Title	Asymptotic analysis for nonlinear dispersive wave equations
Author(s)	Ikeda, Masahiro
Citation	大阪大学, 2013, 博士論文
Version Type	VoR
URL	https://hdl.handle.net/11094/27466
rights	
Note	

【26】

氏　　　　名	池　田　正　弘（いけだ　まさひろ）
博士の専攻分野の名称	博　士（理学）
学位記番号	第　２５８０７　号
学位授与年月日	平成 25 年 3 月 25 日
学位授与の要件	学位規則第４条第１項該当 理学研究科数学専攻
学位論文名	Asymptotic analysis for nonlinear dispersive wave equations （非線形分散型波動方程式の解の漸近解析）
論文審査委員	（主査） 教　授　林　　仲夫 （副査） 教　授　土居　伸一　　教　授　西谷　達雄　　准教授　砂川　秀明

論文内容の要旨

第１章において，著者は時間依存型ハートリー・フォック方程式(HF)の散乱問題について考察している．この方程式は N 体のフェルミ粒子に対する近似として量子力学で現れる方程式である．第１章のテーマは HF に対する修正散乱作用素が存在するのか?という問題を考えることである．先行研究と比較すると，この作用素を得るためには，2001 年に和田氏によって得られた修正波動作用素の定義域と値域を改良する必要があった．そこで，著者は和田氏の用いた方程式の近似解とは若干異なる近似解を用いてそれらの改良に成功した．その近似解の構成法は林氏，Naumkin 氏らによる 2006 年の臨界冪非線形項を持つシュレディンガー方程式に対する構成法を参考にしている．その定義域と値域の改良により，小さなデータに対する修正散乱作用素の存在が示されている．

第２章と第３章では，ディラック・クライン・ゴルドン方程式系(DKG)に対する散乱問題が扱われている．これはディラック方程式とクラインゴルドン方程式の連立系であり，それぞれはシュレディンガー方程式の相対論版として導入されたものである．DKG はあるクライン・ゴルドン方程式のシステムに変換できることが良く知られている．さらにクライン・ゴルドン系対しては，1980 年代頃から小さなデータに対する散乱理論の結果が多く得られている．特に，Bagus 氏は 2009 年に DKG から導かれるクライン・ゴルドン方程式系に対して空間 3 次元において，低階のソボレフ空間の下で散乱作用素の存在を示している．しかし，元の DKG 自体に対する，その作用素の存在は知られていなかった．第２章では，著者は DKG 自体の散乱作用素の存在を示している．これは林氏，Numkin 氏との共同研究による内容である．次に，第３章では，空間２次元においての DKG を取り扱っている．空間２次元の場合は，空間３次元よりも期待される解の時間減衰の割合が遅いので，問題はより難しくなる．著者は 2003 年の砂川氏の Klein-Gordon 方程式系に関する論文の変換とクライン・ゴルドン作用素がディラック作用素の積で表現できるという事実を組み合わせることにより，時間減衰の不足の困難さを解決した．さらにストリッカーツ評価と呼ばれる時空間評価も用いて，空間２次元において，質量に関する非共鳴条件の下，低階のソボレフ空間において波動作用素の存在を示すことに成功している．また，クライン・ゴルドン作用素のディラック作用素による分解を用いて，逆波動作用素の存在も明らかになる．これは下村氏と砂川氏との共同研究である．

第４章と第５章では，絶対値 p 乗の非線形項を持つシュレディンガー方程式(NLS)の解の爆発について考察されている．ゲージ不変性のある場合についての NLS は多くの研究がある．この場合，解の２乗可積分ノルムが保存するので，L^2の意味での大域解の存在が $1<p<1+4/n$ の場合にすぐに分かる．しかし，絶対値 p 乗の非線形項を持つ場合の NLS に対する解の２乗可積分ノルムの保存は一般には期待できない．それゆえ，$1<p<1+4/n$ の場合においての大域解の存在及び非存在は明らかではない．そこで，第４章では $1<p\leqq 1+2/n$ の場合には，小さなデータに対する解の有限時間爆発が起こることが示されている．これは若杉氏との共同研究による内容である．その証明法は Zhang 氏による 1998 年及び 2001 年の論文のテスト関数の方法を NLS に応用している．

第５章では，第４章と同様のシュレディンガー方程式が扱われている．第４章で用いた証明は背理法に基づいていたので，爆発解の爆発時刻（ライフスパン）の評価や爆発スピード等の情報が得られない．そこで，著者は Kuiper 氏の 2003 年の放物型方程式におけるライフスパンの評価に関する論文のアイデアを参考にして，テスト関数法を再度見直し，それをシュレディンガー方程式に応用することにより解のライフスパンの評価，特に上からの評価を $1<p<1+2/n$ の範囲に得ている．

論文審査の結果の要旨

本論文は非線形分散型波動方程式の解の振舞いについて研究したものである．第１章から第３章までは方程式系に対する解の漸近的ふるまいの研究成果を，第４章及び第５章では非線形シュレディンガー方程式の爆発解についての研究成果を述べたものである．以下各章について述べる．

第１章では，ハートリー・フォック方程式の散乱問題について考察され，臨界冪非線形項を持つシュレディンガー方程式に対する近似解の構成法を利用して小さなデータに対する修正散乱作用素の存在を示すことができたことが成果として述べられている．

第２章では，3 次元ディラック・クライン・ゴルドン方程式系に対する散乱問題が扱われている．Bagus 氏は 2009 年にディラック・クライン・ゴルドン方程式系から導かれるクライン・ゴルドン方程式系に対して，従来の研究より低階のソボレフ空間の下で散乱作用素の存在を示している．しかし，ディラック・クライン・ゴルドン方程式系に対しての散乱作用素の存在は未解決であった．林氏，Numkin 氏との共同研究により散乱作用素の存在が示されたこと，さらに散乱作用素の定義域，値域を広くしたことが成果と考えられる．

第３章では，２次元ディラック・クライン・ゴルドン方程式系の研究成果が述べられている．空間２次元の場合は，空間３次元よりも期待される解の時間減衰が遅いので，問題はより困難となる．ここでは砂川氏の Klein-Gordon 方程式系に関する代数的標準変換を用いて，質量に関する非共鳴条件の下，波動作用素の存在を示すことに成功している．また下村氏と砂川氏との共同研究により逆波動作用素の存在も明らかにされた．

第４章では，若杉氏との共同研究により絶対値 p 乗の非線形項を持つシュレディンガー方程式の解の爆発について考察したことが記述されている．爆発解の問題は重要な問題として残されてきた問題である．Zhang 氏による放物型方程式あるいは消散型波動方程式の解の爆発に対して開発されたテスト関数の方法が応用できることを発見し，$1<p\leqq 1+2/n$ の場合に，解の有限時間爆発が起こることを示したことが重要な結果としてあげられる．

第５章では，第４章と同様のシュレディンガー方程式が扱われている．第４章で用いられた証明は背理法に基づいたもので，爆発解の爆発時刻に対する評価を求めることは困難であった．Kuiper 氏による放物型方程式における爆発時刻の評価の方法を用いて，解の爆発時刻の評価を初期値に関する減衰を仮定することにより，$1<p<1+2/n$ の範囲で得た成果が報告されている．

いずれも新しい結果であり独創性のある研究であると考える．

よって，本論文は博士（理学）の学位論文として十分価値あるものと認める．