〔定理 3・3〕　2 進 n 重相乗定理

n 次相関を次のように定義する．ただし，変数：i, s_p, $t_p \in D_m$, (ディスクリートな) 複素関数：a_i, $b_i, \cdots\cdots, z_i$ として，

$$r(t_1, \cdots\cdots, t_p, \cdots\cdots, t_n)$$

$$= \sum_{i=0}^{N-1} a_i\, b_{i \oplus t_1} \cdots\, k_{i \oplus tp} \cdots z_{i \oplus tn} \qquad (3.6)$$

ウォルシュ変換面において，次の関係がある．

$$R(s_1, \cdots, s_p, \cdots, s_n)$$

$$= \overline{A_{s_1 \oplus \cdots \oplus s_p \oplus \cdots \oplus s_n}} \cdot B_{s_1} \cdots\cdots Z_{s_n} \qquad (3.7)$$

ただし，$a_i \overset{W}{\rightarrow} A_{sp}$. $b_i \overset{W}{\rightarrow} B_{sp}, \cdots, z_i \overset{W}{\rightarrow} Z_{sp}$,

$R(\cdot)$は $r(\cdot)$ を n 次元ウォルシュ変換したものであり，$\overline{a}$, $\overline{A}$ はそれぞれ a, A の共役複素数である．

［証明］ (2.41) を参照して，式 (3.6) の両辺の n 次元ウォルシュ変換をとると，

$$R(s_1,\cdots,s_n)=\sum_i \overline{a_i} \sum_{t1,\,t2,\cdots,tn} b_{i\oplus t1} \cdots\cdots z_{i\oplus tn}(-1)^{s1\cdot t1\oplus\cdots\oplus sn\cdot tn} \tag{3.8}$$

$$=\sum_i \overline{a_i} \sum_{t2,\cdots,tn} c_{i\oplus t2}\cdots z_{i\oplus tn}(-1)^{s2\cdot t2\oplus\cdots\oplus sn\cdot tn} \times \sum_{t1=0} b_{i\oplus t1}(-1)^{s1\cdot t1} \tag{3.9}$$

定理 3•2 より，

$$=Bs_1\sum_i \overline{a_i}(-1)^{i\cdot s1} \sum_{t3,\cdots,tn} d_{i\oplus t3}\cdots z_{i\oplus tn} \times(-1)^{s3\cdot t3\oplus\cdots\oplus sn\cdot tn} \sum_{t2=0} c_{i\oplus t2}(-1)^{s2\cdot t2} \tag{3.10}$$

以下，同様にして，

$$=\cdots=Bs_1\,Cs_2\cdots Zs_n\sum \overline{a_i}(-1)^{i\cdot(s1\oplus\cdots\oplus sn)} =\overline{As_1\oplus s_2\oplus\cdots\oplus s_n}\;Bs_1\,Cs_2\cdots Zs_n \tag{3.11}$$

［証明終］

この定理は相関についてであったが，たたみ込みについてはどうであろうか．実は定理の式のなかで共役複素数を表す文字の上の－記号を除いた場合がたたみ込についての関係式になっている．2進環 D_m の $\oplus$ 演算は加法と減法を兼ねた性質を持っているので，変数に関して相関とたたみ込みとの相違はないが，入力データは複素数値をとり得るので区別しなければならない．すなわち，定理 3•3 から －（bar 記号）を除いたものが，「2進 n 重たたみ込み」に関する定理である．データが実数であるときのみ完全に一致する．

3•2 2進相似変換[33]

第2章において導入した2進環 D_m の「積」を通常の演算の拡大・縮小に対応するものと考える．これにより，座標における変数の拡大または縮小，すなわち，相似変換のウォルシュ面における影響を調べることができる．D_m に基づく積を「2進拡大・縮小」あるいは「2進相似変換」と呼ぶことにしよう．ここでもう一度，表 2•4 の D_m の乗法をながめてみる．積 $a\,b$ について左端の縦列を a，上端の横列を b の掛算と考えると，次のようになっていることがわかる．

(i) a＝奇数．逆元 a^{-1} が存在して，$a\,b$ は b の順序の入れ替ったものになっている．

(ii) a＝偶数．$p=2^{\alpha}p$（p は素数の積）の素因数分解としたとき，$a\,b$ は，2^{α} 回数くり返して，b の部分数列が現れる．

次に，新たにもう一つの記号を導入する．いま，$a, i\in D_m$, $A\in T_m$, $\boldsymbol{i}\in V_m$ とする．

$$a\,i\overset{V,T}{\rightarrow}A\;\boldsymbol{i}$$

である．この A に対して転置行列 A^* を定義する．もちろん，$A\in T_m$ であり，また，$A\overset{10}{\rightarrow}a\in D_m$ であるが，これと形式的に合わせるために，

$$A^*\rightarrow a^*\notin D_m$$

と表すことにする．これは次の定理を表すのに簡単になるからである．演算としては除法に近い性質をもっている．D_m は「環」であるから除法は定義されていないが，上式の定義は，これに代り得る．ただし，A^* は10進表示には変換できないので，たとえば，$a=2$ に対して，$a^*=2^*$ と表すことにする．しかし，$A^*\,\boldsymbol{i}$ の結果は10進表示可能である．ここで，簡単な演習を行おう．

［例 3•1］ $a^*=3^*$, $i\in D_3$ として，$b=3\,\boldsymbol{i}$ を求める．まず，ベクトルと行列に変換する．

$$\begin{pmatrix}b_2\\b_1\\b_0\end{pmatrix}=\overset{*}{\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}}\begin{pmatrix}i_2\\i_1\\i_0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\0&1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}i_2\\i_1\\i_0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}i_2\\i_2\oplus i_1\\i_1\oplus i_0\end{pmatrix}$$

この結果，b は，i が0～7の変化に応用じて，

$$\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$$

表 3•1 $a^*i\overset{V,T}{\rightarrow}A^*\,\boldsymbol{i}$ の演算

ただし，$a, i\in D_3$, $A\in T_3$, $\boldsymbol{i}\in V_3$

$a^*\;i$	0	1	2	3	4	5	6	7
0*	0	0	0	0	0	0	0	0
1*	0	1	2	3	4	5	6	7
2*	0	0	1	1	2	2	3	3
3*	0	1	3	2	6	7	5	4
4*	0	0	0	0	1	1	1	1
5*	0	1	2	3	5	4	7	6
6*	0	0	1	1	3	3	2	2
7*	0	1	3	2	7	6	4	5

をとる．$m=3$ の結果は **表 3・1** にある．一般に次の性質がある．

(i) a が奇数のときの a^* ：逆元 a^{-1} が存在して，ai は i の順位が入れ替ったものである．

(ii) a が偶数のときの a^* ：$i \div a$ に近い傾向になる．とくに，2の巾乗のときは，通常の除法と同じである．

〔定理 3・4〕 $f_i \overset{W}{\rightarrow} F_s$ として，

$$\text{(i)}\quad f_{ai} \overset{W}{\rightarrow} F'_s = \begin{cases} F_{(a^{-1})^* s} & a：奇数 \quad (3.12) \\ \sum_{k=0}^{N-1} F_k \, \delta_{a^* k \oplus s} & a：偶数 \quad (3.13) \end{cases}$$

$$\text{(ii)}\quad f_{a^* i} \overset{W}{\rightarrow} F'_s = \begin{cases} F_{a^{-1} s} & a：奇数 \quad (3.14) \\ \sum_{k=0}^{N-1} F_k \, \delta_{ak \oplus s} & a：偶数 \quad (3.15) \end{cases}$$

ただし，$\delta_s = \begin{cases} 1, & s=0 \\ 0, & s \neq 0 \end{cases}$

〔証明〕

(i) まず，$F'_s = \sum f_{ai'} (-1)^{s \cdot i'}$，また，$ai' = i$ とする，a が奇数のとき，a^{-1} が存在して，$i' = a^{-1} i$ となる．これを上式に代入すると，

$$F'_s = \sum_{i=0}^{a(N-1)} f_i (-1)^{s \cdot a^{-1} i} = \sum_{i=0}^{N-1} f_i (-1)^{s \cdot a^{-1} i} \quad (3.16)$$

となる．ところで，

$$s \cdot [a^{-1} i] \overset{V,T}{\rightarrow} \boldsymbol{s}^* A^{-1} \boldsymbol{i} = [(A^{-1})^* \boldsymbol{s}]^* \, \boldsymbol{i} \overset{10}{\rightarrow} [(a^{-1})^* s] \cdot i \quad (3.17)$$

従って，

$$\sum f_i (-1)^{[(a^{-1})^* s] \cdot i} = F_{(a^{-1})^* s} \quad (3.18)$$

となって，(i)の前半は証明された．aが偶数のとき，$i = ai'$ を逆ウォルシュ変換式 (2.39) に代入すると，

$$f_{ai'} = (1/N) \sum_{k=0}^{N-1} F_k (-1)^{k \cdot ai'} \quad (3.19)$$

となり，さらにこの両辺をウォルシュ変換すると，

$$F'_s = (1/N) \sum_{k=0}^{N-1} F_k \sum_{i'=0}^{N-1} (-1)^{k \cdot ai' \oplus s \cdot i'} \quad (3.20)$$

となる．ふたたび，巾乗の部分は，

表 3・2 2進相似変換のウォルシュ変換面での影響，ただし，$f \overset{W}{\rightarrow} F_s$，$f_{ai}$ および $f_{a^* i} \overset{W}{\rightarrow} F'_s$，$s$ は係数順位．

(a) a：奇数

a \ F'_s	F'_0	F'_1	F'_3	F'_3	F'_4	F'_5	F'_6	F'_7
1	F_0	F_1	F_2	F_3	F_4	F_5	F_6	F_7
3	F_0	F_1	F_3	F_2	F_7	F_6	F_4	F_5
5	F_0	F_1	F_2	F_3	F_5	F_4	F_7	F_6
7	F_0	F_1	F_3	F_2	F_6	F_7	F_5	F_4
1*	F_0	F_1	F_2	F_3	F_4	F_5	F_6	F_7
3*	F_0	F_7	F_6	F_1	F_4	F_3	F_2	F_5
5*	F_0	F_5	F_2	F_7	F_4	F_1	F_6	F_3
7*	F_0	F_3	F_6	F^5	F_4	F_7	F_2	F_1

(b) a：偶数

a \ F'_s	F'_0	F'_1	F'_2	F'_3	F'_4	F'_5	F'_6	F'_7
0,0*	$F_0+F_1+F_2+F_3+F_4+F_5+F_6+F_7$	0	0	0	0	0	0	0
2	F_0+F_1	F_2+F_3	F_4+F_5	F_6+F_7	0	0	0	0
4	$F_0+F_1+F_2+F_3$	$F_4+F_5+F_6+F_7$	0	0	0	0	0	0
6	F_0+F_1	F_2+F_3	F_6+F_7	F_4+F_5	0	0	0	0
2*	F_0+F_4	0	F_1+F_5	0	F_2+F_6	0	F_3+F_7	0
4*	$F_0+F_2+F_4+F_6$	0	0	0	$F_1+F_3+F_5+F_7$	0	0	0
6*	F_0+F_4	0	F_3+F_7	0	F_2+F_6	0	F_1+F_5	0

表 3・3 表 3・2 を交番数順に並び換えたもの
ただし，$f_i \overset{W}{\rightarrow} F_s$，$f_{ai}$ および $f_{a^*i} \overset{W}{\rightarrow} F'_s$，$s$ は交番数順位．

(a) a：奇数

a \ F'_s	F'_0	F'_1	F'_2	F'_3	F'_4	F'_5	F'_6	F'_7
1	F_0	F_1	F_2	F_3	F_4	F_5	F_6	F_7
3	F_0	F_5	F_1	F_4	F_3	F_6	F_2	F_7
5	F_0	F_6	F_5	F_3	F_4	F_2	F_1	F_7
7	F_0	F_2	F_6	F_4	F_3	F_1	F_5	F_7
1*	F_0	F_1	F_2	F_3	F_4	F_5	F_6	F_7
3*	F_0	F_1	F_3	F_2	F_7	F_6	F_4	F_5
5*	F_0	F_1	F_2	F_3	F_5	F_4	F_7	F_6
7*	F_0	F_1	F_3	F_2	F_6	F_7	F_5	F_4

(b) a：偶数

a \ F'_s	F'_0	F'_1	F'_2	F'_3	F'_4	F'_5	F'_6	F'_7
0,0*	$F_0+F_1+F_2+F_3+F_4+F_5+F_6+F_7$	0	0	0	0	0	0	0
2	F_0+F_7	0	0	F_1+F_6	F_2+F_5	0	0	F_3+F_4
4	$F_0+F_3+F_4+F_7$	0	0	0	0	0	0	$F_1+F_2+F_5+F_6$
6	F_0+F_7	0	0	F_2+F_5	F_1+F_6	0	0	F_3+F_4
2*	F_0+F_1	F_2+F_3	F_4+F_5	F_6+F_7	0	0	0	0
4*	$F_0+F_1+F_2+F_3$	$F_4+F_5+F_6+F_7$	0	0	0	0	0	0
6*	F_0+F_1	F_2+F_3	F_6+F_7	F_4+F_5	0	0	0	0

$$k\cdot(ai')\oplus s\cdot i' \overset{V,T}{\rightarrow} k^*Ai'\oplus s^*\ i' \qquad (3.21)$$

$$=(A^*k\oplus s)^*i' \overset{10}{\rightarrow} (a^*k\oplus s)\cdot i' \qquad (3.22)$$

となる．定理 2・3 の (iii) より，

$$\sum_{i'}(-1)^{(a^*_{k\oplus s})\cdot i'}=N\,\delta_{a^*_{k\oplus s}} \qquad (3.23)$$

となって (i) は証明された．(ii) は (i) の両式の a に a^* を代入して，

$$(a^*)^{-1}=(a^{-1})^*$$

を考慮して証明される． ［証明終］

表 2・4，表 3・1 を参照すると，$m=3$ の場合は **表 3・2**，および，**表 3・3** となる．

ここで，フーリエ変換の場合を示すと，$f_i \overset{F}{\rightarrow} F_s$ として，

$$f_{ai} \overset{F}{\rightarrow} (1/a)F_{s/a}$$

である[48]．定理 3・4 はこれと比較すると複雑な形式となっている．法として既約多項式を選ぶならば，D_m の積の逆元も存在して，奇偶の区別はなくなり，定理 3・4 はもう少し簡単な表現になる．根本的な問題は，この D_m の積が 2 進加群ほど，幾何的・情報論的な意味がはっきりしないことである．ただし，2^{α} および $(2^{\alpha})^*$，($\alpha=0,1,2,3,\cdots$) の場合は，mod N を考慮すれば通常の算法(乗法または除法)と同じ性質を持つ．

3・3 ポアソンの和[36][44]

フーリエ変換において，「ポアソンの和の公式」が知られている[49]．ウォルシュ変換においても，これに対応するのが，次の定理 3・5 および 定理 3・6 である．なお，$Tk\cdot s=(Tk)\cdot s=s\cdot(Tk)=s\cdot Tk$ とする．

〔定理 3・5〕 標本化関数

$i,k,s\in D_m$，$T=2^i$，($i=0,1,2,\cdots m$)，$N=2^m$，($m=0,1,2,\cdots$)，

$$\delta_s=\begin{cases}1, & s=0 \text{ として,}\\ 0, & s\neq 0\end{cases}$$

(i) $$T\sum_{k=0}^{N/T-1}\delta_{i\oplus Tk}=\sum_{k=0}^{T-1}(-1)^{k\cdot i} \qquad (3.24)$$

(ii) $\sum_{k=0}^{N/T-1}(-1)^{Tk\cdot s}=N/T\sum_{k=0}^{T-1}\delta_{s\oplus k}$ (3.25)

［証明］ 標本化関数は，

$$s(i)=\sum_{k=0}^{N/T-1}\delta_{i\oplus Tk} \tag{3.26}$$

と表わされる．これをウォルシュ変換すると，

$$S(s)=\sum_{k=0}^{N/T-1}(-1)^{Tk\cdot s} \tag{3.27}$$

となる．巾乗の部分は，

$$Tk\cdot s \overset{V,T}{\rightarrow} (Tk)^{*}\boldsymbol{s}=\boldsymbol{k}^{*}T^{*}\boldsymbol{s} \overset{10}{\rightarrow} k\cdot(T^{*}s) \tag{3.28}$$

となること，および，定理 2•3 の (iii) および和分範囲が $k=0\sim N/T-1$ であのことを考慮すると，

$$S(s)=\sum_{k=0}^{N/T-1}(-1)^{k\cdot(T^{*}s)}=N/T\ \delta_{T^{*}s} \tag{3.29}$$

となる．再び，上式の両辺の逆変換をとると，

$$N\,s(i)=N/T\sum_{s=0}^{N-1}\delta_{T^{*}s}(-1)^{i\cdot s} \tag{3.30}$$

となるから．$T^{*}s=0$ となる場合のみ $(-1)^{i\cdot s}$ が残り，この条件を満たす s を調べればよい．表 3•1 をみると，T が偶数の場合，T^{*} は s に対して除数のようにふるまう．$T=2^{m}$ であるから，

$$T^{*}s\rightarrow s/T\rightarrow s\,2^{-m} \tag{3.31}$$

となる．これは，s を右に m ビットだけシフトすることを表しており，上式が 0 となるのは，

$$s=0\sim 2^{m}-1=0\sim T-1 \tag{3.32}$$

である．従って，(3.30) は

$$S(i)=1/T\sum_{s=0}^{T-1}(-1)^{i\cdot s}$$

となる．さらに，(3.26) と，$s=k$ と置き換えることにより，(i) は証明された．(ii) は (i) の両辺をウォルシュ変換することにより得られる．［証明終］

表 3•4 を参照．なお，(ii) の右辺に，

$$\delta_{s\oplus k}=(1/N)\sum_{i=0}^{N-1}(-1)^{i\cdot(s\oplus k)} \tag{3.33}$$

を代入して変形すると，次の系が得られる．

［系 3•1］ 変数 T，i の分離

$$T\sum_{i=0}^{N/T-1}(-1)^{Ti\cdot s}=\sum_{i=0}^{N-1}(-1)^{i\cdot s}\left\{\sum_{k=0}^{T-1}(-1)^{k\cdot i}\right\} \tag{3.34}$$

［定理 3•6］ ポアソンの和

$f_i \overset{W}{\rightarrow} F_s$，$s$ は係数順位，$T=2^{l}$，$(l=0,1,2,\cdots,m)$

(i) $T\sum_{k=0}^{N/T-1}f_{Tk}(-1)^{s\cdot Tk}=\sum_{k=0}^{T-1}F_{k\oplus s}$ (3.35)

(ii) $\sum_{k=0}^{N/T-1}F_{Tk}(-1)^{s\cdot Tk}=N/T\sum_{k=0}^{T-1}f_{k\oplus s}$ (3.36)

(iii) $\sum_{k=0}^{N/T-1}F_{Tk\oplus i}=N/T\sum_{k=0}^{T-1}f_{k}(-1)^{i\cdot k}$ (3.37)

(iv) $\sum_{k=0}^{N/T-1}f_{Tk\oplus i}=\sum_{k=0}^{T-1}F_{k}(-1)^{i\cdot k}$ (3.38)

［証明］ 定理 3•5 の(i)の両辺に f_i あるいは F_i を掛けると，

$$\sum_{k=0}^{N/T-1}f_i\ \delta_{i\oplus Tk}=\sum_{k=0}^{T-1}f_i(-1)^{k\cdot i} \tag{3.39}$$

$$\sum_{k=0}^{N/T-1}F_i\ \delta_{i\oplus Tk}=\sum_{k=0}^{T-1}F_i(-1)^{k\cdot i} \tag{3.40}$$

となり，和分核を $(-1)^{i\cdot s}$ として，これらの式の両辺をウォルシュ変換すると，それぞれ(i)，(ii) となる．同様に 定理 3•5 の (ii) の両辺に f_s, F_s を掛けてウォルシュ変換すると，(iii)，(iv) が得られる．［証明終］

定理 3•5 の (i) を拡張したのが，定理 3•6 の (iii)，(iv) であり，定理 3•5 の(ii) を拡張したのが，定理 3•6 の (i)，(ii) となっている．**表 3•5** を参照．また，この定理の (i)，(ii) に対して，$s=0$，あるいは，同じことであるが，(iii)，(iv)に対して，$i=0$ とおくと，次のような簡単な関係式が得られる．**表 3•6** を参照．

［系 3•2］

(i) $T\sum_{k=0}^{N/T-1}f_{Tk}=\sum_{k=0}^{T-1}F_k$ (3.41)

(ii) $\sum_{k=0}^{N/T-1}F_{Tk}=N/T\sum_{k=0}^{T-1}f_k$ (3.42)

また，表3•5 の(iii)をみると，次の性質のあることがわかる．

［性質］ 次の関数 G_i は周期 T を持つ．ただし，$T=2^{l}$，$(l=0,1,2,\cdots,m)$ として，

$$G_i=\sum F_{Tk\oplus i} \tag{3.43}$$

表 3・4 標本化関数に関するポアソン和（$N=8$, $T=1,2,4,8$），ただし，$f_i \overset{W}{\rightarrow} F_s$, i, s, $k \in D_3$.

T	変数 i (i) $T\sum_{k=0}^{8/T-1}\delta_{i\oplus Tk}=\sum_{k=0}^{T-1}(-1)^{k\cdot i}$ $\{=Ts(i)\}$								
1	$\delta_i+\delta_{i\oplus 1}+\delta_{i\oplus 2}+\delta_{i\oplus 3}+\delta_{i\oplus 4}+\delta_{i\oplus 5}+\delta_{i\oplus 6}+\delta_{i\oplus 7}$	$(-1)^{0\cdot i}$	1	1	1	1	1	1	1	1
2	$2(\delta_i+\delta_{i\oplus 2}+\delta_{i\oplus 4}+\delta_{i\oplus 6})$	$(-1)^{0\cdot i}+(-1)^{1\cdot i}$	2	0	2	0	2	0	2	0
4	$4(\delta_i+\delta_{i\oplus 4})$	$(-1)^{0\cdot i}+(-1)^{1\cdot i}+(-1)^{2\cdot i}+(-1)^{3\cdot i}$	4	0	0	0	4	0	0	0
8	$8\ \delta_i$	$(-1)^{0\cdot i}+(-1)^{1\cdot i}+(-1)^{2\cdot i}+(-1)^{3\cdot i}$ $+(-1)^{4\cdot i}+(-1)^{5\cdot i}+(-1)^{6\cdot i}+(-1)^{7\cdot i}$	8	0	0	0	0	0	0	0
T	変数 s (ii) $\sum_{k=0}^{8/T-1}(-1)^{k\cdot Ts}=8/T\sum_{k=0}^{T-1}\delta_{s\oplus k}$ $\{=8/T\ \rho(s)\}$								
1	$(-1)^{0\cdot s}+(-1)^{1\cdot s}+(-1)^{2\cdot s}+(-1)^{3\cdot s}$ $+(-1)^{4\cdot s}+(-1)^{5\cdot s}+(-1)^{6\cdot s}+(-1)^{7\cdot s}$	$8\ \delta_i$	8	0	0	0	0	0	0	0
2	$(-1)^{0\cdot s}+(-1)^{2\cdot s}+(-1)^{4\cdot s}+(-1)^{6\cdot s}$	$4(\delta_s+\delta_{s\oplus 1})$	4	4	0	0	0	0	0	0
4	$(-1)^{0\cdot s}+(-1)^{4\cdot s}$	$2(\delta_s+\delta_{t\oplus 1}+\delta_{s\oplus 2}+\delta_{s\oplus 3})$	2	2	2	2	0	0	0	0
8	$(-1)^{0\cdot s}$	$\delta_s+\delta_{s\oplus 1}+\delta_{s\oplus 2}+\delta_{s\oplus 3}+\delta_{s\oplus 4}+\delta_{s\oplus 5}+\delta_{s\oplus 6}+\delta_{s\oplus 7}$	1	1	1	1	1	1	1	1

表 3・5 ウォルシュ変換に関するポアソンの和($N=8$, $T=1,2,4,8$. F_s および s は 係数順位である). ただし, $f_i \to F_s$, $i,s,k \in D_3$. 左から第2欄を入力として(k を変数として書きかえてある), (i) ではウォルシュ変換したものが, (ii) では逆ウォルシュ変換したものが第3欄に示されている. また, 第3欄を入力として(k を変数として書きかえてある), (iii) では逆ウォルシュ変換されたものが, (iv) ではウォルシュ変換されたものが第2欄に示されている.

T	変数 s	(i) $T\sum_{k=0}^{8/T-1} f_{Tk}(-1)^{s\cdot Tk} = \sum_{k=0}^{T-1} F_{k\oplus s}$							
1	$f_0\ f_1\ f_2\ f_3\ f_4\ f_5\ f_6\ f_7$	F_0	F_1	F_2	F_3	F_4	F_5	F_6	F_7
2	$2\{f_0\ 0\ f_2\ 0\ f_4\ 0\ f_6\ 0\}$	F_0+F_1	F_0+F_1	F_2+F_3	F_2+F_3	F_4+F_5	F_4+F_5	F_6+F_7	F_6+F_7
4	$4\{f_0\ 0\ 0\ 0\ f_4\ 0\ 0\ 0\}$	F_0+F_1 $+F_2+F_3$	F_0+F_1 $+F_2+F_3$	F_0+F_1 $+F_2+F_3$	F_0+F_1 $+F_2+F_3$	F_4+F_5 $+F_6+F_7$	F_4+F_5 $+F_6+F_7$	F_4+F_5 $+F_6+F_7$	F_4+F_5 $+F_6+F_7$
8	$8\{f_0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\}$	F_0+F_1 $+F_2+F_3$ $+F_4+F_5$ $+F_6+F_7$	F_0+F_1 $+F_2+F_3$ $+F_4+F_5$ $+F_6+F_7$	F_0+F_1 $+F_2+F_3$ $+F_4+F_5$ $+F_6+F_7$	F_0+F_1 $+F_2+F_3$ $+F_4+F_5$ $+F_6+F_7$	F_0+F_1 $+F_2+F_3$ $+F_4+F_5$ $+F_6+F_7$	F_0+F_1 $+F_2+F_3$ $+F_4+F_5$ $+F_6+F_7$	F_0+F_1 $+F_2+F_3$ $+F_4+F_5$ $+F_6+F_7$	F_0+F_1 $+F_2+F_3$ $+F_4+F_5$ $+F_6+F_7$
T	変数 s	(ii) $\sum_{k=0}^{8/T-1} F_{Tk}(-1)^{s\cdot Tk} = 8/T\sum_{k=0}^{T-1} f_{k\oplus s}$							
1	$F_0\ F_1\ F_2\ F_3\ F_4\ F_5\ F_6\ F_7$	$8f_0$	$8f_1$	$8f_2$	$8f_3$	$8f_4$	$8f_5$	$8f_6$	$8f_7$
2	$F_0\ 0\ F_2\ 0\ F_4\ 0\ F_6\ 0$	$4(f_0+f_1)$	$4(f_0+f_1)$	$4(f_2+f_3)$	$4(f_2+f_3)$	$4(f_4+f_5)$	$4(f_4+f_5)$	$4(f_6+f_7)$	$4(f_6+f_7)$
4	$F_0\ 0\ 0\ 0\ F_4\ 0\ 0\ 0$	$2(f_0+f_1$ $+f_2+f_3)$	$2(f_0+f_1$ $+f_2+f_3)$	$2(f_0+f_1$ $+f_2+f_3)$	$2(f_0+f_1$ $+f_2+f_3)$	$2(f_4+f_5$ $+f_6+f_7)$	$2(f_4+f_5$ $+f_6+f_7)$	$2(f_4+f_5$ $+f_6+f_7)$	$2(f_4+f_5$ $+f_6+f_7)$
8	$F_0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0$	f_0+f_1 $+f_2+f_3$ $+f_4+f_5$ $+f_6+f_7$	f_0+f_1 $+f_2+f_3$ $+f_4+f_5$ $+f_6+f_7$	f_0+f_1 $+f_2+f_3$ $+f_4+f_5$ $+f_6+f_7$	f_0+f_1 $+f_2+f_3$ $+f_4+f_5$ $+f_6+f_7$	f_0+f_1 $+f_2+f_3$ $+f_4+f_5$ $+f_6+f_7$	f_0+f_1 $+f_2+f_3$ $+f_4+f_5$ $+f_6+f_7$	f_0+f_1 $+f_2+f_3$ $+f_4+f_5$ $+f_6+f_7$	f_0+f_1 $+f_2+f_3$ $+f_4+f_5$ $+f_6+f_7$

（前頁に続く）

T	変数 i	(iii) $\sum_{k=0}^{8/T-1} F_{Tk\oplus i} = 8/T \sum_{k=0}^{T-1} f_k(-1)^{k\cdot i}$							
1	$F_0+F_1+F_2+F_3+F_4+F_5+F_6+F_7$	$F_0+F_1+F_2+F_3+F_4+F_5+F_6+F_7$	$F_0+F_1+F_2+F_3+F_4+F_5+F_6+F_7$	$F_0+F_1+F_2+F_3+F_4+F_5+F_6+F_7$	$F_0+F_1+F_2+F_3+F_4+F_5+F_6+F_7$	$F_0+F_1+F_2+F_3+F_4+F_5+F_6+F_7$	$F_0+F_1+F_2+F_3+F_4+F_5+F_6+F_7$	$F_0+F_1+F_2+F_3+F_4+F_5+F_6+F_7$	$8\{f_0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\}$
2	$F_0+F_2+F_4+F_6$	$F_1+F_3+F_5+F_7$	$F_0+F_2+F_4+F_6$	$F_1+F_3+F_5+F_7$	$F_0+F_2+F_4+F_6$	$F_1+F_3+F_5+F_7$	$F_0+F_2+F_4+F_6$	$F_1+F_3+F_5+F_7$	$4\{f_0\ f_1\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\}$
4	F_0+F_4	F_1+F_5	F_2+F_6	F_3+F_7	F_0+F_4	F_1+F_5	F_2+F_6	F_3+F_7	$2\{f_0\ f_1\ f_2\ f_3\ 0\ 0\ 0\ 0\}$
8	F_0	F_1	F_2	F_3	F_4	F_5	F_6	F_7	$f_0\ f_1\ f_2\ f_3\ f_4\ f_5\ f_6\ f_7$

T	変数 i	(iv) $T\sum_{k=0}^{8/T-1} f_{Tk\oplus i} = \sum_{k=0}^{T-1} F_k(-1)^{k\cdot i}$							
1	$f_0+f_1+f_2+f_3+f_4+f_5+f_6+f_7$	$f_0+f_1+f_2+f_3+f_4+f_5+f_6+f_7$	$f_0+f_1+f_2+f_3+f_4+f_5+f_6+f_7$	$f_0+f_1+f_2+f_3+f_4+f_5+f_6+f_7$	$f_0+f_1+f_2+f_3+f_4+f_5+f_6+f_7$	$f_0+f_1+f_2+f_3+f_4+f_5+f_6+f_7$	$f_0+f_1+f_2+f_3+f_4+f_5+f_6+f_7$	$f_0+f_1+f_2+f_3+f_4+f_5+f_6+f_7$	$F_0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0$
2	$2(f_0+f_2+f_4+f_6)$	$2(f_1+f_3+f_5+f_7)$	$2(f_0+f_2+f_4+f_6)$	$2(f_1+f_3+f_5+f_7)$	$2(f_0+f_2+f_4+f_6)$	$2(f_1+f_3+f_5+f_7)$	$2(f_0+f_2+f_4+f_6)$	$2(f_1+f_3+f_5+f_7)$	$F_0\ F_1\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0$
4	$4(f_0+f_4)$	$4(f_1+4_5)$	$4(f_2+f_6)$	$4(f_3+f_7)$	$4(f_0+f_4)$	$4(f_1+f_5)$	$4(f_2+f_6)$	$4(f_3+f_7)$	$F_0\ F_1\ F_2\ F_3\ 0\ 0\ 0\ 0$
8	$8f_0$	$8f_1$	$8f_2$	$8f_3$	$8f_4$	$8f_5$	$8f_6$	$8f_7$	$F_0\ F_1\ F_2\ F_3\ F_4\ F_5\ F_6\ F_7$

［証明］ $G_{i+T}=G_{i\oplus T}=\sum F_{Tk\oplus T\oplus i}$

$=\sum F_{T(k\oplus 1)\oplus i}$

ここで，$k\oplus 1\to k$ とすると，

$G_{i+T}=G_i$ ［証明終］

3·4 ウォルシュ変換における標本化定理

ポアソンの和の公式を用いて標本化定理について調べてみよう．標本化周期（間隔）を $T=2^i$，$(l=0\sim m-1)$，および，δ 関数の場合，$i+Tk=i\oplus Tk$ となることに注意すると，標本化関数 $s(i)$ は定理 3·5 の (i) から次のように表すことができる．

$$\text{標本化関数}：s(i)=\sum_{k=0}^{N/T-1}\delta_{i\oplus Tk} \tag{3.44}$$

データ関数を f_i とすると，この標本値関数 f'_i は，

$$f'_i=f_i\cdot s(i)$$

$$=f_i\sum_{k=0}^{N/T-1}\delta_{i\oplus Tk} \tag{3.45}$$

である．和分（または積分）核を $(-1)^{i\cdot s}$ として，この両辺の ウォルシュ 変換をとる．これは 定理 3·5 の (i) から 定理 3·6 の (i) を得るのと同じ手続きを経ていることになっている．この定理の表 3·5 は係数順位(係数表現)になっているから，交番数表現に書き直すと，**表 3·7** の (a) となる，これをみると標本周期とスペクトルとは簡単な関係にはなっていない．そこで，ウォルシュ・スペクトルのある特定以上の成分を 0 としたとき，入力での標本化法をみると，この様子は 定理 3·6 の (ii) すなち，表 3·5 の (ii) をみると判りやすい．これを交番数表現に書き直したものが，表 3·7 の (b) であるこれより，周期 T を定めた期間 $\{kT\sim$

表 3·6 $N=8.\ T=1,2,4,8.$

(a) 係数順位によるもの

T	(i) $T\sum_{k=0}^{8/T-1}f_{Tk}=\sum_{k=0}^{T-1}F_k$	(ii) $\sum_{k=0}^{8/T-1}F_{Tk}=8/T\sum_{k=0}^{T-1}f_k$
1	$f_0+f_1+f_2+f_3$ $+f_4+f_5+f_6+f_7=F_0$	$F_0+F_1+F_2+F_3$ $+F_4+F_5+F_6+F_7=8f_0$
2	$2(f_0+f_2+f_4+f_6)=F_0+F_1$	$F_0+F_2+F_4+F_6=4(f_0+f_1)$
4	$4(f_0+f_4)=F_0+F_1+F_2+F_3$	$F_0+F_4=2(f_0+f_1+f_2+f_3)$
8	$8f_0=F_0+F_1+F_2+F_3$ $+F_4+F_5+F_6+F_7$	$F_0=f_0+f_1+f_2+f_3$ $+f_4+f_5+f_6+f_7$

(b) 交番数順位によるもの

1	$f_0+f_1+f_2+f_3$ $+f_4+f_5+f_6+f_7=F_0$	$F_0+F_1+F_2+F_3$ $+F_4+F_5+F_6+F_7=8f_0$
2	$2(f_0+f_2+f_4+f_6)=F_0+F_7$	$F_0+F_1+F_2+F_3=4(f_0+f_1)$
4	$4(f_0+f_4)=F_0+F_3+F_4+F_7$	$F_0+F_1=2(f_0+f_1+f_2+f_3)$
8	$8f_0=F_0+F_1+F_2+F_3$ $+F_4+F_5+F_6+F_7$	$F_0=f_0+f_1+f_2+f_3$ $+f_4+f_5+f_6+f_7$

$k(T+1)-1\}$ の標本平均を，この区間のデータとして入力する方法となっていることがわかる．すなわち，もとの標本値を，

$f_0, f_1, \cdots, f_{kT}, \cdots, f_{N-1}, (k=0 \sim m-1)$

として，$kT \sim (k+1)T-1$ の区間の標本の平均値：

$$g_{kT}=\{f_{kT}+f_{kT+1}+\cdots+f_{kT+T-1}\}/T \qquad (3.46)$$

を，

$$g_{kT},\ 0,\ 0, \cdots\cdots,\ 0$$

ではなく，

$$g_{kT},\ g_{kT},\ g_{kT},\ \cdots\cdots,\ g_{kT}$$

として入力する方法である．

〔定理 3・7〕 平均値入力のウォルシュ変換

ウォルシュ・スペクトルの N/T 以上の交番数成分をもたない関数は，もとの入力関数の区間 T の標本値を，その平均値に置き換えたものに等しい．すなわち，

$f_i \overset{W}{\underset{l}{\rightarrow}} F_{s'}$，($s'$：交番数) として，標本化周期 $T=2^l$ $(l=0 \sim m)$ とする．標本(時間)間隔

$$kT \sim (k+1)T-1,\ (k=0 \sim N/T-1)$$

の平均値を，この区間の入力データとしたウォルシュ・スペクトル $F'_{s'}$ は，

$$F'_{s'}=\begin{cases} F_{s'}, & s'=0 \sim N/T-1 \\ 0, & s'=N/T \sim N-1 \end{cases} \qquad (3.47)$$

である．

［証明］ 定理 3•6 の (ii) はすでに証明済みであるから，左辺の式の F_{Tk} を交番数に並び換えると，定理が得られることを示せばよい．そこで，$k=0 \sim N/T-1$ のときの F_{Tk} の交番数順位を調べる．なお，k の範囲を $0 \sim N-1$ としてもよいが，mod N のために重複した値を生ずる．定理 2•1 の交番数順位への変換行列 A_m，($m=0,1,2,\cdots$) を使うと，s' を交番数として，

$$\boldsymbol{s'}=A_m T\boldsymbol{k} \qquad (3.48)$$

となる．$T=2^l$，$(l=0 \sim m)$ であるから．$\boldsymbol{k'}=T\boldsymbol{k}$ は $\boldsymbol{k}$ を高位の桁に l ビットシフトすることになる．s', k, T の 2 進表示をそれぞれ．

$$s'_{m-1} \cdots s'_j \cdots s'_1\ s'_0,$$
$$k_{m-1} \cdots k_j \cdots k_1\ k_0,$$
$$0 \cdots 0\ t_l\ 0 \cdots 0,$$

ただし，$t_l=1$，$(l=0 \sim m)$

として，式 (3.48) を行列表示にすると，

$$\underset{\boldsymbol{s'}}{\begin{pmatrix} s'_{m-1} \\ \cdot \\ \cdot \\ s'_j \\ \cdot \\ \cdot \\ s'_1 \\ s'_0 \end{pmatrix}} = \underset{A_m}{\begin{pmatrix} 1 & & & & & & & \\ & 1.1 & & & & & & \\ 0 & & 1..1 & & & & & \\ & & & \cdots\cdots & & & & \\ & & & 1\cdots\cdot 1 & & & & \\ & & & 1\cdots\cdot\cdot 1 & & & & \\ & & & 11\cdots\cdot 1 & & & & \\ & & & 111\cdots\cdot 1 & & & & \end{pmatrix}} \underset{\boldsymbol{k'}}{\begin{pmatrix} k_{m-l-1} \\ \cdot \\ k_{j-1} \\ \cdot \\ k_0 \\ 0 \\ \cdot \\ 0 \end{pmatrix}} \begin{matrix} \left.\vphantom{\begin{matrix}a\\b\\c\\d\\e\end{matrix}}\right\} m-l \text{ビット} \\ \\ \left.\vphantom{\begin{matrix}a\\b\\c\end{matrix}}\right\} l \text{ビット} \end{matrix} \qquad (3.49)$$

となる．$k'_0 \sim k'_{l-1}$ は 0 であるから，上の行列の計算は，行列 A_m の $1 \sim m-l$ 列のみが計算に関与する．従って，これは $m-1$ 次の行列計算と等価となる(ただし，上記の $j=0 \sim m-l-1$ に対してのみ)．すなわち，

$$\underset{\boldsymbol{s'}}{\begin{pmatrix} s'_{m-l-1} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ s'_0 \end{pmatrix}} = \underset{A_{m-l}}{\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 11 & & \\ 0 & & 1..1 & \\ & & \cdots\cdots & \\ & & \cdots\cdots & \\ & & 111\cdots\cdot 1 & \end{pmatrix}} \underset{\boldsymbol{k'}}{\begin{pmatrix} k_{m-l-1} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ k_0 \end{pmatrix}} \qquad (3.50)$$

となり，これは，m次の行列係数順位から交番順位への変換式の代りに，$m-l$ 次のそれへの変換式である．従って，s' の値域は，

$$0 \sim 2^{m-l}-1=0 \sim N/T-1$$

となり，F_{Tk} の交番数は，この範囲に集中している．これ以上の交番数は 0 である． ［証明終］

次に，この 定理 3•7 を “たたみ込み（コンボリューション）” による立場でながめてみよう．まず，定理 3•5 の (ii) の関数を改めてパルス列関数と名付けて次のように記す．この関数は，連続関数の場合の幅 T を持つ単一矩形波関数あるいはパルス（デルタ）関数と呼ばれているものに対応する．

$T=2^l$, $(l=0 \sim m)$ として，

$$\text{パルス列関数}：\rho(i)=\sum_{k=0}^{T-1}\delta_{k \oplus i} \qquad (3.51)$$

表 3・7 表 3・5 の (i) を (a) に，表 3・5 の (ii) を (b) に交番数表現に直したもの．ただし，$f_i \xrightarrow{W} F_{s'}$，$s'$ は交番数．
左から第2欄を入力として，(a) ではウォルシュ変換されたものが，(b) では逆ウォルシュ変換されたものが第3欄に示されている．

T	(a) 標本値 (f_i)	ウォルシュ・スペクトル ($F_{s'}$)
1	$f_0\ f_1\ f_2\ f_3\ f_4\ f_5\ f_6\ f_7$	$F_0\quad F_1\quad F_2\quad F_3\quad F_4\quad F_5\quad F_6\quad F_7$
2	$f_0\ 0\ f_2\ 0\ f_4\ 0\ f_6\ 0$	$(F_0+F_7)/2\quad (F_1+F_6)/2\quad (F_2+F_5)/2\quad (F_3+F_4)/2\quad (F_3+F_4)/2\quad (F_2+F_5)/2\quad (F_1+F_6)/2\quad (F_0+F_7)/2$
4	$f_0\ 0\ 0\ 0\ f_4\ 0\ 0\ 0$	$(F_0+F_3+F_4+F_7)/4\quad (F_1+F_2+F_5+F_6)/4\quad (F_1+F_2+F_5+F_6)/4\quad (F_0+F_3+F_4+F_7)/4\quad (F_0+F_3+F_4+F_7)/4\quad (F_1+F_2+F_5+F_6)/4\quad (F_1+F_2+F_5+F_6)/4\quad (F_0+F_3+F_4+F_7)/4$
8	$f_0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0$	$(F_0+F_1+F_2+F_3+F_4+F_5+F_6+F_7)/8\quad (F_0+F_1+F_2+F_3+F_4+F_5+F_6+F_7)/8\quad (F_0+F_1+F_2+F_3+F_4+F_5+F_6+F_7)/8\quad (F_0+F_1+F_2+F_3+F_4+F_5+F_6+F_7)/8\quad (F_0+F_1+F_2+F_3+F_4+F_5+F_6+F_7)/8\quad (F_0+F_1+F_2+F_3+F_4+F_5+F_6+F_7)/8\quad (F_0+F_1+F_2+F_3+F_4+F_5+F_6+F_7)/8\quad (F_0+F_1+F_2+F_3+F_4+F_5+F_6+F_7)/8$

T	(b) ウォルシュ・スペクトル ($F_{s'}$)	標本値 (f_i)
1	$\{F_0\ F_1\ F_2\ F_3\ F_4\ F_5\ F_6\ F_7\}/8$	$f_0\quad f_1\quad f_2\quad f_3\quad f_4\quad f_5\quad f_6\quad f_7$
2	$\{F_0\ F_1\ F_2\ F_3\ 0\ 0\ 0\ 0\}/8$	$(f_0+f_1)/2\quad (f_0+f_1)/2\quad (f_2+f_3)/2\quad (f_2+f_3)/2\quad (f_4+f_5)/2\quad (f_4+f_5)/2\quad (f_6+f_7)/2\quad (f_6+f_7)/2$
4	$\{F_0\ F_1\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\}/8$	$(f_0+f_1+f_2+f_3)/4\quad (f_0+f_1+f_2+f_3)/4\quad (f_0+f_1+f_2+f_3)/4\quad (f_0+f_1+f_2+f_3)/4\quad (f_4+f_5+f_6+f_7)/4\quad (f_4+f_5+f_6+f_7)/4\quad (f_4+f_5+f_6+f_7)/4\quad (f_4+f_5+f_6+f_7)/4$
8	$\{F_0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\}/8$	$(f_0+f_1+f_2+f_3+f_4+f_5+f_6+f_7)/8\quad (f_0+f_1+f_2+f_3+f_4+f_5+f_6+f_7)/8\quad (f_0+f_1+f_2+f_3+f_4+f_5+f_6+f_7)/8\quad (f_0+f_1+f_2+f_3+f_4+f_5+f_6+f_7)/8\quad (f_0+f_1+f_2+f_3+f_4+f_5+f_6+f_7)/8\quad (f_0+f_1+f_2+f_3+f_4+f_5+f_6+f_7)/8\quad (f_0+f_1+f_2+f_3+f_4+f_5+f_6+f_7)/8\quad (f_0+f_1+f_2+f_3+f_4+f_5+f_6+f_7)/8$

$$\text{ただし, } \delta_i=\begin{cases}1, & i=0\\ 0. & i\neq 0\end{cases}$$

となる．さらに，$f_i \overset{W}{\rightarrow} F_s$（$s'$：交番数）とすると，標本値関数をウォルシュ変換した関数 $F'_{s'}$ は，もとのウォルシュ・スペクトル F' と ρ との積として表すことができる．すなわち（以下にでてくる大きなスペースではさまれた記号'・'は通常の意味での積である），

$$F'_{s'}=F_{s'}\cdot\rho(s')/N \qquad (3.52)$$

となる．これを係数順位に直すと，定理 3•6 の (ii) に等価になることはすでに述べた．一般にウォルシュ面での積は，入力面で2進 (dyadic) たたみ込みになっていることは定理 3•3 で述べたが，具体的に定理 3•6 の (ii) が平均値標本とパルス列関数との'たたみ込み'になっていることを（Ⅰ），（Ⅱ）によって示そう．

（Ⅰ） 平均値関数

関数 f_i,$(i=0\sim N-1)$があって，これより，区間 T の平均値を入力とする「平滑化された関数 g_i」は一般に次のように表される．すなわち，

$T=2^l$，$(l=0\sim m)$ として，

$$g_i=1/T\sum_{t=i}^{i+T-1} f_t=1/T\sum_{t=0}^{T-1} f_{t+i} \qquad (3.53)$$

である．ところが，上記の $t+i$ を $t\oplus i$ に置き換えると，g_i は次の性質を持つ．

［性質］ $T=2^l$，$(l=0\sim m)$ として，

$$\text{平均関数：}g_i=1/T\sum_{t=0}^{T-1} f_{t\oplus i} \qquad (3.54)$$

は，ここで，$k=0\sim m-1$ として，区間：

$$kT\leqq i\leqq (k+l)T-1 \qquad (3.55)$$

において一定の値をとる．

［証明］ ある区間での i のとり得る最大値と最小値の差は，

$$\{(k+1)T-1\}-kT=T-1$$

である．$T=2^l$ から，この2進表示は，

$$0,\ 0,\ \cdots,\ 0,\ 0,\ t_{l-1},\ \overbrace{0,\ \cdots,\ 0}^{l} \qquad (3.56)$$

となり，$T-1$ は，l ビットの大きさである．ところで，

$$0\leqq t\leqq T-1$$

であるから，この t も最大 l ビットしか変動しない．これと，$\oplus$ は桁上りなしの演算であることを考えると，$t\oplus i$ もまた，l ビット以内の変動しか行わないから，$i\oplus t$ と i は同じ範囲をとる．従って，

$$kT\leqq i\oplus t\leqq (k+1)T-1 \qquad (3.57)$$

となって，$\sum f_{t\oplus i}$ は，(3.55) の条件のもとでは，$\sum$ 内の f_i の和分順序が変化しただけのものとなっている．従って，$i=kT$, $k=0\sim m-l$, として，

$$g_i=1/T\sum_{t=0}^{T-1} f_{t\oplus i}=1/T\sum_{l=0}^{T-1} f_{t\oplus Tk} \qquad (3.58)$$

である． ［証明終］

実際，この性質より，定理 3•6 の (ii) の右辺は区間 T の平均値をとりながら，$s=kT$,$(k=0\sim m-1)$ごとに階段状に変化していることがわかる．表 3•5 の (ii) を参照．(3.58) の両辺をウォルシュ変換すると，

$$G_s=\sum_{t=0}^{T-1} F_s(-1)^{s\cdot t}/T$$

$$=F_s\sum_{t=0}^{T-1}(-1)^{s\cdot t}/T \qquad (3.59)$$

となり，さらに定理 3•5 の (i) より，

$$G_s=F_s\sum_{n=0}^{N/T-1}\delta_{s\oplus Tn} \qquad (3.60)$$

となる．ここで，g_i をウォルシュ変換した G_s と，次の「たたみこみ」関数のウォルシュ変換したものは等しいことを示す．

（Ⅱ） 標本値関数とパルス関数とのたたみ込み

周期 T の (3.44) の標本化関数 $s(i)$ および (3.54) の平均値関数 g_i から，

$$\text{標本値入力関数：}S(i)=g_i\cdot s(i)$$

$$=g_i\sum_{k=0}^{N/T-1}\delta_{i\oplus Tk} \qquad (3.61)$$

となる．この $S(i)$ と (3.51) のパルス列関数との'たたみ込み'関数 h が，また，g_i に等しいことを示せばよい．すなわち，

$$h(i)=\sum_{n=0}^{N-1} S(n)\rho(n\oplus i) \qquad (3.62)$$

に (3.51)，(3.61) を代入すると，

$$h(i)=\sum_{n=0}^{N-1}\{g_n\sum_{k=0}^{N/T-1}\delta_{n\oplus Tk}\}\{\sum_{l=0}^{T-1}\delta_{l\oplus n\oplus i}\} \qquad (3.63)$$

となり，さらに，

$$h(i)=\sum_{k=0}^{N/T-1}\sum_{l=0}^{T-1}\sum_{n=0}^{N-1} g_n\ \delta_{n\oplus Tk}\ \delta_{l\oplus n\oplus i}$$

$$=\sum_{k=0}^{N/T-1}\sum_{l=0}^{T-1} g_{Tk}\ \delta_{l\oplus i\oplus Tk} \qquad (3.64)$$

となる．和分核を $(-1)^{i\cdot s}$ として，両辺のウォルシュ変換をとると，$h(i)\overset{W}{\rightarrow}H(s)$ として，

$$H(s)=\sum_{k=0}^{N/T-1}\sum_{l=0}^{T-1} g_{Tk}\sum_{i=0}^{N-1}\delta_{l\oplus i\oplus Tk}(-1)^{i\cdot s}$$

$$=\sum_{k=0}^{N/T-1}\sum_{l=0}^{T-1} g_{Tk}(-1)^{(l\oplus Tk)\cdot s}$$

$$=\sum_{l=0}^{T-1}(-1)^{l\cdot s}\cdot\sum_{k=0}^{N/T-1} g_{Tk}(-1)^{Tk\cdot s} \qquad (3.65)$$

となる．上式の積の第1項については定理3•5の(i)を，第2項については $g_i\overset{W}{\rightarrow}G_s$ および定理3•6の(i)を参照すると，

$$H(s)=\sum_{l=0}^{N/T-1}\delta_{s\oplus Tl}\cdot\sum_{k=0}^{T-1} G_{k\oplus s} \qquad (3.66)$$

となる．次に (3.60) を (3.66) に代入すると，

$$H(s)=\sum_{l=0}^{N/T-1}\delta_{s\oplus Tl}\cdot\sum_{k=0}^{T-1} F_{s\oplus k}\{\sum_{n=0}^{N/T-1}\delta_{s\oplus k\oplus Tn}\}$$

$$=\sum_{l=0}^{N/T-1}\delta_{s\oplus Tl}\cdot\sum_{k=s}^{s+T-1} F_k\{\sum_{n=0}^{N/T-1}\delta_{k\oplus Tn}\} \qquad (3.67)$$

となる．右辺の積の第1項より，$s=Tl$ のみをとり得る．従って，第2項の和分の範囲 $s\leqq k\leqq s+T-1$ では，$k=Tl$ のみが残る．これより，Σ をとり除くことができるので，

$$H(s)=\sum_{l=0}^{N/T-1}\delta_{s\oplus Tl}\cdot F_s\{\sum_{n=0}^{N/T-1}\delta_{s\oplus Tn}\} \qquad (3.68)$$

となる．第1項と $\{\cdot\}$ とは同じもので，値は1しかとらないから，

$$H(s)=F_s\{\sum_{n=0}^{N/T-1}\delta_{s\oplus Tn}\}^2$$

$$=F_s\sum_{n=0}^{N/T-1}\delta_{s\oplus Tn} \qquad (3.69)$$

となり，これは (3.60) に等しい．

結局，(3.52) は，ウォルシュ•スペクトルの N/T 以上の(交番数の)高交番数遮断したことを表しているが，これは平均値入力関数の (3.54) に等しく，このウォルシュ変換が (3.60) である．一方，標本値入力関数 $S(i)$ すなわち (3.61) にパルス列関数 (3.51) をたたみその関数 $h(i)$ のウォルシュ変換したものが (3.69) となり，(3.60) に等しくなっている．これより(Ⅰ),(Ⅱ)をまとめると，次の定理を得る．

〔定理 3•8〕　ウォルシュ変換の標本化定理
(i) 関数 g_i が N/T 以上の交番数を含まないと

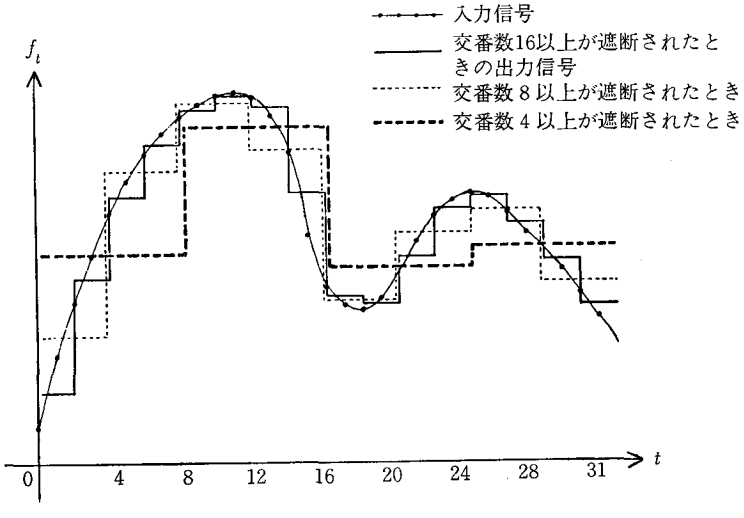


図 3•1　高交番数遮断による信号の変化．$N=32$, $t\in D_5$.

き，区間 T ごとの g_i の値から，すべての g_i が決定される(実は，ウォルシュ変換による場合，各区間内は同一の値をとる)．

(ii) 関数 f_i の N/T 以上の交番数を遮断した場合，標本区間 $\{kT\sim(k+1)T-1\}$，$(k=0\sim m)$ の標本値を，f_i のその区間の平均値に置き換えたものに等しい．

(i) はフーリエ変換に基づいている標本化定理と形式的にほとんど同一のものであり，すでに文献[14]，[16]で述べられている．(ii) は，もとの関数とその関数の特定の交番数を遮断した関数との関係を述べており，交番数遮断の影響が直ちに計算できるのが特徴である．**図 3・1** を参照．

3・5 擬似極形式によるウォルシュ変換[24][32]

ウォルシュ関数やウォルシュ変換は，数学構造が2進環に基づいているので，並進運動とか平行移動（シフト）という概念をもたない．移動量(距離)が 2^k，$(k=0, 1, 2,\cdots)$ のときのみ，部分的・局所的に通常の平行移動の現象が起る．平行移動を2次元に拡張すると，回転(運動)を行わせることができる．フーリエ変換の場合，入力面の回転は，出力面では線形に対応(移動)する．すなわち，入力データが回転したのと同じ角度だけ，もとの出力データもまた回転する．ところが，ウォルシュ変換を用いた場合の回転に対しては，ウォルシュ面でのもとのパターンとは異った状態となり，（現在のところ）予想不可能で理論解析が行えない．次善の策として，入力パターンが，2進移動した場合を基準にして考える．2進移動とは，⊕演算のことであるから，これを幾何的(図形的)に考えてみる．データ f_i，$(i=0\sim N-1)$ を a だけ2進移動させると，$a\in D_m$ として，

$$f_i \longrightarrow f_{i\oplus a} \tag{3.70}$$

となる．そこで，

$$i \longrightarrow i\oplus a \tag{3.71}$$

の遷移をグラフ化すると，**図 3・2** の (a) となる．図の矢印の相互の向きは，基本的に「ねじれ」と「並進」から成りたっている．$a=2$，4 の場合，部分的に平行移動になっていることに注意．この2進移動を(半)径方向と回転方向に適用して，それぞれを「2進径移動」および「2進回転」と呼ぶことにする．極座標形式を導入するため変数を，径方向として r を，偏角として θ を用いると次のようになる．$a, b\in D_m$ として，

径移動：$r\in D_m$

回転(角)：$\theta\in D_m$ (3.72)

径方向移動のウォルシュ関数：

$$W_a(r)=(-1)^{a\cdot r} \tag{3.73}$$

回転方向のウォルシュ関数：

$$W_b(\theta)=(-1)^{b\cdot\theta} \tag{3.74}$$

となる．(3.73)，(3.74) の具体例は，それぞれ図 3・2 の (b)，(c) となって，a，b が 2^l，$(l=0\sim m-1)$ のとき上記の関数は周期的となる．これは円形の膜振動の解析の際に現れるベッセル関数のモードパターンと同じものである．$a, b\fallingdotseq 2^l$ のとき，すなわち，非周期的な場合はウォルシュ関数による独自のパターンを示す．ところで，従来の直角座標系による2次元ウォルシュ変換は次のように表される．

$$F_{st}=\sum_{i=0}^{N-1}\sum_{j=0}^{N-1} f_{ij}(-1)^{s\cdot i\oplus t\cdot j} \tag{3.75}$$

これを，(3.74) の変数 r, θ によって，関数 f_{ij}，F_{st} をそれぞれ，次のように対応させる．

$$f_{ij} \longrightarrow f(r,\theta) \tag{3.76}$$

$$F_{st} \longrightarrow F(R,\Theta) \tag{3.77}$$

ただし，径方向のウォルシュ面での交番数：

$$R\in D_m$$

回転方向のウォルシュ面での交番数：

$$\Theta\in D_m$$

これより，(3.75)を極座標形式のウォルシュ変換に対応させると，

$$F(R,\Theta)=\sum_{i=0}^{N-1}\sum_{j=0}^{N-1} f(r,\theta)(-1)^{R\cdot r\oplus\Theta\cdot\theta} \tag{3.78}$$

と書き換えられる．これはいわゆる変数変換を行っているのではなく，トポロジー的な対応関係により変数を置き換えているのにすぎないので，(3.78)を「擬似極座標形式によるウォルシュ変換」と名付けることにしよう．上式の和分核 $(-l)^p$，$p=R\cdot r\oplus\Theta\cdot\theta$，を図示すると，**図 3・3** になる[51]．

［例］ $f(r,\theta)$ が径方向に r_0 だけ2進移動し，θ_0 だけ2進回転することを，

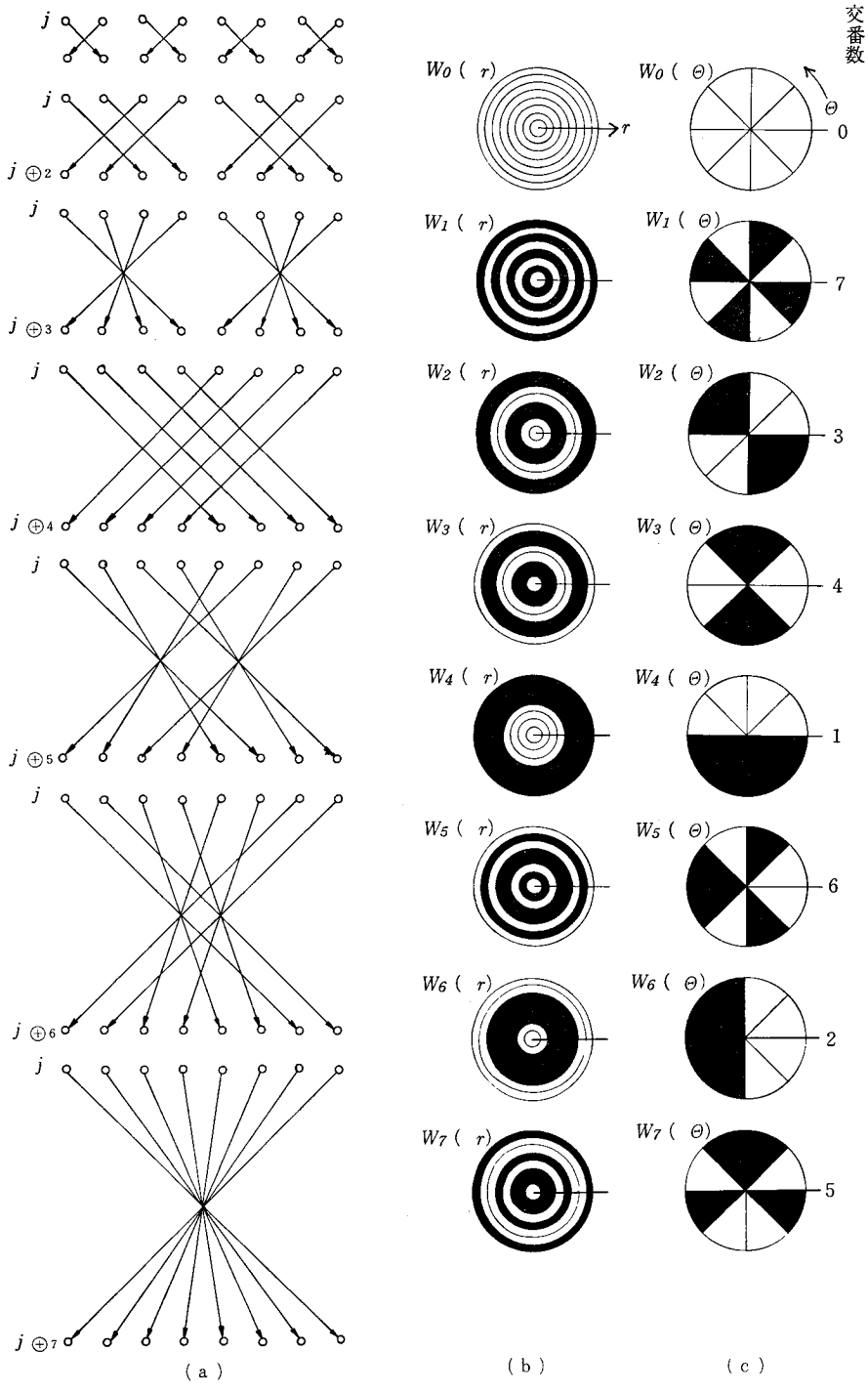


図 3・2 (a) 2 進遷移図 (b) 2 進径移動 (c) 2 進回転

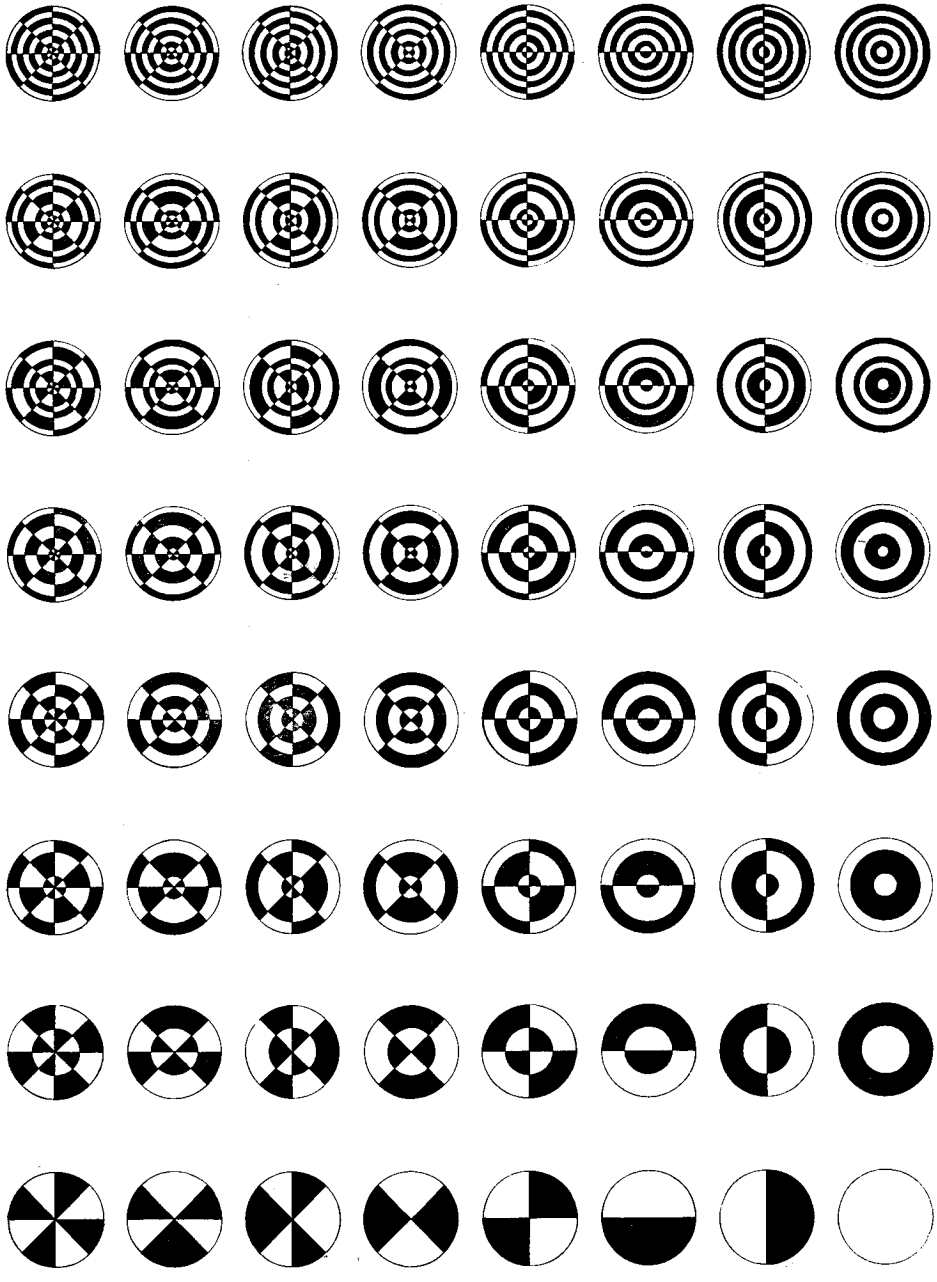


図 3・3 擬似極形式のウォルシュ関数 $f(r,\theta)$

$$f(r,\theta)\overset{W}{\rightarrow}f(r\oplus r_0,\theta\oplus\theta_0) \qquad (3.79)$$

と表すと，この2次元2進移動のウォルシュ変換は次のようになる．

$$f(r\oplus r_0,\theta\oplus\theta_0)\overset{W}{\rightarrow}F'(R,\Theta)=F(R,\Theta)(-1)^{p}$$
$$\text{ただし，}\ p=R\cdot r_0\oplus\Theta\cdot\theta_0 \qquad (3.80)$$

実際の適用には，径方向と回転(角)方向の標本点を各々 N として，極座標形式で標本化を行ったのち，標本点を $N\times N$ の直角座標系の各点にトポロジカル的に対応させて，これまで通りの2次元ウォルシュ変換を行えばよい．

この擬似極座標形式によるウォルシュ変換により，径特性や回転特性をもっている2次元パターンの解析や特徴抽出を行うことができる．例えばフーリエ変換面あるいは相関関数面での特徴抽出やフィルタとして応用できる[28] [29] [45].

3·6 ウォルシュ関数の差分と和分[27]

一般に関数 f_x の n 階差分は次のように定義されている．

$$\Delta^n f_x=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}f_{x+k} \qquad (3.81)$$

ただし，$n,x,k\in D_m$，$\binom{n}{k}$：2項係数

ここで，$W_a(x)=(-1)^{a\cdot x}$ に適用すると，ウォルシュ関数の差分は次のようになる．ただし，その前に次の性質をあげておく，

[性質1] $(-1)^a=1-2a,\ a\in\{0,1\}$ (3.82)

〔定理 3·9〕ウォルシュ関数 $(-1)^{a\cdot x}$ の差分は次のようになる．

$$\Delta^n(-1)^{a\cdot x}=-2\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\{a\cdot(x+k)\}(-1)^k \qquad (3.83)$$

[証明]

$$\Delta^n(-1)^{a\cdot x}=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}(-1)^{a\cdot(x+k)}$$
$$=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}-2\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}\{a\cdot(x+k)\}$$

となり，第1項は恒等的に0に等しい．[証明終]

この公式を用いると，ウォルシュ関数から直接，差分を求めるよりも計算が容易になる．なお，この定理と直接関係はないが，$n=1,2$ の場合，以下のような簡単な表現を得る．

[例] $n=1$

$$\Delta(-1)^{a\cdot x}=(-1)^{a\cdot x}-(-1)^{a\cdot(x+1)}$$
$$=(-1)^{a\cdot x}\{1-(-1)^{a\cdot[(x+1)\oplus x]}\}$$

ここで，[性質1]より，

$$\Delta(-1)^{a\cdot x}=2a\{x\oplus(x+1)\}(-1)^{a\cdot x} \qquad (3.84)$$

[例] $n=2$

$$\Delta^2(-1)^{a\cdot x}$$
$$=(-1)^{a\cdot x}-2(-1)^{a\cdot(x+1)}+(-1)^{a\cdot(x+2)}$$
$$=(-1)^{a\cdot(x+1)}$$
$$\times\{(-1)^{a\cdot[x\oplus(x+1)]}-2+(-1)^{a\cdot[(x+1)\oplus(x+2)]}\}$$
$$=-2\{a\cdot[x\oplus(x+1)]+a\cdot[(x+1)\oplus(x+2)]\}$$
$$\times(-1)^{a\cdot(x+1)} \qquad (3.85)$$

以上のように，$n=1,2$ に対する差分は振幅と位相(符号)を分離することができたが，一般的にはむずかしい．

次に和分について考えよう．その前の準備として，以下の諸性質をあげておく．[性質2]～[性質4]は自明である．$a,x,y\in D_m$ の2進表示を，それぞれ次のように記す．

$$a_{m-1}\cdots\cdots a_i\cdots\cdots a_0,$$
$$k_{m-1}\cdots\cdots k_i\cdots\cdots k_0,$$
$$y_{m-1}\cdots\cdots y_i\cdots\cdots y_0$$

$b,c\in\{0,1\}$ として，

[性質2] $b\oplus c=b+c-2bc$

[性質3] $\overline{b}=b\oplus 1=1-b$

[性質4] $(b\oplus c)c=(b\oplus 1)c$

[性質5] $x+1$ の第 $i+1$ ビットを $(x+1)_i$ と表すことにすると．例 2·2 より，次のようになる．

$$(x+1)_i=\begin{cases}x_i\oplus x_{i-1}x_{i-2}\cdots\cdots x_1x_0, & i\neq 0\\ x_0\oplus 1, & i=0\end{cases}$$

[性質6] $y=a\cdot\{(x+1)\oplus x\}$

$$=\sum_{i=0}^{m-1}\oplus a_i\,x_{i-1}x_{i-2}\cdots x_0$$

[証明] [性質5]より，

$$\{x\oplus(x+1)\}_i=x_{i-1}\cdots x_0$$

となり，これを定義式 (2.19)：

$$a\cdot y=\sum\oplus a_i y_i$$

に代入すると得られる．　［証明終］

［性質7］　$(x_i\oplus x_{i-1}\cdots x_1x_0)\overline{a_{i-1}}\cdots\overline{a_0}$
$$\times\{a\cdot[x\oplus(x+1)]\}$$
$$=a_i(x_i\oplus 1)x_{i-1}\cdots x_0\,\overline{a_{i-1}}\cdots\overline{a_0}$$

［証明］［性質3］と［性質6］より，

$$a_{i-1}\cdots a_0\,\{a\cdot[(x+1)\oplus x)]\}$$
$$=\sum_{j=0}^{m-1}\oplus a_i\,\overline{a_{i-1}}\;\overline{a_{i-2}}\cdots\overline{a_0}\;x_{j-1}x_{j-2}\cdots x_0$$

となり，a について，$j>i-1$，すなわち，$j\geqq i$ だけが残る（$a_i\overline{a_i}=0$ であるから）．次に，

$$(x_i\oplus x_{i-1}\cdots x_0)\sum_{j=0}^{m-1}\oplus a_j x_{j-1}\cdots x_0$$
$$=\sum_{j=i}^{m-1}\oplus\{a_j x_i x_{j-1}\cdots x_0\oplus a_j x_{j-1}\cdots x_0\}$$

$j-1\geqq i$ に対しては，x_i は $x_{j-1}\cdots x_0$ に含まれているので，$\{\cdot\}$ の中の最1項は第2項に等しくなって，$\{\cdot\}$ は0となる．結局，$j=i$ の項だけが残る．よって，［性質4］より，

$$(x_i\oplus x_{i-1}\cdots x_0)\overline{a_{i-1}}\cdots\overline{a_0}\{a\cdot[(x+1)\oplus x]\}$$
$$=(x_i\oplus x_{i-1}\cdots x_0)\,\overline{a_{i-1}}\cdots\overline{a_0}\;a_i\;x_{i-1}\cdots x_0$$
$$=a_i(x_i\oplus 1)x_{i-1}\cdots x_0\,\overline{a_{i-1}}\cdots\overline{a_0}$$　［証明終］

次に不定和分の定義を行う．

$$S_k=\begin{cases}0, & k=0\\ \sum_{x=0}^{k-1}(-1)^{a\cdot x}, & k=1\sim N-1\end{cases}$$

〔定理 3・10〕ウォルシュ関数 $(-1)^{a\cdot x}$ の不定和分 S_x は次のように表される．

$$S_x=(y\oplus a-a)(-1)^{a\cdot x}\qquad(3.86)$$

ただし，$\oplus$ は $+,-$ に優先する．$y\in D_m$ の2進表示は，$i=0\sim m-1$ として，

$$y_i=x_i\,\overline{a_{i-1}}\;\overline{a_{i-2}}\cdots\overline{a_0}\qquad(3.87)$$

である．

［証明］前もって，(3.86) の両辺の差分をとっておく．すなわち，

$$(-1)^{a\cdot x}=(y'\oplus a-a)(-1)^{a\cdot(x+1)}$$
$$-(y\oplus a-a)(-1)^{a\cdot x}\qquad(3.88)$$

さらに，［性質5］より，y' を $x'=x+1$ の第 i ，$+1$ ビットの成分で表すことにする．

$$y'=\quad x'_i\quad\overline{a_{i-1}}\;\overline{a_{i-2}}\cdots\overline{a_0}$$
$$=\quad(x+1)_i\quad\overline{a_{i-1}}\;\overline{v_{1-2}}\cdots\overline{a_0}$$
$$=(x_i\oplus x_{i-1}\cdots x_0)\overline{a_{i-1}}\;\overline{a_{i-2}}\cdots\overline{a_0}\qquad(3.89)$$

次に［性質1］をより，さらに，(3.88) を次のように変形する．

$$(-1)^{a\cdot x}=(-1)^{a\cdot x}\{(y'\oplus a-a)(-1)^{a\cdot[(x+1)\oplus x]}$$
$$-y\oplus a+a\}\qquad(3.90)$$

これより，

$$1\equiv-2\{a\cdot[(x+1)\oplus x]\}(y'\oplus a-a)$$
$$+y'\oplus a-y\oplus a\qquad(3.91)$$

となり，(3.91) を証明すればよいことになる．まず，(2.42) を考慮して，上式の右辺は，

$$-2\{a\cdot[(x+1)\oplus x]\}\sum_{i=0}^{m-1}2^i y'_i(-1)^{a_i}$$
$$+\sum_{i=0}^{m-1}2^i(y'_i-y_i)(-1)^{a_i}\qquad(3.93)$$

となり，(3.89) および［性質7］より，(3.93) の第1項は次のようになる．

$$(93\text{-}1):-2\sum_{x=0}^{m-1}2^i\{a\cdot[(x+1)\oplus x]\}$$
$$\times(x_i\oplus x_{i-1}\cdots x_0)\overline{a_{i-1}}\cdots\overline{a_0}(-1)^{a_i}$$
$$=-2\sum_{i=0}^{m-1}2^i a_i(1\oplus x_i)x_{i-1}\cdots x_0$$
$$\times\;\overline{a_{i-1}}\cdots\overline{a_0}(-1)^{a_i}\qquad(3.94)$$

さらに，［性質1］と［性質3］から，

$$(93\text{-}1):-2\sum_{i=0}^{m-1}2^i(1-x_i-2a_i+2a_ix_i)$$
$$\times a_i\;x_{i-1}\cdots x_0\;\overline{a_{i-1}}\cdots\overline{a_0}$$
$$=\sum_{i=0}^{m-1}2^i(-2a_i\;x_{i-1}\cdots x_0\;\overline{a_{i-1}}\cdots\overline{a_0}$$
$$+2a_i\;x_i\cdots\cdots x_0\;\overline{a_{i-1}}\cdots\overline{a_0}$$
$$+4a_i\;x_{i-1}\cdots x_0\;\overline{a_{i-1}}\cdots\overline{a_0}$$
$$-4a_i\;x_i\cdots\cdots x_0\;\overline{a_{i-1}}\cdots\overline{a_0}\;)\qquad(3.95)$$

となる．

次に (3.87) と (3.89) を (3.93) の第2項に代入して，さらに［性質1］，［性質2］から次式を得る．

$$(93\text{-}2):\sum_{i=0}^{m-1}2^i(x_i\oplus x_{i-1}\cdots x_0-x_i)$$
$$\times\overline{a_{i-1}}\cdots\overline{a_0}(1-2a_i)$$

$$=\sum_{i=0}^{m-1}2^i(\,x_{i-1}\cdots x_0\ \overline{a_{i-1}}\cdots\overline{a_0}$$

$$-2\,x_i\cdots\cdots x_0\ \overline{a_{i-1}}\cdots\overline{a_0}$$

$$-2\,a_i\,x_{i-1}\cdots x_0\ \overline{a_{i-1}}\cdots\overline{a_0}$$

$$+4\,a_i\,x_i\cdots\cdots x_0\ \overline{a_{i-1}}\cdots\overline{a_0}\,)\qquad(3.96)$$

(3.95) と (3.96) すなわち，(93-1) と (93-2) が合計される．その結果，(93-1) の第1項と第3項，および，(93-2) の第3項が互に打消す．(93-1) と (93-2) のそれぞれの第4項が同じく打消す．そこで，(93-1) の第2項と (93-2) の第1項と第2項が残って整頓すると，

$$(3.93):\sum_{i=0}^{m-1}2^i(2\,a_i\,x_i\cdots x_0\ \overline{a_{i-1}}\cdots\overline{a_0}$$

$$+x_{i-1}\cdots x_0\ \overline{a_{i-1}}\cdots\overline{a_0}$$

$$-2\,x_i\cdots\cdots x_0\ \overline{v_{i-1}}\cdots\overline{a_0}\,)(3.97)$$

となる，さらに，上式の（・）の第2項が変形されて，

$$\sum_{i=0}^{m-1}2^i x_{i-1}\cdots x_0\ \overline{a_{i-1}}\cdots\overline{a_0}$$

$$=1+\sum_{i=0}^{m-2}2^{i+1}x_i\cdots x_0(1-a_i)\overline{a_{i-1}}\cdots\overline{a_0}$$

$$=1+\sum_{i=0}^{m-2}2^i(2x_i\cdots x_0\ \overline{a_{i-1}}\cdots\overline{a_0}$$

$$-2a_i\,x_i\cdots x_0\ \overline{a_{i-1}}\cdots\overline{a_0}\,)\qquad(3.98)$$

となる．(3.98) を (3.97) に代入すると，$i=m-1$ 項だけが残り，次のようになる．

$$(3.93):1+2^m(a_{m-1}x_{m-1}\cdots x_0\ \overline{a_{m-2}}\cdots\overline{a_0}$$

$$-x_{m-1}\cdots\cdots x_0\ \overline{a_{m-2}}\cdots\overline{a_0}\,)$$

$$(3.99)$$

$2^m=0\ (\mathrm{mod}\ N)$，であるから，上式の第2項は0となり，$(3.93)=1$ となる．これは，(3.91) の左辺に等しい．　［証明終］

［系］ S_x は以下のように書き表すことができて，計算するときに便利である．

$$S_x=(-1)^{a\cdot x}\sum_{i=0}^{m-1}2^i y_i(-1)^{a_i}$$

［証明］ (2.42) を考えると明らかである．

［例］ $m=4$. $a, x\in D_4$ の2進表示をそれぞれ，

$a_3a_2a_1a_0$，および，$x_3x_2x_1x_0$

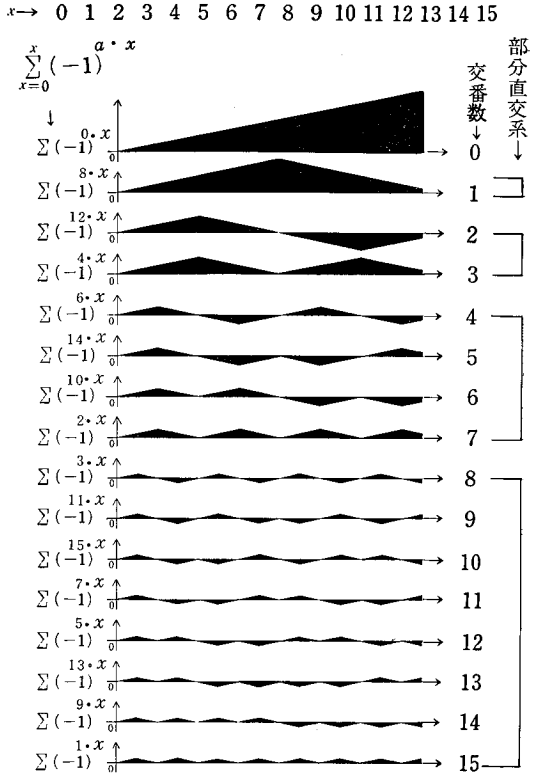


図 3・4　ウォルシュ関数の不定和分（2進三角波関数系）

と表す．**表 3・8**，**図 3・4** を参照．

$$S_x=(-1)^{a\cdot x}\{8x_3\,\overline{a_2}\,\overline{a_1}\,\overline{a_0}(-1)^{a_3}+4x_2\,\overline{a_1}\,\overline{a_0}(-1)^{a_2}$$

$$+2x_1\,\overline{a_0}(-1)^{a_1}+x_0(-1)^{a_0})\}$$

3・7　2進三角波関数の部分的に完備な直交性[57]

不定和分関数を図示すると三角波をもっていることがわかる(図 3・4 を参照)．これを指数 m の2進三角波関数系と呼ぶことにしよう．2進三角波は，これまで使われている三角波関数とは異なって，非周期的な三角関数をもっているのが特徴である．厳密にいうと，ディスクリート表現の関数であるから，$N\to\infty$ のときに三角波に近づく．

図 3・4 は，$(-1)^{a\cdot x}$ を連続関数とみなして積分したものを描いた．この関数系は完全直交系ではなく，部分的に直交系となっている．**表 3・9** の破線内を参照．

表 3・8 $S_x=[y\oplus a-a](-1)^{a\cdot x}$ ，$m=4$，$N=16$ の場合．

$a, x, y \in D_4$ の2進表示をそれぞれ，$a_3a_2a_1a_0$，$x_3x_2x_1x_0$，$y_3y_2y_1y_0$ とする．最右端の欄は[・]を列行列で表現したものである．

係数順位 a	$a_3\ a_2\ a_1\ a_0$	交番数 s	$y_3\ y_2\ y_1\ y_0$	$y\oplus a-a$ / $(-1)^{a\cdot x}$	$\begin{pmatrix}y_3\oplus a_3\\ y_2\oplus a_2\\ y_1\oplus a_1\\ y_0\oplus a_0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}a_3\\ a_2\\ a_1\\ a_0\end{pmatrix}$
0	0 0 0 0	0	$x_3\ x_2\ x_1\ x_0$	0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 +1 +1 +1 +1 +1 +1 +1 +1 +1 +1 +1 +1 +1 +1 +1 +1	$\begin{pmatrix}x_3\\ x_2\\ x_1\\ x_0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0\\ 0\\ 0\\ 0\end{pmatrix}$
8	1 0 0 0	1	$x_3\ x_2\ x_1\ x_0$	0 1 2 3 4 5 6 7 −8 −7 −6 −5 −4 −3 −2 −1 +1 +1 +1 +1 +1 +1 +1 +1 −1 −1 −1 −1 −1 −1 −1 −1	$\begin{pmatrix}x_3\oplus 1\\ x_1\\ x_2\\ x_0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1\\ 0\\ 0\\ 0\end{pmatrix}$
12	1 1 0 0	2	$0\ x_2\ x_1\ x_0$	0 1 2 3 −4 −3 −2 −1 0 1 2 3 −4 −3 −2 −1 +1 +1 +1 +1 −1 −1 −1 −1 −1 −1 −1 −1 +1 +1 +1 +1	$\begin{pmatrix}1\\ x_2\oplus 1\\ x_1\\ x_0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1\\ 1\\ 0\\ 0\end{pmatrix}$
4	0 1 0 0	3	$0\ x_2\ x_1\ x_0$	0 1 2 3 −4 −3 −2 −1 0 1 2 3 −4 −3 −2 −1 +1 +1 +1 +1 −1 −1 −1 −1 +1 +1 +1 +1 −1 −1 −1 −1	$\begin{pmatrix}0\\ x_2\oplus 1\\ x_1\\ x_0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0\\ 1\\ 0\\ 0\end{pmatrix}$
6	0 1 1 0	4	$0\ 0\ x_1\ x_0$	0 1 −2 −1 0 1 −2 −1 0 1 −2 1 0 1 −2 −1 +1 +1 −1 −1 −1 −1 +1 +1 +1 +1 −1 −1 −1 −1 +1 +1	$\begin{pmatrix}0\\ 1\\ x_1\oplus 1\\ x_0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0\\ 1\\ 1\\ 0\end{pmatrix}$
14	1 1 1 0	5	$0\ 0\ x_1\ x_0$	0 1 −2 −1 0 1 −2 −1 0 1 −2 −1 0 1 −2 −1 +1 +1 −1 −1 −1 −1 +1 +1 −1 −1 +1 +1 +1 +1 −1 −1	$\begin{pmatrix}1\\ 1\\ x_1\oplus 1\\ x_0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1\\ 1\\ 1\\ 0\end{pmatrix}$
10	1 0 1 0	6	$0\ 0\ x_1\ x_0$	0 1 −2 −1 0 1 −2 −1 0 1 −2 −1 0 1 −2 −1 +1 +1 −1 −1 +1 +1 −1 −1 −1 −1 +1 +1 −1 −1 +1 +1	$\begin{pmatrix}1\\ 0\\ x_1\oplus 1\\ x_0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1\\ 0\\ 1\\ 0\end{pmatrix}$
2	0 0 1 0	7	$0\ 0\ x_1\ x_0$	0 1 −2 −1 0 1 −2 −1 0 1 −2 −1 0 1 −2 −1 +1 +1 −1 −1 +1 +1 −1 −1 +1 +1 −1 −1 +1 +1 −1 −1	$\begin{pmatrix}0\\ 0\\ x_1\oplus 1\\ x_0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0\\ 0\\ 1\\ 0\end{pmatrix}$
3	0 0 1 1	8	$0\ 0\ 0\ x_0$	0 −1 0 −1 0 −1 0 −1 0 −1 0 −1 0 −1 0 −1 +1 −1 −1 +1 +1 −1 −1 +1 +1 −1 −1 +1 +1 −1 −1 +1	$\begin{pmatrix}0\\ 0\\ 1\\ x_0\oplus 1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0\\ 0\\ 1\\ 1\end{pmatrix}$
11	1 0 1 1	9	$0\ 0\ 0\ x_0$	0 −1 0 −1 0 −1 0 −1 0 −1 0 −1 0 −1 0 −1 +1 −1 −1 +1 +1 −1 −1 +1 −1 +1 +1 −1 −1 +1 +1 −1	$\begin{pmatrix}1\\ 0\\ 1\\ x_0\oplus 1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1\\ 0\\ 1\\ 1\end{pmatrix}$
15	1 1 1 1	10	$0\ 0\ 0\ x_0$	0 −1 0 −1 0 −1 0 −1 0 −1 0 −1 0 −1 0 −1 +1 −1 −1 +1 −1 +1 +1 −1 −1 +1 +1 −1 +1 −1 −1 +1	$\begin{pmatrix}1\\ 1\\ 1\\ x_0\oplus 1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1\\ 1\\ 1\\ 1\end{pmatrix}$
7	0 1 1 1	11	$0\ 0\ 0\ x_0$	0 −1 0 −1 0 −1 0 −1 0 −1 0 −1 0 −1 0 −1 +1 −1 −1 +1 −1 +1 +1 −1 +1 −1 −1 +1 −1 +1 +1 −1	$\begin{pmatrix}0\\ 1\\ 1\\ x_0\oplus 1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0\\ 1\\ 1\\ 1\end{pmatrix}$
5	0 1 0 1	12	$0\ 0\ 0\ x_0$	0 −1 0 −1 0 −1 0 −1 0 −1 0 −1 0 −1 0 −1 +1 −1 +1 −1 −1 +1 −1 +1 +1 −1 +1 −1 −1 +1 −1 +1	$\begin{pmatrix}0\\ 1\\ 0\\ x_0\oplus 1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0\\ 1\\ 0\\ 1\end{pmatrix}$
13	1 1 0 1	13	$0\ 0\ 0\ x_0$	0 −1 0 −1 0 −1 0 −1 0 −1 0 −1 0 −1 0 −1 +1 −1 +1 −1 −1 +1 −1 +1 −1 +1 −1 +1 +1 −1 +1 −1	$\begin{pmatrix}1\\ 1\\ 0\\ x_0\oplus 1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1\\ 1\\ 0\\ 1\end{pmatrix}$
9	1 0 0 1	14	$0\ 0\ 0\ x_0$	0 −1 0 −1 0 −1 0 −1 0 −1 0 −1 0 −1 0 −1 +1 −1 +1 −1 +1 −1 +1 −1 −1 +1 −1 +1 −1 +1 −1 +1	$\begin{pmatrix}1\\ 0\\ 0\\ x_0\oplus 1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1\\ 0\\ 0\\ 1\end{pmatrix}$
1	0 0 0 1	15	$0\ 0\ 0\ x_0$	0 −1 0 −1 0 −1 0 −1 0 −1 0 −1 0 −1 0 −1 +1 −1 +1 −1 +1 −1 +1 −1 +1 −1 +1 −1 +1 −1 +1 −1	$\begin{pmatrix}0\\ 0\\ 0\\ x_0\oplus 1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0\\ 0\\ 0\\ 1\end{pmatrix}$

〔定理 3・11〕次数 m のユールマン形ウォルシュ関数の不定和分関数系は，m 個の部分直交関数系をもつ．すなわち，ウォルシュ関数の交番数を s とすると，

$$2^k \leqq s \leqq 2^{k+1}-1,\quad 0 \leqq k \leqq m-1 \qquad (3.100)$$

となる k が定まり，上式の範囲内の交番数の2進三角波関数は完備な直交関数系をつくる．

［証明］ 交番数 s が，$2^k \sim 2^{k+1}-1$ の値をとるとき，s の2進表示を，$s_{m-1}\cdots s_k\cdots s_1 s_0$，とすると，

$$\left.\begin{aligned} &s_{m-1}=s_{m-2}=\cdots=s_{k+1}=0\\ &s_k=1\\ &s_{k-1},\ \cdots, s_k,\ \cdots, s_1, s_0=0 \text{ または } 1 \end{aligned}\right\} \qquad (3.101)$$

は明らかである．交番数から係数順位を求める変換行列 (2.25) によって，(3.101) の条件が係数順位ではどのような条件となっているか調べてみる．(3.101) を (2.25) の右の変換行列の式に代入すると，以下の a を得る．

$$\left.\begin{aligned} &a_{m-1}, a_{m-2}, \cdots, a_{m-k}=0 \text{ または } 1\\ &a_{m-k-1}=1\\ &a_{m-k-2}=\cdots=a_1=a_0=0 \end{aligned}\right\} \qquad (3.102)$$

次に (3.87) の y_i について調べるために，次の z_i を考えてみる．

$$\left.\begin{aligned} &y_i=x_i\,\overline{a_{i-1}}\cdots\overline{a_0}\\ &z_i=\overline{a_{i-1}}\ \overline{a_{i-2}}\cdots\overline{a_1}\ \overline{a_0}\\ &\quad \text{ただし，}\ \overline{a_i}=a_i\oplus 1=1-a_i \end{aligned}\right\} \qquad (3.103)$$

$a_k \in \{0,1\}$ であることから，次の不等式は自明である．

$$\overline{a_0} \geqq \overline{a_1}\ \overline{a_0} \geqq \overline{a_2}\ \overline{a_1}\ \overline{a_0} \geqq \cdots \geqq \overline{a_{i-1}}\cdots\overline{a_0} \qquad (3.104)$$

従って，

$$z_0 \geqq z_1 \geqq z_2 \geqq \cdots \geqq z_i \qquad (3.105)$$

となる．$a_{i-1}=a_{m-k-1}(=1)$，から $i=m-k$ となり，$\overline{a_{i-1}}=0$ である．(3.102)，(3.103)，(3.105) より，

$$z_i=\begin{cases}1, & i=0\sim m-k-1\\ 0, & i=m-k\sim m-1\end{cases} \qquad (3.106)$$

となる，$y_i=x_i\ z_i$ より，

$$y_i=\begin{cases}x_i, & i=0\sim m-k-1\\ 0, & i=m-k\sim m-1\end{cases} \qquad (3.107)$$

となる．このことは，y_i について，$i \geqq m-k$ の場合を考慮する必要がないことを示している．

以上の準備のもとで，任意の二つの2進三角波関数 I_x, J_x の直交性を調べる．

$$\begin{aligned}\delta(I,J)&=\sum_{x=0}^{N-1} I_x J_x\\ &=\sum_{x=0}^{N-1}\{(-1)^{a\cdot x}\sum_{i=0}^{m-1}2^i y_i(x)(-1)^{a\cdot i}\}\\ &\quad\times\{(-1)^{b\cdot x}\sum_{j=0}^{m-1}2^j y_j(x)(-1)^{b\cdot j}\}\\ &=\sum_{x=0}^{m-1}(-1)^{(a\oplus i)\cdot x}\{\sum_{i=0}^{m-1}2^i y_i(x)(-1)^{a_i}\}\\ &\quad\times\{\sum_{j=0}^{m-1}2^j y_j(x)(-1)^{b_j}\}\end{aligned} \qquad (3.108)$$

ここで，$c=a\oplus b$ として，c の2進表示を，$c_{m-1}\cdots c_0$，とすると，

$$c_{m-k-1}=c_{m-k-2}=\cdots=c_0=0 \qquad (3.109)$$

となる．というのは，(3.102) より $i \leqq m-k-1$ のとき，a_i，b_j は一意的に決っていて，$a_i=b_j$ となっているからである．このことは，また，c の値は x の方向に関して，2^{m-k} を単位として，$+1$ または -1 の値をとる(変化する)ことを表している．次に，a_i について，(3.102) では，$i \geqq m-k$ のとき不定であるが，y_i が掛っているので，(3.107) より，i が $m-k$ 以上を考える必要はない．また同時に $\{i(\cdot)\}=\{j(\cdot)\}$ となる．$y_i(-1)^{a_i}$ も 2^{m-k} の周期をもち，従って，$\{\cdot\}$は c と同期となる(ただし，(3.100)の条件のもとでのみ)．これより，

$$\delta(I,J)=\sum_{x=0}^{N-1}(-1)^{c\cdot x}\{\sum_{i=0}^{m-k-1}2^i y_i(x)(-1)^{a_i}\}^2 \qquad (3.110)$$

上式の $(-1)^{c\cdot x}$ は，x 方向に 2^{m-k} を単位として，$+1$ または -1 に変化するウォルシュ関数であり，かつ，$\{\cdot\}$ は 2^{m-k} を周期とする関数であるから，次のようになる．ただし，$T=2^{m-k}$ である．

$$\delta(I,J)=\begin{cases}C, & c=0 \text{ すなわち } a=b\\ O, & c\neq 0 \text{ すなわち } a\neq b\end{cases}$$

ただし，$C=(N/T)\sum_{x=0}^{T-1}\{\sum_{i=0}^{m-k-1}2^i y_i(x)(-1)^{a_i}\}^2$

［証明終］

［演習］ $m=4$, $N=16$ の2進三角波関数．交番数 $s=2^2\sim 2^3-1$ とする．従って，$k=2$, $T=4$ となって，

$$C=4\sum_{x=0}^{3}\{\sum_{i=0}^{1}2^i y_i(x)(-1)^{a_i}\}^2$$

$$=4\sum_{x=0}^{3}\{y_0(x)(-1)^{a_0}+2y_1(x)(-1)^{a_1}\}^2$$

となる．表 3•8 を参照すると，

$a_0=0$, $a_1=1$, $y_0(x)=x_0$, $y_1(x)=x_1$ であるから，

$$C=4\sum_{x=0}^{3}(x_0-2x_1)^2$$

$$=4\{(0-2\cdot 0)^2+(1-2\cdot 0)^2+(0-2\cdot 1)^2$$

$$+(1-2\cdot 1)^2\}=24$$

となる．**表 3•9** を参照．

表 3•9 $\delta(I,J)=\sum_{x=0}^{15}I_x J_x$，ただし，$I_x$, J_x は任意の2進三角波関数である．

交番数	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
0	1240	512	−128	256	−32	0	−64	128	−8	0	0	0	16	0	−32	64
1	512	344	0	128	0	−32	0	64	0	−8	0	0	0	−16	0	32
2	−128	0	88	0	0	0	32	0	0	0	−8	0	0	0	16	0
3	256	128	0	88	0	0	0	32	0	0	0	−8	0	0	0	16
4	− 32	0	0	0	24	0	0	0	0	0	0	0	8	0	0	0
5	0	−32	0	0	0	24	0	0	0	0	0	0	0	8	0	0
6	− 64	0	32	0	0	0	24	0	0	0	0	0	0	0	8	0
7	128	64	0	32	0	0	0	24	0	0	0	0	0	0	0	8
8	− 8	0	0	0	0	0	0	0	8	0	0	0	0	0	0	0
9	0	−8	0	0	0	0	0	0	0	8	0	0	0	0	0	0
10	0	0	−8	0	0	0	0	0	0	0	8	0	0	0	0	0
11	0	0	0	−8	0	0	0	0	0	0	0	8	0	0	0	0
12	− 16	0	0	0	8	0	0	0	0	0	0	0	8	0	0	0
13	0	−16	0	0	0	8	0	0	0	0	0	0	0	8	0	0
14	− 32	0	16	0	0	0	8	0	0	0	0	0	0	0	8	0
15	64	32	0	16	0	0	0	8	0	0	0	0	0	0	0	8

第4章　ウォルシュ変換の応用

4・1　2進差分の解析と画像処理への応用[34][38]

3・6 節でウォルシュ関数の差分について考察したが，この差分は平行移動に基づいた差分であった．これは，入力面での扱いは比較的簡単であったが，ウォルシュ面での挙動や影響を調べるのには困難である．そこで，ウォルシュ面で理論的に扱いやすい形の差分を新たに導入する．すなわち，平行移動を 3・5 節の擬似極形式に用いた「2進移動」に置き換える．この2進移動については 図 3・2 に示してあるが，平行移動と対照比較するために，新ためて **図 4・1** に描いた．一見すると，

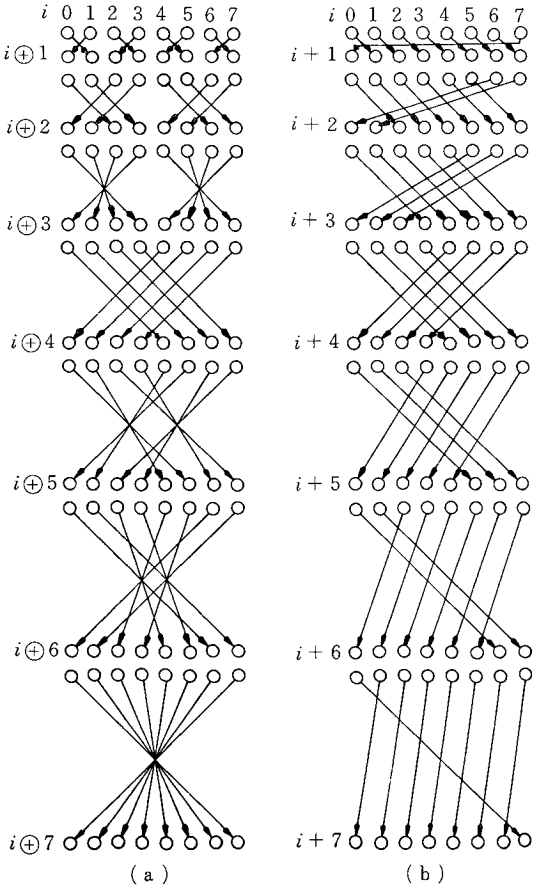


図 4・1　2種類の遷移図．
(a) 2進移動　(b) (巡回形)平行移動

平行移動と2進移動とは全く異なる遷移状態を示しているが，定性的な傾向をみるために評価関数を設けて定量的に比較すると，それほどでもない．ここで，評価関数あるいは測度として「相関係数」を採用する．一般に相関係数は次のように定義されている．

$$\sigma=\frac{\sum_{i=0}^{N-1}(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y})}{\sqrt{\sum_{i=0}^{N-1}(x_i-\bar{x})^2}\sqrt{\sum_{i=0}^{N-1}(y_i-\bar{y})^2}} \qquad (4.1)$$

ただし，$x_i, y_i \in \{0,1,2,\cdots,N-1 | N=2^m\}$

$\bar{x}, \bar{y}$ はそれぞれ，x_i, y_iの平均値を示す．

ここで，もとの座標点と移動を受けたあとの座標点との相関をとることにする．上の変数は次のようになる．

もとの座標　　：$x_i=i$
移動量　　：a
平行移動後の座標：$y_i=i+a$　　(4.2)
2進移動後の座標：$y_i=i\oplus a$

$\sigma=\sigma(a)$ として，2種類の相関係数をプロットしたものが **図 4・2** である．破線が平行移動によ

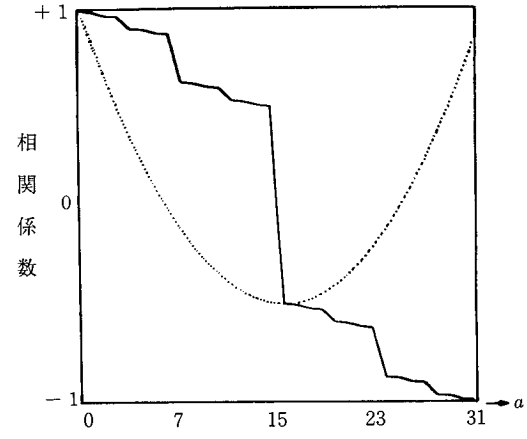


図 4・2　2種類の座標移動量に対する相関係数の変化．
実線：i と $i\oplus a$ の相関係数．破線：i と $i+a$ (mod 32) の相関係数．

るもので，移動量が最大(N近傍)に近づくと1になる，すなわち，もとに戻るのは，mod N によるのであるが，むしろ，移動量が「負」になっていると考えるほうが自然である．すなわち，平行移動の場合は，前に a だけ進むのと後に a だけ戻るのとは測度としては等価であることを示している．従って最大の半分の($=N/2$ 近傍)が最も遠い距離ということになる．

次に，実線部分の2進移動については，移動量が最大(N 近傍)に近づくと，a に関して非線形的に相関係数が -1 に近づいていくのが特徴である．移動の大きさが最大の半分($N/2$ 近傍)で両者の相関係数は一致している．この座標点は，平行移動の場合の「最遠」測度でもあるが，この座標点を2進移動の場合の最遠測度の N の点に対応させて考えるのが自然なように思われる．すなわち，両者を，

$$\text{平行移動量：}\ a=0\sim N/2-1 \qquad (4.3)$$
$$\text{2進移動量：}\ a=0\sim N-1$$

の範囲として対応させ，相関係数という測度を用いると，移動量 a が大きくなるにつれて測度も大きく(遠方に)なる．符号理論で使われる2進表示のハミング距離は各ビットを対等(同じ重み)に扱っているが[25]，ここでは高位ビットになるに従って倍の重みがかかっている．

以上の考察により，2進移動(数学的には⊕演算)を，一種の距離変位とみなすことができる．これを差分に適用する．すなわち，平行移動の概念に基づいた(通常の)高階差分公式(3.81)に2進移動を置き換えると次のようになる．(3.81)と区別するために，2進差分記号を $\Delta_{\oplus}$ と記すことにすると，

$$\Delta_{\oplus}^{n} f_x=\sum_{k=0}^{n}(-1)^{k}\binom{n}{k}f_{x\oplus k} \qquad (4.4)$$

となる．

［例］ $n=1,\ \Delta_{\oplus}^{1} f_i=f_i-f_{i\oplus 1}$ (4.5)

$$n=2,\ \Delta_{\oplus}^{2} f_i=f_i-2f_{i\oplus 1}+f_{i\oplus 2} \qquad (6.6)$$

これを図示したものが **図 4・3** である．これによると，遷移の状態が分割されているのがわかる．

［性質1］ n 階の2進差分について，n が定まると，次の k を求めることができる．

$$2^{k}\leqq n\leqq 2^{k}-1$$

これより，入力でデータは $N/2^{k}$ 個に分割されて，各分割された範囲内で2進差分が行われる．従って，異なった分割領域の相互に差があっても検出されない差分である．

［系］ (3.81) の逆変換式は次のように定義されている．

$$f_{i+r}=\sum_{k=0}^{r}\binom{r}{k}(-1)^{k+r}\Delta^{k} f_i \qquad (4.7)$$

これにより，f_{i+r}，f_{k+r} をそれぞれ $f_{i\oplus r}$，$f_{k\oplus r}$ に置きかえても，また成りたつ．すなわち，(4.4)の逆変換式は次のようになる．

$$f_{i\oplus r}=\sum_{k=0}^{r}\binom{r}{k}(-1)^{k\oplus r}\Delta_{\oplus}^{k} f_i \qquad (4.8)$$

次に定義式 (4.4)$=0$ とおいて，$\Delta_{\oplus}^{n} f_i$ の性質を調べてみよう．すなわち，

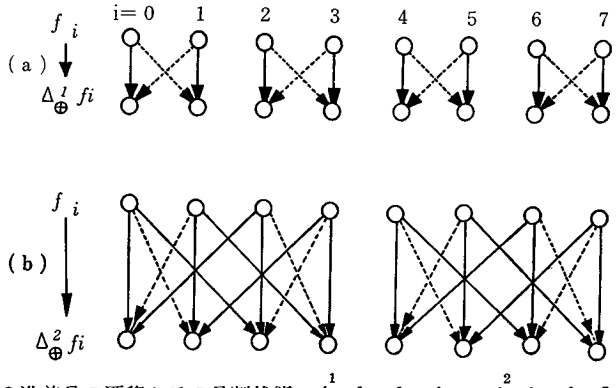


図 4・3 2進差分の遷移とその分割状態．$\Delta_{\oplus}^{1} f_i=f_i-f_{i\oplus 1}$，$\Delta_{\oplus}^{2} f_i=f_i-2f_{i\oplus 1}+f_{i\oplus 2}$．
破線は入力データ f_i の符号が反転して加えられることを示す．

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^{k}\binom{n}{k}f_{x\oplus k}=0 \qquad (4.9)$$

となり，これは2進差分方程式となっている．一般的にこれを論ずるのは困難なので具体例を調べてみよう．$n=1\sim9$ に対する一般解は **表 4・1** に示した．これをみると，解の自由度が多いので偏微分方程式の解を思わせる．これらは帰納的に得られたものであるが証明は容易である．図として描いたのが **図 4・4** である．逆のいい方をすると，この図のパターンをもつ関数の2進差分は0になる．

以上は入力面での解析であったが，2進差分(の演算子)はウォルシュ面では次のような2進フィルタ D_s となる．

〔定理 4・1〕 $\overset{n}{\Delta}_{\oplus}$ の差分演算子は，ウォルシュ面で次のフィルタとなる．s を係数順位として，

$$D_s^n=-2\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k}\binom{n}{k}(k\cdot s) \qquad (4.10)$$

［証明］ 和分核を $(-1)^{s\cdot i}$ として，(4.4) の両辺をウォルシュ変換すると，

$$\sum_{i=0}^{N-1}\overset{n}{\Delta}_{\oplus}f_i(-1)^{i\cdot s}=\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^{k}\binom{n}{k}F_s(-1)^{k\cdot s}$$

となる．$(-1)^{k\cdot s}=1-2(k\cdot s)$ より，

$$\text{右辺}=F_s\{\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n}{k}(-1)^{k}-2\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^{k}\binom{n}{k}(k\cdot s)\}$$

$\{\cdot\}$ の中の第1項は恒等的に 0 である．また $k=0$ のときは，$k\cdot s=0$ となるから，$k=1$ から始じまる． ［証明終］

［例］ $$D_s^1=-2\{-\binom{1}{1}(s\cdot1)\}=2(s\cdot1) \qquad (4.11)$$

$$D_s^2=-2\{-\binom{2}{1}(s\cdot1)+\binom{2}{2}(s\cdot1)\}$$

$$=4(s\cdot1)-2(s\cdot2) \qquad (4.12)$$

図 4・5 の (a) に，$n=1\sim7$，$m=3$，$N=8$ の例を示した．比較のために フーリエ 変換による(通常の) 差分フィルタのスペクトルを (b) に示した．フーリエ変換式は次のように定義している．

$$F_s=\sum_{i=0}^{7}f_i(-1)^{2\pi is\sqrt{-1}/8} \qquad (4.13)$$

ただし，s：周波数，$i,s\in\{0,1,\cdots,7\}$

これによると，フーリエ面の低周波側の半分のスペクトルを，ウォルシュ・スペクトルに対応させると，両者ともハイパスフィルタとしての傾向を示している．

［性質2］ n 階の2進差分によるウォルシュ面でのフィルタは，単調増加関数ではないが，ハイパスフィルタの性質をもつ．

応用として画像の差分を行った．1階の2進差分フィルタ D_s^1 を基準とした3種類の2次元フィルタを **図 4・6** のように設定した．これらの2次元フィルタをウォルシュ面で掛けることにより，画像の差分を計算機シミュレーションにより求めた．**図 4・7** を参照．2進差分は n 階差に応じて入力画像を分割して，異なった領域同志の差分はとらない．このことは静止画像を対象とする場合に問題が生ずるが，動画像を対象とするには余り影響はないと思われる[15] [40] [41]．

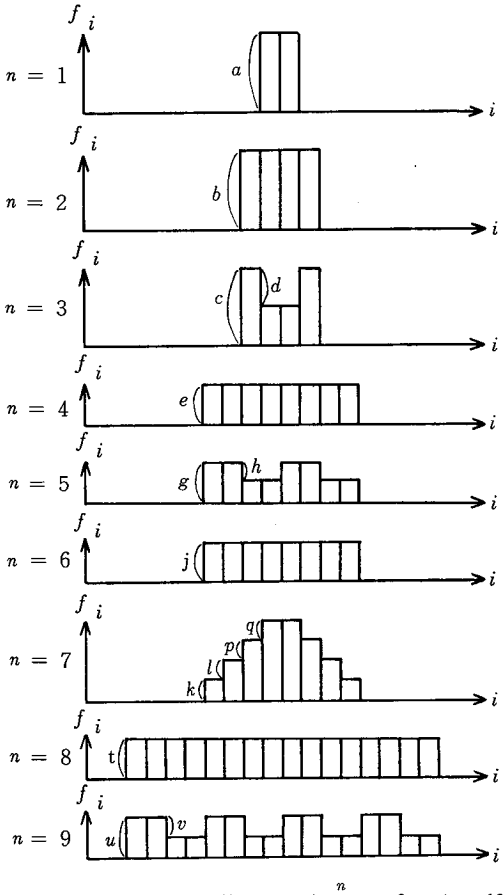


図 4・4 表 4・1 の2進差分方程式 $\overset{n}{\Delta}_{\oplus}f_i=0, n,i\in\{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$ の解を図式化したもの．$a,b,c,d,e,g,h,j,k,l,p,q,t,u,v$ は任意の実数．

表 4・1 2進差分方程式 $4^{n}_{\oplus} f_i=0$ の解，$n, i \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$

n	$\sum_{r=0}^{n}(-1)^r\binom{r}{n} f_{i\oplus r}=0$，$\binom{n}{r}$：二項係数	解（i は任意の正整数と考えてもよい）
1	$f_i- f_{i\oplus 1}=0$	$f_i=f_{i\oplus 1}$
2	$f_i-2 f_{i\oplus 1}+ f_{i\oplus 2}=0$	$f_i=f_{i\oplus 1}=f_{i\oplus 2}=f_{i\oplus 3}$
3	$f_i-3 f_{i\oplus 1}+3 f_{i\oplus 2}- f_{i\oplus 3}=0$	$f_i=f_{i\oplus 3}$，$f_{i\oplus 1}=f_{i\oplus 2}$
4	$f_i-4 f_{i\oplus 1}+6 f_{i\oplus 2}-4 f_{i\oplus 3}+f_{i\oplus 4}=0$	$f_i=f_{i\oplus 1}=f_{i\oplus 2}=f_{i\oplus 3}=f_{i\oplus 4}=f_{i\oplus 5}=f_{i\oplus 6}=f_{i\oplus 7}$
5	$f_i-5 f_{i\oplus 1}+10 f_{i\oplus 2}-10 f_{\oplus 3}+5 f_{i\oplus 4}-f_{i\oplus 5}=0$	$f_i=f_{i\oplus 1}=f_{i\oplus 4}=f_{i\oplus 5}$，$f_{i\oplus 2}=f_{i\oplus 3}=f_{i\oplus 6}=f_{i\oplus 7}$
6	$f_i-6 f_{i\oplus 1}+15 f_{i\oplus 2}-20 f_{i\oplus 3}+15 f_{i\oplus 4}-6 f_{i\oplus 5}+ f_{i\oplus 6}=0$	$f_i=f_{i\oplus 1}=f_{i\oplus 2}=f_{i\oplus 3}=f_{i\oplus 4}=f_{i\oplus 5}=f_{i\oplus 6}=f_{i\oplus 7}$
7	$f_i-7 f_{i\oplus 1}+21 f_{i\oplus 2}-35 f_{i\oplus 3}+35 f_{i\oplus 4}-21 f_{i\oplus 5}+7 f_{i\oplus 6}-f_{i\oplus 7}=0$	$f_i=f_{i\oplus 7}$，$f_{i\oplus 1}=f_{i\oplus 6}$，$f_{i\oplus 2}=f_{i\oplus 5}$，$f_{i\oplus 3}=f_{i\oplus 4}$
8	$f_i-8 f_{i\oplus 1}+28 f_{i\oplus 2}-56 f_{i\oplus 3}+70 f_{i\oplus 4}-56 f_{i\oplus 5}+28 f_{i\oplus 6}-8 f_{i\oplus 7}+f_{i\oplus 8}=0$	$f_i=f_{i\oplus 1}=f_{i\oplus 2}=f_{i\oplus 3}=f_{i\oplus 4}=f_{i\oplus 5}=f_{i\oplus 6}=f_{i\oplus 7}=f_{i\oplus 8}=f_{i\oplus 9}=f_{i\oplus 10}=f_{i\oplus 11}=f_{i\oplus 12}=f_{i\oplus 13}=f_{i\oplus 14}=f_{i\oplus 15}$
9	$f_i-9 f_{i\oplus 1}+36 f_{i\oplus 2}-84 f_{i\oplus 3}+126 f_{i\oplus 4}-126 f_{i\oplus 5}+84 f_{i\oplus 6}-36 f_{i\oplus 7}+9 f_{i\oplus 8}-f_{i\oplus 9}=0$	$f_i=f_{i\oplus 1}=f_{i\oplus 4}=f_{i\oplus 5}=f_{i\oplus 8}=f_{i\oplus 9}=f_{i\oplus 12}=f_{i\oplus 13}$，$f_{i\oplus 2}=f_{i\oplus 3}=f_{i\oplus 6}=f_{i\oplus 7}=f_{i\oplus 10}=f_{i\oplus 11}=f_{i\oplus 14}=f_{i\oplus 15}$

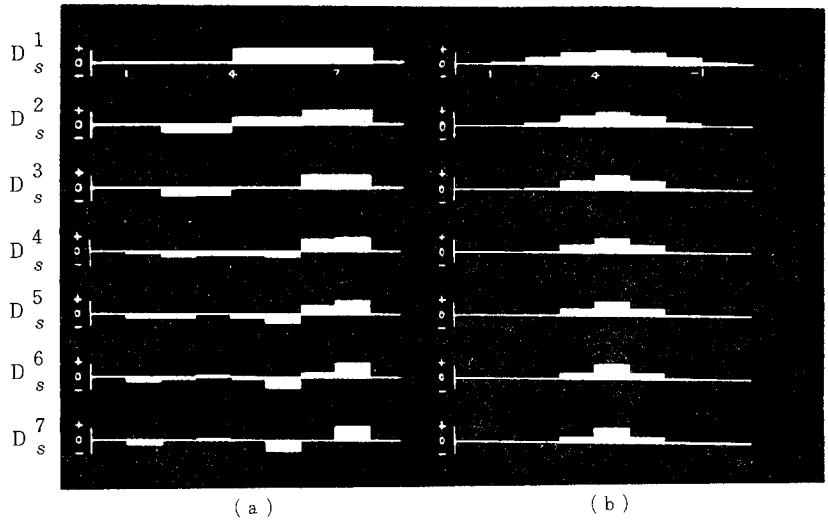


図 4・5 2進差分フィルタ．(a) 2進差分フィルタ．s は交番数を表す．(b) フーリエ変換による通常の差分フィルタ．ただし，$-1 \equiv 7 \bmod 8$．(a) の $s=0 \sim 7$ が (b) の交番数 0～3 に対応する．

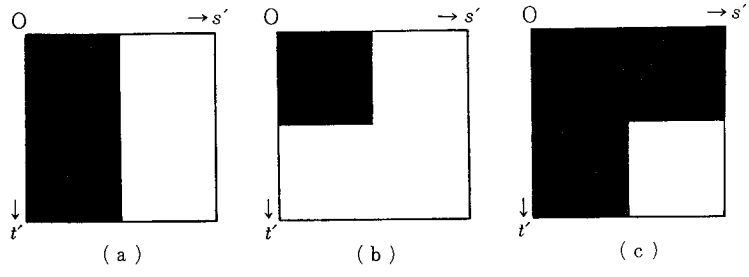
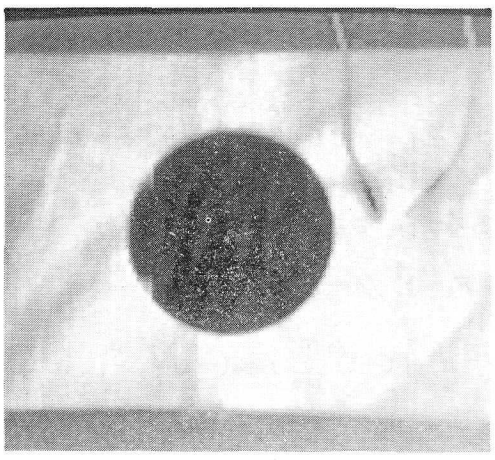
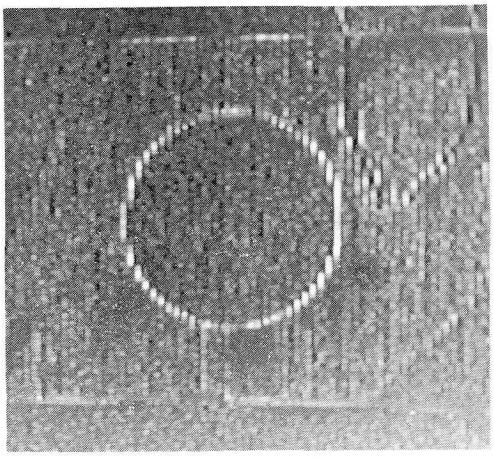


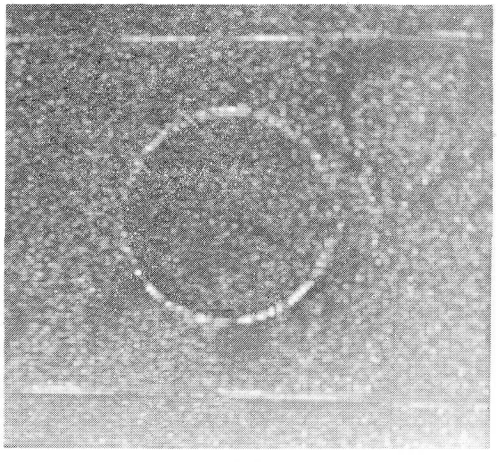
図 4・6 3種類の2次元2進差分フィルタ．白：1，黒：0．s', t'：交番数．(a) $D^{1}_{s,t} = (s \bullet 1)$．(b) $D^{1}_{s,t} = (\bar{s} \bullet 1)\ (\bar{t} \bullet 1)$, $\bar{s} = s \oplus 1$, $\bar{t} = t \oplus 1$．(c) $D^{1}_{s,t} = (s \bullet 1) \times (t \bullet 1)$．ただし，$s$, t：係数順位．



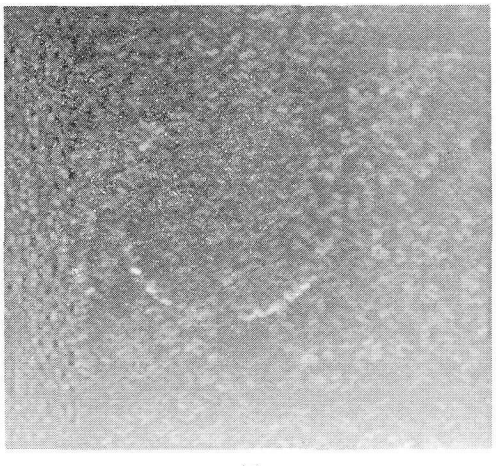
(a)



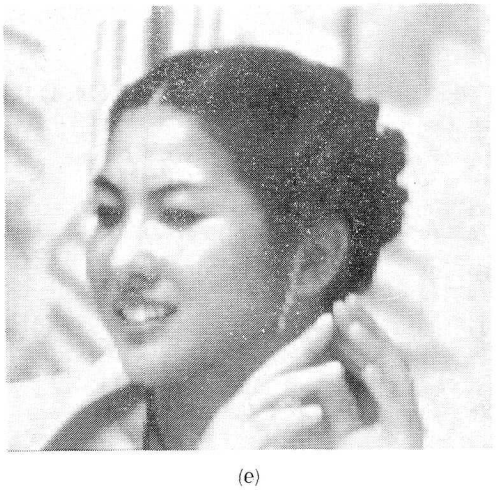
(b)



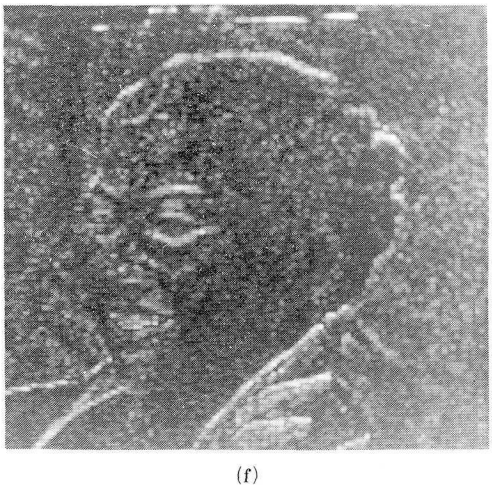
(c)



(d)



(e)



(f)

図 4・7　2進差分のフィルタによる画像の差分

(a),(e) は入力画像．(b) は図4・6 の(b)フィルタによる．(c) は図4・6 の(a)フィルタによる．(d) は図4.6 の (c) はフィルタによる．(f)は図4・6 の(a)フィルタによる．

4·2 アナログ形ウォルシュ変換装置

ウォルシュ変換は入力データの加減だけで処理が行えるのであるが，このことがまた，ウォルシュ変換を装置化(ハードウエア化)するのにも都合のよい性質となっており[28]，必然的にデータの歪みや誤差の累積をも最小にすることになる．ここでは，2種類の装置化法を提案する．

（Ⅰ） 高速変換アルゴリズム形のウォルシュ変換装置 [46][50][35][47]

ウォルシュ変換は装置化しやすい性質をもっていることは既に述べたが，それでも，このままの形で装置化することは容易でない．というのは，入力端子群と出力端子群を結ぶ結線コードの本数が，入力データの自乗に比例するからである．入力データ数$N=9$の場合が試作されているが[30]，たとえば $N=1000$ の大きさの標本の場合，百万本のコードが必要となる．そこで，すでに開発されている「高速ウォルシュ変換アルゴリズム」(FWT) [17]を利用することになる．これは高速フーリエ変換アルゴリズムとよく似ており，異なるのは「位相項」がないだけである．本来，計算機用アルゴリズムは時系列処理で空間的な見方からすると，0次元処理である．ところが，高速ウォルシュ変換アルゴリズムの流れ図（フローチャート)をみると，各入力点(端メモリ)に同時にアナログ・データを入力しても可能な構成になっている．従って，同期させることやメモリを必要としない．クロネッカー積を利用すると容易に高速ウォルシュ変換アルゴリズムを導くことができるが，ここではその変換アルゴリズムを以下のようにして導く．説明を容易にするため，$m=3$，$N=8$ の場合の1次元（同時・並列）ウォルシュ変換ついて考えてみよう．s，$i\in D_3$ として，

$$F_s=\sum_{i=0}^{7} f_i(-1)^{s\cdot i} \tag{4.14}$$

s,i の2進表示をそれぞれ，$s_2s_1s_0$，$i_2i_1i_0$ とする．上式をこれによって表現して式を展開すると，

$$F_s=\sum_{i=0}^{7} f_i(-1)^{s_2i_2\oplus s_1i_1\oplus s_0i_0}$$

$$=\sum_{i=0}^{3} f_i(-1)^{s_2i_2\oplus s_1i_1}\times(-1)^{s_0i_0}$$

$$+\sum_{i=4}^{7} f_i(-1)^{s_2i_2\oplus s_1i_1}\times(-1)^{s_0i_0}$$

となる．i が順次変化していくと，

$$\begin{cases} i=0,\ 1,\ 2,\ 3 \text{ のとき，} i_0=0 \\ i=4,\ 5,\ 6,\ 7 \text{ のとき，} i_0=1 \end{cases}$$

であるから，さらに展開して，

$$F_s=\sum_{i=0}^{3} f_i(-1)^{s_2i_2\oplus s_1i_1}$$

$$+(-1)^{s_0}\sum_{i=0}^{3} f_{i\oplus 4}(-1)^{s_2i_2\oplus s_1i_1} \tag{4.15}$$

となる．同様にして，s_2i_2，s_1i_1 についても，逐時展開していくと，最終的に次のようになる．

$$F_s=\{[f_0+(-1)^{s_0}f_1]+(-1)^{s_1}[f_2+(-1)^{s_0}f_3]\}$$

$$+(-1)^{s_2}\{[f_4+(-1)^{s_0}f_5]+(-1)^{s_1}[f_6+(-1)^{s_0}f_7]\} \tag{4.16}$$

上の右辺には3種類の括弧があるが，同じ種類の括弧は同じパターンの数式表現となっており(添字だけが異なっている)，さらにこれらをまとめた上位の括弧についても同じことがいえる．すなわち，漸化式として一般に次のように表現できる．

$l=0\sim m-1$ として，

$$I_{ki}^{(l+1)}=I_{ki}^{(l)}+(-1)^{Si}\,I_{k(i+1)}^{(l)} \tag{4.17}$$

ただし，$k=i$，$i=0,2,4,\cdots,N/k-2$，

ki : mod N $(=2^m)$として計算する．また，$I_j^{(0)}=f_j$ である．

［例］ $m=3$, $N=8$ の場合として，(14.4) は次のようになっている．

$l=0$，$k=1$，$i=0$，2，4，6

$$\left.\begin{aligned} &I_0^{(1)}=I_0^{(0)}+(-1)^{s_0}\,I_1^{(0)}\ ;\ I_0^{(0)}=f_0,\ I_1^{(0)}=f_1 \\ &I_2^{(1)}=I_2^{(0)}+(-1)^{s_0}\,I_3^{(0)}\ ;\ I_2^{(0)}=f_2,\ I_3^{(0)}=f_3 \\ &I_4^{(1)}=I_4^{(0)}+(-1)^{s_0}\,I_5^{(0)}\ ;\ I_4^{(0)}=f_4,\ I_5^{(0)}=f_5 \\ &I_6^{(1)}=I_6^{(0)}+(-1)^{s_0}\,I_7^{(0)}\ ;\ I_6^{(0)}=f_6,\ I_7^{(0)}=f_7 \end{aligned}\right\} \tag{4.18}$$

$I=1$，$k=2$，$i=0$，2

$$\left.\begin{aligned} &I_0^{(2)}=I_0^{(1)}+(-1)^{s_1}I_2^{(1)} \\ &I_4^{(2)}=I_4^{(1)}+(-1)^{s_1}I_6^{(1)} \end{aligned}\right\} \tag{4.19}$$

$I=2,\ k=4,\ i=0$

$$\overset{(3)}{I_3}=\overset{(2)}{I_0}+(-1)^{s_2}\overset{(2)}{I_6} \qquad (4.20)$$

これを図示すると **図 4・8** になり，s（係数順位）が 0～15 まで，順位増加につれて，

(i) $l=0$，s の1桁目(s_0 ビット）のくり返しパターン．

0, 1 ：図 4・8 (a)

(ii) $l=1$，s の2桁目(s_1 ビット)のくり返しパターン．

0, 0, 1, 1 ：図 4・8 (b)

(iii) $l=2$，s の3桁目(s_2 ビット)のくり返しパターン．

0, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 1 ：図 4・8 (c)

と変化する．これが高速ウォルシュ変換アルゴリズムで，入力データを N としたとき，$N\times m$ (= $N\times\log N$) に比例した結線コード数をもつ．この説明の図では，右端から入力して左端で出力となっているが，逆に左端を入力に右端を出力としても同じであることがわかっている．

さて，2次元ウォルシュ変換については，図 4・8 の多数の1次元変換回路を基にして，これを短冊状に並べ，さらに，これらに直交するように並べた，もう一群の短冊状回路を結合させると，**図 4・9** のような空間回路網になる．

（Ⅱ）格子状集積回路によるウォルシュ変換装置[39][43]

2次元ウォルシュ変換を次のように定義する．

$$F_{st}=\sum_{i=0}^{N-1}\sum_{j=0}^{N-1}f_{ij}(-1)^{i\cdot s\oplus j\cdot t} \qquad (4.21)$$

ただし，$N=2^m$，$m=0,1,2,3,\cdots$

入力データ：f_{ij}，出力データ：$F_{st}, s,t,i,j\in D_m$

ウォルシュ関数について，$(-1)^a=1-2a$ を上式に適用すると，

$$F_{st}=F_0+(-2)\sum_{i,j=0}^{N-1}f_{ij}(i\cdot s\oplus j\cdot t) \qquad (4.22)$$

ただし，$F_0=\sum_{i,j=0}^{N-1}f_{ij}$ で入力の直流成分．

$f_{ij}\geqq 0$，{(Ⅰ)の場合は負でも可であった}

となる．(4.22)が装置化のための基本式となっている．さて，この式の（・）について，

$$i\cdot s\oplus j\cdot t\ \in\{0,1\} \qquad (4.23)$$

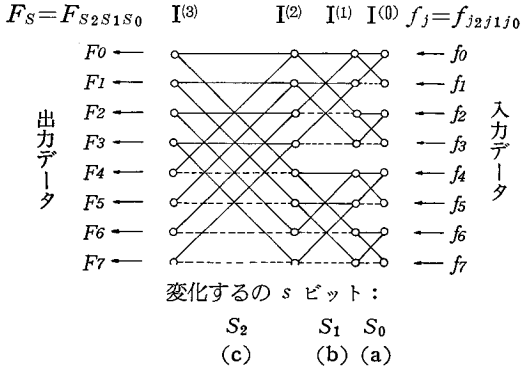


図 4・8 アナログ1次元ウォルシュ変換回路網．……は入力信号を反転させて次段に送る結線．○：端子．i,s の2進表示をそれぞれ，$i_2i_1i_0$，$s_2s_1s_0$ とする．

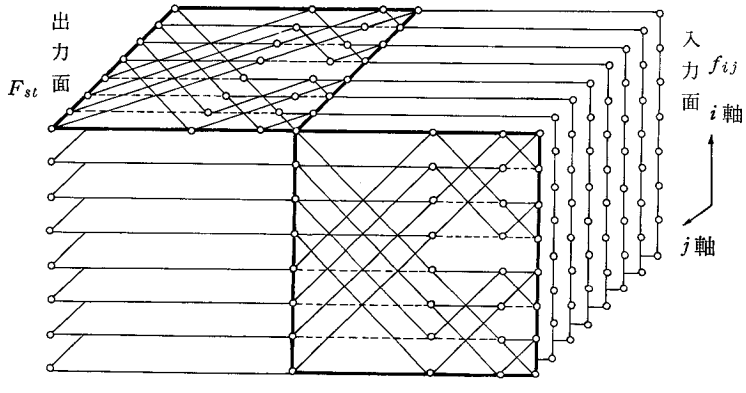


図 4・9 アナログ2次元(8×8)ウォルシュ変換回路網．$f_{ij}\overset{W}{\rightarrow}F_{st}$, $i, j, s, t\in D_3$ とする．

表 4・2 $i \cdot s \oplus j \cdot t$ の計算．$i, j, s, t \in \{0, 1, 2, 3\}$．$i, j, s, t$, の2進表示をそれぞれ，$i_1 i_0$, $j_1 j_0$, $s_1 s_0$, $t_1 t_0$ とする．値が1（下線を引いた箇所）のとき，図 4・10 の黒丸の交点に対応する．ただし，最左端の欄については逆転している．

0, 0	0, 1	0, 2	0, 3	1, 0	1, 1	1, 2	1, 3	2, 0	2, 1	2, 2	2, 3	3, 0	3, 1	3, 2	3, 3	s , t			
00, 00	00, 01	00, 10	00, 11	01, 00	01, 10	01, 10	01, 11	10, 00	10, 01	10, 10	10, 11	11, 00	11, 01	11, 10	11, 11	s_1 s_0		t_1 t_0	
																$i_1 i_0$,	$j_1 j_0$	i,	j
0⊕0⊕0⊕0	0⊕0⊕0⊕0	0⊕0⊕0⊕0	0⊕0⊕0⊕0	0⊕0⊕0⊕0	0⊕0⊕0⊕0	0⊕0⊕0⊕0	0⊕0⊕0⊕0	0⊕0⊕0⊕0	0⊕0⊕0⊕0	0⊕0⊕0⊕0	0⊕0⊕0⊕0	0⊖0⊕0⊕0	0⊖0⊖0⊕0	0⊕0⊖0⊕0	0⊕0⊕0⊕0	00,	00	0,	0
0⊕0⊕0⊕0	0⊕0⊕0⊕1	0⊕0⊕0⊕0	0⊕0⊕0⊖1	0⊕0⊕0⊕0	0⊕0⊕0⊖1	0⊕0⊕0⊕0	0⊕0⊖0⊖1	0⊕0⊕0⊕0	0⊕0⊕0⊖1	0⊕0⊕0⊕0	0⊕0⊖0⊖1	0⊖0⊕0⊕0	0⊖0⊖0⊖1	0⊕0⊖0⊖1	0⊕0⊕0⊖1	00,	01	0,	1
0⊕0⊕0⊕0	0⊕0⊕0⊕0	0⊕0⊕1⊕0	0⊕0⊕1⊕0	0⊕0⊕0⊕0	0⊕0⊕0⊕0	0⊕0⊕1⊕0	0⊕0⊕1⊕0	0⊕0⊕0⊕0	0⊕0⊕0⊕0	0⊕0⊕1⊕0	0⊕0⊕1⊕0	0⊕0⊕0⊕0	0⊕0⊕0⊕0	0⊕0⊕1⊕0	0⊕0⊕1⊕0	00,	10	0,	2
0⊕0⊕0⊕0	0⊕0⊕0⊕1	0⊕0⊕1⊕0	0⊕0⊕1⊕1	0⊕0⊕0⊕0	0⊕0⊕0⊕1	0⊕0⊕1⊕0	0⊕0⊕1⊕1	0⊕0⊕0⊕0	0⊕0⊕0⊕1	0⊕0⊕1⊕0	0⊕0⊕1⊕1	0⊕0⊕0⊕0	0⊕0⊕0⊖1	0⊕0⊕1⊕0	0⊕0⊕1⊕1	00,	11	0,	3
0⊕0⊕0⊕0	0⊕0⊕0⊕0	0⊕0⊕0⊕0	0⊖0⊕0⊕0	0⊕1⊕0⊕0	0⊕1⊕0⊕0	0⊕1⊕0⊕0	0⊕1⊕0⊕0	0⊕0⊖0⊕0	0⊕0⊖0⊕0	0⊕0⊕0⊕0	0⊕0⊕0⊕0	0⊕1⊕0⊕0	0⊕1⊕0⊕0	0⊕1⊕0⊕0	0⊕1⊕0⊕0	01,	00	1,	0
0⊕0⊕0⊕0	0⊕0⊕0⊕1	0⊕0⊕0⊕0	0⊕0⊕0⊕1	0⊕1⊕0⊕0	0⊕1⊕0⊕1	0⊕1⊕0⊕0	0⊕1⊕0⊕1	0⊕0⊖0⊕0	0⊕0⊖0⊕1	0⊕0⊕0⊕0	0⊕0⊕0⊕1	0⊕1⊕0⊕0	0⊕1⊕0⊕1	0⊕1⊕0⊕0	0⊕1⊕0⊕1	01,	01	1,	1
0⊕0⊕0⊕0	0⊕0⊕0⊕0	0⊕0⊕1⊕0	0⊕0⊕1⊕0	0⊕1⊕0⊕0	0⊕1⊕0⊕0	0⊕1⊕0⊕0	0⊕1⊕0⊕0	0⊕0⊖0⊕0	0⊕0⊖0⊕0	0⊕0⊕1⊕0	0⊕0⊕1⊕0	0⊕1⊕0⊕0	0⊕1⊕0⊖0	0⊕1⊕0⊕0	0⊕1⊕0⊕0	01,	10	1,	2
0⊕0⊕0⊕0	0⊕0⊕0⊕1	0⊕0⊕1⊕0	0⊕0⊕1⊕1	0⊕1⊕0⊕0	0⊕1⊕0⊕1	0⊕1⊕0⊕0	0⊕1⊕0⊕1	0⊕0⊖0⊕0	0⊕0⊖0⊕1	0⊕0⊕1⊕0	0⊕0⊕1⊕1	0⊕1⊕0⊕0	0⊕1⊕0⊖1	0⊕1⊕0⊕0	0⊕1⊕0⊕1	01,	11	1,	3
0⊕0⊕0⊕0	0⊕0⊕0⊕0	0⊕0⊕0⊕0	0⊕0⊕0⊕0	0⊕0⊕0⊕0	0⊕0⊕0⊕0	0⊕0⊕0⊕0	0⊕0⊕0⊕0	1⊕0⊕0⊕0	1⊕0⊕0⊕0	1⊕0⊕0⊕0	1⊕0⊕0⊕0	1⊕0⊕0⊕0	1⊕0⊕0⊕0	1⊕0⊕0⊕0	1⊕0⊕0⊕0	10,	00	2,	0
0⊕0⊕0⊕0	0⊕0⊕0⊕1	0⊕0⊕0⊕0	0⊕0⊕0⊖1	0⊕0⊕0⊕0	0⊕0⊕0⊖1	0⊕0⊕0⊕0	0⊕0⊕0⊖1	1⊕0⊕0⊕0	1⊕0⊕0⊖1	1⊕0⊕0⊕0	1⊕0⊕0⊖1	1⊕0⊕0⊕0	1⊕0⊕0⊖1	1⊕0⊕0⊕0	1⊕0⊕0⊖1	10,	01	2,	1
0⊕0⊕0⊕0	0⊕0⊕0⊕0	0⊕0⊕1⊕0	0⊕0⊕1⊕0	0⊕0⊕0⊕0	0⊕0⊕0⊕0	0⊕0⊕1⊕0	0⊕0⊕1⊕0	1⊕0⊕0⊕0	1⊕0⊕0⊕0	1⊕0⊕1⊕0	1⊕0⊕1⊕0	1⊕0⊕0⊕0	1⊕0⊕0⊕0	1⊕0⊕1⊕0	1⊕0⊕1⊕0	10,	10	2,	2
0⊕0⊕0⊕0	0⊕0⊕0⊕1	0⊕0⊕1⊕0	0⊕0⊕1⊕1	0⊕0⊕0⊕0	0⊕0⊕0⊖1	0⊕0⊕1⊕0	0⊕0⊕1⊕1	1⊕0⊕0⊕0	1⊕0⊕0⊕1	1⊕0⊕1⊕0	1⊕0⊕1⊕1	1⊕0⊕0⊕0	1⊕0⊕0⊖1	1⊕0⊕1⊕0	1⊕0⊕1⊕1	10,	11	2,	3
0⊕0⊕0⊕0	0⊕0⊕0⊕0	0⊕0⊕0⊕0	0⊕0⊕0⊕0	0⊕1⊕0⊕0	0⊕1⊕0⊕0	0⊕1⊕0⊕0	0⊕1⊕0⊕0	1⊕0⊕0⊕0	1⊕0⊕0⊕0	1⊕0⊕0⊕0	1⊕0⊕0⊕0	1⊕1⊕0⊕0	1⊕1⊕0⊕0	1⊕1⊕0⊕0	1⊕1⊕0⊕0	11,	00	3,	0
0⊕0⊕0⊕0	0⊕0⊕0⊕1	0⊕0⊕0⊕0	0⊕0⊕0⊖1	0⊕1⊕0⊕0	0⊕1⊕0⊕1	0⊕1⊕0⊕0	0⊕1⊕0⊕1	1⊕0⊕0⊕0	1⊕0⊕0⊕1	1⊕0⊕0⊕0	1⊕0⊕0⊕1	1⊕1⊕0⊕0	1⊕1⊕0⊕1	1⊕1⊕0⊕0	1⊕1⊕0⊕1	11,	01	3,	1
0⊕0⊕0⊕0	0⊕0⊕0⊕0	0⊕0⊕1⊕0	0⊕0⊕1⊕0	0⊕1⊕0⊕0	0⊕1⊕0⊕0	0⊕1⊕0⊕0	0⊕1⊕0⊖0	1⊕0⊕0⊕0	1⊕0⊕1⊕0	1⊕0⊕1⊕0	1⊕0⊕1⊕0	1⊕1⊕0⊕0	1⊕1⊕0⊕0	1⊕1⊕0⊕0	1⊕1⊕0⊕0	11,	10	3,	2
0⊕0⊕0⊕0	0⊕0⊕0⊕0	0⊕0⊕1⊕0	0⊕0⊕1⊕0	0⊕1⊕0⊕0	0⊕1⊕0⊕0	0⊕1⊕0⊕0	0⊕1⊕0⊕0	1⊕0⊕0⊕0	1⊕0⊕1⊕0	1⊕0⊕1⊕0	1⊕0⊕1⊕0	1⊕1⊕0⊕0	1⊕1⊕0⊕0	1⊕1⊕0⊕0	1⊕1⊕0⊕0	11,	11	3,	3

であるからで，この値が0のときは，信号は出力側には伝達されないで，1のとき伝播すると考えると，

$$\sum_{i,j=0}^{N-1} f_{ij}(i\cdot s \oplus j\cdot t) \qquad (4.24)$$

は加算のみの回路となっている．−2 すなわち引算については，(4・24)の演算のあとで実行する．(4.22) を図にすると **図 4・10** となる．4×4の場合の (4.23) を**表 4・2** に示した．(4.23)の値が1のとき，図中の黒丸に対応している．図 4・10 について少し詳しく説明しよう．最右端の列が入力端子群で，信号はまず，ここに入る．これらの各々は左水平方向にのびたコードにつながっている．この中の一本に信号が入ると，コード内を信号が伝播し垂直方向にのびた出力コード群と（黒丸の部分で）交差する．この交差点で出力側に信号が伝播する．出力側からみると，各交差点(黒丸の部分)から信号が流入（伝播）してきて加算が行われて素子 G に入る．この素子の利得は−2で，ついで信号は加算回路 A に入る．直流成分 G_0 からの信号が A で加えられ，最終的に（4・22）が出力される．

次に，信号が入力コードから出力コードへ伝播するごとに入力側のパワーが減衰する．ところが，一本の入力コード内では交差点での出力側への伝播量は同じでなければならない．そこで，以下のようにして調整しておく．これにより，入力側から出力側への信号の流入量は自動的に一定量になる．図 4・10 において，右から第 k 番目の黒丸の交差点の信号の伝播率を $x_{k+1}(<1)$ とする．この点でのパワーを P として，

第 $k+1$ 番目の出力コードへの伝播量：$P\,x_{k+1}$ (4.25)

上と同一の入力コード内の

第 $k+2$ 番目の交差点への伝播量：$P(1-x_{k+1})$ (4.26)

となる．第 $k+2$ 番目の黒丸の交差点において，上と同様の議論により，

第 $k+1$ 番目における出力コードへの伝播量：

$$P(1-x_{k+1})x_{k+2} \qquad (4.27)$$

となり，(4.25) と (4.27) とは等しくなければならないから，

$$Px_{k+1}=P(1-x_{k+1})x_{k+2}$$

となって，これより，

$$x_k=x_0/(1-kx_0) \qquad (4.28)$$

ただし，$\sum_{k=0}^{N/2} x_k=1$

となる．この x_k に比例するようにコードの交差点の伝播率を定める．このようにして，図 4・10 のようにほとんど規則正しい格子状回路と最小限の引算回路により，大量の入力データ処理可能なICによる装置の製作を容易にすることができる．

ところで，ここでは2次元変換装置を一枚の平面回路として扱っているのが特徴であるが，大量のデータを処理するためのものであれば，やはり大掛りとなる．たとえば，1000×1000 の2次元データを処理するとなると，コード間隔を 10 μm として，(1000×1000×10 μ =) 1 m 四方の平面回路となって実用的ではない．そこで，(I) の図 4・9 で示したように，まず，1次元変換回路網つくってから空間回路を組みたてれば小型化することができる．

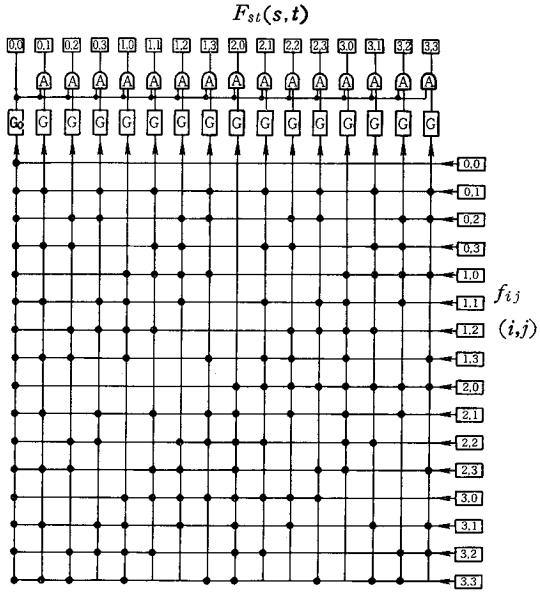


図 4・10 格子状集積回路による 4×4 の2次元ウォルシュ変換装置．G は利得−2の光電変換素子．G_0 は +1 の素子．A は加算素子．$f_{ij} \overset{W}{\rightarrow} F_{st}$．格子状回路の中の黒丸は，入力コードから出力コードへ信号が伝播する箇所である．

第5章　結　　論

「ウォルシュ関数」や「ウォルシュ変換」の研究手法である数学の導入を，基本として以下の四つのことがらに依っている．

(a)　ガロア体 $GF(2)$, mod 2

(b)　x^m を法とする多項式の剰余類環の導入

(c)　10進表示と行列・ベクトル表現への採用

(d)　コールマン形（－1の巾乗）のウォルシュ関数の採用

すなわち，2進環 D_m による数学体系とコールマン形ウォルシュ関数の採用により，ウォルシュ変換の理論展開が見通しのよいものとなり，今後の発展への有力な手段となる．ただ，D_m は環（すなわち割算ができない）であって，「体」でないのが残念である．(b) の法として，既約多項式を選ぶと体になり得るが，果してこれが情報工学的な立場から意味があるかどうかわからない．主として以下の結果が得られた．

(i)ウォルシュ関数やウォルシュ変換を扱うのに必要な数学構造を導いた．これにより自然な形で「積」を導入することができて，ウォルシュ関数やウォルシュ変換において掛算を行うことができるようになった．

(ii)コールマン形のウォルシュ関数，および，ウォルシュ変換を導入した．これは変数が陽の形になっているので曖昧さがなく，かつ，見通しよく式を展開できるようになった．

以上の基本構造を定めたあと，フーリエ変換で得られている諸性質がウォルシュ変換ではどのような形で表現できるかを一つの目標として，主として次の結果を得た．

(iii)標本化定理については，帯域幅と標本間隔との関数はフーリエ変換と同一であることは確認したが，重要なことは，帯域制限を行う前と後の入力面における変化が，「平均効果」として予想できることがわかった．

(iv)ウォルシュ関数の不定和分の公式は，変数が陽の形で現れていることで，今後の「ウォルシュ積分」の出発点になるだろう．

(v)2進差分を導入することにより，ウォルシュ面でのフィルタを定めることができて，逆に入力面の変化量を予想できるようになった．これを画像処理に応用してみた．

(vi)ウォルシュ関数，および，ウォルシュ変換は「装置化」が容易な性質をもっているが，これを二種類の変換装置として提案している．一つは，高速ウォルシュ変換アルゴリズムに基づいた空間回路形の平面回路としての2次元ウォルシュ変換．もう一つは，格子状集積回路を用いた2次元ウォルシュ変換回路である．これは途中の演算をできるだけ加算演算とし，最後の段階で引算を行っている．以上の二つの方式は，現在，急速に発展しつつある IC 技術によって非常に小型化できる可能性をもっている．

以上ここで得られた結果のなかには，フーリエ変換で得られているものと形式的に似たものがあるのは興味深い．というのは，本研究では対象としている目的・手法をフーリエ変換のそれとできるだけ似たものにしようと努めているにもかかわらず，数学構造が基本的に異なるので，今後，見出されるであろう諸々の結果はウォルシュ関数あるいはウォルシュ変換独自の形式あるいは形態になることが予想されるからである．

今までのウォルシュ関数やウォルシュ変換を扱っている人々は，少しオーバーな表現をすると，各人各様の方法で，それらを導いたり定義したりして論じている．共通していえることは，変数を「陽」の形で扱っていないか，あるいは，その形（たとえば，－1の巾乗）であっても，単にウォルシュ関数の一表現にしか使わないで，発展させていない．本研究で得られた諸結果は，それらの方法では見つけ難く，証明するのにも困難である．よく行われているのは，単に，フーリエ変換

からの類推による「結論の目標設定」とか「証明手順の借用」である．従来の方法に従えば，フーリエ変換によるものと「同じである」あるいは「異なっている」というもので，どのように異なっているかについては無力で，数式を自由に展開できないから緻密な議論ができなかった．ここで導入した方法は，簡単な表現で，しかも，変数が陽に現われているので，潜在的発展性を秘めているといえよう．すこし煩わしいのは，交番数が陽に出ていないため，係数順位から交番数に変換しなければならないことである．線形の変換行列であるから数式的に扱うのには問題ないが，「表・図式」に表す場合，交番数順に並びかえるのがすこし面倒である．

いずれにしても，一時期，流行した感があるにもかかわらず，理論的にはめざましい成果を得たとはいい難い．一つの原因は「表現形式」が整っていなかったのが大きな原因である．当研究の手法は，「曖昧さ」を避けるために定義域での変数はディスクリートなものとしたが，今後，数学的には差分から微分へ，和分から積分へと発展させなければならないし，工学的にはフーリエ変換，ラプラス変換と同等の各種の公式を求めなければならない．応用としては，当然，通信理論・(画像)情報処理・パターン認識等へ適用し，さらにはオンライン使用を目指した実用的な回路実現へと発展させねばならない．本研究はこれらの「出発点」あるいは「糸口」になるものと考えている．

謝　　辞

本研究を行うにあたり，終始，親切なる御指導と激励を賜った 大阪大学 田中幸吉教授ならびに本論文に有益な教示や助言をいただいた大阪大学 高島 堅助教授，藤沢俊男教授，嵩 忠雄教授，都倉信樹教授にたいし深く感謝を申しあげます．

また，この研究に多くの貴重な助言や示唆を賜った 足利工業大学 喜安善市教授ならびに 松下技研専務取締役 研野和人氏，千葉工業大学 常包辛吾教授に深く感謝を申しあげます．

さらに日頃，貴重な助言や指導をいただいている 大阪大学 田村進一助教授，貴重な 文献資料をいただいた田中 稔氏ならびに国際電信電話研究所 芝田好章氏に厚くお礼申しあげます．

また当初から支援をいただいた機械技術研究所 金井実徳所長，木村　誠次長，システム部清水嘉重郎部長，光学情報課河野嗣男課長ならびに日頃，貴重な助言や協力をいただいた同研究所元職員 渡辺　譲氏，同研究所システム部中村達也氏，数理工学課，バイオメカニクス課，光学情報課の方々に厚くお礼を申しあげます．

参 考 文 献

[1] "Applications of Walsh functions", Symposium Proc. (1970), (1971), (1972), (1973).

[2] 田中幸吉："空間フィルタリングによるパターン認識", 画像技術 6, pp. 42—50 (1972).

[3] 喜安善市："Hadamard 行列とその応用", p. 93, 電子通信学会 (昭54).

[4] H. A. Helm : "Group codes and Walsh functions", in "Application of Walsh functions", Proceedings, pp. 78—83 (1971).

[5] R. P. Coleman : "Orthogonal functions for the logical design of switching circuits", IRE Trans. Electronic. Comput. pp. 379—383(Sept. 1961).

[6] H. F. Harmuth : "Sequency theory —foundations and applications", Academic Press, New York, p. 32(1977).

[7] F. Pichler : "Das system der sal-und cal-functionen und Fourier transformation", ph.D. thesis, Innsbruck University, Austria(1967).

[8] H. F. Harmuth : "A generalized concept of frequency and some application", IEEE Trans. IT—14, 3, p. 375—382 (1968).

[9] J. A. Decker, Jr., : "Hadamard transform image scanning", Applied Optics, Vol. 9, pp. 1392—1395, No. 6, June, 1970.

[10] W. K. Pratt, J. Kane and H.C. Andrews : "Hadamard transform image coding", Proc. IEEE, 57, 1, pp. 58—68 (1969).

[11] 情報処理学会編："情報処理ハンドブック" 3, p. 14—16, オーム社.

[12] T. Tamir and H. Kogelnik : "Integrated Optics", Berlin, Springer-Verlag p. 73 and p. 120(1979).

[13] 宮川洋, 岩垂好裕, 今井秀樹："符号理論", p. 90. 昭晃堂 (昭48).

[14] 河村匡彦, 田中末雄："拡張ウォルシュ関数による交番数解析における標本化定理の証明", 電子通信学会論文誌(D), J 61—D, 9, pp. 621—626 (昭53—9).

[15] F. O'Gorman : "Edge detection using Walsh function", Artificial Intelligence, 10, pp. 215—223 (1978).

[16] 文献 [3] の p. 160—162.

[17] J. L. Shanks : "Computation of the fast Walsh-Fourier transform", IEEE Trans. Comput., 18—5, p. 457 (May, 1969).

[18] J. E. Gibbs : "Discrete complex Walsh function", Proc. of Application of Walsh functions, pp. 107 (1970).

[19] 文献 [6] の p. 34.

[20] 文献 [6] の p. 21.

[21] 文献 [3] の p. 45.

[22] 文献 [3] の p. 82.

[23] 田中(稔), 小沢, 田中(幸)："文字識別のための変形ウォルシュパワースペクトル", 電子通信学会論文誌 (D), J 56—D, 7, p. 441—443 (昭48—07).

[24] 文献 [6] の p. 60—61.

[25] 田中幸吉："情報工学" p. 124, 朝倉書店 (昭44).

[26] 文献 [13] の p. 90.

[27] 田中(稔), 小沢, 田中(幸)："変形ウォルシュスペクトルとその文字識別への応用", 電子通信学会論文誌(D), J 58—D, 3, pp. 135—142 (昭50—03).

[28] 田中(幸), 田中(稔)：特許 "文字識別方法及び装置", 特許 第1089962 特許公報 (昭56—31633).

[29] K. Tanaka and K. Ozawa : "A new type of feature extraction of patterns using coherent optical systems", Pattern Recognition, Pergammon Press, Vol. 4, pp. 251—262 (1972).

[30] S. Tamura and K. Tanaka : "Integral transform and Fourier transform by fiber optics network", Applied Optics, 11, 1, pp. 199—200 (1972).

[31] 福井郁生："ガロア体 $GF(2)$ による Walsh

変換の性質", 電子通信学会論文誌(D), J 59—D, 7, pp. 496—503 (昭51—07).

[32] 福井郁生: "擬似極形式による Walsh 変換", 電子通信学会論文誌(D), J 59—D, 10, pp.743—744 (昭51—10).

[33] 福井郁生: "Dyadic 相似変換の Walsh 面での影響", 電子通信学会論文誌 (D), J 60—D, 4, pp.314-316 (昭52—04).

[34] 福井郁生: "ウォルシュ変換における Dyadic 差分フィルタ", 電子通信学会論文誌(D), J 60—D, 7, pp.555—556 (昭52—07).

[35] 福井郁生: "二次元フーリエおよびアダマール変換装置", 電子通信学会論文誌(D), J 55—D, 3, pp.226—227 (昭47—03).

[36] 福井郁生: "ウォルシュ変換のサンプリングに関する性質", 電子通信学会論文誌 (D), J 60—D, 11, pp.1011—1013 (昭52—11).

[37] I. Fukui: "Difference and indefinite sum of Walsh function", IEEE on Pattern analysis and machine intelligence (投稿中).

[38] I. Fukui: "Analysis and application of dyadic difference in the Walsh Transform", IEEE on Pattern analysis and machine intelligence(投稿中).

[39] I. Fukui: "Two-dimensional Walsh transform device using an integrated optical circuit", IEEE circuit and systems, 29, May, pp.336—339(1982).

[40] I. Fukui: "TV image processing to determine the position of a robot vehicle", Pattern Recognition, Vol. 14, Nos. 1—6, pp.101—109 (1981).

[41] 福井郁生: "見込み角測定による位置決めとその応用", 電子通信学会論文誌(D), J 65—D, 4, pp. 427—434 (昭57—04).

[42] 特許出願: "ウォルシュ変換装置", 出願番号 161308, 昭和56年10月 (出願中).

[43] I. Fukui: "Two-dimesional Walsh transform device using an integrated optical circuit", Trans. IECE Japan, E 56, 1, pp.61—62 (Jan. 1982).

[44] 福井郁生: "ウォルシュ変換におけるポアソンの和, 標本化定理, 入出信号の関係", 電子通信学会論文誌(D)(印刷中).

[45] 小沢, 田中(幸): "Φ 空間フィルタ法による文字図形の特徴抽出", 電子通信学会論文誌(C), J 54—C, 2, pp.109—115 (昭46—02).

[46] 福井, 清水: "二次元フーリエおよびアダマール変換装置", 機械試験所所報, vol. 25, 2 (1971).

[47] 文献 [6] の p.155—157.

[48] A. Papoulis: "System and transform with application in Optics". McGraw-Hill, p.65 (1968).

[49] 文献 [48] の p.117—119.

[50] H. F. Harmuth: "Transmision of information by orthogonal functions", second edition, Springer-Verlag, p. 130 (1972).

[51] "Applications of Walsh functions and sequency theory", in Symposium 1974, Proc. 表紙のデザイン(1974).