The University of Osaka
Institutional Knowledge Archive

Title	断熱過程を用いた^<40>Ca^+の量子状態制御とデコヒーレンスの抑制
Author(s)	野口, 篤史
Citation	大阪大学, 2013, 博士論文
Version Type	VoR
URL	https://hdl.handle.net/11094/27508
rights	
Note	

The University of Osaka Institutional Knowledge Archive : OUKA

https://ir.library.osaka-u.ac.jp/

The University of Osaka

理甲16322

断熱過程を用いた$^{40}Ca^{+}$の量子状態制御とデコヒーレンスの抑制

2013年3月

野口篤史

断熱過程を用いた$^{40}Ca^{+}$の量子状態制御とデコヒーレンスの抑制

博士（理学）論文提出先

大阪大学大学院基礎工学研究科

2013年3月

野口篤史

学位論文概要

イオントラップを用いると、電磁場の摂動のない点に多数個のイオンを捕獲する事ができる。またレーザー冷却によって十分に冷やされたイオンはラムディッケ領域と呼ばれる領域にまで局在化し、その内部・外部状態をレーザー光を用いて自由に制御する事が可能になる。さらにイオン間に働くクーロン相互作用によって、多数のイオンは一つなぎになって運動する。この集団的な運動を利用する事でイオン間に実行的な相互作用を誘起する事が可能になり、量子情報処理における 2qubit ゲートや多体のエンタングルド状態の生成が可能となる。このような特徴を活かし、トラップイオン系は量子情報処理において広く研究がなされてきた。

一方で、一般に量子状態を制御する手法として断熱的な手法がある。断熱的な手法は実験パラメータの揺らぎや、ある特定のノイズに強いといった特徴がある。

本論文では、冷却イオンを用いた断熱過程による量子状態制御や、また断熱過程を利用したデコヒーレンスの抑制について報告をする。

第１章　序論

本論文の研究背景と研究目的について述べる。

第２章　イオントラップを用いた量子情報処理

イオントラップの基本原理や、余剰マイクロモーション、イオン鎖などのイオントラップに関する基本的な点、またレーザー冷却の原理について説明をする。次に、実験のための周辺技術として、イオンの再結晶化やファイバーノイズの問題に触れる。後半では、量子情報処理のためのイオンの量子操作や射影測定、特にエンタングリングゲートである Mølmer-Sørensen ゲートについて詳しく述べる。

第３章　実験I: 誘導ラマン断熱通過法を用いた幾何学的単一qubit量子ゲート

量子情報処理のためには、高精度な 1qubit ゲートの実現が不可欠である。そんな高精度なゲート実現のために考案された手法の一つとして、幾何学的位相量子ゲートがある。通常のゲートが力学的な変化によってスピンを回転させるのに対し、この手法は幾何学的位相を状態に付与する事で回転を行う。本章では、誘導ラマン断熱通過法による断熱的な状態制御によって、幾何学的位相を qubit に付加する。この幾何学的位相を利用した 1qubit ゲートの実現に関する理論と実験について述べる。

第4章　実験II: デコヒーレンスフリードレスト状態の生成

量子状態は外部からの擾乱によって壊れ続けている。量子状態の可干渉性（コヒーレンス）を失わせるそのような崩壊をデコヒーレンスと呼ぶ。量子情報処理分野においても、そのような量子状態の崩壊がそれまでの計算内容や貯えられていた情報を失わさせる。ゆえに、同じ系で如何に長いコヒーレンス時間を得られるかというのが重要な問題となる。

デコヒーレンスは系が環境と相互作用する限りゼロにはできないが、その影響を小さくすることは可能である。本章では、制御された外場が量子系と結合したドレスト状態を用いることで、その他の外乱による系への擾乱を防ぐ手法を提案し、実現した実験について記述する。またそのような状態の生成方法として、外場と結合したドレスト状態自身を用いる方法を実現した。外場によって守られた量子エンタングルド状態を用いる事で、コヒーレンスが守られてない状態に比べコヒーレンス時間で約２桁ほど改善された事を確認した。また、最後にこのシステムを利用した応用実験を二つ提案する。

第5章　実験III: 多数qubitのDicke状態生成と精密測定

多数個のエンタングルド状態を作る事は、量子情報処理や精密測定などを実現する上で大きな課題となる。なぜならば、一般にノイズに弱いエンタングルド状態を多数個に対し生成するには、擾乱に強い生成方法を用いてかつ非常に高い忠実度で系を操作しなくてはならないと言う事ができるからである。

本章では、多数個のエンタングルド状態のクラスの一つである半数励起のDicke状態の生成について、その生成方法を２種類提案し、それぞれの手法による状態生成について述べる。実験では４イオンの半数励起Dicke状態の高忠実度な生成に成功した。また、半数励起のDicke状態はスピンスクイーズド状態としての性質を持っており、ハイゼンベルグ限界と呼ばれる精密測定が可能な状態として知られている。２イオンのDicke状態については、実験によりこのような精密測定が実現している事を確かめた。

第6章　実験IV: ファイバー型イオントラップ cavity QED

トラップイオンは、それ単独で長いコヒーレンス時間をもち、異なるイオン間を振動モード（フォノン）を通じて結合させることが可能であり、現時点では小規模量子情報処理分野における一番良い候補として考えられている。一方で全世界を結ぶネットワークは、その速さから当然光を使うことが一番良い方法であるし、現在すでに光を使ったネットワークは世界中に張り巡らされている。しかしながら、光子同士を直接相互作用させるのは難しいため、その光ネットワークを量子の世界へと拡張するには、飛んでいる光子の情報を手元にある量子系へと移

す事が近道である。その実現の方法の一つを cavity QED という。

cavity QED のための量子系は、光と結合する量子系であれば何でもよい。そのため、最初は中性原子を用いて、最近では量子ドットや NV-center を用いた cavity QED 系が続々と開発されてきている。しかしながら、量子ネットワークの特徴を完全に生かすためには、量子系は単独で量子操作が十分に可能である事が望ましい。そこで、イオントラップを用いた cavity QED 系の実現が期待されているのである。

イオントラップにおいて cavity QED 系の実現を妨げているものは、ミラーの誘電体によるトラップへの擾乱である。本章では、そのような擾乱をできる限り小さくするための、ファイバー型イオントラップ、またファイバー型 cavity の開発に関して述べる。

第7章　結論

本論文で述べた実験結果の結論および展望を述べる。

目次

第1章　序論 **11**
1.1　研究背景 11
1.2　研究目的 13

第2章　イオントラップを用いた量子情報処理 **17**
2.1　Linear Paul Trap 18
2.2　レーザー冷却 25
2.3　イオンを用いた量子情報処理 30
2.4　実験周辺技術 41

第3章　実験 I: 誘導ラマン断熱通過法を用いた幾何学的単一 qubit 量子ゲート **47**
3.1　理論 48
3.2　実験 54
3.3　考察と展望 58
3.4　まとめ 60

第4章　実験 II: デコヒーレンスフリードレスト状態の生成 **63**
4.1　理論 63
4.2　実験 72
4.3　考察と展望 77
4.4　提案 80
4.5　まとめ 87

第5章　実験 III: 多数 qubit の Dicke 状態生成と精密測定 **89**
5.1　理論 90
5.2　実験 1 Dicke 状態生成 1 111
5.3　考察と展望 1 114
5.4　実験 2 Dicke 状態生成 2 117
5.5　考察と展望 2 124

5.6 まとめ 132

第6章 実験IV: ファイバー型イオントラップ cavity QED 135

6.1 理論 136
6.2 実験 139
6.3 考察 150
6.4 まとめ 156

第7章 結論 157

謝辞 158

付 録A マシュー方程式 163

A.1 マシュー方程式 163
A.2 解の安定性 166
A.3 解の安定領域 166

付 録B 付録2：多粒子系エンタングルド状態の忠実度 173

B.1 多粒子系のエンタングルド状態 173
B.2 多粒子系エンタングルド状態の忠実度 174

参考文献 179

業績一覧 186

図目次

2.1 Linear Paul Trap 図 18
2.2 Linear Paul Trap 写真 18
2.3 Linear Paul Trap における安定領域 20
2.4 イオンのジグザグ結晶 24
2.5 カルシウムイオンエネルギー準位図 26
2.6 イオン結晶の分光結果 29
2.7 4ion を用いた蛍光観測 32
2.8 変位演算子の作用 35
2.9 Mølmer-Sørensen ゲートの時間発展 38
2.10 2ion の Mølmer-Sørensen ゲート実験 39
2.11 2ion の Mølmer-Sørensen ゲート解析用パリティ振動 39
2.12 2ion のスピン間相互作用 41
2.13 自動再結晶化プロセス 42
2.14 イオン結晶写真 43
2.15 ファイバーノイズ観測用マッハツェンダー干渉計 45

3.1 Tripod 系 48
3.2 幾何学的位相 53
3.3 実験系概略図 54
3.4 STIRAP によるポピュレーション移送 55
3.5 tripod-STIRAP によるポピュレーション移送 56
3.6 幾何学的位相による z ゲート 57
3.7 幾何学的位相による x ゲート 57

4.1 RF エンタングルド状態を生成するためのエネルギー準位図 67
4.2 ドレス場の強さと強ドレス場近似の妥当性 70
4.3 デコヒーレンスフリーエンタングルド状態実験概略図 73
4.4 デコヒーレンスフリーエンタングルド状態生成のための相互作用の時間発展 74
4.5 パリティ振動 75

4.6 コヒーレンス時間 75
4.7 qutrit のエンタングルメント 76
4.8 強ドレス場近似の妥当性 77
4.9 エンタングルメントポンピングによる $|S\rangle$ 状態生成 81
4.10 DDFS 中での x 回転ゲートによる qubit の回転 83
4.11 DDFS 中での z 回転ゲートによる qubit の回転 84
4.12 イオン 4 つの軸方向振動モード 85
4.13 DDFS 中での 2qubit ゲート 86

5.1 RAP による状態生成 97
5.2 RAP による状態生成時間発展 98
5.3 サイドバンド STIRAP 相互作用図 99
5.4 multi-level STIRAP とスピンスクイージング 102
5.5 量子アニーリングによる常磁性強磁性量子相転移 105
5.6 量子アニーリングによる常磁性強磁性量子相転移個数依存性 106
5.7 Dicke 状態を用いた精密測定 112
5.8 4ionMS ゲートによる GHZ 状態生成 113
5.9 4ionJ 結合による GHZ 状態生成 114
5.10 2ionDicke 状態を用いた精密測定のアラン分散評価 115
5.11 2ionDicke 状態生成のサイドバンド遷移強度掃引時間波形 117
5.12 2ionDicke 状態のパリティ振動 118
5.13 4ion multi-level STIRAP の時間発展 119
5.14 4ion multi-level STIRAP によるスピンノイズの時間発展 120
5.15 4ion Dicke 状態のウィットネス 121
5.16 6ion Dicke 状態のスピンノイズ 122
5.17 Dicke 状態のポピュレーション 124
5.18 Dicke 状態のパリティ振動 125
5.19 STIRAP 強度変調中のシュタルクシフト変化 126
5.20 4ionDicke 状態を用いた精密測定 129

6.1 ファイバー一体型イオントラップ 139
6.2 ミラーコートファイバー 140
6.3 ミラーコートファイバー表面 140
6.4 Finesse と共振器長 141
6.5 Finesse とファイバー位置 142
6.6 曲面ファイバー共振器 143
6.7 曲面ファイバー共振器長と Finesse 144

6.8 ファイバーから光を入射したときの共振シグナル 144
6.9 マルチモードファイバーからの出力光 145
6.10 外部共振器付半導体レーザー 146
6.11 (左図) 平面曲面ファイバー共振器の共振信号 (右図) 共振器写真 . 146
6.12 平面曲面ファイバー共振器の共振器長とフィネス 147
6.13 曲面曲面ファイバー共振器の共振器長とフィネス 147
6.14 (左) 曲面曲面共振器の信号 (右) ファイバーからの漏れ光 148
6.15 ファイバー一体型イオントラップ組み立て 149
6.16 ファイバー一体型イオントラップ中での共振 149
6.17 ファイバーの側面図 150
6.18 共振器の安定条件と曲率半径 151
6.19 積分固有方程式のカーネル 154
6.20 Arnoldi 法による共振モード計算結果 (球面ミラー) 155
6.21 Arnoldi 法による共振モード計算結果 (ガウシアンミラー) 155

A.1 固有値 λ 172

B.1 生成されたエンタングルド状態の忠実度の個数依存性 177
B.2 Innsbruck 大学において生成された GHZ 状態の忠実度の個数依存性 177

第1章　序論

1.1　研究背景

量子情報処理は、量子重ねわせ状態と qubit 間の相互作用を利用して並列計算を実現する量子コンピュータ [1]、量子エンタングルド状態の性質を利用した量子暗号通信 [2] や精密測定 [3] など、量子の性質をふんだんに使い強力な情報処理を行おうとする分野である。

特にファインマンによる量子シミュレーションの提案 [4]、ショアによる量子コンピュータによる素因数分解の高速計算アルゴリズム提案 [5] により、量子情報処理の強力さ [6] が明らかになった。

一般に量子情報処理を行う対象の量子系として満たすべき以下の５つの条件を Divincenzo のクライテリオ [7] と呼ぶ。

- 良く定義された qubit を持つ
- 初期化が可能
- 射影測定が可能
- デコヒーレンスが少ない
- 量子ゲートが可能

イオントラップ系 [8] はこれらを最もよく満たす量子系として知られている [9, 10, 11]。まず、原子系はその電子の軌道状態が量子化されている事によって非常に良い実効的２準位系を構築する事ができる。また原子の電子軌道は異なる状態が重なる事で電気ダイポールを持つので、光と強力な電気ダイポールによる結合をする。この光との結合のスピンへの依存性を利用する事で、原子をただ一つの量子状態にまで初期化する事が可能となる。また、このような光との結合はドップラー冷却によるイオンの冷却も可能にする。さらには、qubit として選ぶ準位を、光との結合をうまく利用できるように決めてやる事で、電子シェルビング法 [12] と呼ばれる蛍光観測による qubit の射影測定が可能になる。

一方で、パウルトラップを用いる事で、原子を電磁場による摂動を受けない点で捕獲する事ができる [8] ため、孤立系として非常に長時間のコヒーレンスを維持する事ができる。特に残留磁場による1次ゼーマンの影響を消した qubit は数秒以上のオーダーでコヒーレンスを維持する事ができる事が分かっている [13]。

最後に、複数のイオンを同一のトラップで捕獲する事で、イオン同士はクーロン相互作用によって反発し、それらの振動を集団的なものとする事ができる。このような集団的な振動を "量子バス" として用いる事で、イオン間に実効的な相互作用を誘起する事ができ、その相互作用を利用した多 qubit の操作が可能になる [9, 14, 15]。

こうした理由によって、イオントラップによってトラップされたイオン鎖とその振動量子（フォノン）を用いた量子情報処理が広く行われてきた [8, 16][1]。

これまで行われてきた実験としては、量子トフォリゲートの実現 [17]、デコヒーレンスフリー部分空間の実験 [18]、量子誤り訂正のデモンストレーション [19]、量子テレポーテーションの実現 [20]、多数個のエンタングルド状態の生成 [21] 等、非常に多岐にわたる。

また、万能量子計算機の実現とは別に、ある特定の量子系をシミュレートする事ができる量子シミュレーション [4] がある。量子シミュレーションにおいては、量子計算機における連続した様々な量子ゲートの変わりに一つの相互作用を用いて、古典計算機によって計算の難しい系の基底状態などの情報を観測によって得る。実験においては、さらに量子揺らぎをうまく利用した量子アニーリングと呼ばれる量子シミュレーションが実現している [22, 23, 24]。

このように量子情報処理分野に限っても様々な研究がなされてきているイオントラップであるが、近年の研究の傾向として、第6のクライテリオとも呼べる拡張性の獲得に向けた研究が広く行われている。イオントラップはそのイオン間の強いクーロン相互作用によって量子ゲート処理や qubit 間の相互作用が可能であるが、その反面多数個のイオンを一度に利用するのが難しいという事が言える。この問題点を克服するため、D. Wineland らのグループや C. Monroe のグループでは平面トラップ [25] と呼ばれる2次元配置のパウルトラップを利用したイオンのシャトリング [26, 27, 28] によって、多数のイオントラップを組み合わせ、メモリや演算を同時に行う量子 CCD と呼ばれる技術 [29] の開発を行っている。一方で、一つのトラップで扱えるイオン数を増やし、多数個のエンタングルド状態を生成する実験 [21] が R. Blatt らのチームによって行われている。

しかしながら、量子計算機にしても、エンタングルド状態にしても、多数の qubit を同時に扱う場合、その qubit 数の上昇に伴い量子系が緩和（ノイズ）に対して弱

[1] このような量子系としてのイオントラップの発展への貢献に対し、２０１２年ノーベル物理学賞が D. Wineland に与えられた。

くなっていくことが大きな問題[21]となる。そこで、多数のqubitを扱うにはより高速・高効率の量子操作や緩和に強い量子系を作る事が重要となるのである。

量子情報処理におけるその他のトピックとして、本章最初にも触れた量子ネットワークがある[30]。量子ネットワークは局所量子系である量子ノードとそれらを結ぶ量子通信路からなっていおり、遠隔地でのエンタングルド状態の共有[31]や、それらを用いた量子中継器[32]や量子暗号[33]への応用のために広く研究されてきた技術である。量子通信路としては、現状の光通信網との親和性や、その速さなどから光を用いるのが唯一の解答であると思える。そこで量子ネットワーク実現のためには、局所量子系と光との間で量子操作を実現すればよい事が分かる。しかしながら、単一量子間の相互作用は非常に弱いものであるので、その相互作用を増幅しなくてはならない。このために、共振器によって閉じ込められた光と量子系の強い相互作用を利用する技術をcavity QEDと呼ぶ[34]。特にその相互作用が十分に強い場合、強結合cavity QEDと呼ぶ[35]。

一方で、上で述べたように、トラップイオンは孤立量子系として現在これまでにおいては最高のものである。また、イオントラップにおいては原子をラムディッケ領域まで局在化する事が可能であるため、光と原子の結合と言う意味ではより良い状況を実現する事ができる。ゆえに、トラップイオンを量子ノードとして用いた強結合cavity QEDによる量子ネットワークの実現が期待され、従来より研究が行われている[36, 37]。しかし、共振器のためのミラーがイオンの近くに来ると、誘電体の分極や表面のパッチポテンシャルがイオンへのポテンシャルを壊してしまう事が知られており[38]、そのために未だトラップイオンを用いた強結合cavity QED系は実現していない。しかし、近年になりファイバー共振器と呼ばれるミラー基板を非常に小さくできる共振器の開発が進められており[39]、ファイバー共振器を用いたイオントラップcavity QEDの実現が期待されている[38]。

1.2 研究目的

本研究では、大きく分けて以下の2点を目的とする。

- （第3章〜第5章） 断熱過程を利用した量子状態制御・デコヒーレンスの抑圧
- （第6章） 量子ネットワーク実現に向けたファイバー型イオントラップcavity QEDの実現

第3章から第5章までは、一般にノイズに対して強いと言われる断熱過程を利用したゲート処理やデコヒーレンスの抑制、エンタングルド状態の生成を目的と

して提案や実験を行う。また、そのようなノイズへの耐性を利用する事で多数個のエンタングルド状態の生成を目指す。

第6章ではトラップイオンを用いた強結合 cavity QED 系実現に向けたファイバー共振器の開発、またファイバー型イオントラップの開発を目指す。

各章の研究目的はそれぞれ以下に示すようなものである。

- 第3章 誘導ラマン断熱通過法を用いた幾何学的単一 qubit 量子ゲートの実現

量子状態を制御する量子ゲートには様々なノイズが混入する。そのようなノイズの入りにくい量子ゲートとして、幾何学的位相による量子ゲートがある [40, 41]。幾何学的位相量子ゲートでは、種々の実験パラメータに対してロバストな回転を qubit 系に誘起する事ができるため、ノイズに強く、高い忠実度での qubit の回転が可能であると期待できる。また、このような幾何学的位相ゲートのみによって構成された量子計算機をホロノミック量子計算機と呼ぶ [42]。

本章では、Zoller らによって提案された誘導ラマン断熱通過法を用いた幾何学的位相ゲート [41] の実現を目的とする。このゲートはこれまでの当研究室の研究において Ca^+ の準安定状態間に対しては実現しているが、その他のゲート等に相性の良い光遷移の qubit においては実現していない。

$^{40}Ca^+$ イオンの電気四重極遷移 qubit を利用する場合、Cirac の提案を実現するには、誘導ラマン断熱通過法に用いる遷移として2本の光遷移と1本の RF 遷移を利用する必要がある。

- 第4章 デコヒーレンスフリードレスト状態の生成

qubit はそれと共鳴する電磁場（外場）を照射する事で、ドレスト状態と呼ばれる電磁波をまとった状態になる。これらの状態は外場と qubit との結合の強さだけ互いにエネルギーが変化する。その結果、生成された状態に対し、その状態から変化しうる状態をエネルギー的に分離する事が可能になる。このような場合、一般に初期状態がある固有状態の場合、エネルギー保存則からそのエネルギー分離幅に対応するエネルギーを外とやり取りしない限り、異なる固有状態へは変化しなくなる。この応答はノイズに対しても同様であるため、エネルギー分離幅に対応する周波数成分がノイズにない限り、状態は同じ固有状態の純粋状態に保持される [43]。本章では、このような断熱定理を利用したエンタングルド状態の保護の観測を目的とする。また、このように状態が保護される空間だけを利用したドレストデコヒーレンスフリー部分空間の提案を行う。

- 第5章 多数 qubit の Dicke 状態生成と精密測定

断熱過程を利用した量子状態制御の一つに第3章でも利用した誘導ラマン断熱通過法[44]と呼ばれる手法がある。この手法を応用し、断熱過程による多数qubitのエンタングルド状態生成の方法を提案し、その実現を行う。多数qubitのエンタングルド状態の第一歩として4ionのDicke状態の生成をめざし、また6ion以上の実験に関する考察やその実現可能性について論じる。

さらに、このようにして生成されたDicke状態が精密測定が可能な特殊なエンタングルド状態である事を利用し、量子標準限界を超える精密測定のデモンストレーションと、そのエンタングルド状態の忠実度との関係について述べる。

- 第6章　ファイバー型イオントラップcavity QED

量子ネットワーク実現に向けて、ファイバー型の小型イオントラップを用いたイオントラップcavity QED系の実現が期待されている[38]。そのために、本章では一般に共振器長を長くする事が難しいファイバー共振器を、イオントラップに組み込むことができる程度まで大型化した高フィネスファイバー共振器の開発を目指す。また、ファイバー共振器の共振器長限界での振る舞いを調べ、その性質を理解する事を目指す。これらの事はファイバー型イオントラップを用いたcavity QED系を実現する上の要素技術であると言える。

第2章　イオントラップを用いた量子情報処理

イオントラップはW. Paul、H. G. Dehmeltらにより実現された、荷電粒子を捕獲する技術である。荷電粒子は電磁相互作用によって容易に操作する事が可能であるが、静電場のみを用いると荷電粒子を捕獲するような電位は作る事ができない[1]。そこで3次元的な閉じ込めを実現するため、静電場に加え磁場を印加するPenning trap、RF電場を印加するPaul trapの二つが開発された。Penning trapにおいては、静電場による閉じ込めと磁場によるマグネトロン運動・サイクロトロン運動を組み合わせることで荷電粒子をトラップする。しかしながら、この方法は必然的に極端に大きな磁場中で荷電粒子がトラップされるため、レーザー冷却の難しさや、実験系が大がかりなものになるという欠点がある。一方で、Paul TrapはRF電場によるマイクロモーションを通じた実効的な閉じ込めで荷電粒子をトラップする。この時、イオンをRFのゼロ点付近にトラップすることで、RFのイオンへのドライビング力を小さくし、綺麗な3軸の調和振動子型のポテンシャルを形成することができる。しかし、RFのゼロ点以外ではイオンは強いRFによって揺さぶられており（余剰マイクロモーション）、可能なイオンの配置方法はトラップの幾何学的な構造によって完全に決まってしまう。1点でのみトラップ可能なRing Paul trap、直線上でのみトラップ可能なLinear Paul trapなどがその例である。

本章では、まず最初に、広く量子情報処理分野で用いられており今回の実験でも用いたLinear Paul Trapの原理について簡単に説明する。Linear Paul Trapは線形のRF nodeに直線状の多数個のイオンを捕まえる事ができるという特徴を持っている。このトラップとレーザー冷却の技術を組み合わせることで、トラップイオンを振動基底状態まで冷却することが可能となり、内部状態の擬スピンに加えイオン間の振動量子（フォノン）までを含めた相互作用が可能な綺麗な量子系を構築することができる。また本章後半では、トラップイオンを量子情報処理に用いる上で必要な技術や量子ゲート処理等に関する理論についてまとめた。

---

[1] 荷電粒子は電位の極小点に向かうので、例えば正イオンをトラップするためには電位の二階微分が正になるようにしなければならない。しかし真空中でのマクスウェル方程式の一つ$\Delta\phi = 0$により、電位の2階微分をすべての方向について同じ符号にする事ができないため、静電場のみによる荷電粒子へのポテンシャルは少なくとも1つの方向は開いたものになってしまう。

2.1 Linear Paul Trap

2.1.1 原理

一般に電磁ポテンシャルΦに対してラプラス方程式$\Delta\Phi = 0$が成り立つために、DCのポテンシャルのみで荷電粒子を3軸方向に関して閉じ込める事はできない。そこで、ある一つの軸方向にはDCのポテンシャルを印加し、残った二軸をRFによる有効ポテンシャルでトラップするタイプのイオントラップをLinear Paul Trapと呼ぶ。図2.1が用いた分割型Linear Paul Trapの図[2]、図2.2が写真である。ト

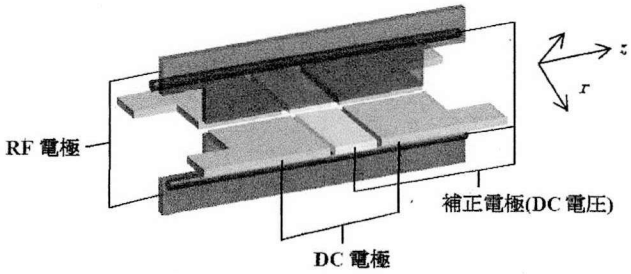

図 2.1: Linear Paul Trap 図
分割型電極の Linear Paul Trap 図

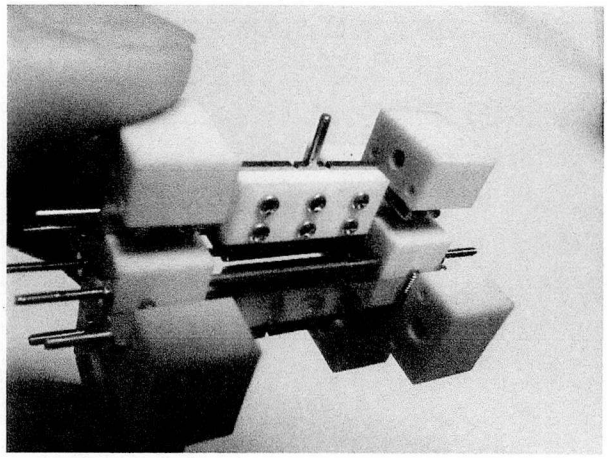

図 2.2: Linear Paul Trap 写真
実験に用いた Linear Paul Trap 写真。上で絶縁体によってまとめられてる3枚の分割電極が RF のグラウンドとそれぞれエンドキャップと補正電極を兼ねている。下に見えている1枚の電極が RF 電極である。手前の細い棒は補正のための電極である。

ラップの軸方向 (z 方向) はエンドキャップによる DC 電場によって閉じ込められている。以下では、動径方向の RF の閉じ込めに関する記述を行う [8]。

RF 電極方向の一つを x 軸と置き、その方向に関する運動方程式は

$$\ddot{x} = -\frac{Z|e|}{m}\frac{\partial \Phi}{\partial x} = -\frac{Z|e|}{m}[U\alpha + \tilde{U}\alpha' \cos\omega_{rf} t]x \tag{2.1}$$

である。ここで、$Z|e|$ は荷電粒子の電荷の大きさ、m は荷電粒子の質量を表す。また、ω_{rf} はトラップに使う RF の周波数で、α と α' はそれぞれ DC 電極と RF 電極が x 軸方向に作るポテンシャルの大きさを表す幾何学的な係数である。

次に、

$$\xi = \frac{\omega_{rf} t}{2}, \quad a_x = \frac{4Z|e|U\alpha}{m\omega_{rf}^2}, \quad q_x = \frac{2Z|e|\tilde{U}\alpha'}{m\omega_{rf}^2} \tag{2.2}$$

と置くことで、運動方程式は

$$\frac{d^2x}{d\xi^2} + [a_x - 2q_x \cos 2\xi]x = 0 \tag{2.3}$$

と書き換える事ができる。この線形 2 階微分方程式はマシュー方程式と呼ばれているもので、付録 A にてその性質を詳しく調べている。

まず、Linear Paul Trap における安定領域を図示する。Linear Paul Trap の幾何学的因子を考慮にいれ、マシュー方程式の安定領域を $\{a_x, q_x\}$ 空間でプロットしたものが図 2.3 である [8]。

それでは、Linear Paul Trap にトラップされた荷電粒子の運動を考える。付録 A にあるように、マシュー方程式は Floquet の解をもっているので、パラメータが安定領域にあるとして、その一般解を

$$x(\xi) = Ae^{i\beta_x \xi}\sum_n C_{2n}e^{i2n\xi} + Be^{-i\beta_x \xi}\sum_n C_{2n}e^{-i2n\xi} \tag{2.4}$$

とおけて、その解は有界である。すると、マシュー方程式より

$$C_{2n+2} - D_{2n}C_{2n} + C_{2n-2} = 0 \tag{2.5}$$

$$D_{2n} = \frac{a_x - (2n + \beta_x)^2}{q_x} \tag{2.6}$$

と計算できる。

[2]平成２４年度修士卒業の大野貴生君の修士論文中の図である。

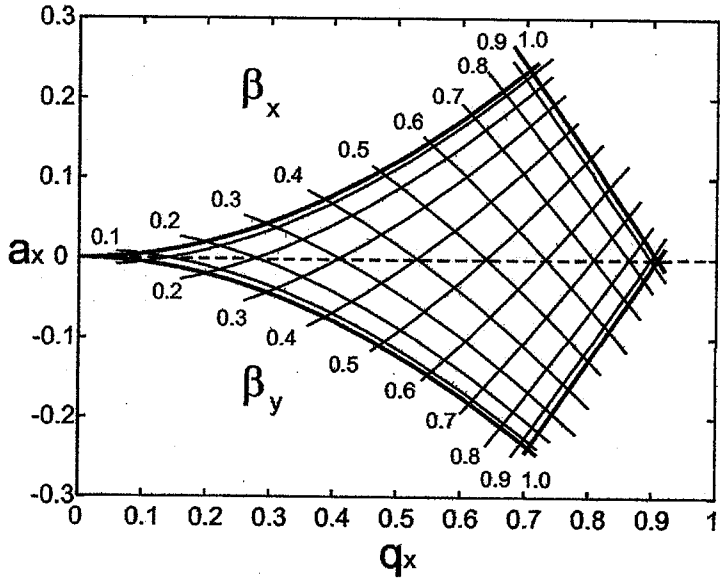

図 2.3: Linear Paul Trap における安定領域
Linear Paul Trap において、RF でトラップされる二軸方向の運動に対し、それぞれのマシュー方程式の解が有界となる安定領域を図示している。

今、$q \to 0$ の極限では、$\lim \beta_x = \sqrt{a_x}$ であり、マシュー方程式の二つの独立解は $e^{\pm i\beta_x \xi}$ である事から、$(|a_x|, q_x^2) \ll 1$ として、上の展開の最低次までの近似を求めると、$C_n \sim 0 \quad (n \geq 4)$ とできる。上の関係式より

$$\beta_x \sim \sqrt{a_x + \frac{q_x^2}{2}} \tag{2.7}$$

と計算でき、またここから

$$x(\xi) \sim A \cos \beta_x \xi [1 - \frac{q_x}{2} \cos 2\xi] \tag{2.8}$$

と計算できる。

この式を見てみると、第一項は永年周波数 $\frac{\beta_x \omega_{rf}}{2}$ の正弦運動である事が分かり、その振動数での調和振動となる。第二項は振動が調和振動に比べて $\frac{q_x}{2}$ だけ小さい ω_{rf} で動くような振動である事がわかる。この振動をマイクロモーションと呼ぶ。

2.1.2 余剰マイクロモーション

前節での議論は DC 電場がない場合のものであった。しかし、一般にはイオンには DC 場と RF 場が同時に印加されている。RF 場のゼロ点において、x 方向に

DC の電場 E_{dc} が残っている場合運動方程式は

$$\frac{d^2x}{d\xi^2} + [a_x - 2q_x \cos 2\xi]x = \frac{4Z|e|E_{dc}}{m\omega_{rf}} \tag{2.9}$$

と修正される。

前節と同様に最低次まででこの方程式を解くと

$$x(\xi) \sim [x_0 + A\cos\beta_x\xi][1 + \frac{q_x}{2}\cos\omega_{rf}t] \tag{2.10}$$

となる。ここで

$$x_0 = \frac{Z|e|E_{dc}}{m(\beta_x\omega_{rf}/2)^2} \tag{2.11}$$

となる。

この式を見てみると、前節のゼロ点回りの振動に比べ、平衡位置が x_0 だけ動き、またその位置が周波数 ω_{rf}、振幅 $x_0q_x/2$ で変化する事がわかる。その RF 周波数と等しい素早い振動を余剰マイクロモーションと呼ぶ。

少し先回りをして余剰マイクロモーションの問題点を述べる。先の節で述べるように、イオンを量子情報処理に用いる場合、ラムディッケ領域と呼ばれる領域でイオンをトラップする事が大きな利点となる。ラムディッケ領域とは、イオンの振動が光の波長に比べて狭い領域で閉じている場合を指す。イオンをトラップする典型値として $q_x = 0.1$ と考えると、光の波長 729nm に対して十分の一程度の領域にイオンを閉じ込めるためには、RF のゼロ点とイオンの平衡位置を 700nm 程度の精度で合わさなければならない。この調整方法自体は実験的には確立されており[3]、十分な精度でイオンの平衡位置を RF のゼロ点に合わせる事ができる。しかしながら、次節で述べるように、多数個のイオンを用いた実験をしようとする場合、そのすべてのイオンを RF のゼロ点付近にトラップする必要があるため、トラップの幾何学的な構造によって決まる RF のゼロ点により、イオンの可能な配置は決まってしまう。

2.1.3 イオン鎖

複数のイオンが一つのトラップに捕獲された場合を考える。この場合、一般にイオン間はクーロン力によって反発するので、その力によって結晶構造を組む。全体の閉じ込めの強さとイオンの個数によってさまざまな結晶構造を組むことがで

[3]本論文では詳しく述べないが、イオンからの蛍光とトラップに用いる RF との間の時間相関を測る方法が有名である。

きるが、前節の余剰マイクロモーションを消すためには、RF のゼロ点にイオンはトラップされなければならない。本節では Linear Paul Trap に限定して議論する。

Linear Paul Trap ではその幾何学的構造によってトラップ中心の軸上すべてが RF のゼロ点であり、その方向にまっすぐに並んだ 1 次元のイオン鎖を余剰マイクロモーションなしでトラップする事が可能である。

イオンの平衡位置

まずはその平衡位置に関して考える [45]。イオンが N 個直線上に並んでいるとすると、そのポテンシャルエネルギー V は

$$V = \sum_{i=1}^{N} \frac{m\nu^2}{2} z_i(t)^2 + \sum_{i,j=1,i\neq j}^{N} \frac{Z^2e^2}{8\pi\epsilon_0} \frac{1}{|z_i(t) - z_j(t)|} \tag{2.12}$$

となる。ここで、m はイオンの質量、Ze はイオンの電荷の大きさ、ν を軸方向の永年周波数、各イオンの軸方向の位置座標を $z_i(t)$ とおいた。

ポテンシャルが極小になるようにイオンは動くので、このポテンシャルによるイオンの平衡位置 $z_i^{(0)}$ は $\frac{\partial V}{\partial z_i}|_{z_i=z_i^{(0)}}$ によって計算される。長さのスケール l として

$$l^3 = \frac{Z^2e^2}{4\pi\epsilon_0 m\nu^2} \tag{2.13}$$

を定義すると、$u_i = x_i^{(0)}/l$ で定義される位置座標について

$$u_i - \sum_{j=1}^{i-1} \frac{1}{(u_i - u_j)^2} + \sum_{j=i+1}^{N} \frac{1}{(u_i - u_j)^2} = 0 \tag{2.14}$$

という方程式が導出される。

この方程式は N=2,3 の場合だけは解析的に解くことができて

$$N = 2 : u_1 = -(\frac{1}{2})^{2/3}, \quad u_2 = (\frac{1}{2})^{2/3} \tag{2.15}$$

$$N = 3 : u_1 = -(\frac{5}{4})^{1/3}, \quad u_2 = 0, \quad u_3 = (\frac{5}{4})^{1/3} \tag{2.16}$$

となる。N=4 以上でも数値的には簡単に解くことができる。

イオンの運動

ゼロ点回りでの振動を考える。イオンの運動 $z_i(t)$ を上の平衡位置 $z_i(0)$ をもちいて

$$z_i(t) = z_i^{(0)} + q_i(t) \tag{2.17}$$

と書いて、微小振動 $q_i(t)$ に関する記述を行う。$q_i(t) \ll 1$ として、系のハミルトニアンは q の二次までで

$$H = \frac{m}{2}\sum_{i=1}^{N}\dot{q}_m^2 + \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{N} q_i q_j [\frac{\partial^2 V}{\partial x_i \partial x_j}]|_{x_i=x_i^{(0)}, x_j=x_j^{(0)}} \tag{2.18}$$

となる。さらに計算を進めると

$$H = \frac{m}{2}[\sum_{i=1}^{N}\dot{q}_i^2 + \nu^2 \sum_{i,j=1}^{N} A_{ij} q_i q_j] \tag{2.19}$$

となる。ここで、

$$A_{ij} = \begin{cases} 1 + 2\sum_{p=1,p\neq j}^{N} \frac{1}{|u_j - u_p|^3} & i = j \text{ のとき} \\ -\frac{2}{|u_i - u_j|^3} & i \neq j \text{ のとき} \end{cases} \tag{2.20}$$

である。

ハミルトニアンが 2 次形式で記述できたので、ポテンシャルの項を対角化するような基底への回転演算子を U とし、ポテンシャルの項の固有値を μ_p、固有ベクトルを $b_m^{(p)}$ とおくと

$$U^{-1}HU = \frac{m}{2}[\sum_{m=1}^{N}(\dot{b}_m^{(p)})^2 + \nu^2 \sum_{m,p=1}^{N} \mu_p (b_m^{(p)})^2] \tag{2.21}$$

となり、相互作用が対格化された綺麗な形に書くことができる。この基底 $b_m^{(p)}$ を基準振動モードベクトルと呼ぶ。また、その振動モードベクトルに対する永年周波数は $\nu\sqrt{\mu_p}$ と計算する事ができる。

一般の場合には行列 A_{ij} を対角化する事で、これら基準振動モードを計算する事ができるが、最も小さな μ_p は常に 1 であり、これに対応する基準振動モードベクトルは

$$b_m^{(1)} = \{1, 1, 1, \ldots 1\} \quad \mu_1 = 1 \tag{2.22}$$

となる。

ジグザグイオン結晶

これまではイオンの位置・運動を軸方向の1次元に限定して議論をした。しかし、動径方向の閉じ込めが弱い場合、イオンの平衡位置は軸上には並ばない。この時、イオンの配置は軸に対しジグザグの形になる。これをジグザグイオン結晶[図(2.4)]と呼ぶ[45, 46]。

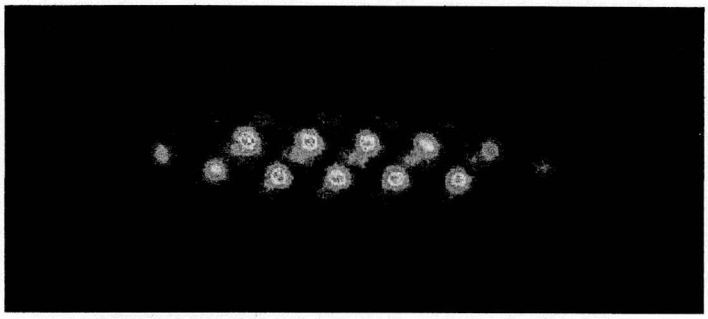

図 2.4: イオンのジグザグ結晶

ジグザグイオン結晶の平衡位置を探すには、式2.12を一般化し、3つの自由度を含めたポテンシャルの極小となる点を探せばよい。ここでは$\min[\nu_x, \nu_y] = \nu_r$とし、2次元面内での変化に限定するとする。まず、$\nu_z$に対し十分に大きな$\nu_r$に対してはイオンは一次元上に並び、さきほどまでの議論が成り立つ。しかし、イオンの個数Nの関数となる"ジグザグパラメータ"$r_z(N)$に対して$\nu_r/\nu_z < r_z(N)$の条件が成り立つ時、イオンは軸上に並ぶことができなくなり、ジグザグ構造となる。

$r_z(N)$の一般的な表式は解析的に求める事ができず、数値計算に頼る事になる。具体例としてN=2,3,4,6,10については

$$r_z(2) = 1, \quad r_z(3) \sim 1.6, \quad r_z(4) \sim 2.0, \quad r_z(6) \sim 2.5, \quad r_z(10) \sim 4.6 \tag{2.23}$$

となる。また、大きなNについても近似式が計算されており、

$$r_z(N) \sim \frac{3N}{4\sqrt{\log N}} \tag{2.24}$$

で近似される。

2.2 レーザー冷却

2.2.1 中性原子のイオン化

$^{40}Ca^{+}$を用意するために、光によるイオン化の方法を用いる。オーブンによって原子を熱し、コリメートされた中性原子ビームをトラップ中にロードする。トラップ中でCa原子の$^{1}S_{0} \leftrightarrow ^{1}P_{1}$に共鳴する423nmのレーザーと、$^{1}P_{1}$から連続帯へと励起する375nmの二本のレーザーによりCa原子は電子が一個取り除かれたCa^{+}イオンに変わる。この方法は、初段励起の423nmの遷移の同位体シフトによって好きな同位体を選ぶことができるという利点がある[4]。

本実験では、423nmのレーザーは、ECLDとテーパーアンプによって用意された300mWの846nmの光をボウタイ型共振器による第二次高調波発生によって423nmへと変換し生成している。375nmはLDからの出力をそのまま利用し、それぞれ423nm:100uW, 375nm:300uW程度がイオンへと照射されている。実験では、中性原子の423nmの発光をPMTで観測することで、その共鳴を見つけている。

2.2.2 ドップラー冷却

前節の方法によりイオン化した原子は、イオントラップにトラップされる。実験に用いるカルシウムイオンのエネルギー準位図を図2.5に載せる。そのままでは非常に高温のプラズマ状態なので、レーザー冷却の方法により、イオンを局在化させ、実験に使える状態まで持っていかなければならない。ドップラー冷却はイオンのダイポール遷移を利用し、光の運動量を用いた冷却方法である[47]。

原子に対してω_lの光が照射されている時、原子が光の進行方向に対して$\vec{v}$の速度で運動しているとする。すると、光のドップラー効果によって原子が感じる光の周波数は原子の速さに対して一次の近似で

$$\omega_1'(\vec{k}\cdot\vec{v}) = \omega - \vec{k}\cdot\vec{v} \tag{2.25}$$

と計算できる[5]。

一方、原子は励起状態と基底状態の間のエネルギー差(ω_0)に対応する周波数の光を吸い、自然放出によって光を全方向に放出する。この時、光と原子準位のエ

[4] ^{40}Caの同位体存在比がほぼ1であるCa原子の場合うまみは薄いが、電子ビーム照射によるイオン化の場合背景ガスのイオン化など望ましくない事が起こるため、光イオン化による利点は残る。

[5] これは、原子の運動と光が相対している時に光のエネルギーが上がる→光の周波数が上がると覚えるとイメージしやすい。

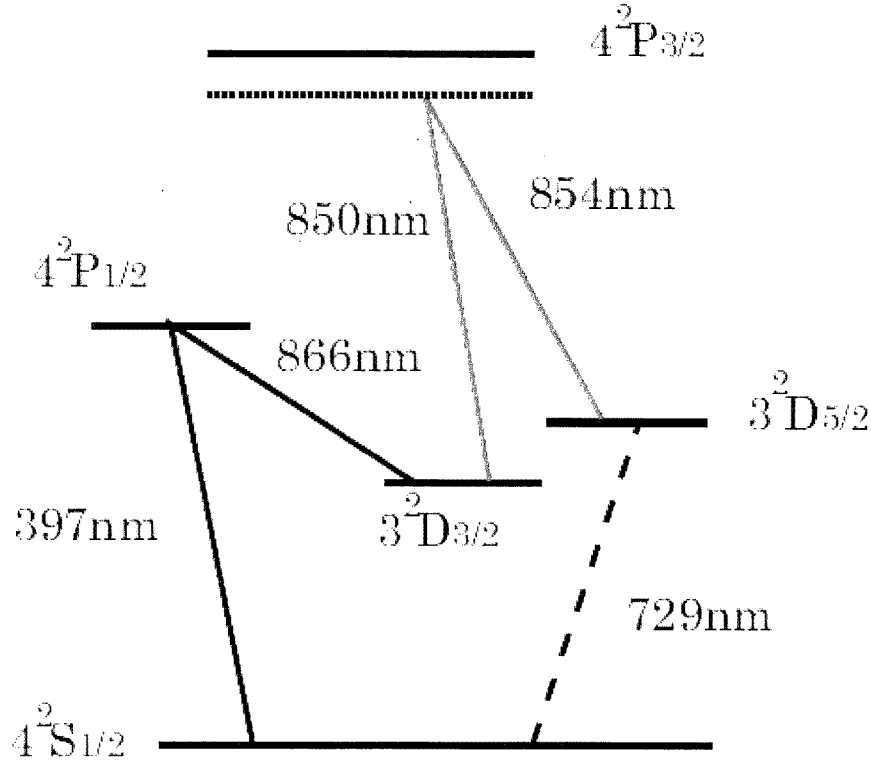

図 2.5: カルシウムイオンエネルギー準位図

ネルギー差に対して $\delta(\vec{k}\cdot\vec{v})(=\omega_1'(\vec{k}\cdot\vec{v})-\omega_0)$ の周波数差をとったとすると原子の自然放出レート $\kappa(\vec{k}\cdot\vec{v})$ は励起状態の自然幅 Γ に対し、

$$\kappa(\vec{k}\cdot\vec{v}) = \Gamma\rho_{ee} \propto \frac{\Gamma}{\Gamma^2+\delta(\vec{k}\cdot\vec{v})^2} \tag{2.26}$$

となる。

よって、もしレーザーの周波数を原子共鳴に対して少しエネルギーを低くしておくと

$$\kappa(\vec{k}\cdot\vec{v}<0) > \kappa(\vec{k}\cdot\vec{v}>0) \tag{2.27}$$

となり、光と原子の運動が反平行の時に原子の自然放出レートが多くなる。

原子は光を吸収することで光の運動量 $\hbar k$ を得るため、反平行の光を多く吸う事で原子は減速する。この結果、原子は冷却される。このような冷却方法をドップラー冷却と呼ぶ [47]。

2.2.3 サイドバンド冷却

ドップラー冷却は、光を吸収した後の自然放出が全方向にランダムであるために、その反跳による冷却限界がある。このいわゆるドップラー冷却限界温度 T_D は

$$k_B T_D = \frac{\hbar\Gamma}{2} \tag{2.28}$$

となる事が知られている。Ca^+ イオンの 397nm の遷移の場合はこの温度は約 700μK となる。

一方で、通常用いるイオントラップは永年周波数にして約 1MHz 程度の深さであるため、カルシウムイオンの場合ではドップラー温度では平均振動量子数は 10 程度となる。そこで、イオンを振動基底状態まで持っていくにはドップラー冷却に加えてさらに冷却をしなければならない。通常、そのためにサイドバンド冷却というレーザー冷却手法を用いる [48, 49, 50]。サイドバンド冷却は以下で説明するラム・ディッケ領域にある原子に対して有効な冷却方法である。そのために、まず原子のサイドバンド遷移について考える。

原子と光の相互作用

原子と光の間の相互作用は、外部運動における調和振動子も合わせて

$$\hat{H} = \hat{H}_0 + \hat{H}_1 \tag{2.29}$$

$$\hat{H}_0 = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \frac{m\nu^2}{2}\hat{x}^2 + \frac{1}{2}\hbar\omega_0\hat{\sigma}_z \tag{2.30}$$

$$\hat{H}_1 = \frac{\hbar\Omega}{2}(\hat{\sigma}_+ + \hat{\sigma}_-)(e^{i(kx-\omega t)} + e^{-i(kx-\omega t)}) \tag{2.31}$$

と書ける [51]。ここで、調和振動子の固有振動数を ν、原子の状態間のエネルギー差を ω_0、光の周波数を ω とした。

調和振動子における通常の処方箋より、フォノンの消滅演算子を

$$\hat{a} = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\nu}}(\frac{m\nu}{\hbar}\hat{x} + i\hat{p}) \tag{2.32}$$

と定義すると、ハミルトニアンは

$$\hat{H}_0 = \hbar\nu(\hat{a}^\dagger\hat{a} + \frac{1}{2}) + \frac{1}{2}\hbar\omega_0\hat{\sigma}_z \tag{2.33}$$

$$\hat{H}_1 = \frac{\hbar\Omega}{2}(e^{i\eta(\hat{a}+\hat{a}^\dagger)}\hat{\sigma}_+ e^{-i\omega t} + e^{-i\eta(\hat{a}+\hat{a}^\dagger)}\hat{\sigma}_- e^{i\omega t}) \tag{2.34}$$

と書きかえることができる。ここで、ラムディッケパラメータ η を

$$\eta \equiv k\sqrt{\frac{\hbar}{2m\nu}} \tag{2.35}$$

と定義した。

さらに、相互作用表示にうつるために、$\hat{U} = e^{i\hat{H}_0 t/\hbar}$ の回転系に乗ると、$\hat{H}_I = \hat{U}^\dagger \hat{H} \hat{U}$ より

$$\hat{H}_I = \frac{\hbar\Omega}{2}(e^{i\eta(\tilde{a}+\tilde{a}^\dagger)}\hat{\sigma}_+ e^{i\delta t} + e^{-i\eta(\tilde{a}+\tilde{a}^\dagger)}\hat{\sigma}_+ e^{-i\delta t}) \tag{2.36}$$

と計算できる。ここで、$\tilde{a} = \hat{a}e^{i\nu t}$、$\delta = \omega_0 - \omega$ と定義した。

ラムディッケ領域

イオントラップはドップラー温度において、$\eta^2 n \ll 1$ が成り立つようにトラップする事ができる。ここで、n はドップラー温度における平均フォノン数である。$\eta^2 n \ll 1$ が成り立つような状況をラムディッケ領域にあるという [52]。

ラムディッケパラメータはその定義から基底状態の波動関数の典型的な大きさ x_0 を用いて

$$\eta = kx_0 \tag{2.37}$$

と書けるので、上記の条件は

$$\eta^2 n = (k\sqrt{\frac{\hbar}{2m\nu}})^2 n = (2\pi\frac{x_0}{\lambda})^2 n = (2\pi\frac{x_n}{\lambda})^2 \ll 1 \tag{2.38}$$

より、イオンの波動関数の広がりが波長に比べて非常に小さい条件と言い換える事ができる[6]。

ラムディッケ領域にあるとき、相互作用ハミルトニアンの指数関数部分について

$$e^{i\eta(\hat{a}+\hat{a}^\dagger)} \sim 1 + i\eta(\hat{a} + \hat{a}^\dagger) \tag{2.40}$$

[6]さらに、定性的にはエネルギーに関して言い換える事もできる。フォノンを励起するのに必要なエネルギーは $E_p = \hbar\nu$ で、光の反跳エネルギーは $E_r = \frac{(\hbar k)^2}{2m}$ である。よって、それらの比は

$$\frac{E_r}{E_p} = \frac{(\hbar k)^2}{2m\hbar\nu} = \frac{k^2\hbar}{2m\nu} = \eta^2 \tag{2.39}$$

となり、$\eta^2 < \eta^2 n \ll 1$ の条件は、フォノンのエネルギーが光の反跳エネルギーに比べて大きく、光の反跳によってフォノンが励起されない条件と言い換えられる事が分かる。よってこれは、ガンマ線におけるメスバウアー効果と本質的には同じである事が分かる [53]。

とηの1次までで近似する事ができるので、相互作用ハミルトニアンを

$$\hat{H}_I \sim \frac{\hbar\Omega}{2}(\hat{\sigma}_+ e^{i\delta t} + \hat{\sigma}_- e^{-i\delta t}) \tag{2.41}$$

$$+ \frac{\eta\hbar\Omega}{2}(\hat{a}^\dagger\hat{\sigma}_+ e^{i(\delta-\nu)t} + \hat{a}\hat{\sigma}_- e^{-i(\delta-\nu)t}) \tag{2.42}$$

$$+ \frac{\eta\hbar\Omega}{2}(\hat{a}\hat{\sigma}_+ e^{i(\delta+\nu)t} + \hat{a}^\dagger\hat{\sigma}_- e^{-i(\delta+\nu)t}) \tag{2.43}$$

とηの1次までで近似できる。ここで、第一行目の相互作用をキャリア遷移と呼び、第二行目をブルーサイドバンド遷移、第三行目をレッドサイドバンド遷移と呼ぶ。ブルーサイドバンド遷移とレッドサイドバンド遷移は指数のδのところに注目すれば、調和振動子の固有振動数分だけそれぞれずれた場所に共鳴が現れる事を理解できる。図2.6に、実験での4個のイオンの励起スペクトルを表す。

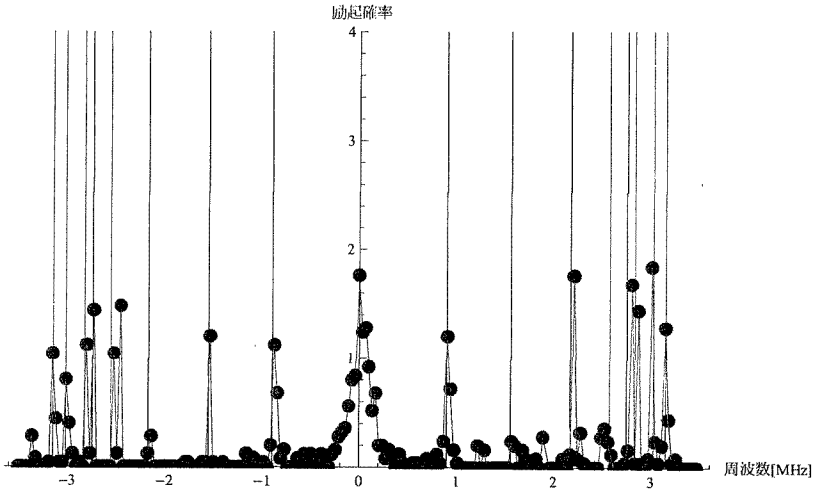

図 2.6: イオン結晶の分光結果
4個のイオンの励起スペクトルの結果を示す。中心のキャリア遷移に対して弱い遷移が左右対称に現れている事が分かる。これらは集団振動量子のサイドバンド遷移である。縦の実線は振動のサイドバンドをそれぞれ計算したものである。

サイドバンド冷却

イオンがラムディッケ領域にあるとき、式2.41のようにフォノンの量子数を1上げ下げする遷移と運動に影響を与えない遷移とに分解する事ができる。そこで、フォノンの量子数を1下げるレッドサイドバンド遷移を照射し、同時に励起状態

を基底状態に戻すようなクエンチの作用をする光を照射する。すると、フォノン数を1下げながら励起状態に遷移したイオンはクエンチ光によって再度基底状態に戻る。クエンチ光・基底状態に戻る遷移に対してもラムディッケ領域にある場合、これらの光を吸収・放出するときにはほぼフォノン数に変化がない状況になる。そこで基底状態に戻ったイオンは再度フォノン数を1下げながら励起状態へとうつるため、この繰り返しによってフォノン数が1つずつ下がっていく事が分かる。このサイクルは、イオンの運動が振動基底状態に行くまで続くため、最終的にイオンを振動基底状態にまで用意する事ができる。十分に弱い遷移を用いたサイドバンド冷却の理想的な冷却限界 T_s[7]はリコイル限界と呼ばれる

$$k_B T_s = \frac{(\hbar k)^2}{2m} \tag{2.44}$$

となる事が知られている。ここで、k はサイドバンド冷却に用いるレーザーの波数の冷却方向射影成分である。永年周波数を 1MHz とし、本論文の実験に用いたレーザー配置の場合は、この限界に対応する平均フォノン数は 2×10^{-3} と計算する事ができる。

このような冷却をサイドバンド冷却と呼ぶ [48, 49, 50]。イオントラップを用いる場合、外部運動のフォノンを量子ビットと考える事も多く、その場合サイドバンド冷却による量子状態の初期化が必須となる。また、その他の操作（後述する Mølmer-Sørensen ゲート等）も振動基底状態まで冷やしたイオンを用いる事でその精度を高める事ができる事が分かっており、サイドバンド冷却はイオントラップを用いる上での基本操作という事ができる。

2.3 イオンを用いた量子情報処理

Ca^+ を用いた量子情報処理の場合、用いる事ができる qubit は大きく分けて

- 光 qubit: 基底状態 $^2S_{\frac{1}{2}}$ と準安定状態 $^2D_{\frac{5}{2}}$
- RF qubit: 基底状態の磁気副準位 $^2S_{\frac{1}{2}}(m = \pm\frac{1}{2})$
- ラマン qubit: 準安定状態 $^2D_{\frac{3}{2}}$ と $^2D_{\frac{5}{2}}$

の3種類がある。それぞれ、qubit 間を結ぶ遷移の名前をとって名づけた。

量子情報処理分野において広く用いられているのは光 qubit で、729nm の電気4重極遷移を用いて qubit 間の遷移を行う。光 qubit は、サイドバンド遷移を利用

[7]サイドバンド周波数と用いる遷移の自然幅とを比べ、十分にサイドバンド周波数が大きい場合をタイトバインディングと呼ぶ。その場合、サイドバンド冷却は理想的に働く。これらの比 $r(=\nu/\gamma)$ が無視できないぐらい大きな場合、冷却限界は平均フォノン数にしておよそ r^{-2} となる。

した様々なゲートが利用可能であるという利点がある。特に本節少し後で述べるMølmer-Sørensen ゲート（相互作用）が強力である [15, 14]。

続いて、本論文ではデコヒーレンスフリーエンタングルド状態の生成に用いたのは 2 番目の RF qubit である。これは結合する遷移が RF 領域にあり、その制御が非常に易しいという利点がある。また、729nm によって量子状態に依存して準安定状態に励起する事で、エネルギー差の少ない qubit にとって難しい問題となる射影測定も実現できる。さらに、基底状態のみで qubit が構成されているため、準安定状態の寿命（約 1 秒）に制限されない実験が可能である。一方で、RF の波長が非常に長く、波数が小さいためにサイドバンド遷移は通常利用する事ができず[8]、エンタングル操作はその他の遷移に頼る事になる。

最後にラマン qubit は、光コムによって位相同期した 1.8THz 離れた二つの光を用いて qubit の回転を行う [57]。この qubit はエネルギー分離の大きさが THz 領域にあり、THz 波の検出や発生、また分子の回転準位といったエネルギー領域とも親和性がよく、他の系との結合という意味でアドバンテージを持てる可能性がある。また、このラマン qubit は光シフトを用いたスピンシミュレーションにも有利な点がある。特にこのラマン qubit は qubit 間のエネルギー差が大きい事で、qubit に光シフトを与えるための光の組み合わせ方に様々な選択肢ができる。その結果、スピンシミュレーションをするために適切な光シフトを設計する事ができる事が分かっている。

2.3.1 射影測定・電子シュルビング法

量子情報処理をやる上では、量子状態を測定する射影測定が基本的な技術となる。イオントラップでは電子シュルビング法 [12] による蛍光検出で射影測定を実現する。まず、qubit の二つの量子状態の内、片方の状態は蛍光を発し、もう片方の状態は蛍光を発しない様な状況を作る。イオンからの蛍光は光電子増倍管（PMT）で観測する事ができるため、イオンからの蛍光量に対し、閾値を設ける事でイオンの量子状態を測定する事ができる。また、イオンの蛍光量は PMT に観測されるものだけでも約 30000cnts/s と非常に多いため、複数のイオンに対しても同じ操作により何個のイオンが片方の量子状態にいるかを測定する事が可能となる。図 2.7 がたとえば 4ion で実験した場合の、蛍光量のヒストグラムである。それぞれまとまった蛍光量が、対応する数のイオンが励起状態にある場合を表している。イオンが 4 つのときは qubit の励起数に関して 5 種類の可能性があるため、閾値を 4 つ用意 th_i $(i = 1 \ldots 4)$ し、th_1 以下の蛍光量だった測定回数を N_0、th_1 より多く th_2

[8]マイクロ波の近接波や磁場勾配を利用して、マイクロ波領域で直接サイドバンド遷移を励起する実験も近年実現されている [54, 55, 56]

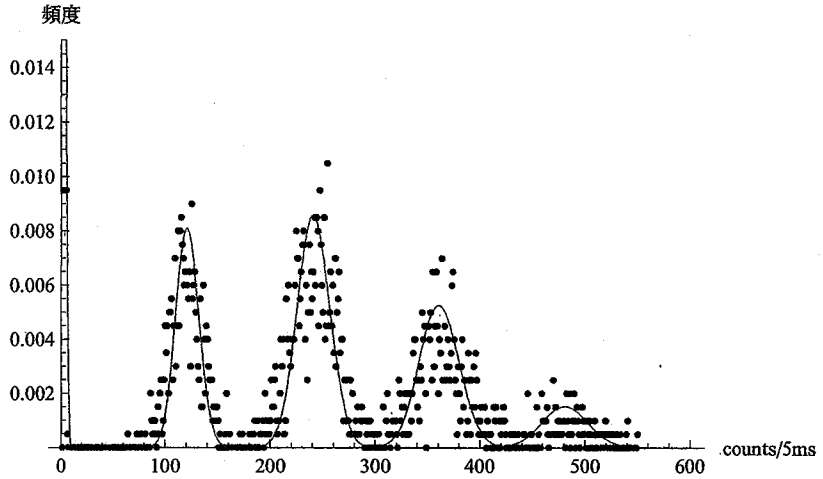

図 2.7: 4ion を用いた蛍光観測
4ion を用いた時の蛍光観測データをヒストグラム化して表示してある。横軸は 5ms あたりの蛍光量で、縦軸は頻度である。赤い線はポアソン分布を仮定した曲線で、実験結果とよく合っている事が分かる。

以下だった測定回数を $N_1\cdots$、th_4 より多い蛍光量だった測定回数を N_4 とする。そして、全体の測定回数 N に対し、

$$p_i = N_i/N \tag{2.45}$$

を計算する事で、励起数のポピュレーション p_i $(i = 0\ldots4)$ が測定できる。

蛍光量の分布が重なってしまう事により、励起数を間違って判断してしまう測定誤差は、イオンが 4 つの場合には最悪でも 1% 程度であると計算する事ができる。これはたとえ測定回数を増やしても減らす事ができないエラーであるため、特にイオン数が多い場合は大きな問題となる。これを回避するために（もしくは短い測定時間による少ない蛍光数で実験をするために)、図 2.7 のように蛍光量をフィッティングしてその重みを測定する方法がある。この方法は比較的多くの測定回数をとらなければならないという欠点はあるが、劇的にエラーを小さくすることが可能になる。

もしくはカメラを使い、イオンごとに蛍光観測を行うという手法が広くとられている。各イオンの射影測定が可能であるこの方法は射影測定の方法自体としても、PMT を使ったものより強力である。しかしながらこの方法は、カメラの画像転送速度が遅いという欠点を持つ。そのため、一回の測定に PMT に比べて長い時間 (100ms) がかかってしまう。

量子射影ノイズ

上記のように射影測定自体のエラーは4イオンの場合に最悪で1% 程度、単一イオンの場合はほぼ0にまで低くすることができる。その場合に、実験結果（励起数に関するポピュレーション）の誤差となるものは、量子射影ノイズと呼ばれる量子的なノイズである。

一般に状態が1対1の重ね合わせ状態にあるときでも、各射影測定が吐き出す測定結果は $|\uparrow\rangle$ か $|\downarrow\rangle$ かのどちらかである。その結果を多数回積算し平均する事で、それぞれの状態にある重みを測定するわけであるが、量子力学の原理によって各測定結果が完全にランダムであるため、有限回の試行でこの重みを測定するのに確率的な誤差がつく。

このような確率的な誤差は2項分布によって計算する事ができる。2項分布によると、試行回数 N 回に対し、確率 p で生じる事象の確率密度分布 $p(N,p:k)$ は

$$p(N,p:k) =_N \mathrm{C}_k p^k (1-p)^{N-k} \tag{2.46}$$

と書くことができる。また、この平均値は Np で与えられ、分散は $Np(1-p)$ と計算できる。

分散は測定されるべき真値の確率 p に対応して生じる事象回数のゆらぎとなるため、この揺らぎに基づく測定誤差 δ は

$$\delta = \sqrt{Np(1-p)}/N = \sqrt{\frac{p(1-p)}{N}} \tag{2.47}$$

と計算できる。この測定誤差を量子射影ノイズと呼び、測定回数を増やす事によって減らすことができる。

2.3.2 ゲート

量子情報処理をするためには、qubit を回転させるためのゲートが必要となる。一般に、量子情報処理のためにはいくつかの 1qubit ゲートと、1つの 2qubit ゲートが必要である事が分かっている。

1qubit ゲート

1qubit ゲートは qubit をブロッホ球上で任意に回すために必要となる。一番簡単な例としては、それぞれ上で qubit を紹介した時に述べた方法で行う。例えば光 qubit の場合、2準位系と光の相互作用によるラビ振動を用いる事で qubit を回転させる事ができ、ブロッホ球上での任意の回転を誘起する事ができる。その他にも、本論文で実現した幾何学的位相を用いたゲート等がある [41]。

2qubit ゲート

古典コンピュータにおける AND ゲートのような二つの入力を持つ量子ゲートを 2qubit ゲートと呼ぶ。一般に、このようなゲートは直積状態からエンタングルド状態を作る事ができ、また逆にエンタングルド状態を作る事ができる操作で 2qubit ゲートを構築する事ができる。

qubit 間に量子相関を作り出す 2qubit ゲートは qubit 間に何らかの相互作用が必要となる。トラップイオン系の場合、イオン間のクーロン相互作用による集団振動モードを利用する。ここではイオントラップ系において特に強力である Mølmer-Sørensen ゲート [15, 14] について説明を行う。

2.3.3 Mølmer-Sørensen ゲート

多数個のイオンのエンタングルド状態を作る事ができる Mølmer-Sørensen ゲートと、本論文でも利用するスピン間相互作用の説明を行う。

調和振動子の強制振動

Mølmer-Sørensen ゲートを理解するために、まずは調和振動子の強制振動について述べる [58]。イオンの外部運動は調和振動子でよく記述でき、以下の節で述べるようにスピンに依存した強制運動をイオンに対して引き起こす事でエンタングルド状態が生成される。

調和振動子

$$\hat{H}_0 = \hbar\nu(\hat{a}^\dagger\hat{a} + \frac{1}{2}) \tag{2.48}$$

に強制振動

$$\hat{H}_1 = \vec{F}(t)\cdot\hat{x} = f^*(t)x_0\hat{a} + f(t)x_0\hat{a}^\dagger \tag{2.49}$$

が印加されたとする。このとき、相互作用表示でハミルトニアンは

$$\hat{H}_I = f^*(t)x_0\hat{a}e^{-i\nu t} + f(t)x_0\hat{a}^\dagger e^{i\nu t} \tag{2.50}$$

となる。ここで、強制振動を共鳴条件から δ だけ離調した振動として

$$f(t) = \frac{f_0}{2}e^{-i(\nu-\delta)t}, \tag{2.51}$$

$$\hat{H}_I = \frac{f_0^* x_0}{2}\hat{a}e^{-i\delta t} + \frac{f_0 x_0}{2}\hat{a}^\dagger e^{i\delta t} \tag{2.52}$$

と書きなおせる。

ここで、このハミルトニアンによる時間発展を考える。時間に依存するハミルトニアンの場合、時間発展演算子 $\hat{U}(t)$ はダイソン級数で書くことができ、

$$\hat{U}(t) = \exp\left\{-\frac{i}{\hbar}\left(\int_0^t \hat{H}_I(t')dt' + \frac{1}{2}\int_0^t dt' \int_0^{t'} dt''[\hat{H}_I(t'), \hat{H}_I(t'')] + \dots\right)\right\} \tag{2.53}$$

となる。

第一項だけを計算すると、

$$\exp\left\{-\frac{i}{\hbar}\int_0^t \hat{H}_I(t')dt'\right\} = \hat{D}(\alpha(t)) \tag{2.54}$$

となる。ここで、変位演算子 $\hat{D}(\alpha)$ を

$$\hat{D}(\alpha) \equiv e^{\alpha\hat{a}^\dagger + \alpha^*\hat{a}} \tag{2.55}$$

と定義し、

$$\alpha(t) = -\frac{i}{\hbar}\int_0^t \frac{f_0 x_0}{2} e^{i\delta t'} dt' = \frac{f_0 x_0}{2\hbar\delta}(1 - e^{i\delta t}) \tag{2.56}$$

とした。

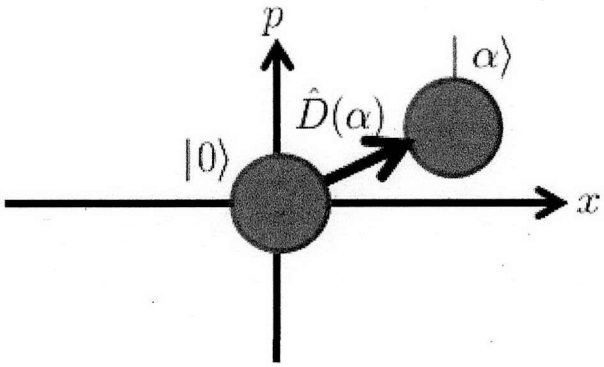

図 2.8: 変位演算子の作用

変位演算子 $\hat{D}(\alpha)$ は真空 $|0\rangle$ に作用するとコヒーレント状態 $|\alpha\rangle$ を生成する演算子で、

$$\hat{D}(\alpha)|0\rangle = |\alpha\rangle = e^{-\frac{1}{2}\alpha^2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}}|n\rangle \tag{2.57}$$

となる。真空に変位演算子を作用させた時の変化を図 2.8 に示した。状態がこのように変化する事ため、$\hat{D}(\alpha)$ を変位演算子と呼ぶ。

次に、高次の項まで含めた結果について考える。微小時間発展を考えると上の1次までの計算は正しくなるので、微小時間発展を繰り返して有限の時間発展をすると考えると、変位演算子の積

$$\hat{D}(\alpha)\hat{D}(\beta) = \hat{D}(\alpha+\beta)e^{\mathrm{Im}(\alpha\beta^*)} \tag{2.58}$$

より、有限時間の時間発展演算子は

$$\hat{U}(t) = e^{i\Phi(t)}\hat{D}(\alpha(t)) \tag{2.59}$$

と書ける。ここで、

$$\Phi(t) = \mathrm{Im}(\int_0^t \alpha^*(t')d\alpha(t')) \tag{2.60}$$

は幾何学的位相となる。

さて、$\alpha(t)$ の定義より、$t = 2\pi/\delta$ の時刻では変位は0になるため、

$$\hat{U}(2\pi/\delta) = \exp(i\frac{\pi|f_0x_0|^2}{2(\hbar\delta)^2})\hat{D}(0) = \exp(i\Phi_0)\hat{1} \tag{2.61}$$

となり、幾何学的位相 Φ_0 を得て、状態は元に戻る事が分かる。なお、Φ_0 は変位の軌跡によって囲まれる円の面積に等しい事が分かり、これが幾何学的位相と呼ばれる所以である。

スピン依存力

上記の強制振動をスピンに依存した形でイオンに作用させる。スピン依存力は離調した等強度のブルーサイドバンド遷移とレッドサイドバンド遷移を同時に励起する事で発生させることができる。イオン1個に対する相互作用ハミルトニアンは

$$\hat{H}_I = \frac{\hbar\eta\Omega}{2}(\hat{a}\hat{\sigma_+}e^{-i\delta t} + \hat{a}^\dagger\hat{\sigma}_-e^{i\delta t}) + \frac{\hbar\eta\Omega}{2}(\hat{a}^\dagger\hat{\sigma_+}e^{i\delta t} + \hat{a}\hat{\sigma}_-e^{-i\delta t}) \tag{2.62}$$

となる。ここで離調を δ、サイドバンドラビ振動数を $\eta\Omega$ とした。また、ラムディッケ領域にある事を仮定し、η の2次以上のオーダーは省略した。

ハミルトニアンを式変形し、

$$\hat{H}_I = \frac{\hbar\eta\Omega}{2}(\hat{a}e^{-i\delta t} + \hat{a}^\dagger e^{i\delta t})\hat{\sigma}_x \tag{2.63}$$

と書きなおす。

この表式を見ると、x方向のスピンの向き $|\uparrow_x\rangle$、$|\downarrow_x\rangle$ に依存して力の向きがちょうど逆になるようなスピン依存力が調和振動子に働くことがわかる。調和振動子の議論に合わせると、強制振動力 f_0 は

$$f_0 = \frac{\hbar\eta\Omega}{x_0} \tag{2.64}$$

となる。

さて強制振動の議論より、初期状態を $|\downarrow\rangle|0\rangle$ とすると、時刻tにおいて状態 $|\psi(t)\rangle$ は

$$|\psi(t)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}e^{i\Phi(t)}|\uparrow_x\rangle|\alpha(t)\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}e^{i\Phi(t)}|\downarrow_x\rangle|-\alpha(t)\rangle \tag{2.65}$$

となる。スピン状態に依存して調和振動子に強制力が働く事で、内部状態と調和振動子との間にエンタングルド状態ができている事が分かる。

Mølmer-Sørensen ゲート

イオンが2個トラップされており、レッドサイドバンド遷移とブルーサイドバンド遷移から等しく離調をとった等強度の励起を行う。この時、相互作用ハミルトニアンはイオン1個の場合のものを単に足せば良いので

$$\hat{H}_I = \sum_{j=1,2}\frac{\hbar\eta\Omega}{2}(\hat{a}e^{-i\delta t} + \hat{a}^\dagger e^{i\delta t})\hat{\sigma}_x^{(j)} \tag{2.66}$$

となる。

ここで、イオンの固有振動モードについて考える。イオンが2つあるので、それぞれ一つの方向に関して振動モードの自由度は2つある。2体の運動の場合よく行う処方箋として、独立な位置座標系として重心座標系と相対座標系に分離する方法がある。それぞれの座標系における振動モードとして、重心座標系に対してはcenter-of-mass(COM)モード、相対座標系に対してはstretch(STR)モードと運動を2つに分類できる。今回は、最大エンタングルド状態を作るため、すべてのイオンに等しい重みがかかるCOMモードを強制振動を起こす調和振動子として採用する[9]。

調和振動子としてCOMモードを考えると、イオンごとに同じ方向の力が働く時だけ調和振動子に対する強制振動となるので、上のハミルトニアンはさらに

$$\hat{H}_I = (\frac{F(t)x_0}{2}\hat{a}^\dagger + \frac{F^*(t)x_0}{2}\hat{a})|\uparrow_x,\uparrow_x\rangle\langle\uparrow_x,\uparrow_x| - (\frac{F(t)x_0}{2}\hat{a}^\dagger + \frac{F^*(t)x_0}{2}\hat{a})|\downarrow_x,\downarrow_x\rangle\langle\downarrow_x,\downarrow_x| \tag{2.67}$$

[9]イオンが2個の場合、STRモードも2つのイオンに対し振動の大きさは等しく、最大エンタングルド状態が生成できる。しかし、一般に多数個のイオンに対しては、COMモード以外は、イオンごとに異なった大きさの強制振動力となってしまい、最大エンタングルド状態が生成できない。

と変形できる。つまり、2個のイオンのスピン状態が揃っている時にだけ調和振動子に強制振動が働く。その結果、前節の強制振動の議論より、スピン状態に依存した形で振動量子状態がコヒーレント状態になる事が分かる。つまり、スピン状態と振動量子状態がエンタングルした状態になる。

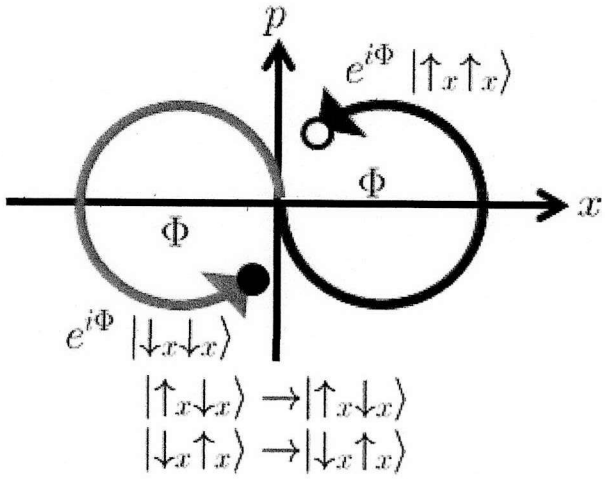

図 2.9: Mølmer-Sørensen ゲートの時間発展
COM モードを使った場合の Mølmer-Sørensen ゲートの時間発展を振動量子の位相空間で描いた。

強制振動の議論より時刻 $t = 2\pi/\delta$ において、調和振動子は初期状態に戻り、スピンの状態に関しては

$$|\uparrow_x,\uparrow_x\rangle \rightarrow e^{i\Phi_0}\,|\uparrow_x,\uparrow_x\rangle \tag{2.68}$$
$$|\uparrow_x,\downarrow_x\rangle \rightarrow |\uparrow_x,\downarrow_x\rangle \tag{2.69}$$
$$|\downarrow_x,\uparrow_x\rangle \rightarrow |\downarrow_x,\uparrow_x\rangle \tag{2.70}$$
$$|\downarrow_x,\downarrow_x\rangle \rightarrow e^{i\Phi_0}\,|\downarrow_x,\downarrow_x\rangle \tag{2.71}$$

のように位相を得る。ここで、$\Phi_0 = 2\pi(\frac{|\eta\Omega|}{\delta})^2$ である。この位相を得る間の時間発展は図 2.9 にようになる [58]。この位相が最大エンタングルド状態を作るためには、$\Phi_0 = \pi/2$ の条件になっていれば良い。このため、

$$\delta = 2\eta\Omega \tag{2.72}$$

が成り立っている時、時刻 $t = 2\pi/\delta$ において最大エンタングルド状態が生成でき、2qubit ゲートが実現できる事が分かる。このゲートを Mølmer-Sørensen ゲートと呼ぶ。

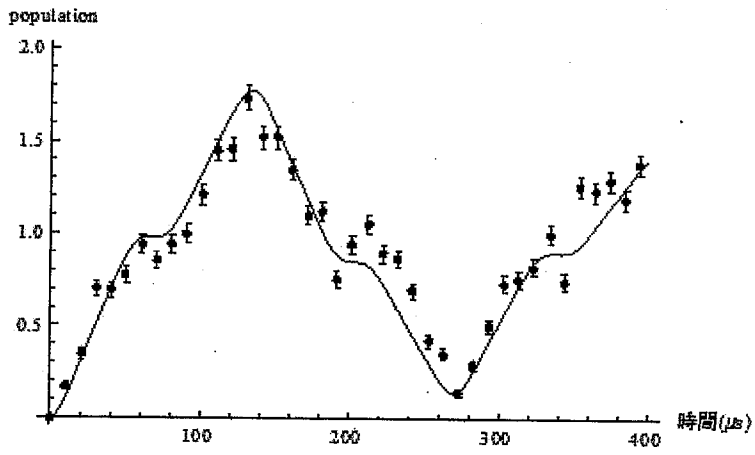

図 2.10: 2ion の Mølmer-Sørensen ゲート実験

図 2.10 に 2ion の Mølmer-Sørensen ゲートの実験結果を載せる。サイドバンドラビ周波数 $\eta\Omega = 7.5$kHz で離調は $\delta = 15$kHz とした。時間発展がくびれているところ[10]で、振動状態と内部状態のディスエンタングルが起きており、その点で内部状態のエンタングルド状態が生成されている。本論文の第 4 章で導入されるパリティ振動を利用する事で生成されたエンタングルド状態の忠実度を測定する事ができる。図 2.11 が生成されたエンタングルド状態のパリティ振動で、ほぼ振幅 1

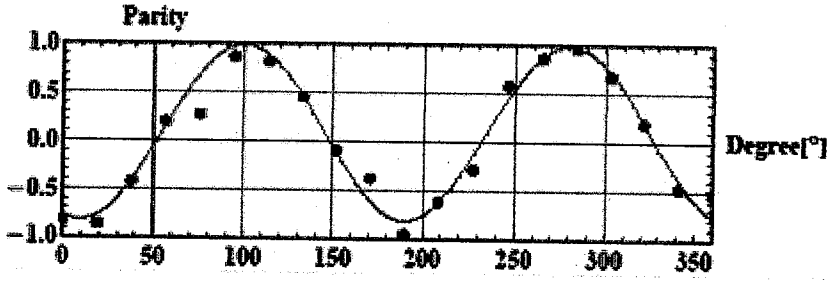

図 2.11: 2ion の Mølmer-Sørensen ゲート解析用パリティ振動

で振動していることが分かる。このゲートによって得られた忠実度は 0.91 ± 0.04 であった。

[10]時間発展のこのくびれは、スピンの変化に対し半分の周期を持つ振動量子の変化によって生じている。

2.3.4 スピン間相互作用

前節のMølmer-Sørensenゲートは振動モードと内部状態のエンタングルド状態を経て、最終的に内部状態のみのエンタングルド状態になっていた。このように振動状態の実励起があると、スピン間の相互作用を連続的に作用させることができず、この相互作用をスピン系の量子シミュレーション等に用いる事ができない。そこで、Mølmer-Sørensenゲートに比べて、サイドバンド遷移に対する離調δを大きくとる事を考える。こうする事で、振動状態の実励起をほとんど起こさずに式2.68のような位相発展をさせる事ができる[59]。

離調δのスピン依存強制力中に、調和振動子が励起される最大のコヒーレント状態は

$$|\alpha_m| = 2\frac{\eta\Omega}{\delta} \tag{2.73}$$

となる。コヒーレント状態の平均フォノン数は$|\alpha|^2$で与えられるので、最大の平均励起フォノン数を0.1以下に抑えるためには、

$$\delta > \sqrt{10}\eta\Omega \tag{2.74}$$

とすればよい事が分かる。

今、$|\alpha|^2 \ll 1$として、振動状態への励起がないとすると、式2.68の位相発展を常時すると考える事ができるので、このような時間発展をする相互作用として

$$\hat{H}_I = J\hat{J}_x\hat{J}_x \tag{2.75}$$

を考える事ができる。ここで、$\hat{J}_x = \hat{\sigma}_x^{(1)} + \hat{\sigma}_x^{(2)}$、$J = \frac{(\eta\Omega)^2}{4\delta}$である。

このハミルトニアンはスピン間相互作用のハミルトニアンであるので、このような相互作用を用いて量子シミュレーションや、その他のスピン系の時間発展を構築する事ができる。

図2.12にスピン間相互作用の実験結果を載せる。ラビ振動数14kHzに対して、離調を60kHzとしている。図2.10の結果と比べて、時間発展が滑らかでスピン間の純粋の相互作用に近づいている事が分かる。また、離調を大きくとった事により、相互作用の強さは約3kHzと非常に遅くなっている。

さらに一般に同様にして多数個のイオンに対しても、等強度でかつ等しく離調されたCOMモードのレッドサイドバンド遷移・ブルーサイドバンド遷移を励起する事によって

$$\hat{H}_I = J\hat{J}_x\hat{J}_x \tag{2.76}$$

$$\hat{J}_x = \sum_i \hat{\sigma}_x^{(i)} \tag{2.77}$$

というようなすべてのイオンがすべてのイオンと等しくスピン相互作用するスピン間相互作用を実現できる。

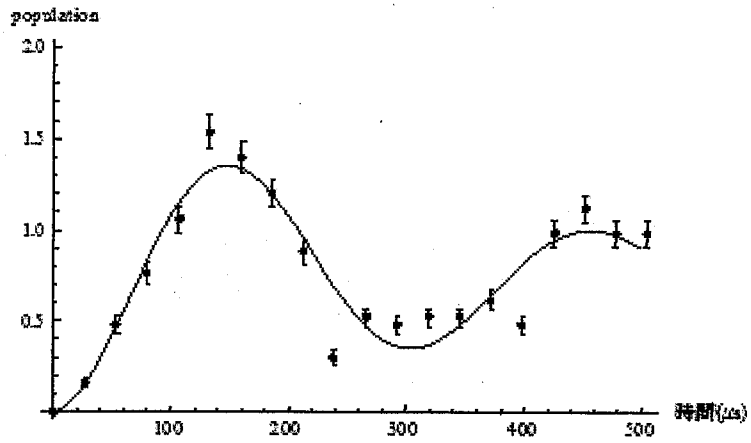

図 2.12: 2ion のスピン間相互作用

2.4 実験周辺技術

2.4.1 イオン結晶の自動再結晶化

複数のイオンを用いた実験をする場合、イオン結晶の安定化という問題が生じる。イオン結晶は主に室温の背景ガスとの衝突によって大きなエネルギーをもらってしまい、時折クラウド状態になってしまう。高温のクラウド状態は大きな運動エネルギーを持っているため、イオンは高速で動いている。そのため、それを冷却するにはその大きなドップラーシフトにより、大きく赤方離調しなければならない。一方で、通常実験時は冷却光の離調を共鳴に近づけ、多くの自然放出光によるシュルビング法で射影測定を行っており、またクラウド状態はトラップ RF による大きな余剰マイクロモーションを受けているため、そこから自然には再結晶化しない事がほとんどである。

そこで、実験サイクルの間でイオン結晶のクラウド化を観測し、クラウド化していた場合には各種パラメータを変更しイオンを再結晶させる。この技術をイオン結晶の自動再結晶化と呼ぶ[11]。

図 2.13 に自動再結晶化を組み込んだ時の実験シークエンスと、再結晶化のための操作をまとめた。図 2.13(a) にあるように、実験は一つのパラメータにつき 50 〜200 回程度の繰り返し測定を行い、その後にイオン結晶の観測を行う。イオン結晶の観測は、イオンを基底状態に初期化した後に冷却光を照射し、イオンの蛍光

[11]本論文の実験では、4 個以上の場合にイオン結晶のクラウド化が顕著になり、問題となった。そこで、4 個のエンタングルド状態生成の実験の際に、この技術を開発し、それ以降使用している。

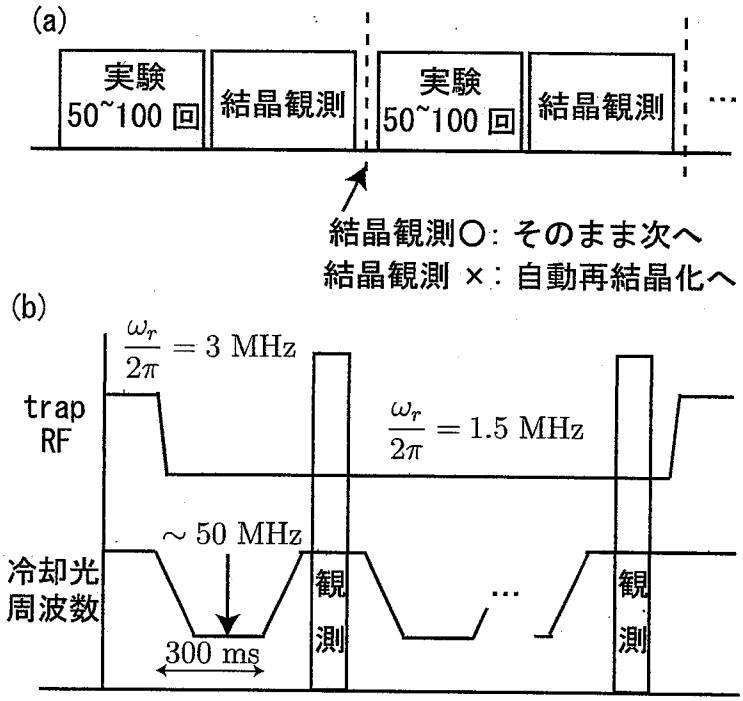

図 2.13: 自動再結晶化プロセス
(a) 自動再結晶化が組み入れられた実験シークエンス概略 (b) 自動再結晶化

の有無によって行った。イオンがクラウド化している場合は、蛍光量が劇的に減るため、結晶状態とクラウド状態を判別することができる。その結果に従い、イオン結晶が保持されている場合は次のパラメータでの実験シークエンスに移行する。対して、イオンがクラウド化していた場合は、その回のデータを消去し、図 2.13(b) の自動再結晶化プロセスに移行する。

再結晶化のためにやっている事は、(1) トラップ RF を下げる、(2) 冷却光の離調を大きくする、の二点である。イオンがクラウド化している事が観測されたら、まずトラップ RF を下げ、クラウド状態が受ける余剰マイクロモーションを小さくする。続いて、加熱されたイオンを冷却するために冷却光の離調を大きくし、その後元に戻し、蛍光観測を行う。イオンがまだクラウド状態にある場合は、再度冷却光の離調を大きくする、というように、これをイオンが再結晶化し蛍光観測ができるまで繰り返す。最後に、イオンが再結晶化したらトラップ RF を実験値まで戻し、一つ前のパラメータによる実験からもう一度やり直す。

イオンの個数や実験値等で再結晶化の最適条件は変わる。また、再結晶化に必要な時間も状況により 100 ~ 1000ms とさまざまである。

図 2.14 に再結晶化時におけるイオン結晶の写真を載せる。図 2.14(a) はトラッ

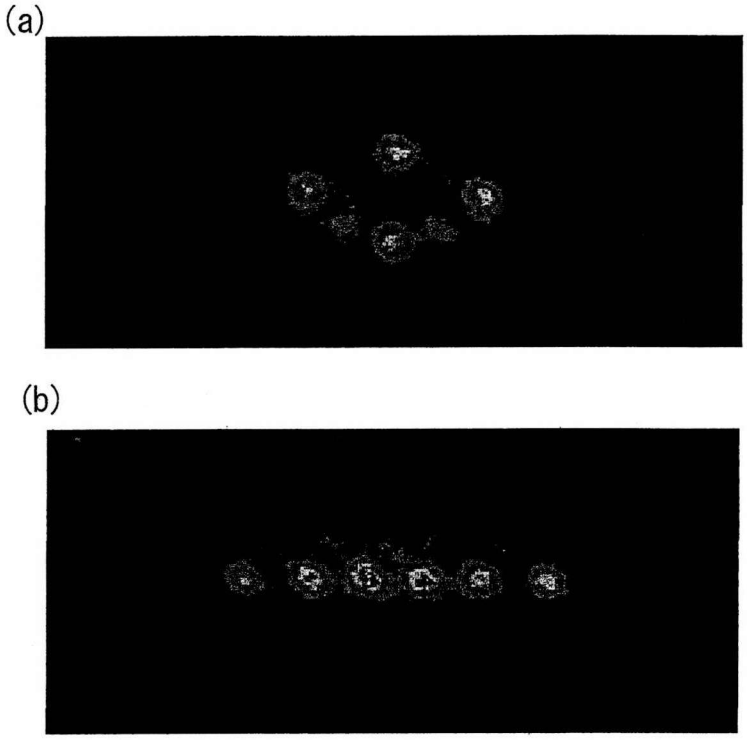

図 2.14: イオン結晶写真
(a) 再結晶化したイオン結晶 (b) 実験パラメータでのイオン結晶

プ RF を下げて再結晶化したときのイオン結晶の写真で、図 2.14(b) はその後にトラップ RF を実験値まで戻し、1 次元のイオン鎖にしたときの写真である。

2.4.2 ファイバーノイズの逓減

Ca^+ イオンで良く用いられる 2 つの電子状態 $^2S_{1/2}$、$^2D_{5/2}$ を qubit とする場合、スピン操作には光を用いる必要がある。両者を結ぶ四重極遷移はその線幅が約 1Hz と非常に狭いために、励起するためのレーザー線幅としても十分に狭いものが要求される。そのための 729nm の光はチタンサファイアレーザで用意され、ULE(Ultra Low Expansion) 共振器に安定化する事によって、線幅の狭窄化・長期安定度を実現している。

まずレーザーの周波数安定度がどのように原子に影響を与えるかを説明する。原子にレーザーを照射する時、原子と光の間の相互作用は

$$\hat{H} = \hbar\omega_a |e\rangle\langle e| + \Omega(|e\rangle\langle g| + |g\rangle\langle e|)(e^{i\omega_l(t)t} + e^{-i\omega_l(t)t}) \tag{2.78}$$

のように書ける。ここで、$\{|e\rangle, |g\rangle\}$はそれぞれカルシウムイオンの励起状態と基底状態として両者のエネルギー差をω_a、ラビ振動数をΩ、レーザーの周波数は$\omega_l(t)$として時間に依存しているとした。

次にレーザーの周波数に対応する回転系に乗る事により

$$\hat{H}' = \hbar\delta(t)\,|e\rangle\langle e| + \Omega(|e\rangle\langle g| + |g\rangle\langle e|) \tag{2.79}$$

と書きなおす事ができる。ここで$\delta(t) = \omega_a - \omega_l(t)$とした。この表式を見ると、レーザーの周波数の変化は回転系における励起状態のエネルギー変化となって現れる事が分かる。つまりレーザーの有限の線幅によるレーザー周波数の揺らぎは、回転系におけるエネルギーの揺らぎになる。

一方で、回転系におけるエネルギー差(δE)はブロッホ球上での角速度$\omega = \delta E/\hbar$での回転を生む。そのため、エネルギー差がランダムに変化するという事は、ブロッホ球上でスピンがランダムに回転する事を意味している。このようなランダムな回転は、制御したいスピンがどの方向を向いているか分からなくしてしまう。このように、単一の量子がどういう状態か分からなくなる事をデコヒーレンスと呼ぶ。

これより、レーザーの線幅はqubitのコヒーレンス時間に影響を与える事が分かり、長いコヒーレンス時間を得るためにはレーザーの線幅は十分に細い必要があると言える。

現在レーザーの線幅を決めているものとして主に以下のものが考えられる。

- ULEの音響・振動ノイズ
- レーザーロック系回路のノイズ
- ファイバーノイズ

ここでは根本的な問題から順番に載せている。本節では一番改善の易しい最後のファイバーノイズについて考えてみる。

実験において、レーザー光源からイオンへレーザーを照射するために、10mの長いファイバーを使用している。ファイバーの材質であるガラスに応力が働くと屈折率が変化してしまうために、ファイバーに対して外から振動などの外乱が与えられると、それはレーザーの位相に対する外乱となる。これを防ぐ方法として、第一にファイバーを静かな環境で保持する事が考えられる。除振台を結ぶ10mのファイバーを筒状の緩衝剤に包んだところ、それだけでファイバーノイズをかなり抑圧することができた。第二にそれでも取りきれないノイズをフィードバックによって消す方法として、ファイバーノイズキャンセルというものがある[60]。ここではその実現に向けて工夫した光学系について簡単に説明する。

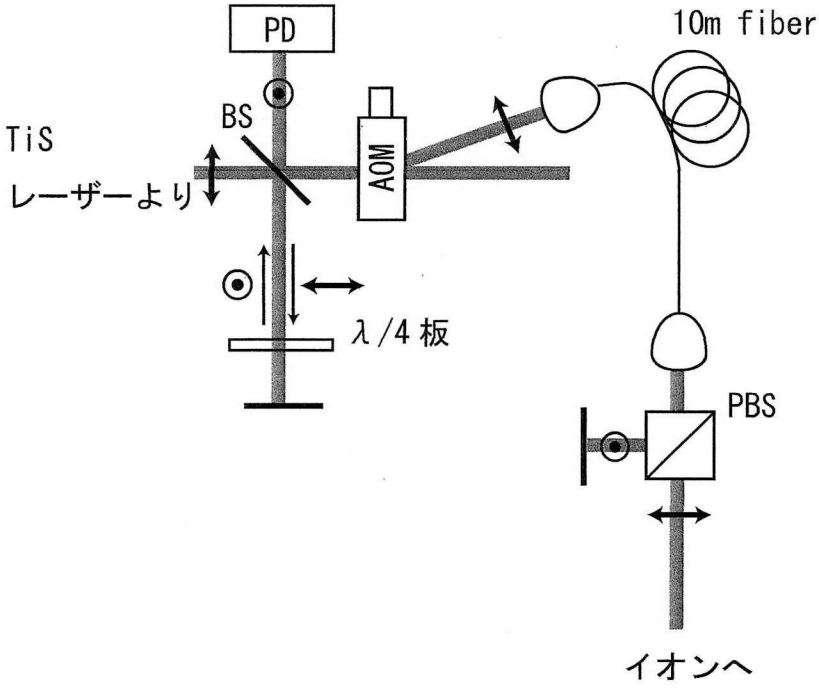

図 2.15: ファイバーノイズ観測用マッハツェンダー干渉計

ファイバーノイズキャンセルのための光学系が図2.15である。これはファイバーを含んだマイケルソン干渉計である。ファイバーを往復した光はAOM(駆動周波数ω)によって周波数2ωだけオフセットがついているので、フォトディテクターの2ωの周波数で振動する成分を観測する事で、ファイバーを往復した光と元の光(LO光)との間の干渉を見る事ができる。ここで、干渉計の腕の中にファイバーが含まれているので、そのビートシグナルの周波数幅を見る事でファイバーによるノイズを観測でき、また制御する事が可能になる。こうして、ファイバーの前後での位相ロックを実現する。

ファイバーノイズキャンセルの性能は、ファイバーの長さとシグナルのS/Nの強さで決まる。観測できるファイバーノイズはファイバーを往復したものであるため、実際に消したい往路のノイズと復路のノイズが等しいとして、往路のノイズをキャンセルしている。そこで、光がファイバーを往復する時間内で変化してしまうようなノイズは消すことができない。今回ファイバーの長さは10mなので、光が往復に要する時間は約30ns、つまり30MHz以上のノイズは原理的に消すことができない。これは今回の場合問題にならないが、さらにファイバーが長くなった場合性能を決めるものになる。

次に、シグナルのS/Nを悪化させる要因について考える。実際の実験系では、

制御に使うファイバーを往復した光以外、ファイバー端面での反射やその他オプティクスでの反射等とのビートが数多く観測される。これらはフィードバックをする信号のノイズとなるため、できる限り抑えなければならない。しかしながら、イオンに照射する光は出来うる限り強度があった方が良いため、ファイバーノイズキャンセルにはできるだけ光強度を割かない方が良い。そこで、図2.15のように偏光を用いる事で、ノイズとLO光が干渉しないようにし、S/Nは劇的に改善された。しかし、この方法はファイバーの往路と復路の偏光が異なるという問題点がある。使用しているファイバーは偏波保持ファイバーであり、応力によって強い複屈折性がある。そのため、ファイバーの位相ノイズが偏光に依存している可能性がある。その場合、この方法は余計なノイズを付加してしまう事になるので、望ましくない。この影響の評価はまだやっていないが、この手法を使った場合でも本実験では必要なコヒーレンスが得られているので、問題としなかった。

第3章　実験I: 誘導ラマン断熱通過法を用いた幾何学的単一qubit量子ゲート

量子コンピュータを多数のqubitで実現するためには、非常に高い精度でのqubitの回転と2量子ゲートの実現が必要となる。しかしこれらの量子操作は実験的なパラメーターの不完全性の影響を受けるため、忠実度の高い量子操作を行う事は、その量子系を制御する（古典）システム全体の精度・安定性を高める必要がある事を意味する。一方で視点を変えて、そのような実験的なパラメータの揺らぎに比較的強い量子操作を考えることもできる。その一つがホロノミック量子コンピューター [42] に代表される幾何学的位相による量子操作である [40, 41]。

量子状態を位相空間上で変化させ、その始点と終点を一致させたとき、それらが同じ状態であるためには初期状態と最終状態は高々グローバル位相だけが異なった状態になるはずである。そのようなとき最終状態は初期状態に対し、その軌道の位相空間における立体角だけの位相を獲得するという事がベリーによって示されている [61]。この得られた位相を幾何学的位相（もしくはベリー位相）と呼ぶ。このような幾何学的な背景を持つ位相の場合、各種パラメータを変更してもその回転角や回転軸がほとんど変わらず、高い忠実度での量子操作が可能である事が期待できる [42]。

また、誘導ラマン断熱通過法（Stimulated Raman Adiabatic Passage:STIRAP）[44] は暗状態の断熱過程を通して、量子状態を高い忠実度で変化させる古くから用いられてきた技術である。この手法も各種実験パラメータにはあまり因らない安定な量子状態操作であるが、古くから用いられてきた3準位でのSTIRAPの場合、量子操作に用いる暗状態が一つしかなく、qubitに必要な2つの自由度を持たせられない。

そこで、Zollerらはアンシラとして状態をもう一つ用意した4準位系におけるTripod型STIRAPを提案した [41]。Tripod型STIRAPには暗状態が2つあるため、qubitの回転の自由度をうまくそれぞれの暗状態に載せることが可能となり、力学的な位相を付加する事なく幾何学的位相のみによるqubitの回転を実現する

事ができる。こうする事で、各種パラメータに敏感には因らない安定な量子ゲートの構築が可能になる。本章では Tripod 型 STIRAP を用いた幾何学的量子ゲートに関する説明、またその実現のための実験について記述する。

3.1　理論

3.1.1　Tripod 型 STIRAP

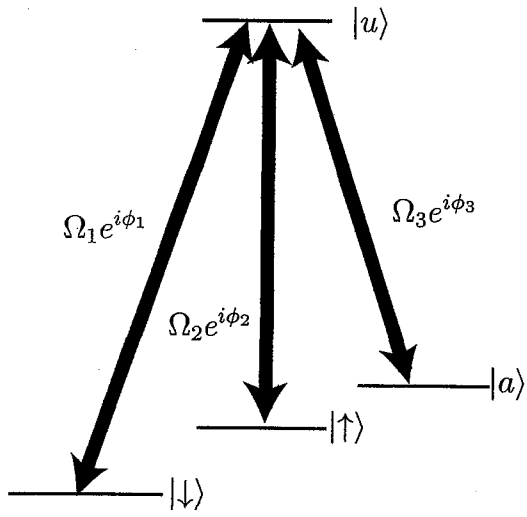

図 3.1: Tripod 系
三つの状態が一つの状態とそれぞれの外場により結合している。

qubit の状態 $\{|\uparrow\rangle, |\downarrow\rangle\}$、(励起) 状態 $|u\rangle$ と、アンシラ状態として $|a\rangle$ がそれぞれ図 3.1 の様に相互作用しているとする。このように 3 準位が一つの状態からぶら下がった様な量子系を Tripod 系と呼ぶ。

ハミルトニアンを行列表示で書き起こすと、基底を $\{|u\rangle, |\downarrow\rangle, |\uparrow\rangle, |a\rangle\}$ として

$$H = \begin{pmatrix} \delta & \Omega_1 e^{i\phi_1} & \Omega_2 e^{i\phi_2} & \Omega_3 e^{i\phi_3} \\ \Omega_1 e^{-i\phi_1} & 0 & 0 & 0 \\ \Omega_2 e^{-i\phi_2} & 0 & 0 & 0 \\ \Omega_3 e^{-i\phi_3} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{3.1}$$

となる。このハミルトニアンを対角化し、固有値が 0 となる二つの暗状態に注目

すると、

$$\lambda_1 = 0, |\psi_1\rangle = c_1(e^{i\phi_2}\Omega_2 |\downarrow\rangle - e^{i\phi_1}\Omega_1 |\uparrow\rangle) \tag{3.2}$$

$$\lambda_2 = 0, |\psi_2\rangle = c_2(e^{i\phi_1}\Omega_1\Omega_3 |\downarrow\rangle + e^{i\phi_2}\Omega_2\Omega_3 |\uparrow\rangle - e^{i\phi_3}(e^{2i\phi_1}\Omega_1^2 + e^{2i\phi_2}\Omega_2^2) |a\rangle) \tag{3.3}$$

と計算できる。ここで $c_{1,2}$ は規格化因子である。これらには $|u\rangle$ のポピュレーションが入っておらず、励起状態を消去することができた事がわかる。

Tripod 型 STIRAP は、以上のように、通常の 3 準位型 STIRAP とは異なり暗状態が二つ存在することでより自由度の高い操作が可能となる。以下に後の単一スピンの回転軸に対応した 2 種類のパラメータの STIRAP 操作について考える。

STIRAP 操作 1 (for z gate)

z gate に対応する操作をするため、まず STIRAP 操作 1 として、$\Omega_2 = 0, \phi_1 = \phi_2 = 0$ の場合を考える。この時、二つの暗状態は以下のようになる。

$$|D_z\rangle \equiv |\uparrow\rangle \tag{3.4}$$

$$|B_z\rangle \equiv \frac{1}{\sqrt{\Omega_3^2 + \Omega_1^2}}(\Omega_3 |\downarrow\rangle - e^{i\phi_3}\Omega_1 |a\rangle) \tag{3.5}$$

$|D_z\rangle$ は状態を変えず、$|B_z\rangle$ は 3 準位 SIRAP の暗状態になる事が分かる。

ここで、$\Omega_3 = A\cos t, \Omega_1 = A\sin t$ とし、$t : 0 \to \pi/2$ とパラメータを掃引したとすると、

$$|D_z\rangle : |\uparrow\rangle \to |\uparrow\rangle \tag{3.6}$$

$$|B_z\rangle : |\downarrow\rangle \to -e^{i\phi_3} |a\rangle \tag{3.7}$$

と STIRAP による状態操作が実現する。ここでは、後のためにあえてグローバル位相を残して書いた。

STIRAP 操作 2 (for x gate)

STIRAP 操作 2 として $\Omega \equiv \Omega_1 = \Omega_2, \phi_1 = \phi_2 = 0$ の場合を考える。この時、二つの暗状態は

$$|D_x\rangle \equiv \frac{1}{\sqrt{2}}(|\downarrow\rangle - |\uparrow\rangle) \tag{3.8}$$

$$|B_x\rangle \equiv \frac{1}{\sqrt{2\Omega_3^2 + 4\Omega^2}}(\Omega_3 |\downarrow\rangle + \Omega_3 |\uparrow\rangle - 2e^{i\phi_3}\Omega |a\rangle) \tag{3.9}$$

ここで、上と同様に $\Omega_3 = A\cos t, \Omega = A\sin t$ とし、$t : 0 \to \pi/2$ とパラメータを掃引したとすると、

$$|D_x\rangle \ : \ \frac{1}{\sqrt{2}}(|\downarrow\rangle - |\uparrow\rangle) \to \frac{1}{\sqrt{2}}(|\downarrow\rangle - |\uparrow\rangle) \tag{3.10}$$

$$|B_x\rangle \ : \ \frac{1}{\sqrt{2}}(|\downarrow\rangle + |\uparrow\rangle) \to -e^{i\phi_3}|a\rangle \tag{3.11}$$

というように STIRAP を用いた量子状態操作が実現する。

STIRAP 操作 3 (for θ gate)

上記二つの一般化として、ラビ振動数は任意として $\phi_1 = \phi_2 = 0$ の場合を考える。この時、二つの暗状態は

$$|D_\theta\rangle \equiv \frac{1}{\sqrt{\Omega_1^2 + \Omega_2^2}}(\Omega_2|\downarrow\rangle - \Omega_1|\uparrow\rangle) \tag{3.12}$$

$$\begin{aligned}|B_\theta\rangle \equiv \ & \frac{1}{\sqrt{\Omega_1^2\Omega_3^2 + \Omega_2^2\Omega_3^2 + (\Omega_1^2 + \Omega_2^2)^2}} \times \\ & (\Omega_1\Omega_3|\downarrow\rangle + \Omega_2\Omega_3|\uparrow\rangle - e^{i\phi_3}(\Omega_1^2 + \Omega_2^2)|a\rangle)\end{aligned} \tag{3.13}$$

ここで、$\{\Omega_3 = A\cos t, \Omega_1 = B_1\sin t, \Omega_2 = B_2\sin t\}$ とし、$t : 0 \to \pi/2$ とパラメータを掃引したとすると、

$$|D_\theta\rangle \ : \ \frac{1}{\sqrt{B_1^2 + B_2^2}}(B_2|\downarrow\rangle - B_1|\uparrow\rangle) \to \frac{1}{\sqrt{B_1^2 + B_2^2}}(B_2|\downarrow\rangle - B_1|\uparrow\rangle) \tag{3.14}$$

$$|B_\theta\rangle \ : \ \frac{1}{\sqrt{B_1^2 + B_2^2}}(B_1|\downarrow\rangle + B_2|\uparrow\rangle) \to -e^{i\phi_3}|a\rangle \tag{3.15}$$

というような STIRAP を用いた量子状態操作が実現する。

3.1.2　幾何学的位相ゲート

前節の STIRAP による状態操作を用いた量子ゲートについて考える。

z gate

z 軸回りの回転を行うには、STIRAP 操作 1 を二度繰り返せばよい。初期状態を任意の qubit 状態 $|\psi\rangle = \alpha|\downarrow\rangle + \beta|\uparrow\rangle$ に用意したとする。まず、STIRAP 操作 1 を一度行うと、

$$|\psi\rangle \to \ -\alpha e^{i\phi_3}|a\rangle + \beta|\uparrow\rangle \tag{3.16}$$

となる。続いて、STIRAP 操作 1 の逆操作 $\Omega_3 = A\sin t, \Omega_1 = A\cos t, t : 0 \to \pi/2$ を行う。なおここで、位相を ϕ_3' と変更したとする。すると

$$-\alpha e^{i\phi_3}|a\rangle + \beta|\uparrow\rangle \to \alpha e^{i(\phi_3-\phi_3')}|\downarrow\rangle + \beta|\uparrow\rangle = |\psi'\rangle \tag{3.17}$$

となる。

上記の操作による最終状態は初期状態に対して z 回転を施した物になっている。

$$|\psi'\rangle = \hat{U}_z(\phi_3 - \phi_3')|\psi\rangle \tag{3.18}$$

つまり、上記のように 2 回の STIRAP を行う事で z 方向の回転が実現したことが分かる。

x gate

z gate と同様の方法を STIRAP 操作 2 を使い行えばよい。

初期状態 $|\psi\rangle$ に対し、一回目の STIRAP 操作 2 で

$$|\psi\rangle \to (\langle -|\psi\rangle)|-\rangle - (\langle +|\psi\rangle)e^{i\phi_3}|a\rangle \tag{3.19}$$

と変化する。ここで、$|\pm\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\downarrow\rangle \pm |\uparrow\rangle)$ とした。

続いて STIRAP 操作 2 の逆操作を位相を ϕ_3' と変更して行う。すると

$$(\langle -|\psi\rangle)|-\rangle - (\langle +|\psi\rangle)e^{i\phi_3}|a\rangle \to (\langle -|\psi\rangle)|-\rangle + e^{i(\phi_3-\phi_3')}(\langle +|\psi\rangle)|+\rangle = |\psi'\rangle \tag{3.20}$$

となる。

全体としての状態変化を演算子として記述すると

$$|\psi'\rangle = (e^{i(\phi_3-\phi_3')}|+\rangle\langle +| + |-\rangle\langle -|)|\psi\rangle = \hat{U}_x(\phi_3 - \phi_3')|\psi\rangle \tag{3.21}$$

となり、x 方向の回転が実現している事が分かる。

θ gate

上記と同様に STIRAP 操作 3 をつづけて二回行う。初期状態 $|\psi\rangle$ として、二回の STIRAP で

$$\begin{aligned} |\psi\rangle \quad &\to (\langle \theta-|\psi\rangle)|\theta-\rangle - (\langle \theta+|\psi\rangle)e^{i\phi_3}|a\rangle \\ &\to (\langle \theta-|\psi\rangle)|\theta-\rangle + (\langle \theta+|\psi\rangle)e^{i(\phi_3-\phi_3')}|\theta+\rangle \\ &= (e^{i(\phi_3-\phi_3')}|\theta+\rangle\langle \theta+| + |\theta-\rangle\langle \theta-|)|\psi\rangle \\ &= \hat{U}_\theta(\phi_3 - \phi_3')|\psi\rangle \end{aligned} \tag{3.22}$$

と状態変化し、最終状態は初期状態を仰角 θ の回転軸で回した状態となる。

ここで、

$$|\theta+\rangle = \cos\theta\,|\downarrow\rangle + \sin\theta\,|\uparrow\rangle \tag{3.23}$$

$$|\theta-\rangle = \sin\theta\,|\downarrow\rangle - \cos\theta\,|\uparrow\rangle \tag{3.24}$$

$$\theta = \arctan\frac{B_2}{B_1} \tag{3.25}$$

とした。

以上より、STIRAPを用いてqubitの任意の回転が誘起できる事が分かった。また、量子ゲートに必要なアダマールゲートが一度の操作で行えるというのも大きな特徴である。

幾何学的位相

これまでの計算を幾何学的位相によって理解する。一般に、位相空間上で状態の運動がループを描くとき、その状態はループが囲む面積と等しい位相を得る。この位相の事を幾何学的位相、もしくはスピン系の場合において特にベリー位相と呼ぶ。qubit系の場合、位相空間は実3次元空間と対応するため、幾何学的な構造はイメージしやすい。qubit系のブロッホ球を図3.2(a)に描く。qubitが状態 $|\psi\rangle$ から状態 $|\psi\rangle$ へと面積 Ω の閉曲線で断熱的に運動したとすると、その時状態は幾何学位相によって

$$|\psi\rangle \to e^{i\Omega/2}\,|\psi\rangle \tag{3.26}$$

と変化する。

それでは、幾何学的位相の表現をもって上記のゲートを考えてみる。今考えているtripodシステムは量子状態が4つ出てくるため、直接はqubit系で理解する事ができない。しかし、一つの暗状態が作るヒルベルト空間を考える事でqubit系にマップする事ができる。tripodシステムの2つの暗状態 $|\psi_1(\Omega_1,\Omega_2,\Omega_3,\phi_3)\rangle$,$|\psi_2(\Omega_1,\Omega_2)\rangle$ について、$\{|\psi_1(\Omega_1,\Omega_2,0,0)\rangle\,(=|a\rangle), |\psi_1(\Omega_1\to 0,\Omega_2\to 0,\Omega_3,\phi_3)\rangle\}$ が張る2次元ヒルベルト空間を考える[1]。2次元のヒルベルト空間は図3.2(a)と同様にブロッホ球で考える事ができる。さらに、外場の強度掃引による暗状態の変化はブロッホ球

[1] ここで、$\Omega_{1,2}\to 0$ の極限は比 Ω_1/Ω_2 が一定になるようにとる。なお以下では、

$$|\psi_1(0,0,\Omega_3,\phi_3)\rangle \equiv |\psi_1(\Omega_1\to 0,\Omega_2\to 0,\Omega_3,\phi_3)\rangle \tag{3.27}$$

とする。

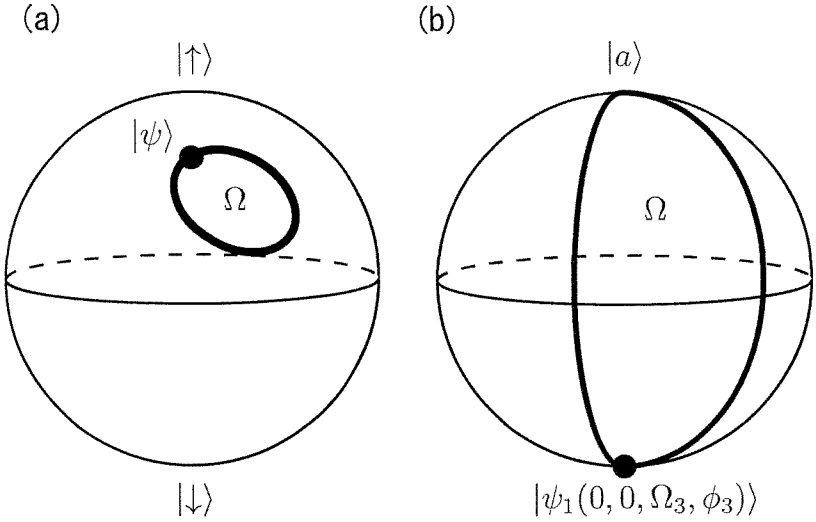

図 3.2: 幾何学的位相
ブロッホ球上で量子状態が断熱変化するとき、状態は閉曲線の囲む面積に対応する位相を獲得する。

の縦の大円での変化と考える事ができる。すると、ゲート操作の二回の断熱操作は図 3.2(b) のような状態変化と考える事ができる。この二回の操作が囲む面積は

$$\Omega = 2(\phi_3 - \phi_3') \tag{3.28}$$

となる。ここで、一度目の STIRAP の位相を ϕ_3、2 度目の位相を ϕ_3' とした。この幾何学的な位相が状態 $|\psi_1(0,0,\Omega_3,\phi_3)\rangle$ に付与される。一方で、状態 $|\psi_2(\Omega_1,\Omega_2)\rangle$ は二つの外場の比 Ω_1/Ω_2 が一定の場合変化しないので、位相を得る事がない。その結果、初期状態 $|\Psi\rangle$ $(\equiv \alpha|\psi_1(0,0,\Omega_3,\phi_3)\rangle + \beta|\psi_2(\Omega_1,\Omega_2)\rangle)$ は、2 回の STIRAP を作用させた後で

$$|\Psi\rangle = \alpha|\psi_1(0,0,\Omega_3,\phi_3)\rangle + \beta|\psi_2(\Omega_1,\Omega_2)\rangle \tag{3.29}$$

$$\rightarrow \alpha e^{i\Omega/2}|\psi_1(0,0,\Omega_3,\phi_3)\rangle + \beta|\psi_2(\Omega_1,\Omega_2)\rangle \tag{3.30}$$

となり、二つの暗状態の内 1 つが幾何学的位相を獲得する事で、全体の状態が変化する事が分かる。この暗状態を適切な状態にするように強度比 Ω_1/Ω_2 を適切に決めておくことで、任意の qubit 回転が可能となる。

3.2　実験

$^{40}Ca^{+}$原子を用い、tripod-STIRAPを用いた幾何学的位相ゲートを実現する。原子の内部状態としては、基底状態$^2S_{1/2}$と準安定状態$^2D_{5/2}$を用いる。tripodシステムを構成する量子状態3.1はそれぞれ

$$
\begin{aligned}
|\downarrow\rangle &\equiv |\mathrm{S}(m=+\frac{1}{2})\rangle \\
|\uparrow\rangle &\equiv |\mathrm{D}(m=-\frac{3}{2})\rangle \\
|a\rangle &\equiv |\mathrm{D}(m=-\frac{5}{2})\rangle \\
|u\rangle &\equiv |\mathrm{S}(m=-\frac{1}{2})\rangle
\end{aligned}
$$

とする。

これらが、基底状態間のRF遷移とそれぞれ$|u\rangle \leftrightarrow |\uparrow\rangle$, $|u\rangle \leftrightarrow |a\rangle$を結ぶ2つの光遷移を用いて結合している。実験のシステムを図3.3に載せる。RF遷移は

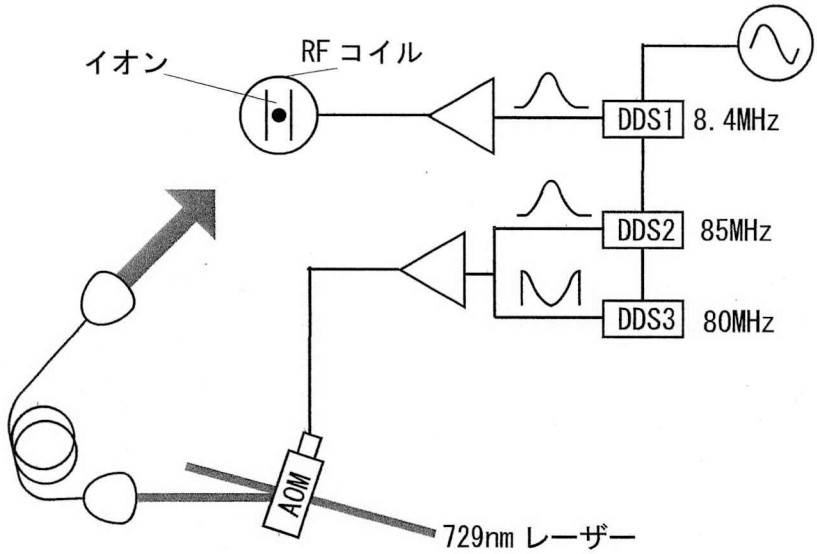

図3.3: 実験系概略図
同じ発振器をクロックとする3つのDDS（Direct Digital synthesizer）でRF遷移と二つの光遷移をそれぞれ作り出している。

DDS(Direct Digital Synthesizer)の出力を増幅し直接イオンに印加する事で誘起し、光遷移は狭線幅の729nmのレーザーをイオンに照射する事で誘起している。またこの時レーザーはRFを作るDDSと位相同調したDDSによって変調がかけ

られている。こうすることで毎回決定論的に位相が決まった三つの遷移を用意することができる[2]。

3.2.1 population 輸送

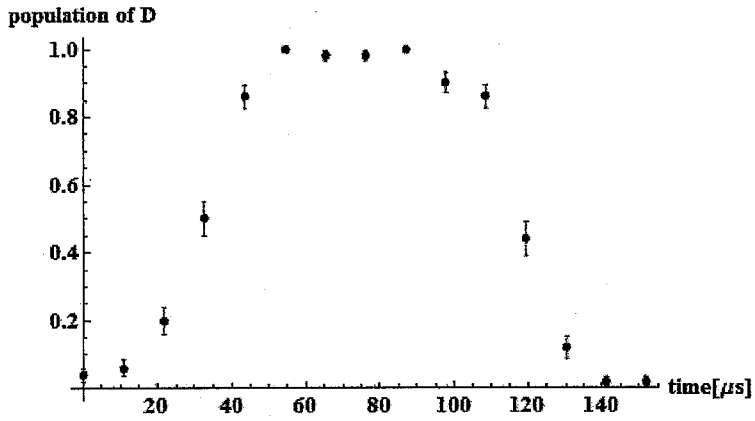

図 3.4: STIRAP によるポピュレーション移送
RF 遷移を用いた STIRAP によるポピュレーションの変化の様子。高い精度で量子状態が往復している事が分かる。

まず予備実験として、RF遷移を用いたSTIRAPを行った。初期状態を $|\mathrm{S}(m=+\frac{1}{2})\rangle$ を用意し、基底状態間 RF 遷移と $|\mathrm{S}(m=-\frac{1}{2})\rangle - |\mathrm{D}(m=-\frac{5}{2})\rangle$ の光遷移の強度を互いに掃引することで量子状態が変化する。RF 遷移強度 Ω_1, 光遷移強度 Ω_3 を

$$\Omega_1 = \Omega \sin\theta(t), \quad \Omega_3 = \Omega \cos\theta(t) \tag{3.31}$$

と掃引した時のポピュレーションの変化を図 3.4 に載せる。非常に高い精度での量子状態の制御ができている事が分かる。

続いて、tripod-STIRAP の予備実験として、初期状態を $|\mathrm{S}(m=+\frac{1}{2})\rangle$ に用意し、RF 遷移強度 Ω_1, 光遷移 $(|\mathrm{S}(m=-\frac{1}{2})\rangle - |\mathrm{D}(m=-\frac{3}{2})\rangle)$ 強度 Ω_2, 光遷移 $(|\mathrm{S}(m=-\frac{1}{2})\rangle - |\mathrm{D}(m=-\frac{5}{2})\rangle)$ 強度 Ω_3 についてそれぞれ

$$\Omega_1 = \Omega_2 = \Omega \sin\theta(t), \quad \Omega_3 = \Omega \cos\theta(t) \tag{3.32}$$

[2]数 100THz のレーザと数 MHz の RF を絶対位相ロックすることは難しい。しかしながら、イオンは実験のたびにレーザーの位相と RF の位相に依存した暗状態になるため、一回の実験の間に位相が決まっていれば問題はない

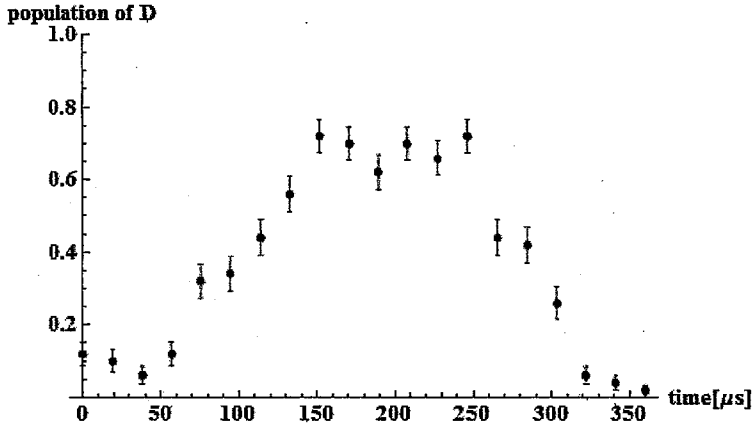

図 3.5: tripod-STIRAP によるポピュレーション移送
RF 遷移を用いた tripod-STIRAP によるポピュレーションの変化の様子。高い精度で量子状態が往復している事が分かる。

と掃引した時のポピュレーションの変化を図3.5に載せる。$\theta(t) = \pi$ において、状態は $\frac{1}{\sqrt{2}}|a\rangle + \frac{1}{2}|\uparrow\rangle + \frac{1}{2}|\downarrow\rangle$ となるはずであり、この時のD状態のポピュレーションは3/4になる。図3.4を見ると、ちょうど3/4までポピュレーションが上昇し、続いて元の状態に戻っている事が分かる。tripod システムにおいても高い精度でのポピュレーション移送に成功した。

3.2.2　z ゲート

続いて、tripod-STIRAP のちょうど折り返し時刻に位相を掃引することで、幾何学的位相を用いた量子ゲートを実現する。図3.4の STIRAP に対応する操作の間に Ω_3 の位相を変化させることで σ_z のゲートが実現する。σ_z ゲートは量子化軸方向のポピュレーションの変化はうまないので、z ゲートが実現しているかどうかを確認するためには位相敏感な測定をしなければならない。そこで、σ_z ゲートの前後に同相の $\pi/2$ パルスを照射する事でラムゼー干渉計を構築し、パルス間での位相変化を観測する。結果を図3.6に載せる。ほぼ完全な干渉が見て取れ、高い忠実度で z ゲートが実現できている事が分かる。干渉の明瞭度はフィッティングより 0.86 ± 0.04 と得られた。

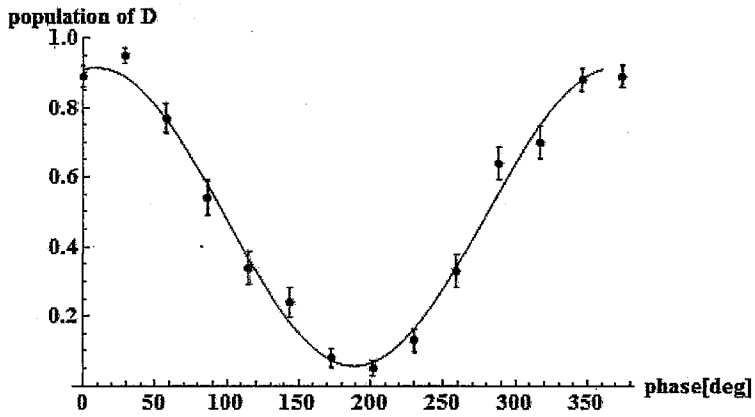

図 3.6: 幾何学的位相による z ゲート
横軸は系に与えた幾何学的位相、縦軸は D 状態のポピュレーションである。

3.2.3 x ゲート

同様に 3.5 の操作中に Ω_3 の位相を変化させることで σ_x ゲートが実現する。スピンをフリップさせるゲートである x 方向のゲートはそのままポピュレーションの変化として観測することができる。結果を図 3.7 に載せる。それぞれ、黒点は $|\downarrow\rangle$ を初

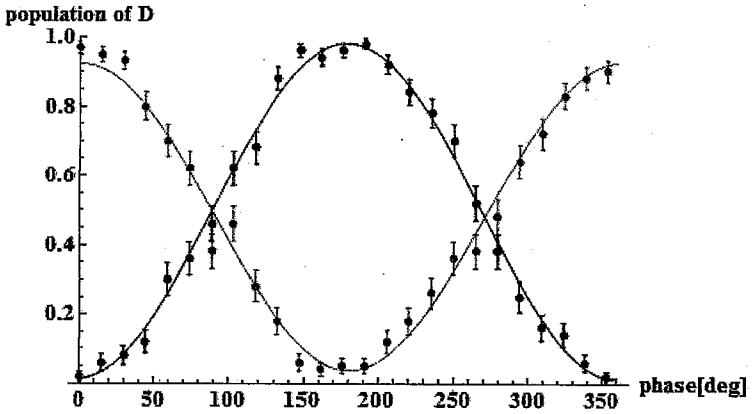

図 3.7: 幾何学的位相による x ゲート
横軸は系に与えた幾何学的位相、縦軸は D 状態のポピュレーションである。

期状態とし、赤点は $|\uparrow\rangle$ を初期状態として用意した時の状態の変化を表している。qubit の状態は互いに変化しあい、所望のヒルベルト空間内で綺麗に回転している事が分かる。振動の明瞭度はそれぞれフィッティングより 0.97 ± 0.02, 0.89 ± 0.03

と得られた。

3.3　考察と展望

3.3.1　AC stark シフト

理論の部分で書いたように、状態は常に暗状態を保つため、tripod システムのみを考慮にいれている限り力学的な位相を受け取る事はない。その結果、幾何学的位相のみによって系は位相を獲得することができ、パラメータの変化に強いゲートが実現すると期待できる。しかし、実際の実験においては AC stark シフトによる力学的位相を考慮に入れなければならない。STIRAP に用いる遷移を励起するレーザーは、お互いの準位、もしくは tripod システムは構成しない他の準位に対して離調をもった光となるため、その結果 AC stark シフトを生む。このシフトは励起レーザーの強度に比例するため、AC stark シフト由来の位相は実験パラメータに依存したものとなってしまう。

今回の実験においては、励起レーザを離調し、別途離調による位相を付加する事で AC stark シフトによる位相がキャンセルされるようにした。その結果図 3.6,3.7 のように、幾何学的手法によって付加した位相と系が獲得した位相を一致させる事ができた。しかしながら、AC stark シフトは強度依存であり、離調は周波数依存であるため、これらがキャンセルする関係はレーザーの周波数・強度のどちらかが変わると成り立たなくなってしまう。

この問題を根本的に解決するためには、STIRAP に用いる光遷移と同じように強度変調された 2 本のアンチシュタルクシフターが必要となる[3]。アンチシュタルクシフターを入射する事で、アンチシュタルクシフターの光と STIRAP に用いる光との間の強度比が一定に保たれている限りにおいては、AC stark シフトをキャンセルする事ができる。今回の実験では、アンチシュタルクシフターに割く光強度がなく、この手法は用いる事が出来なかった。

3.3.2　RF 遷移と光遷移のアンバランス

実験系の図にあるように、RF 遷移は直接 DDS より出力されているのに対し、光遷移のレーザーは AOM に入れる DDS の強度を変調する事で強度を変えている。

[3]超微細構造を用いた qubit をラマン励起する場合、お互いの AC stark シフトがキャンセルし合うようにラマン遷移に使う 2 本の光強度を決定し、AC stark シフトによる影響を除く手法が広く用いられている。今回の場合、STIRAP に用いる 2 本の光それぞれが別のシフトを引き起こすため、それぞれをキャンセルするためにさらに 2 本のアンチシュタルクシフターが必要となる。

また、AOM は入射する RF 強度に対し非線形性をある程度持っているため、強度を掃引している間常に光遷移強度と RF 遷移強度の比を一定に保つのは難しい。その結果、RF 遷移と光遷移との間で強度変調のミスマッチが起こる。特に x ゲートにおいては RF 遷移と光遷移のラビ振動数は常に等しくする必要があるため、これが大きな問題となる。

そこで実験では、RF 遷移の強度を変化させて x ゲートの明瞭度が上がるように調整をした。明瞭度が最も高くなったのは、光遷移のピークラビ振動数 $\Omega_2 = 2\pi \times 100\mathrm{kHz}$ に対し、RF 遷移のピークラビ振動数は $\Omega_1 = 2\pi \times 140\mathrm{kHz}$ の時であった。一方で、このように二つの遷移の間に差を作ってしまった事は、$|\uparrow\rangle$ にゲートを作用させた時と $|\downarrow\rangle$ にゲートを作用させた時に差を作る事になる。その結果、図 3.7 において初期状態をどちらの状態にするかで明瞭度の差が生まれたと理解できる。

この問題を回避するためには、DDS の強度の関数としてラビ振動数を 3 つの遷移それぞれについて測定し、その上でラビ振動数が時間に対して所望の依存性を持つような、DDS の強度変調関数を選べばよい。具体的には、DDS の強度 P_i $(i = 1, 2, 3)$ に対し、ラビ振動数がそれぞれ

$$\Omega_i = f_i(P_i) \tag{3.33}$$

という関数になっていたとすると、DDS の強度を時間に対して

$$f_i^{-1}[\cos(2\pi t/T)] \text{ or } f_i^{-1}[\sin(2\pi t/T)] \tag{3.34}$$

と時間に対して掃引することで、ラビ振動数を時間に対して正弦的に掃引する事ができる。

3.3.3 明瞭度の限界

今回の実験において、ゲートによる振動の明瞭度を決めている要因は主に以下の 2 点が考えられる。

- RF 遷移と光遷移のアンバランス
- コヒーレンス時間（レーザーの線幅）

前者についてはすぐ上で書いたように、DDS の強度掃引関数を注意深く決める事で改善する事ができる。この節では後者について考える。

STIRAP のような断熱遷移は、パラメータの掃引が断熱条件を満たさなければならない。そのためには十分にゆっくりと系を変化させれば良いが、一方で長い時間系を重ね合わせ状態に保持しておくと環境からの磁場揺らぎ等の様々な擾乱に

より状態が緩和（デコヒーレンス）してしまう。そこで、系が長いコヒーレンス時間を持っていれば持っているほど断熱遷移に長い時間をかける事ができ、より高い精度での状態移送が可能になる。現在の実験系においてコヒーレンス時間を決めている物はレーザーの線幅である。レーザーの周波数揺らぎに暗状態が追従できず、系の暗状態としてのコヒーレンスが失われる。この実験時におけるコヒーレンス時間は約200usであり[4]、実験に用いた掃引時間140usと同程度である。この事からコヒーレンス時間由来の明瞭度の減少がかなり強いと考える事ができる。

3.3.4　ゲートの忠実度

今回の実験では、1 qubitの回転を回転角に対する状態の振動として観測し、その明瞭度を基準にして評価した。しかし実際には、ゲートとして作用させた時にどの程度の忠実度を得る事ができるかというのが問題となる。この事を評価するためには、プロセストモグラフという手法が必要となる[62]。今回の実験とプロセストモグラフとの一番大きな違いは、初期状態を決めてしまっている点である。ゲートは本来qubitの任意の状態へ作用させるべきであるので、演算子として実現しているゲートに対応する行列を再構築し、それが所望の演算に対しどれだけ近いかというのを評価しなければならない。今回はある一つないしは二つの状態に対するゲート演算の結果のみを評価しているため、行列そのものの評価にはなっておらず、ゲートとしての忠実度は評価する事ができない。プロセストモグラフをするためには、初期状態としてはx,y,zそれぞれの方向に向いた3つの状態を用意し、ゲート後の状態をそれぞれ量子トモグラフする。こうして測定された最終状態と初期状態とを関連付ける行列を再構築すればプロセストモグラフが実行できる。

3.4　まとめ

量子計算を行う手法として、ホロノミック量子計算機と呼ばれる、幾何学的位相のみを用いた計算方法が提案されている。幾何学的位相は各種実験パラメータの揺らぎに対してロバストである特徴があるため、より高精度な状態制御が可能であると考えられる。その実現のためには、幾何学的位相による量子ゲートの実現が必要となる。本章では、STIRAPを用いた幾何学的位相による1qubitの量子ゲートを実現した。STIRAPには、光遷移とRF遷移を組み合わせて利用し、ゲートはCa^+のS-D状態の光qubitに対するものである。

[4]前章までに述べたように、この線幅はファイバーノイズによるものが多くを占めている。現在ではファイバーノイズキャンセルの手法によって1ms以上のコヒーレンス時間が獲得されている。

また、このゲートによる qubit の状態の振動を観測し、その明瞭度は x ゲート・z ゲートに対してそれぞれ 0.93, 0.86 であった。この数字を改善するには、RF アンプや AOM の非線形性を補正し、RF と光パルスのパルス形状を完全に一致させる必要がある。

第4章　実験II: デコヒーレンスフリードレスト状態の生成

量子状態は外部からの擾乱によって壊れ続けている。量子状態の可干渉性（コヒーレンス）を失わせるそのような崩壊をデコヒーレンスと呼ぶ。量子情報処理分野においても、そのような量子状態の崩壊がそれまでの計算内容や貯えられていた情報を失わさせる。ゆえに、同じ系で如何に長いコヒーレンス時間を得られるかというのが重要な問題となる。

デコヒーレンスは系が環境と相互作用する限りゼロにはできないが、その影響を小さくすることは可能である [63, 64, 65]。本章では、制御された外場が量子系と結合したドレスト状態を用いることで、その他の外乱による系への擾乱を防ぐ手法を提案し、実現した実験について記述する。またそのような状態の生成方法として、外場と結合したドレスト状態自身を用いる方法を実現した。外場によって守られた量子エンタングルド状態を用いる事で、コヒーレンスが守られてない状態に比べコヒーレンス時間で約２桁ほど改善された事を確認した。また、最後にこのシステムを利用した応用実験を二つ提案する。

4.1　理論

4.1.1　ジェインズ・カミングスモデル

まず最初に外場と相互作用するスピン系を記述するジェインズ・カミングスモデルとその拡張モデルについての説明をする。スピン系（スピンフリップ演算子 $\hat{\sigma}_{\pm}$）が外場とラビ振動 Ω で相互作用をしているとすると、ジェインズ・カミングスハミルトニアンは

$$\hat{H}_1 = \frac{\Omega}{2}\hat{\sigma}_+ + \frac{\Omega^*}{2}\hat{\sigma}_- \tag{4.1}$$

である。このハミルトニアンは簡単に対角化することができて、二つの固有状態が現れる。

$$\mathrm{E}_{\pm} = \pm\frac{\Omega}{2} \qquad |\pm\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow\rangle \pm |\downarrow\rangle) \tag{4.2}$$

この二つの固有状態 $|\pm\rangle$ をドレスト状態と呼ぶ。

さて、ここでスピンを2つの系に拡張する[1]。スピンが2つあり、それぞれが同じ外場と同じ強さで相互作用しているとすると、ハミルトニアンは

$$\hat{H}_2 = \sum_{i=1,2}(\frac{\Omega}{2}\hat{\sigma}_+^{(i)} + \frac{\Omega^*}{2}\hat{\sigma}_-^{(i)}) \tag{4.3}$$

と書ける。ここで、$\hat{\sigma}_\pm^{(i)}$ はi番目のスピンのスピンフリップ演算子である。

スピン間の相互作用がないことから、固有状態はそれぞれのスピンの状態の直積で簡単に書けて

$$\{|++\rangle, |+-\rangle, |-+\rangle, |--\rangle\} \tag{4.4}$$

の四つである。対応するエネルギーは $\{\Omega, 0, 0, -\Omega\}$ である。ここで、縮退している2つの暗状態について、粒子の交換に対する応答から基底の変換を行う。粒子の交換に対して不変な $|T\rangle$ と、反交換する $|S\rangle$ はそれぞれ

$$|T\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|+-\rangle + |-+\rangle), \tag{4.5}$$

$$|S\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|+-\rangle - |-+\rangle), \tag{4.6}$$

と書ける。

4.1.2 デコヒーレンスフリー

ここで、$|T\rangle$,$|S\rangle$ がある種のデコヒーレンスを受けづらい状態にある事を示す。系に迷走磁場があるとすると、それはドレス場に対する離調に対応するため、系のハミルトニアンは変形し

$$\hat{H}_2' = (\hat{n}_e^{(1)} + \hat{n}_e^{(2)})\frac{B(t)}{2} + \hat{H}_2 \tag{4.7}$$

となる。ここで、$\hat{n}_e^{(i)}$ はi番目のイオンの励起数演算子である。まずはじめに迷走磁場による擾乱が弱いとして、摂動として扱う。

時間に依存する摂動の議論から、時刻0における初期状態を $|T\rangle$ とし、時刻tにおける状態 $|n\rangle$ の遷移振幅は一次の近似で

$$c_n(t) \sim \frac{1}{i\hbar}\int_0^t \langle n|\,(\hat{n}_e^{(1)} + \hat{n}_e^{(2)})\frac{B(t)}{2}\,|T\rangle\, e^{iE_n t/\hbar} \tag{4.8}$$

[1]一般にN個に拡張したジェインズ・カミングスモデルをタビル・カミングスモデルと呼ぶこともある。

とかける。ここで時刻tがドレス場のラビ振動数Ωの逆数にたいして十分に長いとし、$t \to \infty$と近似すれば続いて計算できて

$$|c_{++}| \sim \frac{1}{2\sqrt{2}} \int b(\omega)\delta(\omega - \Omega)d\omega \tag{4.9}$$

$$|c_{--}| \sim \frac{1}{2\sqrt{2}} \int b(\omega)\delta(\omega - \Omega)d\omega \tag{4.10}$$

$$|c_S| \sim 0 \tag{4.11}$$

となる。ここで、$b(\omega)$は迷走磁場のフーリエ展開成分である。つまり、迷走磁場のラビ振動数近傍の成分のみが系の擾乱を引き起こす。十分に大きなドレス場を系と結合させることにより、系は迷走磁場に対して応答することがなくなり、デコヒーレンスから守られる事が分かる。

次にノイズによる固有状態の変化を計算し、その影響がほとんどないことを示す。

ノイズも含めた全系のハミルトニアン$\hat{H}_2'$を対角化すると

$$\begin{array}{cc} \text{固有値} & \text{固有状態} \\ \sqrt{B(t)^2+\Omega^2} & |+\rangle \\ -\sqrt{B(t)^2+\Omega^2} & |-\rangle \\ 0 & |T(t)\rangle \equiv \frac{\Omega}{\sqrt{B(t)^2+\Omega^2}}|T\rangle + \frac{B(t)}{\sqrt{B(t)^2+\Omega^2}}|T'\rangle \\ 0 & |S\rangle \end{array} \tag{4.12}$$

となる。今興味のある固有値0の固有状態以外はそれぞれ$|\pm\rangle$とおいて、その具体的な表式は省略した。また、z軸方向の磁場に対し固有値が0となりかつ完全対称な状態を$|T'\rangle \equiv \frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow\downarrow\rangle + |\downarrow\uparrow\rangle)$として定義した。

ここで、0の周囲で時間に依存して揺らぐ$B(t)$が十分に緩やかであるとすると、時刻t_0に初期状態として$|T\rangle$にある状態は、時間変化の後に時刻t_1において

$$|T\rangle \xrightarrow{t_0 \to t_1} |T(t_1)\rangle \tag{4.13}$$

と近似する事ができる。これを断熱近似と呼ぶ。この状態と初期状態との間の重なり具合を計算すると

$$|\langle T \mid T(t_1)\rangle|^2 = \frac{1}{1+(B(t)/\Omega)^2} \tag{4.14}$$

となる。

今、典型的な実験値としラビ振動数$\Omega = 2\pi \times 500\text{kHz}$とする。磁気シールド内での磁場の揺らぎを最大で$100\mu$G程度[2]と考えると、ゼーマンシフトの揺らぎは

[2]一重の磁気シールド内では地磁気が約二けた程度削減されている。また、ACのノイズによる磁場変化はイオンを用いた直接測定により$30\mu G$以下である事が分かっており、さらにAC電源の位相と実験シークエンスを同期させることでこの効果をほぼ消している。

280Hz となる。よって、初期状態と終状態の状態の重なり具合 F は

$$F = \frac{1}{1 + (280/500,000)} \sim 1 - 3 \times 10^{-7} \tag{4.15}$$

となり、固有状態が変化する事による忠実度の低下はほぼ無視して良いことが分かり、上で固有状態を変化しないとして計算した摂動近似が正しい事が分かる。

4.1.3 RF エンタングルド状態

ドレスさせる外場は本来どんなものでも良いが、外乱から守るための外場が系を乱してはいけないので、外場としては十分に制御されたものを用いなければならない。そこで、光に比べ簡単に高い精度で強度・周波数が制御できる RF 振動磁場をドレス場として採用することにする。しかし、こうすることで一つ問題が生じる。今回生成したいデコヒーレンスフリーな状態は 2qubit の最大エンタングルド状態の一つである。しかし、RF をまとったドレスト状態は当然 RF 程度のエネルギー差を持つ qubit(ここでは Ca^+ の基底状態間のゼーマン qubit) となるが、RF では波数が小さすぎてイオンの振動モードを励起できない。その結果、エンタングルド状態を作ることが難しい。通常、RF のエンタングルド状態は光遷移 qubit 等でエンタングルメントを生成したのちに RF 遷移 qubit にマップすることで生成するが、ここでは生成したい状態があるハミルトニアンの固有状態である性質を利用した生成方法を提案する。

生成方法—概略

エンタングルド状態を生成するのに広く用いられている Mølmer-Sørensen gate(MS gate) とドレスト状態を組み合わせる事で、直接上記のデコヒーレンスフリーエンタングルド状態が生成できる。その簡単なトリックは以下の通りである。

まず、原子系のエネルギー準位は図 4.1 のように用意する。MS ゲートは二つの qubit の状態を同時にフリップさせるゲートであると言っていいので、アンシラとして用意した $|a\rangle$ 状態と qubit の片方の状態 $|\downarrow\rangle$ との間で MS gate を作用させたとすると

$$|aa\rangle \longleftrightarrow |\downarrow\downarrow\rangle \tag{4.16}$$

のような時間発展をする。ここで、qubit 間を強くドライブするドレス場を印加する。すると、相互作用相手が変化し、

$$|aa\rangle \longleftrightarrow |T\rangle \tag{4.17}$$

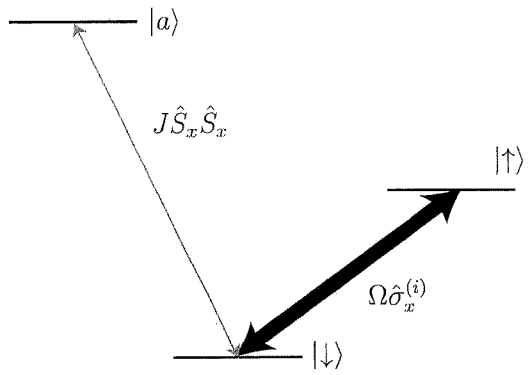

図 4.1: RF エンタングルド状態を生成するためのエネルギー準位図
考えている qubit の状態に加え、アンシラとして qubit の片方から光学遷移をもつ状態を用意する。

となる。つまり、MS ゲートの相手の状態を他の状態と混ざったドレスト状態に置き換える事ができ、MS ゲートの π パルスに対応する時間で RF 遷移 qubit でのデコヒーレンスフリーエンタングルド状態が生成される。この状態は最初からドレスド状態であるため、位相等を何もいじることなく自動的にドレストデコヒーレンスフリーな状態の生成ができ、生成するのに用いたドレス場をそのまま印加し続けることで qubit のコヒーレンスを保持することができる。

生成方法—詳細

アンシラ状態 $|a\rangle$ と qubit の状態 $|\uparrow\rangle, |\downarrow\rangle$ の合わせて 3 つの状態を持つ 2 個の量子系全体（3x3=9 次元）におけるハミルトニアンを記述する。アンシラ状態 $|a\rangle$ と $|\downarrow\rangle$ との間には MS gate によるイジング相互作用が印加され、qubit はドレス場と強く結合しているとする。スピン間のパウリ演算子に加え、スピンフリップ演算子 $\hat{s}_+^{(i)} = |a\rangle_i \langle\downarrow|, \hat{s}_-^{(i)} = |\downarrow\rangle_i \langle a|$ を定義すれば、

$$\hat{H}_{eo} = J\hat{S}_x\hat{S}_x + \Omega(\hat{\sigma}_x^{(1)} + \hat{\sigma}_x^{(2)}) \tag{4.18}$$

となる。ここで、$\hat{S}_x = \hat{s}_x^{(1)} + \hat{s}_x^{(2)}, \hat{s}_x^{(i)} = \frac{1}{2}(\hat{s}_+^{(i)} + \hat{s}_-^{(i)})$ である。

今、ドレス場がイジング相互作用よりも十分に強いとする ($\Omega \gg J$)。その場合は、まず最初にドレス場を対角化するような基底で全体を記述し、その後にイジング相互作用による影響を確認すればよい。本章はじめのドレスト状態を参考にすると、基底は $\{|aa\rangle, |T\rangle, |++\rangle, |--\rangle, |a+\rangle, |+a\rangle, |a-\rangle, |-a\rangle, |S\rangle\}$ と取れる。こ

こで、後のために順番は適当に選んだ。この基底でハミルトニアンを展開すると

$$H_{eo} =$$

$$\begin{pmatrix} \frac{J}{4} & \frac{J}{4\sqrt{2}} & \frac{J}{4\sqrt{2}} & \frac{J}{4\sqrt{2}} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{J}{4\sqrt{2}} & \frac{J}{8} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{J}{4\sqrt{2}} & 0 & \Omega+\frac{J}{8} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{J}{4\sqrt{2}} & 0 & 0 & -\Omega+\frac{J}{8} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\Omega}{2}+\frac{J}{4\sqrt{2}} & \frac{J}{4\sqrt{2}} & -\frac{J}{4\sqrt{2}} & -\frac{J}{4\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{J}{4\sqrt{2}} & \frac{\Omega}{2}+\frac{J}{4\sqrt{2}} & -\frac{J}{4\sqrt{2}} & -\frac{J}{4\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{J}{4\sqrt{2}} & -\frac{J}{4\sqrt{2}} & -\frac{\Omega}{2}+\frac{J}{4\sqrt{2}} & \frac{J}{4\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{J}{4\sqrt{2}} & -\frac{J}{4\sqrt{2}} & \frac{J}{4\sqrt{2}} & -\frac{\Omega}{2}+\frac{J}{4\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\equiv \begin{pmatrix} H_D & 0 & 0 \\ 0 & H_D^{\perp} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

となり、3つのブロックに分けて書くことができている事が分かる。ここで、初期状態は $|aa\rangle$ とし、H_D に注目する。すると、$|aa\rangle$ と結合しうる状態は $\{|T\rangle, |++\rangle, |--\rangle\}$ の三つである事が分かるが、後者二つは対角成分に Ω をもち、ドレス場が強い状況では相互作用に大きな離調があるのと等価になっている。そこで、ドレス場が十分に強いという近似を行い、これらの状態のポピュレーションを0にする。これを強ドレス場近似と呼ぶことにし、後でその妥当性について触れる。その結果、これらの状態への遷移はほぼ無視できて、$|aa\rangle$ に対する実効的なハミルトニアンは簡単に、$\{|aa\rangle, |T\rangle\}$ の基底で

$$H_{eff} = \begin{pmatrix} J/4 & J/4/\sqrt{2} \\ J/4/\sqrt{2} & J/8 \end{pmatrix} \tag{4.19}$$

と書きなおすことができる。

以上からMS相互作用によるイジング相互作用によって

$$|aa\rangle \longleftrightarrow |T\rangle \tag{4.20}$$

の遷移が起きる事が分かった。

qutrit のエンタングルメント

今回はRFのエンタングルド状態を生成するためにqubitとの別のアンシラ $|a\rangle$ 状態を用意した。そこで、その状態をも含めて一つの量子系だと思えば、3つの

自由度を持った量子系 qutrit を考えることができる。qutrit のもつ情報量は個数 n に対して 3^N で増える。よって qubit の情報量に比べて 1.5^N 倍となり qubit に対しさらに指数関数的な情報量の増加を見込め、qutrit(より一般に n 自由度の系の qudit) を使った量子情報処理はよりパワフルなものになる。

前節で示した

$$|aa\rangle \longleftrightarrow |T\rangle \tag{4.21}$$

の遷移を $\pi/3$ パルスで止めることで qutrit のエンタングルド状態

$$|\psi_3\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}(|aa\rangle + |\downarrow\downarrow\rangle - |\uparrow\uparrow\rangle) \tag{4.22}$$

を生成することができる。

強ドレス場近似の妥当性

どの程度ドレス場が強いと強ドレス場近似は妥当になるのであろうか。簡単には、イジング相互作用に離調がついていると考えれば良いので、$r \equiv \frac{J}{\Omega} \ll 1$ の場合により良い近似であると考えられる。図 4.2 に数値計算によって確かめた結果を載せる。$|T\rangle$ に対する忠実度として 0.9 以上を得るためには、$r < 0.7$ 程度の比で良い事が分かる。

なお、以上の解析は $\hat{H}_{eo}$ を仮定したものであるので、far-off resonant な MS gate の場合についてよく成り立つ。実際にはレーザーパワーとレーザー線幅の問題によって、比較的近共鳴での MS gate を使う必要がでてくる。その場合、ハミルトニアンは実際にブルーサイドバンドとレッドサイドバンドとドレス場をイオンに照射した

$$\hat{H}'_{eo} = \sum_{i=1,2} \frac{\eta\Omega_b}{2}(\hat{a}^\dagger \hat{s}_+^{(i)} e^{i\delta t} + \text{h.c.}) + \frac{\eta\Omega_r}{2}(\hat{a}\hat{s}_+^{(i)} e^{-i\delta t} + \text{h.c.}) + \Omega\hat{\sigma}_x^{(i)} \tag{4.23}$$

としなければならない。以下の実験結果の解析にはこの厳密なハミルトニアンを用いたが、この場合は解析的な計算が難しいため、以下の解析はすべて数値計算により行った。

4.1.4 評価方法

量子状態を生成しようとしたとき、その良さを評価する指標として、生成された状態と理想的な状態との間の忠実度を利用することが多い。忠実度 F は

$$F = |\langle\psi_i| \rho^{(e)} |\psi_i\rangle|^2 \tag{4.24}$$

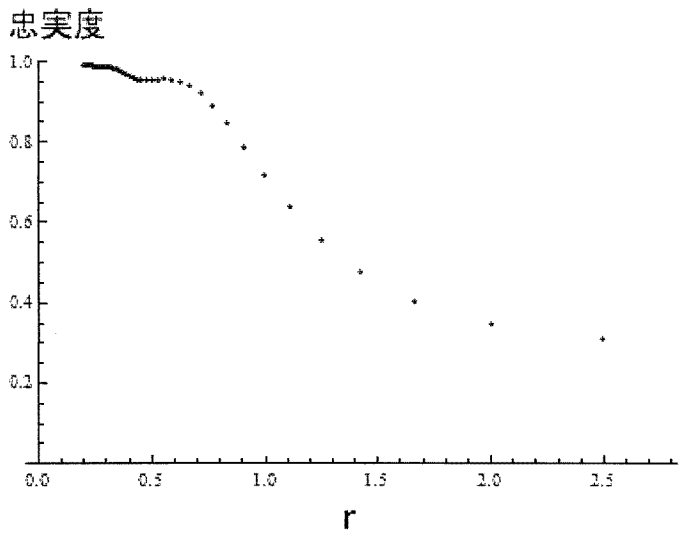

図 4.2: ドレス場の強さと強ドレス場近似の妥当性
ドレス場の強さをイジング相互作用に対して変化させ、達成される忠実度をプロットした。

によって定義される。ここで $|\psi_i\rangle$ は生成しようとしている理想的な量子状態とし、$\rho^{(e)}$ を生成した状態の密度行列とした。この表式からもわかるとおり、忠実度を求めるには密度行列の再構築 (量子フルトモグラフィ) をすれば十分である事が分かる。

しかし、一般に密度行列のすべての要素を求める必要はない。なぜならば、理想的な状態が含んでいない状態に関するポピュレーションや非対格要素の情報は忠実度の計算では消えてしまうからである。また、各々の要素を決める必要もなく、それぞれの和等があれば忠実度の計算が可能な場合がある。今、生成しようとしている状態 $|T\rangle$ はベル状態の一つである。一般に GHZ 状態やベル状態の場合、忠実度は対格要素の測定とパリティ振動と呼ばれる非対格要素の測定だけで計算できる [66, 67]。

それでは、GHZ 状態の忠実度を計算してみる。2ion の GHZ 状態の場合、

$$F = \frac{\rho^{(e)}_{\uparrow\uparrow\uparrow\uparrow} + \rho^{(e)}_{\downarrow\downarrow\downarrow\downarrow} - Re[\rho^{(e)}_{\downarrow\downarrow\uparrow\uparrow} + \rho^{(e)}_{\uparrow\uparrow\downarrow\downarrow}]}{2} \tag{4.25}$$

と計算できる。対格要素に関しては、2個のイオンがともに $|\downarrow\rangle$ にいる確率と $|\uparrow\rangle$ にいる確率はシェルビング法によって簡単に測定できるので、直接測定可能である。非対格要素については、パリティ振動と呼ばれる方法が一般に知られている。ベル状態（もしくはGHZ状態）を用意し、位相 θ の $\pi/2$ パルスを照射し、その後にパリティと呼ばれる $\Pi_i\hat{\sigma}_z^{(i)}$ の期待値を測定する。そこで、パリティ測定演算子として

$$\hat{P}(\theta) = \Pi_i(\cos\theta\hat{\sigma}_x^{(i)} + \sin\theta\hat{\sigma}_y^{(i)}) \tag{4.26}$$

を定義する。左から $\langle\downarrow\downarrow|$、右から $|\uparrow\uparrow\rangle$ を作用させると、

$$\langle\downarrow\downarrow|\,\hat{P}(\theta)\,|\uparrow\uparrow\rangle = e^{i2\theta} \tag{4.27}$$

となる。

物理量の期待値の一般論より、パリティ演算子の期待値は

$$\begin{aligned} P(\theta) &= \mathrm{Tr}[\rho^{(e)}\hat{P}(\theta)] \\ &= \mathrm{Tr}[\rho^{(e)}\hat{1}\hat{P}(\theta)] \\ &= Re[e^{i2\theta}]Re[\rho^{(e)}_{\downarrow\downarrow\uparrow\uparrow} + \rho^{(e)}_{\uparrow\uparrow\downarrow\downarrow}] + f(\theta) \end{aligned} \tag{4.28}$$

となる。途中で、$\hat{1}$ を完全系で展開した。また、$f(\theta)$ は第一項に比べて遅い周期での振動成分である[3]。よって、パリティ振動のうち π で振動する成分の振幅を A_p とすることで、先に求めた対角成分の和 D と合わせて、

$$F = \frac{D + A_p}{2} \tag{4.29}$$

と計算することができる。

qutrit の GHZ 状態

上記の方法は qutrit の GHZ 状態にまで拡張することができる。$\pi/2$ パルスが $|a\rangle \leftrightarrow |\downarrow\rangle$、$|a\rangle \leftrightarrow |\uparrow\rangle$、$|\uparrow\rangle \leftrightarrow |\downarrow\rangle$ の3種類照射できる事と、非対角要素にも同様に3種類の組み合わせがある事に気を付ければ、上の計算をそれぞれの組み合わせに対して行えて、それぞれのパリティ振動の振幅 A_{p1}, A_{p2}, A_{p3} を用いて忠実度は

$$F = \frac{D_3}{2} + \frac{A_{p1} + A_{p2} + A_{p3}}{4} \tag{4.30}$$

と計算できる。ここで、対角成分の和を D_3 とした。理想的な状態に対しては、$A_{pi} = 2/3$ となる。

[3]同様の議論はスピンが何個あっても可能である。n 個の GHZ 状態に対しては、その非対格要素の大きさに応じて $2\pi/n$ の周期で振動する。また簡単な計算より、式 4.27 で $|\uparrow\uparrow\ldots\uparrow\downarrow\rangle$ のようにスピン状態がどれか一つでも異なる状態で計算をすると、指数の肩の位相が打ち消し合い、nθ に比べて遅い振動となる。そのため、$2\pi/n$ で振動する成分がその個数のスピンに関しては最も速い振動となり、それは GHZ 状態の非対角項に対応するものしか存在しない。

4.2 実験

4.2.1 デコヒーレンスフリーエンタングルド状態の生成

2つのイオンをLinear Paul trapでトラップし、レーザー冷却の手法を用いてすべての振動モードを基底状態間で冷却する[4]。次に2つのCaイオンに対し等強度で、レッドサイドバンドとブルーサイドバンドからそれぞれ等しく異なる符号に離調を取った二本のレーザーと基底状態間に共鳴するような強いドレス場を照射した[5]。前節での議論より、このような相互作用を通じて、

$$|aa\rangle \longleftrightarrow |T\rangle \tag{4.31}$$

の間の遷移が起こるはずである。実験の簡単な概略図を図4.3に載せる[6]。実験・解析に用いたパラメータは光遷移ラビ振動数 $\eta\Omega_r = \eta\Omega_b = 2\pi \times 8.8\text{kHz}$、離調 $\delta = 2\pi \times 17.6\text{kHz}$、RFラビ振動数 $\Omega = 2\pi \times 10.5\text{kHz}$ である。

時間発展

まず、$|aa\rangle$ に初期化された2個のイオンに対しRFとMS gateを重ねて印加して、時間発展を測定した。図4.4がその様子である。理論曲線とも良い一致を見せている事が分かる。ここで、こんなにも複雑な相互作用をしているのは、離調 δ が光遷移ラビ振動数に対して十分に大きくなく、近共鳴MS gateになっている事による。(巻末に詳しいように、) 近共鳴MS gateは途中で振動モードの実励起を介し、また実励起中は内部状態で見るとどちらか片方のイオンのスピンがフリップしたような状態である。そのため、ドレス場はそのスピン状態に作用し、時間発展を大きく阻害する。しかしながら、通常の近共鳴MS gateと同様にこの場合もある時間において外部状態と内部状態との間のエンタングルメントが解かれる。その時間はすべての実験パラメータに依存するが、実験ではちょうど π パルスの時間でエンタングルメントが解かれるように調整した[7]。図4.4中では、$|aa\rangle$ のポピュレーションが一番低くなっている156μs点で所望の $|T\rangle$ 状態ができているはずである。

---

[4]MS gateは基底状態まで冷やさなくても働くが、使用するモードに関しては基底状態まで冷やすことでゲートの忠実度を向上させられる。また、MS gateに使わないモードに関しては必ずしも冷やす必要はないが、念のため冷やしておいた。

[5]なお、2本のレーザーのみをあてた場合のMSgateの様子は巻末の付録に載せる。

[6]RF遷移によるqubitの励起実験は巻末の付録に載せる。

[7]具体的には、パラメータを虱潰しに変更し、後述する忠実度の測定を繰り返した。そうして生成された状態の忠実度が一番高くなるように調整した。

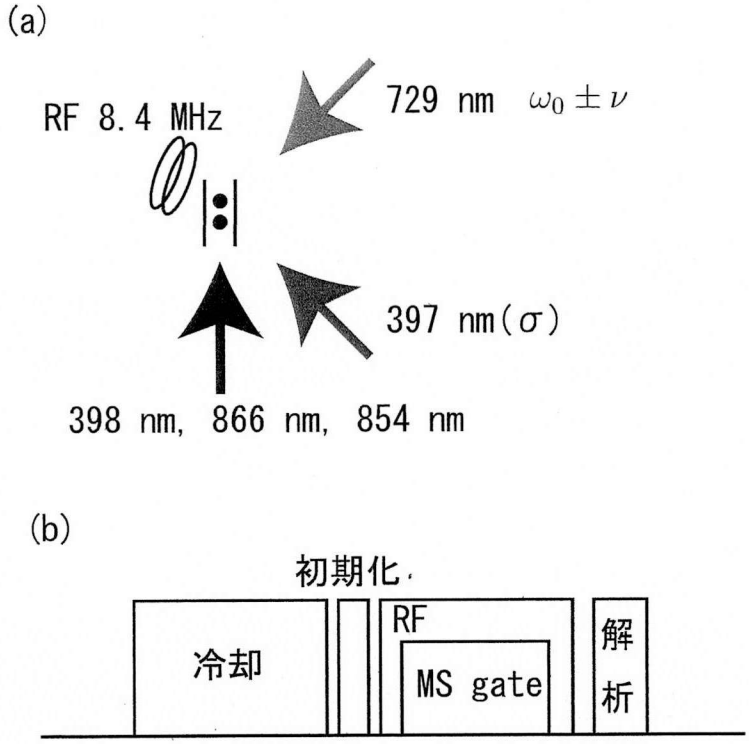

図 4.3: デコヒーレンスフリーエンタングルド状態実験概略図
実験系の概略図を載せる。(a) 実験系 (b) パルスシークエンス

忠実度の測定

前節で説明をした通り、パリティ振動を通じて忠実度の測定が可能である。状態を生成したのちに RF の $\pi/2$ パルスを照射し、その後にマップパルスで $|a\rangle \leftrightarrow |\downarrow\rangle$ 間のフリップをすることで、パリティ振動をシェルビング法で測定できる。図 4.5 がその結果である。信号には $|a\rangle$ 由来の余計な信号も入っているが、RF パルスの位相によって変化しうるのは qubit の状態のみであるため、この振幅は通常のパリティ振動の振幅と同じ思ってよい。その振幅はフィッティングから 0.62 ± 0.08 である。

また、マップパルスのみを照射することで、対角成分の測定ができる。その結果は、$\{|\downarrow\downarrow\rangle, |\uparrow\uparrow\rangle\} = \{0.40 \pm 0.04, 0.34 \pm 0.04\}$ である。これらの結果を合わせることで、忠実度について

$$F = 0.68 \pm 0.08 \tag{4.32}$$

と測定することができた。なお、ベル状態は忠実度 0.5 以上でエンタングルメントを主張できる。得られた忠実度は 0.5 を超えたため、エンタングルメントの生成が

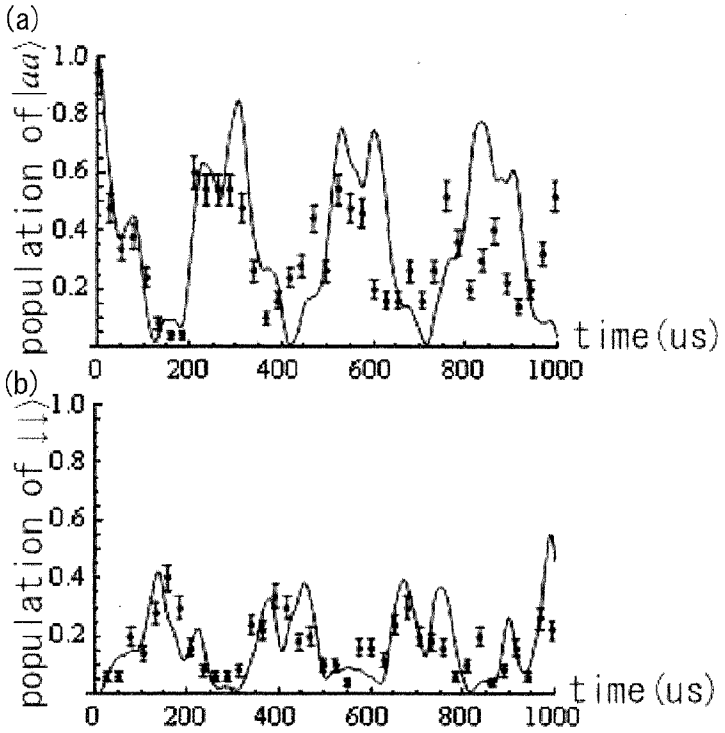

図 4.4: デコヒーレンスフリーエンタングルド状態生成のための相互作用の時間発展
解析のためのパルスを変え、時間発展の様子を2つの量子状態のポピュレーションの変化でプロットした。実線が実験に用いたパラメータでの理論曲線である。

できたと結論することができる。

4.2.2 コヒーレンス時間の測定

当初の目論見通りであれば、生成された状態はドレス場環境下でデコヒーレンスフリーな状態なはずである。そこで、状態を生成した後でドレス場のみを印加して待機し、その後に忠実度を測定することでコヒーレンス時間の測定を行った。なおこの時のドレス場の強度は出来うる限り最大にした。その時のラビ振動は約500kHz である。また、参考のために状態を生成したのちにドレス場を切り、裸のエンタングルド状態のコヒーレンス時間も同様に測定した。図 4.6 がその結果である。フィッティングの結果から、裸のエンタングルド状態に対しては 4.3 ± 0.6ms、デコヒーレンスフリーの状態におけるコヒーレンス時間は $200\pm^{200\mathrm{ms}}_{60\mathrm{ms}}$ と測定され

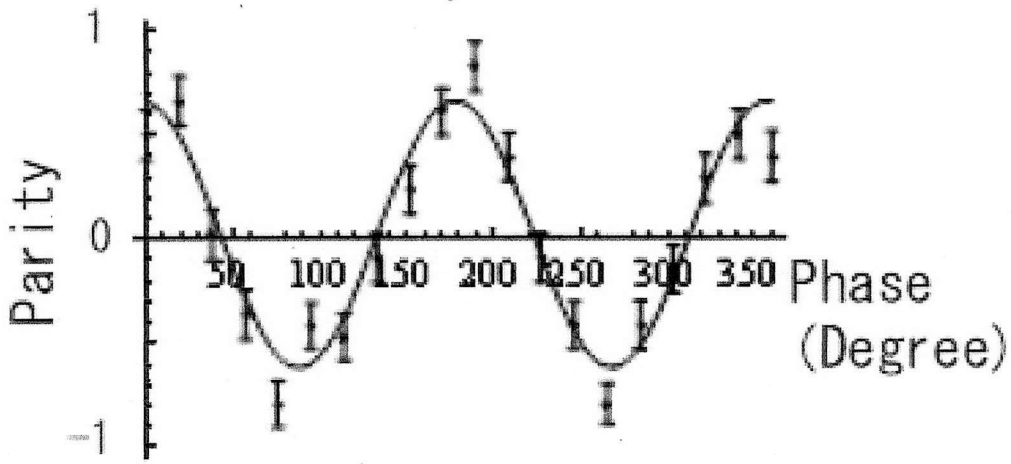

図 4.5: パリティ振動
生成された状態のパリティ振動

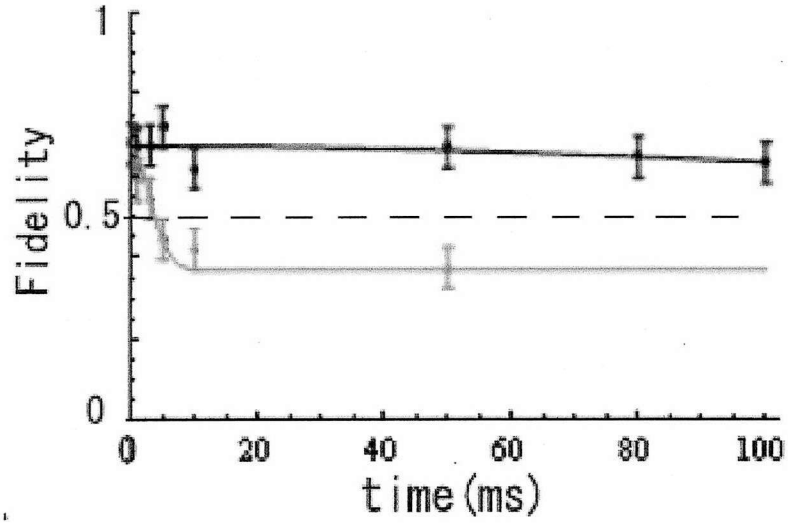

図 4.6: コヒーレンス時間
コヒーレンス時間をドレス場有 (黒) の場合とドレス場無 (赤) の場合でそれぞれ測定した。それぞれ曲線はガウシアンフィッティングである。

た。ドレス場が迷走磁場によるデコヒーレンスから系を守った事により、コヒーレンス時間が2桁程度長くなった事が観測された。

4.2.3 qutrit のエンタングルメント

理論の部分で述べたとおり、時間発展を途中で止めることで qutrit のエンタングルド状態を生成できる。生成した後にパリティ振動をみる解析パルスを照射する。解析パルスは3種類 $|a\rangle \leftrightarrow |\downarrow\rangle$、$|a\rangle \leftrightarrow |\uparrow\rangle$、$|\uparrow\rangle \leftrightarrow |\downarrow\rangle$ あるため、それぞれ別の実験で照射し振動を観測した。解析パルスによる振動を shelving で見るため、解析パルス照射後に、それらの状態を $\{|a\rangle, |\downarrow\rangle\}$ にマップしてから蛍光観測をした。具体的には解析パルス照射後、最初の場合はそのまま蛍光観測を行い、2番目の場合は $\{|\uparrow\rangle, |\downarrow\rangle\}$ のフリップを、最後の場合は $\{|\uparrow\rangle, |a\rangle\}$ のフリップを行った後に蛍光観測を行った。こうすることでそれぞれ解析パルスによるパリティ振動を個別に観測できる。結果を図4.7に載せる。この振動と対角成分の測定結果を同時に

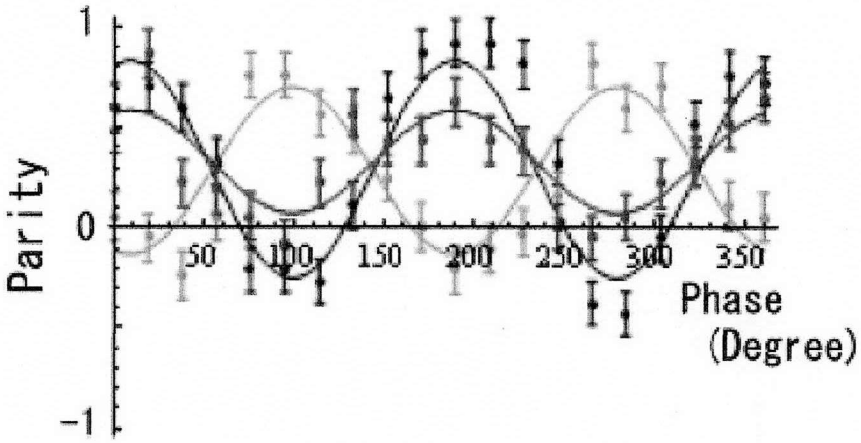

図 4.7: qutrit のエンタングルメント
qutrit のエンタングルド状態に対するパリティ振動の結果。赤、青、黒の順で $|a\rangle \leftrightarrow |\downarrow\rangle$、$|a\rangle \leftrightarrow |\uparrow\rangle$、$|\uparrow\rangle \leftrightarrow |\downarrow\rangle$ のパリティ振動に対応している。

書くと

$$\{D, A_{p1}, A_{p2}, A_{p3}\} = \{0.93, 0.42, 0.27, 0.54\} \tag{4.33}$$

となり、この結果から忠実度は

$$F = 0.77 \pm 0.09 \tag{4.34}$$

と測定できた。

qutrit の GHZ 状態の判定条件は忠実度が 2/3 以上であるため、信頼性 0.86（片側 1.1 σ）でエンタングルしている 2qutrit を生成できたと言える。

4.3 考察と展望

4.3.1 低忠実度

生成されたエンタングルド状態の忠実度は約 0.6 と比較的低い値であった。これは当研究室での MS gate によって生成されたベル状態の忠実度 0.91 と比べてもかなり低い。この理由を考察する。

一番の要因として、強ドレス場近似が破れている事が原因として考えられる。本章において、イジング相互作用とドレス場を合わせた時の強ドレス場近似の破れについて言及した。しかし、ここでは近共鳴 MS gate を用いているため、そこでの考察と定量的には異なっているはずである。そこで、完全なハミルトニアン

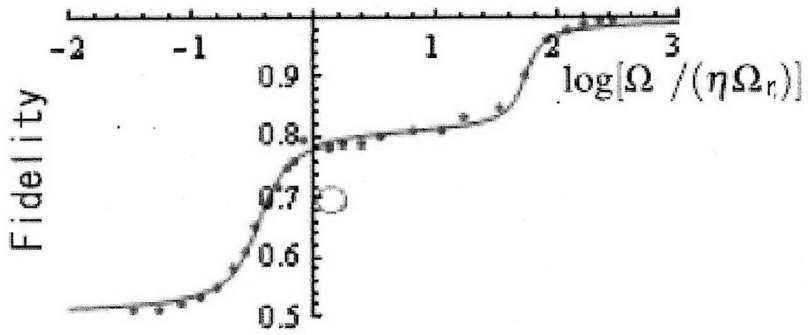

図 4.8: 強ドレス場近似の妥当性
横軸はドレス場のサイドバンド遷移に対する強さ。縦軸が達成される最大の忠実度である。青いプロットが数値計算で、曲線は計算結果を滑らかに結んだものである。赤丸が実験パラメータと結果である。

$$\hat{H}'_{eo} = \sum_{i=1,2} \frac{\eta\Omega_b}{2}(\hat{a}^\dagger \hat{s}_+^{(i)} e^{i\delta t} + \text{h.c.}) + \frac{\eta\Omega_r}{2}(\hat{a}\hat{s}_+^{(i)} e^{-i\delta t} + \text{h.c.}) + \Omega\hat{\sigma}_x^{(i)} \tag{4.35}$$

について、ドレス場の強さの関数として達成される最大の忠実度を計算したものが図 4.8 である。十分に強いドレス場を用いる事で高い忠実度が達成できる事が分かる。しかしながら、実験に用いたパラメータでは理想的な状態でも忠実度は

約0.8程度になる事が分かる。この結果は、図4.2と細かい関数形は別にしておおよそ等しい結果を与えており、同じ物理から由来していることがわかる。これに加え、通常のMS gateの時にも存在するレーザー線幅による位相緩和の効果が入る。今回の場合、この効果はMS gateのπパルス分が混入するので、$0.91^2 = 0.83$と見積もられる。この2つの効果を考慮すると予想される忠実度は0.66と計算され、実験値と非常によく一致している。これらの考察により、今回の実験における支配的な不完全性は、強ドレス場近似の破綻、レーザー線幅による位相緩和の2つであるという事ができる。[8]

4.3.2 コヒーレンス時間

今回の実験結果はコヒーレンス時間が約2桁伸びたとというものである。では、この限界を決めているものはなんであろうか。

イオン結晶の安定度

まず、守られたコヒーレンス時間のエラーが大きい点に触れる。これは、コヒーレンス時間に比べ短時間の領域でのみ実験をしたためフィッティングのエラーが大きくなってしまっている事による。しかしながら、実験的にこれ以上の長時間測定は難しかった。その一番大きな理由はイオン結晶の融解である。実験系の章で説明をした通り複数個のイオンで実験をする場合、イオン結晶の安定度が大きな問題になる。イオン結晶が加熱される原因としては、バックグラウンドガスとの衝突や電極からの加熱が考えられる。加熱されたイオン結晶は結晶構造を保てなくなり、プラズマ化する。こうなってしまうと、一度実験を止めなければならない。また、この効果は高い永年周波数を持たせたときにより顕著に起きる事が確認できた。今回の実験ではゲートの忠実度を高めるために永年周波数は全方向に対してかなり高く設定したので、イオンの融解現象が非常に起きやすい状況で

[8] ここで、近共鳴MS gateと遠共鳴MS gateについて触れておく。忠実度を上げるためにドレス場を強くすれば良いと結論したが、近共鳴MS gateの場合は強いドレス場は中間状態の様子を大きく変えてしまい、条件が厳しくなる。ここではその詳細についての解析は記述していないが、実験的には単にドレス場を強くしても忠実度は上がらなかった。理論の部分で解析したようにイジング相互作用とみなせるような大きい離調でのMS相互作用を用いた場合、強いドレス場を用いる事が可能になるため、より高い忠実度を達成できる。しかしながら、その場合離調を大きくした分イジング相互作用は弱くなり、状態生成までの時間が長くなる。

現状では、レーザー線幅によってコヒーレンス時間が数百μsに制限されているので、このように長い生成時間はむしろ忠実度を悪くする。これらの問題点を含めて、最大の忠実度となるパラメータを探したのが今回の結果である。

よって、今回のこの2つの問題はともにレーザー線幅による短いコヒーレンス時間に起因しているとも言う事ができるかもしれない。

あった。実際に100ms以上の時間イオンを冷却せずに保った場合、イオン結晶を保持できない確率が無視できなくなった。そのため、これ以上の時間での測定が難しく、短時間のみでの測定を行った。

これは単に低い永年周波数で実験をすれば良い。また、プラズマ化したイオン結晶を再結晶化するために強い冷却光を使う事、またこの実験のあとで開発した再結晶化プログラムも有利に働くであろう。

コヒーレンス時間の限界

今回の方法によるコヒーレンス時間の限界を考える。まず、迷走磁場の周波数特性がある。理論部分で述べたように、ドレス場でデコヒーレンスから守られるメカニズムとしてドレス場のラビ振動数が迷走磁場の周波数特性に対して十分に速い必要があった。これはスピンエコーの実験を参考にすると考えやすい[68]。

スピンエコーは途中にπパルスを一回打つことで低周波数なノイズをキャンセルする技術である。このパルスは照射すれば照射するほど多くのノイズがキャンセルされる。そこで、そのパルスをCWにまで増やしたのが今回のノイズキャンセル技術の簡単なイメージである。通常のスピンエコーの場合πパルスの精度などで多数回にするときの限界がある。しかし今回の場合は、2qubitを使うことで、2つのspinの回転がキャンセルし、その固有エネルギーは0になっている。

$$(\hat{\sigma}_x^{(1)} + \hat{\sigma}_x^{(2)})\,|T\rangle = 0 \tag{4.36}$$

よって、ドレス場の強度揺らぎは系に対して影響を与えず、また断熱的に系が変化する限りその状態は常に同じ固有エネルギー0の一つの状態に居続ける。また、その結合しうる他の状態とのエネルギーの分離はラビ振動数に等しい。その結果CWのスピンエコーと同じようにおよそラビ振動数までの磁場揺らぎをキャンセルできる。

しかしながら、2qubitを使ってしまっている事によって、磁場勾配の影響が発生する。先行研究でデコヒーレンスフリーな状態として$|\uparrow\downarrow\rangle \pm |\uparrow\downarrow\rangle$状態を使ったinnsbruck大学のBlattらの実験[64]でも磁場揺らぎが系のコヒーレンスを決めていた。しかし、今回の場合2つのスピンがそれぞれ同時に同じドレス場と結合していることにより、弱い磁場勾配が系に混入しても、系は断熱的に状態を変化し、常に同じ状態にあり続ける。その結果、磁場勾配が十分に弱ければ、この点もコヒーレンスの限界にはならない。

以上の事から、速い周波数での磁場揺らぎが系のコヒーレンスを決めているという事ができる。なお、実験的に考えらえる高速なノイズとしてはAOMに印加している110MHz・80MHz、トラップに用いている25MHz、EOMの変調に使っている15MHzなどが挙げられる。

4.3.3 qutritのエンタングルメント

qutritのエンタングルメントの忠実度もqubitと同様にレーザーの線幅を狭くすることで上がると考えることができる。現状においても、qubitに比べ少し良いのは、少ないパルス面積による相互作用時間の短さと、対角成分が無駄にならない事による。後者については、$|T\rangle$を生成するときは、$|aa\rangle$のポピュレーションはqubitの張るヒルベルト空間の外の状態であるため、忠実度を単に減らすものになる。対してqutritの場合はこの成分は同様に忠実度に効くので、相互作用が完全ではなく一部の状態が$|aa\rangle$に残ったとしても忠実度を大きくは下げない。このことがqutritの比較的高い忠実度を生み出していると考える。実際に、qutritの測定では対角成分の和は0.93と非常に高い値をとっている。

4.4 提案

4.4.1 エンタングルメントポンピング

今回のRFエンタングルド状態を生成した方法を使えば、エンタングルメント状態への光ポンプを考える事ができる。自然放出過程を通したエンタングルメント生成は、[69]に先行研究がある。

理論部分で書いたように、イジング相互作用とドレス場を合わせたハミルトニアンは

$$H_{eo} = \begin{pmatrix} \frac{J}{4} & -\frac{J}{4\sqrt{2}} & \frac{J}{4\sqrt{2}} & -\frac{J}{4\sqrt{2}} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{J}{4\sqrt{2}} & \frac{J}{8} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{J}{4\sqrt{2}} & 0 & \Omega+\frac{J}{8} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{J}{4\sqrt{2}} & 0 & 0 & -\Omega+\frac{J}{8} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\Omega}{2}+\frac{J}{4\sqrt{2}} & \frac{J}{4\sqrt{2}} & -\frac{J}{4\sqrt{2}} & -\frac{J}{4\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{J}{4\sqrt{2}} & \frac{\Omega}{2}+\frac{J}{4\sqrt{2}} & -\frac{J}{4\sqrt{2}} & -\frac{J}{4\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{J}{4\sqrt{2}} & -\frac{J}{4\sqrt{2}} & -\frac{\Omega}{2}+\frac{J}{4\sqrt{2}} & \frac{J}{4\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{J}{4\sqrt{2}} & -\frac{J}{4\sqrt{2}} & \frac{J}{4\sqrt{2}} & -\frac{\Omega}{2}+\frac{J}{4\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

であった。

このハミルトニアンによると、$|S\rangle$状態以外は、$|a\rangle$状態と少なからず結合している。そこで、このハミルトニアンで励起した後に$|a\rangle$状態をqubit状態にクエン

チするような事を繰り返すと、相互作用の暗状態である $|S\rangle$ に貯まっていき、光ポンプされる。

通常の 397nm の強い遷移を用いるスピン偏極のための光ポンプは、一回の自然放出が約 10ns と非常に早いプロセスである。対して、このエンタングルメント光ポンピングは一回のサイクルが約 100μs と非常に遅い。そのため、光ポンプのためにサイクルを多数回まわすには、典型的には 10ms 程度の非常に長い時間がかかると考えられる。一方で、生成された状態はシングレット状態 $|S\rangle$ で、デコヒーレンスに強い状態であるため、このサイクル間の状態緩和は小さいものと期待する事ができる。

それでは、エンタングルド状態に光ポンプされる過程を数値計算によってシミュレートしてみる。結果を図 4.9 に示す。状態がだんだんとエンタングルメント生成

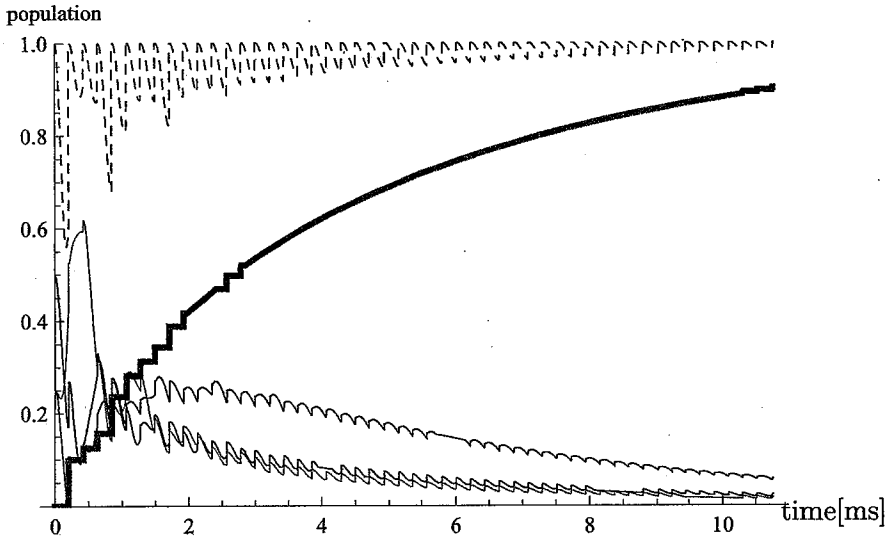

図 4.9: エンタングルメントポンピングによる $|S\rangle$ 状態生成
エンタングルメント生成パルスと 854nm によるクエンチを繰り返して、$|S\rangle$ 状態へとポンプされる様子を数値計算した。太い曲線がポンプ先の $|S\rangle$ 状態のポピュレーションである。点線は基底状態全体にいるポピュレーションを示している。他の曲線は $|T\rangle$ 状態、$|{+}{+}\rangle$ 状態、$|{-}{-}\rangle$ 状態、$|S\rangle$ 状態のポピュレーションをそれぞれあらわしている。スピン間相互作用 J は 1kHz とし、ドレス場は 1kHz、1 パルスの時間は 200us とした。スピン間相互作用の離調は同じ時間でのポンプ量が多くなるように設定し、0.9kHz となった。パルス数は 50 である。

パルスの暗状態 $|S\rangle$ に近づいている事が分かる。

4.4.2 ドレストデコヒーレンスフリー部分空間

本章の実験において、ある種のエンタングルド状態をドレス場と結合させる事で長いコヒーレンス時間が得られる事を示した。一方で、ドレス場に対する2ionの固有値が0となる状態は本実験で用いた$|T\rangle$状態ともう一つ$|S\rangle$状態とがある。$|S\rangle$状態はシングレットと呼ばれる状態であり、系にグローバルな操作を加える限りは他の状態と一切結合せず、この状態もデコヒーレンスに強い状態であるという事ができる。そこで、$|T\rangle$状態を$|1\rangle$、$|S\rangle$状態を$|0\rangle$とすることで、2ionのヒルベルト空間の内、ドレス場環境下においてデコヒーレンスに強い部分空間を張る事ができる。この部分空間を以下ではドレスドデコヒーレンスフリー部分空間(DDFS)と呼ぶ。

この観点で見た場合、本実験はDDFSのT_1に対応するものを測定したという事ができる。DDFSでのT_2に対応するものを測る場合、$\frac{1}{\sqrt{2}}(|1\rangle+|0\rangle) == \frac{1}{2}(|\uparrow\uparrow\rangle+|\uparrow\downarrow\rangle-|\downarrow\uparrow\rangle-|\downarrow\downarrow\rangle)$状態を用意し、そのコヒーレンス時間を測定すればよい。

DDFSを用いて量子情報処理を行うには、DDFS中での状態の測定と状態の回転（ゲート）が必要となる。状態の測定（射影測定）は、$|T\rangle=\frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow\uparrow\rangle-|\downarrow\downarrow\rangle)$、$|S\rangle=\frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow\downarrow\rangle-|\downarrow\uparrow\rangle)$と励起数が違う事を利用し、例えば$|\downarrow\rangle$状態を準安定状態へとマップし、その後通常の蛍光測定によるスピンの励起数測定をする事で行う事ができる。

それでは、以下ではDDFS中の1qubitのx回転・z回転ゲート、2qubitゲートの提案を行う。

x回転ゲート

x回転のゲートとは、二つのqubitの状態間をフリップするようなゲートである。ここでは、$|T\rangle$と$|S\rangle$間をフリップさせる操作を考えればよい。そのためには、これらの状態はドレス場の基底で考えると$|T\rangle=\frac{1}{\sqrt{2}}(|+-\rangle+|-+\rangle)$、$|S\rangle=\frac{1}{\sqrt{2}}(|+-\rangle-|-+\rangle)$であるので、$|+-\rangle$と$|-+\rangle$間の相対位相を変化させれば良い事が分かる。

自明な方法としては、二つのionの内片方にだけ同相のドレス場を追加する方法である。ion1にΩ_1、ion2にΩ_2のドレス場が印加されているとすると

$$(\frac{\Omega_1}{2}\hat{\sigma}_x^{(1)}+\frac{\Omega_2}{2}\hat{\sigma}_x^{(2)})|+-\rangle = \frac{\Omega_1-\Omega_2}{2}|+-\rangle \tag{4.37}$$

$$(\frac{\Omega_1}{2}\hat{\sigma}_x^{(1)}+\frac{\Omega_2}{2}\hat{\sigma}_x^{(2)})|-+\rangle = \frac{\Omega_2-\Omega_1}{2}|-+\rangle \tag{4.38}$$

となり、両者の状態間で位相差だけが生じ、DDFS中でのx回転ゲートが実現する。しかしながら、RFの波長はイオン間に比べ非常に長いので、イオン間で異な

るラビ振動数となるようなRF印加は非常に難しい。そこで、近似的にイオン間でラビ振動数の差を生むために、磁場勾配を印加する方法がある。

例えばion2に追加的なゼーマンシフトδBを印加する事を考える。するとion2のドレス場によるラビ振動数は$\sqrt{\Omega^2+\delta B^2}$に変化し、イオン間で実効的にドレス場のラビ振動数が変化した状況を作る事ができる。しかし、この場合ion2はドレス場に対して離調が生じてしまっているため、ドレス場の固有状態も変わってしまっているため、普通に磁場勾配を印加するとドレス場の回転系がおかしくなってしまう。この問題を解決するためには、磁場勾配を断熱的に印加し、状態を断熱的に磁場勾配が印加された回転系に乗せればよい。図4.10にx回転ゲートによ

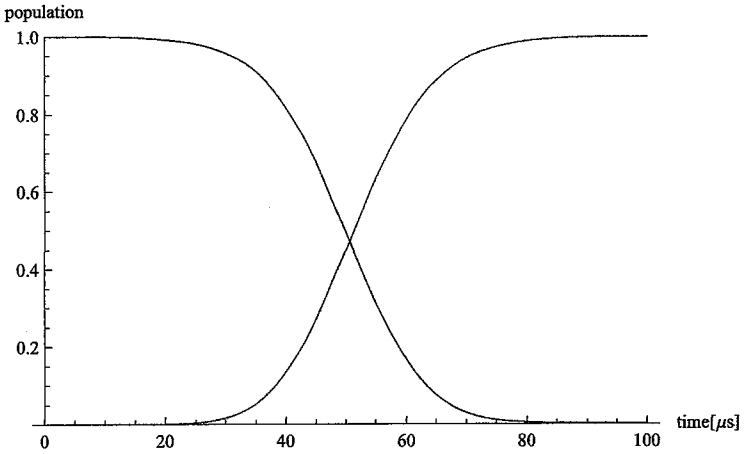

図4.10: DDFS中でのx回転ゲートによるqubitの回転
二つの曲線は、$t=0$で1を示すものが$|T\rangle$状態の、もう片方が$|S\rangle$状態のポピュレーションをそれぞれあらわしている。ドレス場の大きさ100kHz、ion2への付加的なゼーマンシフトのピークの大きさB_0を52.9kHz、掃引時間t_0を100μsとした。

るπ回転の数値計算を載せた。ここでは、時間変化する磁場勾配$\delta B(t)$を

$$\delta B(t) = B_0 \frac{1-\cos(2\pi t/t_0)}{2} \tag{4.39}$$

と掃引した。回転角θはラビ振動数の変化を積分し、

$$\theta = \int_0^{t_0} \sqrt{\Omega^2+\delta B(t)^2} - \Omega dt \sim \pi \tag{4.40}$$

と計算する事ができる。実際に、図4.10の計算に用いたパラメータを代入すると$\theta=\pi$となり、180度の回転となる事が計算できる。

カルシウムの基底状態において、52.9kHz のゼーマンシフトに対応する磁場の大きさは 19mG であるため、磁場の勾配としては 38G/cm となり、コイルで印加するにも十分に現実的な値となる。

z 回転ゲート

z 方向の回転を実現するには $|S\rangle$ 状態と $|T\rangle$ 状態の間に位相差を付ければよい。しかしながら、エンタングルド状態間に位相差を付けるような操作は一般にエンタングリング操作となる事が言えるので、x 回転ゲートのような線形な操作では実現できない[9]。そこで、スピン間相互作用である $\hat{J}_y\hat{J}_y$ の相互作用を系に印加する事を考える。ここで、$\hat{J}_y = \hat{\sigma}_y(1) + \hat{\sigma}_y(2)$ である。$|T\rangle$ 状態と $|S\rangle$ 状態はスピンの大きさ $\hat{J}^2$ が異なる状態であるため、このようなスピン間の相互作用に対して異なる振る舞いをする。

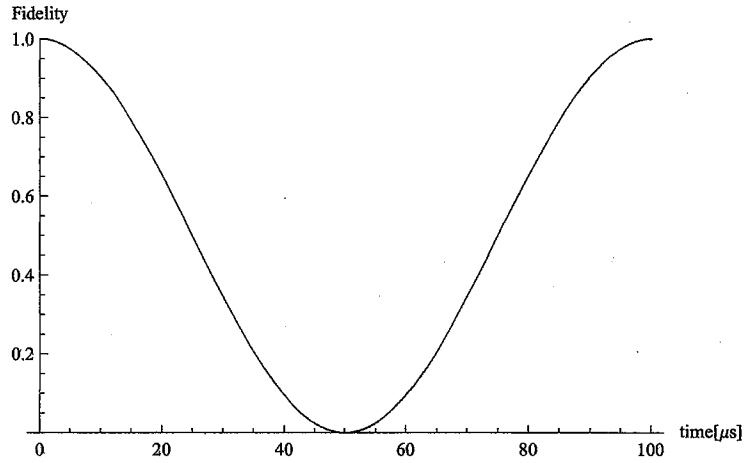

図 4.11: DDFS 中での z 回転ゲートによる qubit の回転
初期状態に $\frac{1}{\sqrt{2}}(|T\rangle + |S\rangle)$ を用意し、ドレス場中でスピン間相互作用 $\hat{J}_y\hat{J}_y$ を印加した場合の時間発展を数値計算した。横軸は時間、縦軸は初期状態に対する忠実度を表している。本文中のハミルトニアン $\hat{H}_1$ の相互作用の強さ J は 10kHz とした。

[9]実際に、初期直積状態 $|+-\rangle$ に対し、$|S\rangle$ と $|T\rangle$ の間に 90 度の位相差がつく操作をした場合

$$|+-\rangle \to \frac{1+i}{2}|+-\rangle + \frac{1-i}{2}|-+\rangle \tag{4.41}$$

となり、エンタングルド状態になる。

実際にドレス場中の qubit に対し、

$$\hat{H}_1 = \frac{J}{4}\hat{J}_y\hat{J}_y \tag{4.42}$$

となるような相互作用を印加した系の数値計算を行ったものが図 4.11 である。初期状態に対し z 回転の位相ゲートが働き、綺麗に回転している事が分かる。

2qubit ゲート

DDFS 中の qubit における 2qubit ゲートとは、physical な 4qubit のゲートに対応しており、

$$|TT\rangle \to \frac{1}{\sqrt{2}}(|TT\rangle - i\,|SS\rangle) \to |SS\rangle \tag{4.43}$$

のような時間発展をするゲートである[10]。

天下り的に結果を書くと、このゲートを実現するには、イオン間で少し特殊なスピン間相互作用を誘起すれば良い。その相互作用は

$$\hat{H}_1 = \frac{J}{4}\hat{L}_x\hat{L}_x \tag{4.44}$$

$$\hat{L}_x = \hat{\sigma}_x^{(1)} - \hat{\sigma}_x^{(2)} - \hat{\sigma}_x^{(3)} + \hat{\sigma}_x^{(4)} \tag{4.45}$$

である。これは、外側 2 つのイオンと内側 2 つのイオン間にちょうど π だけ位相のズレがあるスピン間相互作用である。イオン鎖を用いるとこのような相互作用を誘起する事ができる。

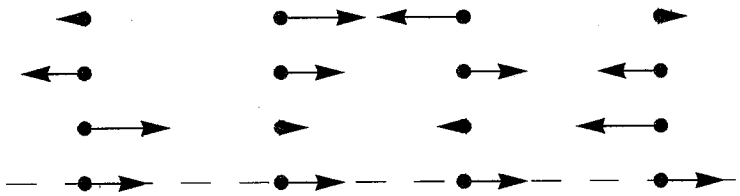

図 4.12: イオン 4 つの軸方向振動モード
イオンの固有振動モードのイオンごとの大きさ・向きを矢印の長さ・向きであらわしている。下から順番にエネルギーの低いモードである。特に一番エネルギーの低いモードを COM モード、下から 2 番目の伸び縮みするモードをストレットモード、下から 3 番目のモードをシザーズモードと呼ぶことが多い。

[10]後の都合で状態間の位相は適切に選んだ

このようなスピン間相互作用を生成するために、まずはイオン鎖の振動モードについて考える。イオン4つのイオン鎖は軸方向について固有の振動モードとして図4.12のような4つのモードを持っている。トラップイオンを用いた量子情報処理の場合、スピン間の相互作用は振動モードを通じて誘起されるため、どのモードを使ってスピン間の相互作用を誘起するかという自由度がある。通常のエンタングリングゲートの場合、全体に均一な相互作用を誘起する必要があるためCOMモードを使う事が多い。しかし、ここでは下から3番目のシザーズモードを用いたスピン間相互作用を考える。図4.12を見ると、このモードは振動の大きさがイオンすべてにおいて等しく、外側2つと内側2つで向きが正反対になっているという事が分かる。この性質のため、シザーズモードを用いたスピン間相互作用は上式の $\hat{H}_1$ に等しくなる。

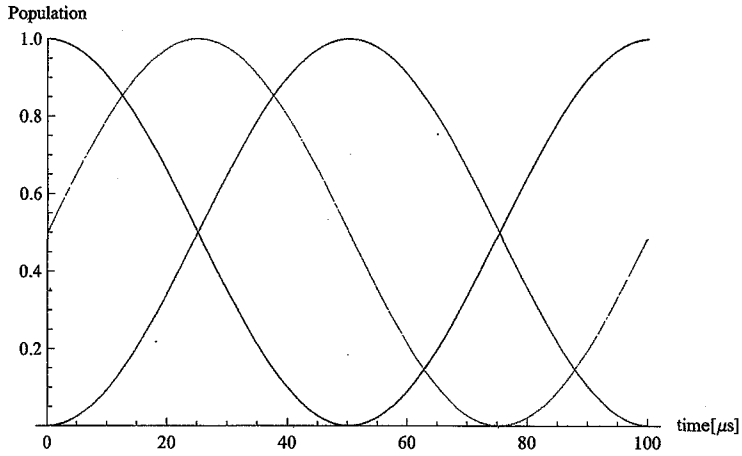

図 4.13: DDFS 中での 2qubit ゲート
初期状態を $|TT\rangle$ として、2qubit ゲートを作用させた時の時間発展を数値計算している。曲線は、$t=0$ で population が高い順に $|TT\rangle$ 状態、$\frac{1}{\sqrt{2}}(|TT\rangle - i\,|SS\rangle)$ 状態、$|SS\rangle$ 状態の population をそれぞれ表している。初期状態 $|TT\rangle$ から論理 qubit 間のエンタングルド状態を経て $|SS\rangle$ 状態へと移っていく様子が見て取れる。

ドレス場中の 4ion に対し、初期状態を $|TT\rangle$ とし、ドレス場とシザーズモードを用いたスピン間相互作用を合わせて印加した場合の時間発展を数値計算したものが図4.13である。時間発展の途中で DDFS 中の qubit（論理 qubit）間でのエンタングルド状態が生成されている事が分かり、DDFS 中での 2qubit ゲートが実現している事が分かる。

4.5 まとめ

エンタングルド状態、特にGHZ状態と呼ばれる状態は外部からのノイズに特に弱い状態である。本章では断熱定理によりそのようなエンタングルド状態のコヒーレンスを保護する事に成功した。その際、qubitに加えて一つの参照状態を用意する事でドレス場とスピン相互作用を組み合わせ、ドレス場の固有状態を直接生成するゲートを開発した。その固有状態は生成に使うドレス場によって守られた状態であるため、デコヒーレンスフリーなエンタングルド状態が生成される。その状態のコヒーレンス時間を実験的に測定し、断熱定理によって守られてない場合に比べコヒーレンス時間が約2桁程度長くなった事を確認した。また、このゲートが3つの量子状態が関与しているゲートである事を利用し、2qutritのエンタングルド状態を生成した。

さらにドレス場中でのデコヒーレンスに強い特性を活かしたDDFSの提案を行い、DDFS中での射影測定や各種ゲートの提案を行った。また、本章でのエンタングルド状態生成方法の特徴を利用し、エンタングルド状態への光ポンプの実験を提案し、数値計算によって評価した。

第5章　実験III: 多数qubitのDicke状態生成と精密測定

一般に、もつれた量子状態は、単一qubitの量子状態に比べてノイズに対して弱い事が知られている[70, 21]。ゆえに多数のエンタングルド状態を生成するには擾乱に強い生成方法を用いてかつ非常に高い忠実度で系を操作しなくてはならないと言う事ができる。

また多数のqubitにおけるエンタングルド状態は非常に複雑な分類を持つことが知られており[71, 72]、少数個からの拡張として意味のあるエンタングルド状態の例は、GHZ状態（グラフ状態）・Dicke状態・クラスター状態である。まず、GHZ状態は多数個の極限としては上向き磁石と下向き磁石の重ね合わせとして猫状態になる[67]。また、すべてのqubitがすべてのqubitと量子相関を完全に持っているという意味で一番量子性の強い状態とも考えられる。続いて、Dicke状態は量子光学における真空スクイーズド状態[73]と非常に性質の似た量子状態である[74]。光からのアナロジーとして、スピンスクイーズド状態とも呼ぶことができ、Heisenberg限界を達成する精密測定が可能であることが示されている[75, 76]。最後にクラスター状態[77]はone-way量子計算[78]のリソースとして知られており、主に中性原子や連続量光量子情報処理の分野で興味が持たれている。

この中でもGHZ状態については、イオントラップにおいてMølmer-Sørensen gate[15, 14]と呼ばれる安定なエンタングリングゲートが提案されており、実験的にも14qubitでの実現[21]が成功している。一方で、　Dicke状態については高い忠実度で生成可能な方法が提案されておらず、光子を用いた6qubitのエンタングルド状態生成[79]が最大である。

本章では、イオントラップを用いた高忠実度でのDicke状態生成方法を提案し、4ionまでの実験的な生成について報告する。個数についての忠実度の評価により、多数ionでの生成についての議論をし、最後に現在個数を制限するものが本質的な問題ではなく、技術的な問題である事に触れる。また、2ionの場合においては、量子標準限界を超えるような精密測定を実現した。

5.1 理論

5.1.1 Dicke状態

多体のエンタングルド状態の分類の一つにDicke状態と呼ばれるものがある。このような状態は、古くから超放射等の原子集団の振る舞いを説明するためにDickeが導入したものである[80, 81]。より一般に言うと、Dicke状態とは系全体の角運動量演算子とそのある方向の射影成分の同時固有状態である。つまり、いわゆる角運動量状態

$$|\xi; J, J_z\rangle \tag{5.1}$$

の事を指しDicke状態と呼ぶ[82]。ここで、ξは等しい角運動量状態を区別する指標である[83][1]。

しかし多くの場合、このようなDicke状態の中でも特に粒子の入れ替えに対して不変であるような対称なDicke状態をもってDicke状態と呼ぶ。その慣例に倣い、本論文でもDicke状態とは粒子の入れ替えに対して対称な状態の事を特に呼ぶことにする。その場合、一般のDicke状態$|\mathrm{D}_n^m\rangle$は

$$|D_n^m\rangle \equiv \sum_k \frac{1}{\sqrt{{}_n\mathrm{C}_m}} P_k \,|\downarrow \ldots \downarrow\uparrow \ldots \uparrow\rangle \tag{5.4}$$

と書くことができる。ここで、全スピン数がnで$|\uparrow\rangle$にあるスピンの数をmとする。P_kはイオンの交換演算子である。

エンタングルメントの分類としては、$|\mathrm{D}_n^1\rangle$は$|W\rangle$状態と特に呼ばれ、光子を用いた量子情報処理分野[84]や中性原子のアンサンブルを使った場合のqubit[31]と

[1]角運動量の合成の一般論から、多数個の角運動量を順に合成するとき、一つ付け加える度に角運動量の大きさについて$\pm 1/2$の自由度がある。例えば、4qubitの合成の場合、状態は全部で$2^4 = 16$個あるはずである。この16次元のヒルベルト空間は

$$H = \frac{1}{2} \otimes \frac{1}{2} \otimes \frac{1}{2} \otimes \frac{1}{2} = 2 \oplus 1 \oplus 1 \oplus 1 \oplus 0 \oplus 0 \tag{5.2}$$

と書くことができる。ここで、数字はその大きさの角運動量のヒルベルト空間を表す。最右辺の次元を計算すると、$5 + 3 * 3 + 1 * 2 = 16$となる。ここで、例えば等しい角運動量1を持つ3つの状態は合成の履歴が異なるが、

$$\{|1, \frac{3}{2}; 1, J_x\rangle, |1, \frac{1}{2}; 1, J_x\rangle, |0, \frac{1}{2}; 1, J_x\rangle\} \tag{5.3}$$

と書くことで区別できる。$|j_2, j_3; J, J_x\rangle$は2個の合成による角運動量がj_2となり、3個の合成でj_3の角運動量状態を経由した状態として定義する。このように、一般に角運動量状態はN個の合成に対してN-2個の中間状態を列記することで一意に定まる。これら中間状態の列を順に指標付けし、その指標をここでξとする。

してよく用いられている。イオントラップにおいては、innsbruck の Blatt らのチームが 8ion の $|W\rangle$ 状態の生成と評価に成功 [85, 86] している。

一方で、スピンの励起数が一番大きい $|\mathrm{D}_n^{n/2}\rangle$ という状態も広く興味を持って研究されている[2]。なぜならば、このような状態は量子光学における真空スクイーズド光状態 [73] と対応したスピン系の状態であると知られているからである。$|\mathrm{D}_n^{n/2}\rangle$ 状態を異なる方向のスピン状態に関し展開をしてみると、励起数が 2 個ずつ異なった状態の足し合わせになる。この事と、真空スクイーズド光の 2 光子相関が対応している。この対応により、$|\mathrm{D}_n^{n/2}\rangle$ 状態も真空スクイーズド光と同様に精密測定に利用できる事が知られており、量子縮退した原子 [87, 88] や光子対を用いて [76, 89, 90] その原理検証実験が行われている。しかし、このような状態は一般に高精度での生成方法は今まで知られていない。W状態を生成するときのような局所アクセスとパルス列を用いると非常に複雑な生成過程が必要となる [86]。また、振動量子のフォック状態から断熱課程を利用する生成方法も提案 [91] されており、2ion に対しては実現している [92] が、多数個の場合には初期状態であるフォック状態を高い純度で用意するのが難しいという問題点がある。

本論文ではこの半数励起の Dicke 状態にターゲットを絞って考えるため、以下では断らない限り単に Dicke 状態と呼ぶときは半数が励起した $|\mathrm{D}_n^{n/2}\rangle$ 状態を指す。

精密測定

図にブロッホ球上での Dicke 状態を描く。Dicke 状態はブロッホ球上の大円に対応している状態である。大円に鉛直な方向に関するスピンのノイズが 0 になっており、最大限スピンがスクイーズされた状態である [93, 94] という事ができる。このノイズの小ささを精密測定に生かすことを考える [95]。

スピンを用いた測定というのは、つまるところスピンの回転をスピンに対する射影測定で読み取るものである。なので、図のようにスピン偏極状態から始めた時でもその鉛直方向の量子ノイズのせいでどのくらい回転したという情報がぼやけてしまう。この測定量のぼやけに起因する測定精度の限界を量子標準限界という。測定回数 N に対し、量子標準限界は

$$\delta\phi = \frac{\Delta V}{\partial V/\partial\phi} = \frac{1}{\sqrt{N}} \tag{5.5}$$

となる [76, 96]。ここで、スピンの回転角 ϕ を読み取るために測る物理量を V とした。

[2] $|\mathrm{D}_n^m\rangle$ と $|\mathrm{D}_n^{n-m}\rangle$ 状態はスピンを逆にすれば等価なので、一番励起数が大きいのは半数が励起した $|\mathrm{D}_n^{n/2}\rangle$ 状態となる。

一方で、このような限界はスピン間の相関—エンタングルド状態—を利用することで破る事ができる。これはスピン間にある量子相関を利用し、あるスピンの情報が他のスピンの量子揺らぎを小さくする事に起因している。回転角を見積もるためのうまい演算子Vを持って来れば

$$\delta\phi \sim \frac{1}{N} \ll \frac{1}{\sqrt{N}} \quad \text{(for large N)} \tag{5.6}$$

とすることができる。この測定限界をハイゼンベルグ限界と呼ぶ[76]。

さて、Dicke状態と用いる事でハイゼンベルグ限界を満たすような精密測定が可能である事を示す。用意する状態はDicke状態$|\mathrm{D}_n^{n/2}\rangle$で、精密測定したい磁場や光などによって状態を$e^{-ihatJ_x\phi}$で回転させた後に$\hat{J}_z^2$の期待値を測定する。この期待値から逆に未知の回転角ϕを見積もり、磁場や光の精密測定をする。ここで、$\hat{J}_\theta$はθ方向の集団的なスピン演算子とした($\hat{J}_\theta = \sum_i \hat{\sigma}_\theta^{(i)}$)。

すると、測定量$V(\phi)$は

$$V(\phi) = \langle e^{i\hat{J}_x\phi}\hat{J}_z^2 e^{-i\hat{J}_x\phi}\rangle \tag{5.7}$$

となる。ここで、$\langle\cdot\rangle$はDicke状態に関する期待値である。

ベーカーハウスドルフの補助定理[3]により、$\phi \ll 1$の領域において

$$V(\phi) \sim \phi^2\langle\hat{J}_y^2\rangle \tag{5.9}$$

と計算できる。同様に分散も計算すると

$$\Delta V(\phi) = \phi\sqrt{\langle\hat{J}_y\hat{J}_z^2\hat{J}_y\rangle} \tag{5.10}$$

となる。

ここで、Dicke状態の期待値について、$\langle\hat{J}_x^2\rangle = \langle\hat{J}_y^2\rangle = \frac{n(n/2+1)}{4}$である事を利用すれば、

$$\delta\phi \sim \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{n(n+1)}} \sim \frac{\sqrt{2}}{n} \tag{5.11}$$

となり、この測定がハイゼンベルグ限界を満たすような測定になっていることがわかる。

---

[3]ベーカーハウスドルフの補助定理

$$\begin{aligned} & e^{i\hat{A}\lambda}\hat{G}e^{-i\hat{A}\lambda} \\ = \; & \hat{G} + i\lambda[\hat{A},\hat{G}] + (\frac{i^2\lambda^2}{2!})[\hat{A},[\hat{A},\hat{G}]] + \cdots \end{aligned} \tag{5.8}$$

5.1.2 Dicke 状態生成 1

以下では 2 つの方法による Dicke 状態の生成方法について述べる。最初に提案する方法は前章で用いたドレス場と MS gate を組み合わせる方法である。前章での計算を一般の個数の ion に対し一般化すればよい。以下では、イオンの個数を偶数に限った議論とする。この生成方法はイオン数が偶数のときに限ったものである。そこで、イオンが一つのトラップに 2n 個トラップされているとする。考えるハミルトニアンは qubit を為す $|\downarrow\rangle$ と $|\uparrow\rangle$ とアンシラ状態 $|a\rangle$ に対し、

$$\hat{H}_{eo} = J\hat{S}_x\hat{S}_x + \Omega(\sum_i \hat{\sigma}_x^{(i)}) \tag{5.12}$$

である。ここで、$\{|a\rangle, |\downarrow\rangle\}$ を擬スピンとした集団スピン演算子の射影成分を $\hat{S}_x$ とし、qubit のスピン演算子の射影成分を $\hat{s}_x$ とした。

完全対称部分空間

まず、先に第二項のドレス場について対角化し、以下ではその基底で考える。ドレス場の固有ベクトルは

$$\sum_i \hat{\sigma}_x^{(i)} |\xi; J, J_x\rangle_{am} = J_x |\xi; J, J_x\rangle_{am} \tag{5.13}$$

と書ける。ここで、J は qubit の集団スピンの絶対値を表し、本章冒頭と同様に角運動量に対する縮退を識別する指標を ξ とした。

ここで、初期状態は $|aa\ldots a\rangle$ を考える。すると、初期状態とハミルトニアンの粒子の交換に対する対称性より、関与する状態はすべて完全対称な状態に限る事ができる[4]。qubit に関しては、完全対称な状態は最大の角運動量絶対値を持つ $|J_{max}, J_x, 1\rangle_{am}$ である。なお、この状態には角運動量に関する縮退がないので、$\xi = 1$ とした。よって、全体としては

$$|m, J_x\rangle_{sym} \equiv \sum_k \frac{1}{C_k} P_k |aa\ldots a\rangle |\frac{2n-m}{2}, J_x, 1\rangle_{am} \tag{5.15}$$

を基底とする完全対称な部分空間で議論をする。なお、ここで m はアンシラ状態 $|a\rangle$ にあるイオンの数である。P_k は粒子を交換する演算子、C_k は規格化因子である。

---

[4]粒子の交換演算子 $\hat{\Pi}$ について、

$$[\hat{\Pi}, \hat{H}] = 0 \tag{5.14}$$

であるため、$\langle\hat{\Pi}\rangle$ は保存量となる。このことから、状態の対称性が変化しないことがわかる。

強ドレス場近似

さて、ここで前章と同じように強ドレス場近似を行う。前章と同様にドレス場の固有値が0ではない状態はイジング相互作用に対して大きな離調を持ってしまうためにポピュレーションが無視できる。そこで、ドレス場による固有値 J_x について考えれば、強ドレス場近似によって $J_x \neq 0$ の状態は無視できる。そこで、より小さな部分空間として

$$|\lambda\rangle \equiv |2\lambda, 0\rangle_{sym} \tag{5.16}$$

の張る部分空間を考える。

基底具体例—4つの場合

具体例として4つの場合を考える。この場合、λ としては0,1, 2取れるので、

$$\begin{aligned}
|0\rangle &= |2,0,1\rangle_{am} \\
|1\rangle &= \frac{1}{\sqrt{6}}\Big(\frac{|aa\downarrow\downarrow\rangle - |aa\uparrow\uparrow\rangle}{\sqrt{2}} + \frac{|a\downarrow\downarrow a\rangle - |a\uparrow\uparrow a\rangle}{\sqrt{2}} + \frac{|\downarrow\downarrow aa\rangle - |\uparrow\uparrow aa\rangle}{\sqrt{2}} + \\
&\quad \frac{|a\downarrow a\downarrow\rangle - |a\uparrow a\uparrow\rangle}{\sqrt{2}} + \frac{|\downarrow a\downarrow a\rangle - |\uparrow a\uparrow a\rangle}{\sqrt{2}} + \frac{|\downarrow aa\downarrow\rangle - |\uparrow aa\uparrow\rangle}{\sqrt{2}}\Big) \\
|2\rangle &= |aaaa\rangle
\end{aligned}$$

の基底が張る3次元のヒルベルト空間で考えれば良い事になる。

イジング相互作用

続いて、この基底でイジング相互作用を展開していく。イジング相互作用はqubitの中でも $|\downarrow\downarrow\rangle$ の方にだけ印加するので、J_x 方向の射影成分で議論を続けるのは難しい。そこで、この基底での表示を J_z 方向に変換する。z方向の基底の場合、スピンは直接 $|\downarrow\downarrow\rangle, |\uparrow\rangle$ が表式に現れるので計算が少しマシになる。少々複雑な計算の後に

$$|J_{max}, 0, 1\rangle_{am} = \sum_{m=-J_{max}}^{J_{max}} p(J_{max}, m)\, |J_{max}, J_z = m, 1\rangle_{am} \tag{5.17}$$

$$p(n,m) \equiv \frac{1}{2^n}\sqrt{\frac{{}_{2n}\mathrm{C}_n}{{}_{2n}\mathrm{C}_{n-m}}} \sum_{i=0}^{n-m} (-1)_n^{n-m-i} \mathrm{C}_{n-m-i} \cdot {}_n\mathrm{C}_i \tag{5.18}$$

と計算できる。

この関係を利用し、$|\downarrow\rangle$ と $|a\rangle$ との間のイジング相互作用の効果を計算していく。角運動量状態 $|J_{max}, m, 1\rangle_{am}$ は $J_{max} - m$ 個のスピンが $|\downarrow\rangle$ 状態にいる状態であるため、その部分だけがアンシラ状態 $|a\rangle$ と結合するとして計算してよい。そこで、一般に p 個のイオンがイジング相互作用しているとしたときの行列要素をまず用意しておく

$$V_{lk}^{(p)} \equiv J_{am} \langle J_{max} = p/2, J_z = l| \hat{J}_x^2 |J_{max} = p/2, J_z = k\rangle_{am} \tag{5.19}$$

すると、全体の内 $|\uparrow\rangle$ 状態にあるイオンだけを除いた他のイオンがこの行列要素を通じてイジング相互作用するというように考える事が出来て、かなり複雑な計算の後に

$$\begin{aligned} & H_{\lambda,\lambda} \\ = & \sum_{j=0}^{J_{\max}} |\, p(J_{\max}, J_{\max} - 2j)\,|^2\, V_{J_{\max}-2j, J_{\max}-2j}^{(2N-2j)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & H_{\lambda,\lambda-1} \\ = & \sum_{j=0}^{J_{\max}-1} |p(J_{\max}, J_{\max} - 2j) p(J_{\max} - 2, J_{\max} - 2j - 2)| \\ & \times V_{J_{\max}-2j-2, J_{\max}-2j}^{(2N-2j)} \end{aligned}$$

とハミルトニアンの行列要素を直接書き下すことができる。ここで $H_{\lambda',\lambda} \equiv \langle\lambda'|\, \hat{H}_{eo}\, |\lambda\rangle$ とした。

あとはこのハミルトニアンを用いて自由に計算することができる。

ハミルトニアン具体例-2 つの場合

イオンが 2 個の場合、基底は $\{|0\rangle, |1\rangle\} = \{|T\rangle, |aa\rangle\}$ [5]であり、前章で計算しものと同じ実効ハミルトニアン

$$H_{eff} = \begin{pmatrix} J/4 & -J/4/\sqrt{2} \\ -J/4/\sqrt{2} & J/8 \end{pmatrix} \tag{5.20}$$

が再現する。

ここで、対角成分が一致していない事に着目する。対角成分の不一致は相互作用の離調に対応するので、このままではイジング相互作用が若干離調のついたも

[5]前章と同様に $|T\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow\uparrow\rangle - |\downarrow\downarrow\rangle)$ である。

のになる。そこで、イジング相互作用に離調を与えるため、MS gateの2本のレーザーの平均周波数を原子の共鳴周波数から少しずらす。この離調はイジング相互作用の離調に対応する。2本の光の周波数を $\{\omega+\nu+\delta/2, \omega-\nu+\delta/2\}$ とする。すると、イジング相互作用の実行的ハミルトニアンは

$$H_{eff} = \begin{pmatrix} J/4-\delta & J/4/\sqrt{2} \\ J/4/\sqrt{2} & J/8 \end{pmatrix} \tag{5.21}$$

となり、離調 δ をうまく調整することで共鳴条件を満たすことができる。

ハミルトニアン具体例—4つの場合

4個の場合、同様に実効ハミルトニアンを計算する。基底は前節の通りで、

$$H_{eff} = \begin{pmatrix} J/2-2\delta & J\sqrt{3}/4 & 0 \\ J\sqrt{3}/4 & J7/8-\delta & J/2/\sqrt{2} \\ 0 & J/2/\sqrt{2} & J/4 \end{pmatrix} \tag{5.22}$$

のように計算できる。

この場合、うまく共鳴条件に合わせる事が出来ず、確率1ではDicke状態生成はできない。一般に、4個以上の場合には複数の状態間の遷移振幅の干渉により、端の状態から端の状態まで完全には移動しない。つまりこの相互作用をただ印加しただけではDicke状態を作る事ができない。

断熱操作

しかしこのような多重準位が現れる場合に、Rapid Adiabatic Passage(RAP)と呼ばれる断熱的な手法[92]による状態生成が有効である事が知られている。系の一つの固有状態に状態を用意しながら断熱的に異なる状態へと変化させ、最終的に望みの状態を生成する手法である。今、$\delta \to -\infty$ の極限で $|aa\ldots a\rangle$ が固有状態である事に注目し、離調をゆっくりと $\delta \to \infty$ へと変化させその時の対応する固有状態 $|\mathrm{D}^n_{2n}\rangle$ を生成する。

具体例として16個の場合に固有エネルギーを離調の関数として図5.1に載せる。対応する固有状態が一つの線で結ばれており、Dicke状態の生成ができる事が分かる。

ここで、断熱条件に面白い特性が現れている。一般に断熱条件は、遷移しうる状態間でエネルギーが最も近づいたときにそのエネルギー差の逆数程度よりもゆっくりとパラメータを変化させることで守られる。RAPには固有状態だけを考えた

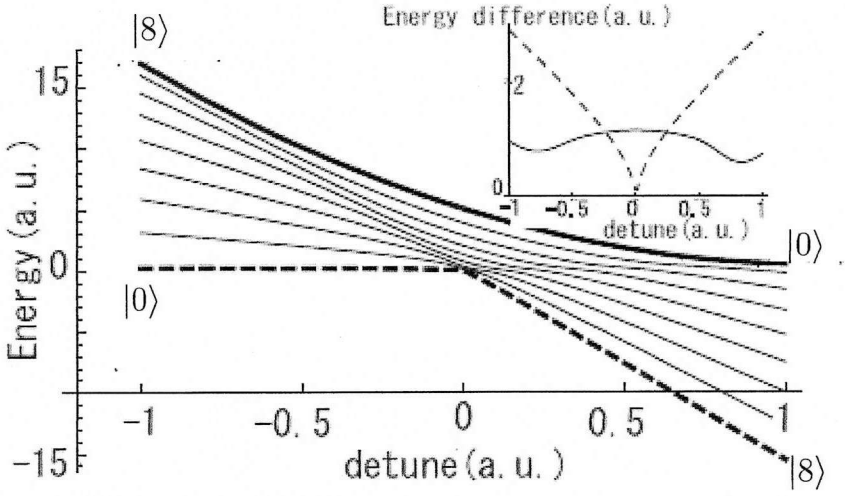

図 5.1: RAP による状態生成
横軸は離調、縦軸は固有エネルギーである。離調を変化させると断熱的に状態が Dicke 状態へとうつっているのが分かる。サブセットは最もエネルギーが高い状態と一番近い状態との間のエネルギー差（実線）と最もエネルギーが低い状態と一番近いエネルギー状態間のエネルギー差（点線）を示している。

場合、離調を増やす方法と減らす方法の２通りが可能であるが、それぞれ他の状態がエネルギー的に最も近づいた時のエネルギーの差の値がかなり異なる (図 5.1 サブセット)。これは、ハミルトニアンの非線形性による。離調を減らす場合は最大励起状態を、離調を増やす場合は基底状態をそれぞれ利用した断熱過程となるが、ハミルトニアンが非線形な場合、最大励起状態と基底状態は置かれた状況が劇的に異なる。ハミルトニアンの非線形性により、共鳴時において、励起状態間のエネルギー差は基底状態間にそれに比べ大きくなる。その結果、励起状態を経た断熱過程の方が断熱条件を満たしやすくなり、図 5.1 サブセットのような非対称性が現れる。

実際に、励起状態をたどった時の断熱過程の時間発展を図 5.2 に載せる。Dicke 状態の生成ができている事が分かる。

5.1.3 Dicke 状態生成２

Dicke 状態の生成方法をもう一つ提案する[6]。

[6]話が少し前後するが、Dicke 状態生成方法 1 は実験的には 4 個以上の対しては失敗した。そこで、その代替案としてより安定な生成方法を考えたのが本節の方法である。ほぼすべてにおいてこ

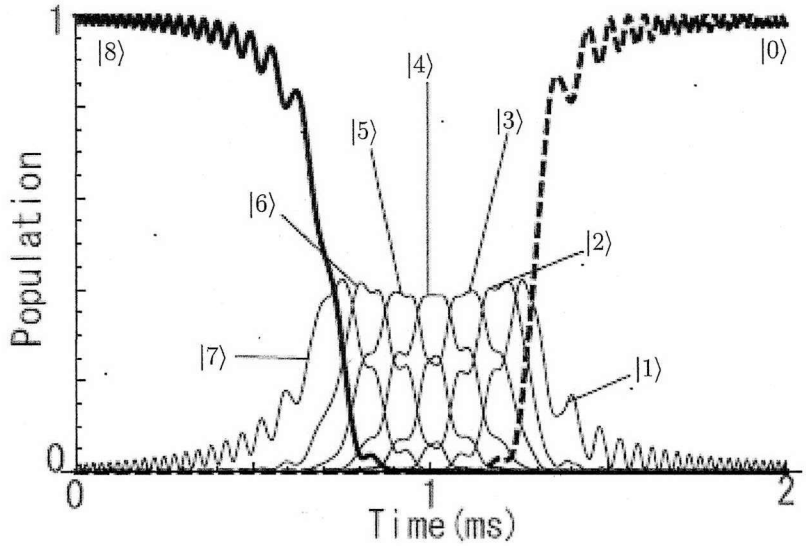

図 5.2: RAPによる状態生成時間発展
横軸は時間、縦軸はそれぞれのポピュレーション。

本論文でのSTIRAPゲートでも用いたようにSTIRAPは高い忠実度での状態操作が比較的容易である。そこで、サイドバンドのSTIRAPを考えてみる。そのために、サイドバンド遷移に対する暗状態を考える。まず、レッドサイドバンド遷移はスピンを励起しながらフォノンを1つ減らす結合であるから、振動基底状態まで冷やされた基底状態のイオンはレッドサイドバンド遷移に対して暗状態となる。同様に、振動基底状態まで冷やされた励起状態のイオンはブルーサイドバンドに対して暗状態になっている。ゆえに、レッドサイドバンド遷移とブルーサイドバンド遷移をラマン的に用いて断熱的に強度を変化させることで、振動状態を介したSTIRAPによる状態変化を行う事ができる。では、この振動状態を介したSTIRAPの途中の量子状態はどうなっているのであろうか。以下では、このような振動量子状態を用いたSTIRAPによる操作がはspin squeezingに対応し、その途中にDicke状態が現れる事を示す。

ちらの生成方法2の方が1に比べ良い。

multi-level STIRAP

考えるハミルトニアンは

$$\hat{H} = \frac{\eta\Omega_r(t)}{2}(\hat{a}\hat{J}_+e^{-i\delta_r t} + \hat{a}^\dagger\hat{J}_-e^{i\delta_r t}) + \frac{\eta\Omega_b(t)}{2}(\hat{a}^\dagger\hat{J}_+e^{i\delta_b t} + \hat{a}\hat{J}_-e^{-i\delta_b t}) \tag{5.23}$$

である。ここで、それぞれのサイドバンド遷移からの離調 $\delta_{b,r}$ を、レーザーの周波数 ω_L、原子のキャリア遷移周波数 ω_0、サイドバンド周波数 ν に対し $\delta_{b,r} = \pm\omega_L \mp (\omega_0 \pm \nu) > 0$ とした[7]。また、時間に依存するサイドバンドラビ振動数を $\eta\Omega_{b,r}(t)$ とする。$\hat{a}^\dagger, \hat{a}$ は考えている COM モードのフォノンに関する生成消滅演算子で、スピン演算子はこれまでと同様に $\hat{J}_\pm = \sum_i \hat{\sigma}_\pm^{(i)}$ である。

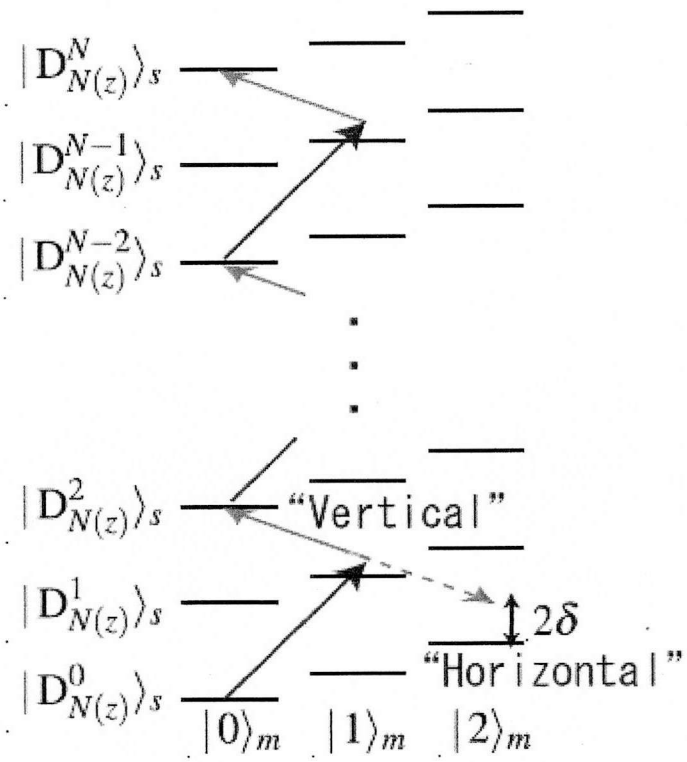

図 5.3: サイドバンド STIRAP 相互作用図
サイドバンド遷移による結合の代表的なものを書いた。ここで横へ延びるラマン遷移を"Horizontal"ラマン遷移、縦に伸びるラマン遷移を"Vertical"ラマン遷移とした。

[7]ここで、$\delta_{b,r} > 0$ と制限したことには意味がある。先の考察で infidelity を考える部分でこの制限の意味を述べる。

これらの相互作用を低フォノン状態についてのみ一つの図に表したのが図5.3である。ここでは、前節の対称性の議論と同様に完全対称な状態のみの部分空間に限定し、相互作用の基底として $|\mathrm{D}^m_{N(z)}\rangle_s\,|n\rangle_p$ を選んだ。$|\mathrm{D}^m_{N(z)}\rangle_s$ はz方向のスピンに関する(半数励起以外も含んだ)Dicke状態で、$|n\rangle_p$ は振動モードに関するフォック状態である。なお、後のためにここではDicke状態の方向を明示した。

さて、この図で結合しうるラマン遷移を考えてみると、スピンが2つフリップする"Vertical"ラマン遷移と、フォノンが2つ変化する"Horizontal"ラマン遷移がある。"Vertical"ラマン遷移が一番上の状態まで綺麗に結ぶために以下ではイオンの数は偶数に限定する[8]。ここで、サイドバンド遷移の1光子離調を $\delta = \delta_b = \delta_r$ とすると、それぞれのサイドバンド遷移で同じ大きさで異なる方向に離調をとることで"Vertical"ラマン遷移に対して共鳴するような条件にすることができる。この時、"Horizontal"ラマン遷移に対しては 2δ の2光子離調がつく。今、$\delta > \eta\Omega_r, \eta\Omega_b$ とすると、離調のついた"Horizontal"ラマン遷移の影響を無視することができ、すると図5.3はひとつながりのmulti-levelラマン遷移とみなすことができる。multi-levelのラマン遷移を使ったSTIRAPには理論の先行研究[97, 98]があり、その書式に倣ってハミルトニアンを書き換えてみる。ハミルトニアンから時間依存性を消すため、$\hat{U} = \exp(I\delta\hat{a}^\dagger\hat{a}t)$ による回転座標系に移る[9]と、$H_I = -I\hat{U}^\dagger\frac{d\hat{U}}{dt} + \hat{U}^\dagger\hat{H}\hat{U}$ より、ハミルトニアンは"Vertical"ラマン遷移でつながる状態だけを集めた基底で

$$H_I = \begin{pmatrix} 0 & R_0\eta\Omega_b & 0 & & \cdots & 0 \\ R_0\eta\Omega_b^* & \delta & R_1\eta\Omega_r & & & 0 \\ 0 & R_1\eta\Omega_r^* & 0 & & & 0 \\ 0 & 0 & R_2\eta\Omega_b^* & & & 0 \\ \vdots & & & \ddots & & \vdots \\ 0 & & & & \delta & R_{N-1}\eta\Omega_r \\ 0 & & \cdots & & R_{N-1}\eta\Omega_r^* & 0 \end{pmatrix}$$

と書ける。ここで $\{|\mathrm{D}^0_{N(z)}\rangle_s|0\rangle_p, |\mathrm{D}^1_{N(z)}\rangle_s|1\rangle_p, |\mathrm{D}^2_{N(z)}\rangle_s|0\rangle_p \ldots, |\mathrm{D}^N_{N(z)}\rangle_s|0\rangle_p\}$ を基底とし、以下で具体的な表式を与える R_m はDickeの理論による協調現象におけるラビ振動数の増幅の係数である。この行列は先行研究[97]のハミルトニアンと同じ形をしている。なお、先行研究[97]ではすべてのラマン遷移が独立であるとして計算していたが、今の場合はそれぞれはレッドサイドバンドとブルーサイドバンドの2種類に分類できるため、独立ではない。しかし、それぞれの状態は R_m であらわされるDickeの協調効果によって異なった強さでサイドバンドと結合

[8] この手法も方法1と同様に偶数個の場合にのみ成立する。

[9] この回転系は2つのサイドバンド遷移を励起する光の同時回転系であるということができる。2つの光の離調が等しいことで同時回転系が存在する。

している。協調効果だけをあらわに書けば、

$$R_m \equiv_s \langle \mathrm{D}^{m+1}_{N(z)} \mid \hat{J}_+ \mid \mathrm{D}^{m}_{N(z)} \rangle_s = (N-m)\sqrt{\frac{{}_N\mathrm{C}_m}{{}_N\mathrm{C}_{m+1}}}, \tag{5.24}$$

となる。

このハミルトニアンの暗状態 $|\psi_d(\Omega_r, \Omega_b)\rangle$ は、それぞれの遷移振幅がキャンセルするようにうまく振幅を決めることで簡単に計算できて、

$$|\psi_d(\Omega_r, \Omega_b)\rangle = A \sum_{i=0}^{N/2} C_i \Omega_b^i \Omega_r^{N/2-i} \, |\mathrm{D}^{2i}_{N(z)}\rangle_s \, |0\rangle_p, \tag{5.25}$$

$$C_0 = 1 \tag{5.26}$$

$$C_i = (-1)^i \prod_{j=1}^{i} \frac{R_{2j-2}}{R_{2j-1}}, \tag{5.27}$$

となる。

Dicke 状態

ここで、式5.24を利用して、２つのサイドバンド遷移強度が等しい時の暗状態に $\hat{J}_x$ を作用させてみると、簡単な計算の後で

$$\hat{J}^2 \, |\psi_d(\Omega, \Omega)\rangle = \frac{N}{2}(\frac{N}{2}+1) \, |\psi_d(\Omega, \Omega)\rangle \tag{5.28}$$

$$\hat{J}_x \, |\psi_d(\Omega, \Omega)\rangle = 0 \tag{5.29}$$

となり、この暗状態は角運動量演算子の同時固有状態であり、かつその固有値は0である事が分かる。定義よりこのような状態はDicke状態である。つまり、

$$|\psi_d(\Omega, \Omega)\rangle = |\mathrm{D}^{N/2}_{N(x)}\rangle_s \, |0\rangle_p \tag{5.30}$$

とわかる。なお、$|\mathrm{D}^{N/2}_{N(x)}\rangle$ はx方向のDicke状態であり、y方向の回転演算子 $\hat{R}_y(\theta)$ を用いて、

$$|\mathrm{D}^{N/2}_{N(x)}\rangle = \hat{R}_y(\frac{\pi}{2}) \, |\mathrm{D}^{N/2}_{N(z)}\rangle \tag{5.31}$$

と書ける。

スピンスクイージング

暗状態の表式5.25を見ると、STIRAPの強度変調をすることでスピンのペアフリップが起きている事が分かる。これは、それぞれのラマン遷移が2つのスピンを同時にフリップさせるような働きを持っている事から自然である。ところで、よく知られているように量子光学においてスクイーズ演算子は $\hat{a}^\dagger\hat{a}^\dagger + \hat{a}\hat{a}$ と書ける [73]。そのため、このようなスピンのペアフリップは光のスクイーズ操作とのアナロジーからスピンスクイーズ操作に対応する [74]。なぜならば、スピンの集団昇降演算子

$$\hat{J}_\pm = \sum_i \hat{\sigma}_\pm^{(i)} \tag{5.32}$$

を定義すると、これらの演算子はボソンの交換関係を満たし、さらに今のSTIRAPによる状態変化は $\hat{J}_+\hat{J}_+ + \hat{J}_-\hat{J}_-$ と書けるからである。

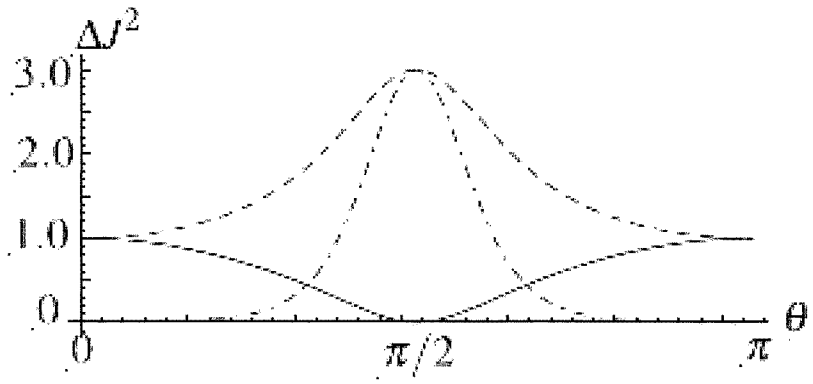

図 5.4: multi-level STIRAP とスピンスクイージング
STIRAP 中でのスピンのノイズについて θ の関数でプロットした。実線、点線、2重点線の順に x,y,z 方向のノイズを表している。

この性質をあらわに見るために、4 ionの場合を例にとり、スピンノイズに関する計算をしてみる。4 ionに対し、サイドバンドをそれぞれ $\Omega_b = 1 - \cos\theta, \Omega_r = 1 + \cos\theta$ と θ をパラメータにして強度変調する。その時の各方向に対するスピンのノイズをプロットしたものが図5.4である。スピンのノイズはそれぞれ

$$\Delta J_i^2 = \langle J_i^2 \rangle - \langle J_i \rangle^2 \tag{5.33}$$

で定義してある。

$\theta = 0$ からDicke状態が生成される $\Omega_r = \Omega_b$ まではx方向のノイズが圧搾され、他の方向についてはノイズが増幅されているのが分かる。続いて、$\Omega_r = \Omega_b$ を満

たすときはx方向のノイズが0になり、Dicke状態が生成されている。その後は逆にノイズが圧搾・増幅され、元のコヒーレント状態へと戻っていく[10]。

量子シミュレーション的理解

これまでのSTIRAPによるDicke状態の生成方法は量子シミュレーション的に理解できる。一般にハミルトニアンの基底状態を探す方法として、そのハミルトニアンとは交換しない補助的な相互作用を印加し、その補助的な相互作用を静かに取り除く方法がある。量子シミュレーションの中でも、特にこのような手法を量子アニーリング[99]と呼ぶ。以下では、考えている相互作用がイジング相互作用やXY相互作用になっている事を述べ、量子アニーリングによってDicke状態が生成される事を説明する。

考えるハミルトニアンは

$$\begin{aligned}\hat{H} = & \frac{\eta\Omega_r(t)}{2}(\hat{a}\hat{J}_+e^{-i\delta t} + \hat{a}^\dagger\hat{J}_-e^{i\delta t}) + \frac{\eta\Omega_b(t)}{2}(\hat{a}^\dagger\hat{J}_+e^{i\delta t} + \hat{a}\hat{J}_-e^{-i\delta t}) \\ + & \frac{\Omega_r(t)}{2}(\hat{J}_+e^{-i(\delta+\nu)t} + \hat{J}_-e^{i(\delta+\nu)t}) + \frac{\Omega_b(t)}{2}(\hat{J}_+e^{i(\delta+\nu)t} + \hat{J}_-e^{-i(\delta+\nu)t})\end{aligned} \tag{5.34}$$

であった。ここでは、後のためにキャリアからの影響を含めて書いた[11]。なお、νは振動の永年周波数である。第2章での議論より、このようにサイドバンド遷移から等しく反対に離調ととった2色の光は、イオンの集団振動を介して実効的なスピン間相互作用を誘起する。特に$\Omega_b = \Omega_r$で

$$\delta \gg \eta\Omega_{r,b} \tag{5.35}$$

が成り立っている時は、その相互作用はイジング型相互作用

$$\hat{H} = J\hat{J}_x\hat{J}_x \tag{5.36}$$

になる。

さてここで、$\Omega_b \neq \Omega_r$の場合、相互作用はどうなるであろうか。この時も上の場合と同様にハミルトニアンを変形してスピン依存力を導出すれば、ハミルトニアンのサイドバンド遷移部分を$\hat{H}_0$として、

$$\hat{H}_0 = A(\hat{a}^\dagger e^{i\delta t} + \hat{a}e^{-i\delta t})\hat{J}_x - B(i\hat{a}^\dagger e^{i\delta t} - i\hat{a}e^{-i\delta t})\hat{J}_y \tag{5.37}$$

[10]証明するには至っていないが、本節の断熱的なスクイーズ操作はスピン数無限大の極限において調和振動子におけるスクイーズと完全に等しくなるようである。実際に100個程度以上のスピンの場合、断熱過程による初期の変化は調和振動子のものとほとんど等しくなることが数値計算で確かめられた。

[11]このように書くと、STIRAP的な理解への場合でのキャリアからの影響が気になると思われる。実際に大きな影響を与えるわけだが、そのことは実験の考察で触れている。

となる。ここで、$A = \eta(\Omega_r + \Omega_b), B = \eta(\Omega_r - \Omega_b)$ である。つまり、二つの軸方向のスピンに依存して異なる位相の力が働く事が分かる。第2章の場合と同様に、それぞれの強制振動によってスピンは位相を獲得する事ができるので、その時間発展はXYモデル型ハミルトニアン

$$\hat{H}_0 = X\hat{J}_x\hat{J}_x + Y\hat{J}_y\hat{J}_y \tag{5.38}$$

と等価になる。ここで

$$X = \frac{(\eta(\Omega_r + \Omega_b)/2)^2}{4\delta} \tag{5.39}$$

$$Y = \frac{(\eta(\Omega_r - \Omega_b)/2)^2}{4\delta} \tag{5.40}$$

である。

また、キャリア遷移相互作用である後半部分 $\hat{H}_1$ について、$\Omega_{r,b} < \delta + \nu$ と仮定すれば、この項はACシュタルクシフトとして働く。よって、

$$\hat{H}_1 = \xi\hat{J}_z \tag{5.41}$$

である。ここで、$\xi = \frac{\Omega_r^2 - \Omega_b^2}{2(\delta+\nu)}$ はシュタルクシフトの大きさである。

よって、$\Omega_b \sim 0$ の場合ハミルトニアンは

$$\hat{H}_i = J_i(\hat{J}_x\hat{J}_x + \hat{J}_y\hat{J}_y) + \xi_0\hat{J}_z \tag{5.42}$$

となる。ここで $J_i = \frac{(\eta\Omega_r)^2}{16\delta}$、$\xi_0 = \frac{\Omega_r^2}{2(\delta+\nu)}$ とした。

今、考えている実験領域では、$J_i \ll \xi_0$ であるため、このハミルトニアンは「横磁場」の $\xi_0\hat{J}_z$ に支配されていると考えて良い。そのため、基底状態は $|J_z = -\frac{N}{2}\rangle$ である。これは、X,Y方向のスピン間相互作用の向きとは直交する横磁場方向に揃った状態であるため、「常磁性」状態と考える事ができる[12]。

続いて、$\Omega_b = \Omega_r$ の場合ハミルトニアンは

$$\hat{H}_f = J_f\hat{J}_x\hat{J}_x \tag{5.43}$$

である。ここで、$J_f = \frac{(\eta\Omega_r)^2}{4\delta}$ とした。このハミルトニアンの対称基底状態は $J_x = 0$ である。この状態は、ゼロ磁場でスピンが全体として揃っており横磁場方向に量子揺らぎが大きな状態である。この事から強磁性的な状態である事がわかる。さらに、その射影成分はすべての方向について0であり、Dicke状態である事が分かる。

こうして、サイドバンド遷移の強度を変調する事で、イジング型ハミルトニアンと、横磁場が加わったXY型ハミルトニアンがそれぞれ誘起される事が分かった。

[12]一般に、常磁性状態は外部磁場の方向に揃った相である。

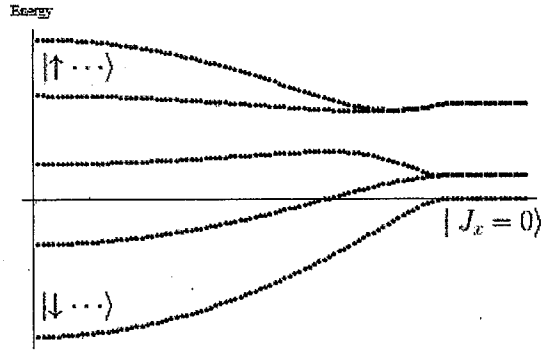

図 5.5: 量子アニーリングによる常磁性強磁性量子相転移
4qubit における常磁性・強磁性相転移の様子を見るため、ハミルトニアンの固有エネルギーを対称的な 5 つの固有状態に関してプロットした。サイドバンド遷移の強度変調は下のグラフのサブセットと同じである。基底状態を断熱的にたどる事で Dicke 状態に移る事が分かる。

STIRAP の過程では、まず $\Omega_b \sim 0$ で基底状態にある常磁性相状態 $|\downarrow\cdots\rangle$ が用意され、続いてゆっくりと補助的な相互作用と横磁場 $\hat{J}_y\hat{J}_y + \hat{J}_z$ を取り除くことで、状態は基底状態を維持しイジング型ハミルトニアンの強磁性相である Dicke 状態へと変化する。このように、量子アニーリング的に Dicke 状態が生成されている事が分かる。4qubit の場合に関して具体的に上で得られたハミルトニアンの固有エネルギーを計算した。結果を図 5.5 に載せる。

この常磁性・強磁性量子相転移を詳しくみるために、粒子数を変えた時の変化の様子を数値計算によって確かめた。図 5.6 がその結果である。qubit 数が増えるにつれて、変化が急峻になっており、定性的に量子相転移に近づいている事が分かる。

5.1.4 評価方法

Dicke 状態もエンタングルド状態の一つであるので、ベル状態と同様に忠実度による評価は有効である。しかしながら、Dicke 状態はベル状態と異なり、簡易に忠実度を測定する方法がない事が知られている。そのため、忠実度を決めるには量子フルトモグラフィを行わなければならない。だが量子フルトモグラフィは、個々のスピンに対する回転やたくさんの測定が必要であるため、技術的に（また多数の qubit を扱う場合は本質的に）難しい。そこで、今回は特に Dicke 状態の評価に有用な二つの手段を用いる。一つはウィットネス演算子による評価、もう一つは忠実度の下限を求める方法である。

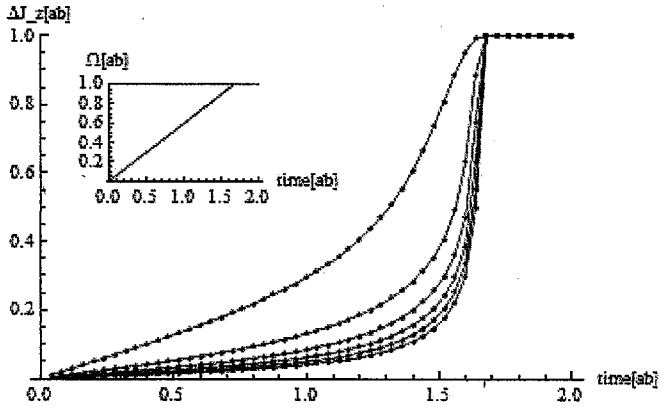

図 5.6: 量子アニーリングによる常磁性強磁性量子相転移個数依存性
縦軸はスピンの横磁場方向の規格化した量子ノイズの大きさで、横軸は時間である。2種類のサイドバンド遷移の強度を掃引した時の、常磁性相から強磁性相への相転移を表している。qubit数はそれぞれ変化が緩やかな順に（左から）4, 20, 36, 52, 68, 84である。サブセットはサイドバンド遷移の変調関数を表している。

ウィットネス演算子

一般にある物理量について、高々部分的にしかエンタングルメントを持っていない状態（バイセパラブルな状態）についての最大値（最小値）が存在するとき、その物理量の演算子をウィットネス演算子と呼ぶ。なぜならば、生成された状態のウィットネス演算子に対する期待値を測定した時、測定値がその最大値（最小値）を超えた（下回った）場合、その状態はバイセパラブル状態ではないという事ができ、生成された状態は系全体にわたるエンタングルメントを持っているという事ができるためである。ここでは慣例に倣い、特に符号や定数を適当に定め、全粒子がエンタングルしている時にだけ負になるようにウィットネス演算子を定義する。ウィットネス演算子自体はエンタングルメントを持っているか否かを評価するだけであるため、エンタングルド状態の型にはよらない。しかしながら、ある形のウィットネスを負にしやすいエンタングルド状態というのはあるため、どんなエンタングルド状態を評価したいかによって最適な選び方が異なる。

さて、Dicke状態の場合、ウィットネス演算子は

$$\hat{W}_{ij} \equiv \lambda\hat{1} - \hat{W}_{ij}^{(0)} \equiv \lambda\hat{1} - (\hat{J}_i^2 + \hat{J}_j^2) \tag{5.44}$$

と選べと評価しやすいことが知られている [82, 100, 101]。ここでは $\{i,j\}(i \neq j)$ は $\{x,y,z\}$ の内の2つとする。また、$\hat{J}_i = \sum_j \hat{\sigma}_i^{(j)}$ はi方向の集団スピン演算子である。また λ は粒子数に依存した定数である。

たとえば、x方向のDicke状態 $|\mathrm{D}_{N(x)}^{N/2}\rangle$ を判別したい場合、ウィットネス演算子は $\hat{W}_{yz}$ と選べばよい。なぜならば、x方向Dicke状態に対しては、

$$\hat{W}_{yz} = \lambda\hat{1} - (\hat{J}_y^2 + \hat{J}_z^2) = \lambda\hat{1} - (\hat{J}^2 - \hat{J}_x^2) = \lambda\hat{1} - \hat{J}^2 \tag{5.45}$$

となり、x方向のDicke状態に対しウィットネスが最小の値をとるからである。

では、4ionの場合に、バイセパラブルな状態が取りうる最小のウィットネスの期待値が0となるように λ を決定する。まず系全体が2個のエンタングルド状態2つに分かれる時、エンタングルしているペアとペアの間では相関がないことから別々に期待値を計算できるので、

$$\langle\hat{W}_{yz}^{(0)}\rangle = 2\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2 \tag{5.46}$$

$$\vec{v}_1 = (\langle\frac{\hat{S}_{y1}^2 + \hat{S}_{z1}^2}{2}\rangle, \langle\hat{S}_{y1}\rangle, \langle\hat{S}_{z1}\rangle, 1) \tag{5.47}$$

$$\vec{v}_2 = (1, \langle\hat{S}_{z2}\rangle, \langle\hat{S}_{y2}\rangle, \langle\frac{\hat{S}_{y2}^2 + \hat{S}_{z2}^2}{2}\rangle) \tag{5.48}$$

$$\tag{5.49}$$

と計算できる。ここで、$\hat{S}_{x1(y1)} = \hat{\sigma}_{x(y)}^{(1)} + \hat{\sigma}_{x(y)}^{(2)}$、$\hat{S}_{x2(y2)} = \hat{\sigma}_{x(y)}^{(3)} + \hat{\sigma}_{x(y)}^{(4)}$ とし、それぞれ前半二つと後半二つの集団スピン演算子である。

さらに、コーシーシュワルツの不等式より

$$\langle\hat{W}_{yz}^{(0)}\rangle \leq 2|\vec{v}_1||\vec{v}_2| = 2|\vec{v}_1|^2 \tag{5.50}$$

と計算できる。

ここで、新たに $\vec{v} \equiv (\langle\frac{\hat{S}_{y1}^2+\hat{S}_{z1}^2}{2}\rangle, \langle\hat{S}_{y1}\rangle, \langle\hat{S}_{z1}\rangle)$ を定義し、$\vec{v}$ のノルムの最大値を計算する。これは2ionのヒルベルト空間全体で探せば良いので簡単に代数的に計算できる。まず、内積の定義より、$\vec{n} = (n_1, n_2, n_3)$ をノルム1のvectorとして

$$|\vec{v}| = \mathrm{max}\vec{n} \cdot \vec{v} \tag{5.51}$$

と計算できる。

演算子の期待値の最大値は、その演算子の最大固有値に等しいので、

$$|\vec{v}| = \mathrm{max}\Lambda(n_1\frac{\hat{S}_{y1}^2 + \hat{S}_{z1}^2}{2} + n_2\hat{S}_{y1} + n_3\hat{S}_{z1}) \tag{5.52}$$

となる。ここで、$\Lambda(A)$ は行列 A の固有値を表す。

右辺は実際に行列の形で書き下す事ができるので、固有値を実際に計算できる。4つの固有値はそれぞれ

$$\lambda_1 = 0 \tag{5.53}$$

$$\lambda_2 = n_1/2 \tag{5.54}$$

$$\lambda_{3,4} = \frac{3n_1 \pm \sqrt{n_1^2 + 16n_2^2 + 16n_3^2}}{4} \tag{5.55}$$

となる。これらの固有値を $|\vec{n}| \leq 1$ の条件で最大化すると

$$|\vec{v}| \leq \sqrt{\frac{8}{5}} \tag{5.56}$$

となる。

以上より、

$$\langle \hat{W}_{yz}^{(0)} \rangle \leq 2|\vec{v}_1|^2 = 2(|\vec{v}|^2 + 1) = 5.2 \tag{5.57}$$

となる。

続いて、系全体が3粒子のエンタングル状態とそれと直積の1qubitのように分かれていたとする。このときも同様に計算すると、

$$\langle \hat{W}_{yz}^{(0)} \rangle = \langle \hat{S}_y^2 + \hat{S}_z^2 \rangle + 2\langle \hat{S}_y \rangle \langle \hat{\sigma}_y^{(4)} \rangle + 2\langle \hat{S}_z \rangle \langle \hat{\sigma}_z^{(4)} \rangle + \langle \hat{\sigma}_y^{(4)2} + \hat{\sigma}_z^{(4)2} \rangle \tag{5.58}$$

となる。ここで、$\hat{S}_{y(z)}$ はエンタングルドしている3つに対する集合スピン演算子である。

ここで、4番目のスピンについてはその期待値を単に実数のパラメータとして考え、$\{y_4, z_4\} = \{\langle \hat{\sigma}_y^{(4)} \rangle, \langle \hat{\sigma}_z^{(4)} \rangle\}$ とする。すると、上の展開式の最大値はさきほどと同様に元の演算子の最大固有値と等しくなる。そこで、

$$\langle \hat{W}_{yz}^{(0)} \rangle \leq \max\Lambda(\hat{S}_y^2 + \hat{S}_z^2 + 2y_4\hat{S}_y + 2z_4\hat{S}_z) + \frac{1}{2} \tag{5.59}$$

と計算できる。あとはこの行列を $y_4, z_4 (y_4^2 + z_4^2 \leq 1)$ の2パラメータの行列として、最大固有値を探せば、

$$\langle \hat{W}_{yz}^{(0)} \rangle \leq 3 + \sqrt{3} + \frac{1}{2} \sim 5.23 \tag{5.60}$$

と計算できる。

以上より、系がバイセパラブルにある4qubitの系の場合、横スピンの大きさは

$$\langle \hat{W}_{yz}^{(0)} \rangle \leq 5.23 \tag{5.61}$$

という上限値を持つ。つまり、ウィットネス演算子を

$$\hat{W}_{yz} = 5.23 \cdot \hat{1} - \hat{W}_{yz}^{(0)} \tag{5.62}$$

と定義することで、生成された状態に対するウィットネスの期待値が負値になれば、その状態はバイセパラブルではない（=全体としてエンタングルしている）という事ができる。

忠実度

最初に述べたとおり、Dicke 状態に対しては量子フルトモグラフィをしなければ忠実度そのものを求めることはできない。しかし、その上限値と下限値は先ほど用いたウィットネス演算子の期待値と、あと一種類の全体に対する射影測定のみで求めることができる。

今、一般に偶数個 (2n) の Dicke 状態を生成したとして、その状態に対し、以下の二つの値を測定する。

$$W = \langle \hat{W}_{yz}^{(0)} \rangle = \langle J_y^2 \rangle + \langle J_z^2 \rangle = \langle J^2 \rangle - \langle J_x^2 \rangle \tag{5.63}$$

$$P = \{p_{-j_{\mathrm{M}}}, p_{-j_{\mathrm{M}}+1}, \ldots, p_0, \ldots, p_{j_{\mathrm{M}}}\} \tag{5.64}$$

ここで、$j_M(=n)$ は x 方向のスピンの最大値で、p_k は x 方向のスピンの値 k を持つ状態のポピュレーションである。

まず、系の密度行列全体を x 方向の角運動量状態で展開すると、

$$\rho_{\xi;j,j_x} =_{am} \langle \xi; J = j, J_x = j_x \mid \hat{\rho} \mid \xi; J = j, J_x = j_x \rangle_{am} \tag{5.65}$$

となる。ここで、前章と同様に ξ は縮退を解くための指標である。こうすることで、上の P について

$$p_{j_z} = \sum_{j,\xi} \rho_{j,j_z,\xi} \tag{5.66}$$

と書きなおすことができる。ここで、完全対称状態 $\langle \xi; J = j_{\mathrm{M},j_x} \rangle$ は縮退がないので、$\xi = 1$ とする。その時、$\rho_{j_{\mathrm{M}},0,1}$ の値はそのものが Dicke 状態への忠実度 F を表している事に注意する。

まず、密度行列の対角成分は負にはならない事を利用し、p_0 について

$$p_0 = \sum_{j,\xi} \rho_{j,0,\xi} \geq \rho_{j_{\mathrm{M}},0,1} = \mathrm{F} \tag{5.67}$$

と計算できる。よって、p_0は忠実度の上限値を与える。

次に下限値について、ウィットネス演算子はx方向の角運動量状態で対角化できるので、

$$
\begin{aligned}
W &= \sum_{j,j_z,\xi}(j(j+1)-j_z^2)\rho_{j,j_z,\xi} && (5.68)\\
&\leq \sum_{j,\xi}(j(j+1))\rho_{j,0,\xi}+\sum_{j,j_z\neq 0,\xi}(j_{\mathrm{M}}(j_{\mathrm{M}}+1)-j_z^2)\rho_{j,j_z,\xi} && (5.69)\\
&\leq \sum_{j,\xi}(j(j+1))\rho_{j,0,\xi}+\sum_{j_z}(j_{\mathrm{M}}(j_{\mathrm{M}}+1)-j_z^2)p_{j_z}. && (5.70)
\end{aligned}
$$

と計算できる。

さらに第一項について、

$$
\begin{aligned}
&\sum_{j,\xi}(j(j+1))\rho_{j,0,\xi} && (5.71)\\
&= j_{\mathrm{M}}(j_{\mathrm{M}}+1)\rho_{j_{\mathrm{M}},0,1}+\sum_{j\neq j_{\mathrm{M}},\xi} j(j+1)\rho_{j,0,\xi} && (5.72)\\
&\leq j_{\mathrm{M}}(j_{\mathrm{M}}+1)\rho_{j_{\mathrm{M}},0,1}+(j_{\mathrm{M}}-1)j_{\mathrm{M}}\sum_{j\neq j_{\mathrm{M}},\xi}\rho_{j,0,\xi} && (5.73)\\
&\leq j_{\mathrm{M}}(j_{\mathrm{M}}+1)\rho_{j_{\mathrm{M}},0,1}+(j_{\mathrm{M}}-1)j_{\mathrm{M}}(p_0-\rho_{j_{\mathrm{M}},0,1}). && (5.74)
\end{aligned}
$$

となる。

以上の関係をまとめると、

$$
\frac{W}{2j_{\mathrm{M}}}-\frac{j_{\mathrm{M}}-1}{2}p_0-\sum_{j_x\neq 0}\left(\frac{j_{\mathrm{M}}+1}{2}-\frac{j_z^2}{2j_{\mathrm{M}}}\right)p_{j_x}\leq \mathrm{F}. \qquad (5.75)
$$

と計算でき、忠実度の下限値を求める事が出来た。

5.2 実験1 Dicke状態生成1

イジング相互作用とドレス場を組み合わせた方法による Dicke 状態の生成実験について記述する。

5.2.1 2ion

2ion については、前章の実験でも生成に成功している。そこで、本章では続いてその状態を用いた精密測定に関する実験について述べる。

本章理論の部分で述べたように、Dicke 状態は

$$V(\phi) = \langle \mathrm{D}^1_{2(x)} | \, e^{i\hat{J}_y\phi} \hat{J}_z^2 e^{-i\hat{J}_y\phi} \, | \mathrm{D}^1_{2(x)} \rangle \tag{5.76}$$

を物理量ととることで、ϕ に対する量子標準限界を超えた測定が可能となる。ここでは生成される状態に則し、x 方向の Dicke 状態 $|\mathrm{D}^1_{2(x)}\rangle$ を使った。

状態を生成したのちに、位相 ϕ の $\pi/2$ パルスを照射し、最後に z 方向のスピンの二乗をシェルビング法を使って測定する。パルスシークエンスと結果を図 5.7 に載せる。図 5.7(b) にて、綺麗な V の位相 ϕ による変化が見られている。このデータから

$$\delta\phi = \frac{\Delta V}{\partial V/\partial\phi} \tag{5.77}$$

を計算すると、図 5.7(c) のようになり、量子標準限界 $\delta\phi = 1/\sqrt{2}$ を超えた精度での測定ができている事が分かる。

5.2.2 4ion

理論部分において、生成方法 1 の場合は 4 個以上の Dicke 状態生成には RAP を使わなければならない事を指摘した。しかしながら、少数個の場合には RAP を使わない事による忠実度の損失が少ないので、本節では RAP を使わずに、CW のパルスによる生成に挑戦をする。

しかしながら、結論から言うとこの方法による 4ion を用いた Dicke 状態生成には成功しなかった[13]。ここではこの生成方法に必要な 4ion の近共鳴 MS ゲートと J 結合の結果を載せるにとどめる。

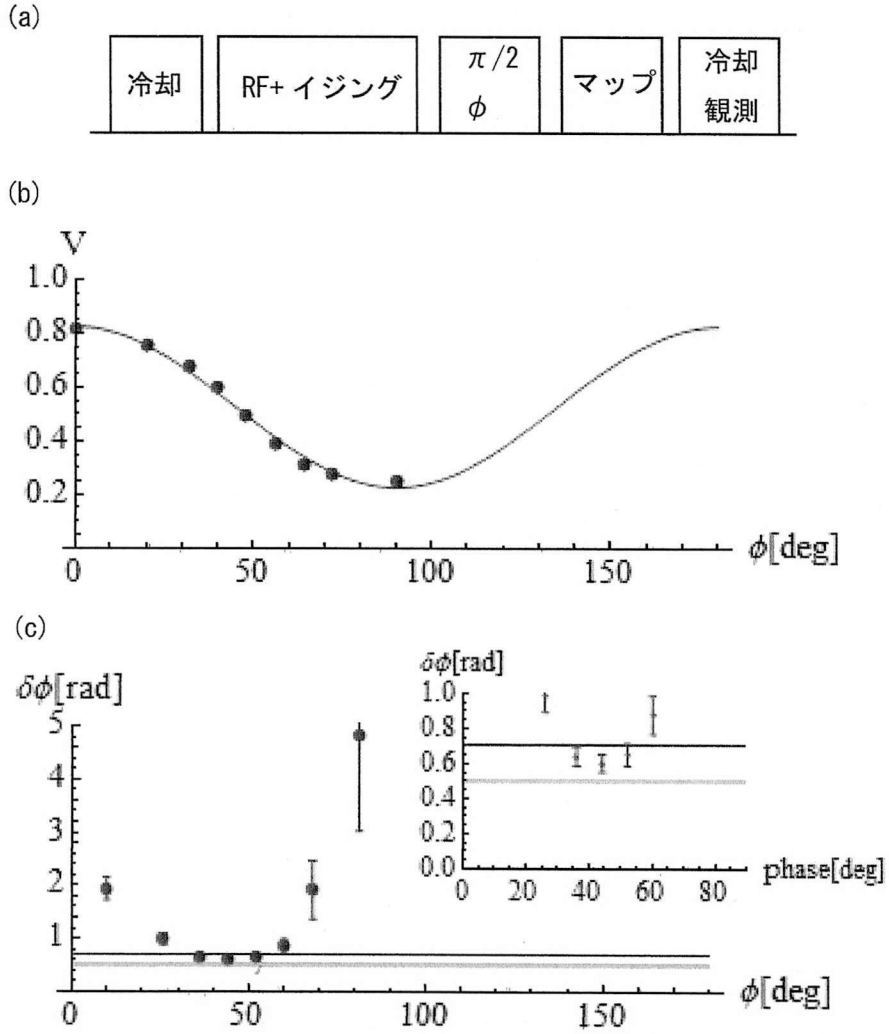

図 5.7: Dicke状態を用いた精密測定

(a) パルスシークエンス。状態生成後に位相ϕのパルスを照射し、その位相を変化させて、Vの変化を見た。(b)Vの位相ϕ依存性。振動の半周期しかとれていないが、Vが位相によって変化しているのが分かる。(c)Vを用いて位相ϕを見積もった時のエラーの大きさ。高い直線が量子標準限界$1/\sqrt{2}$を表し、低い直線がハイゼンベルグ限界1/2を表す。サブセットが測定精度が高い部分に注目したグラフである。エラーバーを越えて量子標準限界より精度が上がっている事が分かる。なお、これらの実験は一点あたり10000回ずつ測定している。

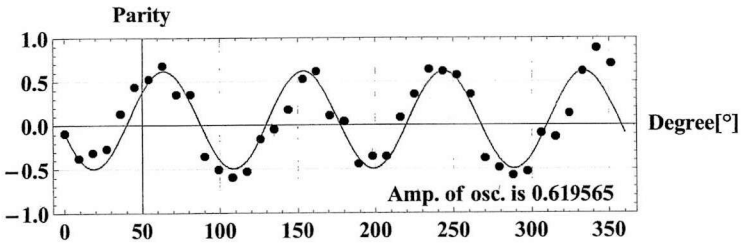

図 5.8: 4ionMS ゲートによる GHZ 状態生成
4ion の MS ゲートを用いて生成した 4ionGHZ 状態のパリティ振動。実線はフィッティングで、振幅は 0.62 である。

4ion MS ゲート

まず、サイドバンド周波数に対し 2 倍の離調をとった近共鳴の MS ゲートを用いた GHZ 状態生成の結果は図 5.8 である。この時のサイドバンドラビ周波数は 9kHz であり、離調は 18kHz にした。図 5.8 では 4 倍周期のパリティ振動が観測されており、4ionGHZ 状態の特徴を示唆している。同時に対角成分については $\{j_{-2}, j_{-1}, j_0, j_1, j_2\} = \{0.34, 0.07, 0.09, 0.04, 0.45\} \pm \{0.05, 0.03, 0.03, 0.02, 0.05\}$ と測定され、これらから

$$F = \frac{0.62 + 0.79}{2} = 0.71 \pm 0.08 > 0.5 \tag{5.78}$$

と計算する事ができる。GHZ 状態に関しては忠実度が 0.5 を超えている事で N 体のエンタングルメントを主張する事ができるため、この結果から MS ゲートによる 4ionGHZ 状態の生成に成功したという事ができる。

4ion J 結合

MS ゲートの離調を大きくし、振動モードの実励起を抑えた相互作用は近似的にスピン間相互作用 (J 結合) のように扱う事ができる [15]。Dicke 状態生成方法 1 ではこの相互作用を用いて Dicke 状態を生成するため、前節の近共鳴 MS ゲートに加えて離調を大きくとったスピン間相互作用の領域でも同様に GHZ 状態が作れなくてはならない。サイドバンドラビ振動数 9kHz に対し、離調を 60kHz まで大きくとった時の J 結合による GHZ 状態の生成を行った。生成された状態のパリティ振動が図 5.9 である。わずかではあるが振幅 0.14 で 4 倍周期の振動をしている事がわかる。

[13]RAP での生成実験のためには、まずはイジング相互作用単独での RAP ができなければならない。しかしながら、予備実験であるそれすら成功するには至らなかった。

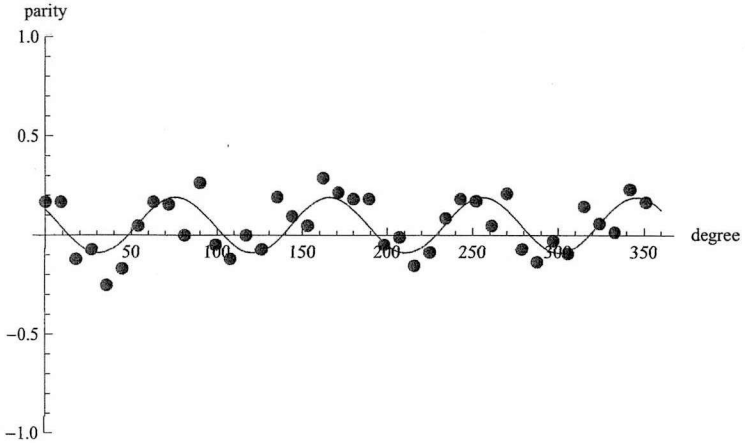

図 5.9: 4ionJ結合によるGHZ状態生成
4ionのJ結合を用いて生成した4ionGHZ状態のパリティ振動。実線はフィッティングで、振幅は0.14である。

5.3 考察と展望1

実験1に対する考察をする。

5.3.1 2ion精密測定

2ionを用いて量子標準限界を超える精密測定に成功した。本節では、エンタングルド状態を用いた精密測定の精度と、コヒーレント状態（スピン偏極状態）を用いた通常のラムゼー干渉による精密測定の精度とで、精密測定においてよく用いられるアラン分散を用いた比較を行う。実験結果より、アラン分散を計算したものが図5.10である。実験結果は、測定回数Nに対しては量子標準限界$1/\sqrt{N}$に沿って精度が上がっており、期待通りの振る舞いを示している。しかしながら、原子2個の完全なスピン偏極状態を用いた通常のラムゼー干渉による位相測定（図中赤点線）に対して精度の向上を観測することはできなかった。忠実度1でDicke状態を準備したときの測定精度は図中黒線で表されており、そこから忠実度が低い分だけ実験結果の測定精度が低くなっていると考えることができる。測定に量子相関を用いることができるエンタングルド状態を用いた精密測定は、完全な状態準備を仮定した場合には、通常の測定に対して高い精度での精密測定が可能である。しかし、実際に用意するエンタングルド状態は完全ではない。そのため、エンタングルド状態を用いた精密測定において、実際に通常の測定に比べて測定精度のゲインを得るためには、用意したエンタングルド状態がある程度高い忠実度

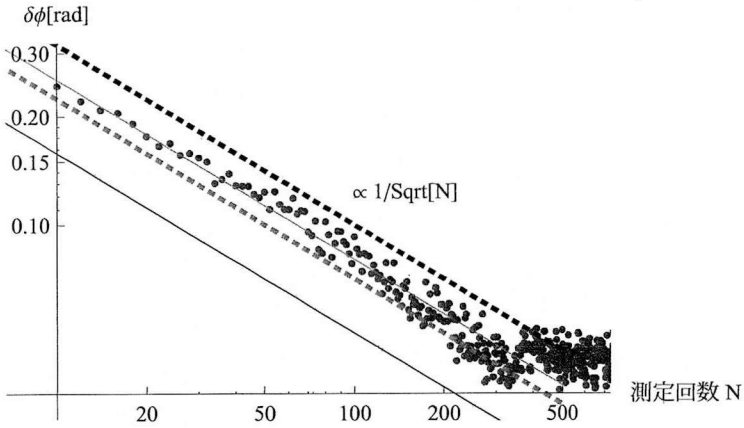

図 5.10: 2ionDicke 状態を用いた精密測定のアラン分散評価
精密測定において、一番傾きのある $\phi = 45$ 度の位置における推定位相 ϕ のアラン分散を測定回数 N に対してプロットした。またそれぞれ、濃い点線 $(1/\sqrt{N})$ が原子 1 個の、点線 $(1/(\sqrt{2N}))$ が原子 2 個の、完全なコヒーレント状態 (スピン偏極状態) を用いた通常のラムゼー干渉の位相測定精度を表している。直線 $(1/(2\sqrt{N}))$ は完全な 2ionDicke 状態による位相測定の精度（ハイゼンベルク限界）を表している。

を持っていなくはならないという事ができる。イオン 2 個の Dicke 状態の場合、およそ 0.75 以上の忠実度の状態を用意する事で通常のラムゼー干渉に対してゲインを持った精密測定が可能と見積もる事ができる。

5.3.2 4ion Dicke 状態生成

忠実度が足りなかった原因を考える。巻末にあるように、MS gate を用いた場合、個数に対する生成された GHZ 状態の忠実度の関係は、

$$F_n \sim 1 - \alpha n^2 \tag{5.79}$$

と類推することができる。

この事は以下のように理解できる。単一の qubit に対して位相シフト ϕ が発生したとすると、GHZ 状態 $(|\mathrm{GHZ}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow \ldots \uparrow\rangle + |\downarrow \ldots \downarrow\rangle))$ は

$$|\mathrm{GHZ}\rangle \to |\mathrm{GHZ}'\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(e^{in\phi}|\uparrow \ldots \uparrow\rangle + |\downarrow \ldots \downarrow\rangle) \tag{5.80}$$

と変化する。この結果位相シフトを受けた GHZ 状態と元の状態との間の忠実度は

$$|\langle \mathrm{GHZ}'|\,|\mathrm{GHZ}\rangle|^2 \sim 1 - \frac{n^2\phi^2}{2} \tag{5.81}$$

となる[21]。ゆえに全体としてはn^2に比例するような緩和が発生する事が分かる。しかしこれは最終状態の位相緩和のみを考えているので、生成プロセス全体の緩和を考えてはいない。実際、生成途中ではかなり複雑な緩和が起きていると考えられるが、生成されるまでの中間状態の多くが上記と同様な緩和を受けるとし、生成プロセス自体も個数に対しn^2で緩和が大きくなっていると考えることができる。

今回生成しようとした状態はDicke状態であるため、厳密には上の議論はそのまま成り立たない。しかしながら、生成に使っているMS gateの緩和は同様になると思われるので、n^2則をそのまま適用すると4個の場合に予想される忠実度は

$$\mathrm{F}_4 \sim 1-(1-0.68)(\frac{4}{2})^2 \sim -0.28 \tag{5.82}$$

となり、明らかに4ionのDicke状態を生成するには忠実度が足りていない事が分かる。

次節以降で詳しく述べるように、4ionの場合Dicke状態のエンタングルメントを保証するには忠実度は0.67が必要であるので、これを超えるためには、少なくとも2個の場合の忠実度として

$$\mathrm{F}_2 > 0.92 \tag{5.83}$$

程度で状態生成ができていなければならない。

現状において、通常のMS gateによる2ionのエンタングルド状態の忠実度が約0.92であるため、MS gateを他のものと組み合わせた手法ではこの閾値は超える事ができないと言える。そこで、4個以上のDicke状態を生成するには、現在MS gateの忠実度を制限していると思われるレーザー線幅の狭窄化か、さらに高忠実度での状態生成方法を確立しなければならない。

5.4 実験 2 Dicke 状態生成 2

multi-level STIRAP を用いた Dicke 状態生成実験の結果を記述する。

5.4.1 2ion

まずは 2ion を用いた予備実験を行った。2ion をトラップし、COM モード（永年周波数 1MHz）のみを振動基底状態まで冷却し、その他のモードはドップラー冷却のみで冷やした。この時の平均フォノン数は $\langle \hat{n}_{\mathrm{COM}} \rangle \sim 0.02$ である。続いて、COM モードから少し離調をとったレッドサイドバンド遷移の 729 レーザーを照射し、暗状態を生成した。

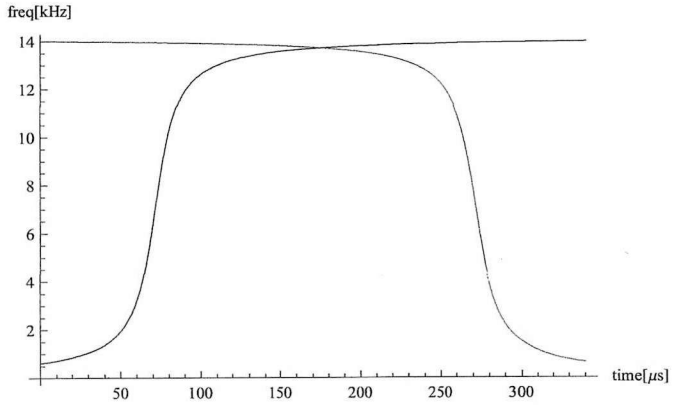

図 5.11: 2ionDicke 状態生成のサイドバンド遷移強度掃引時間波形
STIRAP のためのサイドバンド遷移の時間波形をプロットする。$t = 0$ ではレッドサイドバンド遷移が強くなるようにし、続いてブルーサイドバンド遷移を少しずつ強くしていく。

レッドサイドバンド遷移を弱めながらブルーサイドバンド遷移を強くし、multi-level STIRAP を誘起する。最大のサイドバンドラビ周波数は 14kHz で、離調は $\delta = 2\pi \times 30\mathrm{kHz}$ である。また、掃引の時間波形は考察の infidleity の節で述べるようにシュタルクシフトの効果を最小限に抑えるように掃引しなくてはならない。実験に用いた掃引時間波形は図 5.11 である。

このとき STIRAP により状態は

$$|\downarrow\downarrow\rangle \rightarrow |\mathrm{D}^1_{2(x)}\rangle \rightarrow |\uparrow\uparrow\rangle \tag{5.84}$$

と変化する。

生成される状態 $|\mathrm{D}^1_{2(x)}\rangle$ はベル状態の一つなので、GHZ状態と同様にパリティ振動による忠実度の評価が可能である。図5.12に生成された状態のパリティ振動

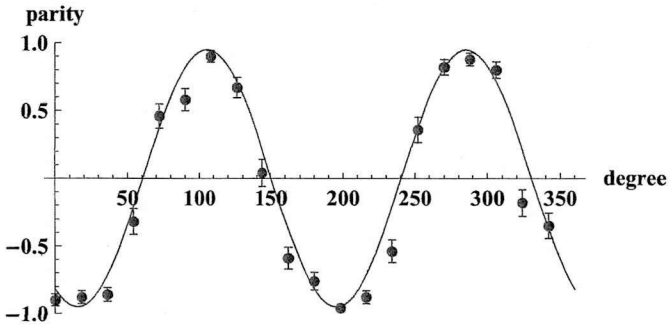

図 5.12: 2ionDicke状態のパリティ振動
2ionのDicke状態をSTIRAPにより生成し、生成された状態のパリティ振動を観測した。

の結果と、フィッティング結果を表す。パリティ振動の振幅はフィッティングより 0.96 ± 0.05 と測定できる。対角成分については、解析パルスなしの射影測定より $\{j_{-1}, j_0, j_1\} = \{0.516, 0.033, 0.451\} \pm \{0.011, 0.004, 0.011\}$ と測定できたため、両者の結果を合わせて、忠実度は

$$F = \frac{0.96 + 0.516 + 0.451}{2} = 0.96 \pm 0.03 \tag{5.85}$$

と計算できた。

5.4.2 4ion

4ion multi-level STIRAP

2ionと同様の手法を4ionに対して行った。基底状態まで冷やしたモードはCOMモードのみである。この時のフォノン数は2ionの時と同様に $\langle \hat{n}_{\mathrm{COM}} \rangle \sim 0.02$ である。2ionと同じようににサイドバンド遷移の光を強度変調し、multi-level STIRAPを誘起する。

この時の時間発展を図5.13に載せる。初期状態は $|\downarrow\downarrow\downarrow\downarrow\rangle$ であり、その角運動量のz方向射影成分は-2である。その後サイドバンド遷移の強度変調と共に、状態が断熱変化し、z方向の平均スピンが正に大きくなっていく事が分かる。

続いて、このmulti-level STIRAPがスピンスクイージングに対応している事を見るため、時間発展の途中の各方向のスピンノイズを測定した。結果を図5.14に載せる。時間発展に伴い、スピンノイズが断熱的に（アンチ）スクイーズされて

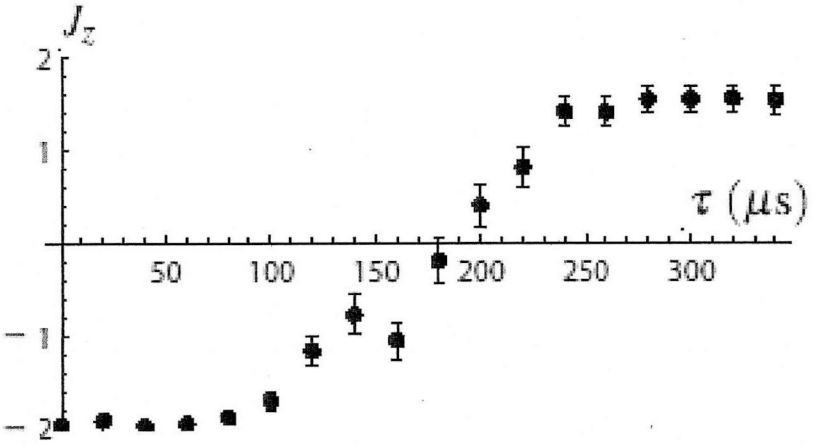

図 5.13: 4ion multi-level STIRAP の時間発展
multi-level STIRAP による量子状態変化の時間発展。

いく様子がよくわかる。Dicke 状態ができるているであろう $t \sim 170\mu$s において、x 方向のノイズが大きく圧搾されている事が分かる。

また、第 5.1.3 節で述べたようにこの生成方法は量子シミュレーションとして理解する事ができる。レッドサイドバンド遷移だけが入射されている状態は、量子スピンＸＹモデルとシュタルクシフトによる横磁場が有効磁場として印加されているモデルと等価である。よって、初期状態はＸＹモデルで有効磁場方向に偏極した状態と考える事ができる。有効磁場の方向に偏極している相は常磁性相と考える事ができる。続いて二つのサイドバンド遷移が等しくなった時、ハミルトニアンはイジングモデルと等価になる。さらに、この時はシュタルクシフトがキャンセルしているので、ゼロ磁場中のイジングモデルである。このイジングモデルの基底状態は Dicke 状態であり、第 5.1.3 節では量子シミュレーションという観点で断熱的に Dicke 状態が生成される事を説明した。この状態はスピンの絶対値は最大の状態であり、有効磁場環境下でこのように大きなスピンをもつ状態は強磁性相と考える事ができる。そのため、上の図 5.13,5.14 の結果は常磁性相から強磁性相へ、さらに常磁性相へと変化する量子相転移が観測されたと考える事ができる。

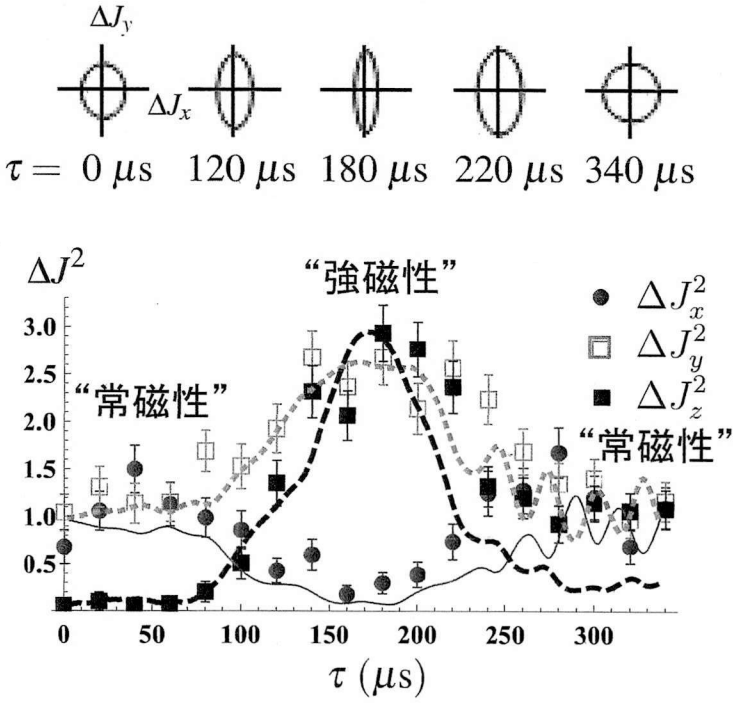

図 5.14: 4ion multi-level STIRAPによるスピンノイズの時間発展
multi-level STIRAPによってスピンノイズが時間発展をしている。上の図は対応する時間において、xとy方向のノイズを図示したものである。x方向にスピンスクイーズされている様子が分かる。それぞれ実線・点線・ダッシュ線の順番に$\Delta J_x^2, \Delta J_y^2, \Delta J_z^2$に関して、実験パラメータを入れた数値計算の結果である。数値計算はキャリア遷移による影響を考慮に入れたもので、その詳しい内容は考察のinfidelityの節に述べる。

4ionDicke状態

さて、では次に$t = 170\mu$sにおいて、生成された状態がDicke状態である事を示そう。理論の部分で述べたように、ウィットネスによる方法と忠実度による方法の２種類の方法で生成された状態を評価する。

ウィットネスを測定するため、生成後に$\pi/2$パルスを位相を変化させて照射し、スピンの二乗を測定した。結果が図5.15である。綺麗にDicke状態のリングが回っているのを見て取れる。このピークの部分が$\hat{J}_y^2$の期待値に対応する。フィッティングより、その値は2.64 ± 0.05である。

次に解析パルスなしでそのままz方向のスピンの二乗を測定すると、その値は2.82 ± 0.05であり、上の結果を合わせて、ウィットネスについて

$$\langle \hat{W}_{yz} \rangle = 5.23 \cdot \hat{1} - (\hat{J}_y^2 + \hat{J}_z^2) = -0.23 \pm 0.07 \tag{5.86}$$

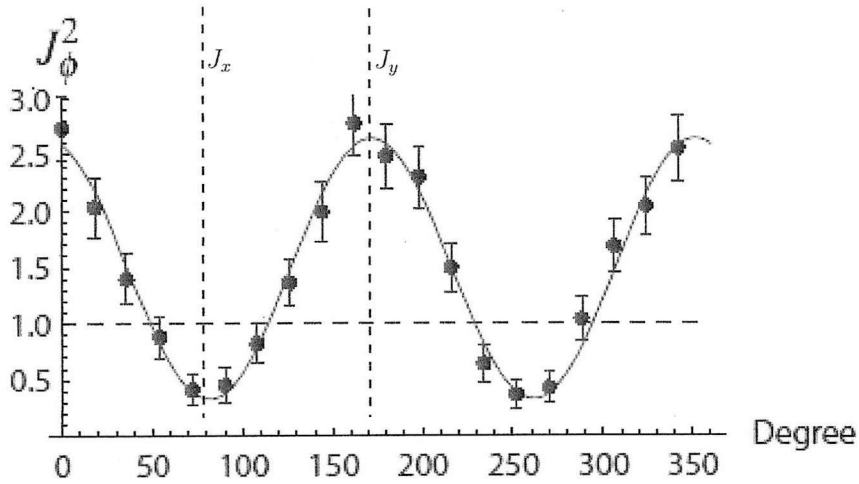

図 5.15: 4ion Dicke 状態のウィットネス
スピンの 2 乗が解析パルスの位相による変化している様子を表している。それぞれの縦の点線は J_x と J_y の測定に対応する位相であることを表している。横の点線は 4ion の場合のショットノイズである。スピンスクイーズド状態としては、約 3dB 程度のスクイーズになっている事が分かる。

と測定できた。測定された値は信頼性 0.999（片側 3.3 σ）で負値となっており、4 体のエンタングルド状態ができている事を主張できる。

続いて、忠実度による評価を続ける。理論の部分に書いたように、ウィットネスの値と x 方向の射影測定から忠実度の上限・下限値を求める事ができる。

状態を生成した後に $\pi/2$ パルスを照射し、x 方向の射影測定を行った。結果は、

$$\{p_{-2(x)}, p_{-1(x)}, p_{0(x)}, p_{1(x)}, p_{2(x)}\} \tag{5.87}$$

$$= \{0.00, 0.03, 0.88, 0.03, 0.03\} \tag{5.88}$$

$$\pm\{0.00, 0.02, 0.03, 0.02, 0.02\} \tag{5.89}$$

である。

理論部分に示した忠実度の上限値下限値を 4 個の場合について具体的に計算すると

$$\frac{\langle \hat{W}_{yz}^{(0)} \rangle}{4} - \left(\frac{p_{-2(x)} + p_{2(x)}}{2} + \frac{5(p_{-1(x)} + p_{1(x)})}{4} + \frac{p_{0(x)}}{2}\right) \leq \mathrm{F} \leq p_{0(x)} \tag{5.90}$$

となる。

実験結果を代入すると

$$0.84 \pm 0.03 \leq \mathrm{F} \leq 0.88 \pm 0.03$$

と忠実度の上限下限値を比較的狭い範囲で測定することができた。

Dicke状態に対しては、一般のN体のエンタングルド状態を主張するための忠実度を用いたウィットネスも見つけられている。その一般的な表式は

$$\hat{W} = \frac{N}{2N-2}\hat{1} - |\mathrm{D}_N^{N/2}\rangle\langle\mathrm{D}_N^{N/2}| \tag{5.91}$$

である[100]。

$N = 4$を代入すれば、4体のDicke状態に対するウィットネスの表式は

$$\hat{W}_F = 0.67 \cdot \hat{1} - \hat{F} \tag{5.92}$$

とわかる。上で求めた忠実度の上限値下限値を用いてウィットネスの期待値を計算すると

$$-0.21 \pm 0.03 < \langle\hat{W}_F\rangle < -0.17 \pm 0.03 \tag{5.93}$$

となり、エラーの範囲より大きく負の値をとっており、忠実度の観点からも4体のエンタングルド状態ができている事が分かる。

5.4.3 6ion

同様の手法を6ionに対して行った。実験パラメータはすべて4ionの場合と同じである。4ionの場合と同様に解析パルス後のスピンの二乗を測定した。結果は図

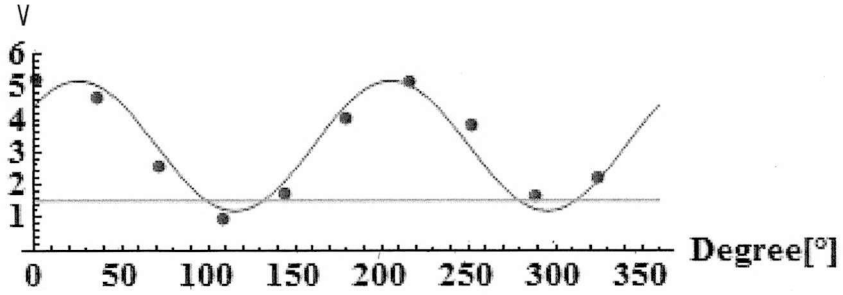

図 5.16: 6ion Dicke状態のスピンノイズ
スピンの2乗が解析パルスの位相による変化している様子を表している。横の線は6ionの場合のショットノイズである。

5.16である。フィッティングより $J_y^2 = 5.17 \pm 0.20$ と得られた。続いて、解析パルスなしの射影測定より、$J_z^2 = 5.46 \pm 0.25$ と測定できた。

ここで、6ionのバイセパラブルな状態に対しては、横スピン $\langle \hat{W}_{yz}^{(0)} \rangle$ の大きさの最大値は数値計算によって $11.0179\cdots \sim 11.02$ とわかっているので、4ionの時と同様にウィットネスの期待値は

$$\langle \hat{W}_{yz} \rangle = 11.02 \cdot \hat{1} - \langle \hat{W}_{yz}^{(0)} \rangle = 0.39 \pm 0.32 \tag{5.94}$$

と測定できる。ウィットネスの期待値は正の値となっており、6体のエンタングルメントを主張することはできない。

また、x方向の射影測定の結果

$$\begin{aligned} & \{p_{-3(x)}, p_{-2(x)}, p_{-1(x)}, p_{0(x)}, p_{1(x)}, p_{2(x)}, p_{3(x)}\} \\ = \ & \{0.01, 0.04, 0.12, 0.68, 0.05, 0.03, 0.07\} \\ & \pm\{0.01, 0.02, 0.03, 0.05, 0.02, 0.02, 0.03\} \end{aligned} \tag{5.95}$$

と得られたので、合わせて4ionの時と同様に忠実度について

$$0.64 \pm 0.10 \leq \mathrm{F} \leq 0.68 \pm 0.05 \tag{5.96}$$

と評価できた[14]。

また、6体のエンタングルメントを主張するための忠実度によるウィットネスは式5.91より

$$\hat{W}_F = 0.6 \cdot \hat{1} - \hat{F} \tag{5.98}$$

と分かっているので、上の不等式を代入するとウィットネスの期待値は

$$-0.08 \pm 0.05 < \langle \hat{W}_F \rangle < -0.04 \pm 0.10 \tag{5.99}$$

と計算でき、エラーの範囲で負値を示すには至っていない事が分かる。しかし値自体は負になっているので、忠実度の下限値のエラーから信頼区間を計算すると、最悪の場合でも66%の信頼性で6体のエンタングルメントを主張できると言える[15]。しかしながら、定量的に主張するための最低限の信頼水準68%を超えていないので、この結果から生成ができたと結論することはできない。

[14] 理論部で述べた一般の議論より、6体のDicke状態の忠実度の上限下限は

$$\frac{\langle W_{yz}^{(0)} \rangle}{6} - \frac{p_{-3(x)} + p_{3(x)}}{2} - \frac{4(p_{-2(x)} + p_{2(x)})}{3} - \frac{11(p_{-1(x)} + p_{1(x)})}{6} - p_{0(x)} \leq F \leq p_{0(x)} \tag{5.97}$$

と計算される。

[15] グローバルスピン演算子を使ったウィットネスでは6体のエンタングルド状態の閾値には達していなかった。しかしながら、ウィットネス演算子はその定義の性質から、期待値が負値になることは多体のエンタングルド状態であることの必要条件であり、そのためウィットネスの期待値が正

5.5 考察と展望2

5.5.1 4ion

GHZ状態との区別

Dicke状態は少数個の時はGHZ状態と似た状態である事が知られている。実際に、2ionの時は両者は同じベル状態であり、エンタングルド状態としては同じクラスに属している。例えば48粒子におけるDicke状態のポピュレーションを見て

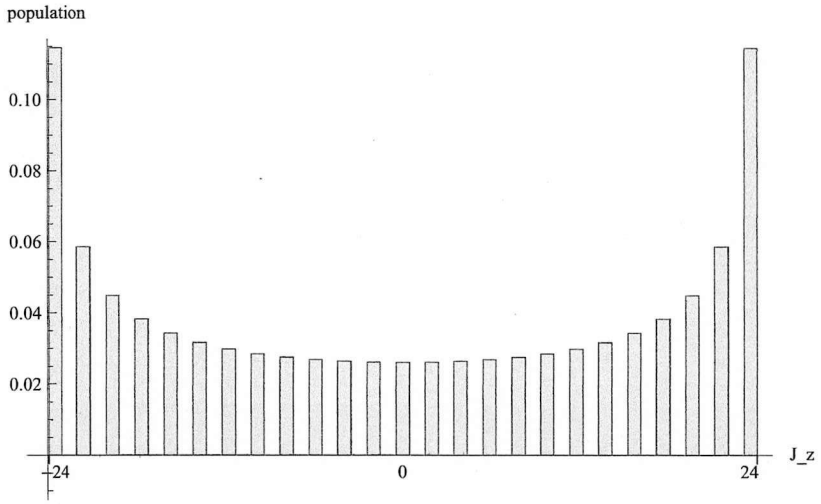

図 5.17: Dicke状態のポピュレーション
48qubitにおけるDicke状態のポピュレーション。横軸はJ_z、縦軸はポピュレーションを表している。スピン状態の一個おきにポピュレーションがあり、また両端の状態が一番大きなポピュレーションを占めている事が分かる。

みると図5.17のようになり、すべてのスピンが同じ方向を向いた両端の状態のポピュレーションが一番高くなっている事が分かる。これらの状態の一対一の重ね合わせ状態がGHZ状態であるため、両者は比較的大きな重なりを持つ事が分かる。一般の2n粒子系において、GHZ状態とDicke状態との間の最大の重なり具合は、

$$F_{\mathrm{GHZ|Dicke}} = \max|\langle \mathrm{GHZ_{2n}} \mid \mathrm{D}^n_{2n}\rangle|^2 = \frac{1}{2^{2n-1}}{}_{2n}\mathrm{C}_n \tag{5.100}$$

値であることはN体のエンタングルド状態であることを否定しない。ゆえに複数のウィットネスによる結果が異なっていても、どれか一つを用いて結果がN体のエンタングルド状態の閾値を超えていれば、生成された状態がN体のエンタングルド状態であると結論することが可能である。また、先行研究によってノイズに対するウィットネスのトレランス（ノイズに対するウィットネスの上昇具合）が調べられていて、それによると忠実度を用いたウィットネスはグローバススピン演算子を用いたものに比べてトレランスが高くなる事が分かっている。

と計算できる。特に4粒子の場合には、$F_{\mathrm{GHZ|Dicke}} = 0.75$ となり、高い値となるため、これらの間で状態を見分ける事が難しい。

そこで、今回はGHZ状態とDicke状態のそれぞれについて忠実度を評価し、それらの値を比較する事で考察する。生成した4粒子のDicke状態について、パリティ振動測定によってGHZ状態に対する忠実度も計算する事ができる。得られたパリ

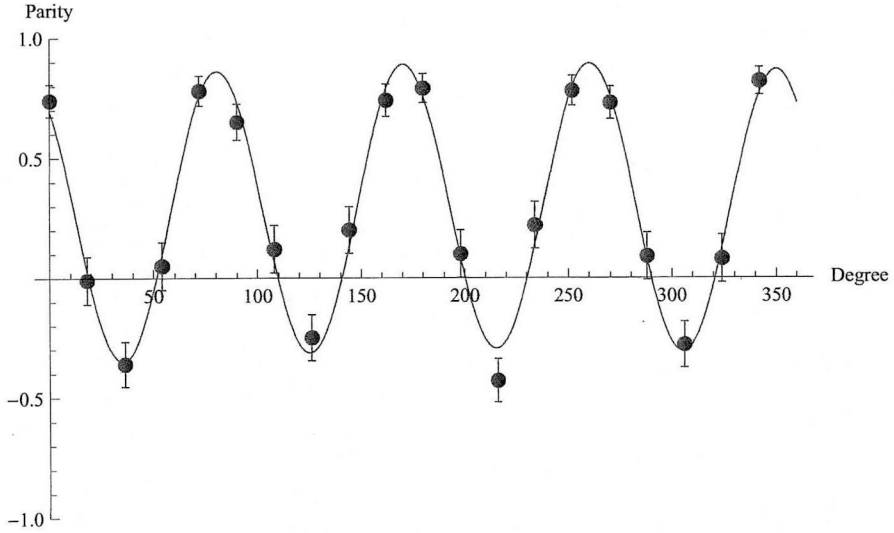

図 5.18: Dicke状態のパリティ振動
4ionにおける生成された状態のパリティ振動。横軸は解析パルスの位相、縦軸はパリティの期待値を表している。

ティ振動を図5.18に載せる。この振幅0.60と対角要素の結果 $\{j_{-2}, j_{-1}, j_0, j_1, j_2\} = \{0.375, 0.059, 0.198, 0.046, 0.318\} \pm \{0.015, 0.007, 0.012, 0.006, 0.014\}$ からGHZ状態に対する忠実度について

$$F_{\mathrm{GHZ}} = \frac{0.60 + 0.69}{2} = 0.64 \pm 0.02 \tag{5.101}$$

と測定する事ができた。

結果より、Dicke状態に対する忠実度 F_{Dicke} は $0.84 < F_{\mathrm{Dicke}} < 0.88$ と評価されているので、得られた状態はGHZ状態よりもDicke状態に近いという事が出来、生成された状態がDicke状態である事を確かめる事ができた。また、GHZ状態とDicke状態の重なり具合0.75より、GHZ状態との忠実度をすべてDicke状態を通した物と仮定すると

$$0.84 \cdot 0.75 = 0.63 < F_{\mathrm{GHZ}} < 0.88 \cdot 0.75 = 0.66 \tag{5.102}$$

と評価でき、この不等式は上のGHZ状態との忠実度を直接測定したものと無矛盾となっている。

Infidelity

生成された状態の忠実度を決定しているノイズ・エラー源について考察する。
今回生成する方法では、以下の4つのエラーの可能性について考える事ができる。

- 振動状態の初期平均フォノン数
- サイドバンド変調によるシュタルクシフト変化
- コヒーレンス時間
- 十分に冷えていない他のモードによる励起

まず最初の点について、初期フォノン数は $\langle \hat{n}_{\mathrm{COM}} \rangle \sim 0.02$ であり、暗状態のポピュレーションとしては0.98が最大となる。
次に、シュタルクシフトについて、実験パラメータにおける最大のシュタルクシフトは約20kHzであり、図5.19のような時間変化をする。このようなシフトの時

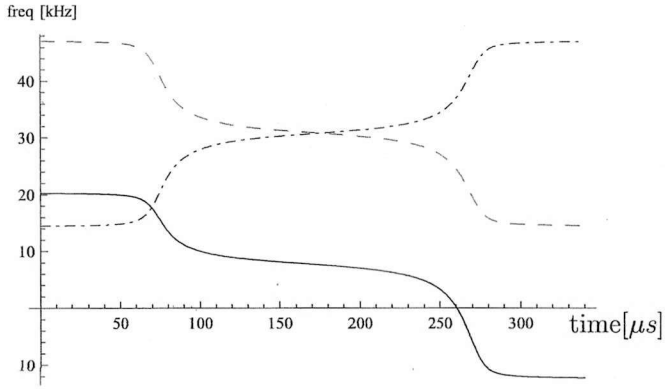

図 5.19: STIRAP強度変調中のシュタルクシフト変化
強度変調中のシュタルクシフトの変化（実線）を計算した。強度変調用の関数は実験に使ったものである。また、点線とドット線はそれぞれレッドサイドバンド遷移とブルーサイドバンド遷移の離調の時間変化をシュタルクシフトから計算したものである。

間変化はSTIRAPのinfidelityになるため、この効果を考慮に入れた数値計算をする。また、シュタルクシフトの大きさがラビ振動数に対して大きなものとなっているため、以下に説明するようにシュタルクシフトの向きも大きな変化を与える。

これが式5.23で離調の制限をした理由である。図5.19を見ると、レッドサイドバンド遷移が支配的である前半部分はレッドサイドバンド遷移の離調が大きくなっており、後半はその逆になっていることがわかる。つまり、$\delta > 0$においては、シュタルクシフトはそれぞれのサイドバンド遷移が支配的であるときにその離調を大きくするような作用をするという事ができる。一方、小さな離調は"Horizontal"ラマン遷移によってフォノンの励起を産んでしまうので、そのため$\delta > 0$として離調が小さくなることを防がなくてはならない事がわかる。数値計算によると、シュタルクシフトを考慮にいれると$\delta < 0$ではDicke状態は生成されない。また、シュタルクシフトがSTIRAP中に大きく変化しないようにするため、両サイドバンド遷移のパルス時間波形は注意深く設定しなければならない。具体的には、STIRAPによって状態が大きく変化するような領域(図5.19の$t = 170\mu$s周辺等)ではシュタルクシフトの時間変化が緩やかになるようにすればよい。上の図5.19ではその事を考慮に入れた実験パラメータにおける波形となっており、途中でシュタルクシフトの変化が緩やかになっている事がわかる。

キャリア遷移によるシュタルクシフトの効果を考慮をするとは、離調されたキャリア遷移をハミルトニアン中に加える事と同じである。そのため計算に使ったハミルトニアンは、式5.23にキャリア遷移の効果とその他の遷移によるシュタルクシフトの効果を入れた

$$\begin{aligned}\hat{H} = & \frac{\eta\Omega_r(t)}{2}(\hat{a}\hat{J}_+e^{-i\delta_r t} + \hat{a}^\dagger\hat{J}_-e^{i\delta_r t}) + \frac{\eta\Omega_b(t)}{2}(\hat{a}^\dagger\hat{J}_+e^{i\delta_b t} + \hat{a}\hat{J}_-e^{-i\delta_b t}) \\ + & \frac{\Omega_r(t)}{2}(\hat{J}e^{-i(\nu+\delta_r)t} + \hat{J}_-e^{i(\nu+\delta_r)t}) + \frac{\Omega_b(t)}{2}(\hat{J}e^{i(\nu+\delta_b)t} + \hat{J}_-e^{-i(\nu+\delta_b)t}) + \delta(t)\hat{n}_e\end{aligned} \tag{5.103}$$

である。ここで、νはサイドバンド周波数であり、$\hat{n}_e \equiv \sum_i \frac{\hat{\sigma}_z^{(i)}+1\hat{1}}{2}$は全体の励起数演算子であり、$\delta(t)$に今考えている遷移以外からのシュタルクシフトをまとめた。数値計算の結果は図5.14の曲線である。その他のinfidelityを考えない場合、4ionのDicke状態に対する忠実度として0.90と計算する事ができた。

次に、コヒーレンス時間はラムゼー共鳴の実験より約2msと見積もる事ができるため、生成時間170μsの間の緩和はおよそ0.2%となる。

最後に用いた振動モード以外の効果について、軸方向のCOMモード以外は1.7MHz以上の永年周波数であり、ドップラー温度でも十分な冷却を見込むことができる。実際に、上の三つのエラーを考慮にいれると、忠実度の実験値を定量的に説明しており、この効果による忠実度の減少は0 ~ 4%と見積もる事ができる。

よって、最も大きなinfidelityはシュタルクシフトの時間変化であるという事ができる。この点を改善するには、

- ラビ周波数を下げる（コヒーレンス時間を伸ばす）

- (z方向) 永年周波数を上げる
- 動径方向振動モードを使う
- シュタルクシフトを消す

の4点の方法が挙げられる。

1点目については、シュタルクシフトの大きさが $E = \frac{\Omega^2}{2\Delta}$ であることから、シュタルクシフトを下げる方法としてラビ周波数を下げる方法が有効であることがわかる[16]。しかし、この場合断熱条件を満たすためにはより長い生成時間が必要になり、コヒーレンスの悪化が考えられる。そこで、現在コヒーレンス時間を決めているレーザー線幅の狭窄化が実現すれば、ラビ周波数を下げることができ、より高忠実度での生成が可能とかんがえられる。数値計算によると、4ion で 0.5ms の生成時間をかける場合、サイドバンドラビ周波数 8kHz とすれば永年周波数が 700kHz と低い場合でも 0.97 の忠実度での生成が期待できる。本論文の実験では、生成された忠実度に対するラビ周波数の最適化は行なっていない。これは、断熱条件を優先するために、できるだけ強い強度で実験を行なったためである。しかし、上記のような考察から、強い強度は必ずしも高い忠実度につながらない事が分かった。この点を改善する事で、現在の系でもより高い忠実度を達成できる可能性があると考えられる。

2点目については、同じ光強度の場合には、永年周波数を上げる事でキャリアからの離調が大きくなりシュタルクシフトを小さくする事ができる。現在の永年周波数は 1.0MHz であり、これを制限しているのは、トラップ RF の強度・クーロン結晶の安定度である。軸方向に高い永年周波数を得るには、イオンをまっすぐに並べるために動径方向にも同時にイオンを強く閉じ込めなければらない。そのためにはトラップ RF の強度を強くすれば良いが、現状では強すぎる RF によるその他の機器へのノイズを抑えるために用いるトラップ RF 強度が制限されている。これは、グラウンドを経由したノイズと考える事ができる。また、動径方向の強い閉じ込めはクーロン結晶の不安定化を引き起こす。これらの事から、高い永年周波数の獲得は技術的に大きな課題となる。

3点目については、2点目と同様に永年周波数を大きくする事によるシュタルクシフトの低下を狙ったものであるが、使用モードを動径振動モードにすることで、

[16] さらに言うと、$\eta\Omega$ を一定にした場合、

$$E = \frac{(\eta\Omega)^2}{2\eta^2\Delta} \sim \frac{(\eta\Omega)^2}{2\eta^2\nu} \propto \nu^0 \tag{5.104}$$

となる。ここで永年周波数を ν とし、サイドバンド遷移の離調は永年周波数に対して小さいとした。つまり、シュタルクシフトの大きさは永年周波数に因らない。よってこの場合、シュタルクシフトを小さくするにはラビ周波数を下げるしかない。

STIRAP に用いる振動モードの永年周波数を約 3MHz 程度まで大きくすることができる。しかし、動径モードの周波数は RF の強度に敏感に依存するため、一般に軸モードに比べて安定度が悪い。動径モードを使う場合は、動径モードの永年周波数揺らぎによる infidelity を評価しておく必要があるだろう。また、動径モードは軸モードに比べると"硬い"モードであるため、COM モードは他のモードと周波数的に近く、これらのモードの影響にも注意しなければならない。一方で動径方向モードを使った実験は利点も多い。上記のように高い永年周波数を実現できる点や、729nm の光を動径方向から入射する事でイオンの軸方向の運動に感度のない実験が可能であり、非常に浅い軸モードのトラップを用いる事ができる点などが挙げられる。イオン結晶の安定度の観点で考えると、軸モードに関して浅いトラップを用いる事できるというのは大きな利点となる。

4 点目については、強度変調によるシュタルクシフトの時間変化をちょうど打ち消すように強度変調した光を追加で照射する事で実現する。

4ion 精密測定

生成方法 1 による 2ion の精密測定と同様に 4ion を用いた精密測定について考察する。図 5.15 の結果から、位相に関する精密測定の精度を計算すると、図 5.20 の

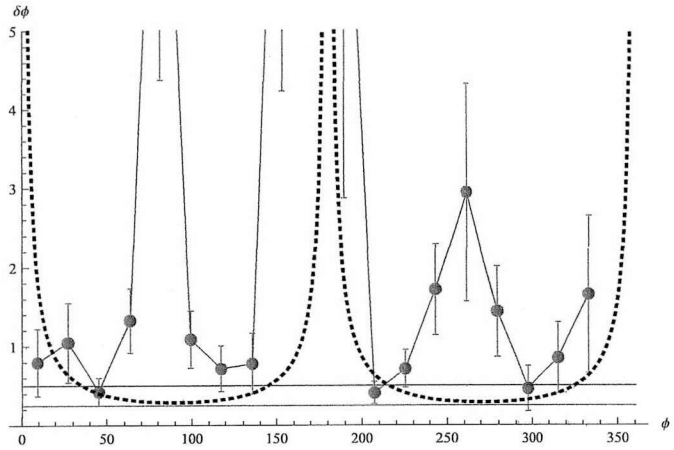

図 5.20: 4ionDicke 状態を用いた精密測定
4ion の Dicke 状態を用いた位相の精密測定の結果を載せる。高い横線が量子標準限界、低い横線がハイゼンベルグ限界を表す。点線は理想的な Dicke 状態を用いた精密測定に関するものである。

ようになる。エラーバーは射影ノイズによるものである。測定回数が少ないため

に、エラーの範囲内で量子標準限界を超えた点はない。また、4ion以上のDicke状態の場合、理論的には図5.20の黒い点線ように位相敏感度が小さい90度,270度付近でハイゼンベルグ限界をむかえるため、用意した状態の不完全性による精度の悪化が著しいという特徴が挙げられる[17]。そのため、実験結果では90度,270度の点において精度が極端に悪くなっており、そのために量子標準限界を超えるのが難しくなっている。

この効果は4粒子以上のDicke状態すべてについて言える事であるため、Dicke状態を用いた精密測定を拡張性を持った形で実現するには、非常に高い精度で状態を用意しなければならないという事が言える。

5.5.2 6ion

6ionのDicke状態生成に関しては、現状では6体のエンタングルメントを十分に主張するに足る精度での状態生成には成功していない。そこで、スピンスクイージングウィットネスと呼ばれる量を測定し、生成した状態が2体のエンタングルメントを持っているかどうかを判別する。

スピンスクイージングウィットネス

スピンスクイーズド状態に対しては、エンタングルメントの指標の一つにスピンスクイージングウィットネスというものが見つけられている。スピンスクイージングウィットネスの期待値は

$$\langle \hat{W}_{SS} \rangle = (\langle \hat{J}_x^2 \rangle + \frac{N(N-2)}{4})^2 - (\langle \hat{J}_y^2 \rangle + \langle \hat{J}_z^2 \rangle - \frac{N}{2})^2 - (N-1)^2 \langle \hat{J}_x \rangle^2 \quad (5.107)$$

と書ける。この値が負になったとき、その状態は何らかの（2体以上の）エンタングルメントを有しているという事ができる。今、実験値を代入すると

$$\langle \hat{W}_{SS} \rangle = -10.39 \pm 6.43 < 0 \quad (5.108)$$

[17]測定量Vの位相に対する変化は

$$V = \frac{3(\cos(2\phi)+1)}{2} \quad (5.105)$$

となるため、$\phi = 90, 270\mathrm{deg}$ では $\frac{dV}{d\phi} = 0$ となる。測定精度は

$$\delta\phi = \frac{\delta V}{dV/d\phi} \quad (5.106)$$

であり、分母が0になって発散するかのように思えるが、理想的にはこの点では $\delta V = 0$ となり、比はハイゼンベルグ限界に収束する。しかし、実際の実験では分母のみ0に近くなり、対して状態の不完全さによって δV は0から外れるため、測定精度が極端に悪くなる。

とエラーも含めて負値となっており、生成された状態がエンタングルメントを持っている事を示す事ができた。

6 体の Dicke 状態生成に向けて

6ion の状態生成には、4ion の考察で述べた infidelity をできる限り抑え、さらに高い忠実度で実験をしなければならないという事が言える。その時にもっとも気を付けなければらない事は、クーロン結晶の不安定性・再結晶化に関する理解をさらに高める事である。実際の実験ではこの問題により、4ion と同等の実験パラメータでは 6ion の実験ができなかった。なぜならば、6ion では 4ion に比べより頻繁なクーロン結晶の崩壊が観測される事と、さらに測定のために測定時間を延ばさなければならない事情がある。6ion の実験では、励起されたスピン数による離散的な自然放出光子数の分布が互いに重なってしまい、閾値による射影測定が難しくなる。そのような問題については通常、測定光子数のヒストグラムを測定しそれをポアソン分布でフィットする事でポピュレーションを求める方法で解決する。しかしそのためには、一点につき 500 1000 回程度のデータの積算が必要であり、そのためにはクーロン結晶を安定にして長時間の測定を可能にしなければならない。

またこれまでの実験において、高い永年周波数はクーロン結晶の不安定さを引き起こす事が分かっている。この現象の理解と説明や、クーロン結晶を再結晶化させやすい電圧や光強度などのパラメータの最適化をしなければならない。

今回の実験では、クーロン結晶を実験に必要な程度安定（数分に一回結晶融解する程度の頻度）にするために、永年周波数を 0.7MHz に設定をして実験を行った。このパラメータでも多数回の測定をするには融解頻度が高すぎたため、結果は測定回数が少なくエラーが大きくなってしまった。また、このパラメータにおいて、時間変化シュタルクシフトの効果を計算すると達成される忠実度として 0.70 と計算され、実験結果を良く説明している。4ion と同程度の永年周波数 1.0MHz で実験をすることができれば、シュタルクシフトの時間変化を考慮に入れた数値計算で忠実度は 0.81 と見積もられ、十分に希望の持てる数字となる。

また、infidelity の節で述べた 1 点目の改善点について、生成時間を長く取れる場合 6ion でも高い忠実度が期待できる。数値計算によると、0.5ms の生成時間の場合、ラビ周波数を 8kHz とし、永年周波数を 700kHz と低く設定しても期待できる忠実度は 0.95 と計算できる。

8 体以上の Dicke 状態生成

6 体の時と同様に、クーロン結晶の安定度が問題になると考えられる。10 イオンを用いた場合でも、永年周波数 1.0MHz で実験ができたと仮定すると、数値計

算よりシュタルクシフトの時間変化を考慮に入れた期待できる忠実度は0.67である。この忠実度は10イオンのDicke状態に対する忠実度を用いたウィットネス $\hat{W} = 0.56\hat{1} - |D_{10}^5\rangle\langle D_{10}^5|$ に代入すると負値となるため、10イオン以上のDicke状態生成に期待を持つことができる。

さらに、6ionまでと同様に長い生成時間を許した場合、10ionで生成時間0.5msサイドバンドラビ周波数8kHzに対し、永年周波数を700kHzとした時でも、最高で0.9という非常に高い忠実度が期待できる。さらに、16ionの実験の場合にも、生成時間0.5msサイドバンドラビ周波数8kHzに対し、永年周波数を400kHzと下げても達成される最高の忠実度は0.84と計算される。軸方向に400kHzの強さで閉じ込められたイオン鎖は、動径方向の閉じ込めが2MHz程度でも一次元になるため、現状でも生成可能である[18]。

以上より、多数個のエンタングルド状態生成に向けて、第一にパラメータの最適化実験が可能なぐらい安定なクーロン結晶を実現し、第二にコヒーレンス時間の許す限り弱い光強度で実験を行う事が必要であるという事ができる。また、可能であれば高い永年周波数を実現し、その他のノイズ要因を減らす事が重要である。

しかし、多数個のエンタングルド状態の生成に関しては、一般にデコヒーレンスが大きな問題となる。実際に、巻末の付録2で述べたとおり、多体のDicke状態も特定の方向のノイズについては、1粒子のデコヒーレンスに対して粒子数Nに関して N^2 に比例するような大きさの緩和を受ける事が分かっている。しかし本章での生成方法はSTIRAPを用いた断熱過程であり、一般には位相緩和等のデコヒーレンスに強い事が知られている。多数個の生成に関して、デコヒーレンスの影響がどの程度大きくなっていくか、またその抑制は将来の課題である[102]。

5.6 まとめ

本章では、2つの多数qubit Dicke状態の生成方法を提案し、実現した。また、Dicke状態の評価方法として、従来のウィットネスによる方法に加え、忠実度の下限を測定する方法を提案し実行した。1つめの生成方法は、ドレス場の固有状態とスピン間相互作用を合わせたもので、2ionのDicke状態を実験的に生成するこ

[18] とはいえ、低い永年周波数は多くの問題を引き起こす。簡単に思いつく物だけでも、以下のような問題点がある。

- イオン鎖が大きくなることによって、すべてのイオンへ光を均一に照射する事が難しくなる。
- 動径モードの内、特にジグザグモードの永年周波数がかなり低くなるため、余計な冷却が必要になる。
- イオン鎖が大きくなることで、局所的なノイズが大きくなる。

とができた。2つめの生成方法は、サイドバンド遷移を用いたmulti-levelSTIRAPによるものである。この方法を用いて2,4ionのDicke状態を高い忠実度で生成する事ができた。また、6体のエンタングルド状態を十分に証明するに足る忠実度には足りなかったが、6ionのDicke状態の生成にも挑戦し、その問題点を評価した。さらに、この手法はスピンモデルの量子シミュレーションの一種であると理解する事ができ、Dicke状態を生成する過程で常磁性相から強磁性相の量子相転移の観測ができたという事ができる。

また、Dicke状態のスピンスクイーズド状態としての性質を利用した精密測定を行った。2ionを用いた多数回測定によって量子標準限界を超える精密測定をする事ができたが、完全なラムゼー干渉法に対する精度のゲインは得る事が出来なかった。

第6章　実験IV: ファイバー型イオントラップ cavity QED

トラップイオンは、それ単独で長いコヒーレンス時間をもち、異なるイオン間を振動モード（フォノン）を通じて結合させることが可能であり、現時点では小規模量子情報処理分野における一番良い候補として考えられている [10]。一方で全世界を結ぶネットワークは、その速さから当然光を使うことが一番良い方法であるし、現在すでに光を使ったネットワークは世界中に張り巡らされている。しかしながら、光子同士を直接相互作用させるのは難しいため、その光ネットワークを量子の世界へと拡張するには、飛んでいる光子の情報を手元にある量子系へと移す事が近道である [103]。その実現方法の一つをを cavity QED という。

cavity QED のための量子系は、光と結合する量子系であれば何でもよい。そのため、最初は中性原子を用いて [35]、最近では量子ドット [104] や NV-center[105] を用いた cavity QED 系が続々と開発されてきている。しかしながら、量子ネットワークの特徴を完全に生かすためには、量子系は単独で量子操作が十分に可能である事が望ましい。そこで、イオントラップを用いた cavity QED 系の実現が期待されているのである。

しかしその実現は未だなされていない。一番大きな問題は、共振器に用いるミラーが誘電体である事である。電場中で誘電体は分極し、その電場を打ち消そうとする。そのため、イオントラップの内部に誘電体を置いてしまうと、トラップが乱され、イオンを捕獲することができなくなってしまう。Max Planck の Walter らのグループや Innsbruck の Blatt らのグループはなんとか共振器をイオンに近づけようと技術的な挑戦 [36, 37] をしてきたが、それでもミラーの間隔を 5mm 程度まで近づけるとトラップされているイオンは死んでしまう。

その問題を克服するため、最近になり、ファイバー型のイオントラップ cavity QED が提案された [38]。ファイバーの先端を電極加工とミラー加工し、小型トラップでかつ小型共振器としての性質を兼ね備えたイオントラップである。本章では、その実現に向けて行った基礎実験、特にファイバー共振器の開発についての報告を行う。なお、本章内容は著者が Sussex 大学に行き、故 W. Lange 教授のグループ（現在 Matthias Keller 講師のグループ）で高橋優輝研究員とともに行った実験

である。

6.1 理論

6.1.1 cavity QED

原子系が光と電気ダイポールを通じて相互作用しているとき、その原子系と単一モードの光[1]との間の相互作用は、

$$\hat{H}_I = \hat{E} \cdot \hat{d} \tag{6.1}$$

である。ここで、$\hat{d}$は量子系の電気ダイポール演算子、$\hat{E}$は光の電場演算子である。

電磁場の量子化から電場演算子は

$$\hat{E} = \sqrt{\frac{\hbar\omega_0}{2\epsilon_0 V}}(\hat{a}e^{-i\omega_0 t} + \hat{a}^\dagger e^{i\omega_0 t}) \tag{6.2}$$

である。ω_oは光の周波数、Vはモードの体積である。原子系のダイポールは、異なる軌道状態が重ね合う時にだけ生じる事を考えれば、[2]

$$\hat{d} = d(\sigma_+ e^{i\omega_a t} + \sigma_- e^{-i\omega_a t}) \tag{6.4}$$

となる。$\sigma_\pm$はスピンフリップ演算子、dは電気ダイポールの大きさである。

これらを相互作用ハミルトニアンに代入すると、回転波近似より

$$\begin{aligned} \hat{H}_I &= \hbar g(\hat{a}\sigma_+ e^{i\delta t} + \hat{a}^\dagger \sigma_- e^{-i\delta t}) && (6.5) \\ &\equiv d\sqrt{\frac{\hbar\omega_0}{2\epsilon_0 V}}(\hat{a}\sigma_+ e^{i\delta t} + \hat{a}^\dagger \sigma_- e^{-i\delta t}) && (6.6) \end{aligned}$$

となり、Jaynes-Cummings ハミルトニアンが得られる。

また、計算に便利なように原子の電気ダイポールをその遷移の自然幅γであらわすと

$$g = \frac{c}{\omega}\sqrt{\frac{3\pi c\gamma}{2V}} \tag{6.7}$$

[1] 1つの周波数、1つの空間モードの光を指す。

[2] 原子核によるポテンシャルは中心力で記述されるため、電子の軌道についてダイポール演算子$e\hat{x}$を積分するとゼロになる

$$\int \psi(x)^* ex\psi(x)dx = 0. \tag{6.3}$$

つまり、電荷の偏りは存在せず、単一の軌道状態は電気ダイポールを持っていない。異なった軌道状態（擬スピン）が重ね合った時だけ電気ダイポールが生じる。

となる。結局、原子と光の相互作用の強さはモードの体積 V を小さくする事で大きくする事ができるとわかる。

通常この相互作用は単一光子に対しては非常に小さくなってしまうため、その相互作用を強くするために強い光を入射させる事で、原子の状態を光を使って制御する。しかし、原子の情報を光に乗せたりする場合は、光の方も量子系として扱う必要があり、特に単一光子を使う必要がある。そのために、上の表式にあるようにモードの体積 V を小さくし、共振器によって閉じ込めた光子と原子との相互作用を用いる。この技術を cavity QED と呼ぶ。

共振器と原子にはそれぞれ、光の寿命と励起状態の寿命という二つの時間的な制約がある。共振器内の光の寿命は共振幅 κ の逆数で与えられ、原子の状態の寿命は励起状態の自然幅 γ の逆数で与えられる。また、原子と光は g という速さで相互作用するので、その相互作用速さは $1/g$ である。つまり、

$$1/g \ll 1/\gamma, 1/\kappa \tag{6.8}$$

という条件が成り立っている時、単一光子と原子との相互作用がその他の緩和よりも速くなり、その相互作用を利用した情報のやり取りが可能になる。この条件はしばしば、Cooperative parameter とよばれる値 C に対する以下のような条件で書かれる [35, 38]

$$C \equiv \frac{g^2}{\gamma\kappa} \gg 1. \tag{6.9}$$

また、パラメータがこのようになっている場合、その cavity QED 系が強結合領域に入っているという。

強結合領域にある cavity QED を使う事で、エンタングルド状態生成や量子状態の輸送 [34] など様々な事が可能であり、応用研究も含めて広く研究がなされている。

6.1.2 ファイバー型イオントラップ cavity QED

イオントラップは他の系と相互作用をさせるのが難しく、量子ネットワークに向けた研究においては、弱結合 cavity QED 系での任意時間波形単一光子生成 [36]・ファイバー結合イオントラップでの光子測定を基にしたエンタングルド状態の生成 [106] 等と数えられるほどしかない。これは、イオントラップ自体がミラーの誘電体による影響を強く受けてしまう事によって共振器のモード体積を小さくする事が難しく、強結合 cavity QED 系の実現が難しい事に因っている[3]。

[3]誘電体の影響をあまり受けない光トラップ中の中性原子では、強結合 cavity QED 系はいち早く実現 [35] しており、量子ネットワークをめざして様々な実験が報告されている [107, 108, 109]。

光子とイオンの結合を強くする方法としては、モード体積を小さくする事の他に、多数のイオンを使うという方法がある [110]。Dicke の協調効果 [80] によって、一つの光場と多数のイオンの相互作用はその個数によって大きくなるため、弱結合 cavity QED 系に多数のイオンを捕獲する事で、強結合の領域にまで相互作用を強くする事ができる。しかしながらこの方法は、共振器内の光場と原子の位置関係を固定する事が難しく、実験中にもイオンは動いてしまう。そのため、量子メモリとしての性能は単一のイオンに比べて低くなることが予想され、また、共振器内の各イオンに対するゲートも実行できない。やはり単一イオンでの強結合 cavity QED 系の実現望まれるのである。

近年、中性原子 cavity QED 系の分野において、ファイバー共振器を使ったものが報告されるようになった [111]。ファイバー共振器とは、端面がミラーコートされたファイバーを向い合せたもので、ミラーの構造を非常に小さくする事ができ、また端面の曲率半径も小さくする事ができるため、モード体積も非常が小さい共振器が実現できる [39]。中性原子での先行研究 [111] では、共振器構造の小ささを利用し、アトムチップと呼ばれるチップ上での磁場トラップを用いたボーズアインシュタイン凝縮の cavity QED 系が報告されている。この実験では、非常に小さなモード体積と協調効果を組み合わせる事で非常に大きな C を実現している。

構造が小さなファイバー共振器はその分イオントラップに与える影響は小さい事が想像されるため、ファイバー共振器とイオントラップを組み合わせた実験を考える事ができる。そのため、上の中性原子の実験に触発され、ファイバー共振器を用いたイオントラップ cavity QED 系の開発が複数の研究室で行われるようになった。さらに 2012 年になり、トラップイオンに対のファイバーを近づけていく実験が報告されており、イオンとファイバーの距離としては 150μm 程度が実現された [38]。この実験は非常に低フィネスの共振器を用いているため、いまだ強結合 cavity QED 系の報告はされていないが、単一イオンの強結合 cavity QED 系の実現は手の届くところに来ているという事ができる。

残った最後の問題は、ファイバー共振器の高共振器長高フィネス化である。先行研究 [39] によって、ファイバー共振器は高フィネスのまま共振器長さを長くする事が難しい事が指摘されている。これは以下の実験の節で述べるように、ファイバー端面の幾何学的な構造による。実現しているイオン・ファイバー間隔は 150μm 程度であるので、望まれる共振器長は 300μm 程度となる。中性原子での先行研究では共振器長は 40μm で設計しており数百 μm の共振器は必要がなかったが、単一イオンの強結合 cavity QED 系実現のためには長共振器長要のファイバー共振器の開発が必要と言う事ができる。

本実験で目指すトラップは図 6.1 のようなものである [112]。ファイバー表面での帯電の影響を小さくするため、ファイバーの周りに金属の鞘のような構造を作

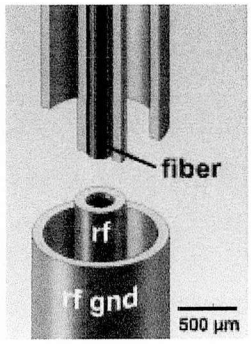

図 6.1: ファイバー一体型イオントラップ
イオントラップを用いた強結合 cavityQED を目指したファイバー一体型のイオントラップ図

る。この鞘は RF 電極を兼ねたものである。ファイバーと RF 電極、さらにその周りの GND 電極はすべて接着剤で固定されており、全体がピエゾとマイクロステージで動くように設計してある。

6.2 実験

ミラーコートしたファイバーを対面させた共振器を構築する。以下のように段階を追って製作し、性能を調べていった。

- 大きなミラーと平面ファイバミラーの共振器
- 大きなミラーと曲面ファイバミラーの共振器
- 平面ファイバーミラーと曲面ファイバミラーの共振器
- 曲面ファイバーミラーと曲面ファイバミラーの共振器

今回実験に用いたミラーコートファイバーは 866nm における透過率 18ppm、コア系 200um のマルチモードファイバーである。写真を図 6.2 に載せる。CO2 レーザーをファイバー表面に絞って照射することで、実験室においてファイバー断面の形状を曲面にすることができる (6.3 節)。また、曲面の形状を光干渉計で測定することで、その局所的な曲率半径[4]を推定してある。また、先行研究 [39] に比べ、ファイバーの広い領域を球面加工を施すことによって長共振器長化を狙ってある。

[4]ガウシアンビームで表面を加工しているため、その表面は球ではなく断面図がガウシアンの形状の曲面となる。

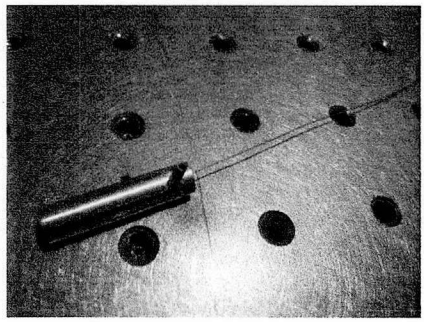

図 6.2: ミラーコートファイバー
銅でコーティングされたファイバーの写真。マウントされた先端部分が高反射率誘電体多層膜コーティングしてある。

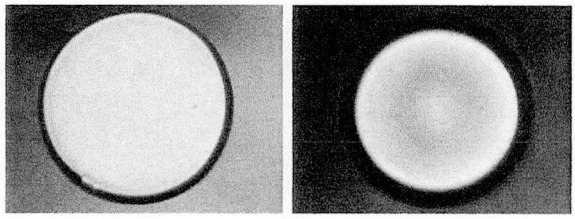

図 6.3: ミラーコートファイバー表面
コーティングされたファイバー表面の顕微鏡写真。(左図) 平面ファイバー (右図) 曲面ファイバー

6.2.1 ミラー/平面ファイバミラー共振器

今回使用したファイバーがマルチモードファイバーであるため、ファイバーから共振器に光を導入するとモードマッチがあまり良くない可能性がある。そこで、準備として同じコートをした大きなミラー (大きさ 0.5”、曲率半径 5cm) をインプットカプラとして共振器を構築した。また、透過率が 18ppm(期待できる Finesse 120000) と低いので、ファイバーミラーに光を当てながらのミラー同士を正対させるアライメントが困難であるため、下記のようにアライメントを行った。

- HeNe レーザー (633nm, ミラー透過率〜80 %) を大きなミラー越しにファイバーへと結合させる
- HeNe レーザーのファイバーによる反射・ミラーによる反射をすべて入射光に合うように戻し、ミラーを正対させる
- HeNe レーザーの低フィネス共振が観測できるので、最大化する

- レーザーを 794nm(ミラー透過率〜500ppm) に変更し、共振を最適化
- レーザーを 866nm(ミラー透過率〜18ppm) に変更する

これらのアライメントにより、所望の 866nm における共振を観測することができた。光に 1GHz のサイドバンドを立てることでピエゾ掃引の周波数マーカーとし、FSR や共振器線幅、Finesse を測定すると

波長	共振器長	FSR	線幅	Finesse
794 nm	60μm	2.50 THz	189 MHz	13000
866 nm	60μm	2.50 THz	58 MHz	40000

と測定できた。

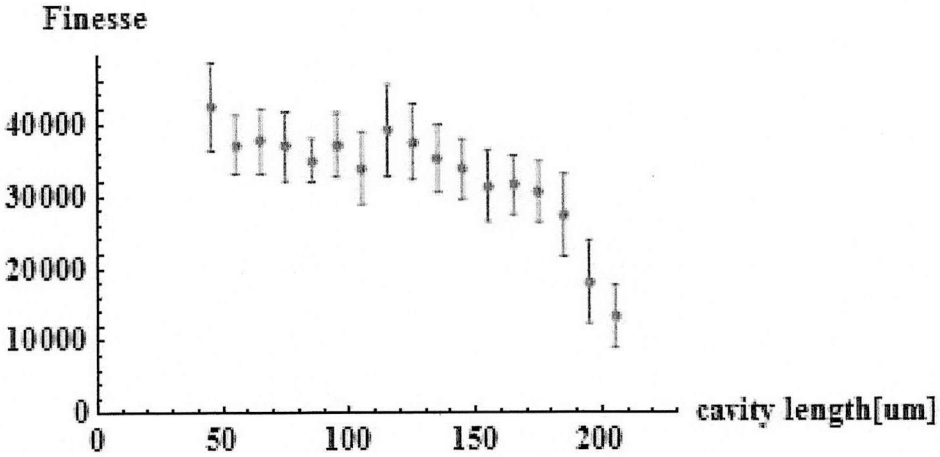

図 6.4: Finesse と共振器長
ミラー/平面ファイバミラー共振器において、共振器長を変化させたときの Finesse の変化をプロットした。

イオントラップと組み合わせるためには共振器長をもっと長くしなければならない（350 μm 程度以上で数 eV のトラップ深さを確保できる）ので、866nm において、共振器長を変化させながら Finesse の変化を観測した。結果を図 6.4 に載せる。結果より、共振器を長くすることで 200μm 程度を境に Finesse が急激に落ちている事が分かる。

この原因を探るため、共振器長を 47μm とし、ファイバーミラーを共振器軸に垂直に平行移動しながら Finesse を測定した。この結果が図 6.5 である。この時の共振モードのビームウェストは約 20μm である。図 6.5 より位置に依存したロスがある事が分かる。この事から、共振器長を長くすることで共振器モードのビーム

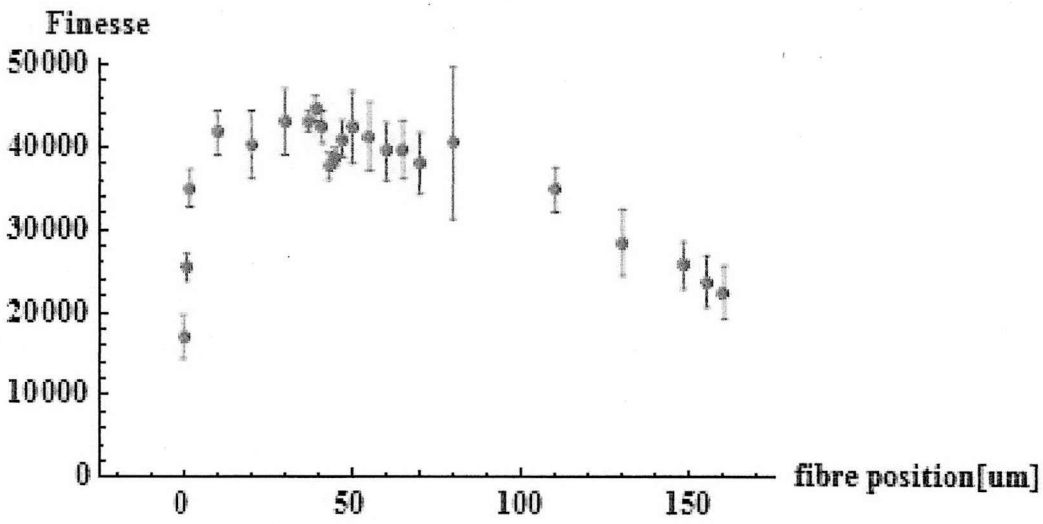

図 6.5: Finesse とファイバー位置
ミラー/平面ファイバミラー共振器において、ファイバーを平行移動させた時の Finesse の変化をプロットした。

ウェストが大きくなり、表面の何らかのロスの影響を強く受けているというように考えることができる。

曲面ファイバーでは共振器モードはさらに小さくなるため、この影響は少ないと考えることができるので、平面ファイバーでの解析はここまでにし、曲面ファイバーの実験に移る。

6.2.2 ミラー/曲面ファイバミラー共振器

予備実験として、曲面ファイバーは曲率半径が一番長い 740μm のものを使用した。平面ファイバーの時と同様のアライメントにより、共振させることができた。まずは大きなミラーをインプットカプラとして使う。

曲面ファイバーは曲面がガウシアンの形状をしており、球面ではないため、完全なガウシアン共振モードはたたない。794nm が共振したときの信号を図 6.6 に載せる。FSR のちょうど真ん中付近によくわからないサイドバンドが立っている。ガウシアン形状の境界条件による共振器モードは非常に複雑なものになるはずであるので、ここでは深く立ち入らない。

共振器の性能をまとめると

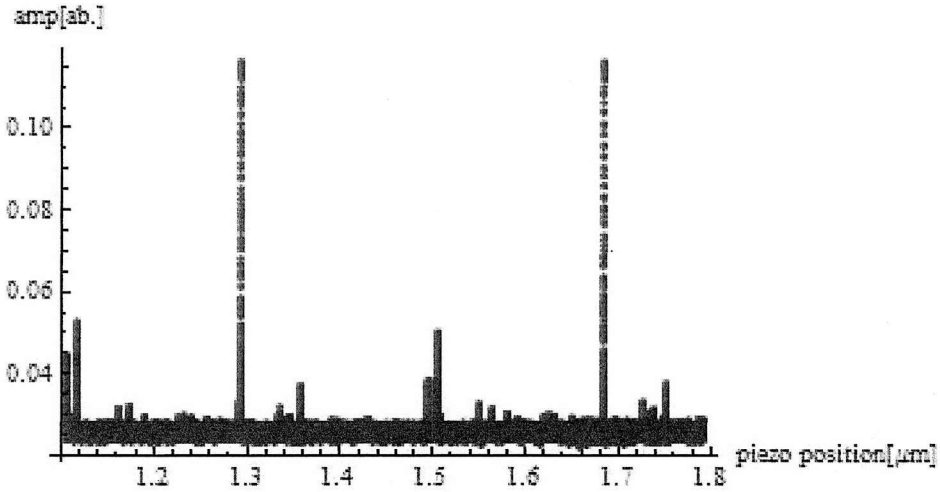

図 6.6: 曲面ファイバー共振器
ミラー/曲面ファイバミラー共振器の共振の様子。縦軸は透過光強度を表している。横軸はピエゾに印加する電圧を位置に直してある。

波長	共振器長	FSR	線幅	Finesse
794 nm	315μm	2480 GHz	45.8 MHz	11000
866 nm	315μm	480 GHz	11.4 MHz	45000

となった。平面の場合に比べ、長い共振器長で高い Finesse が出ている事が分かる。

先ほどと同様に共振器長の関数として 866nm の Finesse を測定した結果が図 6.7 である。平面ファイバーに比べて明らかに長い共振器長でも高い Finesse が維持できている。これらの違いは、共振モードのビームサイズで理解できる。ファイバーの曲面を球面に近似し、共振器モードのウェストからファイバーの位置でのビームサイズを計算すると、共振器長 315μm の時に約 10μm となり、平面の場合に比べるとかなり小さくなる。そのおかげで高い Finesse が実現しているものと思われる。

以上のように大きなミラーから入射させることで共振器はできたので、次にそのままファイバーから光を入射し、共振モードを観測してみる。ファイバーのコア系が大きいためにモードマッチが非常に悪いが、共振モードを観測することができた。結果を図 6.8 に載せる。[5]

[5]図 6.8 の信号は AC 結合の光検出器で観測をしているため、透過信号がエラー信号になっている。この時点ではたまたま高感度な検出器が AC 結合のものしかなかったため、このような信号となった。以下では新たに高感度で DC 結合の光検出器を作成し、線幅等の測定が可能になるように

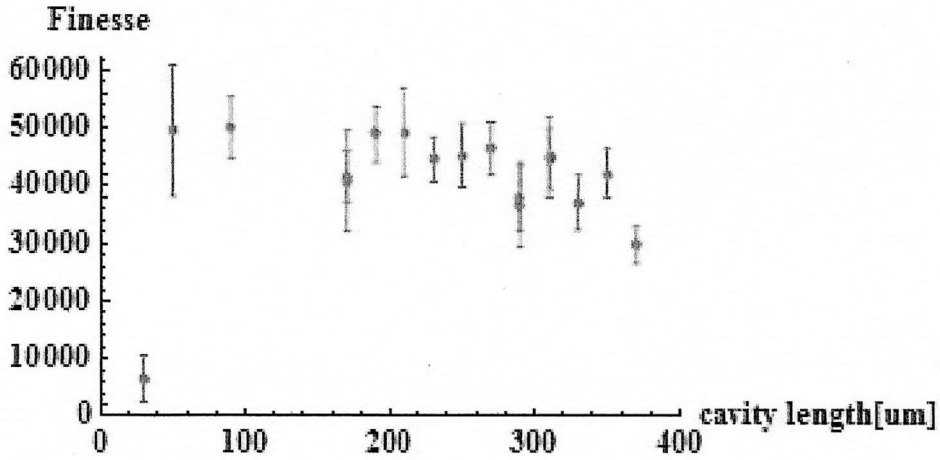

図 6.7: 曲面ファイバー共振器長と Finesse
ミラー/曲面ファイバミラー共振器の 866nm に対する Finesse を共振器長の関数として測定した。

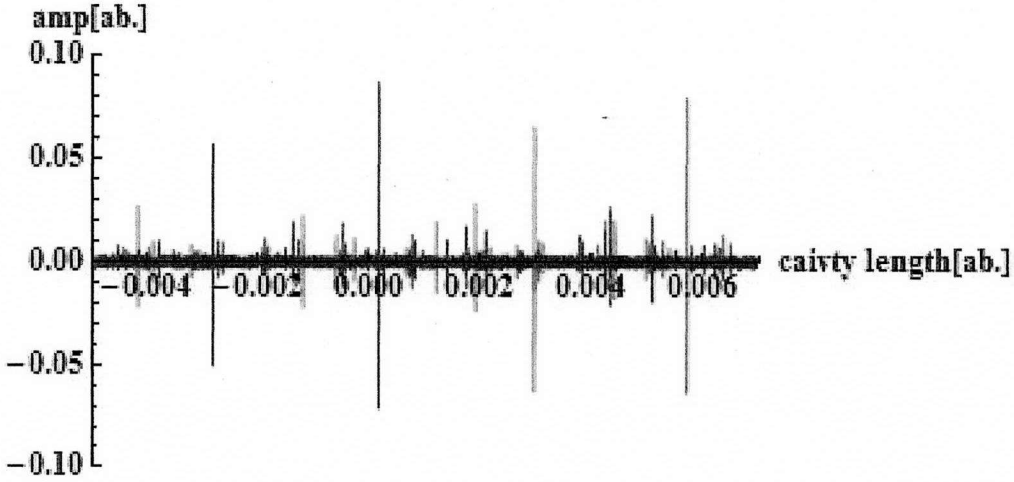

図 6.8: ファイバーから光を入射したときの共振シグナル
ミラー/曲面ファイバミラー共振器の共振シグナル。大きなミラーから光を入射して共振器のアライメントを行い、そのままファイバーから光を入れる事で、ファイバー入射の共振を観測した。

これで、ファイバーファイバーの共振器が原理的には作成可能である事が分かった。

6.2.3 平面/曲面ファイバー共振器

コーティングされたファイバーのみで構成された共振器を作る。共振モードは曲面同士の共振器の場合の方がより小さくなるため、ion との結合も強くすることができる。しかし、ここではまず平面曲面のファイバー共振器について調べる。

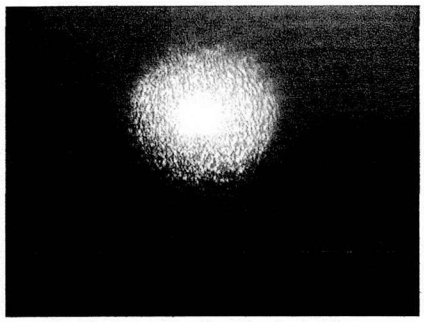

図 6.9: マルチモードファイバーからの出力光
マルチモードファイバーでは、ファイバー内での多数回反射により、出射モードは非常に汚くなる。

マルチモードファイバからの出射パターンは、ファイバーでの多数回の反射によって図 6.9 のように砂嵐状になる。そのため、共振器とのモードマッチは調整不可能な上に非常に小さくなることが予想される。

そこで、高強度のレーザーを改めて作製し、少ないモードマッチでも共振器の透過光がディテクターで受けられる強度になるようにした。作ったレーザーの写真が図 6.10 である。

30mW の 850nm の光をファイバーに結合させ、共振モードを観測することができた。図 6.11 が結果である。

つづいて、共振器長を変化させながらフィネスの測定を繰り返し、ファイバーの曲率半径と共振器モードの安定条件との関連を測定した。結果が図 6.12 である。曲率半径が小さくなるほど、共振器の安定条件も狭くなっている事が分かる。この理由は後の節で述べる。実験で必要な共振器長 350um でフィネス 60,000 の共振器の作成に成功した。

した。

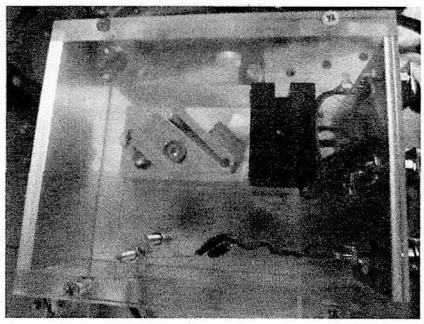

図 6.10: 外部共振器付半導体レーザー
共振モード観測のため新たに作ったレーザー。850nm で 50mW の出力が出せる

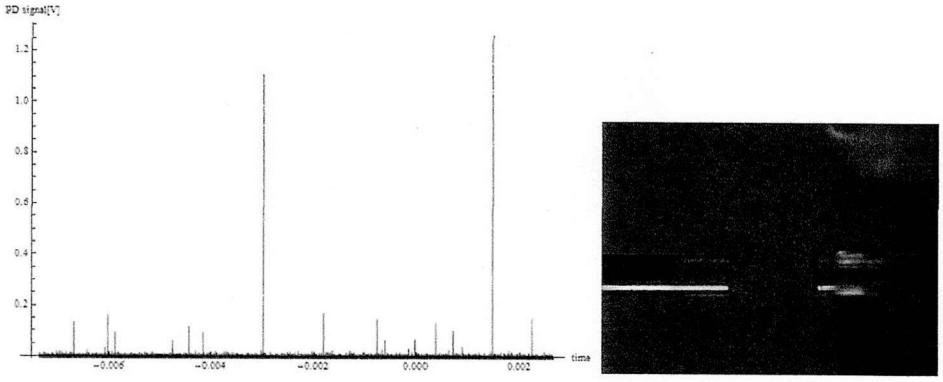

図 6.11: (左図) 平面曲面ファイバー共振器の共振信号 (右図) 共振器写真
ピエゾを掃引し、透過光の強度をモニターした。左図が共振器の透過信号で、右図が共振器を顕微鏡で写真に撮ったものである。

6.2.4 曲面/曲面ファイバー共振器

さらにモード体積を減らすために、2枚のミラーともに曲面ファイバーとした共振器を作る。前節の高強度レーザーを用いる事で簡単にアライメントをすることができた。

図 6.13 に共振器の共振器長とフィネスの関係を載せる。また図 6.14 は共振器の透過信号である。容易に予想されるように平面曲面共振器に比べ長い共振器長において共振を保っていられている。フィネスも十分に高く、共振器としては良いものになっている。しかしながら、図 6.14 にあるように、透過信号には共振しているするどいピークに加え、大きなオフセットが乗っている。この原因を調べるために、表面からでてくる光を観測したのが図 6.14 左図である。コーティングの透

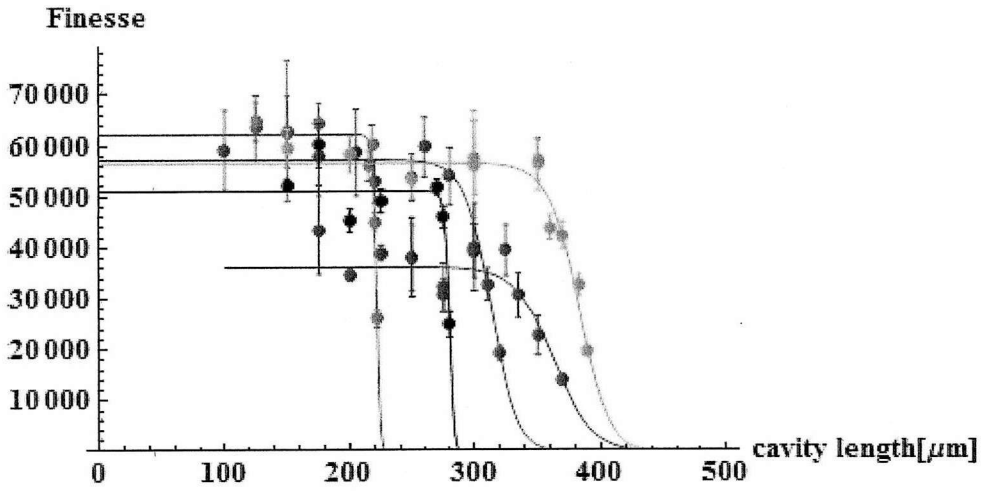

図 6.12: 平面曲面ファイバー共振器の共振器長とフィネス
いくつかの曲率半径のファイバーで共振器のフィネスの共振器長依存性を測定した。安定条件が変化している事が分かる。長い共振器長で共振しているものから、740um, 577um, 377um, 470um, 258um の曲率半径の曲面ファイバーを用いた結果で、実線はそれぞれ共振器のクリッピングロスを考慮に入れたフィッティングである。

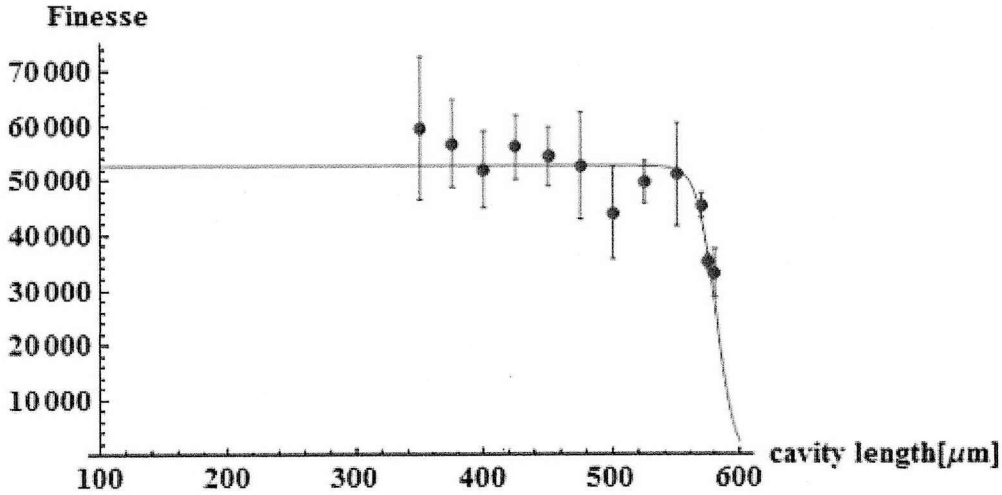

図 6.13: 曲面曲面ファイバー共振器の共振器長とフィネス
曲面曲面ファイバー共振器の共振器長とフィネスの関係を測定した。曲面ファイバーとしては曲率半径 580um, 740um の物を使用した。

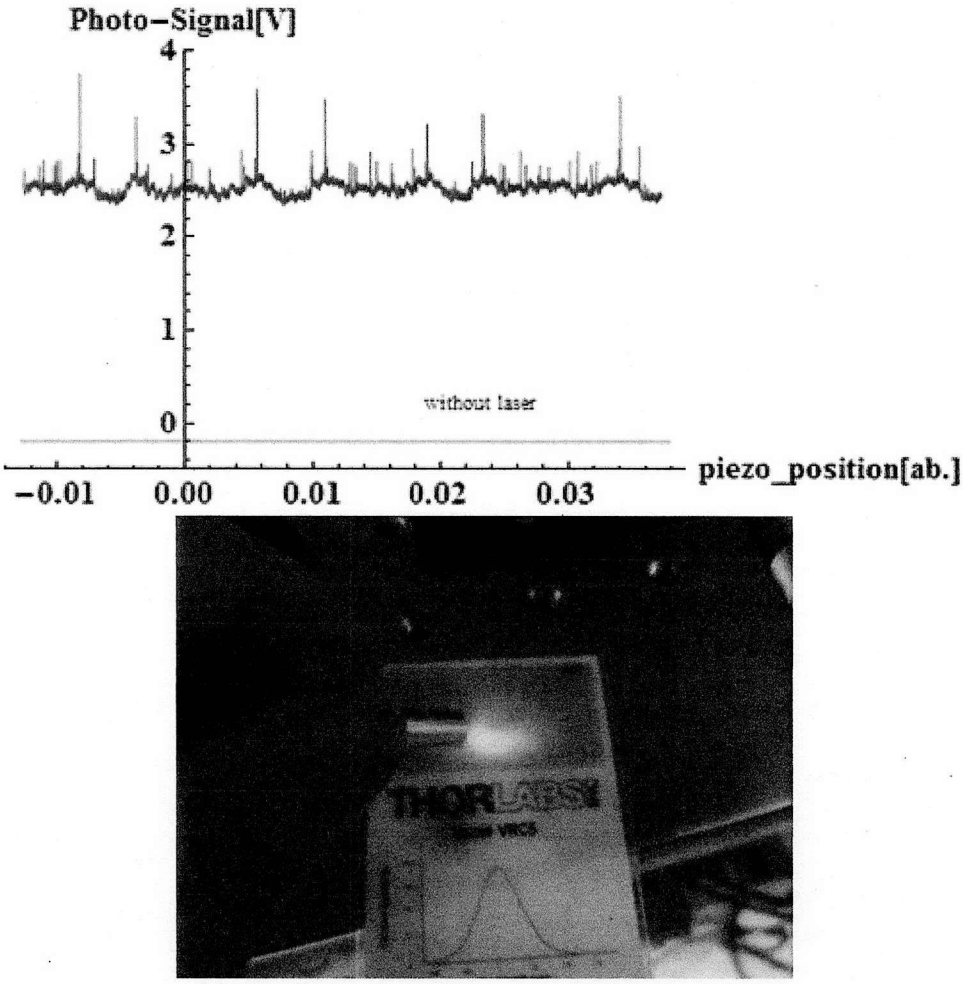

図 6.14: （左）曲面曲面共振器の信号（右）ファイバーからの漏れ光
（左）曲面曲面共振器における代表的な透過信号。するどいピークに対し、大きなオフセットがついている事が分かる。（右）曲面ファイバーからの漏れ光

過率から予想される出力光強度は約400nWであり、IRカードでは観測できないはずである。よってこの強い表面からの透過光はファイバーの先端からレーザーが漏れている事を意味している。この漏れ光が反対側のファイバーへと伝わり、共振器の透過光強度の大きなオフセットになっていると考えられる。この原因は以下の考察で述べる。

6.2.5 トラップ構造中のファイバー共振器

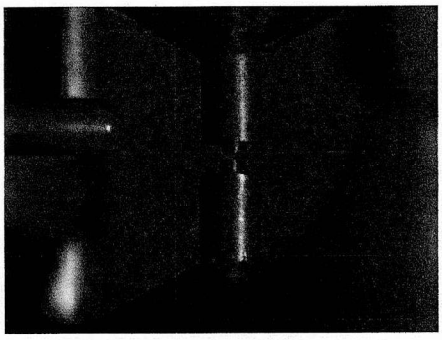

図 6.15: ファイバー一体型イオントラップ組み立て
イオントラップを用いた強結合 cavityQED を目指したファイバー一体型のイオントラップ写真

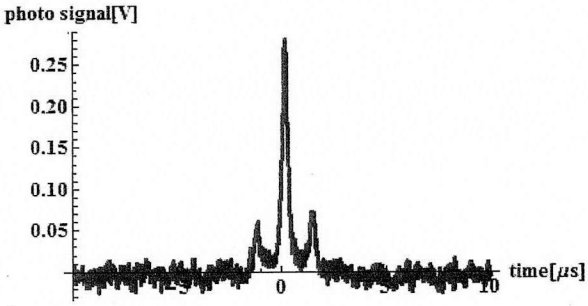

図 6.16: ファイバー一体型イオントラップ中での共振
イオントラップ中での共振信号。周波数マーカーとして、ECDL の電流源を 110MHz で変調しており、その信号がサイドバンドとして観測できている。

最後に、これまで開発してきたファイバー共振器をイオントラップ構造の中に組み込む事を考える。ファイバーはチューブ型の RF 電極に挿入し、接着剤で固

定する。その後、一回り大きなチューブ型のGND電極にこれを挿入・固定し、トラップを組み立てた。トラップは、ファイバーと一体化した電極全体をマイクロステージとピエゾで動かせるようになっており、共振の調整ができる。このファイバー一体型イオントラップの写真が図6.15である。横に見えているのがオーブンのコリメータで、補正DC電極の役割も果たす。上下から出ている太いチューブがGND電極で、中心で飛び出ている一対の細いチューブがRF電極である。写真では見えないが、内部にはRF電極端面から10um引っ込ませたファイバーが挿入してある[6]。

このセットアップを用いてファイバーの共振を確認する事ができた（図6.16）。

6.3 考察

6.3.1 曲面ファイバーの漏れ光

曲面ファイバーは図6.14（右図）のように、大きな漏れ光がある。この原因を調べるため、平面ファイバーとと曲面ファイバーを側面から顕微鏡で観察した。そ

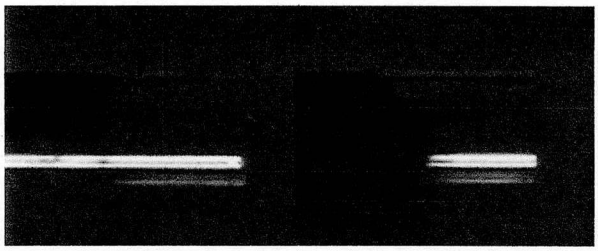

図 6.17: ファイバーの側面図
ファイバーを側面から顕微鏡で観測した。（左図）曲面ファイバー（右図）平面ファイバー

の写真が図6.17である。ファイバー先端の端をよく観察すると、曲面ファイバーは端がなまっている事が分かる。ファイバー表面を曲面にするため、曲面ファイバーでは表面に多数回のCO2レーザー照射をしている。そのため、表面付近において写真のように角が落ちてしまったと考える事ができる。一方で、このファイバーはコア径200umに対し、クアッド層は4umの厚さしかない。よって端が写真のようになまる事で、表面付近ではクアッド層がなくなっていると考えられる。クアッド層がないともはやファイバーとしての機能は果たさない。また、さらにこ

[6]図6.15の写真は共振調整用の練習のため、上下のトラップ電極が非対称であったり、オーブンがずれている。本番では、イオントラップとしての性質も保つため、これらの作成や配置には注意しなければならない。

の部分は角度がついてしまっているために、他の部分とは違いミラーコーティングが施されない。その結果光がその部分から漏れてしまっていると考える事ができる。[7]

この漏れ光がイオンに当たってしまうと、cavity QED による光子と原子の結合状態を壊す事になってしまうため、曲面ファイバーから光を入射させることはできない。そのため、曲面/曲面ファイバーによる共振器は用いる事ができない事がわかる。そこで、今回の実験では平面/曲面ファイバーを用いた cavity QED の実現を目指すことにする。

6.3.2 平面/曲面ファイバー共振器の安定条件

前節で平面/曲面ファイバー共振器の安定条件について触れた。このような共振器の安定条件は球面ミラーの場合にも知られており、その場合は球面の曲率半径に対して共振器長が等しいもしくは大きい時に共振モードのウェストが 0um もしくは虚数となり、共振器が作れなくなる。そこで、球面の場合の安定条件に比べ

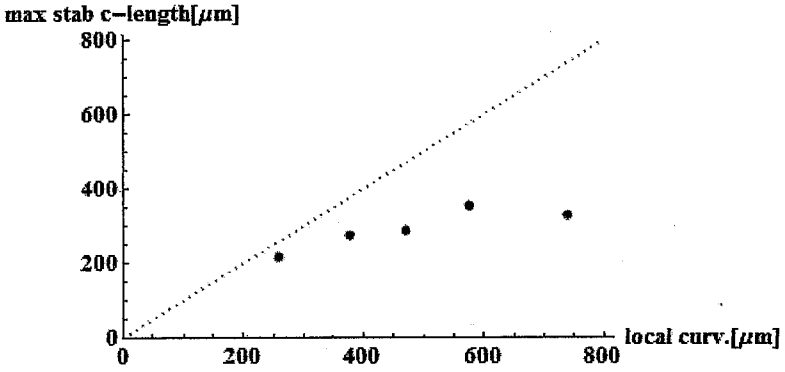

図 6.18: 共振器の安定条件と曲率半径
ファイバー共振器の安定条件を曲率半径の関数としてプロットした。点線は球面ミラーの場合の安定条件である。

たものを図 6.18 に載せる。球面に比べいち早く共振器の安定条件から外れている事が分かる。

先行研究 [39] においても、同様の共振器長依存性を観測しており、ファイバー表面が球面ではなくガウシアン形状をしている事に起因していると考えられているがその詳細はまだ調べられてない。一方でイオントラップ cavity QED の場合は

[7]シングルモードファイバーの場合、コア径〜2um に対し、クアッド層〜190um と非常に厚いので、今回のような問題は起きないと考えられる。

共振器長を長くする必要があるため、共振器の安定条件は非常に興味のある問題になる。

図6.18から分かる事は、ファイバーミラーの曲率が小さいときには共振安定条件が球面ミラーの場合と似たような振る舞いをするという事である。共振器の安定条件はクリッピングロスで決まるので、曲率半径の大きなミラーは光を留めておく力が弱く、安定条件が狭くなるという事が考えられる。また、共振器長が長い時は焦点位置におけるミラーの開口数が小さいので、共振モードの焦点は大きくなる。一般にビームスポットが大きいビームは伝搬とともに緩やかにビームが広がるため、ガウシアンミラーと球面ミラーの光を留める力の違いが大きくでると考えられる。反対に、ビームスポットが小さいビームはすぐにビームが広がるため、両者の違いが出にくいと言う事ができる。

この事から、ガウシアンミラーと球面ミラーで安定条件がそれほど変わらない最大の曲率半径は、共振ビームサイズに関連していると言う事が出来、つまり焦点から見たミラーの開口数に依存しているという事ができる。図6.18より、線形フィットによって共振器長200um程度以下の場合は安定条件が球面ミラーとガウシアンミラーとであまり変わらないとすると、今回のガウシアンミラーは加工面の大きさは半径で約80um程度であるので、開口数(NA)にして

$$\mathrm{NA} = \sin[\arctan(80/100)] \sim 0.6 \tag{6.10}$$

となる。つまり、開口数がおよそ0.6以上の場合にガウシアンミラーの安定条件を球面ミラーを用いて計算して良いという予想ができる。

先行研究である[39]の結果にこの計算方法を適用すると、NA = 0.35となり、球面ミラー近似が良くない事が予想される。実際、曲率半径100umに対して、共振器長60umが安定な共振器の限界となっており、球面ミラー近似が破れている事が分かる。

以上の事から、長共振器長のファイバー共振器を作るにはファイバーの加工面を広くとればよい事が分かり、そのおかげで本研究のファイバー共振器は長い共振器長を確保できたという事ができる。

しかしながら、安定条件のこれ以上の定量的な評価をするにはデータが足りない。これ以上の事を言うには、さらに調べる必要があるだろう。

6.3.3 共振器モードとイオンの結合

cavity QEDは原子の自然放出レートγ、共振器の線幅κ、原子と光子の相互作用強さgの三つのパラメータによって記述される。今回用いるCa^+の場合、$\gamma = 11\mathrm{MHz}$

である。目標となる強結合領域と呼ばれるものは

$$\frac{g^2}{\gamma\kappa} > 1 \tag{6.11}$$

という条件を満たした系である。

原子と光子の相互作用 g は

$$g = \sqrt{\frac{3c\lambda^2\gamma}{8\pi V}} \tag{6.12}$$

と書くことができる。ここで、λ は遷移の波長、c は光速、V は共振器のモード体積である。共振器モードがガウシアンモードの場合、モード体積は

$$\frac{\pi w_0^2}{4} L_{cav} \tag{6.13}$$

と簡単に書くことができる。ここで、w_0 は共振器モードのウェストサイズで、L_{cav} は共振器長である。

しかし、ファイバー共振器の共振モードは単一のガウシアンモードではないので、この数式をそのまま利用する事ができない。また、ファイバー共振器の場合の結合定数 g の詳細な計算は未だされていないため、ここでは共振器する共振モードを数値計算によって計算し、そのモードを用いて原子と光子の相互作用の強さを見積もった。

共振モード

「ある空間モードが共振する」とは、片方のミラー上である空間モードをもった電磁波がもう片方のミラーで反射し、元の場所に戻ってきたときに初期状態と同じ空間モードとなる事を意味する。この時、同じ空間モードのままミラーの間で何度も反射する事が可能になり、その空間モードの光は共振器内部に閉じ込められる。

一方で、光の伝搬はフレネルの伝搬公式

$$E_2 = \int K E_1 dxdy \tag{6.14}$$

で与えられる [113]。ここで、K は伝搬の核（カーネル）となる演算子である。

よって、K_0 を片側のミラーから始まり、もう片方のミラーで反射して戻ってくるまでの伝搬のカーネルであるとすると、共振器の共振モード $\phi(x,y)$ は積分固有方程式

$$\phi(x,y) = \xi \int K_0(x,y,x',y')\phi(x',y')dx'dy' \tag{6.15}$$

を満たす解であるという事ができる [113]。ここで固有値ξは一回のトラベルによる減衰を表しており、絶対値が1以下の複素数である。固有値の絶対値が最も大きい固有モードが一番ロスの少ない共振モードであるという事ができる。この積分固有方程式を数値的に解くことにより、共振する空間モードとそのロスを計算する。

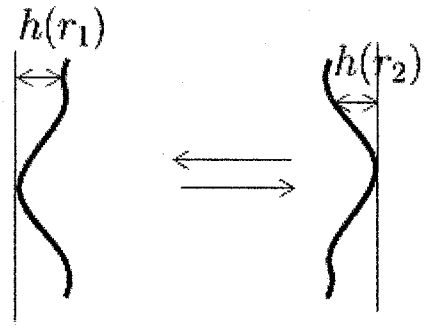

図 6.19: 積分固有方程式のカーネル

図6.19にカーネル導出のためのパラメータの置き方を書いた。なお、二つのミラーは同じものとし、動径方向に関して対称であるとする。このような設定のもとで、共振器長Lの共振器に対し、近軸近似を施したカーネルは極座標表示で角度方向の積分をした後で

$$K_0(r_1,r_2) = \frac{ik}{2\pi L} e^{-ikL} e^{ik(h(r_1)+h(r_2))} e^{-\frac{ik}{2L}(r_1^2+r_2^2)} 2\pi r_1 J_0(\frac{kr_1r_2}{L}) \tag{6.16}$$

となる。ここで、光の波数をkとし、$J_0(z)$は第一種ベッセル関数である。よって

$$\phi(r_2) = \int K_0(r_1,r_2)\phi(r_1)dr_1 \tag{6.17}$$

の積分固有方程式を解けばよい。数値計算の方法としては、座標軸を細かくメッシュで分け、上の積分固有方程式を有限次元の行列に書き下し、行列の対角化問題として解く。

一般に、固有方程式を高速に数値計算する方法としては、Arnoldi法というものが有名である。mathmaticaを利用した場合、行列の対角化は内部的にはこの方法によって行われている。

まず、球面ミラーに対する数値計算結果を図6.20に載せる。計算の離散化幅は100nmで、50μmまでの範囲で計算した。球面ミラーの最低次モードであるガウシアンモードが再現できた。

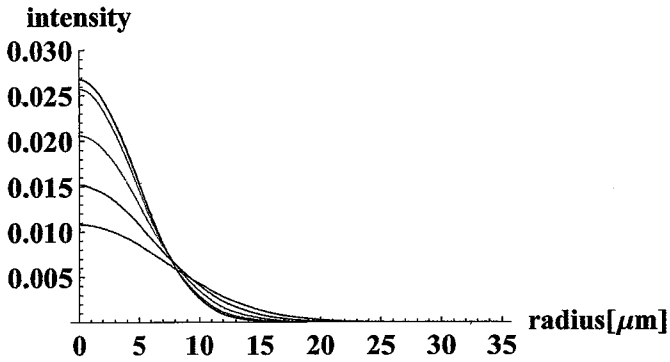

図 6.20: Arnoldi 法による共振モード計算結果（球面ミラー）
積分固有方程式を離散化によって有限化し対角化する事で、球面ミラーの最低次の固有モードを計算した。モードが細くなっていく順番でミラー表面を $z=0$ としたときの z=0・L/8・L/4・3L/8・L/2 の点におけるモードの断面図を表している。曲率半径 426μm の球面ミラーで、共振器長は 400μm とした。

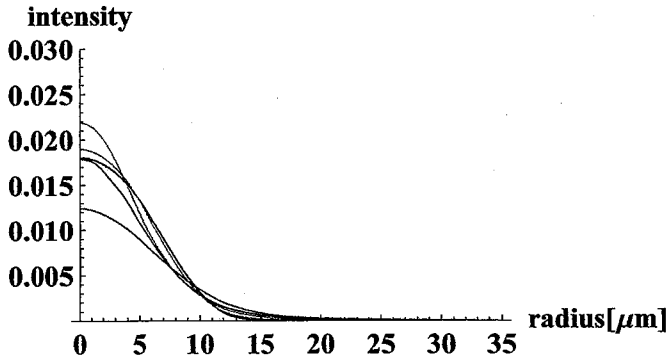

図 6.21: Arnoldi 法による共振モード計算結果（ガウシアンミラー）
積分固有方程式を離散化によって有限化し対角化する事で、ガウシアンミラーの最低次の固有モードを計算した。それぞれ順番にミラー表面を $z=0$ としたときの z=0・L/8・L/4・3L/8・L/2 の点におけるモードの断面図を表している。中心における局所的な曲率半径が 426μm となるように、深さ 1μm、ガウシアンの σ は 29.2μm とした。共振器長は 400μm にしてある。

図6.21がガウシアンミラーを用いた場合のモード断面図である。数値計算のパラメータは球面ミラーの場合と同じにしてある。球面ミラーに比べ、共振器の中心でモードが絞られていない事が分かる。また、モードの形はガウシアンモードとは異なっている事が分かる。

原子と光子の相互作用

上の数値計算手法によって求めたモードを用いて、原子と光子の相互作用の強さを見積もった。なお、実際の実験に即し、平面曲面ミラーの共振器を仮定し、イオンは共振器の中央にトラップされているとした。モード体積Vは

$$\int 2\pi r|\phi(r,\theta)|^2 \sin(kz) dr d\theta dz \tag{6.18}$$

によって計算される。

結果は

	解析計算（球面）	数値計算（球面）	数値計算（ガウシアン）
g[MHz]	23.76	23.74	20.37

(6.19)

となった。

球面ミラーの結果より、数値計算が解析計算をよく近似している事が分かる。また、ガウシアンミラーに関しても球面ミラーに対して1割程度の結合の悪化にとどまっている事が計算できた。

以上より、現在のファイバー共振器によって期待される原子と光子の相互作用強さは約20MHzであり、強結合条件について

$$\frac{g^2}{\kappa\gamma} = \frac{20^2}{11 \times 6.0} = 6.1 > 1 \tag{6.20}$$

となり、強結合領域のcavity QEDが実現できると期待できる。ここで、共振器の線幅は実現できているフィネス60,000から計算した。

6.4 まとめ

本研究はファイバー共振器一体型のイオントラップによるイオントラップcavity QEDをめざし、そのためのファイバー共振器の作成を行ったものである。ファイバー共振器の共振器長に対する応答を調べ、イオントラップ実験において利用できる性能のファイバー共振器の開発に成功した。得られた性能は共振器長350umでフィネスは60,000であり、その共振モードの解析による結合定数gの計算によって、cavity QEDの強結合領域が実現可能であると見積もられた。

第7章　結論

本論文では、Linear Paul Trap 中に捕獲された複数の $^{40}Ca^{+}$ イオンを用いた量子情報処理に関する実験、特に断熱状態を利用した状態生成やデコヒーレンスの抑圧の方法を提案し、実験で実現した。

第 1 章では、量子情報処理分野自体の動機つけ、また冷却イオンを用いた量子情報処理研究の背景について説明し、等研究分野における本研究の位置付け、また研究目的について述べた。

第 2 章では、イオントラップやドップラー冷却、サイドバンド冷却の基本原理について説明した。また、本実験に欠かせなかった周辺技術として、クーロン結晶の自動再結晶化とファイバーノイズキャンセルについて述べた。後半では、イオンを qubit として用いるための各種ゲートや電子シェルビング法について説明をした。最後では、トラップイオン系において特に強力である Mølmer-Sørensen ゲートについて述べた。

第 3 章では、誘導ラマン断熱過程（STIRAP）を通じた幾何学的位相による単一 qubit の量子ゲートについて述べた。STIRAP には、光遷移と RF 遷移を組み合わせて利用し、ゲートは Ca^{+} の S-D 状態の光 qubit に対するものを実現した。また、このゲートによる qubit の状態の振動を観測し、その明瞭度は x ゲート・z ゲートに対してそれぞれ 0.93, 0.86 であった。この数字を改善するには、RF アンプや AOM の非線形性を補正し、RF と光パルスのパルス形状を完全に一致させる必要がある事が分かった。

第 4 章では、断熱定理によりデコヒーレンスから守られたエンタングルド状態を生成した。ドレス場とスピン相互作用を組み合わせる事で、直接ドレス場の固有状態に状態を準備することができ、ドレス場によって守られたエンタングルド状態が生成される。また、その状態のコヒーレンス時間を測定し、断熱定理によって守られてない場合に比べコヒーレンス時間が約 2 桁程度長くなった事を確認した。さらにドレス場中でのデコヒーレンスに強い特性を活かしたドレストデコヒーレンスフリー部分空間 (DDFS) の提案を行い、DDFS 中での射影測定や各種ゲートの提案を行った。また、第 4 章でのエンタングルド状態生成方法の特徴を利用した、エンタングルド状態への光ポンプの実験を提案し、数値計算によって評価した。

第5章では、2つの半数励起Dicke状態の生成方法を提案し、実現した。また、Dicke状態の評価方法として、従来のウィットネスによる方法に加え、忠実度の下限を測定する方法を提案し実行した。1つめの生成方法は、ドレス場の固有状態とスピン間相互作用を合わせたもので、2ionのDicke状態を実験的に生成することができた。2つめの生成方法は、サイドバンド遷移を用いたmulti-levelSTIRAPによるものである。この方法を用いて2,4ionのDicke状態を高い忠実度で生成する事ができた。実現された忠実度は2ionのDicke状態に対し$F = 0.96$、4ionのDicke状態に対し$0.84 \pm 0.03 \leq F \leq 0.88 \pm 0.03$であった。この値は光子系において実現している4qubitのDicke状態の忠実度0.84を超えるものである。また、6体のエンタングルド状態について十分に証明するに足る忠実度には足りなかったが、6ionのDicke状態の生成にも挑戦しその問題点を評価した。さらに、Dicke状態のスピンスクイーズド状態としての性質を利用した精密測定を行った。2ionを用いた多数回測定によって量子標準限界を超える精密測定をする事ができたが、完全なラムゼー干渉法に対する精度のゲインは得る事が出来なかった。最後に、高忠実度・多数個でのDicke状態生成に向けては、高い軸方向の閉じ込めを維持したままでのクーロン結晶の安定化が課題となる事が分かった。クーロン結晶を安定にする事で、10個程度のDicke状態生成の可能性がある事を数値的に示した。

第6章では、ファイバー一体型イオントラップを用いたcavity QED系構築のための、ファイバー共振器の開発に関して述べた。イオンと組み合わせる事ができる大きさの高フィネスファイバー共振器を構築する事に成功し、またその共振の安定性について調べた。共振空間モードの解析からはイオンと光子との相互作用強さを見積もる事ができ、そのパラメータより強結合cavity QED系の構築が可能である事を数値的に示した。また、ファイバー一体型のイオントラップを構築した。

以上より、断熱過程を利用した量子状態の制御、特に高忠実度のエンタングルド状態の生成やデコヒーレンスの抑圧ができる事がわかった。一般に大規模な量子情報処理は強い緩和に悩まされるため、それらから状態を守る事や、系の緩和を取り戻す量子エラー訂正が必須である。また、精密測定に役立つような大規模なエンタングルド状態生成に向けても、高い忠実度での状態生成が必要となる。それゆえ、本研究で実現したこれらの事は量子情報処理分野の大規模化や精密測定への応用等に向けた要素技術という事ができる。また、こうして作られる局所量子系を光で互いにつなぎ、大規模な量子ネットワークを構築するための強結合cavity QED系実現に向け、イオントラップに相性の良いファイバー型共振器の開発ができた。本研究でも示したように、トラップイオン系は孤立量子系としてエンタングルド状態の生成や量子ゲート等、量子的な様々な操作が可能である。それらを光でさらに互いに結ぶことで非常に強力な量子情報処理ツールが実現すると期待される。

謝辞

本研究を進めるにあたり、実験計画の段階から実験の遂行、また論文作成まで様々な面においてご指導・ご教示を賜りました占部伸二教授に深く感謝いたします。修士ではイオントラップとは異なる研究をしていた私を博士後期課程より快く受け入れてくれた事に誠に感謝しております。修士二年の夏には、大阪大学への入学前にも関わらず、イオントラップの体験という事で1週間程度占部研究室で実験の手伝いをさせてもらえた事を覚えております。その時は、電圧を印加した電極に囲まれたイオンなんてとんでもないDCシュタルクシフトがあるんじゃないかという様な疑問が浮かぶぐらい、イオントラップがどのようにイオンを捕まえているかすら不勉強な身でした。それでもとにかくイオントラップという実験系に触れる事ができ、とても楽しく、ためになりました。また普段の研究生活においても、私の実験アイディアを些細なものまで真剣に考えてくださり、占部先生のたくさんのご助言によって、よりしっかりしたものに昇華させることができました。占部先生の作る自由に研究ができる雰囲気の中、非常に楽しく実験・研究をする事ができました。2年間という短い期間ではありましたが、占部先生が開発されてこられた非常に完成度の高いイオントラップ系を用いて、様々な実験をする事ができました。このようにアイディアをすぐに実現に移せる実験系・環境はとても得難いものであったと思います。たいへんお世話になりました。また、これからもよろしくお願いいたします。

また、本論文作成にあたり、審査員としてたくさんのご指導・ご助言をいただけた井元信之教授、北川勝浩教授に深くお礼を申し上げます。公聴会でも先生方からは貴重な質問をいただき、非常に参考になりました。また北川先生には、以前の日本物理学会の年次会でも私の講演の後にご助言をいただいたことを覚えております。ありがとうございました。

日頃の研究生活においては、田中歌子講師、豊田健二助教には大変お世話になりました。田中先生には、修士二年の時の占部研究室体験の時や、その後の学振への応募の際に相談に乗っていただき、たいへん感謝しております。また入学後も普段の僕の何気ない疑問やアイディアを聞いていただき、また表面型イオントラップと永久磁石を組み合わせる系の設計のときには様々なご助言をいただきました。この系に関しては、今後実際に私自身が実験を行うかどうか、どのような

立場で関わっていくかは決めかねていますが、どちらにしろ実現に向けて関わっていきたいと考えております。豊田先生には、本研究を進めるにあたり、本当にたくさんの事を相談に乗っていただきました。内容は技術的な事や、起きている物理の理解、また最新の論文についての議論など非常に多岐にわたったと思います。さらにはまだまとまっていないトピックの議論にも付き合っていただいたり、貴重な時間をたくさん割いていただきました。また、実験がなかなかうまくいかずにいる時に、豊田先生のご助言で成功に結び付いた事も一度や二度ではなかったと思います。たいへん感謝しております。また、論文作成にあたっても、私のつたない英語を根気強く訂正していただき、とても感謝しております。

博士課程一年の間、先輩である土師慎祐さんには大変お世話になりました。イオントラップの知識がまったくゼロの状態から、イオンを捕獲し、量子情報処理実験を行うまですんなりと進むことができたのは、多くが土師さんのおかげだったと思っております。私が研究室に所属したその日から、実験をしている土師さんにつきっきりで実験技術を学ばせてもらいました。なにも分からない私が実験を手伝うのは邪魔であったことと思いますが、それでも懇切丁寧に物理や実験装置について説明をしてくださいました。どれだけ感謝しても感謝しきれません。ありがとうございました。また、実験系がおかしな振る舞いをした時の、土師さんの問題解決のスピードにはまさに驚きの連続でした。実験系すべてを把握しているからこその事だったんだと思います。現在の所属である電通大の向山研究室でも活躍している事と想像します。

占部研の秘書として篤本美沙子さんには大変お世話になりました。予算の処理や、その他の事務作業等、いろいろな事でお世話になりました。僕の適当な書類で迷惑をかけてしまったことも多かったと思います。ありがとうございました。

情報通信研究機構の早坂 和弘研究マネージャーには、私が博士課程に進むにあたり、相談に乗っていただきました。それまで面識もなかった私の突然の訪問依頼を快く受け入れてくれ、神戸の研究所の実験系の見学やイオントラップについての説明、また占部研究室を紹介してくださったのも早坂先生でした。また、私のイオントラップへの興味の入口も早坂先生が共著になっておられる cavity QED に関する一本の論文からでした。また、2012 年の夏には短期留学の機会も与えてくださり、大変感謝しております。

占部研究室で共に学生として励んだ大野君、立石君、藤原君、茨木君、神田君、神田君、松野君、岡田君、北中君、鈴木君、荒川君、浅間君、清水君にも大変お世話になりました。研究だけではなく、普段の研究室生活も非常に楽しいものでした。みんなが頑張る姿や何気ない会話が如何に私の励みになったか分かりません。ありがとうございました。また、私は実験中ぶらぶらと他の系の様子を覗きに行っていたと思います。明らかに迷惑な先輩だったとは思いますが、相手をし

てくれて感謝しております。実験は横から見ていても楽しいものでした。

サセックス大学の高橋優樹研究員には、2012年の夏季2か月の短期留学の間大変お世話になりました。何をやるかも分からず飛び込んだ留学だったと思います。高橋さんにはご迷惑をおかけしてしまったかもしれませんが、大変楽しく貴重な2か月間でした。実験も、研究室でのイベントもすべて楽しく、良い思い出ばかりです。ありがとうございました。また、サセックス大学において留学受入をしていただいたMatthias Keller講師にも大変お世話になりました。I thank Matthias very much for organizing my visit to Sussex. All things I did in England are good experience. I enjoyed experiments in Sussex and also enjoyed BBQ in Matthias' house. German sausages are best of the others'! サセックス大学で一緒に実験をした博士課程学生のAndrew, Michelにも日々の実験で大変お世話になりました。I thank Andrew and Michel both for my English months. Andrew's English was easiest for me, which helped me tremendously. Andrew also helped me in experiments, desk work and so on. I thank Andrew very much for his kindness. I enjoyed the experiments with Micheal. His idea about herical resonator help me even in Osaka. サセックス大学の博士研究員であるNicには宿の手配でお世話になりました。I thank Nic for introducing home-stay host. She is very kind person and I had good days in England. イギリスにおけるホームステイホストとしてVitaにも大変お世話になりました。Vita is my home-stay host. Thanks to her my stay in England was comfortable and I enjoyed talking with her in English. I wait for you to come Japan to be a English teacher.

最後に、長い学生生活を様々な面より支援・支えてくださった父　憲治、母　幸枝に感謝の念を表し、本論文を捧げます。

付 録A　マシュー方程式

本章では、マシュー方程式の数学的な取扱いと安定条件に関する議論をする。

A.1　マシュー方程式

マシュー方程式は一般に

$$\frac{d^2w}{dz^2} + (\lambda - 2h^2\cos 2z)w = 0 \tag{A.1}$$

と書かれる方程式である。

一章で触れた通り、Paul トラップ中でのイオンの運動方程式はマシュー方程式に従っている。本章ではマシュー方程式の解の安定性に関して述べる [114]。

A.1.1　マシュー方程式の解に関する諸公式

まず、マシュー方程式は正則であるため、解は整関数となる、つまり w と $\frac{dw}{dz}$ をそれぞれ空間のどこか一点で指定すると解が一意に定まる。またマシュー方程式が $z \to -z$ という変換で不変である事により、ある一つの解 $w(z)$ に対し、$w(-z)$ も解にならなければならない。マシュー方程式は線形である事により、これら解の線形結合 $w(z) \pm w(-z)$ も解でなければならないため、マシュー方程式の独立な解として偶関数と奇関数をとる事ができる。さらにマシュー方程式は実数係数の方程式であるため、複素数解に対しては、その実部と虚部はそれぞれマシュー方程式の解となる。そのため、解を実関数に限っても一般性を失わない。

以上の事より、マシュー方程式の解として実関数 $w_1(z)$、$w_2(z)$ を

$$w_1(z) = w_1(-z), \qquad (w_1(0) = 1, \frac{dw_1(0)}{dz} = 0) \tag{A.2}$$

$$w_2(z) = -w_2(-z), \qquad (w_2(0) = 0, \frac{dw_2(0)}{dz} = 1) \tag{A.3}$$

と選ぶことができる。

まず、$w_{1,2}(z)$ はマシュー方程式の解であるため

$$\frac{d^2w_1}{dz^2}+(\lambda-2h^2\cos 2z)w_1=0$$
$$\frac{d^2w_2}{dz^2}+(\lambda-2h^2\cos 2z)w_2=0$$

となる。それぞれ $-w=2, w_1$ をかけて辺々足して積分すると

$$C=\int w_1\frac{d^2w_2}{dz^2}-\frac{d^2w_1}{dz^2}w_2dz=w_1\frac{dw_2}{dz}-\frac{dw_1}{dz}w_2$$

となり、最右辺が定数となる事が分かる。$z=0$ の点における値からこの定数を定めれば、次の関係が得られる。

$$w_1\frac{dw_2}{dz}-\frac{dw_1}{dz}w_2=1. \tag{A.4}$$

つぎに、マシュー方程式が $z\to\pi$ に関して不変である事から、$w_1(z\pm\pi)$、$w_2(z\pm\pi)$ もまたマシュー方程式の解である。2 階微分方程式は独立な解が 2 つあるため、これらも $w_1(z)$、$w_2(z)$ の線形結合として表すことができる。式 A.2 でその係数を決めれば

$$w_1(z\pm\pi)=w_1(\pi)w_1(z)\pm\frac{dw_1(\pi)}{dz}w_2(z) \tag{A.5}$$

$$w_2(z\pm\pi)=\pm w_2(\pi)w_1(z)+\frac{dw_2(\pi)}{dz}w_2(z) \tag{A.6}$$

と定められる。複合を $-$ にとり、$z=\pi$ とおけば、

$$1=w_1(\pi)^2-\frac{dw_1(\pi)}{dz}w_2(\pi) \tag{A.7}$$

$$0=w_2(\pi)\{-w_1(\pi)+\frac{dw_2(\pi)}{dz}\} \tag{A.8}$$

計算できる。この関係式より、

$$w_1(\pi)=\frac{dw_2(\pi)}{dz} \tag{A.9}$$

が得られる。

A.1.2 Floquet の定理

マシュー方程式が周期 π を持っている事から、ある解 $w(z)$ に対して $w(z+\pi)$ もまたマシュー方程式の解である。今、特にこれらが以下のように定数倍しか変わらない様な解を考える

$$w(z+\pi)=\sigma w(z). \tag{A.10}$$

前節と同様に正則な二階微分方程式の解は一点での関数の値と微係数を与えれば一意に定まるので、この関係式は

$$w(\pi) = \sigma w(0), \frac{dw}{dz} = \sigma \frac{dw(0)}{dz} \tag{A.11}$$

と同等である。

$w(z)$ を、前節で導入したマシュー方程式の二つの独立な解 w_1, w_2 の線形結合であらわして

$$w(z) = Aw_1(z) + Bw_2(z), \tag{A.12}$$

上の関係式を書きなおすと

$$(w_1(\pi) - \sigma)A + w_2(\pi)B = 0 \tag{A.13}$$

$$\frac{dw_1(\pi)}{dz}A + (w_2(\pi) - \sigma)B = 0 \tag{A.14}$$

となる。ここから A,B を消去して、式 A.4、式 A.9 を使えば

$$\sigma^2 - 2w_1(\pi)\sigma + 1 = 0 \tag{A.15}$$

と計算できる。また、同じ事ではあるが

$$\sigma = e^{i\pi\nu} \tag{A.16}$$

とおけば

$$\cos \pi\nu = w_1(\pi) \tag{A.17}$$

と書ける。

よって、最初の定義に戻れば、マシュー方程式の解として

$$w(z + \pi) = e^{i\pi\nu} w(z) \tag{A.18}$$

と書けるものが存在する事がわかる。この解を Floquet の解と呼び、一般に周期微分方程式がこのような解を持つ事を Floquet の定理と呼ぶ。

また、Floquet の解は $u(z)$ を周期 π の関数として

$$w(z) = e^{i\nu z} u(z) \tag{A.19}$$

の形に書くことができる。

A.2 解の安定性

Floquet の定理より、マシュー方程式の解 $w(z)$ は $u(z)$ を周期 π の関数として

$$w(z) = e^{i\nu z}u(z) \tag{A.20}$$

の形に書けるものを少なくとも一つ持つ。実際、方程式 $\cos\pi\nu = w_1(\pi)$ が２つの異なる解 ν_1, ν_2 を持つ時、それらに対応する解 $w_I(z) = e^{i\nu_1 z}u_I(z)$、$w_{II}(z) = e^{i\nu_2 z}u_{II}(z)$ は、互いを互いの定数倍では書くことができないので、一次独立である。それゆえこの２つの解をマシュー方程式の一次独立な解として選ぶことができる。

$\cos\pi\nu = w_1(\pi)$ の解の個数と実虚とで以下の３つの場合に分けることができる。

- $|w_1(\pi)| > 1$：虚数解２つ
- $|w_1(\pi)| < 1$：実数解２つ
- $|w_1(\pi)| = 1$：実数解１つ（重解）

最初の場合、２つの虚数解により、マシュー方程式の解は実数 τ を用いて $w_{I,II} = e^{\pm\tau z}u_{I,II}(z)$ と書くことができる。この２つの解は τ の正負にかわらず、$z \to \pm\infty$ のどちらかでそれぞれ発散するため、$-\infty \leq z \leq \infty$ で有界となる解は存在しない。この場合、解は不安定であるという。

２番目の場合、マシュー方程式の２つの解は実数 τ を用いて $w_{I,II} = e^{\pm i\tau z}u_{I,II}(z)$ と書くことができる。さらに $|e^{\pm i\tau z}| = 1$ より、この２つの解は $-\infty \leq z \leq \infty$ で有界となる。一般の解はこの解の線形結合で書くことができるので、一般の解もまた有界であるいうことができる。この場合、解は安定であるという。

３番目の場合、ν は整数として一つに定まる。その解は２番目の場合と同様に有界であるが、Floquet の解の形に書けない独立した解がもう一つある。この解は一般に以下で示すように有界ではない。そのため、一般の解は有界にはならず、解は不安定である。

A.3 解の安定領域

本節では、前節によって考えた解の安定性について、マシュー方程式のパラメータ空間 $\{h^2, \lambda\}$ における安定領域を定める。そのために、まずマシュー方程式の周期解について考える。

A.3.1 マシュー方程式の周期解

前節の場合分けにおける3番目の場合の解は整数 n に対して $w(z) = e^{inz}u(z)$ となり、周期解である。前節の議論より、解の安定領域の境界はこの場合であるため、周期解について調べる事で系の安定領域を定めることができる。

マシュー方程式の周期解、すなわち $w(z+2\pi) = w(z)$ となる解について考える。まず、マシュー方程式は $z \to -z$、$z \to z+\pi$ に対してそれぞれ不変であるので、マシュー方程式の周期解は以下の4通りの場合がある：

- A_+ 型： $w(z+\pi) = w(z), w(-z) = w(z),$
- A_- 型： $w(z+\pi) = -w(z), w(-z) = w(z),$
- B_+ 型： $w(z+\pi) = w(z), w(-z) = -w(z),$
- B_- 型： $w(z+\pi) = -w(z), w(-z) = -w(z)$

まず、$h = 0$ の場合、マシュー方程式の独立解は $\cos\sqrt{\lambda}z, \sin\sqrt{\lambda}z$ の二つである。これらが周期解となるためには、

$$\lambda^2 = n, (n = 1, 2 \ldots) \tag{A.21}$$

という条件を満たさなければならない。

また、これらを上の4つの解の分類に当てはめると、A_+, A_-, B_+, B_- 型の解としてそれぞれ $\cos 2mz, \cos(2m-1)z, \sin 2mz, \sin(2m-1)z$ がある $(m = 1, 2 \ldots)$。Whittakerに従って $h \to 0$ の極限でこれらの解に帰着する解をそれぞれ $\mathrm{ce}_{2m}(z; h^2), \mathrm{ce}_{2m-1}(z; h^2), \mathrm{se}_{2m}(z;$ と書く。これらの関数は周期関数としてフーリエ展開が可能であるが、それぞれの型の対称性を満たすためには、

$$A_+\text{型：} \qquad \mathrm{ce}_{2m}(z; h^2) = \sum_{s=1}^{\infty} A_{2s}^{2m}(h^2)\cos 2sz \tag{A.22}$$

$$A_-\text{型：} \qquad \mathrm{ce}_{2m-1}(z; h^2) = \sum_{s=1}^{\infty} A_{2s-1}^{2m-1}(h^2)\cos(2s-1)z \tag{A.23}$$

$$B_+\text{型：} \qquad \mathrm{se}_{2m}(z; h^2) = \sum_{s=1}^{\infty} B_{2s}^{2m}(h^2)\sin 2sz \tag{A.24}$$

$$B_-\text{型：} \qquad \mathrm{se}_{2m-1}(z; h^2) = \sum_{s=1}^{\infty} A_{2s-1}^{2m-1}(h^2)\sin(2s-1)z \tag{A.25}$$

$$\tag{A.26}$$

の形でなければならない。また上の $h \to 0$ の極限での振る舞いより

$$\lim_{h\to 0} A_r^n(h^2) = \lim_{h\to 0} B_r^n(h^2) = \delta_{nr} \tag{A.27}$$

が成り立つ。ここで、δ_{nr} は Kronecker のデルタである。

$h=0$ の場合に λ に条件が課されたように、一般にマシュー方程式が周期解をもつためには、パラメータ λ は h^2 によって決まる固有値とならなければならない。$\mathrm{ce}_n(z;h^2)$ に対するものを $\lambda_n^c(h^2)$、$\mathrm{se}_n(z;h^2)$ に対するものを $\lambda_n^s(h^2)$ と書くことにする。$h=0$ の解より、$h \to 0$ の極限に対し

$$\lim_{h\to 0} \lambda_n^c(h^2) = \lim_{h\to 0} \lambda_n^s(h^2) = n^2, (n=1,2,\dots) \tag{A.28}$$

と計算できる。

A.3.2 周期解に独立な解

周期解に独立な解の周期性

$h=0$ の時は $\lambda = n^2$ に対し、二つの独立な周期解 $\cos nz$,$\sin nz$ があった。しかしながら $h \neq 0$ に対しては、周期解をもつある固有値 λ に対し、その周期解に独立なもう一つの解は周期解ではない。以下にこれを示す。

まず、$\lambda = \lambda^c(h^2)$ とし、偶関数の周期解 $\mathrm{ce}(z;h^2) = \sum_{r=0}^{\infty} A_{2r}\cos 2rz$ がある場合を考える。独立な奇関数も周期解であるとすると、その解が B_+ 型の時

$$\sum_{r=0}^{\infty} c_{2r}\sin 2rz \tag{A.29}$$

と書くことができる ($c_0=0$)。この解をマシュー方程式に代入すると

$$(\lambda - 2r^2)c_{2r} = h^2(c_{2r-2} + c_{2r+2}) \tag{A.30}$$

という漸化式が与えられる。同様に $\mathrm{ce}(z;h^2)$ をマシュー方程式に代入すると、同じ形の漸化式

$$(\lambda - 2r^2)A_{2r} = h^2(A_{2r-2} + A_{2r+2}) \tag{A.31}$$

が得られる。よって、

$$A_{2r}c_{2r+2} - A_{2r+2}c_{2r} = A_{2r-2}c_{2r} - A_{2r}c_{2r-2} \tag{A.32}$$

と計算できる。この式を逐次使うと

$$\begin{vmatrix} A_{2r} & A_{2r+2} \\ c_{2r} & c_{2r+2} \end{vmatrix} = 2A_0c_2 \tag{A.33}$$

が得られる。周期解のフーリエ展開が収束するためには、$A_{2r}, c_{2r} \xrightarrow{r\to\infty} 0$ でなければならないので、この結果より、

$$A_0 c_2 = 0 \tag{A.34}$$

となる。式 A.31 より、$A_0 \neq 0$ なので、$c_2 = 0$。この結果を式 A.30 に代入して順次計算すると、

$$c_0 = c_2 = c_4 = \cdots = 0 \tag{A.35}$$

となり、この解は恒等的に 0 となる。つまり、偶関数の周期解を持つときは B_+ 型の周期奇関数は持たない。同様の事は B_- 型でもいう事ができ、マシュー方程式が周期解 $\mathrm{ce}(z;h^2)$ を持つとき、異なる解は周期解ではない事が言えた。

また周期解としてどのタイプをとっても同じ事が同様の議論ができ、結果として $h \neq 0$ のとき、二つの解が同時に周期解とはならない事が証明できる。

周期解に独立な解の安定性

周期解に独立な解が有界ではない事を以下に示す。まず、λ として $\lambda_n^c(h^2)$ をとるとき、周期解 $\mathrm{ce}_n(z;h^2)$ に独立な奇関数の解を $\mathrm{fe}_n(z;h^2)$ と書く。マシュー方程式は $z \to z+\pi$ という置き換えで不変なので、$\mathrm{fe}_n(z+\pi;h^2)$ もまた解となる。一般の解は二つの独立解の線形結合であらわされるので

$$\mathrm{fe}_n(z+\pi;h^2) = \gamma \mathrm{ce}_n(z;h^2) + \delta \mathrm{fe}_n(z;h^2) \tag{A.36}$$

が成り立つ。次にこの式に $z = x+\pi$ を代入して x を z に戻して、上の式を使えば

$$\mathrm{fe}_n(z+2\pi;h^2) = \gamma(1+\delta)\mathrm{ce}_n(z;h^2) + \delta^2 \mathrm{fe}_n(z;h^2) \tag{A.37}$$

となる。さらに $z = x-\pi$ を代入して x を z に戻せば

$$\mathrm{fe}_n(z+\pi;h^2) = \gamma(1+\delta)\mathrm{ce}_n(z;h^2) - \delta^2 \mathrm{fe}_n(\pi-z;h^2) \tag{A.38}$$

となる。ここで、$\mathrm{fe}_n(z;h^2)$ が奇関数である事を利用した。以上の結果を組み合わせると

$$\mathrm{fe}_n(z+\pi;h^2) = \gamma(1+\delta-\delta^2)\mathrm{ce}_n(z;h^2) + \delta^3 \mathrm{fe}_n(z;h^2) \tag{A.39}$$

となり、最初の表現と係数を比べると

$$\gamma = \gamma(1+\delta-\delta^2), \quad \delta = \delta^3 \tag{A.40}$$

が得られる。先ほどの結果から $\mathrm{fe}_n(z;h^2)$ は周期解ではないので、$\gamma\delta \neq 0$ なので、$\delta = 1$ とわかる。つまり、

$$\mathrm{fe}_n(z+\pi;h^2) = \gamma \mathrm{ce}_n(z;h^2) + \mathrm{fe}_n(z;h^2) \tag{A.41}$$

となる。この関係が成り立つためには、

$$\mathrm{fe}_n(z;h^2) = c_n(h^2)\{z\mathrm{ce}_n(z;h^2) + f_n(z;h^2)\} \tag{A.42}$$

でなければならない。ここで、$f_n(z;h^2))$ は z に関して周期 π の関数とする。

この関数の第一項を見ると、z と周期解と掛けたものになっており、$z \to \pm\infty$ で発散する事が分かる。よって、この関数は $(-\infty,\infty)$ において有界ではなく、不安定な解であるという事ができる。

同様な事は周期解 $\mathrm{se}_n(z;h^2)$ に対しても議論する事ができ、結局 $h \neq 0$ のとき、周期解に独立な解は有界な解ではないと結論する事ができる。

A.3.3 固有値 $\lambda(h^2)$

h^2 の関数として固有値 $\lambda(h^2)$ を計算し、パラメータ空間 $\{h^2,\lambda\}$ における安定領域の境界を決める。h^2 が小さいとして、摂動によって解と固有値を計算する。解と固有値を h^2 で展開して

$$\lambda = \sum_{s=0}^{\infty} a_s h^{2s}, a_0 = n^2 \tag{A.43}$$

$$w = \sum_{s=0}^{\infty} w_s h^{2s} \tag{A.44}$$

とおく。マシュー方程式に代入すると

$$\sum_s (\frac{d^2 w_s}{dz^2} + a_0 w_s)h^{2s} + \sum_s \sum_r a_r w_{s-r} h^{2s} - 2\cos 2z \sum_s h^{2s+2} = 0 \tag{A.45}$$

となる。この式は h^2 に関する恒等多項式と考え、h^{2s} の係数を 0 とおけば

$$\frac{d^2 w_s}{dz^2} + n^2 w_s = 2\cos(2z) w_{s-1} - \sum_{r=1}^{s} a_r w_{s-r} \tag{A.46}$$

となる。

いま、$\lambda = \lambda_n^c(h^2)$、$w = \mathrm{ce}_n(z;h^2)$ の場合を考える。$w_0 = \cos nz$ とおく。ここで左辺に w_0 をかけてから $(-\pi,\pi)$ にわたって積分をすると、2回の部分積分と $h=0$ のマシュー方程式より

$$\begin{aligned}\int_{-\pi}^{\pi} w_0(\frac{d^2w_s}{dz^2}+n^2w_s)dz &= (w_0\frac{dw_s}{dz}-w_s\frac{dw_0}{dz})|_{pi}^{\pi}+\int_{-\pi}^{\pi} w_s(\frac{d^2w_0}{dz^2}+n^2w_0)dz \\ &= 0\end{aligned}$$

と計算できる。よって右辺より

$$\pi a_s = 2\int_{-\pi}^{\pi}\cos 2z\cos nz w_{s-1}dz - \sum_{r=1}^{s-1} a_r\int_{-\pi}^{\pi} w_{s-r}\cos nz dz \tag{A.47}$$

が得られる。この式と式A.46を逐次計算していくことによって a_s, w_s を求める事ができる。

結果は h^4 の項までで、固有値について

$$\lambda_1^c(h^2) = 1+h^2-\frac{1}{8}h^4+\ldots, \tag{A.48}$$

$$\lambda_2^c(h^2) = 4+\frac{5}{12}h^4+\ldots, \tag{A.49}$$

$$\lambda_n^c(h^2) = n^2+\frac{1}{2(n^2-1)}h^4+\ldots \quad (n\geq 3) \tag{A.50}$$

解について

$$\mathrm{ce}_1(z;h^2) = \cos z-\frac{1}{8}\cos 3zh^2+\ldots, \tag{A.51}$$

$$\mathrm{ce}_n(z;h^2) = \cos nz+(\frac{\cos(n-2)z}{4(n-1)}-\frac{\cos(n+2)z}{4(n+1)})h^2+\ldots \quad (n\geq 2) \tag{A.52}$$

となる。

同様の計算を se に対しても行うと

$$\lambda_1^s(h^2) = 1-h^2-\frac{1}{8}h^4+\ldots, \tag{A.53}$$

$$\lambda_2^s(h^2) = 4-\frac{1}{12}h^4+\ldots, \tag{A.54}$$

$$\lambda_n^s(h^2) = n^2+\frac{1}{2(n^2-1)}h^4+\ldots \quad (n\geq 3) \tag{A.55}$$

$$\mathrm{ce}_1(z;h^2) = \sin z-\frac{1}{8}\sin 3zh^2+\ldots, \tag{A.56}$$

$$\mathrm{se}_n(z;h^2) = \sin nz+(\frac{\sin(n-2)z}{4(n-1)}-\frac{\sin(n+2)z}{4(n+1)})h^2+\ldots \quad (n\geq 2) \tag{A.57}$$

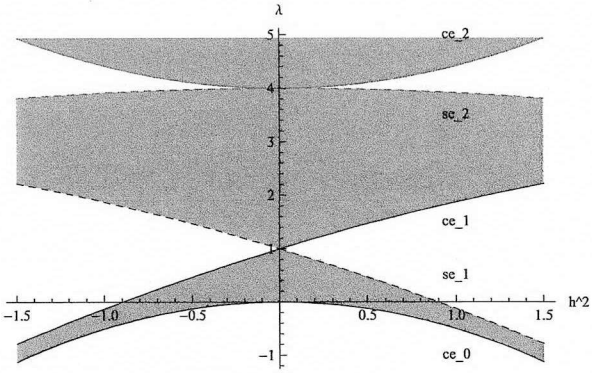

図 A.1: 固有値 λ

固有値 λ を h^2 に関する摂動によって計算し、λ_m^c については $m = 0, 1, 2$、λ_m^s については $m = 1, 2$ までを図示した。それぞれ対応する固有解を図中に記してある。また、安定領域を灰色で塗ってある。

となる。

$\lambda(h^2)$ について、$\{h^2, \lambda\}$ 空間で図示すると h^2 が小さい領域において図 A.1 のようになる。また、解の安定性の議論より、これらの固有値の値を境に解の安定性が変化する。$h^2 = 0$ のときは $\lambda > 0$ に対して解が安定である事に注目すると、図 A.1 の灰色で塗った領域が解の安定領域となる。

付 録B　付録2：多粒子系エンタングルド状態の忠実度

本章では、本論文で実現したエンタングルド状態の忠実度に関して、qubit 数への依存性を議論する[1]。

B.1　多粒子系のエンタングルド状態

多粒子系エンタングルド状態の忠実度について議論する前に、多粒子系におけるエンタングルド状態それ自身について考える。

2粒子系においては、(最大) エンタングルド状態は良く知られているようにベル状態と呼ばれる1つのグループしか存在せず、その数も以下の4つのみである。

$$|\phi_+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow\uparrow\rangle + |\downarrow\downarrow\rangle) \tag{B.1}$$

$$|\phi_-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow\uparrow\rangle - |\downarrow\downarrow\rangle) \tag{B.2}$$

$$|\psi_+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow\downarrow\rangle + |\downarrow\uparrow\rangle) \tag{B.3}$$

$$|\psi_-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow\downarrow\rangle - |\downarrow\uparrow\rangle) \tag{B.4}$$

しかしながら、3粒子以上になると様々なエンタングルド状態がある事が知られており、局所操作と古典通信 (LOCC) のみで移り変われるエンタングルド状態を1つのグループとして分類する方法が良くとられる。例えば3体の場合、W 状態と Greenberger-Horne-Zeilinger(GHZ) 状態と呼ばれる2種類のエンタングルド状態に分類できる事が知られている。これらはそれぞれ

$$|W_3\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}(|\downarrow\uparrow\uparrow\rangle + |\uparrow\downarrow\uparrow\rangle + |\uparrow\uparrow\downarrow\rangle) \tag{B.5}$$

[1]背景となる理論がしっかりとはできていないので、付録とした。

$$|GHZ_3\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow\uparrow\uparrow\rangle + |\downarrow\downarrow\downarrow\rangle) \tag{B.6}$$

というように書かれる状態である。

4体以上のエンタングルド状態の分類は非常に難しく、近年特殊なLOCCを用意して分類に成功した例があるのみである。4体の場合、名前のある状態としては、W状態・GHZ状態に加え、半数励起Dicke状態、(2次元)クラスター状態とがあるが、それ以外にもエンタングルド状態のグループは存在する。半数励起Dicke状態、(2次元)クラスター状態はそれぞれ

$$|\mathrm{D}_4^2\rangle = \frac{1}{\sqrt{6}}(|\uparrow\uparrow\downarrow\downarrow\rangle + |\uparrow\downarrow\uparrow\downarrow\rangle + |\uparrow\downarrow\downarrow\uparrow\rangle + |\downarrow\uparrow\uparrow\downarrow\rangle + |\downarrow\uparrow\downarrow\uparrow\rangle + |\downarrow\downarrow\uparrow\uparrow\rangle) \tag{B.7}$$

$$|C_4\rangle = \frac{1}{\sqrt{8}}(|\uparrow\uparrow\uparrow\uparrow\rangle - i\,|\uparrow\uparrow\downarrow\downarrow\rangle - |\downarrow\uparrow\downarrow\uparrow\rangle - i\,|\uparrow\downarrow\downarrow\uparrow\rangle + i\,|\downarrow\uparrow\uparrow\downarrow\rangle - |\downarrow\uparrow\downarrow\uparrow\rangle - i\,|\downarrow\downarrow\uparrow\uparrow\rangle - |\downarrow\downarrow\downarrow\downarrow\rangle) \tag{B.8}$$

と書ける。本論文で生成した半数励起Dicke状態$|\mathrm{D}_4^2\rangle$はスピンスクイーズド状態としての性質を持っており、クラスター状態$|C_4\rangle$は、2次元再隣接イジング相互作用の$\pi/2$パルスで準備できる状態で、クラスター量子計算に用いるソースとなるエンタングルド状態である。

以降5体以上では非常に多くのエンタングルド状態が存在でき、どのような状態があり、その状態がどのように役立つか・どのような性質を持っているかは未だ未解明である。

B.2 多粒子系エンタングルド状態の忠実度

B.2.1 多粒子系エンタングルド状態のコヒーレンス時間

多粒子系全体に同じ位相緩和があるとき、ある種の多体エンタングルド状態の位相緩和は1個1個の緩和に比べて大きくなる[21]。

しかし、どの程度大きくなるかというのはノイズの種類によって異なるため、一般的にいう事は出来ない。そこで具体例として、1qubit状態とn体のコヒーレント状態（直積状態）、W状態、GHZ状態、半数励起Dicke状態の5つの状態に関して、全体にして均一なノイズの影響の強さを計算する[2]。そのために、x,z方向の微小回転によって元の状態とどれくらい離れるかを計算すると、それぞれθ^2のオーダーまでで

[2]イオントラップ系においては、このような全体に均一にかかるz方向の位相緩和が一番多くなることが多い。

- 1qubit 状態

$$|\langle\uparrow| e^{i\hat{J}_x\theta} |\uparrow\rangle|^2 \sim 1 - \frac{1}{4}\theta^2 \tag{B.9}$$

$$|\langle\uparrow| e^{i\hat{J}_z\theta} |\uparrow\rangle|^2 = 1 \tag{B.10}$$

- n-qubit コヒーレント状態（スピン偏極状態）

$$|\langle\uparrow\uparrow\ldots\uparrow| e^{i\hat{J}_x\theta} |\uparrow\uparrow\ldots\uparrow\rangle|^2 \sim 1 - \frac{n}{4}\theta^2 \tag{B.11}$$

$$|\langle\uparrow\uparrow\ldots\uparrow| e^{i\hat{J}_z\theta} |\uparrow\uparrow\ldots\uparrow\rangle|^2 = 1 \tag{B.12}$$

- W 状態

$$|\langle W_n| e^{i\hat{J}_x\theta} |W_n\rangle|^2 \sim 1 - (\frac{3n}{4} - \frac{1}{2})\theta^2 \tag{B.13}$$

$$|\langle W_n| e^{i\hat{J}_z\theta} |W_n\rangle|^2 = 1 \tag{B.14}$$

- GHZ 状態

$$|\langle GHZ_n| e^{i\hat{J}_x\theta} |GHZ_n\rangle|^2 \sim 1 - \frac{n}{4}\theta^2 \tag{B.15}$$

$$|\langle GHZ_n| e^{i\hat{J}_z\theta} |GHZ_n\rangle|^2 \sim 1 - (\frac{n}{2})^2\theta^2 \tag{B.16}$$

- Dicke 状態

$$|\langle \mathrm{D}_{n,z}^{n/2}| e^{i\hat{J}_x\theta} |\mathrm{D}_{n,z}^{n/2}\rangle|^2 \sim 1 - \frac{(n(n+2))}{8}\theta^2 \tag{B.17}$$

$$|\langle \mathrm{D}_{n,z}^{n/2}| e^{i\hat{J}_z\theta} |\mathrm{D}_{n,z}^{n/2}\rangle|^2 = 1 \tag{B.18}$$

となる[3]。ここで、$\hat{J}_{x,z} = \sum_i \hat{\sigma}^{(i)}_{x,z}$ である。微小回転による振る舞いが積もり積もってノイズとなるため、この微小振動への応答の係数の違いがそのままコヒーレンス時間の違いとなって現れる。よって、イオントラップにおけるデコヒーレンスを念頭において、ノイズがz方向の位相ノイズが支配的でかつすべてのイオンに対し同じように働くと仮定すると、単一qubitの横緩和時間τに対し、エンタングルド状態のコヒーレンス時間は

$$\begin{array}{cccccc} & |\uparrow_x\uparrow_x\ldots\uparrow_x\rangle & |\mathrm{W}_{n,x}\rangle & |GHZ_n\rangle & |\mathrm{D}^{n/2}_{n,x}\rangle & |\mathrm{D}^{n/2}_{n,z}\rangle \\ T_2 & \tau/n & \tau/(3n-2) & \tau/n^2 & \tau/(n(n+2)/2) & \infty \end{array} \tag{B.21}$$

と期待する事ができる。ここで、$|\mathrm{W}_{n,x}\rangle$はx方向のW状態である。この例では、大きなnに対してはGHZ状態とDicke状態はn^2に比例してコヒーレンス時間が短くなっている事が分かるが、両者を比べるとDicke状態はGHZ状態より一般にデコヒーレンスに強い状態である事が言える。

B.2.2 多粒子系エンタングルド状態の忠実度

コヒーレンス時間の議論と同様に、多粒子のエンタングルド状態を生成するときの忠実度について考える。しかし、実際の生成過程では様々なノイズが重なって生じており、また生成されるまでの中間状態の緩和の大きさはまたそれぞれ異なっている。そのため、生成される環境や生成方法に強く依存してしまい、定量的に確からしい議論をする事が難しい。そこで、これまでにイオントラップ系において実現しているエンタングルド状態の個数に対する忠実度の変化をプロットし、定性的な振る舞いについて議論する。 まず、本論文において生成に成功したMølmer-Sørensenゲートによる2ion、4ionのGHZ状態と、生成方法1によって生成された2ionDicke状態、生成方法2によって生成された2ion、4ion、6ionのDicke状態の忠実度を一つのグラフにまとめたのが図B.1である。4ion以上の個数で生成に成功している方法について、フィッティング結果から、個数に対する忠実度の

[3]クラスター状態に関しては一般的な議論は難しいが、6体、9体の2次元クラスター状態 (2×3の長方形と3×3の正方形) に関しては

$$|\langle C_6|\, e^{i\hat{J}_{x,z}\theta/2}\, |C_6\rangle|^2 \sim 1 - \frac{6}{4}\theta^2 \tag{B.19}$$

$$|\langle C_9|\, e^{i\hat{J}_{x,z}\theta/2}\, |C_9\rangle|^2 \sim 1 - \frac{9}{4}\theta^2 \tag{B.20}$$

となり、直積状態と同じ位相緩和の大きさとなっている。これはクラスター状態が隣同士との相関しか持たないために、全体にかかるノイズに対して弱くはならない事を示唆していると考える事ができる。

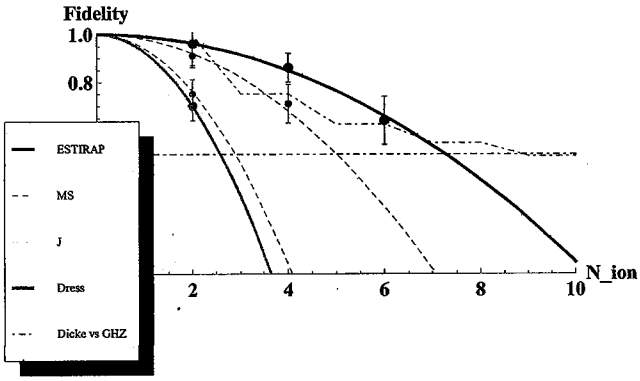

図 B.1: 生成されたエンタングルド状態の忠実度の個数依存性
異なった個数、異なった生成方法によって生成されたエンタングルド状態の忠実度をプロットした。黒点が生成方法 2 で作った Dicke 状態の忠実度、青点が MS ゲートによって生成された GHZ 状態の忠実度、赤点がスピン間相互作用によって生成された GHZ 状態の忠実度、緑点が生成方法 1 によってつくられた Dicke 状態の忠実度である。忠実度 0.5 のラインが GHZ 状態のウィットネスに対応するもので、紫色の点線が Dicke 状態を生成したと強く主張できる閾値の忠実度である。対応する色の点線は 2 次関数によるフィッティングである。

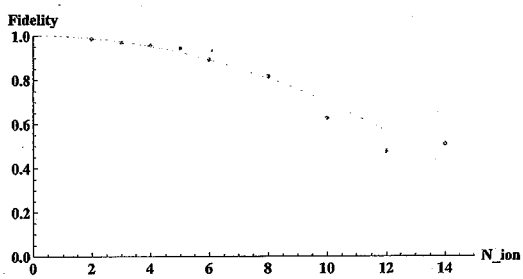

図 B.2: Innsbruck 大学において生成された GHZ 状態の忠実度の個数依存性

減衰はおよそ個数の２乗に比例しているという事ができる。これは前節で議論したコヒーレンス時間の減少と定性的に一致していると主張できる。しかしながら、特に Dicke 状態の生成に関しては５章で述べたように、現在実現している忠実度はこの章で考えているようなノイズによっては決まってないと結論した。さらに断熱過程に対するノイズの影響はノイズの周波数成分まで考慮に入れるべき [102] であるため、ここでの定性的な一致は偶然であると考えられる。

続いて、Innsbruck 大学で実現している 14 個の GHZ 状態までの忠実度をグラフにしたものが、図 B.2 である。これも定性的にいっておよそ個数の 2 乗に比例して忠実度が減衰していると言える。

参考文献

[1] M. Nielsen and I. Chuang, *Quantum Computation and Quantum Information*, Cambridge University Press, 2000.

[2] G. Benenti, G. Casati, and G. Strini, **量子計算と量子情報の原理**, Springer, 2009.

[3] M. Zwierz, C. A. P.-Delgado, and P. Kok, Physical Review A **85**, 042112 (2012).

[4] R. Feynman, Int. J. Theoretical Phys. **21**, 467 (1982).

[5] P. W. Shor, IEEE FOCS proceeding , 124 (1994).

[6] G. Milburn, **ファインマ**,, 岩波書店.

[7] D. P. DiVincenzo, arXiv **000**, 2077 (2000).

[8] D. Leibfried, R. Blatt, C. Monroe, and D. Wineland, Rev. Mod. Phys. **75**, 281 (2003).

[9] J. I. Cirac and P. Zoller, Phys. Rev. Lett. **74**, 4091 (1995).

[10] D. J. Wineland, M. Barrett, J. Britton, J. Chiaverini, B. DeMarco, W. M. Itano, B. Jelenkovic, C. Langer, D. Lerbtried, V. Meyer, T. Rosenband, and T. Schatz, Phil. Trans. R. Soc. Lond. A **361**, 1349 (2003).

[11] R. Blatt and C. F. Roos, Nature Physics **8**, 277 (2012).

[12] C. Cohen-Tannoudi and J. Dalibard, Europhys. Lett. **1**, 441 (1986).

[13] C. Langer, R. Ozeri, J. D. Jost, J. Chaiaverini, B. DeMarco, A. Ben-Kish, R. B. Blakestad, J. Britton, D. B. Hume, W. M. Itano, D. Leibfried, R. Reishle, T. Rosenband, T. Schaetz, P. O. Schmidt, and D. J. Wineland, Phys. Rev. Lett **95**, 060502 (2005).

[14] A. S. rensen and K. M. lmer, Phys. Rev. Lett. **82**, 1971 (1999).

[15] K. M. lmer and A. S. rensen, Phys. Rev. Lett. **82**, 1835 (1999).

[16] C. Monroe, D. M. Meekhof, B. E. King, W. M. Itano, and D. J. Wineland, Phys. Rev. Lett. **75**, 4714 (1995).

[17] T. Monz, K. Kim, W. Hansel, M. Riebe, A. S. Villar, P. Schindler, M. Chwalla, M. Hennrich, and R. Blatt, Phys. Rev. Lett. **102**, 040501 (2009).

[18] T. Monz, K. Kim, A. S. Villar, P. Schindler, M. Chwalla, M. Riebe, C. F. Roos, H. Haffner, W. Hansel, M. Hennrich, and R. Blatt, Phys. Rev. Lett. **103**, 200503 (2009).

[19] P. Schindler, J. T. Barreiro, T. Monz, V. Nebendahl, D. Nigg, M. Chwalla, M. Hennrich, and R. Blatt, Science **332**, 1059 (2011).

[20] S. Olmschenk, D. N. Matsukevich, P. Maunz, D. Hayes, L.-M. Duan, and C. Monroe, Science **323**, 486 (2009).

[21] T. Monz, P. Schindler, J. T. Barreiro, M. Chawalla, D. Nigg, W. A. Coish, M. Harlander, W. Hansel, M. Hennrich, and R. Blatt, Phys. Rev. Lett. **106**, 130506 (2011).

[22] K. Kim, M.-S. Chang, S. Korenbilt, R. Islam, E. E. Edwards, J. K. Freericks, G.-D. Lin, L.-M. Duan, and C. Monroe, Nature **465**, 590 (2010).

[23] R. Islam, E. E. Edwards, K. Kim, S. Korenbilt, C. Noh, H. Carmichael, G.-D. Lin, L.-M. Duan, C.-C. J. Wang, J. K. Freericks, and C. Monroe, Nature Com. **2**, 377 (2011).

[24] R. Islam, C. Senko, W. C. Campbell, S. Korenbilt, J. Smith, A. Lee, E. E. Edwards, C.-C. J. Wang, J. K. Freericks, and C. Monroe, Arxiv **1210**, 0142 (2012).

[25] C. E. Pearson, D. R. Leibrandt, W. S. Bakr, W. J. Mallard, K. R. Brown, and I. L. Chuang, Phys. Rev. A **73**, 032307 (2006).

[26] J. Chiaverini, R. B. Blakestad, J. Britton, J. D. Jost, C. Langer, D. Leibfried, R. Ozeri, and D. J. Wineland, Quantum Info. and Comp. **5**, 419 (2005).

[27] W. K. Heisinger, S. Olmschenk, D. Stick, D. Hucul, M. Yeo, M. Acton, L. Deslauriers, and C. Monroe, Appl. Phys. Lett. **88**, 034101 (2006).

[28] J. M. Amini, H. Uys, J. H. Wesenberg, S. Seidelin, J. Britton, J. J. Bollinger, D. Leibfried, C. Ospelkaus, A. P. VanDevender, and D. J. Wineland, New J. Phys. **12**, 033301 (2010).

[29] D. Kielpinski, C. Monre, and D. J. Wineland, Nature **417**, 709 (2002).

[30] H. J. Kimble, Nature **453**, 1023 (2008).

[31] L.-M. Duan, M. D. Lukin, J. I. Cirac, and P. Zoller, Nature **414**, 413 (2001).

[32] Z.-S. Yuan, Y.-A. Chen, B. Zhao, S. Chen, J. Schmiedmayer, and J.-W. Pan, Nature **454**, 1098 (2008).

[33] A. K. Ekert, Phys. Rev. Lett. **67**, 661 (1991).

[34] J. I. Cirac, P. Zoller, H. J. Kimble, and H. Mabuchi, Phys. Rev. Lett. **78**, 3221 (1997).

[35] C. J. Hood, M. S. Chapman, T. W. Lynn, and H. J. Kimble, Phys. Rev. Lett. **80**, 4157 (1998).

[36] M. Keller, B. Lange, K. Hayasaka, W. Lange, and H. Walther, Nature **431**, 1075 (2004).

[37] A. Stute, B. Casabone, B. Brandstatter, D. Habischer, H. G. Barros, P. O. Schimidt, T. E. Northup, and R. Blatt, Appl. Phys. B **107**, 1145 (2012).

[38] M. Steiner, H. M. Meyer, C. Deutsch, J. Reichel, and M. Kohl, Arxiv **1211**, 0050 (2012).

[39] D. Hunger, T. Steinmetz, Y. Colombe, C. Deutsch, T. W. Hansch, and J. Reichel, New J. of Phys. **12**, 065038 (2010).

[40] J. A. Jones, V. Vedral, A. Ekert, and G. Castagnoli, Nature **403**, 869 (2000).

[41] L.-M. Duan, J. I. Cirac, and P. Zoller, Science **292**, 1695 (2001).

[42] P. Zanardi and M. Rasetti, Phys. Lett. A **264**, 94 (1999).

[43] N. Timoney, I. Baumgart, M. Johanning, A. F. Varon, M. B. Plenio, A. Retzker, and C. Wunderlich, Nature **476**, 185 (2011).

[44] J. Oreg, K. Bergmann, B. W. Shore, and S. Rosenwaks, Phys. Rev. A **45**, 4888 (1992).

[45] D. F. V. James, Appl. Phys. B **66**, 181 (1997).

[46] A. Retzker, R. C. Thompson, D. M. Segal, and M. B. Plenio, Phys. Rev. Lett. **101**, 260504 (2008).

[47] 鳥井寿夫, **磁気光学トラップされた冷却** *Rb* **原子の分光**, PhD thesis, 東京大学, 1996.

[48] S. Stenholm, Rev. Mod. Phys. **58**, 699 (1986).

[49] G. Morigi, J. Eschner, J. I. Cirac, and P. Zoller, Phys. Rev. A **59**, 3797 (1999).

[50] C. Monroe, D. M. Meekhof, B. E. King, S. R. Jefferts, W. M. Itano, D. J. Wineland, and P. Gould, Phys. Rev. Lett. **75**, 4011 (1995).

[51] C. Roos, *Controlling the quantum state of trapped ions*, PhD thesis, Innsbruck univ., 2000.

[52] J. Javanainen and S. Stenholm, Appl. Phys. **24**, 151 (1981).

[53] P. Craig, J. Dash, A. McGuire, D. Nagle, and R. Reiswig, Phys. Rev. Lett. **3**, 221 (1959).

[54] W. K. Hensinger, Nature **476**, 155 (2011).

[55] C. Ospelkaus, U. Warring, Y. Colombe, K. R. Brown, J. M. Amini, D. Leibfried, and D. J. Wineland, Nature **476**, 181 (2011).

[56] U. Warring, C. Ospelkaus, Y. Colombe, K. R. Brown, J. M. Amini, M. Carsjens, D. Leibfried, and D. J. Wineland, Arxiv **1211**, 6554 (2012).

[57] S. Haze, Y. Senokuchi, R. Yamazaki, K. Toyoda, and S. Urabe, Appl. Phys. B **101**, 547 (2010).

[58] P. J. Lee, *Quantum Information Processing with Two Trapped Cadmium Ions*, PhD thesis, The university of Michigan, 2006.

[59] K. Kim, M.-S. Chang, R. Islam, S. Koreblit, L.-M. Duan, and C. Monroe, Phys. Rev. Lett. **103**, 120502 (2009).

[60] L.-S. Ma, P. Jungner, J. Ye, and J. L. Hall, Opt. Lett. **19**, 1777 (1994).

[61] M. V. Berry, Proc. R. Soc. Lond. A **392**, 45 (1984).

[62] M. Riebe, K. Kim, P. Schindler, T. Monz, P. O. Schmidt, T. K. Korber, W. Hansel, H. Haffner, C. F. Roos, and R. Blatt, Phys. Rev. Lett. **97**, 220407 (2006).

[63] C. F. Roos, G. P. T. Lancaster, M. Riebe, H. Haffner, W. Hansel, S. Gulde, C. Becher, J. Eschner, F. Schmidt-Kaler, and R. Blatt, Phys. Rev. Lett. **92**, 220402 (2004).

[64] H. Haffner, F. Schmidt-Kaler, W. Hansel, C. F. Roos, T. Korber, M. Riebe, J. Benhelm, U. D. Rapol, C. Becher, and R. Blatt, Appl. Phys. B **81**, 151 (2005).

[65] L. Aolita, L. Davidovich, K. Kim, and H. Haffner, Phys. Rev. A **75**, 052337 (2007).

[66] C. A. Sachett, D. Kielpinski, B. E. King, C. Langer, V. Meyer, C. J. Myatt, M. Rowe, Q. A. Turchette, W. M. Itano, and D. J. Wineland, Nature **404**, 256 (2000).

[67] D. Leibfried, E. Knill, S. Seidelin, J. Britton, R. B. Blakestad, J. Chiaverini, D. B. Hume, W. M. Itano, J. D. Jost, C. Langer, R. Ozeri, R. Reichle, and D. J. Wineland, Nature **438**, 639 (2005).

[68] 松岡正浩, **量子光学**, 裳華房, 2002.

[69] J. T. Barreiro, M. Muller, P. Schindler, D. Nigg, T. Monz, M. Chawalla, M. Hennrich, C. F. Roos, P. Zoller, and R. Blatt, Nature **470**, 486 (2011).

[70] J. T. Barreiro, P. Schindler, O. Guhne, T. Monz, M. Chawalla, C. F. Roos, M. Hennrich, and R. Blatt, Nature phys. **6**, 943 (2010).

[71] W. Dur, G. Vidal, and J. I. Cirac, Phys. Rev. A **62**, 062314 (2000).

[72] A. Miyake, Int. J. of Quant. Inf. **2**, 65 (2004).

[73] 古澤明, **量子光学と量子情報科学**, 数理工学社, 2007.

[74] G. S. Agarwal and R. R. Puri, Phys. Rev. A **41**, 3782 (1990).

[75] J. J. Bollinger, W. M. Itano, D. J. Wineland, and D. J. Heizen, Phys. Rev. A **54**, R4649 (1996).

[76] T. Kim, O. Pfster, M. J. Holland, J. Noh, and J. L. Hall, Phys. Rev. A **57**, 4004 (1998).

[77] H. J. Briegel and R. Raussendorf, Phys. Rev. Lett. **86**, 910 (2001).

[78] R. Raussendorf and H. J. Briegel, Phys. Rev. Lett. **86**, 5188 (2001).

[79] W. Wieczorek, R. Krischel, N. Kiesel, P. Michelberger, G. Toth, and H. Wienfurter, Phys. Rev. Lett. **103**, 020504 (2009).

[80] S. Inouye, A. P. Chikkatur, D. M. Stamper-Kurn, J. Stenger, D. E. Pritchard, and W. Ketterle, Science **285**, 571 (1999).

[81] B. M. Garraway, Phil. Trans. R. Soc. A **369**, 1137 (2011).

[82] N. Kiesel, C. Schmid, G. Toth, E. Solano, and H. Weinfurter, Phys. Rev. Lett. **98**, 063604 (2007).

[83] V. V. Mikhailov, J. Phys. A: Math. Gen. **10**, 147 (1977).

[84] T. Tashima, T. Wakatsuki, S. K. Ozdemir, T. Yamamoto, M. Koashi, and N. Imoto, Phys. Rev. Lett. **102**, 130502 (2009).

[85] H. Haffner, W. Hansel, C. F. Roos, J. Benhelm, D. C. al kar, M. Challa, T. Korber, U. D. Rapol, M. Riebe, P. O. Schmidt, C. Becher, O. Guhne, W. Dur, and R. Blatt, Nature **438**, 643 (2005).

[86] J. K. Korbicz, O. Guhne, M. Lewenstein, H. Haffner, C. F. Roos, and R. Blatt, Phys. Rev. A **74**, 052319 (2006).

[87] B. Lucke, M. Scherer, J. Kruse, L. Pezze, F. Deuretzbacher, P. Hyllus, O. Topic, J. Peise, W. Ertmer, J. Arlt, L. Santos, A. Smerzi, and C. Klempt, Science **334**, 773 (2011).

[88] C. D. Hamley, C. S. Gerving, T. M. Hoang, E. M. Bookjans, and M. S. Chapman, Nature phys. **8**, 305 (2012).

[89] Z. Y. Ou, J.-K. Rhee, and L. J. Wang, Phys. Rev. Lett. **83**, 959 (1999).

[90] T. Nagata, R. Okamoto, J. L. O'Brien, K. Sasaki, and S. Takeuchi, science **316**, 726 (2007).

[91] I. E. Linington and N. V. Vitanov, Phys. Rev. A **77**, 010302(R) (2008).

[92] K. Toyoda, T. Watanabe, T. Kimura, S. Nomura, S. Haze, and S. Urabe, Phys. Rev. A **83**, 022315 (2011).

[93] M. Kitagawa and M. Ueda, Phys. Rev. A **47**, 5138 (1993).

[94] A. S. S. rensen and K. M. lmer, Phys. Rev. Lett. **86**, 4431 (2001).

[95] D. J. Wineland, J. J. Bollinger, and W. M. Itano, Phys. Rev. A **50**, 67 (1994).

[96] V. Meyer, M. A. Rowe, D. Kielpinski, C. A. Sackett, W. M. Itano, C. Monroe, and D. J. Wineland, Phys. Rev. Lett. **86**, 5870 (2001).

[97] B. W. Shore, K. Bergmann, J. Oreg, and S. Rosenwaks, Phys. Rev. A **44**, 7442 (1991).

[98] N. V. Vitanov, T. Halfmann, B. W. Shore, and K. Bergmann, Ann. Rev. of Phys. Chem. **52**, 763 (2001).

[99] M. Ohzeki and H. Nishimori, J. of the Physcail society of Japan **66**, 252 (2011).

[100] O. Guhne and G. Toth, Phys. Report **474**, 1 (2009).

[101] G. Toth, W. Wieczorek, R. Krischek, N. Kiesel, P. Michelberger, and H. Weinfurter, New J. of Phys. **11**, 083002 (2009).

[102] T. Noel, M. R. Dietrich, N. Kurz, G. Shu, J. Wright, and B. B. Blinov, Phys. Rev. A **85**, 023401 (2012).

[103] H. J. Kimble, Nature **453**, 1023 (2008).

[104] T. Yoshie, A. Scherer, J. Hendrickson, G. Khitrova, H. M. Gibbs, G. Rupper, C. Ell, O. B. Schekin, and D. G. Deppe, nature **432**, 200 (2004).

[105] D. Englund, B. Shields, K. Rivoire, E. Hatami, J. Vuckovic, H. Park, and M. Lukin, Nano Lett. **10**, 3922 (2010).

[106] A. Stute, B. Casabone, P. Schindler, T. Montz, P. O. Schmidt, B. Brandstatter, T. E. Northup, and R. Blatt, Nature **485**, 482 (2012).

[107] A. Kuhn, M. Hennrich, and G. Rempe, Phys. Rev. Lett. **89**, 067901 (2002).

[108] J. Bochmann, M. Mucke, C. Guhl, S. Ritter, G. Rempe, , and D. L. Moehring, Phys. Rev. Lett. **104**, 203601 (2010).

[109] S. Ritter, C. Nolleke, C. Hahn, A. Reiserer, A. Neuzner, M. Uphoff, M. Mucke, E. Figueroa, J. Bochmann, and G. Rempe, Nature **484**, 195 (2012).

[110] P. F. Herskind, A. Dantan, J. P. Marler, M. Albert, and M. Drewsen, Nature Phys. **5**, 494 (2009).

[111] Y. Colombe, T. Steinmetz, G. Dubois, F. Linke, D. Hunger, and J. Reichel, Nature **450**, 272 (2007).

[112] A. Wilson, H. Takahashi, A. R.-Watson, F. Orucevic, P. Blythe, A. Mortersen, D. R. Crick, N. S.-Smith, E. Brama, M. Keller, and W. Lange, arXiv **1101**, 5877 (2011).

[113] J. Agresti, Y. Chen, E. D'Ambrosio, and P. Savov, arXiv **0511**, 062 (2008).

[114] 寺沢寛一, **数学概論　応用編**, 岩波書店, 1960.

業績一覧

本研究に関連のあるもの

以下では筆者のところを下線にしてある。

学術論文

[1] A. Noguchi, S. Haze, K. Toyoda, S. Urabe, "Generation of a Decoherence-Free Entangled State Using a Radio-Frequency Dressed State", *Phys. Rev. Lett.*, **108**, 060503, (2012)

[2] S. Haze, Y. Tateishi, A. Noguchi, K. Toyoda, S. Urabe, "Observation of phonon hopping in radial vibrational modes of trapped ions", *Phys. Rev. A*, **85**, 031401(R), (2012)

[3] A. Noguchi, K. Toyoda, S. Urabe, "Generation of Dicke States with Phonon-Mediated Multi-level Stimulated Raman Adiabatic Passage", *Phys. Rev. Lett.*, **109**, 260502, (2012)

[4] A. Noguchi, K. Toyoda, S. Urabe, "Generation of a spin-squeezed state with trapped ions using a dressing field", *arXiv*, **1208**, 3411, (2012) submitted to Japanese Journal of Applied Physics

[5] K. Toyoda, K. Uchida, A. Noguchi, S. Haze, S. Urabe, "Realization of holonomic single-qubit operations", submitted to Phys. Rev. A

[6] H. Takahashi, A. Noguchi, A. R.-Watson, F. Orucevic, M. Keller, "Fiber cavity with long cavity length", in preparation

国際学会における発表

ポスター発表

[1] A. Noguchi, S. Haze, K. Toyoda, S. Urabe, "Generation of a decoherence-free entangled state using a radio-frequency dressed state", The 23rd International Conference on Atomic Physics, Ecole Polytechnique, Palaiseau, France, 2012.7

[2] S. Haze, Y. Tateishi, A. Noguchi, K. Toyoda, S. Urabe, "Observation of phonon hopping in radial vibrational modes of trapped ions", The 23rd International Conference on Atomic Physics, Ecole Polytechnique, Palaiseau, France, 2012.7

国内学会における発表

口頭発表

[1] 野口篤史, 内田健介, 大野貴生, 豊田健二, 占部伸二, 日本物理学会 2011 年秋季大会, 富山大学, 2011.9

[2] 土師慎祐, 立石勇介, 野口篤史, 豊田健二, 占部伸二, 日本物理学会 2011 年秋季大会, 富山大学, 2011.9

[3] 野口篤史, 土師慎祐, 豊田健二, 占部伸二, 量子情報技術研究会（QIT）, 大阪大学, 2011.11

[4] 土師慎祐, 立石勇介, 野口篤史, 豊田健二, 占部伸二, 量子情報技術研究会（QIT）, 大阪大学, 2011.11

[5] 野口篤史, 土師慎祐, 豊田健二, 占部伸二, 日本物理学会第 67 回年次大会, 関西学院大学, 2012.3

[6] 立石勇介, 土師慎祐, 野口篤史, 豊田健二, 占部伸二, 日本物理学会第 67 回年次大会, 関西学院大学, 2012.3

[7] 野口篤史, 岡田壮平, 豊田健二, 田中歌子, 占部伸二, 2012 量子サイバネティクス総括班会議, ハイアットリージェンシー京都, 2012.6

ポスター発表

[1] 野口篤史, 土師慎祐, 豊田健二, 占部伸二, FIRST 全体会議 2011, 京都国際ホテル, 2011.12

[2] 野口篤史, 土師慎祐, 豊田健二, 占部伸二, 第一回イオントラップ研究会, 東京電気通信大学, 2012.3

[3] 野口篤史, 豊田健二, 占部伸二, FIRST 全体会議 2012, 東京大学小柴ホール, 2012.12

[4] 岡田壮平, 野口篤史, 松井健太, 田中歌子, 都倉康弘, 占部伸二, FIRST 全体会議 2012, 東京大学小柴ホール, 2012.12

講演等

[1] Atsushi Noguchi, AMO Seminar, Sussex university, 2012.9

本研究に関連のないもの

学術論文

[1] N. Takei, M. Takeuchi, Y. Eto, A. Noguchi, P. Zhang, M. Ueda, M. Kozuma, *Phys. Rev. A*, **81**, 042331, (2010)

[2] A. Noguchi, Y. Eto, M. Ueda, M. Kozuma, *Phys. Rev. A*, **84**, 030301(R), (2011)

[3] Y. Eto, A. Noguchi, P. Zhang, M. Ueda, M. Kozuma, *Phys. Rev. Lett.*, **106**, 160501, (2011)

[4] M. Martin, A. Nakamoto, Y. Okuyama, A. Noguchi, M. Ueda, M. Kozuma, *Phys. Rev. A*, **86**, 063615, (2012)

記事・寄稿等

[1] 野口篤史, 量子力学と量子コンピュータ, Japan MENSA 2009年7月号会報, 2009.7

国際学会における発表

ポスター発表

[1] A. Noguchi, Y. Eto, N. Takei, M. Takeuchi, P. Zhang, M. Ueda, M. Kozuma, Cold Atoms and Molecules : Collisions, Field- Effects, and Applications, 京都大学, 2009.6

[2] A. Noguchi, Y. Eto, N. Takei, M. Takeuchi, P. Zhang, M. Ueda, M. Kozuma, The 41st Annual Meeting of the Division of Atomic Molecular and optical Physics American Physical Society, Houston, Texas, USA, 2010.5

[3] Y. Eto, A. Noguchi, P. Zhang, M. Ueda, M. Kozuma, The 41st Annual Meeting of the Division of Atomic Molecular and optical Physics American Physical Society, Houston, Texas, USA, 2010.5

[4] A. Nakamoto, M. Martin, Y. Okuyama, A. Noguchi, M. Ueda, M. Kozuma, The 23rd International Conference on Atomic Physics, Ecole Polytechnique, Palaiseau, France, 2012.7

[5] M. Martin, A. Nakamoto, Y. Okuyama, A. Noguchi, M. Ueda, M. Kozuma, The 23rd International Conference on Atomic Physics, Ecole Polytechnique, Palaiseau, France, 2012.7

国内学会における発表

口頭発表

[1] 野口篤史, 井上遼太郎, 米原健矢, 上妻幹旺, 日本物理学会第 64 回年次大会, 立教大学, 2009.3

[2] 衞藤雄二郎, 野口篤史, 武井宣幸, 竹内誠, Peng Zhang, 上田正仁, 上妻幹旺, 日本物理学会 2009 年秋季大会, 甲南大学, 2009.9

[3] 野口篤史, 衞藤雄二郎, 竹内誠, 武井宣幸, Peng Zhang, 上田正仁, 上妻幹旺, 日本物理学会 2009 年秋季大会, 甲南大学, 2009.9

[4] 衞藤雄二郎, 野口篤史, Peng Zhang, 上田正仁, 上妻幹旺, 日本物理学会第 65 回年次大会, 岡山大学, 2010.3

[5] 野口篤史, 衞藤雄二郎, Peng Zhang, 上田正仁, 上妻幹旺, 日本物理学会第 65 回年次大会, 岡山大学, 2010.3

[6] 衞藤雄二郎, 野口篤史, Peng Zhang, 上田正仁, 上妻幹旺, 日本物理学会 2010 年秋季大会, 大阪府大, 2010.9

[7] 野口篤史, 衞藤雄二郎, 中本顕正, Miranda Martin, Peng Zhang, 上田正仁, 上妻幹旺, 日本物理学会 2010 年秋季大会, 大阪府大, 2010.9

[8] 中本顕正, 野口篤史, Miranda Martin, 衞藤雄二郎, 上田正仁, 上妻幹旺, 日本物理学会第 66 回年次大会, 新潟大学, 2011.3

[9] Miranda Martin, 野口篤史, 中本顕正, 衞藤雄二郎, 上田正仁, 上妻幹旺, 日本物理学会第 66 回年次大会, 新潟大学, 2011.3

[10] 野口篤史, 中本顕正, Miranda Martin, 衞藤雄二郎, 上田正仁, 上妻幹旺, 日本物理学会第 66 回年次大会, 新潟大学, 2011.3

[11] Miranda Martin, 中本顕正, 野口篤史, 上田正仁, 上妻幹旺, 日本物理学会 2011 年秋季大会, 富山大学, 2011.9

[12] 中本顕正, 野口篤史, Miranda Martin, 衞藤雄二郎, 上田正仁, 上妻幹旺, 日本物理学会 2011 年秋季大会, 富山大学, 2011.9

[13] Miranda Martin, 中本顕正, 奥山勇貴, 尾野仁深, 野口篤史, 上田正仁, 上妻幹旺, 日本物理学会第 67 回年次大会, 関西学院大学, 2012.3

ポスター発表

[1] 野口篤史, 衞藤雄二郎, 上田正仁, 上妻幹旺, 第 7 回関東量子情報 student chapter, 東京大学, 2009,11

[2] 野口篤史, 衞藤雄二郎, 上田正仁, 上妻幹旺, 東京工業大学・物理学グローバル COE ナノサイエンスを拓く量子物理学拠点公開シンポジウム, 東京工業大学, 2009.12

[3] 衞藤雄二郎,野口篤史, 武井宣幸, 竹内誠, Peng Zhang, 上田正仁, 上妻幹旺, 東京工業大学・物理学グローバル COE ナノサイエンスを拓く量子物理学拠点公開シンポジウム, 東京工業大学, 2009.12

[4] 野口篤史, 衞藤雄二郎, 上田正仁, 上妻幹旺, 第 9 回関東量子情報 student chapter, 東京大学, 2010,6