OUKA
The University of Osaka
Institutional Knowledge Archive

| | |
|---|---|
| Title | 磁性流体および磁性エラストマーを用いたソフトアクチュエータの研究 |
| Author(s) | 加嶋, 俊大 |
| Citation | 大阪大学, 2013, 博士論文 |
| Version Type | VoR |
| URL | https://hdl.handle.net/11094/27539 |
| rights | |
| Note | |

*The University of Osaka Institutional Knowledge Archive : OUKA*

https://ir.library.osaka-u.ac.jp/

The University of Osaka

工年 16389

博士学位論文

# 磁性流体および磁性エラストマーを用いたソフトアクチュエータの研究

加　嶋　俊　大

２０１３年１月

大阪大学大学院工学研究科
知能・機能創成工学専攻

博士学位論文

# 磁性流体および磁性エラストマーを用いたソフトアクチュエータの研究

加　嶋　俊　大

２０１３年１月

大阪大学大学院工学研究科
知能・機能創成工学専攻

磁性流体および磁性エラストマーを用いたソフトアクチュエータの研究

Study on Soft Actuators using Magnetic Fluid and Magnetorheological Elastomer

目次


第1章 緒論 1

1.1 機能性材料を用いたソフトアクチュエータの研究動向 1

1.2 機能性高分子素材を応用したソフトアクチュエータ 2

1.3 磁性流体およびMR流体 4

1.4 本研究の目的と研究対象 6

1.5 本論文の構成 9

第2章 磁性流体および磁性エラストマーの物理 11

2.1 緒言 11

2.2 電磁場の支配方程式の導出 11

2.3 連続体力学からの流体・弾性体の支配方程式の導出 14

2.3.1 流れ場の方程式 14

2.3.2 粘弾性体の方程式 17

2.4 結言 18

第3章 磁性流体の数値解析 19

3.1 緒言 19

3.2 二次元有限要素法を用いた磁性流体の数値解析 19

3.2.1 ガラーキン法を用いた有限要素法による電磁場の定式化 20

3.2.2 安定化有限要素法に基づく非圧縮性流れ場の解析 24

3.2.3 レベルセット法を用いた流体解析法 31

3.2.4 磁性流体に作用する外力 35

3.2.5 磁性流体の連成解析手法 36

3.3 交流磁場による磁性流体の振動現象解析 37

3.4 実験結果と考察 41

3.5 結言 43

第4章 磁性エラストマーの材料特性 45

4.1 緒言 45

4.2 磁性エラストマーの作成方法 45

4.3 磁性エラストマーの磁気特性 49

4.4 磁性エラストマーの力学特性 54
4.5 結言 58

第5章 磁性エラストマーを用いたソフトアクチュエータ 59
5.1 緒言 59
5.2 磁気回路および動作原理 59
5.3 実験装置 61
5.4 実験結果と考察 62
5.5 結言 67

第6章 磁性エラストマーの数値解析手法 69
6.1 緒言 69
6.2 粒子法による粘弾性体解析手法 70
6.2.1 MPS法による離散化手法 70
6.2.2 接触判定 77
6.2.3 シンプレクティック法による時間積分法 79
6.3 三次元辺要素有限要素法による磁場解析 81
6.3.1 辺要素を用いたガラーキン法による離散化 81
6.3.2 永久磁石を含む静磁場の離散化 83
6.3.3 電磁力の計算方法 85
6.4 粒子法と有限要素法を用いた磁性エラストマーの連成解析手法 89
6.4.1 粒子計算点と節点要素の対応 89
6.4.2 三次元デローニ分割における空気節点の自動生成 90
6.5 磁性エラストマーの変形現象に対する連成解析手法の検証 91
6.5.1 解析モデル 91
6.5.2 解析結果及び考察 94
6.6 結言 99

第7章 結論 101

謝辞 103
研究業績一覧 105

# 第1章
# 緒論

## 1.1 機能性材料を用いたソフトアクチュエータの研究動向

現在最も一般的なアクチュエータである電磁モータは，発生する力やトルクおよびその効率などの出力特性や電子制御との相性の良さなどの利点を有し，電気機器，輸送機器や産業用ロボットなど，様々な分野で応用されている．しかし，高い剛性を有する従来の電磁アクチュエータでは実現が難しい動作が存在し，近年のメカトロニクスシステムではその克服が課題の一つとなっている．例えば，災害救助や管内検査に用いるマイクロマシンでは狭隘部に機械システム自体が進入する必要がある．リハビリテーション機器では機械システムが人間と直接接触する機会が多いためアクチュエータの剛性は低い方が望ましい．微細な医療用カテーテルでは電磁モータの埋め込みが構造的に困難であるという問題がある．このような電磁モータでは困難な課題への一つの回答として考えられるものが，アクチュエータ自体を柔軟な材料で構成するという試みである．ソフトアクチュエータとは，従来の電磁モータに対して低い剛性を有する材料から構成されるアクチュエータの総称である．ソフトアクチュエータの研究は生物の筋肉を人工的に模倣することで，優れた機能や知見を得ようとするバイオミメティクス（生体模倣）と呼ばれる研究分野を構成し，究極的には人工筋肉としての応用が期待される[1-5]．

ソフトアクチュエータの素材には主に低剛性の機能性材料が用いられる．機能性材料（functional material）は外力とは異なる外部刺激の入力に応じて何らかの力学的応答を出力する材料である．外部刺激は熱，電場，磁場，pH，水分，光，温度などであり，これらを入力として感知すると，刺激の強度や印加された条件に応じて，変位，応力，剛性などの変化が力学的応答として出力される．機能性材料は，外部刺激の検知（センサ機能），検知した刺激の判断（プロセッサ機能）および外界への力学的な応答（アクチュエータ機能）を有する材料であり，この機能から知能材料（intelligent material）とも呼ばれる．例えば形状記憶合金は，外部刺激として温度を与えた場合，それが変態点以上に保持されると，所定の形状への回復が生じる機能性材料の一種である．また，後ほど詳述するが本研究で扱う磁性流体や磁性エラストマーは，外部磁場を印加すると磁場の強度や印加方向に応じて，変形や弾性率の変化を示す機能性材料である．機能性材料が柔軟，すなわち低剛性の場合，そのアクチュエータ機能を応用することによってソフトアクチュエータを構成することができると考えられる．以下，機能性材料のうち，電気応答性の高分子素材を応用した代表的な既存研究を概観する．

## 1.2　機能性高分子素材を応用したソフトアクチュエータ

機能性高分子素材を応用したアクチュエータのうち，既存のメカトロニクスシステムとの相性の良さなどから，電気駆動型高分子（Elector-Active Polymer，EAP）と呼ばれるものが最も活発に研究されている．EAP は駆動原理に応じて大きく二種類に分けられる．一つは導電性高分子を用いたイオン性高分子材料であり，もう一つは誘電材料を用いた電気性高分子である．

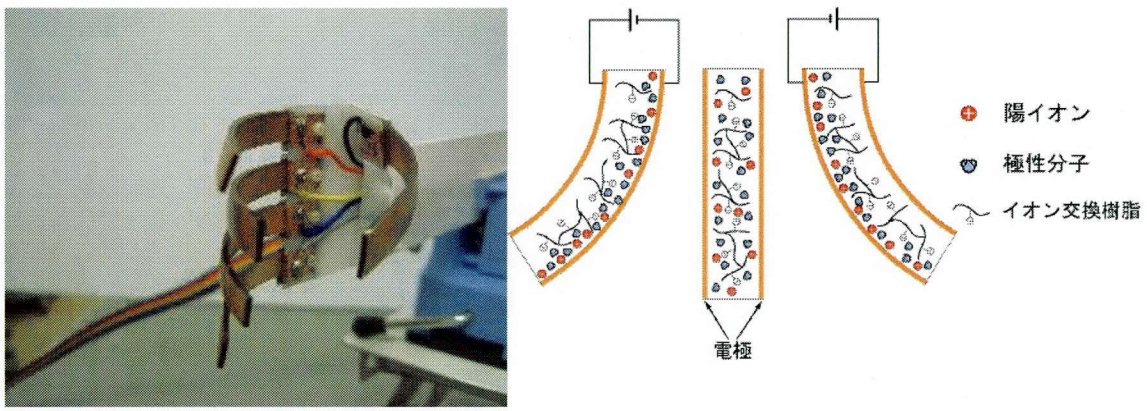
安積ら[1]は，ICPF（ionic conductive polymer film，導電性高分子薄膜）と呼ばれる，イオン導電性高分子をベースとしたソフトアクチュエータを開発している．これは高分子電解質ゲルに薄膜電極を接合した接合体である．電解質ゲルにはフッ素系イオン交換樹脂，電極には金あるいは白金を用いており，電場の印加により正負のイオンを偏析させて変形させるものである．このアクチュエータは低電圧（0.5～3V 程度）で駆動する．このアクチュエータは含水率の増加に応じて膨潤することから，水中や湿度の高い空気中といったウェットな環境で使用する必要がある．このアクチュエータは電磁モータでは実現が難しい屈曲動作を実現することができることが大きな特徴である．なお，ICPF を応用したアクチュエータはイーメックス社により商用に供されている．Fig. 1.1 に ICPF アクチュエータを用いたロボットハンドと駆動原理の概念図を示す．

ICPF アクチュエータの長所としては以下の点があげられる．

1. 駆動電圧が電気性高分子に比べて小さい．
2. 電圧極性に応じて屈曲動作を自在にデザインすることができる．

他方，短所としては次のようなことが知られている．

1. イオンの移動を待つ必要が有るため，一般的に応答が遅い．
2. 水分を必要とする環境を必要とすることが多く，空気中での取り扱いには制約がある．
3. ヒステリシスが大きいことから，制御が困難である．
4. 直動・回転のような動作に対しては複数本の ICPF が必要となる．




(a) ICPF を用いたハンド　　(b)　駆動原理

Fig. 1.1 導電性高分子アクチュエータの応用例と駆動原理

電気性高分子型アクチュエータは，誘電材料を元にしたソフトアクチュエータである．誘電特性はセラミックスに顕著な特徴であるが（セラミックコンデンサなど），誘電性を有する高分子材料はそれらに比べると低剛性であり，電極間に高い電場を印加すると静電相互作用（クーロン効果）によって大変形を生じる．

Fig. 1.2 のように電極間にシリコーンエラストマーなどの柔軟な誘電性高分子を電極間に配置して電場を印加すると，マクスウェル応力によって電極間に吸引力が生じて厚みが減少し面積が拡大するような変形を生じる．電場印加を止めると今度は材料自身の復元力によって元の形状に回復する．上述した導電性高分子アクチュエータのように，材料自体が電場応答性であるわけではなく，電気力学的な作用によって駆動するアクチュエータであるといえる．マクスウェル応力と弾性反力との力のつり合いを考慮すると式(1.1)のような関係を得る．ここで，$S$ は材料の電極方向のひずみ，$Y$ はヤング率，$\varepsilon_0$，$\varepsilon_r$ は真空の誘電率および比誘電率，$E$ は電場の大きさである．

$$S = -\frac{1}{Y}\varepsilon_0 \varepsilon_r E^2 \tag{1.1}$$

これより，このアクチュエータが高い出力を得るには，低ヤング率で高電場を印加しても電流が流れない，すなわち柔軟で絶縁性に優れた高分子材料を用いるべきであることがわかる．アクリルゴムやシリコーンゴムはこれらの特徴を満たす誘電性高分子であり，EAP の中でも大きな変形を示すことが知られている．アクリルゴムは 400V/μm の電場印加で最大 60-70%のひずみを生じる．電極の形状を工夫することで，変形量を拡大する試みも広く行われている[6]．

電気性高分子材料の利点としては以下の点があげられる．

1. ICPF と比べて出力が大きく，応答速度も大きい．
2. 収縮や屈曲など，電極配置によって変形挙動を自由にデザインできる．
3. コンデンサとしても機能するため，アクチュエータとセンサの機能を兼ねる．

他方，短所としては次のような点がある．

1. 高電圧を必要とするため，昇圧機器を必要とし，人間との親和性が低下する．
2. 絶縁破壊により機器が使用不可能になる場合があるため駆動時に注意を有する．
3. 駆動可能な温度範囲が比較的狭い．

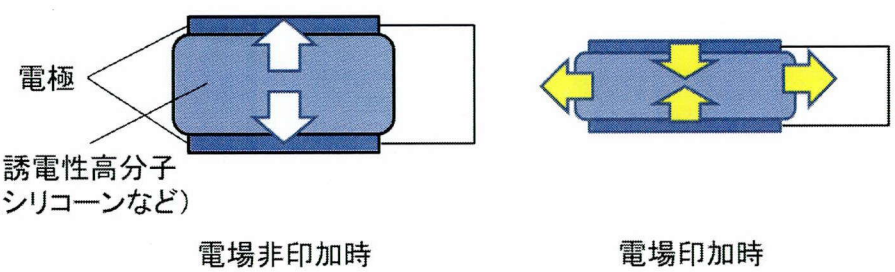


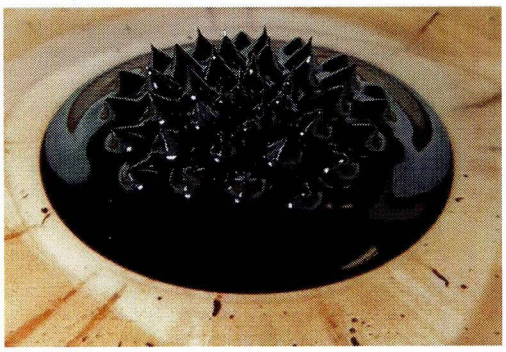

Fig. 1.2 誘電性高分子材料の電場印加時の駆動原理

## 1.3 磁性流体およびMR流体

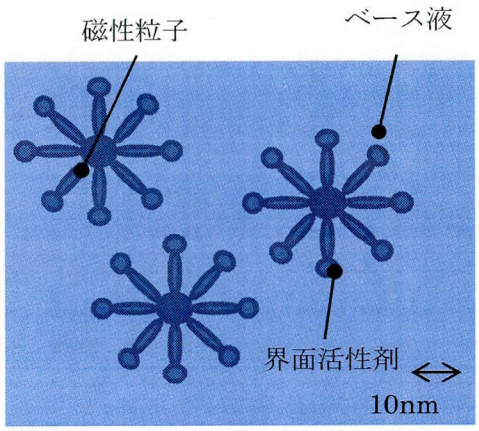
上述した電気駆動型の高分子材料に対応する磁場応答性の材料として，磁性流体および磁性エラストマーがある．以下ではその応用例について概説する．Fig. 1.3 に示すように，磁性流体は，強磁性体（マグネタイトやマンガン亜鉛鉄フェライトなど）の直径 10nm 程度の大きさの粒子を界面活性剤でコーティングし，ベース液と呼ばれる分散媒に懸濁させたコロイド溶液である[7-8]．磁性流体中の強磁性粒子はナノメートルの寸法であるため，ブラウン運動による熱ゆらぎを受けるために沈降せず，また界面活性剤による表面処理により粒子間の反発力が生じるために凝集しないことから，全体として安定に存在する．更に，粒子直径が磁壁の厚みよりも微小であることから単磁区構造をとり，残留磁化がなくヒステリシスを示さないという超常磁性を示す．加えて，磁場の存在により特徴的なスパイク形状を示すなど，様々な興味深い性質を有している．Table 1.2 に磁性流体の代表的な構成および物性値を示す[8]．

このような性質を用いて，磁場に応答する安定な機能性材料として磁性流体は様々な分野へ応用されている．最も典型的なものは磁石による吸引力を利用した真空防塵シールである．これはポールピースの間にネオジム磁石を挟み，ラジアルギャップに磁性流体を配置することで磁性体シャフトとの間に磁気回路を形成してコンタミネーションを防ぐ構造である．製品化されたものは 0.2mm のラジアルギャップにおいて 1000Pa の耐圧を有し，高速回転するハードディスクドライブの軸受用途として一般的に用いられている．その他の応用例としては，高性能スピーカの放熱機構，ステッピングモータの制振機構，加速度センサなどが報告されている．また，医療分野でも，磁石に引き寄せられる性質を利用して，磁性流体カプセルに封入した薬剤を患部へ集中させるドラッグデリバリーシステムへの応用が活発に研究されている[9]．アクチュエータへの応用としては，三田村ら[10]により磁石と磁性流体を組み合わせた人工心臓への応用が提案されている．また，MEMS における流量制御弁へ用いるマイクロアクチュエータの研究も報告されている．

磁性粒子の直径を 1μm のオーダーにしたものは磁気粘性流体（Magneto-rheological Fluid, MR 流体）と呼ばれる．これは分散させる磁性粒子を大きくすることで磁場による粘性変化の効果を大きく向上させたもので，MR ダンパや MR ブレーキなどの機械要素が既に実用化されている．更に，研磨装置，ハプティックデバイス，建築構造物のアクティブ制振など多方面への応用が提案されている．Fig. 1.4 のように，古荘ら[11]は，MR 流体を用いることで高トルク伝達を可能とするクラッチを試作している．また，Fig. 1.5 のように日本科学未来館では MR ダンパを用いた 2 基の免震装置が試験的に導入されている．



(a) 磁性流体




(b) 磁性流体の構成

Fig. 1.3 磁性流体

Table 1.1 磁性流体の物性値[8]

| ベース液(特徴) | 磁化の強さの平均値 [kA/m] | 密度 [$10^3$kg/m$^3$] | 粘度η [$10^{-3}$Pa*s] | 蒸気圧をとる液温 [℃] | 表面張力 [N/m] | 熱伝導率 [W/mK] | 比熱 [$10^3$J/kg*K] | 流動開始点 (η= 100Pa*s) [℃] |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| ジエステル (低蒸気圧，低粘度) | 16 (=200G) | 1.19 | 75 | 149 | | | | -37.2 |
| 炭化水素 (低粘度，低価格) | 16<br>32 | 1.05<br>1.25 | 3<br>6 | 76.7<br>76.7 | 0.028<br>0.028 | 0.146<br>0.146 | 1.63<br>1.47 | 4.4<br>7.2 |
| フッ化炭素 (水不溶性，高温用) | 8 | 2.05 | 2500 | 182 | 0.018 | 0.084 | 0.96 | -34.4 |
| エステル (低温用，高Ms) | 16<br>32<br>48 | 1.15<br>1.30<br>1.40 | 14<br>30<br>35 | 149<br>149<br>40 | 0.026<br>0.026<br>0.021 | 0.13<br>0.13<br>0.13 | 3.24<br>2.87<br>2.66 | -56.7<br>-56.7<br>-62.0 |
| 水 (低粘度，低価格) | 16<br>32 | 1.18<br>1.38 | 7<br>10 | 25.5<br>25.5 | 0.026<br>0.026 | 0.586<br>0.586 | 3.55<br>3.03 | 0 |
| ポリフェニルエーテル (低蒸気圧) | 8 | 2.05 | 7500 | 260 | | | | 10 |

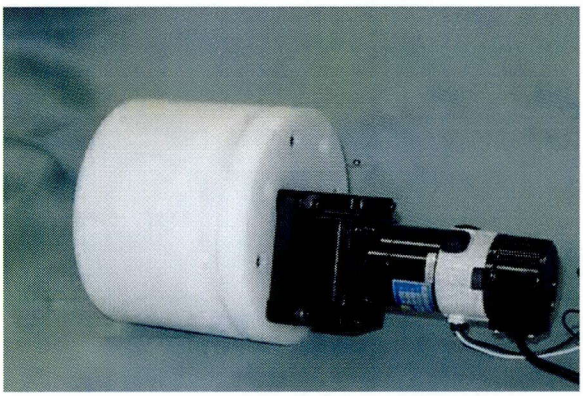


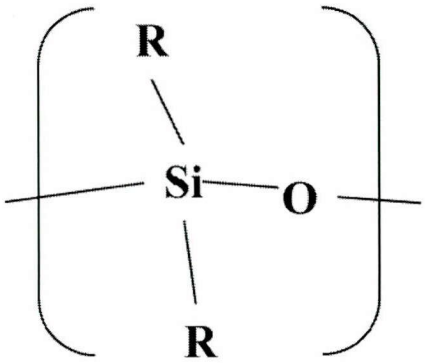
Fig. 1.4 MR 流体クラッチ

Fig. 1.5 MR 流体ダンパ

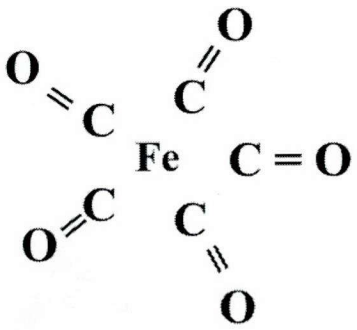
## 1.4 本研究の目的と研究対象

電気駆動型の高分子アクチュエータに比較すると，磁気駆動型の高分子アクチュエータの例はほとんど見られない．しかし，単位体積に蓄えられるエネルギー（エネルギー密度）を比較すると，同じ体積では磁気エネルギーは静電エネルギーに対して 1 万倍程度であることが知られている[12]．そこで本研究では，磁場応答性の機能性材料である磁性流体および磁性エラストマーに着目した．

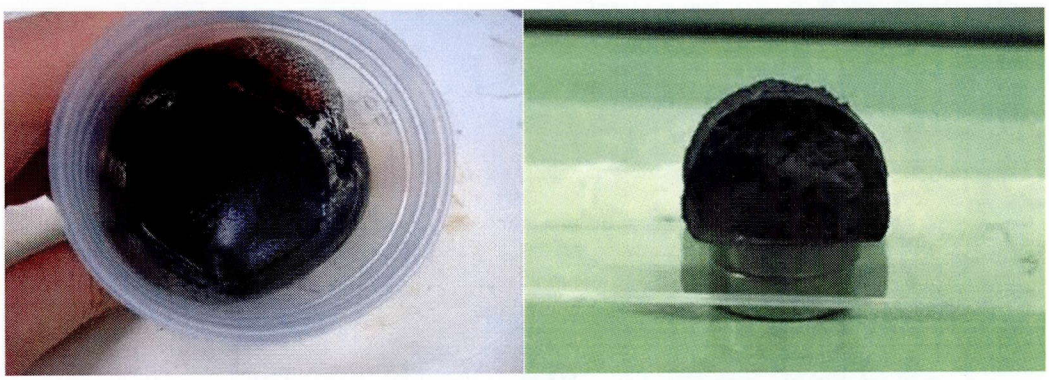
磁性エラストマーは比較的新しい磁気応答性機能性材料として近年 MR 流体とともに活発に研究されている[13],[14]．Fig. 1.6 に示すように，磁性エラストマーは鉄粒子をエラストマー（弾性を有する高分子材料）中に分散させた粒子複合材料であり，材料特性の解明や提案，アクチュエータの提案，数値計算手法などが活発に研究されている．ここでは一例として，Ramanujan ら[14]が提案した磁場勾配によって変形する磁性エラストマーを紹介する．




(a) シリコーンエラストマー




(b) カルボニル鉄粉



(c) 磁性エラストマー

Fig.1.6 シリコーンを母材とした磁性エラストマー

Fig. 1.7 のように棒状の磁性エラストマーの上端に設置した電磁石を用いて磁場を印加すると，磁場勾配によって磁性エラストマーには磁束密度が強い電磁石磁極間隙に向かって収縮する．この時，Fig. 1.8 のように磁場勾配の与え方によって磁性エラストマーは，単純な軸方向の収縮，コイル状の収縮，それらの両方の特徴を持つ収縮などの様々な変形挙動を示す．ただし，磁性エラストマーは電磁石と接触しないよう，ガラス管に沿って駆動する．このような駆動方式によって，人間の筋肉以上の発生推力が実現できることが示されているが，外部の電磁石が大型であり，エラストマー自体にはガラス管で保護されているので，ソフトアクチュエータとしてそのまま用いることは困難である．その他，既存研究では MR 流体に代わるダンパなどの応用研究が多く，紹介した Ramanujan らの例でも外部に設置した大型電磁石で大きな磁場を印加するなど，磁気回路的な面から見てソフトアクチュエータとしての応用可能性については検討の余地が多く残されていると考えられる．そこで本研究では，磁場により大変形が可能なアクチュエータ素材としての磁性流体・磁性エラストマーに着目し，その基本的な性能検討を行うとともに，磁気回路を考慮した駆動原理の提案を行い，併せて既存研究の数値解析手法では困難であった数値解析手法についても新しい提案を行う．これらを通じて，磁性エラストマーのソフトアクチュエータとしての応用可能性を明らかにすることが本研究の目的である．

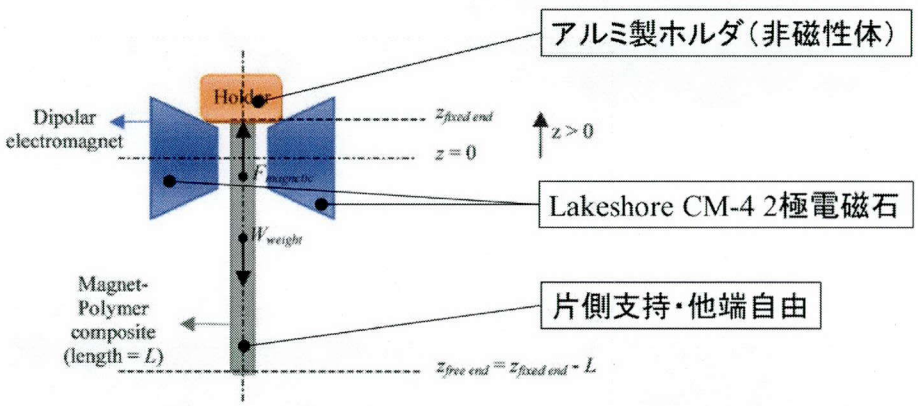



Fig. 1.7 梁状磁性エラストマーを用いたアクチュエータ

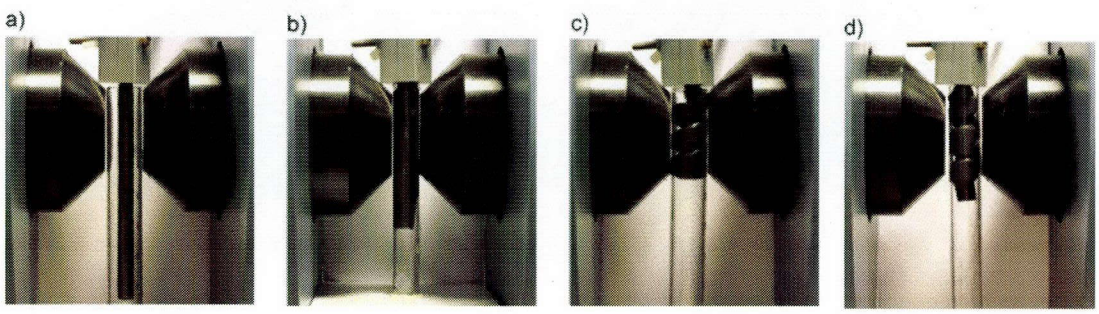



Fig. 1.8 梁状磁性エラストマーの様々な変形挙動

## 1.5 本論文の構成

本論文は磁性流体および磁性エラストマーを用いたソフトアクチュエータに関する研究内容の報告であり，7章からなる．

緒論では，機能性材料を用いたソフトアクチュエータの研究動向およびその応用事例を概観し，それらに対する磁性流体，MR流体，磁性エラストマーの位置づけについて述べている．また，本論文の対象と目的についても明らかにしている．

第 2 章では，本研究で扱う物理現象の磁性流体の支配方程式を導出する．マクスウェル方程式からは磁性流体解析に対しては渦電流を考慮する磁場の支配方程式を，磁性エラストマーに対しては永久磁石を含む静磁場の支配方程式を導出する．また，連続体に対してはコーシーの第一運動法則を元に，流れ場および粘弾性場の支配方程式を導出し，構成方程式とともに連続体を記述する場の方程式を示す．

第 3 章では，磁場印加時の磁性流体の数値解析手法と手法の妥当性を検討する．まず電磁場に対して 2 次元有限要素法を用いた離散化手法，流れ場についてはレベルセット法と安定化有限要素法を用いた自由表面を含む界面挙動の計算手法について述べる．これを元に電磁場から導かれる磁気力と表面張力を外力として，これらを連成させた磁性流体の連成解析手法を示し，交流磁場印加時の磁性流体の挙動を数値計算から求め，計算モデルと同様の実験装置を用いて検証を行う．以上の結果に加えて，ソフトアクチュエータとしての磁性流体の可能性について検討する．

第 4 章では，磁性エラストマーの材料特性について述べる．まず磁性エラストマーの作成手順を述べ，シランカップリング処理を用いた鉄粉のシリコーンへの分散特性改善について述べる．続いて平均粒子直径と粒子密度に着目し，作成した磁性エラストマーについて，磁化過程と弾性特性を測定結果から明らかにする．

第 5 章では，磁性エラストマーを用いたソフトアクチュエータの提案を行う．磁性エラストマーの磁気回路および磁気回路の変形を考慮した動作原理を提案し，また作成したアクチュエータの変位，発生力，減衰特性を測定する．これらの測定結果から，ソフトアクチュエータとして磁性エラストマーの適用可否を考察する．

第 6 章では，磁性エラストマーの変形に関して数値解析手法の提案と検証を行う．まず粘弾性体の支配方程式をMPS法によって離散化する手法について論述する．次に3次元辺要素有限要素法を用いた磁場の計算手法を述べ，得られた磁場から節点力法を用いてエラストマーの電磁力を計算する方法を論述する．MPS 法と有限要素法を連成させるために粒子データと節点データの相互変換手法について，弱連成によるMPS法と有限要素法を用いた磁性エラストマーの連成解析手法を提案する．最後に，提案した解析手法を用いて静磁場中の磁性エラストマーの変形を解析し，観察結果との比較を通して解析手法の妥当性について検討を行う．

結論では，第6章までの内容を総括し，本研究で得られた最終的な成果を要約する．

# 参考文献


[1] 長田義仁：『ソフトアクチュエータ 開発の最前線 ～人工筋肉の実現をめざして～』，エヌ・ティー・エス，2004.

[2] 中村太郎：『人工筋肉 ソフトアクチュエータが拓く世界』，日刊工業新聞社，2011.

[3] アクチュエータシステム技術企画委員会編：『アクチュエータ工学』，養賢堂，2004.

[4] 牧川方昭，吉田正樹：『運動のバイオメカニクス—運動メカニズムのハードウェアとソフトウェア』，コロナ社，2008.

[5] 山田宏：『力学の基礎とバイオメカニクス』，コロナ社，2012.

[6] 橋下稔，柴垣南，平井利博：「収縮型 PVC ゲルアクチュエータを用いた負作動型ブレーキの開発」，日本ロボット学会誌，Vol.29，No.8，pp. 667-674，2011.

[7] 武富荒，近角聡信：『磁性流体－基礎と応用』，日刊工業新聞社，1988.

[8] 神山新一：『磁性流体入門』，産業図書，1989.

[9] C. Alexioua, R. Jurgonsa, R. Schmida, A. Hilpertb, C. Bergemannc, F. Parakd and H. Iroa: “In vitro and in vivo investigations of targeted chemotherapy with magnetic nanoparticles”, Journal of Magnetism and Magnetic Material Vol. 293, No. 1, pp. 389-393, 2005.

[10] 三田村好矩：「人工心臓駆動用磁性流体アクチュエータの特性改善」，電子情報通信学会技術研究報告，MBE，ME とバイオサイバネティックス，Vol. 101, No. 130, pp. 15-20, 2001.

[11] N. Takesue, J. Furusho, M. Sakaguchi: “Improvement of Response Properties of MR-Fluid Actuator by Torque Feedback Control”, Proceedings of the 2001 IEEE, International Conference on Robotics & Automation, 2001.

[12] 川村貞夫：『制御用アクチュエータの基礎』，コロナ社，2006.

[13] M. Zrínyi: "Intelligent polymer gels controlled by magnetic fields", *Colloid & Polymer Science*, Vol. 278, No. 2, pp. 98-103, 2000.

[14] Vinh Quang Nguyen, R.V. Ramanujan: “Novel Coiling Behavior in Magnet-Polymer Composite”, *Macromol.*, Vol. 216, No. 6, pp. 618-626, 2010.

# 第 2 章

# 磁性流体および磁性エラストマーの基礎式

## 2.1 緒言

第 2 章では，本研究の対象である磁性を有するソフトマテリアルの基礎方程式を導出する．まず電磁場の支配方程式であるマクスウェル方程式から，渦電流を考慮しない場の方程式を導出する．次に，連続体力学の保存則から非圧縮性の粘性流体の支配方程式（連続の式とナビエ・ストークス方程式）および粘弾性体の支配方程式を導出する．

## 2.2 電磁場の支配方程式

電磁場の支配方程式であるマクスウェル方程式の微分型は以下のようになる[1]．

$$\mathrm{div}\boldsymbol{D} = \rho \tag{2.1}$$

$$\mathrm{div}\boldsymbol{B} = 0 \tag{2.2}$$

$$\mathrm{rot}\boldsymbol{E} = -\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} \tag{2.3}$$

$$\mathrm{rot}\boldsymbol{H} = \boldsymbol{J} + \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t} \tag{2.4}$$

ここで，$\boldsymbol{D}$ は電束密度，$\boldsymbol{B}$ は磁束密度，$\boldsymbol{E}$ は電場の強さ，$\boldsymbol{H}$ は磁界の強さ，$\boldsymbol{J}$ は電流密度，$t$ は時間，$\rho$ は体積電荷密度である．物質の構成方程式は式(2.5), (2.6), (2.7)のようになる．ここで，$\varepsilon$は誘電率，$\mu$ は透磁率，$\sigma$ は導電率である．

$$\boldsymbol{D} = \varepsilon \boldsymbol{E} \tag{2.5}$$

$$\boldsymbol{B} = \mu \boldsymbol{H} \tag{2.6}$$

$$\boldsymbol{J} = \sigma \boldsymbol{E} \tag{2.7}$$

また式(2.8)に示すように，電流密度の連続の式が成り立つ．

$$\mathrm{div}\boldsymbol{J} = 0 \tag{2.8}$$

有限要素法による電磁場解析で一般に用いられる表式を得るためには，磁気ベクトルポ

テンシャル $\boldsymbol{A}$ を用いる．電場の強さ $\boldsymbol{E}$ および磁束密度 $\boldsymbol{B}$ は，電気スカラポテンシャル $\phi$ および磁気ベクトルポテンシャル $\boldsymbol{A}$ を用いて次式のように表される．

$$\boldsymbol{E} = -\mathrm{grad}\phi - \frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t} \tag{2.9}$$

$$\boldsymbol{B} = \mathrm{rot}\boldsymbol{A} \tag{2.10}$$

解析領域に電流 $I_0$ が流れている場合の磁気ベクトルポテンシャル $\boldsymbol{A}$ は次式で表される．

$$\boldsymbol{A} = \frac{\mu}{4\pi}\oint_C \frac{I_0}{r}\mathrm{d}\boldsymbol{s} \tag{2.11}$$

ここで，$C$ は電流の流れている導体にそった積分路，$r$ は電流の流れている導体からの距離，$\boldsymbol{ds}$ は導体にそった線素ベクトルである．なお，式(2.10)より，2 次元場における磁束密度を成分表示すると次のようになる．

$$\begin{cases} B_x = \dfrac{\partial A_z}{\partial y} \\ B_y = -\dfrac{\partial A_z}{\partial x} \end{cases} \tag{2.12}$$

また，式(2.7)および(2.9)より，渦電流密度 $\boldsymbol{J}_e$ は次のように表される．

$$\boldsymbol{J}_e = -\sigma\left(\mathrm{grad}\phi + \frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t}\right) \tag{2.13}$$

外部電流密度 $\boldsymbol{J}_0$ が与えられた時の磁場は，渦電流による磁場の発生を考慮して，式(2.3), (2.10), (2.14)より次のように表すことができる．なお，式中の $\nu$ は磁気抵抗率である．

$$\sigma\frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t} + \mathrm{rot}(\nu\mathrm{rot}\boldsymbol{A}) = \boldsymbol{J}_0 - \sigma\mathrm{grad}\phi + \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t} \tag{2.14}$$

時間的な変化がそれほど大きくない場合は，変位電流$\partial \boldsymbol{D}/\partial t$を無視した準定常磁場として扱うことができる．本研究で扱う磁性流体および磁性エラストマーは導電率 $\sigma$ が無視できるほど小さく，渦電流の影響を無視できるので，支配方程式は次式のように簡単になる．

$$\mathrm{rot}(\nu\,\mathrm{rot}\boldsymbol{A}) = \boldsymbol{J}_0 \tag{2.15}$$

なお 2 次元場では $\boldsymbol{A}$ および $\boldsymbol{J}_0$ は $z$ 方向成分のみであるから，2 次元における電磁場の支配方程式は次式(2.16)および(2.17)となる（式(2.16)中の添字 $y$ および $z$ は直交座標系の向きを表す）.

$$[\mathrm{rot}(\nu \mathrm{rot}\boldsymbol{A})]_z = \frac{\partial}{\partial x}(\nu \mathrm{rot}\boldsymbol{A})_y - \frac{\partial}{\partial y}(\nu \mathrm{rot}\boldsymbol{A})_x = J_z^0 \tag{2.16}$$

$$\therefore \quad \frac{\partial}{\partial x}\left(\nu_x \frac{\partial A_z}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\nu_y \frac{\partial A_z}{\partial y}\right) = -J_z^0 \tag{2.17}$$

次に永久磁石を含む静磁場について述べる．静磁場における各物理量の関係は，着磁後の永久磁石の磁化 $\boldsymbol{M}$，磁束密度 $\boldsymbol{B}$，磁場の強さ $\boldsymbol{H}$ を用いて次式で与えられる.

$$\boldsymbol{B} = \mu_0 \boldsymbol{H} + \boldsymbol{M} \tag{2.18}$$

これをアンペールの法則により変形すると，式(2.19)のような永久磁石を含む静磁場の支配方程式を得る.

$$\mathrm{rot}\{\nu_0(\boldsymbol{B} - \boldsymbol{M})\} = \boldsymbol{J}_0 \tag{2.19}$$

$$\therefore \ \mathrm{rot}\{\nu_0(\mathrm{rot}\boldsymbol{A} - \boldsymbol{M})\} - \boldsymbol{J}_0 = \mathrm{rot}(\nu_0 \,\mathrm{rot}\boldsymbol{A}) - \mathrm{rot}\,\nu_0 \boldsymbol{M} - \boldsymbol{J}_0 = \boldsymbol{0} \tag{2.20}$$

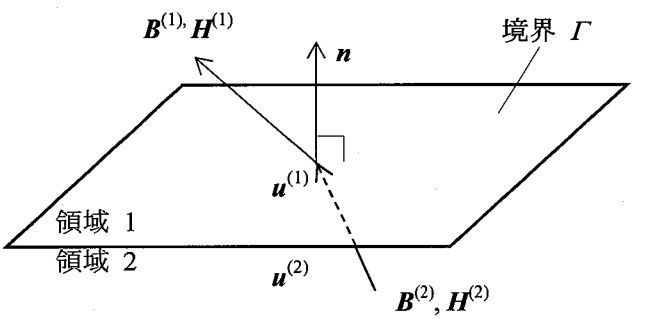



Fig. 2.1 二媒質間の境界における磁界と磁束密度

次に境界条件の取り扱いについて説明する．Fig.2.1 に示すような透磁率 $\mu$ が異なる 2 つの領域間の境界面 $\Gamma$ 上の磁束密度 $\boldsymbol{B}$，磁界の強さ $\boldsymbol{H}$ の連続性を考察する．ただし，境界面 $\Gamma$ は $x$-$y$ 平面に平行であると仮定する．電磁界において磁界が満足すべき物理的な境界条件は次式で表される．

$$\boldsymbol{B}^{(1)} \cdot \boldsymbol{n} = \boldsymbol{B}^{(2)} \cdot \boldsymbol{n} \tag{2.21}$$

$$\boldsymbol{H}^{(1)} \times \boldsymbol{n} = \boldsymbol{H}^{(2)} \times \boldsymbol{n} \tag{2.22}$$

ここで，$\boldsymbol{B}_1$ および $\boldsymbol{B}_2$ はそれぞれ領域 1 および領域 2 の磁束密度，$\boldsymbol{H}_1$ および $\boldsymbol{H}_2$ はそれぞれ領域 1 および領域 2 の磁界の強さ，$\boldsymbol{n}$ は境界面 $\Gamma$ の単位法線ベクトルとする．式(2.21)は境界面に対する磁束密度 $\boldsymbol{B}$ の法線方向成分の連続条件，式(2.22)は磁界の強さ $\boldsymbol{H}$ の接線方向成分の連続条件を示している．また，磁束密度 $\boldsymbol{B}$ は磁気ベクトルポテンシャル $\boldsymbol{A}$ を用いて式(2.10)で表されることから，磁束密度 $\boldsymbol{B}$ の法線方向成分の連続性は，磁気ベクトルポテンシャル $\boldsymbol{A}$ の連続条件を考えればよいことになる．よって，$\Gamma$ 上の $\boldsymbol{A}$ の分布に関して次式が得られる．

$$\frac{\partial A_y^{(1)}}{\partial x} - \frac{\partial A_x^{(1)}}{\partial y} = \frac{\partial A_y^{(2)}}{\partial x} - \frac{\partial A_x^{(2)}}{\partial y} \tag{2.23}$$

式(2.23)より，$\Gamma$ 上で $\Gamma$ に平行な二成分 $A_x$ と $A_y$ のみが連続であれば，磁束密度 $\boldsymbol{B}$ の法線方向成分の連続性が満足されることを示している．

## 2.3 流体・弾性体の支配方程式

連続体の運動は次のコーシーの第一運動法則によって表すことが出来る．

$$\rho \dot{\boldsymbol{v}} = \mathrm{div}\boldsymbol{\sigma} + \boldsymbol{b} \tag{2.24}$$

ここで，$\boldsymbol{v}$ は現在配置における速度，$\rho$は質量密度，$\boldsymbol{\sigma}$はコーシーの応力テンソル，$\boldsymbol{b}$ は物体力（体積力）を表す．これは運動量保存則であり，式(2.24)に基づいて以下のように連続体の運動方程式が導かれる．物質導関数およびナブラ演算子を用いると，最終的にテンソルの指標表記を用いて以下のようになる．

$$\dot{\boldsymbol{v}} = \frac{D\boldsymbol{v}}{Dt} = \frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} + (\mathrm{grad}\boldsymbol{v}) \cdot \boldsymbol{v} = \left( \frac{\partial v_i}{\partial t} + \frac{\partial v_i}{\partial x_j} v_j \right) \boldsymbol{e}_i \tag{2.25}$$

$$\mathrm{div}\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\nabla} = \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} \boldsymbol{e}_i \tag{2.26}$$

ここで，$x$ は位置，$\boldsymbol{e}_i$ は基底ベクトルであり，指標については総和規約を適用する．なお，これらの関係を用いて式(2.24)を変形すると以下の式を得る．

$$\left\{ \rho \left( \frac{\partial v_i}{\partial t} + \frac{\partial v_i}{\partial x_j} v_j \right) - \left( \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + b_i \right) \right\} \boldsymbol{e}_i = \boldsymbol{0} \tag{2.27}$$

### 2.3.1 流れ場の方程式

本研究では流れ場の構成式としてニュートン流体を仮定し，$\boldsymbol{\sigma}$に対して非圧縮性ニュートン流体の構成式(2.28)を導入する[2]．

$$\boldsymbol{\sigma} = -p\boldsymbol{I} + 2\eta\boldsymbol{D} \tag{2.28}$$

ここで，$p$ は圧力，$\eta$は粘性係数，$\boldsymbol{I}$ は単位テンソル，$\boldsymbol{D}$ は変形速度テンソルである．なお $\boldsymbol{D}$ は以下のように表される．

$$\boldsymbol{D} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) \tag{2.29}$$

構成式(2.28)を式(2.26)に代入して整理すると，

$$\mathrm{div}\boldsymbol{\sigma} = -\nabla p + \eta \nabla^2 \boldsymbol{v} \tag{2.30}$$

式(2.30)およびコーシーの第一運動法則(2.24)より，非圧縮性ニュートン流体に対する流れ場の支配方程式であるナビエ・ストークス方程式を，式(2.31)のように導くことができる．

$$\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} + \boldsymbol{v} \cdot (\mathrm{grad}\boldsymbol{v}) = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \frac{\eta}{\rho} \nabla^2 \boldsymbol{v} + \frac{\boldsymbol{b}}{\rho} \tag{2.31}$$

また，質量保存則（連続の式）が次式のように与えられる．

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathrm{div}(\rho \boldsymbol{v}) = 0 \tag{2.32}$$

本研究では流体を密度$\rho$が一定で粘性を持つ非圧縮性粘性流体として取り扱う．すなわち，式(2.32)の連続の式において$\partial\rho/\partial t = 0$として，連続の式は次式のように簡単な形で表せる．

$$\mathrm{div}\boldsymbol{v} = 0 \tag{2.33}$$

磁性流体の流れ場の支配方程式は式(2.31)および式(2.33)で与えられる．なお，本研究で対象とする 2 次元流れの場合，式(2.31)および式(2.33)を成分で表せば，それぞれ次式(2.34)および(2.35)で表される．

$$\begin{cases} \dfrac{\partial v_x}{\partial t} + v_x\dfrac{\partial v_x}{\partial x} + v_y\dfrac{\partial v_x}{\partial y} = -\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial p}{\partial x} + \dfrac{\eta}{\rho}\left(\dfrac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 v_x}{\partial y^2}\right) + \dfrac{X}{\rho} \\ \dfrac{\partial v_y}{\partial t} + v_x\dfrac{\partial v_y}{\partial x} + v_y\dfrac{\partial v_y}{\partial y} = -\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial p}{\partial y} + \dfrac{\eta}{\rho}\left(\dfrac{\partial^2 v_y}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 v_y}{\partial y^2}\right) + \dfrac{Y}{\rho} \end{cases} \tag{2.34}$$

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0 \tag{2.35}$$

ここで，流速 $\boldsymbol{v}=[v_x\, v_y]^T$，外力 $\boldsymbol{b}=[X\, Y]^T$である．

### 2.3.2 粘弾性体の方程式

粘弾性体の支配方程式であるナビエの方程式を導く．式(2.27)において，変位を $u$，加速度を$\alpha$で表せば，添字表記で以下のようになる．

$$\alpha_i = \frac{\partial v_i}{\partial t} + \frac{\partial v_i}{\partial x_j} v_j \tag{2.36}$$

$$v_i = \frac{\partial u_i}{\partial t} + \frac{\partial u_i}{\partial x_j} v_j \tag{2.36}$$

この関係を用いて次式を得る．

$$\rho\alpha_i = \frac{\partial\sigma_{ij}}{\partial x_j} + b_i \tag{2.37}$$

変位・速度が微小であるとすれば，式(2.38)のようになる．

$$\alpha_i = \frac{\partial v_i}{\partial t}, \quad v_i = \frac{\partial u_i}{\partial t} \tag{2.38}$$

また，等方線形弾性体の構成式は，ラメの定数 $\lambda$, $\mu$, ひずみテンソル$\boldsymbol{\varepsilon}$およびひずみ速度テンソル $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}$ を用いれば次式のようになる．

$$\boldsymbol{\sigma} = \lambda(\mathrm{tr}\boldsymbol{\varepsilon})\boldsymbol{I} + 2\mu\boldsymbol{\varepsilon} + 2\eta\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} \tag{2.39}$$

$$\therefore\ \sigma_{ij} = \lambda\varepsilon_{kk}\delta_{ij} + 2\mu\varepsilon_{ij} + 2\eta\dot{\varepsilon}_{ij} \tag{2.40}$$

構成式はフックの法則にひずみ速度に比例する粘性力を加えたものを用いている．なお$\boldsymbol{\varepsilon}$および$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}$は以下のように表される．

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \varepsilon_{ij}\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right) \tag{2.41}$$

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} = \dot{\varepsilon}_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i}\right) \tag{2.42}$$

以上より，構成式(2.39)と式(2.37)から，線形粘弾性体の運動方程式は次のように求められる．

$$\rho\frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x_j}\left\{\lambda\frac{\partial u_k}{\partial x_k}\delta_{ij} + \mu\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right) + \eta\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i}\right)\right\} + b_i \tag{2.43}$$

また，ラメの定数$\lambda$, $\mu$は，等方性の材料の場合ヤング率 $E$ およびポアソン比$\nu$との間に以下の式(2.44)，(2.45)の関係を有する．

$$\lambda = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} \tag{2.44}$$

$$\mu = \frac{E}{2(1+\nu)} \tag{2.45}$$

## 2.4 結言

電磁場の支配方程式および，流体・弾性体の支配方程式を導出し，磁性エラストマーに作用する電磁気および力学の関係を整理した．流体の具体的な離散化手法については磁性流体の数値解析を扱った第 3 章で式(2.34), (2.35)を支配方程式とした安定化有限要素法を用いて詳述する．また粘弾性体の離散化手法については磁性エラストマーの数値解析を扱う第 6 章で式(2.43)を支配方程式として MPS 法を用いて離散化する．電磁場の離散化手法は基本的にガラーキン法による重み付き残差法を用い，磁性流体と磁性エラストマーでは異なる手法を用いるため，定式化はそれぞれの章で別途論述する．

## 参考文献

[1] 砂川重信：『理論電磁気学　第 3 版』，紀伊國屋書店，1999.
[2] 今井功：『流体力学（前編）』，裳華房，1973.

# 第3章
# 磁性流体の数値解析

## 3.1 緒言

磁性流体は磁場による電磁力を受けて運動するため，ソフトアクチュエータの性能検討にあたっても数値解析に基づいてその運動を予測することは重要である．一般に電磁アクチュエータの数値解析には有限要素法が広く用いられているため，本研究でも電磁場と流れ場の離散化手法として有限要素法を採用した．本章では，連成解析手法が妥当であるかどうかを実験によって検証するとともに，磁性流体を用いたソフトアクチュエータの可能性についても検討を行う．まず有限要素法による二次元電磁場および流れ場の連成解析手法について論述する．続いて三相交流電流によって周期的な磁場を印加した場合の磁性流体の流動現象について，計算結果と実験結果の比較を通じて手法の妥当性を検証する．最後に，磁性流体のソフトアクチュエータとしての応用の可能性についても検討を行った．

## 3.2 二次元有限要素法を用いた磁性流体の数値解析

磁性流体および MR 流体は，ミクロ的には磁性粒子と流体との固液混相流であり，厳密には電磁場，流れ場，および熱力学的な影響に加え，磁性流体中の磁性粒子の回転やブラウン運動などの複雑な影響を考慮した取り扱いが必要となる．現在まで，流体中の磁性粒子の存在を無視したものとして，Neuringer-Rosensweig et al.[1]による数値解析手法の提案が行われ，また磁性粒子の存在を考慮したものとして，Shliomis [2]による報告がなされている．また井門らは格子ボルツマン法[3]や粒子法[4]を用いた磁性流体の挙動解析を行っている．

本研究ではミクロな磁性粒子の振る舞いはマクロな流動現象に影響を与えないものと仮定し，磁化を有する流体として磁性流体の数値解析を行った．解析では，電磁場の支配方程式であるマクスウェル方程式と流れ場の支配方程式であるナビエ・ストークス方程式および物質の構成方程式を基礎とする．まず，電磁場の支配方程式に対してガラーキン法を用いて導出した三角形一次節点要素有限要素法を元にして離散化手法について述べる．続いて，安定化有限要素法を用いたナビエ・ストークス方程式の離散化手法について述べた後，レベルセット法により界面変形を伴う流体の運動について検討を行う．最後に，電磁場から外力を計算し，流体と電磁場との連成手法について論述する．

### 3.2.1　ガラーキン法を用いた有限要素法による電磁場の定式化

本項では，有限要素法による電磁場の離散化手法について述べる．有限要素方程式の未知数である磁気ベクトルポテンシャル $\boldsymbol{A}$ は領域内で複雑に分布しているが，領域を細分していけばこれを単純な関数で近似しても大きな誤差は生じないと考えられる．二次元辺要素有限要素法では Fig. 3.1 のように，三角形要素を用いて領域を分割する．各要素には，要素番号と呼ばれる連続した番号を付す．Fig. 2.1 で三角形の頂点を節点と呼び，これにも節点番号と呼ばれる連続した番号を付す．これらの節点の中で，はじめからポテンシャル値がわかっているものを既知節点，わかっていない節点を未知節点と呼ぶ．以後，要素 $e$ の節点 $1e$, $2e$, $3e$ の座標は $(x^{(1e)}, y^{(1e)})$ ，$(x^{(2e)}, y^{(2e)})$ ，$(x^{(3e)}, y^{(3e)})$，ポテンシャルは$A^{(1e)}$, $A^{(2e)}$, $A^{(3e)}$というように節点番号を添字として付ける[5].

各要素内のポテンシャルは節点座標を用いて一次式による区分多項式で近似する．Fig3.2(a)に分割図，(b)に F-F'線上のポテンシャル $\boldsymbol{A}$ の分布の一例を示す．(b)の実線は真のポテンシャル分布，破線は区分多項式による一次近似を示す．次に任意の点 p のポテンシャル $A_{\mathrm{p}}$ の求め方を述べる．(a)で要素 $e$ の各節点のポテンシャル$A^{(1e)}$, $A^{(2e)}$, $A^{(3e)}$が既知であるとすれば，a，b 点のポテンシャル $A_{\mathrm{a}}$，$A_{\mathrm{b}}$ は内挿によって求められる．したがって，a，b 間の任意の点 p のポテンシャル $A_{\mathrm{p}}$ もまた内挿によって求められる．要素内のポテンシャルが座標の一次式で近似されるものを一次要素と呼ぶ．三角形一次要素では，要素内のポテンシャル $A^{(e)}$は次式のように座標 $x, y$ の一次近似式で表せると仮定する．

$$A^{(e)} = \alpha^{(1e)} + \alpha^{(2e)}x + \alpha^{(3e)}y = [1 \quad x \quad y]\begin{bmatrix}\alpha^{(1e)}\\ \alpha^{(2e)}\\ \alpha^{(3e)}\end{bmatrix} \tag{3.1}$$

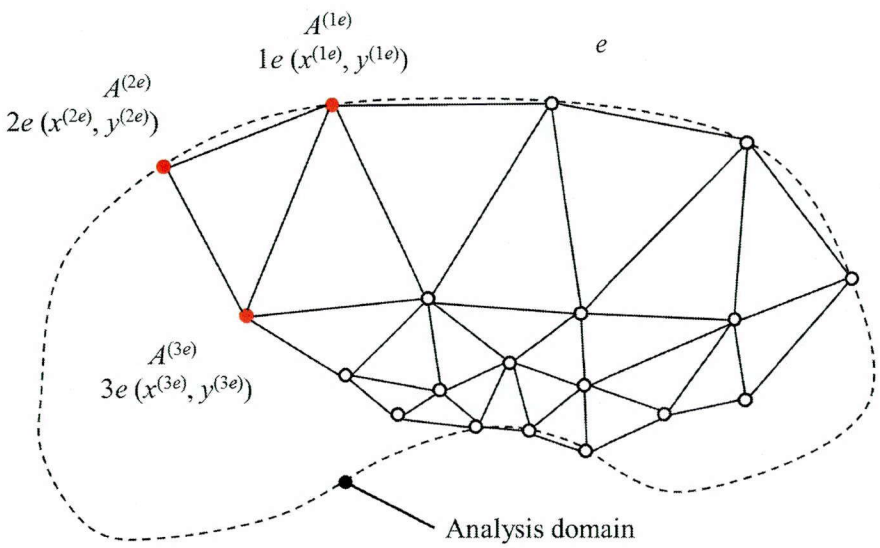



Fig. 3.1 有限要素を用いた領域分割の模式図

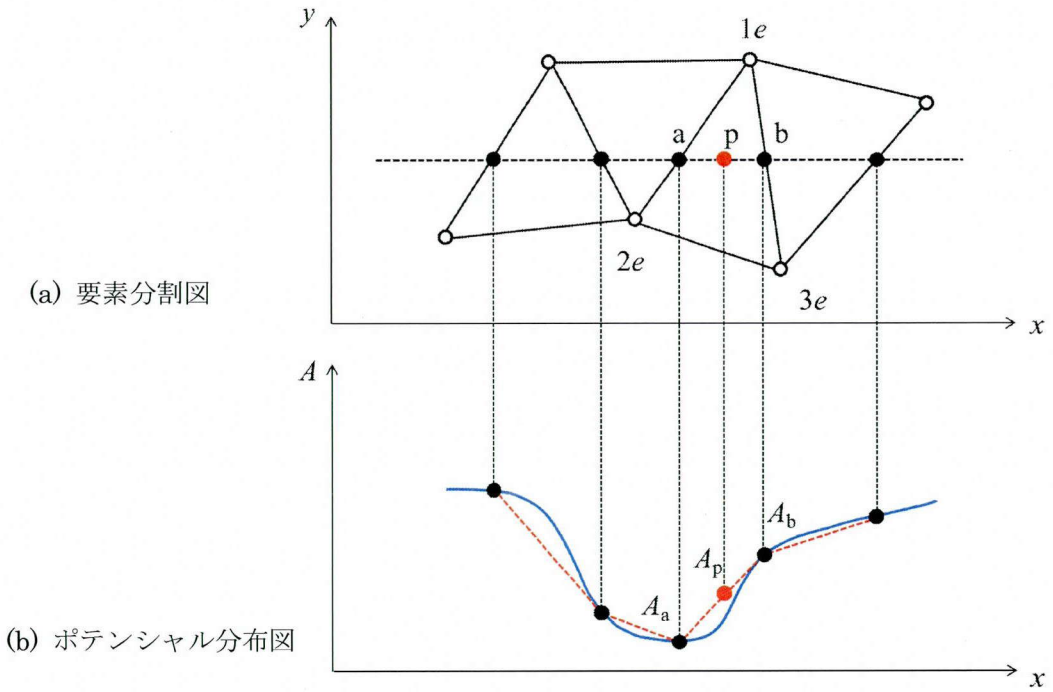



Fig. 3.2 磁気ベクトルポテンシャルの近似

ここで, $\alpha^{(1e)}$, $\alpha^{(2e)}$, $\alpha^{(3e)}$は要素ごとに異なる定数である. 式(3.1)に要素 $e$ の各節点 $1e$, $2e$, $3e$ 座標およびポテンシャルを代入すれば, 次の連立方程式を得る.

$$\begin{bmatrix} A^{(1e)} \\ A^{(2e)} \\ A^{(3e)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x^{(1e)} & y^{(1e)} \\ 1 & x^{(2e)} & y^{(2e)} \\ 1 & x^{(3e)} & y^{(3e)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha^{(1e)} \\ \alpha^{(2e)} \\ \alpha^{(3e)} \end{bmatrix} \tag{3.2}$$

この 2 式(3,1), (3.2)よりベクトルポテンシャルを次式のように表せる.

$$A^{(e)} = \begin{bmatrix} 1 & x & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & x^{(1e)} & y^{(1e)} \\ 1 & x^{(2e)} & y^{(2e)} \\ 1 & x^{(3e)} & y^{(3e)} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} A^{(1e)} \\ A^{(2e)} \\ A^{(3e)} \end{bmatrix} \tag{3.3}$$

これは要素 $e$ 内の任意の点のベクトルポテンシャル $A^{(e)}$が各節点のポテンシャル $A^{(1e)}$, $A^{(2e)}$, $A^{(3e)}$で表せることを意味している. そこで $A^{(e)}$に対して次式のような補間関数を導入する.

$$A^{(e)} = \sum_i N_i A^{(ie)} = N_1 A^{(1e)} + N_2 A^{(2e)} + N_3 A^{(3e)} \tag{3.4}$$

$$N_i = a_i + b_j x + c_k y \tag{3.5}$$

ここで，$N_i$は形状関数と呼ばれ，その係数は次のようになる．なお，$(i,\ j,\ k)$の組は$(1, 2, 3)$, $(2, 3, 1)$, $(3, 1, 2)$ と循環する添字であり，要素内の相対節点番号である．

$$\begin{cases} a_i = \dfrac{1}{2\Delta^{(e)}}\left(x_j y_k - x_k y_j\right) \\ b_j = \dfrac{1}{2\Delta^{(e)}}\left(y_j - y_k\right) \\ c_k = \dfrac{1}{2\Delta^{(e)}}\left(x_k - x_j\right) \end{cases} \tag{3.6}$$

また$\Delta^{(e)}$は要素 $e$ の面積であり次のようになる．

$$\Delta^{(e)} = \frac{1}{2}\left\{x_i\left(y_j - y_k\right) + x_j\left(y_k - y_i\right) + x_k\left(y_i - y_j\right)\right\} \tag{3.7}$$

式(3.4)と式(3.5)を用い，係数を節点座標から計算し補間関数(3.5)を決定する．

ここで，式(2.17)で表される二次元の方程式を書き直すと次式のようになる．

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\nu_y \frac{\partial A_z}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\nu_x \frac{\partial A_z}{\partial y}\right) + J_z^0 = 0 \tag{3.8}$$

しかしある一点におけるポテンシャル $A$ の近似値 $A'$ を上式に代入しても 0 にはならず残差 $R$ が残る．最良の近似解を得るには，残差 $R$ の対象領域 $S$ 全体にわたる総和が最小になるようにすれば良い．いま重み関数を $w$ 適当にとれば，領域全体で残差の重み付き積分を 0 にすることができる．

$$\iint_S Rw\mathrm{d}S = 0 \tag{3.9}$$

ガラーキン法は重み関数$w$に，近似解の関数と同じ形式の補間関数$N_i$を用いるものであり，上式に対応する残差の重み付き積分は次式で定義される．なお，これは領域全体では 0 になる．

$$G_i^* = \iint_S RN_i \mathrm{d}S \tag{3.10}$$

残差に式(3.8)の左辺を代入すると，

$$G_i^* = \iint_S N_i \left\{ \frac{\partial}{\partial x}\left(\nu_y \frac{\partial A_z}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\nu_x \frac{\partial A_z}{\partial y}\right) + J_z^0 \right\} \mathrm{d}S = 0 \tag{3.11}$$

任意の点のポテンシャルは解析領域内の全節点 1，2，…$N$ を用いて，次式で表されると仮定する．

$$A = \sum_{i=1}^{N} N_i A^{(ie)} \tag{3.12}$$

以下の関係式(3.13)を用いて式(3.11)を変形すれば，式(3.14)を得る．

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(N_i \nu_y \frac{\partial A_z}{\partial x}\right) = \frac{\partial N_i}{\partial x}\left(\nu_y \frac{\partial A_z}{\partial x}\right) + N_i \frac{\partial}{\partial x}\left(\nu_y \frac{\partial A_z}{\partial x}\right) \tag{3.13}$$

$$\begin{aligned} G_i^* = & \iint_S \left\{ \frac{\partial}{\partial x}\left(N_i \nu_y \frac{\partial A_z}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(N_i \nu_x \frac{\partial A_z}{\partial y}\right) + J_z^0 \right\} \mathrm{d}S \\ & - \iint_S \left\{ \frac{\partial N_i}{\partial x}\left(\nu_y \frac{\partial A_z}{\partial x}\right) + \frac{\partial N_i}{\partial y}\left(\nu_x \frac{\partial A_z}{\partial y}\right) \right\} \mathrm{d}S - \iint_S N_i J_z^0 \, \mathrm{d}S = 0 \end{aligned} \tag{3.14}$$

更にグリーンの定理を適用すれば，上式第一項は次のように書き換えられる．

$$\iint_S \left\{ \frac{\partial}{\partial x}\left(N_i \nu_y \frac{\partial A_z}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(N_i \nu_x \frac{\partial A_z}{\partial y}\right) \right\} \mathrm{d}S = \oint_C N_i \left(\nu_y \frac{\partial A_z}{\partial x} - \nu_x \frac{\partial A_z}{\partial y}\right) \mathrm{d}s \tag{3.15}$$

$C$ は領域の境界に沿う閉路である．この式は境界 $C$ を自然境界として取り扱う場合は 0 となり，またポテンシャル 0 の固定境界でも 0 となる．$Gi = -Gi^*$とおいて，式(3.11)は次の形に書き換えられる．

$$G_i = \iint_S \left\{ \frac{\partial N_i}{\partial x}\left(\nu_y \frac{\partial A_z}{\partial x}\right) + N_i \frac{\partial}{\partial x}\left(\nu_y \frac{\partial A_z}{\partial x}\right) \right\} \mathrm{d}S - \iint_S N_i J_z^0 \, \mathrm{d}S = 0 \tag{3.16}$$

これは領域全体にわたる積分であり，$N_i$ も領域全体で定義されるが，実際に計算を行う場

合は式(3.5)のように各要素で $N_{ie}$ を定義し，各要素で積分したものの総和をとればよい．補間関数は節点 $ie$ を共有する領域以外では 0 になるので，式(3.10)は節点 $ie$ を含む領域についてのみ積分すればよく，次のようになる．

$$G_i = \sum \left[ \iint_{S^{(e)}} \left\{ \frac{\partial N^{(ie)}}{\partial x} \left( \nu_y \frac{\partial A_z^{(e)}}{\partial x} \right) + \frac{\partial N^{(ie)}}{\partial y} \left( \nu_x \frac{\partial A_z^{(e)}}{\partial y} \right) \right\} \mathrm{d}S^{(e)} - \iint_{S^{(e)}} N^{(ie)} J_z^0 \, \mathrm{d}S^{(e)} \right] = 0 \tag{3.17}$$

いま，一次の補間関数を用いて考えているので，$\nu_x$, $\nu_y$ は要素内部で一定としてよく，補間関数(3.5)に関して $a^{(ie)}$, $b^{(je)}$, $c^{(ke)}$, また $\Delta^{(e)}$ は定数である．補間関数を上式に代入すれば，次式のように節点 $i$ を含む全要素について総和をとった式が得られる．

$$G_i = \sum_{i=0}^{n} \left\{ \sum_{j=1}^{3} \frac{1}{4\Delta^{(e)}} \left( \nu_y b^{(ie)} b^{(je)} + \nu_x c^{(ie)} c^{(je)} \right) A_j^{(e)} - \frac{J^0}{3\Delta^{(e)}} \right\} = 0 \tag{3.18}$$

なお，式変形では要素の面積を表す次式を考慮した．

$$\iint_{S^{(e)}} \mathrm{d}S^{(e)} = \Delta^{(e)} \tag{3.19}$$

以上は，変分原理に基づいて計算した節点の磁気ベクトルポテンシャルの分布を求める手法と本質的に等価である．

### 3.2.2 安定化有限要素法に基づく非圧縮性流れ場の解析

次に，非圧縮性粘性流体について，ナビエ・ストークス方程式を元に有限要素法によって解く場合を考える．この場合，有限要素方程式の解の一意性について次の二つの問題点が生じる．すなわち，

(i) レイノルズ数が大きい場合の方程式の性質に由来する問題（レイノルズ数が大きい場合に解に数値振動が発生する）

(ii) 非圧縮性の制約条件に由来する問題（電磁場を計算する場合に用いるようなガラーキン法（後述）を用いて形状関数を仮定した場合，ガラーキン法では流速と圧力に同じ形状関数を用いることで解に数値振動が発生する）

というものである[6]．本研究で対象とする磁性流体の挙動ではレイノルズ数は小さいため，(i)については問題にならないが，(ii)の問題を回避するために，流速の補間関数を圧力の補間関数よりも高次にすることが望ましい．本研究では，安定化有限要素法の一つであるSUPG/PSPG（Streamline Upwind Petrov-Galerkin/ Pressure Stabilizing Petrov-Galerkin）法を採用する．非圧縮性流体の基礎方程式である式(2.33)および式(2.34)を解く場合，物理量に次元を持たせたまま解く場合もあるが，一般的には物理量を無次元化して解く．これは，

> 幾何学的に相似な二つの流体領域において，流れのレイノルズ数が互いに等しければ，流体の種類，空間のスケール，流速が異なっていても，この二つの流れは幾何学的にも力学的にも相似である．

というレイノルズの相似則が成り立つため，流体領域の形状が相似でレイノルズ数が等しい流れに対しては，領域の大きさが変わる度に流れのパターンや流体力を計算しなおす必要がなく，代表的な一つの例を計算しておけば十分であるからである．本研究においても，有限要素方程式は無次元化したナビエ・ストークス方程式および連続の式を扱うものとする．式(2.34)および式(2.35)を無次元化すると以下のようになる[6-7]．

$$\frac{\partial v_i}{\partial t}+v_j\frac{\partial v_i}{\partial x_j}+\frac{\partial p}{\partial x_i}-\frac{1}{Re}\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j}+\frac{\partial v_j}{\partial x_i}\right)=0 \quad \text{in } \Omega \tag{3.20}$$

$$\frac{\partial v_i}{\partial x_i}=0 \quad \text{in } \Omega \tag{3.21}$$

ここで，$v_i$および$p$は無次元化された$x_i$方向の流速成分および圧力を表す．$Re$は無次元化パラメータであるレイノルズ数であり，密度$\rho$，粘性係数$\eta$，代表寸法$L$，代表流速$U$を用いて次のように表される．

$$Re=\frac{\rho UL}{\eta} \tag{3.22}$$

また，ディリクレ境界条件およびノイマン境界条件は以下のようになる．

$$v_i=g_i \quad \text{on } \Gamma_g \tag{3.23}$$

$$\frac{\partial}{\partial x_j}\left\{-p\delta_{ij}+\frac{1}{Re}\left(\frac{\partial v_j}{\partial x_i}+\frac{\partial v_i}{\partial x_j}\right)\right\}n_j=h_i \quad \text{on } \Gamma_h \tag{3.24}$$

ここで，$\Gamma_g$および$\Gamma_h$はディリクレ境界およびノイマン境界を表し，$g_i$および$h_i$はそれぞれ

の境界上で規定される流速および圧力である．また，$\delta_{ij}$ および $n_i$ はクロネッカーのデルタと外向きの単位法線ベクトルである．式(3.20)，式(3.21)はこの境界条件と，内部領域において非圧縮性を満足する初期条件のもとで解かれる．

式(3.20)，式(3.21)に対して，安定化有限要素法 SUPG/PSPG 法を適用すると，以下の弱形式が導かれる．

$$\int_\Omega w_i\left(\frac{\partial v_i}{\partial t}+\overline{u_j}\frac{\partial v_i}{\partial x_j}\right)\mathrm{d}\Omega-\int_\Omega p\frac{\partial w_i}{\partial x_i}\mathrm{d}\Omega + \int_\Omega \frac{1}{Re}\frac{\partial w_i}{\partial x_j}\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j}+\frac{\partial v_j}{\partial x_i}\right)\mathrm{d}\Omega + \sum_{e=1}^{n_{el}}\int_{\Omega^{(e)}}\left(\tau_S\overline{v_k}\frac{\partial w_i}{\partial x_k}\right)\left(\frac{\partial v_i}{\partial t}+\overline{v_j}\frac{\partial v_i}{\partial x_j}+\frac{\partial p}{\partial x_i}\right)\mathrm{d}\Omega^{(e)}=\int_{\Gamma_h} w_i h_i \mathrm{d}\Gamma_h \tag{3.25}$$

$$\int_\Omega q\frac{\partial v_i}{\partial x_i}\mathrm{d}\Omega+\sum_{e=1}^{n_{el}}\int_{\Omega_e}\left(\tau_P\frac{\partial q}{\partial x_i}\right)\left(\frac{\partial v_i}{\partial t}+\overline{v_j}\frac{\partial v_i}{\partial x_j}+\frac{\partial p}{\partial x_i}\right)\mathrm{d}\Omega=0 \tag{3.26}$$

ここで，$w_i$，$q$ は，それぞれ式(3.20)，式(3.21)に対するガラーキン項の重み関数である．移流速度$\overline{v_i}$は，この後の時間方向の離散化において，移流速度は陽的に評価される関数として取扱われるため，流速 $v_i$ とは異なる評価を行うため区別している．安定化パラメータ$\tau_S$，$\tau_P$は，次のようになる．

$$\tau_S=\left[\left(\frac{4}{Reh_e}\right)^2+\left(\frac{2}{\Delta t}\right)^2+\left(\frac{2\left|\overline{v_i^{(e)}}\right|}{h^{(e)}}\right)^2\right]^{-\frac{1}{2}} \tag{3.27}$$

$$\tau_P=\tau_S \tag{3.28}$$

ここで，$\Delta t$ は微小時間増分であり，$\overline{v_i^{(e)}}$は要素移流速度，$h^{(e)}$は要素長である．なお$\left|\overline{v_i^{(e)}}\right|$は，要素移流速度のノルムを表し，本手法では以下のように 2 乗ノルムを用いる．

$$\left|\overline{v_i^{(e)}}\right|=\sqrt{\sum_{i=1}^{N_d}\left(\overline{v_i^{(e)}}\right)^2} \tag{3.29}$$

$N_d$は次元数であり，二次元解析の場合 $N_d$=2 となる．

安定化パラメータ$\tau_S$, $\tau_P$に現れる要素長は，要素の代表的な長さを表すスカラ量である．ここでは，流れの方向を考慮して次のように要素長を定義する．

$$h_e = 2\left[\sum_{\alpha=1}^{n^{(e)}}\left|\frac{\overline{v_i^{(e)}}}{\left|\overline{v_i^{(e)}}\right|}\frac{\partial N_\alpha^{(e)}}{\partial x_i}\right|\right]^{-1} \tag{3.30}$$

ここで，$n^{(e)}$は要素の節点数であり，$N_\alpha^{(e)}$は要素$e$の形状関数である．弱形式(3.25)および(3.26)の未知変数である流速と圧力に対して，電磁場の場合と同様に，三角形一次要素による補間を行う．いま，ある有限要素の中の任意の点で未知関数を三角形の各節点の値から補間することを考える．要素領域内の未知関数である流速$v_i^{(e)}$，移流速度$\overline{v_i^{(e)}}$，圧力$p^{(e)}$の分布は以下のようになる．

$$v_i^{(e)} = N_\alpha^{(e)} v_{\alpha i}^{(e)}, \quad \overline{v_i^{(e)}} = N_\alpha^{(e)} \overline{v_{\alpha i}^{(e)}}, \quad p^{(e)} = N_\alpha^{(e)} p_\alpha^{(e)} \tag{3.31}$$

$N_\alpha^{(e)}$は形状関数であり，二次元では電磁場の場合と同様一次近似で次のようになる．

$$N_\alpha^{(e)} = a_\alpha^{(e)} + b_\beta^{(e)} x + c_\gamma^{(e)} y \tag{3.32}$$

ここで，形状関数の係数は次のようになる．$(\alpha,\ \beta,\ \gamma)$ の組は(1, 2, 3), (2, 3, 1), (3, 1, 2)と循環する添字である．また，$\Delta^{(e)}$は三角形要素の面積で，以下のように表される．

$$\begin{cases} a_\alpha^{(e)} = \dfrac{1}{2\Delta^{(e)}}\left(x_\beta^{(e)} y_\gamma^{(e)} - x_\gamma^{(e)} y_\beta^{(e)}\right) \\ b_\beta^{(e)} = \dfrac{1}{2\Delta^{(e)}}\left(y_\beta^{(e)} - y_\gamma^{(e)}\right) \\ c_\gamma^{(e)} = \dfrac{1}{2\Delta^{(e)}}\left(x_\gamma^{(e)} - x_\beta^{(e)}\right) \end{cases} \tag{3.33}$$

$$\Delta^{(e)} = \frac{1}{2}\left\{x_\alpha^{(e)}\left(y_\alpha^{(e)} - y_\gamma^{(e)}\right) + x_\beta^{(e)}\left(y_\gamma^{(e)} - y_\alpha^{(e)}\right) + x_\gamma^{(e)}\left(y_\alpha^{(e)} - y_\beta^{(e)}\right)\right\} \tag{3.34}$$

ここで，重み関数$w, q$も，未知関数の補間関数と同様に式(3.35)で定義する．また，ディリクレ境界においては，式(3.36)の境界条件を満たす．

$$w_i^{(e)} = N_\alpha^{(e)} w_\alpha^{(e)}, \quad q^{(e)} = N_\alpha^{(e)} q_\alpha^{(e)} \tag{3.35}$$

$$w_i = 0 \quad \text{on } \Gamma^{(g)} \tag{3.36}$$

以上を元に弱形式(3.25)および(3.26)のので表された支配方程式を，式(3.31)，式(3.32)の未知関数と重み関数を用いて，各要素領域において積分すると，時間に関する次の常微分方程式が得られる．

$$\boldsymbol{M}\frac{d\boldsymbol{v}_i}{dt} + A\boldsymbol{v}_i - \boldsymbol{G}_i p + \boldsymbol{D}_{ij}\boldsymbol{v}_j + \boldsymbol{M}_S\frac{d\boldsymbol{v}_i}{dt} + \boldsymbol{A}_S\boldsymbol{v}_i + \boldsymbol{G}_{S_i}\boldsymbol{p} = 0 \quad (i = 1,2) \tag{3.37}$$

$$\boldsymbol{C}_j\boldsymbol{v}_j + \boldsymbol{M}_{P_j}\frac{d\boldsymbol{v}_j}{dt} + \boldsymbol{A}_{P_j}\boldsymbol{v}_j + \boldsymbol{G}_P\boldsymbol{p} = 0 \tag{3.38}$$

ここで，$\boldsymbol{M}$, $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{G}$, $\boldsymbol{D}$, $\boldsymbol{C}$は，それぞれ時間，移流，圧力，粘性，連続の各項の係数行列を表し，添字 $S$, $P$ はそれぞれ SUPG 法，PSPG 法に起因する項を表している．なお，総和規約を $j$=1, 2 について適用するものとする．

空間方向の離散化を行った式(3.25)，(3.26)に対して，時間方向の離散化を行う．時間方向の離散化において，時間微分項は以下のように表される．

$$\frac{d\boldsymbol{v}_i}{dt} = \frac{\boldsymbol{v}_i^{n+1} - \boldsymbol{v}_i^n}{\Delta t} \tag{3.39}$$

流速に対してクランク・ニコルソン法を適用し，圧力と式(3.38)の第一項を陰的に取り扱うとすると，式(3.37)と(3.38)は以下のようになる．

$$\{\boldsymbol{M} + \boldsymbol{M}_S\}\frac{\boldsymbol{v}_i^{n+1} - \boldsymbol{v}_i^n}{\Delta t} + \{\boldsymbol{A} + \boldsymbol{A}_S\}\boldsymbol{v}_i^{n+1/2} - \{\boldsymbol{G}_i - \boldsymbol{G}_{S_i}\}\boldsymbol{p}^{n+1} + \boldsymbol{D}_{ij}\boldsymbol{v}_j^{n+1/2} = 0 \tag{3.40}$$

$$\boldsymbol{C}_j\boldsymbol{v}_j^{n+1} + \boldsymbol{M}_{P_j}\frac{\boldsymbol{v}_j^{n+1} - \boldsymbol{v}_j^n}{\Delta t} + \boldsymbol{A}_{P_j}\boldsymbol{v}_j^{n+\frac{1}{2}} + \boldsymbol{G}_P\boldsymbol{p}^{n+1} = 0 \tag{3.41}$$

ここで，$\boldsymbol{v}_i^{n+1/2}$は以下のように表される．

$$\boldsymbol{v}_i^{n+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\left(\boldsymbol{v}_i^{n+1} + \boldsymbol{v}_i^n\right) \tag{3.42}$$

また移流速度$\bar{\boldsymbol{v}}_i$は 2 次のアダムス・バシュフォース法により以下で陽的に線形近似する．

$$\bar{\boldsymbol{v}}_i = \frac{3}{2}\boldsymbol{v}_i^n - \frac{1}{2}\boldsymbol{v}_i^{n-1} \tag{3.43}$$

空間方向，時間方向に離散化された式(3.42)，(3.43)の未知量を左辺に，既知量を右辺に分離して行列表記すると，

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} {v_{x1}}^{n+1} \\ {v_{x2}}^{n+1} \\ p^{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} \tag{3.44}$$

ここで，$v_{x1}$，$v_{x2}$，$p$ は各節点での $x_1$ 方向，$x_2$ 方向の流速，圧力の値を成分とするベクトルである．また，左辺行列および右辺ベクトルの成分は以下のように表される．

$$\begin{gathered} A_{11} = \frac{1}{\Delta t}(\boldsymbol{M} + \boldsymbol{M}_S) + \frac{1}{2}(\boldsymbol{A} + \boldsymbol{A}_S + \boldsymbol{D}_{11}) \\ A_{12} = \frac{1}{2}D_{12} \\ A_{13} = -(\boldsymbol{G}_1 - \boldsymbol{G}_{S_1}) \\ A_{12} = \frac{1}{2}D_{21} \\ A_{22} = \frac{1}{\Delta t}(\boldsymbol{M} + \boldsymbol{M}_S) + \frac{1}{2}(\boldsymbol{A} + \boldsymbol{A}_S + \boldsymbol{D}_{22}) \\ A_{23} = -(\boldsymbol{G}_2 - \boldsymbol{G}_{S_2}) \\ A_{31} = C_1 + \frac{1}{\Delta t}\boldsymbol{M}_{P_1} + \frac{1}{2}\boldsymbol{A}_{P_1} \\ A_{32} = C_2 + \frac{1}{\Delta t}\boldsymbol{M}_{P_2} + \frac{1}{2}\boldsymbol{A}_{P_2} \\ A_{33} = \boldsymbol{G}_P \end{gathered} \tag{3.45}$$

$$\begin{aligned} b_1 &= \left[\frac{1}{\Delta t}\{\boldsymbol{M} + \boldsymbol{M}_S\} - \frac{1}{2}\{\boldsymbol{A} + \boldsymbol{A}_S + \boldsymbol{D}_{11}\}\right] {v_{x1}}^n - \frac{1}{2}\boldsymbol{D}_{12}{v_{x2}}^n \\ b_2 &= \left[\frac{1}{\Delta t}\{\boldsymbol{M} + \boldsymbol{M}_S\} - \frac{1}{2}\{\boldsymbol{A} + \boldsymbol{A}_S + \boldsymbol{D}_{22}\}\right] {v_{x2}}^n - \frac{1}{2}\boldsymbol{D}_{21}{v_{x1}}^n \\ b_3 &= \left\{\frac{1}{\Delta t}\boldsymbol{M}_{P_1} - \frac{1}{2}\boldsymbol{A}_{P_1}\right\} {v_{x1}}^n + \left\{\frac{1}{\Delta t}\boldsymbol{M}_{P_2} - \frac{1}{2}\boldsymbol{A}_{P_2}\right\} {v_{x2}}^n \end{aligned} \tag{3.46}$$

以上の離散化によって導かれた式(3.44)は連立一次方程式であり，これを解くことによって未知量$v_{x1}^{n+1}$，$v_{x2}^{n+1}$，$p^{n+1}$が求められる．これまでの解析手法をまとめると，安定化有限要素法を用いた流れ場の解析アルゴリズムは，特有の技巧を除けば電磁場と同じようになり，以下のようになる．

1. 計算条件の入力.
2. メッシュデータ，境界条件，初期条件の読み込み.
3. 要素面積，形状関数の空間微分を計算する.
4. 時間積分ループ
   (a) 安定化パラメータの計算.
   (b) 式(3.44)の左辺行列の作成と前処理.
   (c) 式(3.44)の右辺ベクトルの計算.
   (d) 式(3.44)を反復法で解き，未知量$v_{x1}^{n+1}$，$v_{x2}^{n+1}$，$p^{n+1}$を決定.
   (e) $v_{x1}^{n}$，$v_{x2}^{n}$，$p^{n}$を，$v_{x1}^{n+1}$，$v_{x2}^{n+1}$，$p^{n+1}$で置き換え時刻を更新.
5. 計算終了.

ナビエ・ストークス方程式および連続の式については前節のように空間・時間へ離散化されたものを解く．流体が自由表面を有する場合，オイラー法によって界面を表現するものとすれば，連続の式，ナビエ・ストークス方程式に加えて，自由表面の移流方程式

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \boldsymbol{v} \cdot \nabla \Phi = 0 \tag{3.47}$$

を特定の初期条件および境界条件で解く必要がある．上式は SUPG 法に基づく安定化有限要素法を用いて次式のような弱形式が与えられる．

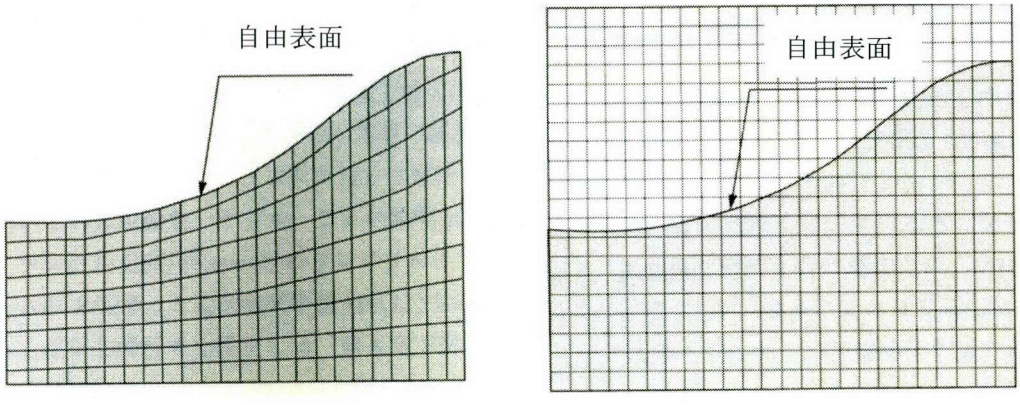
$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \Psi^h \left( \frac{\partial \phi^h}{\partial t} + \boldsymbol{v}^h \cdot \nabla \phi^h \right) \mathrm{d}\Omega + \sum_{e=1}^{n_{el}} \int_{\Omega^{(e)}} \tau_{\phi} \boldsymbol{v}^h \cdot \nabla \Psi^h \left( \frac{\partial \phi^h}{\partial t} + \boldsymbol{v}^h \cdot \nabla \phi^h \right) \mathrm{d}\Omega^{(e)} \\ + \sum_{e=1}^{n_{el}} \int_{\Omega^{(e)}} (\tau_{\mathrm{LSIC}} \nabla \Psi^h \cdot \nabla \phi^h) \mathrm{d}\Omega^{(e)} = 0 \end{aligned} \tag{3.48}$$

ここで，$\tau_{\phi}$および$\tau_{\mathrm{LSIC}}$は，それぞれ以下に示す SUPG 項と衝撃補足項の安定化パラメータであり，いずれも数値振動を抑える効果がある．

$$\begin{aligned} \tau_{\varphi} &= \left[ \left( \frac{2}{\Delta t} \right)^2 + \left( \frac{2|\boldsymbol{v}^h|}{h_e} \right)^2 \right]^{-1/2} \\ \tau_{\mathrm{LSIC}} &= \frac{h_e}{2} |\boldsymbol{v}^h| \end{aligned} \tag{3.49}$$

### 3.2.3　レベルセット法を用いた流体解析法

本研究の対象である磁性流体は，磁場による大きな界面変形を生じる．液体と気体の間に変形する界面（自由表面）が存在する流れに対する数値解析手法はこれまで数多く提案されているが，その手法は Fig. 3.3 に示すように，主に二種類に分類できる．一つは，自由表面を直接的に表現し，その位置を直接的に追跡する方法であり，これはラグランジュ法（Lagrangian method）と呼ばれる．もう一つの方法は，自由表面位置を物理量とは異なる界面関数を用いて間接的に表現し，空間に張られた固定格子上で界面位置を補足する方法であり，オイラー法（Eulerian method）と呼ばれる．ラグランジュ法の代表的な手法としては，ALE 法や Space-Time 法があり，オイラー法の代表的な手法には，VOF（Volume-of-fluid）法やレベルセット法がある．ラグランジュ法は自由表面を直接的に表現しているため，自由表面を間接的に表現しているオイラー法に比べて少ない計算量で比較的高い精度の結果が得られるが，自由表面形状が複雑になる場合，変形・移動する自由表面メッシュに大きな歪みが生じて計算が破綻しやすい．他方，オイラー法は固定メッシュを用いて自由表面を補足するため，ラグランジュ法にみられるメッシュの歪みに伴う数値的不安定性が生じないという長所があるが，自由表面を間接的に表現するため，高精度な結果を得るためには界面追跡法に比べて計算コストが増大する．両手法を整理したものを Table 3.1 に示す．




(a) ラグランジュ法（界面追跡法）　　(b) オイラー法（界面捕捉法）

Fig. 3.3 自由表面流れの解析手法

Table 3.1 自由表面流れの計算手法

| 名称 | 界面の表現方法 | 特徴 | 手法 |
|---|---|---|---|
| ラグランジュ法 | 直接的に表現 | 界面の位置が正確，解析メッシュが破綻する可能性 | ALE 法<br>Space-Time 法 |
| オイラー法 | 間接的に表現 | 不連続な現象に適用可能，界面が不鮮明となる可能性 | VOF 法<br>レベルセット法 |

本研究の流体解析では計算の安定性を考慮しオイラー法を採用する．Table 2.1 のようにオイラー法では VOF 法[8]とレベルセット法[9]がよく用いられる．

VOF 法では，Fig.3.3 右図のような空間格子のそれぞれに対して流体の体積充填率（volume of fluid）を示すスカラ値関数 $F$ を割り当て，$F$=0 であれば気体，$F$=0.5 であれば界面，$F$=1 であれば液体であるとし，$0<F<1$ の場合は体積充填率に応じてどちらであるかを決定する．

レベルセット法では，レベルセット関数という距離の関数を用い，自由表面上で 0，自由表面から液体の方向に対して正，気体の方向に対して負であるように符号を持たせる．式 (3.50) に直交座標系におけるレベルセット関数の定義を示す．なお，距離関数としての性質は式 (3.51) を満たし，勾配の絶対値は常に 1 である．

$$\Phi = \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2} \tag{3.50}$$

$$|\nabla \Phi| = 1 \tag{3.51}$$

オイラー法では後述する式(3.56)の移流項の速度によって界面の移動を考慮するが，VOF 法では移流項計算の進展につれて表面精度が悪化する．そこで本研究では，後述する再初期化によって界面の鋭敏性を保持できるレベルセット法を用いる．Fig.3.4 および Fig.3.5 に，VOF 法およびレベルセット関数が意味することと自由表面の位置関係を模式的に示す[6]．

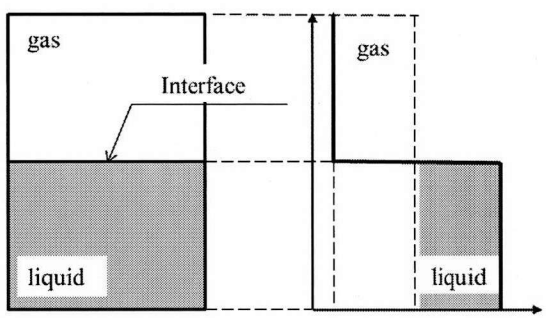



Fig. 3.4 VOF 法の模式図

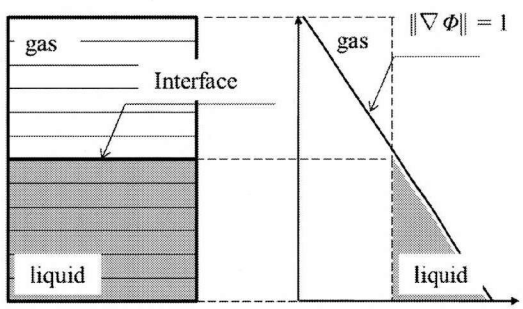



Fig. 3.5 レベルセット法の模式図

レベルセット法では，任意の時間におけるレベルセット関数 $\phi$ から次式の近似 Heaviside 関数 $H_D$ を用いて界面近傍の平滑化を行う．ここで，$D$ は界面から平滑化を行う幅であり，格子幅の 1~5 倍程度の値を用いる．

$$2H_D = \max\left[-1.0,\ \min\left\{1.0,\ \frac{\Phi}{D}+\frac{1}{\pi}\sin\left(\frac{\pi\Phi}{D}\right)\right\}\right] \tag{3.52}$$

非圧縮性粘性流体の自由表面流れの支配方程式は，式(2.34)および(2.35)に示した連続の式とナビエ・ストークスの運動方程式とによって表される．境界$\Gamma_g$において流速を規定する条件（ディリクレ型境界条件），および境界$\Gamma_h$における自然境界条件（ノイマン型境界条件）は，以下のようになる．なお，$\boldsymbol{v}$ は流速，$\boldsymbol{\sigma}$は応力テンソル，$\boldsymbol{n}$ は法線ベクトルである．

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{g} \quad \text{on } \Gamma_g \tag{3.53}$$

$$\boldsymbol{n}\cdot\sigma = \boldsymbol{h} \quad \text{on } \Gamma_h \tag{3.54}$$

初期条件は，流速に対して非圧縮性の条件が課せられ，$t$=0 における空間領域$\Omega$において，次式を与える．

$$\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x},0) = \boldsymbol{v}_0(\boldsymbol{x}),\quad \nabla\cdot\boldsymbol{v}_0 = 0 \quad \text{at } t = 0 \tag{3.55}$$

界面の位置を表す界面関数は，移流方程式(3.56)と初期条件(3.57)によって支配される．

$$\frac{\partial\Phi}{\partial t}+\boldsymbol{v}\cdot\nabla\Phi = 0,\quad \text{in } \Omega \tag{3.56}$$

$$\Phi(\boldsymbol{x},0) = \Phi_0(\boldsymbol{x}),\quad \text{at } t = 0 \tag{3.57}$$

オイラー法においては，流れ場の支配方程式の離散化の他に移流方程式(3.56)を離散化して界面位置を決定する．界面位置を正確に補足するためには，この移流方程式を高精度に解くことが重要であることはもちろん，気液界面の近傍で界面関数をできる限り鋭敏にする処理（スムージング）を施す必要がある．

レベルセット法では，レベルセット関数から近似 Heaviside 関数(3.52)を用いて界面の値を決定することによって鋭敏性を保つことができる．基本的には，界面の移流を支配する基礎方程式(3.56)を解き，式(3.57)により界面の平滑化を行うことで，気液二相流を時系列として表現する．そのため，初期の状態では界面はいたるところで 2$D$ の厚みを持っていることになる．しかし，時間経過により自由表面形状が変化するにつれて，レベルセット関数の性質である$|\nabla\Phi| = 1$という性質が保たれなくなるために計算精度が低下し，ついには計算が

破綻するおそれがある．それを防ぐために，計算の初期状態である$|\nabla\Phi| = 1$を常に満足するように，各タイムステップでレベルセット関数の性質を回復させることが有効であり，一般にこの処理はレベルセット関数の条件を時間発展させた次式を解くことによって行なわれる．この処理を再初期化と呼ぶ．

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \tilde{t}} = S(\Phi)(1 - |\nabla\Phi|) \tag{3.58}$$

$$S(\Phi) = \frac{\Phi}{\sqrt{\Phi^2 + \delta^2}} \cong \mathrm{sgn}(\Phi) = \begin{cases} +1 & (\Phi > 0) \\ 0 & (\Phi = 0) \\ -1 & (\Phi < 0) \end{cases} \tag{3.59}$$

この式が意味するのは，各節点で勾配$|\nabla\Phi|$が 1 から外れた分を誤差とし，誤差に比例した量を $\Phi$ に加えて次の時間の初期値とするということである．ここで，$\delta$ は平滑化を行う幅 $D$ と同程度の大きさの距離を表し，界面近傍で$S(\Phi)$は$\Phi$と符号が等しい状態で 0 に近づく．このため，界面の厚さが再初期化されても$\Phi$の位置は動かない．また $\tilde{t}$ は自由表面流れの計算を行う時間スケール（$t$ で表される）とは別のものであり，レベルセット関数の性質がある程度回復されるまで計算する時間である．

Fig.3.5 のようにレベルセット法は界面位置関係を等間隔な距離関数として定義するものであるため，界面からの法線方向の勾配が一定となる．したがって，法線ベクトル$\boldsymbol{n}_S$と曲率$\kappa$は次式によって表すことができる．

$$\boldsymbol{n}_S = \frac{\nabla\Phi}{|\nabla\Phi|} \tag{3.60}$$

$$\kappa = \nabla \cdot \boldsymbol{n}_S \tag{3.61}$$

これらの関係を用いると，表面張力は CSF（Continuum Surface Force）モデルによって次式のように各節点での体積力として計算することができる．

$$\boldsymbol{f}_{st} = -\sigma_{st}\kappa\delta_D\nabla\Phi = -\sigma_{st}\delta_D\left(\nabla \cdot \frac{\nabla\Phi}{|\nabla\Phi|}\right)\nabla\Phi \tag{3.62}$$

ここで，$\sigma_{st}$は表面張力係数である．レベルセット法は，距離関数としての性質を用いて自由表面とその周辺の領域を定義する方法であるから，界面周辺の勾配を容易に計算することが可能である．表面張力を考慮した計算においては，距離関数であるレベルセット関数$\Phi$により的確に法線ベクトルと曲率が求められるという点でも有効な手法である．

レベルセット法のアルゴリズムは以下のようにまとめられる．

1．計算条件の入力.
2．メッシュデータ，境界条件，初期条件の読み込み.
3．時間ループ.
(a) 界面関数の関係式(2.37)により密度と粘性係数を求める.
(b) 弱形式(3.26)から導かれる有限要素方程式の時間離散化式を解くことにより時間ステップ $n$ での流速と圧力を求める.
(c) 界面関数に関する移流方程式(3.56)を有限要素法で解くことにより，時間ステップ $n$ での界面関数を求める
(d) 流速と圧力，界面形状の更新($n := n+1$)
4．計算終了.

### 3.2.4 磁性流体に作用する外力

磁場勾配下に磁性体が存在する場合磁場が磁性体に及ぼす単位体積当たりの力 $\boldsymbol{f}^{mag}$ は次のケルビンの式を用いて表すことができる.

$$\boldsymbol{f}^{mag} = (\boldsymbol{M} \cdot \nabla)\boldsymbol{H} \tag{3.63}$$

ここで，$\boldsymbol{M}$ は磁化，$\boldsymbol{H}$ は磁界の強さであり，磁場勾配下において物質の磁化に比例する磁気力が発生することが分かる．いま式(3.63)について，透磁率を $\mu$，真空の透磁率を $\mu_0$，比透磁率を $\mu_r$，磁化率を $\chi_m$ とする．磁気飽和しない範囲において，$\boldsymbol{M} = \chi_m \boldsymbol{H}$ と線形近似できるものとすれば，$\mu = \mu_0 \mu_r = \mu_0(1 + \chi_m)$ という関係を用いて以下のように表せる.

$$\boldsymbol{B} = \mu \boldsymbol{H} = \mu_0 \mu_r \boldsymbol{H} \tag{3.64}$$

よって磁気ベクトルポテンシャル $\boldsymbol{A}$ を用いると，

$$\boldsymbol{H} = \frac{1}{\mu}\boldsymbol{B} = \frac{1}{\mu_0 \mu_r} \nabla \times \boldsymbol{A} \tag{3.65}$$

$$\boldsymbol{M} = \chi_m \boldsymbol{H} = \frac{1}{\mu_0 \mu_r} \nabla \times \boldsymbol{A} \tag{3.66}$$

となるから，単位体積あたりの磁気力は次のようになる.

$$\boldsymbol{f}^{mag} = \frac{\chi_m}{\mu_0 \mu_r^2}(\nabla \times \boldsymbol{A} \cdot \nabla)(\nabla \times \boldsymbol{A}) \tag{3.67}$$

また，表面張力$\boldsymbol{f}^{st}$は，表面張力係数$\sigma_{st}$，曲率$\kappa$および界面近傍のデルタ関数$\delta$，界面外向きの法線ベクトル$\boldsymbol{n}$を用いると次のように表すことが出来る．

$$\boldsymbol{f}^{st} = \sigma_{st}\kappa\delta\boldsymbol{n} \tag{3.68}$$

実際の計算では，式(3.62)で述べたように，レベルセット関数を用いて表面張力を計算する．単位体積あたりの重力$\boldsymbol{f}^{g}$は，密度$\rho$および重力加速度$\boldsymbol{g}$を用いて次のように表される．

$$\boldsymbol{f}^{g} = \rho\boldsymbol{g} \tag{3.69}$$

結局，磁性流体に作用する外力$\boldsymbol{f}$は，式(3.67), (2.68), (2.69)の合計として次式で与えられる．

$$\boldsymbol{f} = (\boldsymbol{M} \cdot \nabla)\boldsymbol{H} + \sigma_{st}\kappa\delta\boldsymbol{n} + \rho\boldsymbol{g} \tag{3.70}$$

### 3.2.5　磁性流体の連成解析手法

磁性流体は磁場により生じた力を流れ場の外力として与えることによって運動する．また，自由界面の変位を計算する場合は，流れ場に界面関数を導入して形状変化を表現する必要があることを述べた．以上をまとめると解析全体は次の 3 段階からなる．

1. マクスウェル方程式から導かれる磁場分布を計算する．

$$\nabla \times (\nu\nabla \times \boldsymbol{A}) = \boldsymbol{J}^0 \tag{3.71}$$

2. ケルビンの式から磁気力を計算する．

$$\boldsymbol{f}^{mag} = (\boldsymbol{M} \cdot \nabla)\boldsymbol{H} \tag{3.72}$$

3. ナビエ・ストークス方程式，連続の式，界面関数の移流方程式から，流れ場の圧力・流速を計算する．

$$\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} + (\boldsymbol{v} \cdot \nabla)\boldsymbol{v} = -\frac{1}{\rho}\nabla p + \frac{\eta}{\rho}\nabla^2\boldsymbol{v} + \frac{\boldsymbol{b}}{\rho} \tag{3.73}$$

$$\nabla \cdot \boldsymbol{v} = 0 \tag{3.74}$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \boldsymbol{v} \cdot \nabla \Phi = 0 \tag{3.75}$$

このプロセスを繰り返して界面変形を伴う磁性流体の運動を計算する．なお，本手法では，流体計算と電磁場計算に同一のメッシュを用いるため，同一のマトリックスで強連成による計算が可能であり，この点で計算において高い安定性を期待することができる．

## 3.3 交流磁場による磁性流体の振動現象の数値解析

磁性体は磁場勾配の存在により電磁力を受けて運動する．そのため，磁性流体に周期的な磁場が印加された場合，電磁力の作用により磁性流体も周期的に振動するものと考えられる．3.2 で論述した手法の妥当性を検証するため，磁場印加時の磁性流体の挙動を数値解析し，実験による検証を行った[10]．なお，以下の数値解析には，数値解析ソフトウェア COMSOL Multiphysics 3.5 を使用した．Table 3.2 に 20℃の室温における解析モデルの材料特性を，Table 3.3 に解析諸元を示す．磁性流体はイソパラフィンベース（シグマハイケミカル社，N-304）を用いた．なお，磁性流体は本来透磁率の非線形性を有するが，本研究では線形の磁性材料として扱い，比透磁率は 2 とした．

Fig. 3.7 に磁性流体の計測装置の全体図を示す．また，Fig. 3.8 に解析モデルを示す．磁性流体は初期の状態でアクリルパイプとエルボからなる U 字管中に静置してある．アクリルパイプは管の外径 8.0mm，内径 6.0mm，厚みは 1.0mm であり，この管の中に磁性流体 9.9 $\times 10^3 mm^3$ が充填されている．地面と水平に置かれたアクリルパイプは U, V, W の三相を 4 組有するコイルを貫いており，交流電流の励磁により三相交流磁場を印加できる．コイルは一相あたりの巻き数が 360，抵抗値は 4.6Ω であり，長手方向の長さは 10cm である．コイルには三相交流磁場，すなわち，最大値 2A，周波数 1Hz，各々位相が 2π/3 ずれた正弦波を励磁した．なお，界面近傍およびコイル近傍においてメッシュ分割数は十分細かく，流れ場においても電磁場においても空間解像度は十分保証されている．また，界面の移動においてはレベルセット関数の再初期化により界面の鋭敏性が保たれるよう考慮されており，界面の曖昧化を防ぐ工夫がなされている．

Fig.3.9 に U-V-W 相の電流密度を示す．また Fig.3.10 に電流密度および対応する時間での磁束密度分布のコンター図の，コイル近傍を拡大した図を示す．三相交流によって磁性流体中に磁場および磁化の勾配が生じていることが確認できる．Fig.3.11 に解析時間 10s 間の磁性流体と空気の界面近傍を拡大した図を示す．コンターは気相の体積分率を表し，最大値 1（青）で完全に気体，最小値-1（赤）で完全に液体であることを表しており，10s 間の変位の振幅範囲を意味している．この結果より，交流磁場の印加で周期的な変位が発生し，振幅が±1.1mm 生じていることが確認できた．

Table 3.2 物性値

| | 密度 [kg/m$^3$] | 粘性 [Pa·s] | 導電率 [S/m] | 比透磁率 |
|---|---|---|---|---|
| 磁性流体 | $1.140\times10^{3}$ | $1.000\times10^{-2}$ | 1 | 2 |
| 空気 | 1.204 | $1.000\times10^{-3}$ | 1 | 1 |
| コイル | - | - | 5.998e7 | 1 |

Table 3.3 解析諸元

| | |
|---|---|
| 要素数 | 67, 205 |
| 節点数 | 33, 630 |
| 解析時間 | 37 min. |

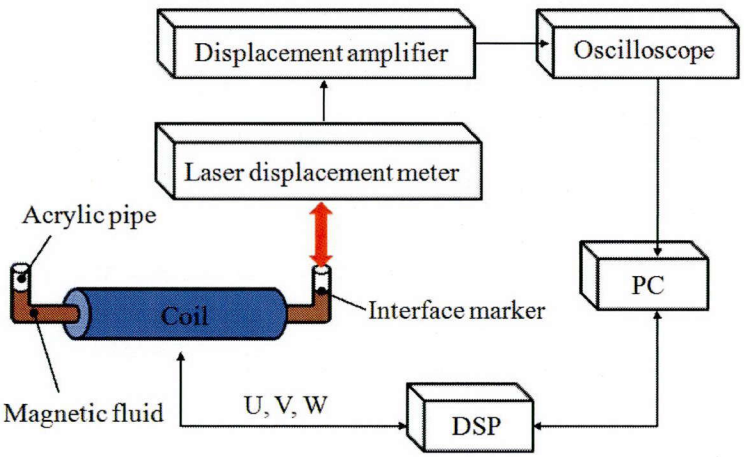



Fig. 3.7 実験装置の概略図

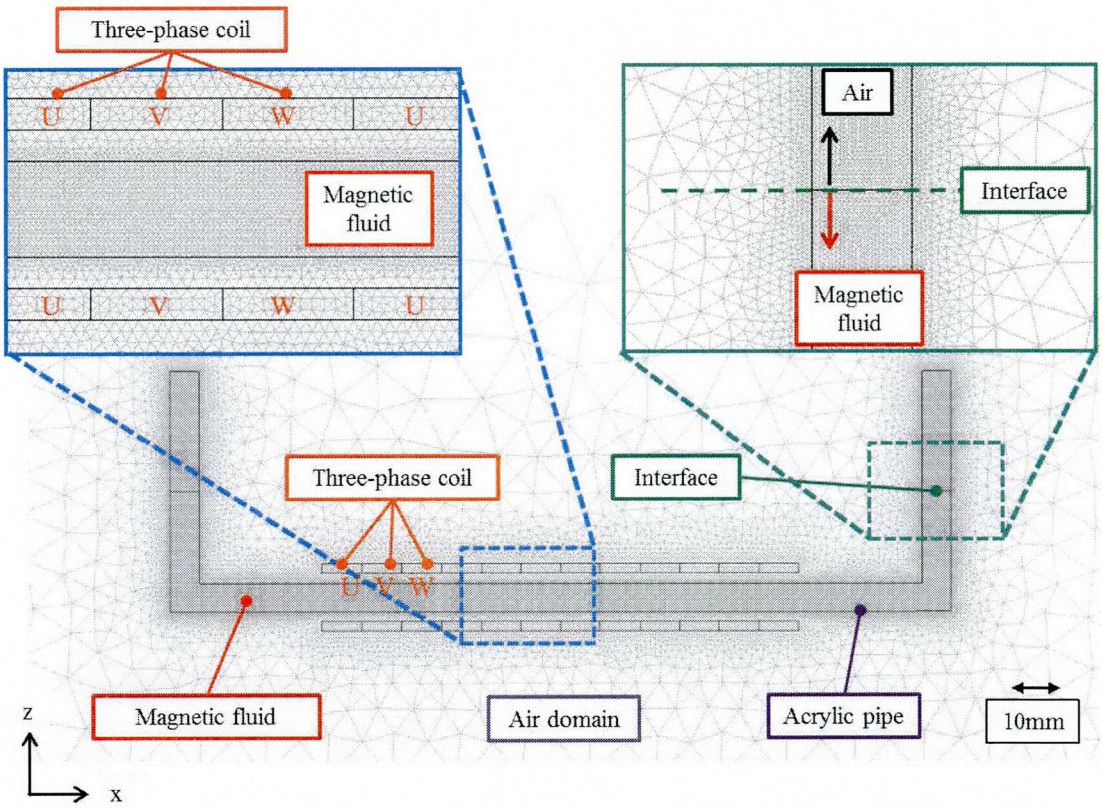



Fig. 3.8 解析モデル

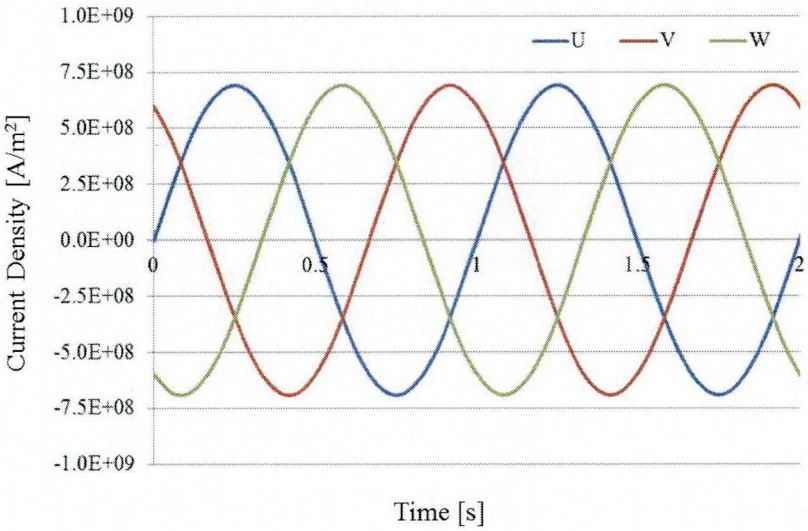



Fig. 3.9 電流密度プロファイル

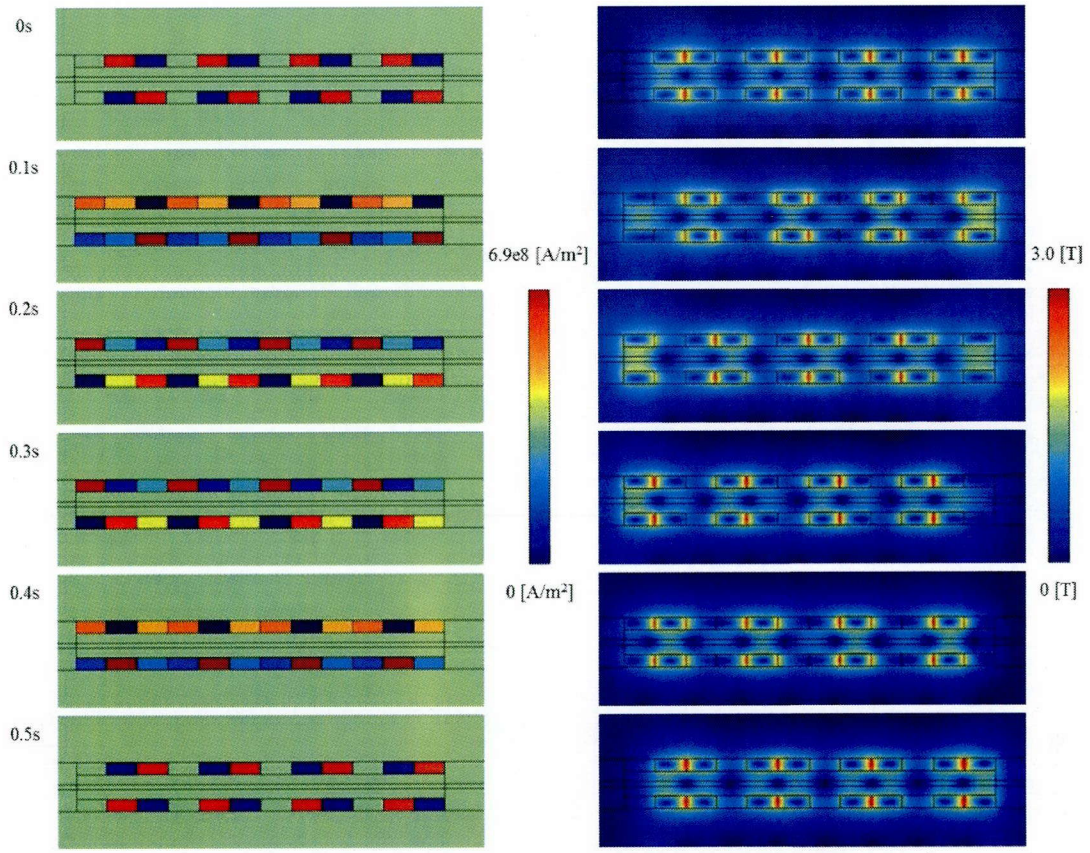



Fig. 3.10 電流密度および磁束密度分布

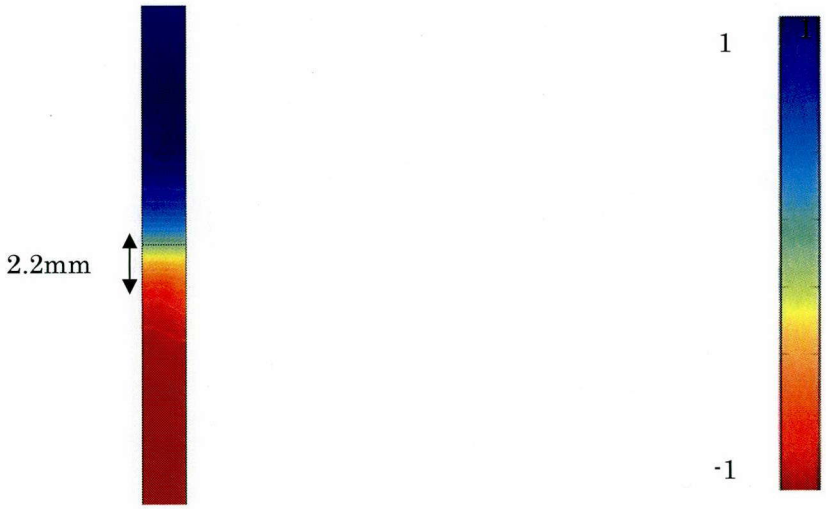



Fig. 3.11 界面変動のプロファイル (0-10s)

## 3.4 実験結果と考察

Fig. 3.12 に実験装置の写真を示す．枠線部分は空気と磁性流体の界面の拡大図である．Fig.3.7 のようにコイルの U, V, W 各相の導線は電流制御装置のデジタル・シグナル・プロセッサ（DSP）に接続されており，コイルへ任意の波形および任意の周波数の交流電流を励磁することができる．ここにレーザを照射し，レーザ変位計で界面の変位を測定する．ただし磁性流体の界面ではレーザが反射されないため，測定の際は微小な重量の球状の発泡スチロールビーズ（重量 0.001g 以下）をマーカーとして磁性流体界面に浮かべ，ビーズに反射する光を読み取るものとする．実験では，解析条件と同様，2A，1Hz の電流をコイルに励磁した．この時の磁性流体の変位について，10s 間の測定値を Fig.3.13 に示す．最大±1.4mm の変位が確認でき，解析値の±1.1mm とは誤差 20%程度の結果が得られた．

実験結果と計算結果における主要な誤差要因は，計算モデルが二次元解析であり，解析モデルは $y$ 方向に無限に広いものと仮定していることに起因すると考えられる．それ以外にも，磁性流体の透磁率が線形であると仮定していることは大きな誤差要因であると推定される．Fig.3.14 に，振動試料式磁力計（VSM）により測定した磁性流体の磁場の強さと透磁率の関係を示す．磁性流体は特に低磁場領域において強い非線形性を有しており，高磁場領域では磁気飽和により透磁率の非線形性を考慮することで Fig.3.10 に示したような磁場勾配に対してより強く反応するものと考えられる．しかしながら，定性的には磁場による流体の振動現象は数値解析によっても再現できており，電磁場の節点要素二次元有限要素法と，流れ場の安定化有限要素法（SUPG/PSPG 法）との連成解析手法を三次元に拡張し，透磁率の非線形性を考慮することによって，磁性流体の運動はより精確に解析可能になるものと考えられる．

実験および計算から，磁性流体を駆動させるためには 2A という比較的大きな電流値を励磁する必要があることが確認できた．しかしながら，空芯コイル中で移動磁場を用いる本章の方法では電流値に対して得られる流体の変位は小さく，磁性流体をソフトアクチュエータとして利用する際にはエネルギー効率の面でそれほど効果的ではないと考えられる．このことに加えて，磁性流体は低磁場領域での比較的高い透磁率を考慮したとしてもそれほど磁性体として良好な特性を有しておらず，また周辺環境の汚染を防ぐために封入のための容器が必要である．透磁率の低さを補うために粒子直径の大きい MR 流体を用いたとしても，封入容器が必要であるという問題は解決されず，粒子が大きくなることによる凝集や沈降という問題を新たに抱えることとなる．以上の理由から，磁性流体および MR 流体をソフトアクチュエータとして利用することは制約が大きいと考えられる．

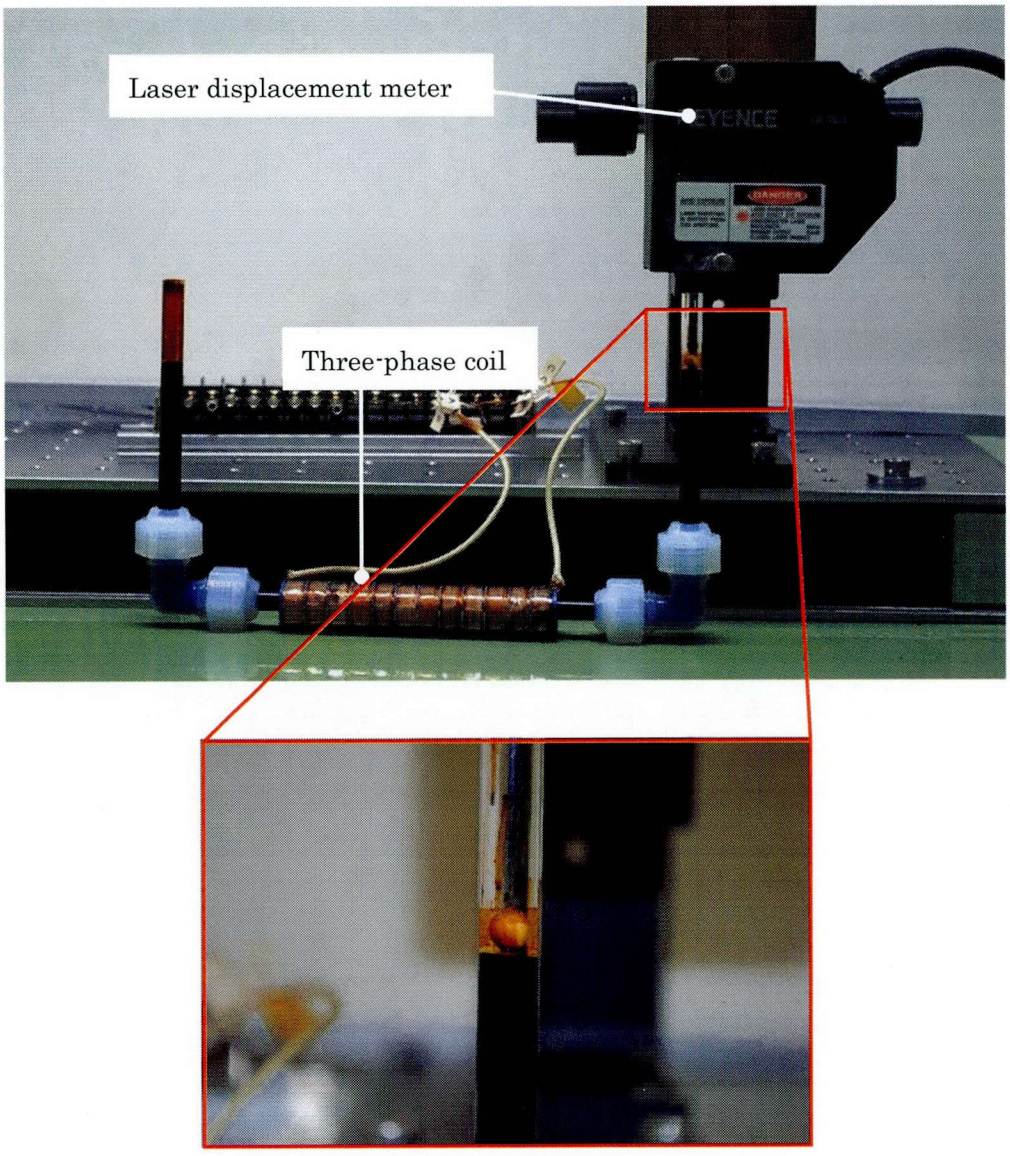



Fig. 3.12 実験装置の全体図と磁性流体界面近傍の拡大図

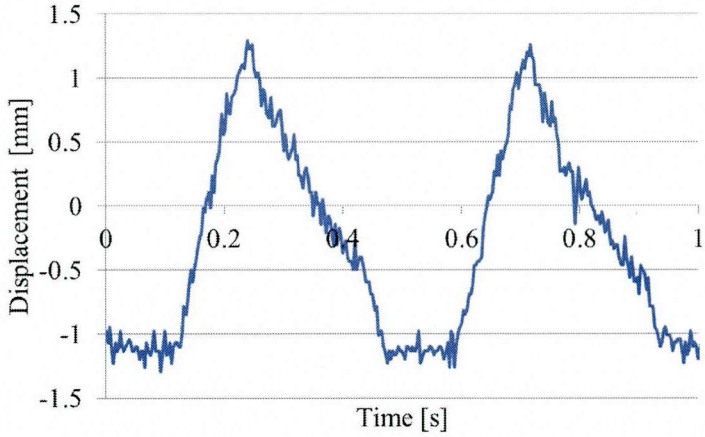



Fig. 3.13 1Hz 磁場印加時の磁性流体界面の変位

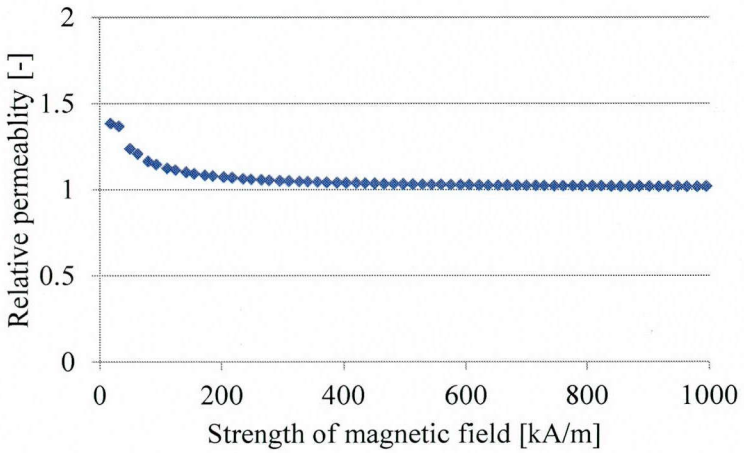



Fig. 3.14　磁性流体の比透磁率の測定値

## 3.5 結言

本章では交流磁場印加時の磁性流体の変形挙動について数値計算と実験の両面から検討を行った．数値解析では磁性流体の運動解析のために，節点要素二次元有限要素法を電磁場に，自由表面を有する流体の計算にはレベルセット法を用いた安定化有限要素法の一つである SUPG/PSPG 法を適用した．この手法を三相交流電流の励磁による磁性流体の液面振動現象解析に適用し，実験結果との比較から定性的には液面現象の計算が可能であることを確認した．またソフトアクチュエータとしての磁性流体の可能性を検討した結果，アクチュエータとしての利用には制約が大きいという結論に達した．次章以降では，この結果を踏まえ，磁性エラストマーを用いたソフトアクチュエータについて検討を行なう．

# 参考文献


[1] J. L. Neuringer and R. Rosensweig: "Ferrohydrodynamics", *The Physics of Fluid*, Vol. 7, No. 12, pp.1927-1937, 1964.

[2] M. I. Shliomis: "Magnetic fluids", Soviet Physics Uspekhi, Vol. 17, No. 2, pp. 153-169, 1974.

[3] 佐々木基泰，井門康司：「格子ボルツマン法による磁性流体液滴の 3 次元数値解析」，日本 AEM 学会誌，Vol. 17，No. 2，pp. 367-372，2009.

[4] 井門康司，「粒子法による機能性流体中粒子の応答解析」，日本機械学会 年次大会講演論文集，pp. 315-316，2004.

[5] 中田高義，高橋則雄：『電気工学の有限要素法 第二版』，森北出版，1986.

[6] 日本計算工学会流れの有限要素法研究委員会編，『続・有限要素法による流れのシミュレーション』，シュプリンガー・ジャパン，2008.

[7] 中山司：『流れ解析のための有限要素法入門』，東京大学出版会，2008.

[8] C. W. Hirt, B. D. Nichols: "Volume of fluid (VOF) method for the dynamics of free boundaries," *J. Comput. Phys.*, Vol. 39, pp. 201-225, 1981.

[9] M. Sussman, P. Smereka, S. Osher: "A level set approach for computing solutions to incompressible two-phase flow," *J. Comput. Phys.*, Vol. 114, pp. 146-159, 1994.

[10] S. Kashima, K. Hirata and F. Miyasaka: "Magnetic Fluid Oscillation Analysis using Finite Element Method," 電気学会論文誌.D 産業応用部門誌，132 巻 1 号，pp. 78-83，2012.

# 第4章
# 磁性エラストマーの材料特性

## 4.1 緒言

磁性エラストマーは磁場によって力学的特性が変化する[1-3]．磁気特性（透磁率や飽和磁化）は電磁力の大きさに影響し，力学特性（弾性率やポアソン比）は変形性能に影響するため，良好な磁気特性・弾性特性を有する磁性エラストマーの作成はソフトアクチュエータの性能に直接影響する課題である．磁気特性は主に分散させる磁性粒子の種類によって決まり，弾性特性は分散媒である母材の影響によって決定される．本章では，まず本研究で使用するエラストマーの作成方法について説明した後，作成した磁性エラストマーの磁気特性および弾性特性の測定を行い，その結果に対する考察を述べる．

## 4.2 磁性エラストマーの作成

本研究で用いた磁性エラストマーは，母材をシリコーン（信越シリコーン KE-1052）とし，分散させる鉄粒子（フィラー）にはカルボニル鉄あるいは電解鉄粉を用いている．母材のシリコーンは化学的安定性に優れ，酸化・分解されにくく耐熱性，耐薬品性も良好である．また，ケイ素（Si）に有機系の置換基（R）を備えているため，導入する置換基を適切に選択することで様々な機能を持たせることができる．磁性流体および MR 流体の分散系では，シリコーンオイルを溶媒として用いるものも多く，鉄粒子を表面処理してシリコーンへ高濃度に安定して分散させることができる．本研究ではこの点に着目し，後述するようにシランカップリング剤を用いてシリコーンゲルと鉄粒子との親和性を改善している．なお，磁性エラストマーの母材は KE-1052 のみを用いたが，その理由は低い磁場を印加した場合でも形状変形が大きくなるよう，調査した範囲内で最もヤング率が低いものを選定したためである．磁性流体と MR 流体の磁気特性が粒子直径によって大きく異なるため直径の異なる 3 種類鉄粒子を選定した．本研究で用いた鉄粉の種類と粒径を Table 4.1 に示す．

Table 4.1　磁性エラストマー作成に使用した鉄粉

| 粒子直径（d50 平均値） | 2.0μm | 6.0-7.0μm | 30μm |
|---|---|---|---|
| 種類 | カルボニル鉄粉<br>BASF HQ | カルボニル鉄粉<br>BASF CS | 電解鉄粉<br>高純度化学研究所，<br>FEE04PB |

本研究で用いた磁性エラストマーの作成は次のように行う．まず，母材となるシリコーンに鉄粒子を分散させる．ここでフィラーとなる鉄粒子は後述するシランカップリング処理が施されているものとする．鉄粒子を手動である程度撹拌した後，卓上攪拌機（シンキー AR-100）を用いて 5 分から 10 分程度撹拌する．撹拌後，エラストマーと鉄粒子の分散系には多くの空気が混入しているので，真空ポンプを用いて 15 分程度静置し，脱泡処理を行う．最後に，恒温槽で 100℃から 120℃に 30 分程度保持して反応促進し硬化させる．この過程を Fig. 4.1 に示す．

エラストマーへ分散させる鉄粉はシランカップリング処理を行っている．エラストマーは硬化前には液状であり，加熱によって徐々に硬化する．この硬化の過程で粒子をエラストマー中に均一に分散させるためには，粒子同士の凝集や沈降を防がなければならない．磁性エラストマーに使用する鉄粒子は MR 流体に用いられるもの大きさと同程度か 10 倍程度のオーダーであり，加熱硬化の過程で凝集や沈降を生じるため，こうした対策は重要である．シリコーンが疎水性であるのに対して，カルボニル鉄粒子の表面には通常微細な酸化膜が形成され，そこに空気中の水分が作用することで親水性となっている．この効果のため，撹拌によってシリコーン中にエラストマーを均一に分散させることは難しい．そこで，鉄粒子を表面処理し，シリコーンとの親和性を向上させる工夫が必要となる．これは，磁性流体に分散させるナノ粒子を界面活性剤でコーティングすることと基本的には同様である．表面処理には母材に対応して様々な手法が取られるが，本研究では母材にシリコーン樹脂を用いるので，鉄粒子の表面修飾にシランカップリング材を用いるシランカップリング処理を採用する．ここでは試薬としてメチルトリメトキシシラン $(CH_3O)_3SiCH_3$（信越シリコーン，KBM-13）を用いた．Fig. 4.2 はシランカップリング処理によって鉄粒子表面がシリコーンと親和する様子を模式的に示したものである．酸化膜上に付着していた水酸基 -OH がカップリング処理によって置換され，シリコーンとの親和性が向上する．

処理にあたっては，鉄粉と試薬は体積比１：１で混合し，カップリング反応を促進するためにオイル浴で 50℃から 70℃に保ち，反応によって生じた水分と試薬がともに揮発し切った段階で反応が終了したとみなす．反応の進行に伴い鉄粒子は凝集し硬化するので，適宜撹拌して凝集を防ぐ．反応が終了した試料はある程度凝集し塊状となっているので乳鉢に移して解砕し粒状に戻すことで最終的に表面処理された鉄粉を得る．なお，試薬は揮発性で有毒であるため，作業は全てドラフトチャンバー中で行う．

Fig. 4.3 に，上記の手法で作成した粒径 20μm のカルボニル鉄粉を母材体積に対して 20%（以降，20vol.%などと表記する）分散させた磁性エラストマー試験片を，走査型電子顕微鏡（SEM）で観察した写真を示す．これより，部分的な凝集が確認できるものの，鉄粒子のフィラーはエラストマー母材へある程度均一に分散していることが確認できる．

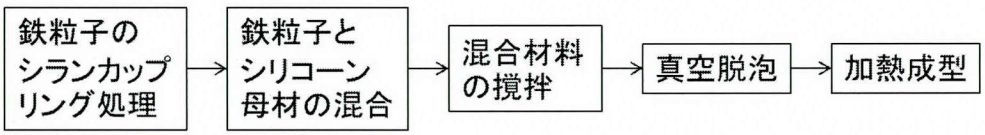
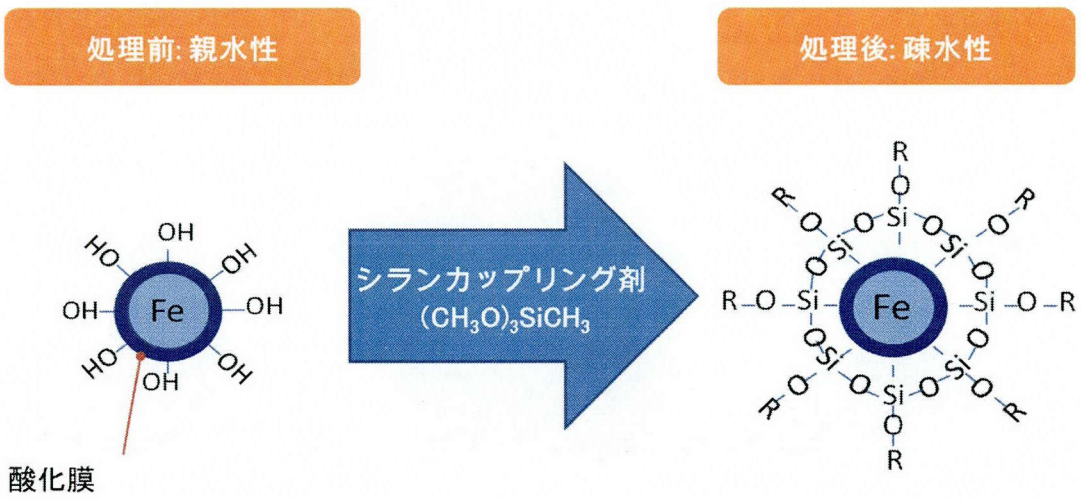
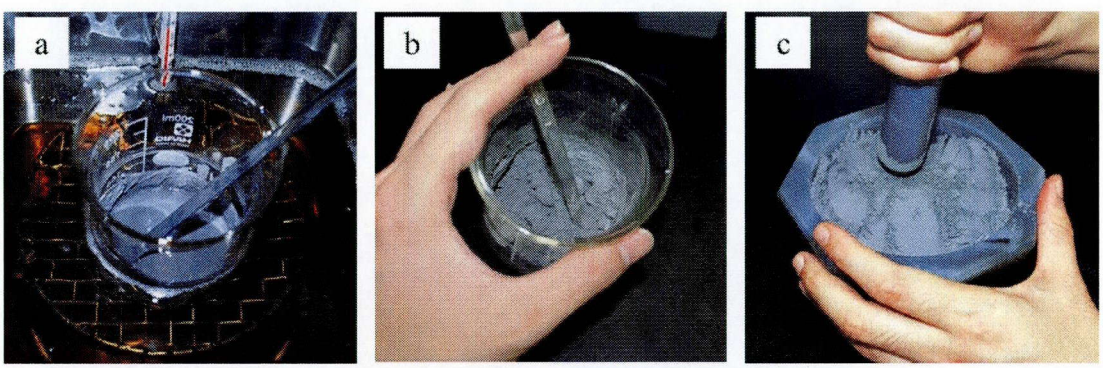



Fig. 4.1 磁性エラストマーの作成手順



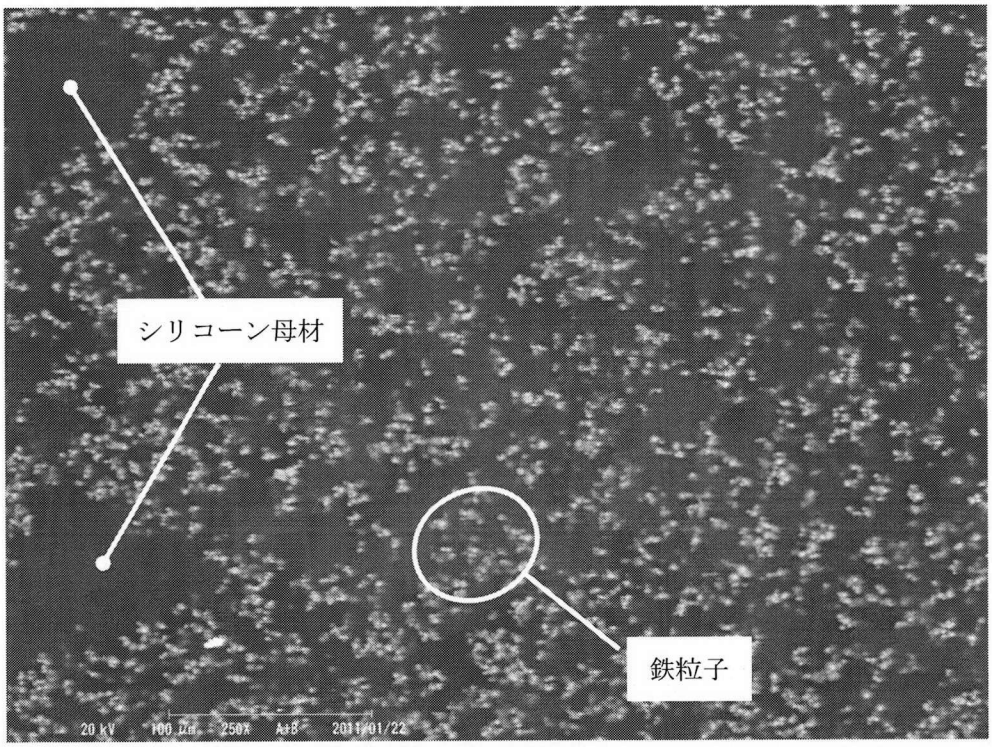




a: 鉄粒子と試薬を混合し，油浴中で撹拌しながら液体を蒸発させる.

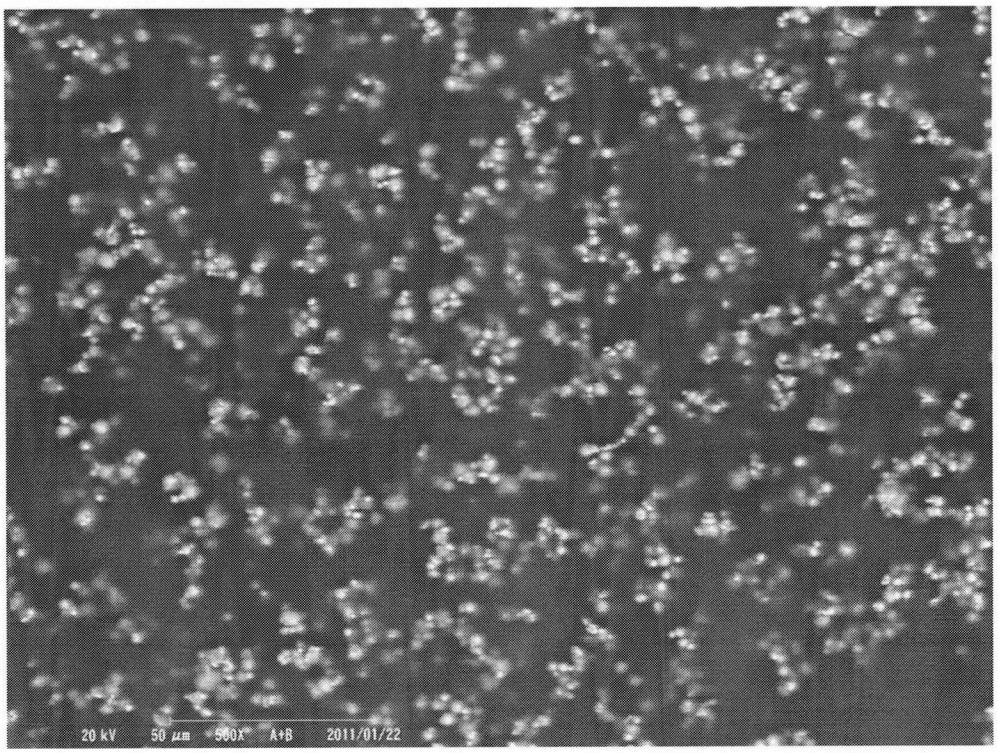
b: 反応が終了すると塊状の鉄粉が形成される.

c: 処理後の塊状鉄粉を乳鉢で解砕し粒状の鉄粉に戻す.

Fig. 4.2 シランカップリング処理




(a) 250 倍




(b) 500 倍

Fig. 4.3 30 vol. %磁性エラストマー試験片の SEM 観察写真

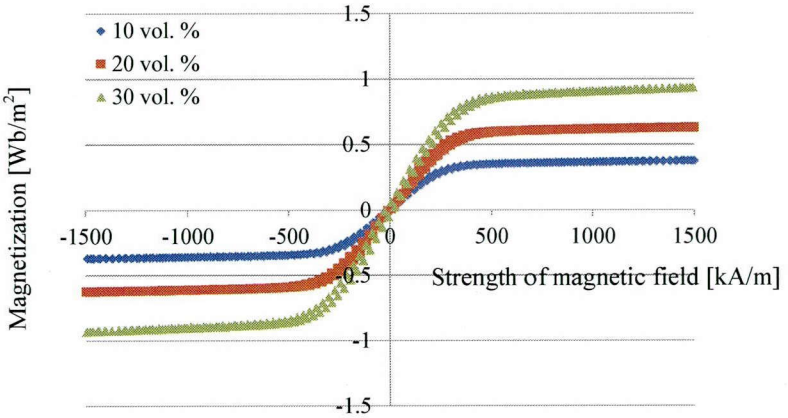
## 4.3 磁性エラストマーの磁気特性

磁性エラストマーの磁気特性測定結果を以下に示す．測定は振動試料式磁力計（Vibrating Sample Magnetometer，東栄科学産業，PV-M20-5）を用いて行った．Table 4.1 に示した 3 種類の試料に対し，エラストマー体積に対する鉄粒子の体積比が 10%，20%，30%の各場合に実施した（以下本章ではこれを体積密度と呼び，単位を vol.%と表記する）．40 vol. %以上の体積密度では，シランカップリング処理を行なっても磁性エラストマーが硬化しない場合がみられたため，本研究では 30 vol. %までの磁性エラストマーを試験した．なお，試験点数はそれぞれの場合に対し 3 点である．測定結果を SI 単位系に換算し，横軸を磁界の強さ（kA/m），縦軸を磁化（T）とした M-H 曲線を粒子直径ごとに分類した結果を Fig. 4.4 に示す．また，同一体積密度で比較した M-H 曲線を Fig. 4.5 に示す．

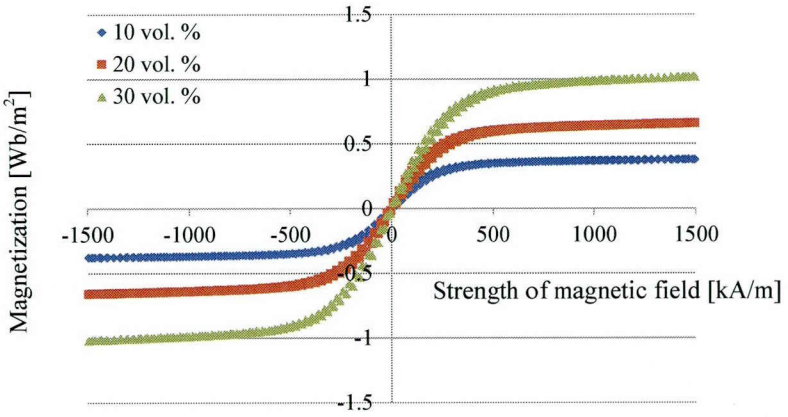
Fig. 4.4 および Fig. 4.5 より，粒子の大きさよりも体積密度が磁気特性に顕著に影響していることが確認できる．また磁性エラストマーは磁気ヒステリシスを有し，比透磁率の曲線も例えば，Fig. 4.6 のようにヒステリシスを示すことが明らかになった．Fig. 4.7 に飽和磁化の値を粒子直径と体積密度で整理したグラフを示す．これより，飽和磁化は研究に用いた大きさの鉄粒子でも，体積密度の増加に応じて増加していることがわかる．併せて，本研究で用いた試料ではカルボニル鉄粉の方が電解鉄粉よりも飽和磁化が高いことを確認した．

Fig. 4.6 に示したように，磁性エラストマーの比透磁率はヒステリシスを有し，外部磁場がない状態から磁場を印加する場合と外部磁場を印加した状態から磁場を減少させる場合とで曲線が異なる．そこで，Fig. 4.8 では初期磁化曲線と減磁曲線にわけて，それぞれの透磁率の最大値を示した．これより，定性的には体積密度と粒子直径がともに大きいほど透磁率が増大することが確認できた．この結果より，いずれの体積密度の場合でも透磁率は平均粒子直径が最も大きい鉄粒子が大きな値を示した．粒子直径が大きいほど初期磁化曲線と飽和領域から減磁した場合との透磁率の最大値の乖離は大きい．

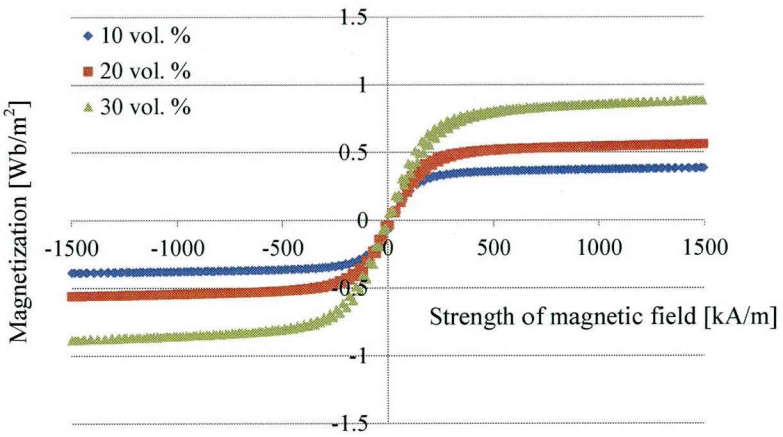
このことは，磁性エラストマー中に含まれるミクロな鉄粒子の磁気モーメントの影響がマクロな透磁率に対して支配的要因であり，より大きい透磁率の磁性エラストマーを得るためにはエラストマーの硬化を妨げない範囲で可能な限り大きな鉄粒子を用いるべきであることを示唆している．ただし本研究では鉄粒子の大きさと体積密度のみに着目し，粒子の形状や製法による違いなどには着目していない．実際は鉄粉の性質は粒子形状や製法の違い，あるいは磁性エラストマーの作成時点での外部磁場の存在や，加熱硬化による磁気特性の変化の影響なども考えられるが，これまで磁性エラストマーの磁気特性に関するそのような研究は行われておらず，各種影響を考慮した良質な磁気特性を有する磁性エラストマーの作成は今後の課題である．




(a) 2 ミクロン

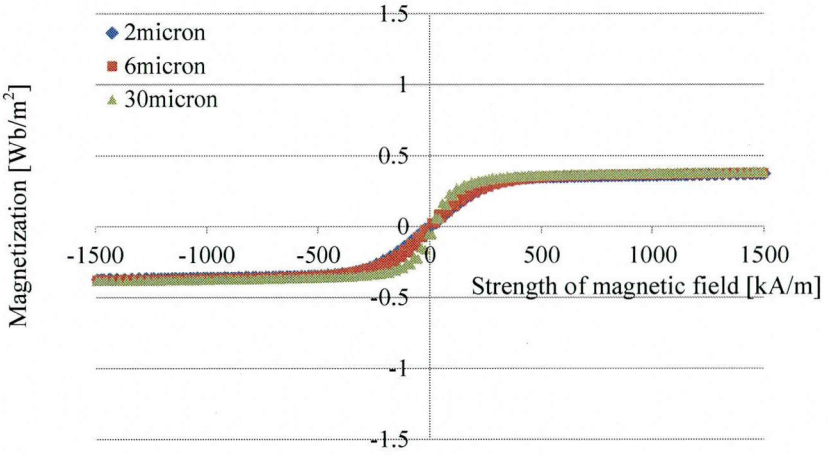



(b) 6 ミクロン

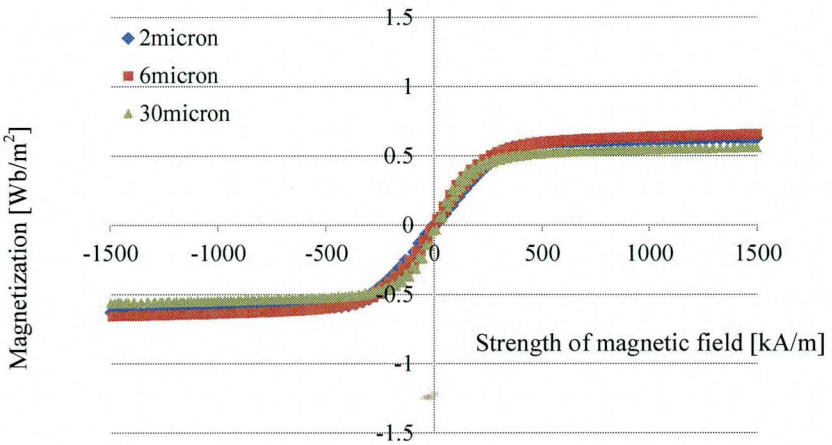



(c) 30 ミクロン

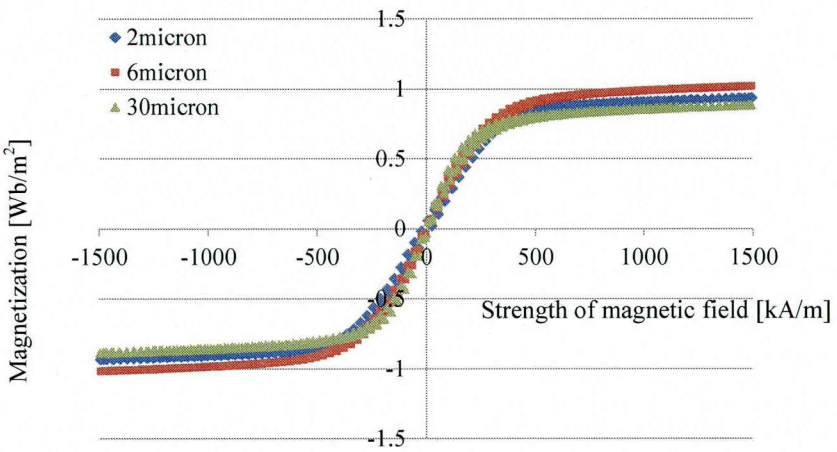
Fig. 4.4 同一粒径による磁化特性の分類




(a) 10 vol.%

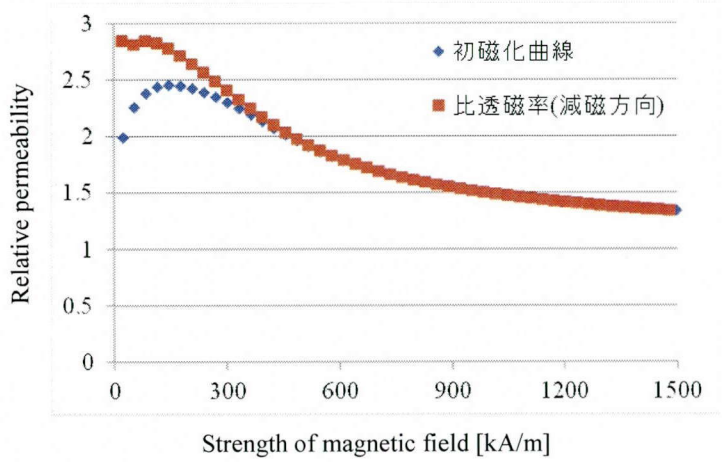



(b) 20 vol.%

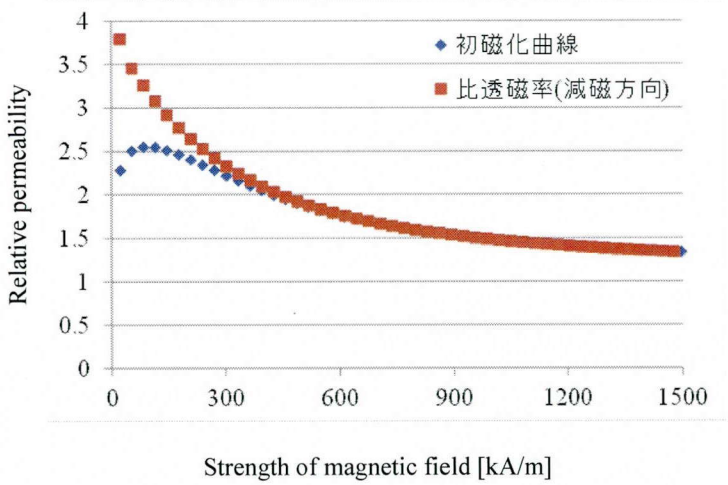



(c) 30 vol.%

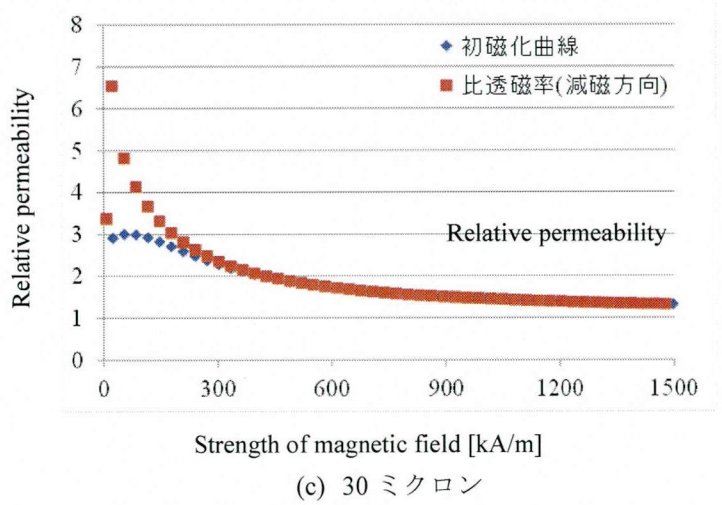
Fig. 4.5 同一体積密度による磁化特性の分類




(a) 2 ミクロン




(b) 6 ミクロン




(c) 30 ミクロン

Fig. 4.6 体積密度 20 vol. %試料の透磁率のヒステリシス

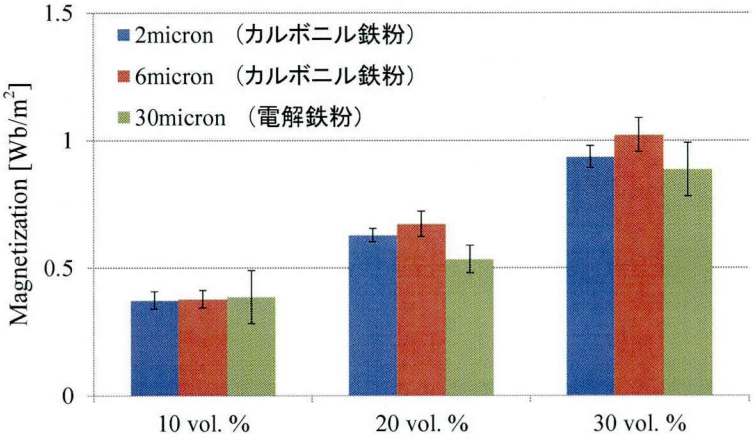
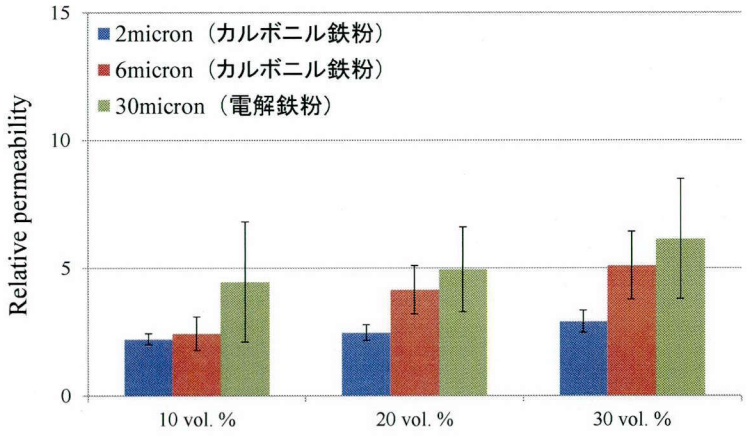
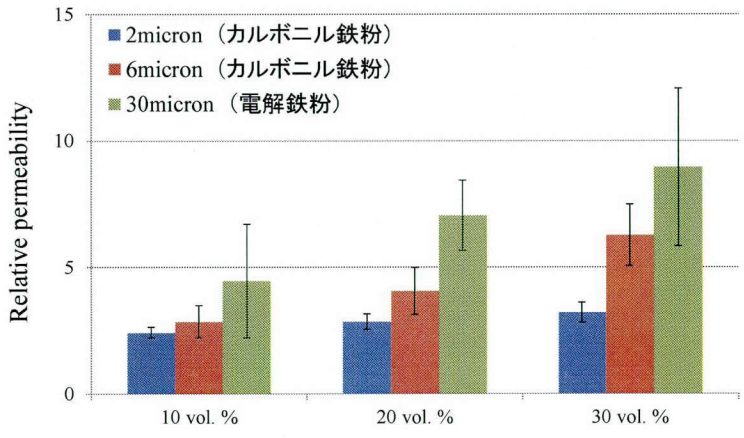



Fig. 4.7 飽和磁化




(a) 初磁化曲線




(b) 減磁曲線

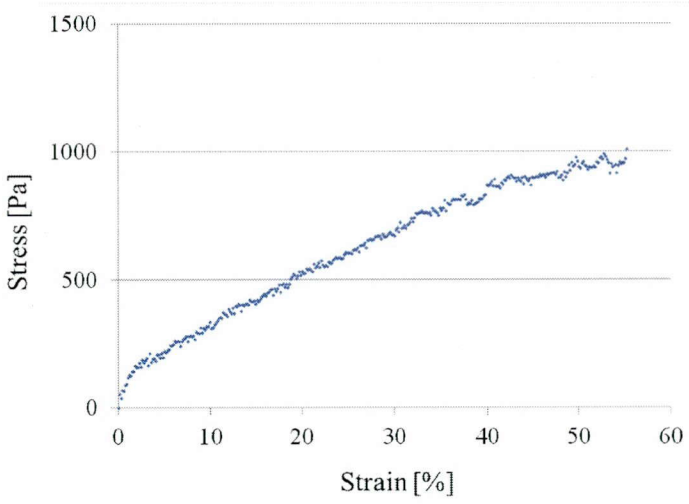
Fig. 4.8 透磁率の最大値

## 4.4 磁性エラストマーの力学特性

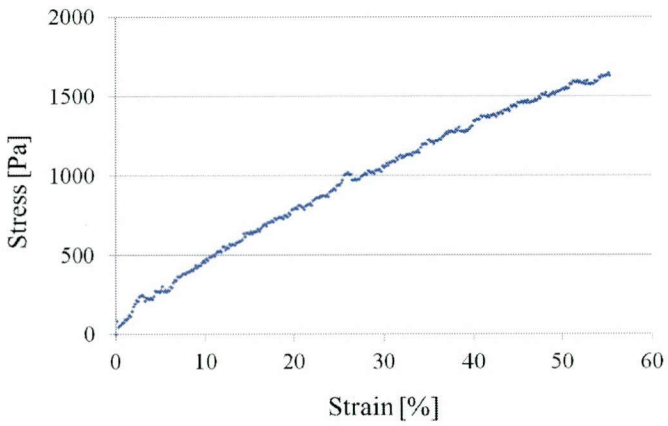
磁性エラストマーは粘弾性特性を有する柔軟な物質であり，わずかな外力によっても大きく変形する． Fig. 4.9 に，母材であるシリコーンエラストマー，鉄粒子（粒径 6μm のカルボニル鉄粒子 BASF HQ）の体積密度が 20 vol.%, 40 vol.%である磁性エラストマーの応力ーひずみ特性測定結果を示す．また，この傾きからヤング率を算出した結果を Fig. 4.10 に示した．Fig. 4.11 には，応力ーひずみ特性と並んで重要な弾性定数であるポアソン比を測定した結果を示す．なお，測定には INSTRON 社製高性能ビデオ伸び計を使用した．試料の測定点数はそれぞれ 3 点である．

測定結果より，応力，ヤング率，ポアソン比のいずれもがひずみに対して強い非線形性を有することが確認できた．すなわち応力はひずみに比例せず，ある程度の伸びを示すとそれ以上は抵抗力が一定となる．ヤング率はいずれも $10^4$Pa 程度のオーダーとなり，金属と比較してエラストマーが非常に柔軟な物質であることが確認できた．また，鉄粒子の分散によって母材の剛性が増加していることが確認できた．

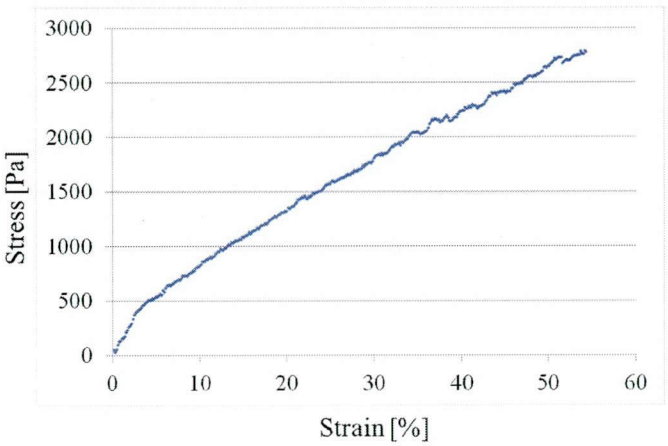
ゴム材料は変形によって体積が一定であると考えられるため，一般にひずみが小さい場合ポアソン比は 0.5 とみなされるが[4],[5]，本研究で用いる試料は数パーセントのひずみに対しても鋭敏な変化を示すことが測定より明らかになった．これは，後述する数値解析で精度の高いシミュレーションを行うには，ヤング率とポアソン比の非線形性の考慮が必須であることを意味している．




(a) シリコーンエラストマー

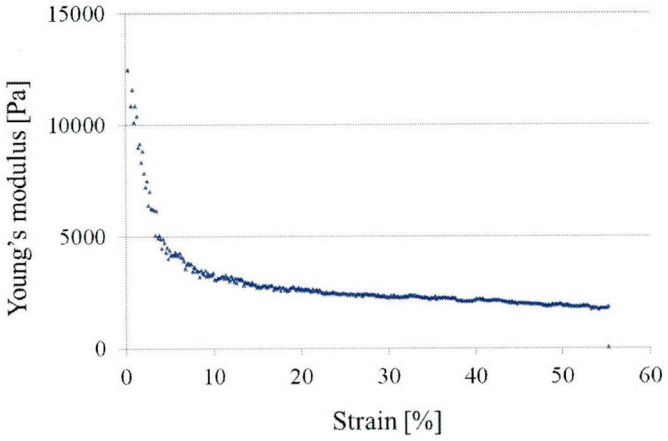



(b) 磁性エラストマー（20 vol. %）

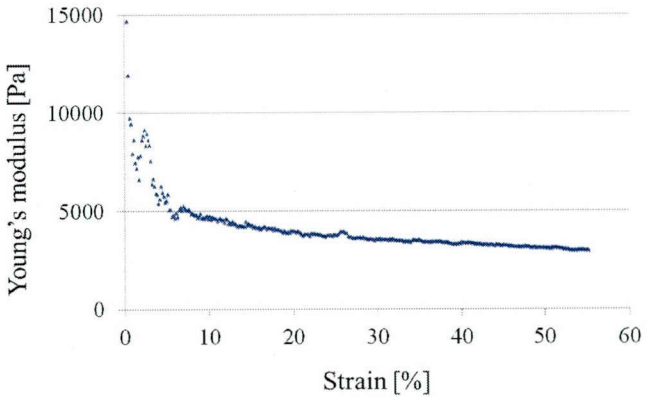



(c) 磁性エラストマー（40 vol. %）

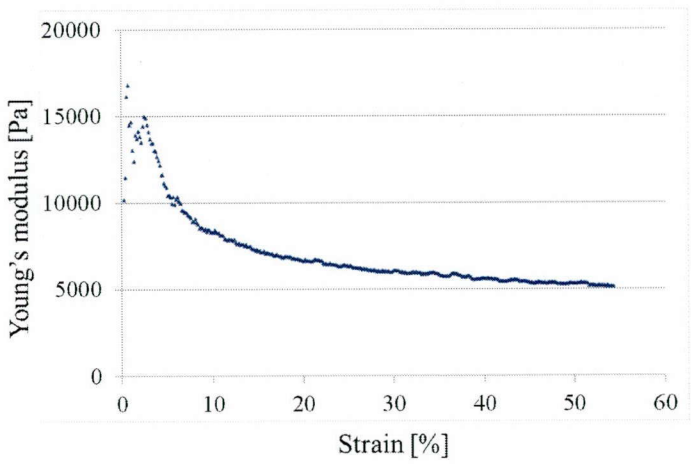
Fig. 4.9 応力ーひずみ測定結果




(a) シリコーンエラストマー

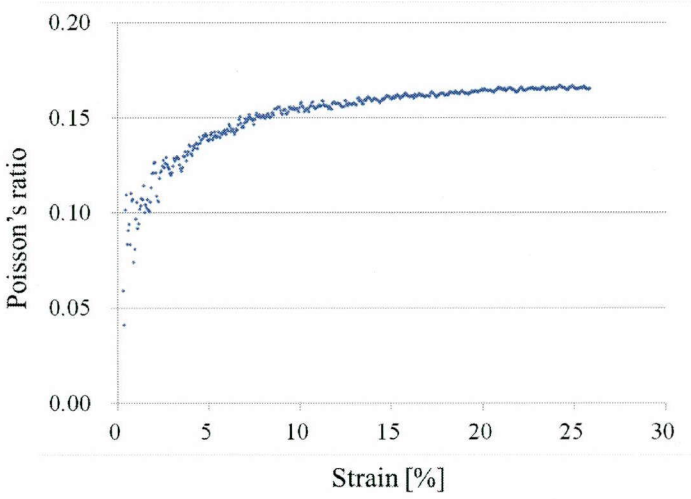



(b) 磁性エラストマー（20 vol. %）

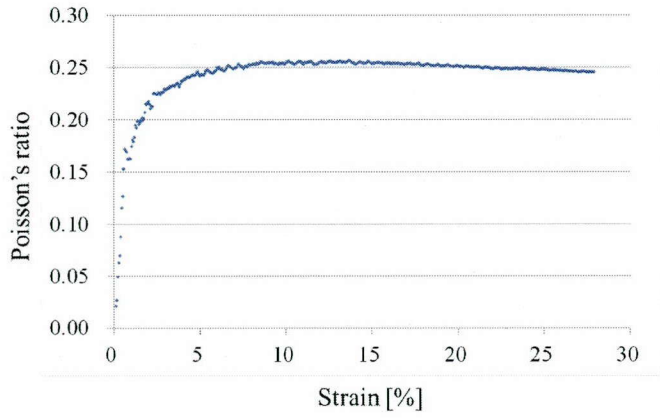



(c) 磁性エラストマー（40 vol. %）

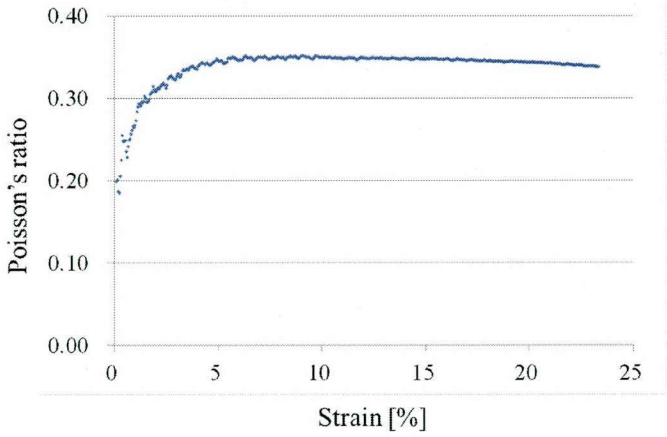
Fig. 4.10 ヤング率測定結果




(a) シリコーンエラストマー




(b) 磁性エラストマー（20 vol. %）




(c) 磁性エラストマー（40 vol. %）

Fig. 4.11 ポアソン比測定結果

## 4.5 結言

本章では磁性エラストマーの作成方法を示し，磁性エラストマーの各種材料物性値を測定によって明らかにした．また SEM 観察写真から，磁性粒子が母材中で安定に分散していることを示した．また VSM を用いた磁化測定から磁性エラストマーの磁気特性を，引張試験機を用いた応力試験から磁性エラストマーの弾性力学的特性をそれぞれ明らかにした．磁気特性から，作成した磁性エラストマーは磁性を有する柔軟素材として十分に安定かつ柔軟であることと，磁性流体に比して数倍の透磁率を有し，従って磁性流体に比べて効果的なソフトアクチュエータを構成可能なことを示した．次章以降では，本章で作成した試料のうち，20vol. %の磁性エラストマーを用いてソフトアクチュエータを作成し，その性能評価を行う．

## 参考文献

[1] M. R. Jolly, J. D. Carlson, B. C. Munoz: "A model of the behavior of magnetorheological materials," *Smart Mater. Struct.*, Vol. 5, pp. 607-614, 1996.

[2] Z. Varga, G. Filipcsei, M. Zrinyi: "Magnetic field sensitive functional elastomers with tuneable elastic modulus," *Polymer,* Vol. 47, No. 1, pp. 227-233, 2006.

[3] G. Y. Zhou: "Shear properties of a magnetorheological elastomer," *Smart Mater. Struct.*, Vol. 12, No. 1, pp. 139-146, 2003.

[4] 日本ゴム協会：『ゴム技術入門』，丸善，2004.

[5] 久保亮五：『ゴム弾性』，裳華房，1996.

# 第5章

# 磁性エラストマーを用いたソフトアクチュエータ

## 5.1 緒言

本章では，前章で作成した磁性エラストマーを用いたソフトアクチュエータを提案し，その構造，磁気回路，駆動原理，動作特性について述べ，特性の検討を行う．

磁性エラストマーは粒子直径および粒子密度を増大させることにより磁気特性の向上が可能である．しかしFig. 4.10およびFig.4.11で示したように，磁性エラストマーは母材に占める鉄粒子の密度が上昇するにつれて磁気特性は向上するが，シリコーン単体に比べて柔軟性が低下する（ヤング率が増加する）ので磁場の印加によって変位を生じさせにくくなるという問題がある．磁性エラストマーを柔軟にするには単純に鉄粒子の含有量を減らせば良いが，磁気特性を損なうことになる．すなわち，磁性エラストマーには良好な磁気特性と柔軟性の間にトレードオフの関係があるため，これらを両立させる何らかの工夫が必要である．なお，以下の実機では磁性エラストマーにある程度の柔軟性とある程度の磁気特性を持たせるために，粒径6μm，30 vol.%のものを用いた[1],[2]．

## 5.2 磁気回路および動作原理

上述の問題を解決するために，純鉄のコアにコイルを巻いた電磁石を柔軟なシリコーンゲルに埋め込み，更にその外部を磁性エラストマーで被覆したソフトアクチュエータを提案した．Fig.5.1はその断面の模式図を表す．なお，アクチュエータは円筒状の型を用いて成形しているため形状は円筒形となっている．電磁石の鉄心には純鉄を用い，コイルの巻線数は1000回とした．Fig.5.2はその駆動原理を示している．アクチュエータ内部の電磁石に電流を励磁すると，磁束が透磁率の高い外側の磁性エラストマーを通過する．電磁石の磁極から生じた磁束によってその上下に位置する磁性エラストマーは磁化され，図のように磁極が発生して上下方向に吸引力が生じる．その結果，アクチュエータは全体的に縦方向に収縮し，磁性エラストマーに作用する力と非磁性体であるシリコーンの弾性による反力とが釣り合ったところで静止する．電磁石を無励磁とすると変形はシリコーンの弾性によって再び初期の状態へ回復する．この動作原理は電磁力によって磁気回路自体が変形し磁気抵抗を減少するように変形が進行しているとも解釈できる．Fig.5.3は，電流無励磁時と電流励磁時とのアクチュエータの外観を示しており，駆動原理の通り変形が生じていることを示している．動作原理のようにアクチュエータが駆動している様子が確認できた．

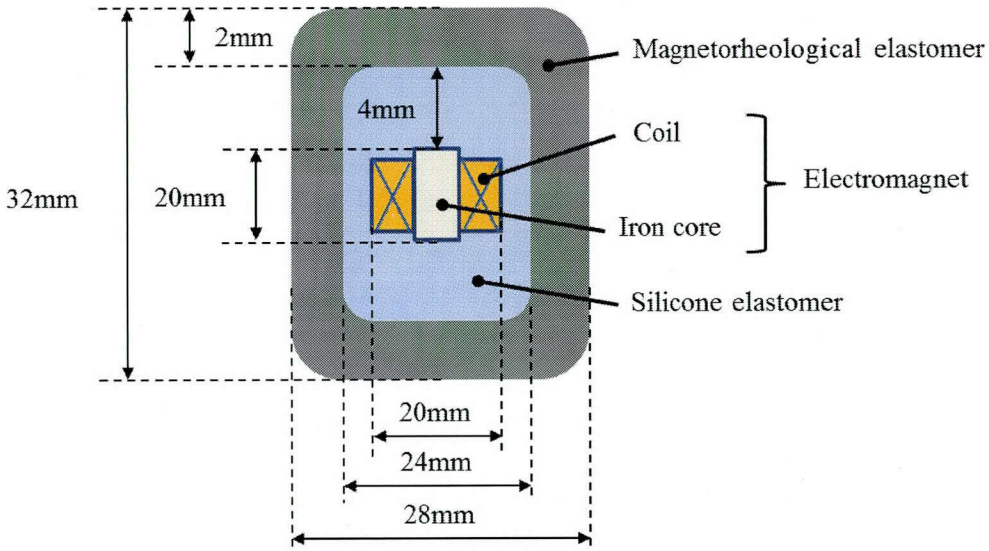



Fig. 5.1 寸法と構造

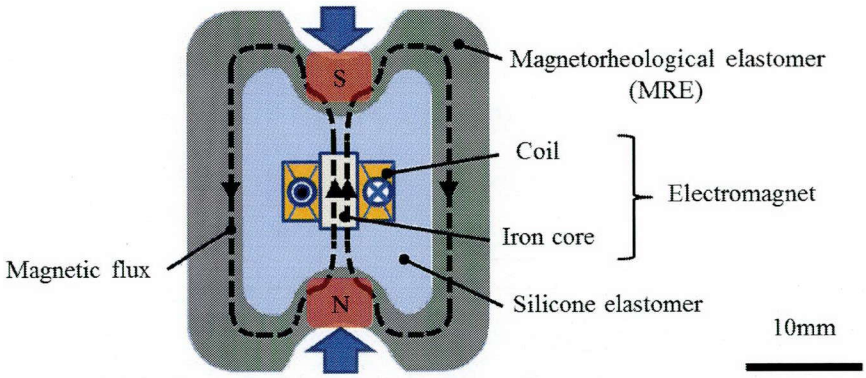
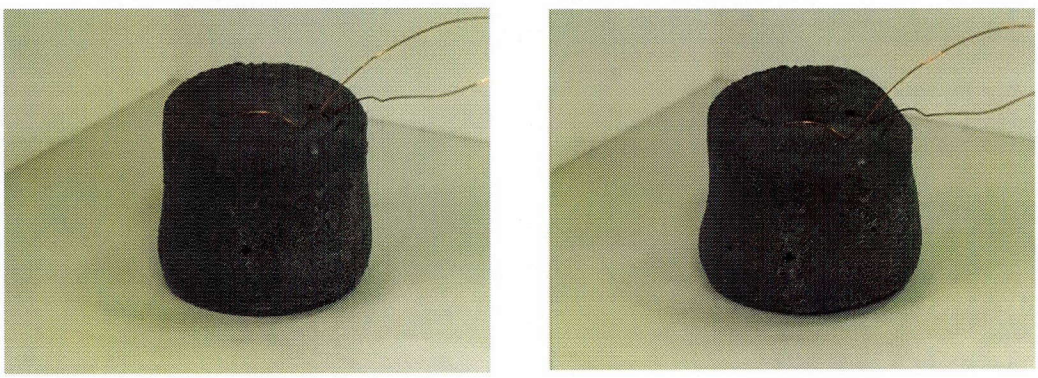



Fig. 5.2 動作原理



(a) 電流無励磁時　　(b) 電流励磁時

Fig. 5.3 変形の様子

## 5.3　実験装置

提案したアクチュエータの動作特性の評価のため，試作機に対して性能評価を行った．Fig. 5.4 は変位の計測系を示す．発生した縦方向の変位をレーザ変位計で測定し，印加電圧および励磁電流とともに電流・電圧プローブを介してオシロスコープで読み取っている．また，Fig. 5.5 に発生力の計測系を示す．アクチュエータは柔らかいので，ロードセルを押し当てて測定することはできない．そのため，ディスク状の治具を上部に埋め込んだ試作機を変位測定時とは別に作成し，治具に取り付けられたナイロン製の糸をアクチュエータ直上に設置したロードセルと接続することで力を測定した．ロードセルから発生した波形はオシロスコープで読み取った．

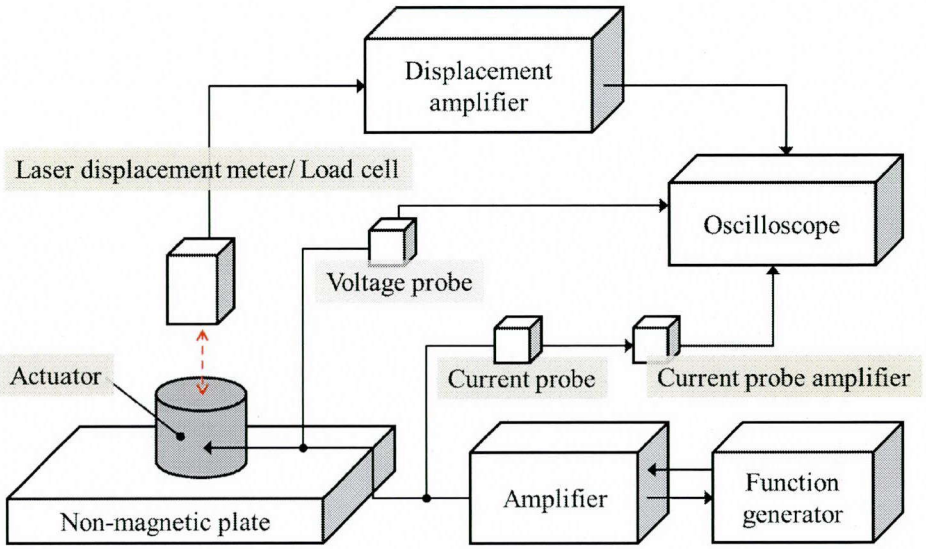



Fig. 5.4 変位の計測系

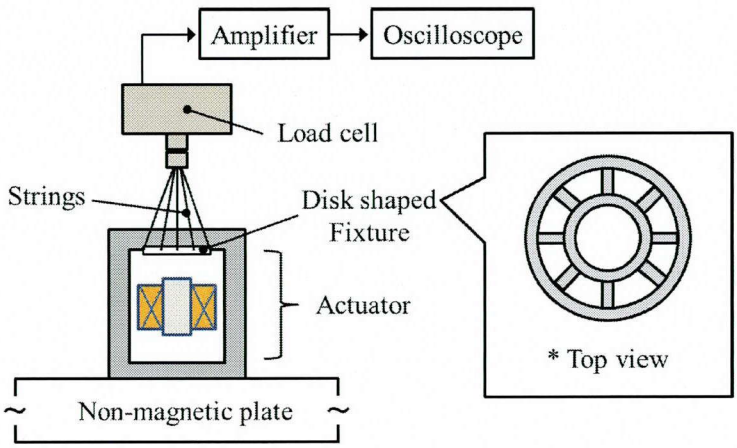



Fig. 5.5 発生力の計測系

## 5.4　実験結果と考察

Fig. 5.6 は，アクチュエータへ直流電流を励磁した場合の最大変位量をプロットしたグラフである．励磁電流を増加するにつれ変位は非線形的に増加していくことがわかる．これより，変位はアクチュエータの上下両面で生じたものの和として与えられるので，Fig. 5.1 の寸法図で示したように，最大 8mm 程度までの変位を取ることが可能であると考えられるが，1.4A 励磁した段階でピークを迎えている．これは，電磁力による吸引とシリコーンエラストマーの弾性による反力が釣り合うためと考えられる．

Fig. 5.7 は 1.0A の直流電流を励磁した場合の変位が一定値に至るまでの過渡状態であり，それぞれ立ち上がりと立ち下がりを示している．電気的時定数はいずれも 0.002s であり，機械的時定数は電流オン時が 0.125s，電流オフ時が 0.250s と，変位の発生時と回復時の機械的応答は 2 倍程度の時間差が生じるという非対称な性質を示した．これは電流オン時は電磁力により急激な吸引が生じるが，電流オフ時はエラストマーの弾性により変位が回復するためであると考えられる．電気的時定数と機械的時定数の比は 60 倍から 120 倍になるため，高周波駆動で変位を得ようとする場合は，磁気回路の改良や機械的時定数を低減する構造を工夫する必要がある．

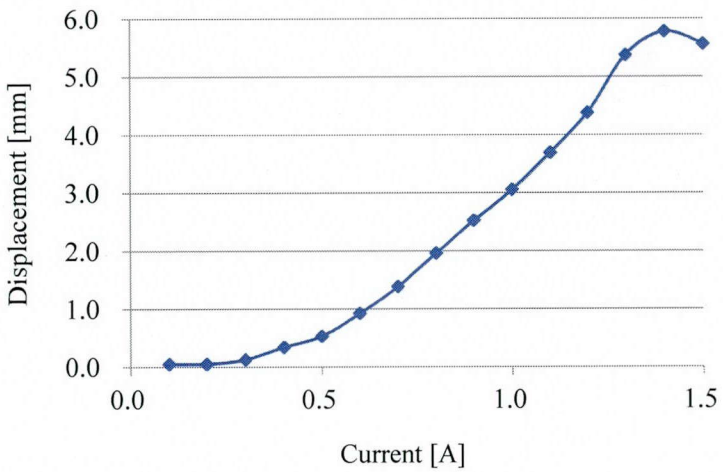
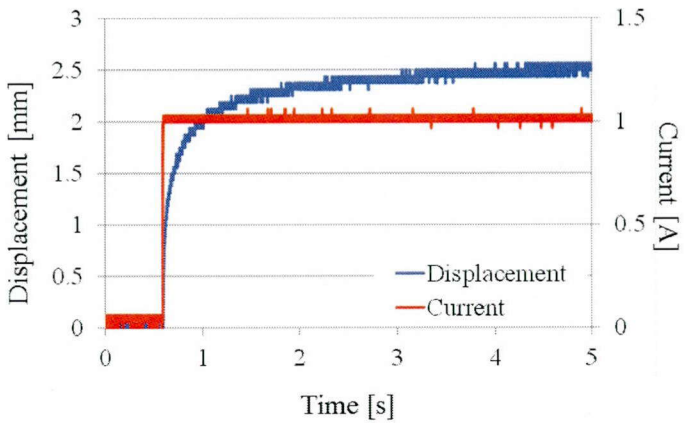
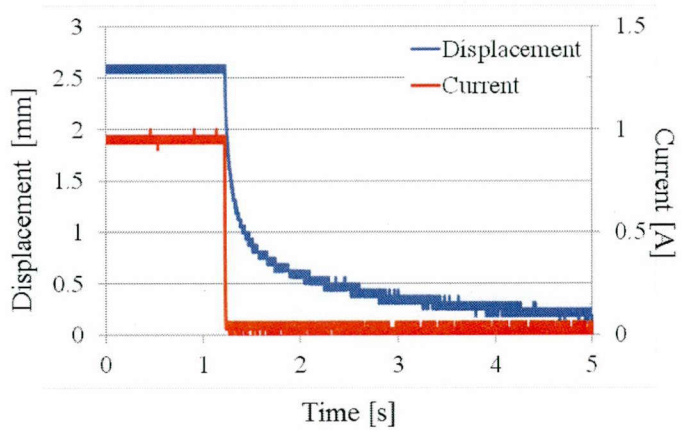



Fig. 5.6 励磁電流と最大変位



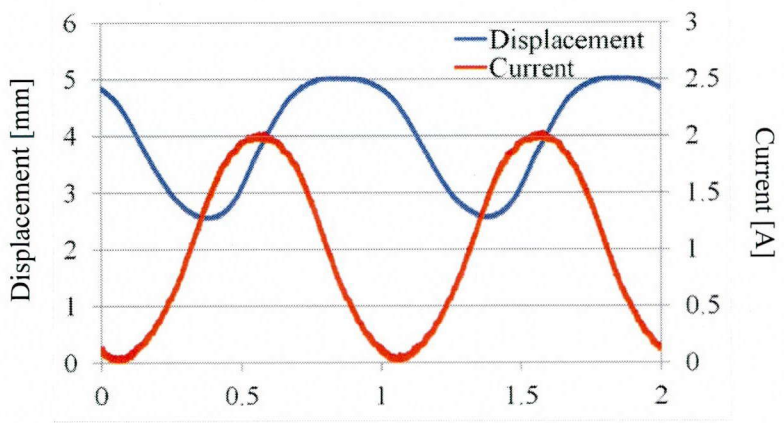

(a)　電流オン時



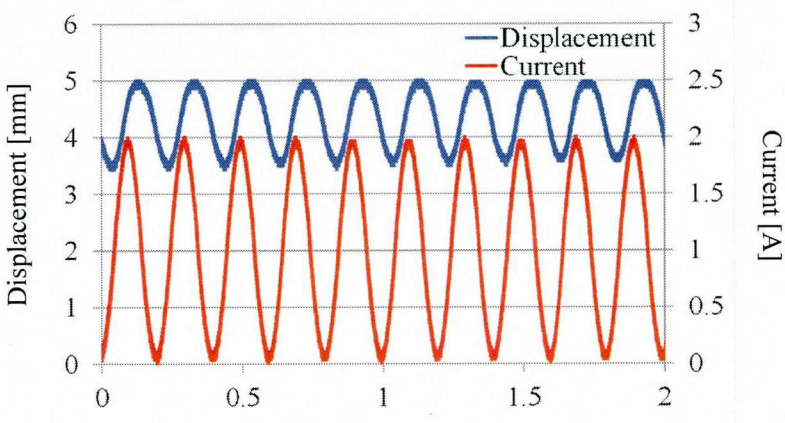

(b)　電流オフ時

Fig. 5.7 電流オン時の変位の立ち上がりと電流オフ時の変位の回復

Fig.5.8 は，1Hz と 5Hz の正弦波電圧の印加によって電磁石を励磁した場合の変位および電流の定常状態を示している．Peak-to-peak の電流値は 2.0A としており，電流には 1.0A のオフセットをかけている．これは電流の正負が切り替わることによる電磁石の磁極の反転を防ぐためである．電流のオフセットをかけなければ励磁電流の 2 倍の周波数で磁極が切り替わる（磁極が反転しても磁性エラストマーは電磁石に吸引されるため）．電磁石はそれぞれ 1Hz および 5Hz の周波数で励磁している．また，測定に当たって無励磁状態で変位は 0 とした．1Hz では変位 3.75mm を中心として 1.25mm の振幅，5Hz では，変位 4.2mm を中心として 0.7mm の振幅でそれぞれ振動する．また，変位は電流に対して位相遅れを持つ．周波数が高くなるにつれて変位の振幅も小さくなり，変位の振動中心は大きくなっている．これは，先述したように電気的時定数に対して機械的時定数が大きく，変位が 0 に復元する前に磁気的な吸引力が作用するためであると考えられる．なお，後述するように周波数の増大につれて位相差は拡大していくため制御が困難となる．



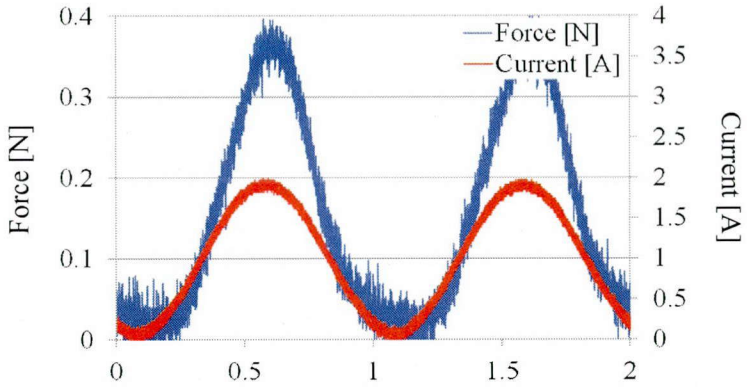

(a)　1Hz 駆動時



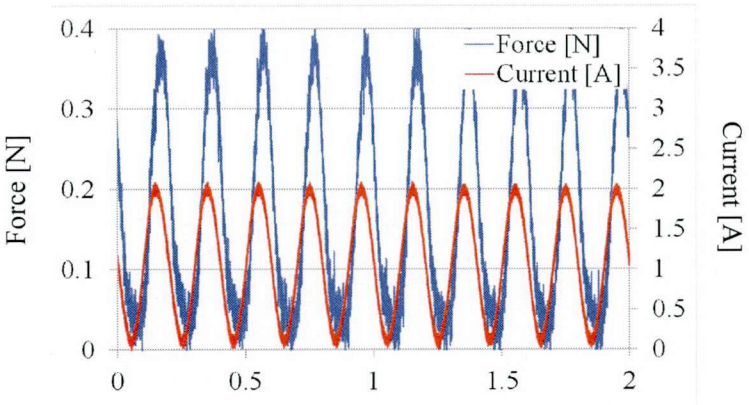

(b)　5Hz 駆動時

Fig. 5.8 正弦波電流入力時のアクチュエータの変位

Fig. 5.9 は，同様の振幅，周波数で電流を励磁した場合の吸引力の測定結果を示している．力は最大で 0.4N であり，これは周波数を変えても変化しなかったが（位相も同様に変化しなかった），これは力の測定時に治具を用いて変位が生じないようにしたためであり，筋収縮時の等尺性収縮と同様の発生力を生じていることを示唆している．なお高周波とするにつれて電磁石の鉄心に発生する渦電流による反作用磁界の影響により吸引力は低下していくと考えられる．



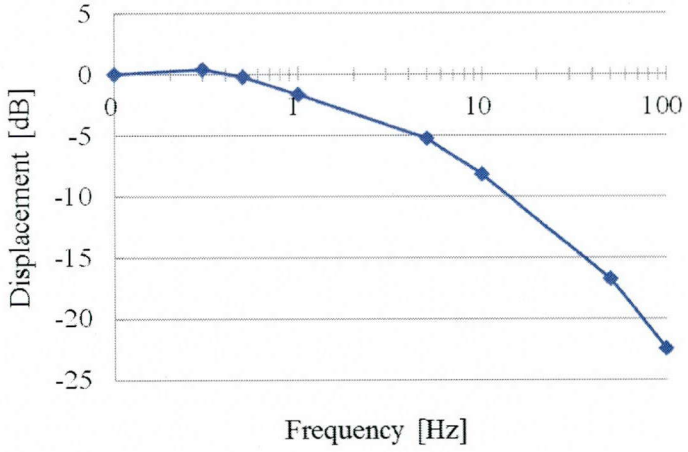

(a)　1Hz 駆動時



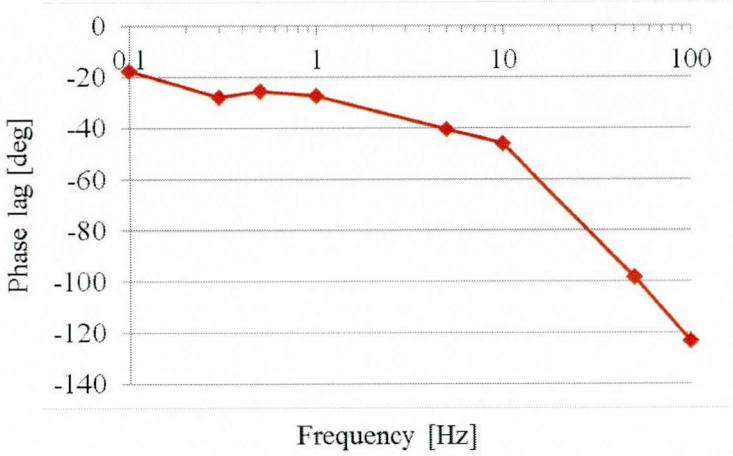

(b)　5Hz 駆動時

Fig. 5.9 発生力

最後に，Fig. 5.10 に正弦波電流励磁時の周波数特性を示す．これより，1Hz 未満の低周波励磁時にはアクチュエータは直流励磁時とほぼ同様の変位を生じるが，周波数が大きくなるにつれて変位が落ち込むことが確認できる．また，共振点は確認できなかったが，これは振動がエラストマー自身に吸収されてしまうためであると考えられる．周波数が高くなるに連れて，位相差のずれも大きくなっていき，高周波領域ではアクチュエータの制御性が悪化していくことが確認できた．




(a)　変位の周波数特性




(b)　位相の周波数特性

Fig. 5.10 周波数特性

提案したアクチュエータは比較的大きな変位を発生することができ，電流による制御も可能であることが示された．電磁石が埋込み式であるため効率的に磁束を利用することが可能であるが，デメリットとして大きな磁束を生じるためコイルの巻き数を増やしたために大きなジュール熱が発生し，それが内部に蓄積されることで連続駆動が困難になることがあげられる．発生力や制御特性の改善が大きな課題ではがあるが，こうした原理を元に，動吸振器やアクティブダンパなどの制振アクチュエータや，磁気回路，エラストマーへ使用する鉄粒子の特性改善，適切な母材の選定などを行うことで，ソフトロボットなどへの適用を視野に入れた応用も期待できる．

## 5.5 結言

前章で作成した磁性エラストマーをもとに，電磁石で駆動するソフトアクチュエータを提案し，実験により動作を検証し，また性能の評価を行った．これより，磁性エラストマーを用いたアクチュエータが磁性流体に対してより応用性が高いことが示された．磁気回路の改善や駆動原理の改良によって動作特性の改善，あるいは全く異なった原理で駆動するアクチュエータを考えることが可能にあると思われる．こうした改善あたっては数値解析技術の使用が有用であると考えられるが，磁気回路の大変形を考慮した磁性エラストマーのための解析手法は現在未整備である．そこで次章では磁性エラストマーのシミュレーション手法を提案し，その評価を行なっていく．

## 参考文献

[1] 加嶋俊大，平田勝弘：「磁性エラストマーを用いたソフトアクチュエータの提案」，第23回「電磁力関連のダイナミクス」シンポジウム，電気学会，名古屋，2011.

[2] Shunta Kashima, Fumikazu Miyasaka and Katsuhio Hirata: “Novel Soft Actuator Using Magnetorheological Elastomer,” *IEEE Transaction on Magnetics*, Vol. 48, No. 4, pp. 1649-1652, 2012.

# 第6章
# 磁性エラストマーの数値解析手法

## 6.1 緒言

前章では磁性エラストマーを用いたソフトアクチュエータを提案し，その特性を評価したが，特性改善のための内部応力状態の評価や更なる新構造のアクチュエータの提案を行うためには，トライアル・アンド・エラーによる方法よりも精度の良い数値解析手法を用いることが効率的である．そこで本章では，大変形・複雑変形を伴う構造物の問題に適用可能な粒子法と，高精度に電磁場の数値解析を行える辺要素有限要素法を連成させた磁性エラストマーの数値解析手法について述べ，その妥当性を解析結果と実現象との比較により評価する．

磁性エラストマーの数値解析では，磁場と構造の連成された問題を解く．石川ら[1]は磁性エラストマーの連成解析を有限要素法によって高精度に計算可能であることを示している．この手法はエネルギー法の一種であり，構造物のひずみエネルギーと磁場によって貯蔵された磁気エネルギーの和から仮想仕事の原理を用いて物体の応力を計算するもので，理論的にも優れた手法であるが，有限要素法では構造物の複雑変形時に複雑な処理が必要となったり，メッシュが破壊され最悪の場合計算が破綻したりするといった不都合がある．磁性エラストマーは磁場によって変形を生じ，磁気回路自体が大きく変形する物質であるから，例えば緒論で触れた磁性エラストマーコイルの変形駆動のように，構造物にねじれや接触が生じた場合の取り扱いは難しい．この本質的な原因は，数値計算の過程で必ず格子を必要とすることにあり，差分法でも問題は同様である．したがって，磁性エラストマーの数値計算に有限要素法のみを用いることは制約が大きいと思われる．

これに対する解決策の一つが格子を必要としない計算手法で，これらはメッシュを用いる手法に対してメッシュフリー解析と総称される．本研究では，メッシュフリー解析の一つとして近年注目されている粒子法を用いる．後述するように，粒子法は格子ではなく物体を粒子（計算点）の集合として表現する．粒子自身が速度や圧力を保持しながら移動するので，粒子間の相互作用を導入することでメッシュを必要としない計算が可能である．粒子法には主に SPH（Smooth Particle Hydrodynamics）法と MPS（Moving Particle Semi-implicit）法の二系統があり，SPH 法の名称に水力学（hydrodynamics）の名残が見られるように当初は流体の数値計算のために開発された手法であるが，近年では流体のみならず大変形・複雑変形を伴う物体の構造計算に広く応用されている．本研究では構造計算に対し，越塚らによって開発された粒子法の一種である MPS 法を適用する[2]．

一方，粒子法では物体の形状変形は容易に取り扱うことができるが，電磁場計算は空気領域に計算点を配置しなければならず，電磁場解析に不向きであると考えられる．従って，物体の変形にはMPS法を用い，電磁場には有限要素法を用いて解析する．構造物を構成する粒子法の計算点と，磁性体を計算する計算点の間でデータの受け渡すことが出来れば，構造物に対する粒子法と電磁場に対する有限要素法を連成させて計算を行うことができる．MPS法と有限要素法の組み合わせによる電磁場と構造の連成問題は磁性流体の流動現象に対しても適用が行われ，その他にも電磁場によって複雑に表面形状が変化する電磁流体問題に対しても研究が進められている[3],[4]．従って，磁場ー構造のマルチフィジックス問題である磁性エラストマーの数値計算には，MPS法と有限要素法の連成計算が有効であると考えられる．

本章では，MPS法を用いた粘弾性体の計算手法および静磁場問題に対する三次元辺要素有限要素法の定式化について述べた後，MPS法で用いる計算点と有限要素法で用いるデータの対応について述べ，磁性エラストマーの連成解析手法を提案する．最後に計算結果を実際の現象と比較することで，連成解析手法の妥当性を評価する．

## 6.2 粒子法による粘弾性体解析手法

流体解析では常に「現在」の位置関係のみが問題となり，「初期」がどのようであったかは問題にしない．反対に弾性解析では，常に「初期」からの変位を考慮する必要があり，物体の最終的な形状は与えた外力がわかれば一意に決定される．連続体であっても，流体解析と弾性解析にはこのような違いがある．ただし，弾性解析に粘性を考慮した粘弾性解析では，物体内部で変形の速度に応じた抵抗力（粘性力）が生じるので，時間履歴を考慮した計算が必要となる．したがって本研究では，角度・角速度計算に対して影響半径内部で部分的に陰解法を用いつつも，全体の変形は時間積分による更新を考えることで進める動的陽解法に沿って計算を進める．

### 6.2.1 MPS法による離散化手法

第2章で示したように，粘弾性体を線形弾性体に内部粘性による減衰を導入した物理モデルで表現し，材質は等方性であると仮定する．運動方程式はテンソルの指標標記で式(6.1)を用いて表されるとする．

$$\frac{\partial v_\alpha}{\partial t} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial x_\beta}\left(\lambda\varepsilon_{\gamma\gamma}\delta_{\alpha\beta} + 2\mu\varepsilon_{\alpha\beta} + 2\eta\dot{\varepsilon}_{\alpha\beta}\right) + K_\alpha \tag{6.1}$$

ここで，$x$ は粒子の基準配置を示す座標，$v$ は粒子の速度，$\varepsilon$ はひずみ，$\dot{\varepsilon}$ はひずみ速度，$K$

は外力，$\rho$は粘弾性体の密度，$\eta$は粘性係数を示す．括弧内は弾性体の変形による内部応力を表している．また$\alpha, \beta, \gamma$はテンソルの擬標を表す．右辺第一項と第二項は弾性のフックの法則を表し，物体はひずみ速度によって粘性応力を受ける．$\delta_{\alpha\beta}$はクロネッカーのデルタである．$\lambda$と$\mu$はラメの弾性定数であり，ヤング率（縦弾性係数）$E$ とポアソン比$\nu$を用いて構成式(6.2)で表される．

$$\lambda = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}, \quad \mu = \frac{E}{2(1+\nu)} \tag{6.2}$$

線形材料では，ヤング率$E$およびポアソン比 $\nu$は一定値を用いるが，非線形材料を考慮する場合は$E$と$\nu$は第三章で示したように縦ひずみの関数として与えれば良い．

次に重み関数について説明する．MPS 法における粘弾性体の解析では，支配方程式(6.1)の各項に粒子間相互作用を与えることで離散化を行う．Fig. 6.1 に示すように，MPS 法では着目している粒子 $i$ を中心とする一定の影響半径 $r_e$ 内において他の粒子 $j$ と相互作用するものとし，各粒子の物理量の重み付けにはFig. 6.2に示すような粒子$i$と粒子$j$の距離 $|\boldsymbol{r}_{ij}|$ による式 (6.3) の重み関数 $W(|\boldsymbol{r}_{ij}|)$ を用いる．$\boldsymbol{r}_{ij}$は式(6.4)で定義される粒子 $i$ と粒子 $j$ の相対位置ベクトルである．

$$W(|\boldsymbol{r}_{ij}|) = \begin{cases} \dfrac{r_e}{|\boldsymbol{r}_{ij}|} - 1 & (0 < |\boldsymbol{r}_{ij}| \le r_e) \\ 0 & (r_e < |\boldsymbol{r}_{ij}|) \end{cases} \tag{6.3}$$

$$\boldsymbol{r}_{ij} = \boldsymbol{r}_j - \boldsymbol{r}_i \tag{6.4}$$

重み関数 $W(|\boldsymbol{r}_{ij}|)$ で重み付けしたひずみや応力などの物理量を加重平均するため，粒子 $i$ の粒子数密度 $n_i$ を式(6.5)で定義し，離散化した微分演算子に適用する．弾性体は変形にともなって膨張ないし収縮し密度が変化することに対応して，粒子数密度 $n_i$ はステップごとに更新する．計算で影響半径 $r_e$ を大きくすると近傍粒子数が増加するため計算時間が増大するが，重み付け粒子も増加するので，もし計算過程で特異な値を持つ粒子が出現した場合は特異値が平均化され計算は安定を保つと考えられる．ただし物理量の平均化によって計算精度が低下するため，本研究では，計算安定性と計算精度との兼ね合いから $r_e$ は初期粒子間距離の 2.1 倍とし，計算中は一定値を用いるものとした．

$$n_i = \sum_{j \neq i} W(|\boldsymbol{r}_{ij}|) \tag{6.5}$$

互いに近傍に存在する粒子 $i$, $j$ の位置ベクトルが$\boldsymbol{r}_i$, $\boldsymbol{r}_j$で表され，それぞれあるスカラー変数値 $\phi_1$, $\phi_2$ を有しているとする．この時，粒子 $i$, $j$ 間で定義される勾配（gradient）は，次式で与えられる．なお，ここで $d$ は解析次元を表す定数であり，三次元解析では $d$=3 である．この式は，影響半径内に存在する粒子の勾配を，重み関数 $W(|\boldsymbol{r}_{ij}|)$ と粒子数密度 $n_i$（影響半径内の重み関数の和）を用いて重み付き平均することを意味している．

$$\mathrm{grad}\phi_i = \frac{d}{n_i}\sum_{j\neq i}\left\{\frac{(\phi_j-\phi_i)(\boldsymbol{r}_j-\boldsymbol{r}_i)}{|\boldsymbol{r}_j-\boldsymbol{r}_i|^2}W(|\boldsymbol{r}_{ij}|)\right\} \tag{6.6}$$

粒子 $i$ と影響半径内に存在する他の粒子 $j$ とがそれぞれ位置ベクトル$\boldsymbol{r}_i$, $\boldsymbol{r}_j$で表され，ベクトル変数 $\boldsymbol{u}_i$, $\boldsymbol{u}_j$ を有しているものとする．このとき，発散（divergence）は次式で定義される．

$$\mathrm{div}\boldsymbol{u}_i = \frac{d}{n_i}\sum_{j\neq i}\left\{\frac{(\boldsymbol{u}_j-\boldsymbol{u}_i)\cdot(\boldsymbol{r}_j-\boldsymbol{r}_i)}{|\boldsymbol{r}_j-\boldsymbol{r}_i|^2}W(|\boldsymbol{r}_{ij}|)\right\} \tag{6.7}$$

Fig. 6.3 に粒子 $i$ と $j$ の位置関係を示す．ここで，$\boldsymbol{r}_{ij}^{init}$は初期配置での粒子 $i$ を基準とした粒子 $j$ の相対位置ベクトル，$\boldsymbol{u}_{ij}$は粒子 $i$ を基準とした粒子 $j$ の変位，$R_i$は初期状態からクォータニオン $\boldsymbol{q}_i$ を用いて回転させる場合の回転行列を表す．ここで，$\boldsymbol{r}_{ij}^{init}$を $R_i$ で回転した$R_i\boldsymbol{r}_{ij}^{init}$は粒子 $i$ から $j$ へのひずみがない場合の相対位置ベクトルを意味する．変位$\boldsymbol{u}_{ij}$は式(6.8)で定義され，この $\boldsymbol{u}_{ij}$を用いるとひずみベクトル$\boldsymbol{\varepsilon}_{ij}$は式(6.9)で定義される．

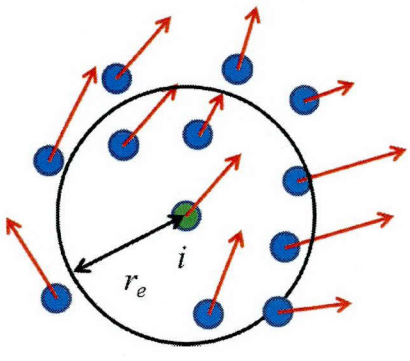



Fig. 6.1 粒子間相互作用と影響半径

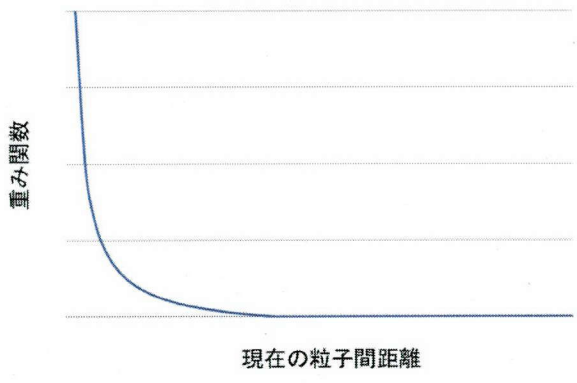



Fig. 6.2 重み関数の概念図

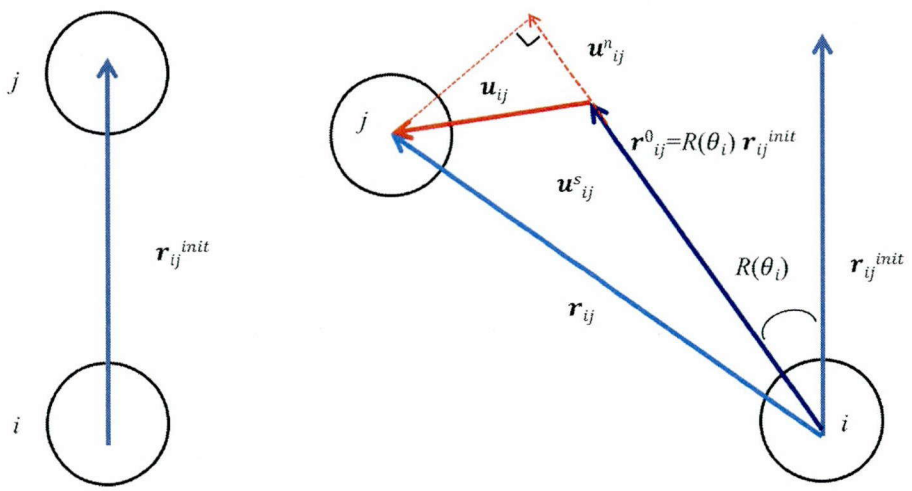
$$\boldsymbol{u}_{ij} = \boldsymbol{r}_{ij} - R_i \boldsymbol{r}_{ij}^{init} \tag{6.8}$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{ij} = \frac{\boldsymbol{u}_{ij}}{|\boldsymbol{r}_{ij}^0|} \tag{6.9}$$

なお，ひずみは各計算点にテンソルとして与えられるが，粒子の相対位置方向 $\boldsymbol{r}_{ij}$を方向ベクトルとして指定すると，応力とひずみはこれを法線とする平面に作用し，ベクトルとしての表現が可能となる．MPS 法の構造解析では応力，ひずみテンソルの全ての成分が必要というわけではなく $\boldsymbol{r}_{ij}$の方向のみを考えれば良い．ひずみは変位の発散として与えられるので，ここでは粒子間相互作用の発散モデルを適用したことになる．式(6.1)の第一項は，体積ひずみに相当する粒子間相互作用として式(6.9)で与えられる．ここでは，式(6.10)で与えられる体積ひずみに比例する圧力 $p_i$ が $\boldsymbol{r}_{ij}^0$の方向に作用するものとし，近傍粒子と圧力勾配の加重平均を取ることで相互作用を考慮している．なお，ここでは $\boldsymbol{r}_{ij}^0 = R_i \boldsymbol{r}_{ij}^{init}$とした．

$$\frac{\partial}{\partial x_\beta}\left(\lambda \varepsilon_{\gamma\gamma} \delta_{\alpha\beta}\right) = -\sum_{j \neq i} \left\{ \frac{1}{2} \left( \frac{2d}{n_0} \frac{p_i \boldsymbol{r}_{ij}^0}{|\boldsymbol{r}_{ij}^0|^2} - \frac{2d}{n_0} \frac{p_j \boldsymbol{r}_{ji}^0}{|\boldsymbol{r}_{ji}^0|^2} \right) W\left(|\boldsymbol{r}_{ij}^0|\right) \right\} \tag{6.10}$$

$$p_i = -\lambda\left(\varepsilon^{(vol)}\right)_i = -\lambda \left[ \frac{d}{n_0} \sum_{j \neq i} \left\{ \boldsymbol{\varepsilon}_{ij} \cdot \frac{\boldsymbol{r}_{ij}^0}{|\boldsymbol{r}_{ij}^0|^2} W\left(|\boldsymbol{r}_{ij}^0|\right) \right\} \right] \tag{6.11}$$




(a) 初期粒子配置　　(b) 現在の粒子配置

Fig. 6.3 粒子間相対変位のモデル

式(6.1)の第二項は式(6.12)で与えられる．これは式(6.13)による粒子間で相互作用する応力ベクトル$\boldsymbol{\sigma}_{ij}$の加重平均をとったものである．Fig.6.3 とひずみの定義式(6.9)より，変位ベクトル $\boldsymbol{u}_{ij}$を相対位置ベクトル $\boldsymbol{r}_{ij}$への正射影とそれに垂直な成分に分解すると，それぞれ$\boldsymbol{r}_{ij}^0$方向の垂直応力とせん断応力を与える．

$$\frac{\partial}{\partial x_j}(2\mu\varepsilon_{ij}) = \sum_{j\neq i}\left\{\frac{1}{2}\left(\frac{2d}{n_0}\frac{\boldsymbol{\sigma}_{ij}}{|\boldsymbol{r}_{ij}^0|^2} - \frac{2d}{n_0}\frac{\boldsymbol{\sigma}_{ji}}{|\boldsymbol{r}_{ji}^0|^2}\right)W(|\boldsymbol{r}_{ij}^0|)\right\} \tag{6.12}$$

$$\boldsymbol{\sigma}_{ij} = 2\mu\boldsymbol{\varepsilon}_{ij} \tag{6.13}$$

式(6.1)の第三項は粘性項であり，物体内部で変形速度に比例した減衰を生じさせる．これは粒子間相対速度 $\boldsymbol{v}_{ij}$を用いて離散化する．粒子 $j$ が粒子 $i$ から見て角速度 $\boldsymbol{\omega}_i$を持つ場合，粒子 $i$ の速度 $\boldsymbol{v}_i$と粒子 $j$ の速度$\boldsymbol{v}_j$を用いると，粒子 $i$ を基準とした速度差ベクトル$\boldsymbol{v}_{ij}$は式(6.14)で与えられる．これからひずみ速度ベクトルは式(6.15)のようになる．

$$\boldsymbol{v}_{ij} = \boldsymbol{v}_j - (\boldsymbol{v}_i + \boldsymbol{\omega}_i \times \boldsymbol{r}_{ij}) \tag{6.14}$$

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_{ij} = \frac{\boldsymbol{v}_{ij}}{|\boldsymbol{r}_{ij}|} \tag{6.15}$$

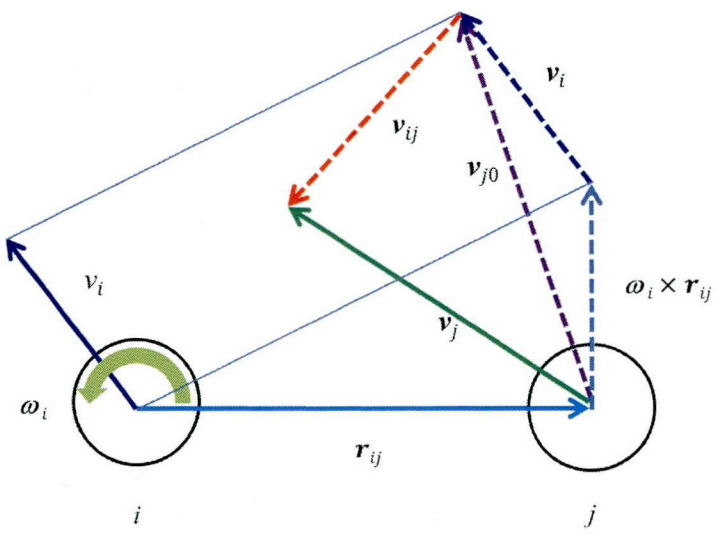



Fig. 6.4 粒子間相対速度のモデル

ひずみ速度から粘性応力 $\boldsymbol{\sigma}'_{ij}$ が求められるので，式(6.1)の第三項は式(6.16)で与えられる．ここで粘性応力は，ひずみ速度と粘性係数を用いると式(6.17)で表される．

$$\frac{\partial}{\partial x_j}(2\eta\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_{ij}) = \sum_{j\neq i}\left\{\frac{1}{2}\left(\frac{2d}{n_0}\frac{\boldsymbol{\sigma}'_{ij}}{|\boldsymbol{r}^0_{ij}|^2} - \frac{2d}{n_0}\frac{\boldsymbol{\sigma}'_{ji}}{|\boldsymbol{r}^0_{ji}|^2}\right)W(|\boldsymbol{r}^0_{ij}|)\right\} \tag{6.16}$$

$$\boldsymbol{\sigma}'_{ij} = 2\eta\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_{ij} \tag{6.17}$$

式(6.10)，(6.12)，(6.16)の両辺を粒子 $i$ が有する密度$\rho_i$で除して粒子 $i$ の加速度を得る．対象とする全ての計算点に対してこの計算を行い粘弾性体全体の変形を表現する．

MPS 法による粘弾性解析では，それぞれの粒子が回転の自由度を持つという特徴がある．粒子間に発生するせん断力$\boldsymbol{F}_{ij}$によって粒子間トルクが発生するが，次式が成立すれば粒子間トルクが打ち消し合う．計算過程で内力によって発生するトルクの和がゼロということは，角運動量が保存されることを意味しており，これにより弾性体が剛体として回転運動をしても相対変位から剛体回転による影響を除去できる．

$$\sum_{j\neq i}[\boldsymbol{r}_{ij}\times\boldsymbol{F}_{ij}w(|\boldsymbol{r}^0_{ij}|)] = \boldsymbol{0} \tag{6.18}$$

$$\boldsymbol{F}_{ij} = m_i\left[\frac{\partial\boldsymbol{v}_{ij}}{\partial t}\right] = \frac{m_i}{\rho_i}\frac{2d}{n_0}\frac{\boldsymbol{\sigma}_{ij}}{|\boldsymbol{r}^0_{ij}|}w(|\boldsymbol{r}^0_{ij}|) \tag{6.19}$$

角運動量が保存するということは，この力は，弾性項に由来するものと粘性項に由来するものが考えられるが，いずれの場合も角運動量を保存する（内部で粒子が回転しない）ためにはトルクの和はゼロになっていなければならない．以下，それぞれの場合について考える．

弾性項に由来するせん断応力$\boldsymbol{\sigma}_{ij}$は，ひずみ$\boldsymbol{\varepsilon}_{ij}$，変位 $\boldsymbol{u}_{ij}$を用いて，式(6.20)で与えられ，これを式(6.19)へ適用すると式(6.21)を得る．

$$\boldsymbol{\sigma}_{ij} = 2\mu\boldsymbol{\varepsilon}_{ij} = 2\mu\frac{\boldsymbol{u}_{ij}}{|\boldsymbol{r}^0_{ij}|} = 2\mu\frac{\boldsymbol{r}_{ij}-R\boldsymbol{r}^{init}_{ij}}{|\boldsymbol{r}^0_{ij}|} \tag{6.20}$$

$$\boldsymbol{F}_{ij} = \frac{m_i}{\rho_i}\frac{2d}{n_0}2\mu\frac{\boldsymbol{u}_{ij}}{|\boldsymbol{r}^0_{ij}|^2}w(|\boldsymbol{r}^0_{ij}|) = \frac{m_i}{\rho_i}\frac{2d}{n_0}2\mu\frac{\boldsymbol{r}_{ij}-R\boldsymbol{r}^{init}_{ij}}{|\boldsymbol{r}^0_{ij}|^2}w(|\boldsymbol{r}^0_{ij}|) \tag{6.21}$$

よって回転角は弾性項から発生する粒子間トルクの釣り合い条件である次式を計算することで求める．

$$\sum_{j\neq i}\left[\boldsymbol{r}_{ij}\times\frac{R_i\boldsymbol{r}_{ij}^{init}}{\left|\boldsymbol{r}_{ij}^{0}\right|^2}w\left(\left|\boldsymbol{r}_{ij}^{0}\right|\right)\right]=\boldsymbol{0} \tag{6.22}$$

粒子は回転の自由度を有するが，その表現方法には主に回転行列を用いる方法，オイラー角を用いる方法，クォータニオンを用いる方法の 3 種類がある．MPS 法では角度を表現するのに式(6.23)で示されるクォータニオンを用い，これを式(6.24)の回転行列と対応付けることで回転を表現する．クォータニオンは 3 次元の回転角を表現する方法として，コンピュータ・グラフィクス（CG）での回転運動の表現，人工衛星の姿勢制御に用いられている．回転行列を直接用いる場合と比較して誤差の蓄積がないという利点があり，またオイラー角を用いる場合と比較して特異点がないという利点があげられる．

$$\boldsymbol{q}_i = {}^t[q_1 \quad q_2 \quad q_3 \quad q_4] \tag{6.23}$$

$$R_i=\begin{bmatrix} q_1^2+q_4^2-q_2^2-q_2^2 & 2(q_1q_2-q_3q_4) & 2(q_3q_1+q_2q_4) \\ 2(q_1q_2+q_3q_4) & q_2^2+q_4^2-q_3^2-q_1^2 & 2(q_2q_3-q_1q_4) \\ 2(q_3q_1-q_2q_4) & 2(q_2q_3+q_1q_4) & q_3^2+q_4^2-q_1^2-q_2^2 \end{bmatrix} \tag{6.24}$$

ただし規格化条件として次式が成立する．

$$q_1^2+q_2^2+q_3^2+q_4^2=1 \tag{6.25}$$

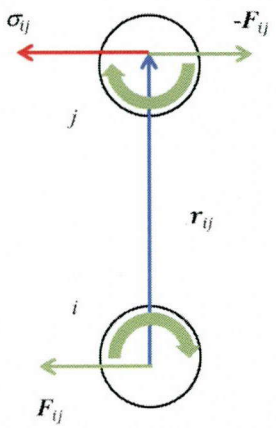



Fig. 6.5 せん断応力によるトルク

トルクの釣り合い条件式は $x, y, z$ の 3 成分に対して成立し，規格化条件の式と合わせると，クォータニオンの 4 成分に対して条件式が 4 つ存在するので解が存在する．ただしこの条件式は非線形連立方程式となるため，ニュートン・ラフソン法などの反復法によって $\boldsymbol{q}_i$ を求める．

クォータニオン $\boldsymbol{q}_i$ を求めた場合と同様にして，粘性項に由来するせん断力 $\boldsymbol{\sigma'}_{ij}$ は，ひずみ速度 $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_{ij}$，速度 $\boldsymbol{v}_{ij}$ を用いて式(6.26)のように表される．これによるせん断力は，式(6.27)で与えられる．

$$\boldsymbol{\sigma'}_{ij} = 2\eta\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_{ij} = 2\eta\frac{\boldsymbol{v}_{ij}}{|\boldsymbol{r}_{ij}|} = 2\eta\frac{\boldsymbol{v}_j - (\boldsymbol{v}_i + \boldsymbol{\omega}_i \times \boldsymbol{r}_{ij})}{|\boldsymbol{r}_{ij}|} \tag{6.26}$$

$$\boldsymbol{F}_{ij} = \frac{m_i}{\rho_i}\frac{2d}{n_0}2\eta\frac{\boldsymbol{v}_{ij}}{|\boldsymbol{r}_{ij}|^2}w(|\boldsymbol{r}_{ij}^0|) = \frac{m_i}{\rho_i}\frac{2d}{n_0}2\eta\frac{\boldsymbol{v}_j - (\boldsymbol{v}_i + \boldsymbol{\omega}_i \times \boldsymbol{r}_{ij})}{|\boldsymbol{r}_{ij}|^2}w(|\boldsymbol{r}_{ij}^0|) \tag{6.27}$$

式(6.27)を式(6.19)に代入して粒子間トルクの釣り合い条件を整理すると次式のようになる．

$$\sum_{j\neq i}\left[\boldsymbol{r}_{ij} \times \frac{\boldsymbol{v}_j - (\boldsymbol{v}_i + \boldsymbol{\omega}_i \times \boldsymbol{r}_{ij})}{|\boldsymbol{r}_{ij}|^2}w(|\boldsymbol{r}_{ij}^0|)\right] = \boldsymbol{0} \tag{6.28}$$

この場合未知数は $\boldsymbol{\omega}_i$ の三成分のみであり，この式を変形すると，$A\boldsymbol{\omega}_i = \boldsymbol{b}$ ($A$: マトリクス，$\boldsymbol{b}$: ベクトル)という形式の三元連立一次方程式が得られるのでこれを LU 分解などで解けば $\boldsymbol{\omega}_i$ が求められる．

### 6.2.2 接触判定

接触は粒子数密度の増加から判定する．粒子数密度は物質の密度と比例し，ひずみテンソルのトレース（対角成分の和）$(\varepsilon_{\gamma\gamma})_i$ は体積の増加を表しているので，密度の増加と次の線形関係がある．

$$(\varepsilon_{\gamma\gamma})_i = -\frac{\rho_i - \rho_0}{\rho_0} = -\frac{n_i - n_0}{n_0} \tag{6.29}$$

ただし初期粒子配置での粒子数密度 $n_0$ は一定とし，現在の粒子数密度 $n_i$ は現在の粒子配置から毎ステップ計算する．

$$n_i = \sum_{j\neq i} w(|\boldsymbol{r}_{ij}|) \tag{6.30}$$

初期粒子配置では近傍になかった粒子の接近により，重み関数の値がゼロでなくなる場合に次式を計算する．

$$\hat{p}_i = -\lambda\left(\varepsilon_{\gamma\gamma}\right)_i = \lambda\frac{n_i - n_0}{n_0} \tag{6.31}$$

これは体積の増加によって生じた圧力であると解釈できる．これが通常の計算で求めた圧力$p_i$の値より大きければ接触が生じたと判定して以下の判定を行い，$\hat{p}_i$と置き換える．

$$p_i = \max(p_i, \hat{p}_i) \tag{6.32}$$

圧力によって生じる加速度は，初期粒子配置での粒子間だけでなく，接触の可能性が生じたと判定された粒子間でも計算する．重み関数は粒子間距離に応じて大きくなるので，粒子間距離が小さくなると斥力$\hat{p}_i$は大きくなり必ず反発力が生じる．この手法を用いれば粒子が物体の輪郭を超えて互いに干渉するという問題を避けることができる．接触判定の模式図を Fig. 6.6 に示す．

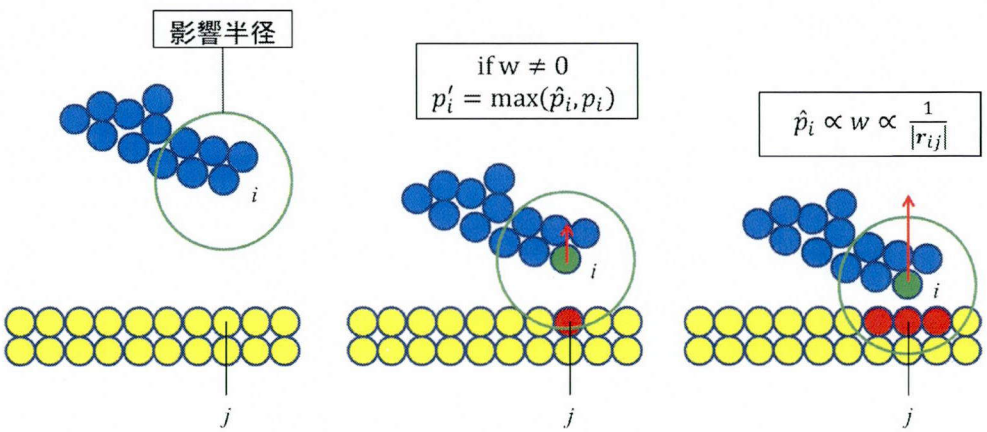



Fig. 6.6 接触判定

### 6.2.3　シンプレクティック法による時間積分法

運動方程式がハミルトンの正準方程式と一致する場合，シンプレクティック法という時間積分法を用い，エネルギー保存性に優れた計算ができることが知られている．シンプレクティック法は元々天体力学で発達した計算手法であり，一定の誤差のもとで全エネルギーを保存した長時間の計算を可能にする手法である．既に示したように，クォータニオン（角度）と角速度は位置の関数から角運動量保存則を満たすように導出されており，これによりハミルトニアンには角度に由来する成分が含まれない．従って，位置のみを変数としてハミルトニアンを元に導出した正準方程式は，既に示した運動方程式と一致する．このため本解析ではシンプレクティック法が適用できる[5], [6]．以下，簡潔にその概要を説明する．粘性を除いたポテンシャルエネルギーと運動エネルギーの和（ハミルトニアン）は以下のように記述できる．

$$H=\sum_i\left[\frac{1}{2m}(m_i v_i)^2\right]+\sum_i\left[\frac{m_i d}{2\rho_i n_0}2\mu\sum_{j\neq i}\left[\left|\boldsymbol{\varepsilon}_{ij}\right|^2 w\left(\left|\boldsymbol{r}_{ij}^0\right|\right)\right]\right]+\sum_i\left[\frac{m_i}{2\rho_i}\lambda\left(\varepsilon_i^{vol}\right)^2\right] \tag{6.33}$$

ここで，第一項は運動エネルギー，第二項はせん断ひずみによる弾性ポテンシャルエネルギー，第三項は体積ひずみによるポテンシャルエネルギーである．ハミルトンの正準方程式に式(6.33)で与えられる．

$$\begin{cases}\dfrac{\partial \boldsymbol{q}_i}{\partial t}=\dfrac{\partial H}{\partial \boldsymbol{p}_i}\\ \dfrac{\partial \boldsymbol{p}_i}{\partial t}=-\dfrac{\partial H}{\partial \boldsymbol{q}_i}\end{cases} \tag{6.34}$$

ここで，$(p_i, q_i)$ は粒子 $i$ に対する一般化運動量および一般化座標であり，本研究では $(p_i, q_i)=(m_i\boldsymbol{v}_i, \boldsymbol{x}_i)$となる．従って上記のハミルトニアンより，

$$\begin{cases}\dfrac{\partial \boldsymbol{x}_i}{\partial t}=\dfrac{\partial H}{\partial (m_i\boldsymbol{v}_i)}\\ \dfrac{\partial (m_i\boldsymbol{v}_i)}{\partial t}=-\dfrac{\partial H}{\partial \boldsymbol{x}_i}\end{cases} \tag{6.35}$$

これより 1 次の陽的なシンプレクティック法を用いた時間積分は以下のように表される．

$$\begin{cases} m\boldsymbol{v}_i^{k+1} = m\boldsymbol{v}_i^k - \Delta t\left(\dfrac{\partial H\left(\boldsymbol{x}_i^k, \boldsymbol{v}_i^k\right)}{\partial \boldsymbol{x}_i}\right) \\ \boldsymbol{x}_i^{k+1} = \boldsymbol{x}_i^k - \Delta t\left(\dfrac{\partial H\left(\boldsymbol{x}_i^k, \boldsymbol{v}_i^{k+1}\right)}{\partial\left(m\boldsymbol{v}_i\right)}\right) \end{cases} \tag{6.36}$$

式(6.36)ではまず第一式で速度を更新する．第二式ではその更新した速度を用いて位置を更新する．非常に簡潔だが，同じ時刻の速度を用いて位置を更新する従来の手法では誤差がステップ数 n に比例して大きくなる（$O(n)$）のに対し，シンプレクティック法では誤差がステップによらず一定（$O(1)$）であり，長時間の計算を行う場合は有効な手法である．

最後に MPS 法による粘弾性体解析をまとめると Fig.6.7 のようになる．

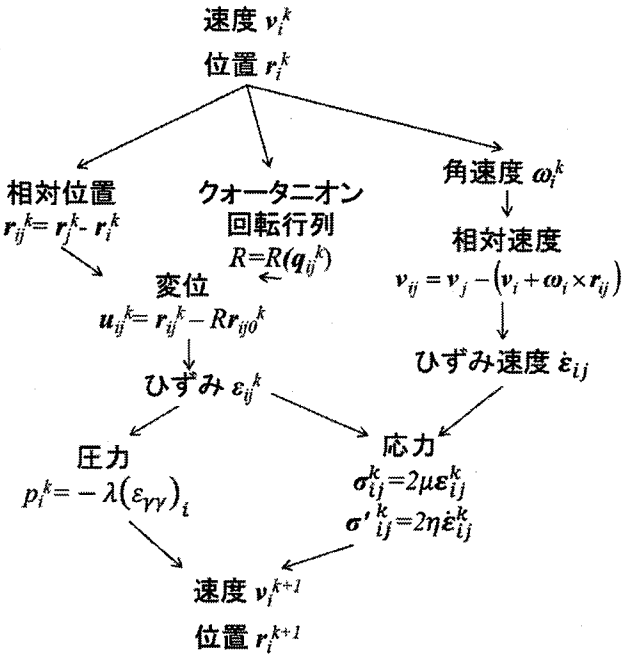



Fig. 6.7 MPS 法による粘弾性解析

## 6.3　三次元辺要素有限要素法による磁場解析

第 2 章では二次元電磁場解析のため三角形要素による一次節点要素を用いた離散化手法について述べたが，三次元解析では精度向上のため四面体を用いた一次辺要素を採用する．辺要素では透磁率の異なる境界で磁束密度の接戦方向成分が不連続となることを表現できるなど，電磁気学の境界条件に適合した計算を行えるので，節点要素よりも優れていると考えられている[7], [8]．

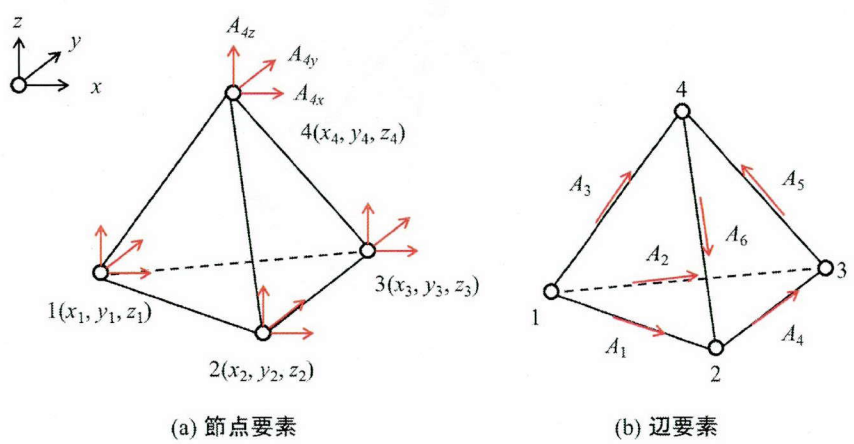
### 6.3.1　辺要素を用いたガラーキン法による離散化

一つの一次四面体辺要素は，Fig. 6.8 のように 4 個の面，4 個の節点，6 個の辺を持つ要素である．未知変数は，次式のように，磁気ベクトルポテンシャル $\boldsymbol{A}$ の辺 $k$ への射影成分を辺 $k$ に沿って矢印方向に積分した値であると定義される．

$$A_k = \int_k \boldsymbol{A} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{s} \tag{6.37}$$

ここで添字 $k$ ($k$=1, 2, …6) は要素 $e$ 内で用いられる相対節点番号, $\boldsymbol{s}$ は辺に沿ったベクトル，$A_k$ は辺上で定義される磁気ベクトルポテンシャルであり，これを未知数とする．辺要素有限要素法では，ここで定義した 6 つの辺の $A_k$ とベクトル補間関数 $\boldsymbol{N}_k$ を用いて，要素内のポテンシャル $\boldsymbol{A}$ を次式で表現する．

$$\boldsymbol{A} = \sum_{k=1}^{6} N_k A_k \tag{6.38}$$




(a) 節点要素　　(b) 辺要素

Fig. 6.8 節点要素と辺要素

ただしこれが成り立つためには，辺 $k$ の補間関数 $\boldsymbol{N}_k$ が次式を満たすことが必要である．

$$\int_m \boldsymbol{N}_k \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{s} = \begin{cases} 1 \ (m = k) \\ 0 \ (m \neq k) \end{cases} \tag{6.39}$$

すなわち $\boldsymbol{N}_k$ を辺 $k$ で積分すると 1，その他の辺 $m$ で積分するとゼロである．これにより要素内でポテンシャルを補間することができる．これを言い換えると，一般に辺 $k$ の補間関数 $\boldsymbol{N}_k$ は，(1) 辺 k 上で辺 k に沿った成分を有する，(2) k 以外の辺ではその辺に沿った成分を有さない，という二つの条件を満たす必要があるということである．このような条件を満足する補間関数として，一般に次の形式で与えられる．

$$\boldsymbol{N}_k = N_{k1}\mathrm{grad}N_{k2} - N_{k2}\mathrm{grad}N_{k1} \tag{6.40}$$

ここで，$N_{k1}$，$N_{k2}$ は辺 $k$ 上の両端の節点 1 および 2 における節点要素の補間関数（スカラー補間関数）であり，これは第 2 章で求めた結果を利用できる．Fig. 6.9 のように辺 $k$ の両端の節点 1，2 を $i$, $j$ のように表すと，補間関数は $x$, $y$, $z$ 方向の単位ベクトル $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$ と節点要素の補間関数 $N_{k1}$，$N_{k2}$ の結果を用いて次式で与えられる．

$$\begin{aligned} \boldsymbol{N}_k = \frac{1}{36V^2}\{&(b_i + c_i x + d_i y + e_i z)(\boldsymbol{i}c_j + \boldsymbol{j}d_j + \boldsymbol{k}e_j) \\ &- (b_j + c_j x + d_j y + e_j z)(\boldsymbol{i}c_i + \boldsymbol{j}d_i + \boldsymbol{k}e_i)\} \end{aligned} \tag{6.41}$$

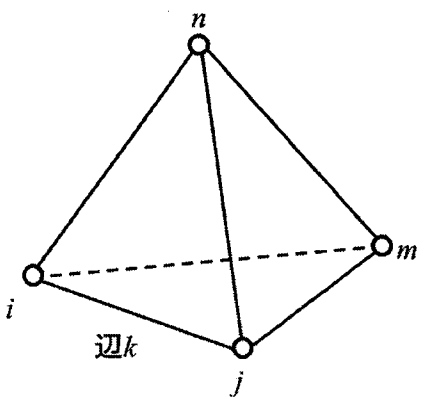



Fig. 6.9 一次四面体における節点要素と辺要素

### 6.3.2　永久磁石を含む静磁場の離散化

一次四面体要素を用いた三次元辺要素有限要素法では上述した補間関数を用いてガラーキン法による離散化を行う．永久磁石の磁気特性は，着磁後の永久磁石の磁化 $\boldsymbol{M}$，磁束密度 $\boldsymbol{B}$，磁場の強さ $\boldsymbol{H}$ を用いて次式で与えられる．

$$\boldsymbol{B} = \mu_0 \boldsymbol{H} + \boldsymbol{M} \tag{6.42}$$

これをアンペールの法則により変形すると，式(6.43)のような永久磁石を含む静磁場の支配方程式を得る．

$$\mathrm{rot}\nu_0(\boldsymbol{B} - \boldsymbol{M}) = \boldsymbol{J}_0 \tag{6.43}$$

$$\therefore\ \mathrm{rot}\nu_0(\mathrm{rot}\boldsymbol{A} - \boldsymbol{M}) - \boldsymbol{J}_0 = \mathrm{rot}(\nu_0 \mathrm{rot}\boldsymbol{A}) - \mathrm{rot}\nu_0 \boldsymbol{M} - \boldsymbol{J}_0 = \boldsymbol{0} \tag{6.44}$$

よってこれをガラーキン法で離散化すると式(6.45)のような残差方程式が得られる．

$$G_k = \iiint_V \boldsymbol{N}_k \cdot (\mathrm{rot}\nu_0 \mathrm{rot}\boldsymbol{A} - \mathrm{rot}\nu_0 \boldsymbol{M} - \boldsymbol{J}_0)\mathrm{d}V = \boldsymbol{0} \tag{6.45}$$

$$\therefore\ G_k = \iiint_V \boldsymbol{N}_k \cdot \mathrm{rot}(\nu \mathrm{rot}\boldsymbol{A})\mathrm{d}V - \iiint_V \boldsymbol{N}_k \cdot \mathrm{rot}\nu_0 \boldsymbol{M}\mathrm{d}V - \iiint_V \boldsymbol{N}_k \cdot \boldsymbol{J}_0 \mathrm{d}V = 0 \tag{6.46}$$

ここで，ベクトル公式およびガウスの発散定理を用いると，第一項$G_{k,1st}$は次式のように変形できる．

$$\begin{aligned} G_{k,1st} &= \iiint_V \nu \mathrm{rot}\boldsymbol{A} \cdot \mathrm{rot}\boldsymbol{N}_k \mathrm{d}V + \iiint_V \mathrm{div}(\nu \mathrm{rot}\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{N}_k)\mathrm{d}V \\ &= \iiint_V \nu \mathrm{rot}\boldsymbol{A} \cdot \mathrm{rot}\boldsymbol{N}_k \mathrm{d}V + \iint_S (\nu \mathrm{rot}\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{N}_k) \cdot \boldsymbol{n}\mathrm{d}S \\ &= \iiint_V \nu \mathrm{rot}\boldsymbol{A} \cdot \mathrm{rot}\boldsymbol{N}_k \mathrm{d}V + \iint_S (\boldsymbol{n} \times \nu \mathrm{rot}\boldsymbol{A}) \cdot \boldsymbol{N}_k \mathrm{d}S \end{aligned} \tag{6.47}$$

式(6.48)および式(6.49)で与えられる固定境界条件および自然境界条件を考えれば，式(6.47)は式(6.49)のように変形できる．

$$\boldsymbol{n} \times \boldsymbol{H} = \boldsymbol{n} \times \nu \mathrm{rot}\boldsymbol{A} = \boldsymbol{0} \tag{6.48}$$

$$\boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{H} = \boldsymbol{n} \cdot \nu \mathrm{rot}\boldsymbol{A} = 0 \tag{6.49}$$

$$G_{k,1st} = \iiint_V \nu \mathrm{rot}\boldsymbol{A} \cdot \mathrm{rot}\boldsymbol{N}_k \mathrm{d}V + \iint_S (\boldsymbol{n} \times \nu \mathrm{rot}\boldsymbol{A}) \cdot \boldsymbol{N}_k \mathrm{d}S = \iiint_V \nu \mathrm{rot}\boldsymbol{A} \cdot \mathrm{rot}\boldsymbol{N}_k \mathrm{d}V \qquad (6.50)$$

また，同様にして第二項$G_{k,2nd}$は次式のように変形できる．

$$\begin{aligned} G_{k,2nd} &= -\iiint_V \boldsymbol{N}_k \cdot (\mathrm{rot}\nu_0 \boldsymbol{M}) \mathrm{d}V \\ &= -\iiint_V \nu_0 \boldsymbol{N}_k \cdot (\mathrm{rot}\boldsymbol{M}) \mathrm{d}V \\ &= -\nu_0 \iint_S (\boldsymbol{M} \times \boldsymbol{N}_k) \cdot \boldsymbol{n} \mathrm{d}S - \nu_0 \iiint_V \boldsymbol{M} \cdot (\mathrm{rot}\boldsymbol{N}_k) \mathrm{d}V \end{aligned} \qquad (6.51)$$

ここでベクトル公式を用いると，式(6.51)の一部で式(6.52)のような変形が可能である．

$$\iint_S (\boldsymbol{M} \times \boldsymbol{N}_k) \cdot \boldsymbol{n} \mathrm{d}S = \iint_S (\boldsymbol{n} \times \boldsymbol{M}) \cdot \boldsymbol{N}_k \mathrm{d}S \qquad (6.52)$$

自然境界条件として磁化 $\boldsymbol{M}$ が境界に対し垂直である（$\boldsymbol{n} \times \boldsymbol{M} = \boldsymbol{0}$）ということを考慮すると式(6.52)はゼロになり，磁化を含む項は形状関数の回転 $\mathrm{rot}\boldsymbol{N}_k$ を用いて次のように離散化される．

$$G_{k,2nd} = -\nu_0 \iiint_V \boldsymbol{M} \cdot (\mathrm{rot}\boldsymbol{N}_k) \mathrm{d}V \qquad (6.53)$$

従って，全体の残差方程式は弱形式として次の形式で表される．

$$G_k = \iiint_V \nu \mathrm{rot}\boldsymbol{A} \cdot \mathrm{rot}\boldsymbol{N}_k \mathrm{d}V - \nu_0 \iiint_V \boldsymbol{M} \cdot (\mathrm{rot}\boldsymbol{N}_k) \mathrm{d}V - \iiint_V \boldsymbol{N}_k \cdot \boldsymbol{J}_0 \mathrm{d}V = 0 \qquad (6.54)$$

弱形式では初めの式(6.45)と比較してベクトルポテンシャル$\boldsymbol{A}$に要求される微分可能な条件が弱められているため，一次要素による補間を用いて $\boldsymbol{A}$ を表すことができる．従ってベクトルポテンシャル $\boldsymbol{A}$ を式(6.38)のように補間関数 $\boldsymbol{N}_u$ を用いて表したものを残差方程式へ代入すると未知辺数の数だけ次の $G_k$ が得られる．

$$
\begin{aligned}
G_k &= \iiint_V \mathrm{rot}\boldsymbol{N}_k \cdot \left\{ \nu \mathrm{rot}\left( \sum_{u=1}^{6} \boldsymbol{N}_u A_u \right) \right\} \mathrm{d}V - \iiint_V \boldsymbol{N}_k \cdot \boldsymbol{J}_0 \mathrm{d}V \\
&= \iiint_V \mathrm{rot}\boldsymbol{N}_k \cdot \left\{ \nu \left( \sum_{u=1}^{6} \mathrm{rot}(\boldsymbol{N}_u A_u) \right) \right\} \mathrm{d}V - \iiint_V \boldsymbol{N}_k \cdot \boldsymbol{J}_0 \mathrm{d}V
\end{aligned}
\tag{6.55}
$$

この残差方程式を 0 とおいて整理すれば，ベクトルポテンシャル $\boldsymbol{A}$ を各辺に沿って積分した値を未知数とする連立方程式は次の形式で与えられる．

$$
[\mathrm{H}]\{\boldsymbol{A}\} = \{\boldsymbol{K}\} \tag{6.56}
$$

ここで，[H]は係数行列，$\{\boldsymbol{A}\}$は解ベクトル，$\{\boldsymbol{K}\}$は $\boldsymbol{A}$ を含まない既知の値からなるベクトルである．式(6.55)で添字 $k$, $u$ を入れ替えてもベクトルは同様であるから，マトリックス[H]は対称であり，対称性を利用して不完全コレスキー分解付き共役勾配法（ICCG 法）などを用いれば，式(6.55)の形式から効率的に解を求めることができる．

なお磁束密度 $\boldsymbol{B}$ は $\boldsymbol{B}$=rot$\boldsymbol{A}$ という関係から次式で計算できる．

$$
\boldsymbol{B} = \mathrm{rot}\boldsymbol{A} = \mathrm{rot}\left( \sum_{u=1}^{6} \boldsymbol{N}_u A_u \right) = \sum_{u=1}^{6} (\mathrm{rot}\boldsymbol{N}_u) A_u \tag{6.57}
$$

形状関数の回転 rot$\boldsymbol{N}_k$ は $\boldsymbol{A}$ を計算する際に式(6.50)や式(6.53)などで既に求めているので，これを用いれば $\boldsymbol{B}$ は効率的に計算できる．形状関数は節点座標の関数で既知の値であるから，一次四面体要素を用いた場合は，要素内の磁束密度 $\boldsymbol{B}$ は一定である（なおこのような形状関数によって要素内部の物理量が一定値をとる要素をアイソパラメトリック要素と呼ぶ）．

### 6.3.3 電磁力の計算方法

有限要素法による電磁力やトルクの計算方法としては，マクスウェル応力法，等価磁化電流法，改良エネルギー法，節点力法などがある．本研究では磁性体内部の電磁力分布を求める必要があるため節点力法を使用する．以下ではマクスウェル応力法との比較を通して節点力法の計算式を導出する[7], [9], [10]．

Fig.6.10 に示すように，マクスウェル応力法は，ある領域に作用する電磁力の総和を，領域を囲む面 $S$ に働くマクスウェル応力 $\boldsymbol{f}_1, \ldots, \boldsymbol{f}_4$ の総和として求めるものである．一般に，単位体積に作用する電磁力は式(6.58)で与えられるので，磁性体全体に作用する電磁力は式(6.59)で計算できる．

$$\boldsymbol{f} = \boldsymbol{J} \times \boldsymbol{B} = \frac{1}{\mu} \mathrm{rot}\boldsymbol{B} \times \boldsymbol{B} \tag{6.58}$$

$$\boldsymbol{F} = \iiint_V \boldsymbol{f} \mathrm{d}V \tag{6.59}$$

一方，体積力$\boldsymbol{f}$はマクスウェルの応力テンソル$\boldsymbol{T}={}^t[\boldsymbol{T}_x\,\boldsymbol{T}_y\,\boldsymbol{T}_z]$の各成分の発散を用いて式(6.60)で与えられる．ここで$\boldsymbol{i}$，$\boldsymbol{j}$，$\boldsymbol{k}$は$x$，$y$，$z$方向の単位ベクトルである．

$$\boldsymbol{f} = (\mathrm{div}\boldsymbol{T}_x)\boldsymbol{i} + \left(\mathrm{div}\boldsymbol{T}_y\right)\boldsymbol{j} + (\mathrm{div}\boldsymbol{T}_z)\boldsymbol{k} \tag{6.60}$$

ゆえに磁性体へ作用する電磁力は式(6.58)と式(6.59)およびガウスの発散定理より，次式で計算できる．なお，$\boldsymbol{n}$は磁性体の境界面に対する単位法線ベクトルである．マクスウェルの応力テンソル$\boldsymbol{T}$の成分は，式(6.59)との対応関係を考えて磁束密度$\boldsymbol{B}$および透磁率$\mu$から式(6.61)で与えられる．

$$\boldsymbol{F} = \iiint_V \mathrm{div}\boldsymbol{T} \mathrm{d}V \iint_S \boldsymbol{T} \cdot \boldsymbol{n} \mathrm{d}S \tag{6.61}$$

$$\boldsymbol{T} = \frac{1}{2\mu}\begin{bmatrix} B_x^2 - B_y^2 - B_z^2 & 2B_xB_y & 2B_xB_z \\ 2B_xB_y & B_y^2 - B_z^2 - B_x^2 & 2B_zB_y \\ 2B_xB_z & 2B_zB_y & B_z^2 - B_x^2 - B_y^2 \end{bmatrix} \tag{6.62}$$

一般に，磁性体と空気の境界では磁束密度分布が急激に変化するので磁束密度に誤差を生じやすい．したがって閉曲面 S は磁束密度の変化が急激ではない磁性体から遠く離れた位置に取る必要がある．また磁束密度の変化の影響を抑えるため，積分路上の各点の周りの要素の磁束密度の平均値を用いるスムージング処理を用いることも多い．

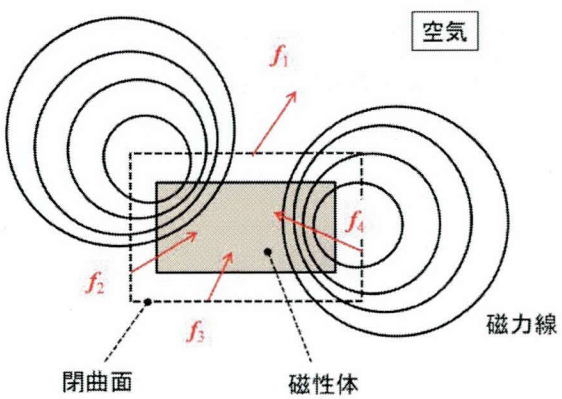



Fig.6.10 マクスウェル応力法による力計算

他方，節点力法では磁性体内の節点に作用する力を計算するものである．全体に作用する力を求める場合は，Fig.6.11 のように，$\boldsymbol{f}_1, \boldsymbol{f}_2, \boldsymbol{f}_3, \boldsymbol{f}_4$ の和を求めて合計すれば良い．磁界による体積力 $\boldsymbol{f}_v$ および表面力 $\boldsymbol{f}_s$ は，マクスウェル応力テンソル $\boldsymbol{T}$ と媒質の外向きの単位法線ベクトル $\boldsymbol{n}$ を用いて式(6.63)および式(6.64)で表される．

$$\boldsymbol{f}_v = \mathrm{div}\boldsymbol{T} \tag{6.63}$$

$$\boldsymbol{f}_s = (T|_2 - T|_1) \cdot \boldsymbol{n} \tag{6.64}$$

まず磁性体に作用する仮想変位 $\delta u$ は連続で微分可能なスカラー補間関数 $N_i$ で次式のように内挿されるとする．この補間関数 $N_i$ は節点における補間関数を用いる．

$$\delta u = \sum_i N_i \delta u_i \tag{6.65}$$

仮想変位 $\delta u$ に対応するエネルギーの変分 $\delta W$ は式(6.65)で与えられ，ベクトル公式を用いて変形すると式(6.66)のようになる．

$$\delta W = \iiint_V (\mathrm{div}\boldsymbol{T}) \delta u \mathrm{d}V + \iint_S \{(\boldsymbol{T}|_2 - \boldsymbol{T}|_1) \cdot \boldsymbol{n}\} \delta u \mathrm{d}S \tag{6.66}$$

$$\therefore\ \delta W = \iint_S \boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{T} \delta u \mathrm{d}S - \iiint_V (\mathrm{grad}\delta u) \cdot \boldsymbol{T} \mathrm{d}V + \iint_S \{(\boldsymbol{T}|_2 - \boldsymbol{T}|_1) \cdot \boldsymbol{n}\} \delta u \mathrm{d}S \tag{6.67}$$

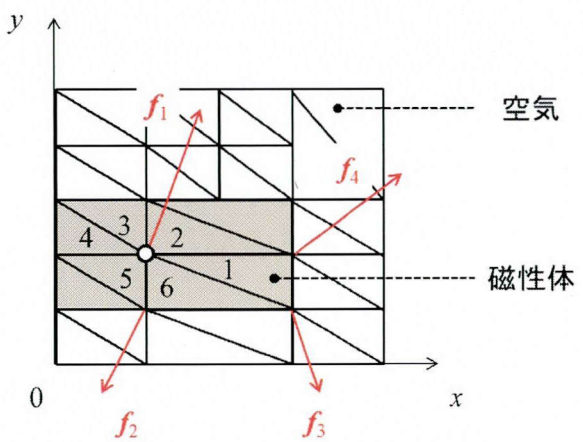



Fig.6.11 節点力法による力の計算

式(6.67)の第一項と第三項は打ち消しあうので次式が得られる.

$$\delta W = -\iiint_V (\mathrm{grad}\delta u) : \boldsymbol{T} \mathrm{d}V \tag{6.68}$$

式(6.68)に補間関数を用いて表した仮想変位$\delta u$を代入すると次式が得られる.

$$\delta W = -\sum_i \left( \iiint_V \boldsymbol{T} \cdot \mathrm{grad} N_i \cdot \delta u_i \mathrm{d}V \right) \tag{6.69}$$

エネルギーの変分$\delta W$は節点に加えられる力$\boldsymbol{f}_i$による仕事の合計であると考えられるので,式(6.70)の関係が成り立ち,最終的に節点力$\boldsymbol{f}_i$はマクスウェル応力テンソル$\boldsymbol{T}$および補間関数$N_i$によって次式(6.71)で与えられる.

$$\delta W = -\sum_i \left( \iiint_V \boldsymbol{T} \cdot \mathrm{grad} N_i \cdot \delta \boldsymbol{u}_i \mathrm{d}V \right) = -\sum_i \boldsymbol{f}_i \cdot \delta \boldsymbol{u}_i \tag{6.70}$$

$$\therefore \boldsymbol{f}_i = -\iiint_V \boldsymbol{T} \cdot \mathrm{grad} N_i \mathrm{d}V \tag{6.71}$$

節点力$\boldsymbol{f}_i$は,節点$i$を含む要素についての総和をとることで求められる.全体の電磁力$\boldsymbol{F}$は,磁性体の各節点における節点力の合力として求められる.節点力法では,磁性体内部の力分布を求められるだけでなく,マクスウェル応力法で必要とされる積分面の位置の考慮や,積分面両側での平均化処理を必要としないという利点がある.したがって,本解析手法では節点力法を採用する.

## 6.4　粒子法と有限要素法を用いた磁性エラストマーの連成解析手法

本研究では，磁性エラストマーの変形解析手法として構造計算に MPS 法を，磁場計算に有限要素法を用いる．MPS 法では粘弾性体を粒子と呼ばれる有限個の計算点で表し，式(6.1)を離散化した粒子の運動をそれぞれ計算して巨視的な変形を求める．しかし MPS 法は空気領域に計算点を配置できないため，磁場計算など比較的広い計算領域を必要とする計算には不向きである．他方，有限要素法はメッシュの粗密をつけられるため，それほど精度の必要ない領域は粗くし精度の必要な箇所の要素を密にすることによって効率的な計算が行えるという利点があるが，変形の進展によってメッシュの破綻などが生じる可能性があり，大変形問題を扱う場合に不都合が生じうる．そこで本研究では粘弾性体の力学計算には MPS 法を，電磁場計算には有限要素法を用い，互いの欠点を補うことを考える．

### 6.4.1　粒子計算点と節点要素の対応

Fig. 6.12 に MPS 法の粒子座標から有限要素法のメッシュを生成するデータ変換の模式図を示す．まず MPS 法における粒子の位置座標は節点座標として有限要素法に受け渡される．次に物体の位置データから作成した節点データを元に辺要素を作成し，磁束密度分布を計算する．辺要素から磁束密度分布を計算し，各節点での電磁力を求める．最後に電磁力を外力として粒子法に適用し，構造解析を行う．これを所定のステップ数だけ繰り返すことで計算を進める．

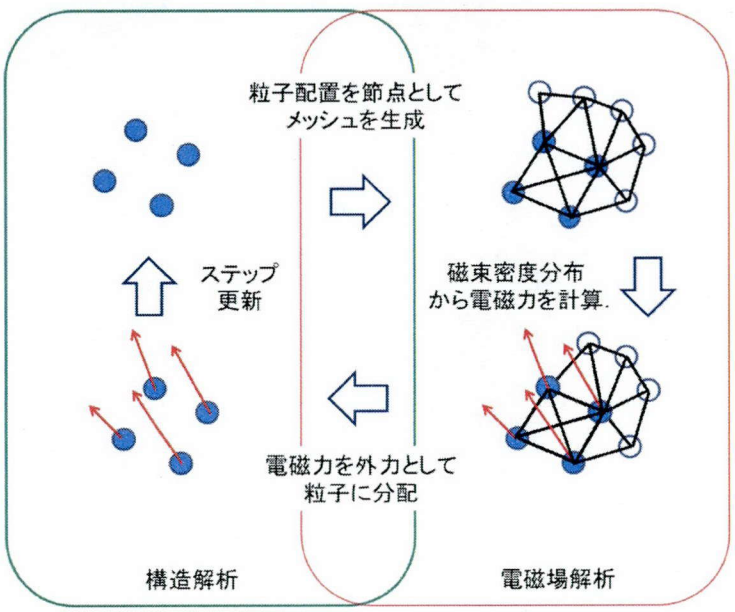



Fig. 6.12 粒子配置からの有限要素メッシュ生成

### 6.4.2　三次元デローニ分割における空気節点の自動生成

MPS 法で計算を行う際は空気節点を表現しないので，有限要素法で電磁場計算を行う際には解析領域に空気節点を追加する必要がある．空気領域には物体の形状に応じて数層分の空気節点を配置する．この節点配置にもとづき三次元デローニ分割を行なってメッシュを生成し，空気計算点を含んだ有限要素法用の解析領域を作成する[11]．ただし，デローニ分割で空気領域を分割する場合，分割図の作成時に扁平な要素を生成する可能性があり，これによってマトリックスの性質の悪化による反復計算の収束性の悪化や，計算精度の低下が生じる．従って，予め指定した節点に加え，扁平な要素が生成された場合に空気節点を自動的に追加する必要がある．本研究では，節点の自動追加を次のように行う．まず扁平な要素を要素の最短辺に対する最長辺の比が 3.5 以上のものと定義し，その場合最長辺の中点に新たに節点を自動的に挿入する．この新節点を元に新たに要素を生成し，扁平な要素がなくなるまでこの計算を繰り返す．Fig.6.13 は二次元分割図を用いて以上の方法を模式的に示したものであるが，三次元でも同様の方法で実行できる．

最後に，Fig. 6.14 に連成解析法全体のフローチャートを示す．

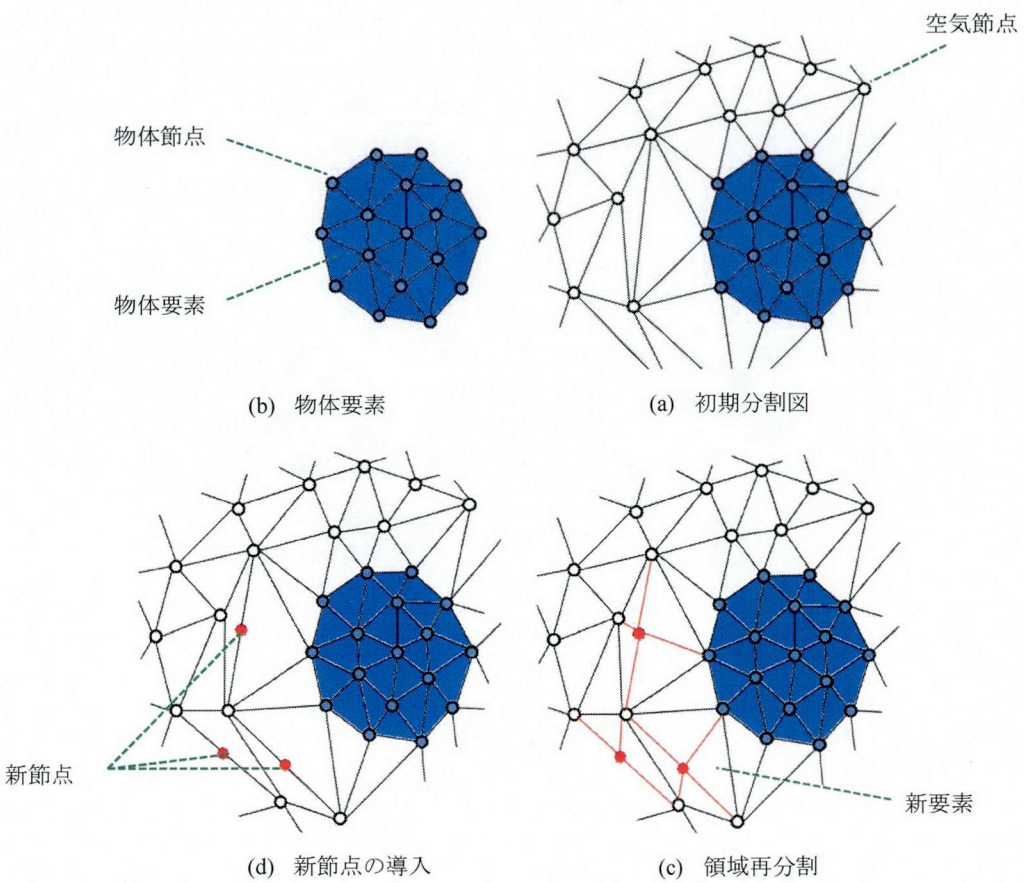



Fig.6.13 空気領域分割図の自動修正

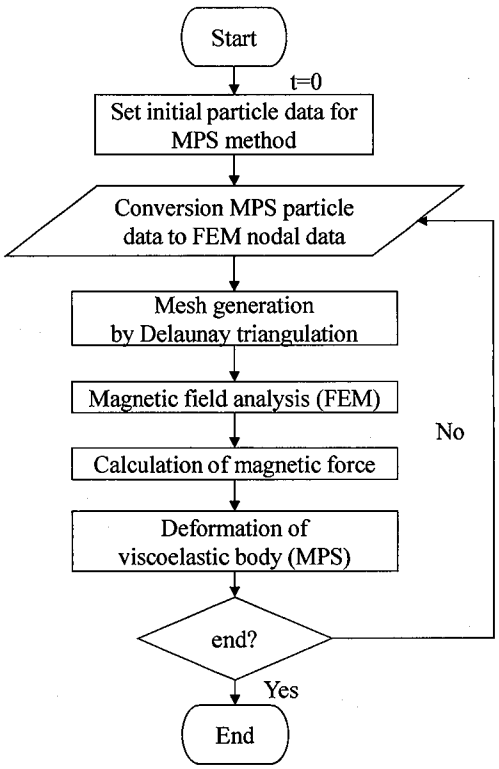



Fig. 6.14 連成解析のフローチャート

## 6.5 磁性エラストマーの変形現象に対する連成解析手法の検証

### 6.5.1 解析モデル

解析手法の検証のため簡易的なモデルを用いて変形挙動を確認する．Fig. 6.15 に解析モデルの概念図を，Fig. 6.16 に初期粒子配置を示す．また Fig. 6.17 に解析モデルの初期メッシュ図を示す．厚さ 2mm の非磁性体（アクリル）の板上に直径 20mm，高さ 10mm の円筒形の磁性エラストマーが縦向きに置かれ，板を挟んで永久磁石（直径: 10mm，高さ: 5mm）が置かれている．なお MPS 法では磁石は粒子の運動に，有限要素法では非磁性体の板は磁場に影響を及ぼさないためそれぞれの解析では計算を行なっていない．電磁場解析の境界条件は，解析領域端部では磁場が境界に平行な固定境界，それ以外の要素間では磁場が境界に垂直な自然境界とした．

Table 6.1 に物性値を，Table 6.2 に解析諸元を示す．ヤング率と透磁率は第 3 章で求めた無変形，無磁場の状態の値を用い，計算中はこの値を使い続ける線形計算とした．なお，磁性エラストマーは無磁場の状態でも自重により変形するほど柔らかいので，Fig. 6.16 のような円柱形状から自重によって安定するまで電磁力計算は行わず，形状が安定してから電磁場計算を開始するものとする．

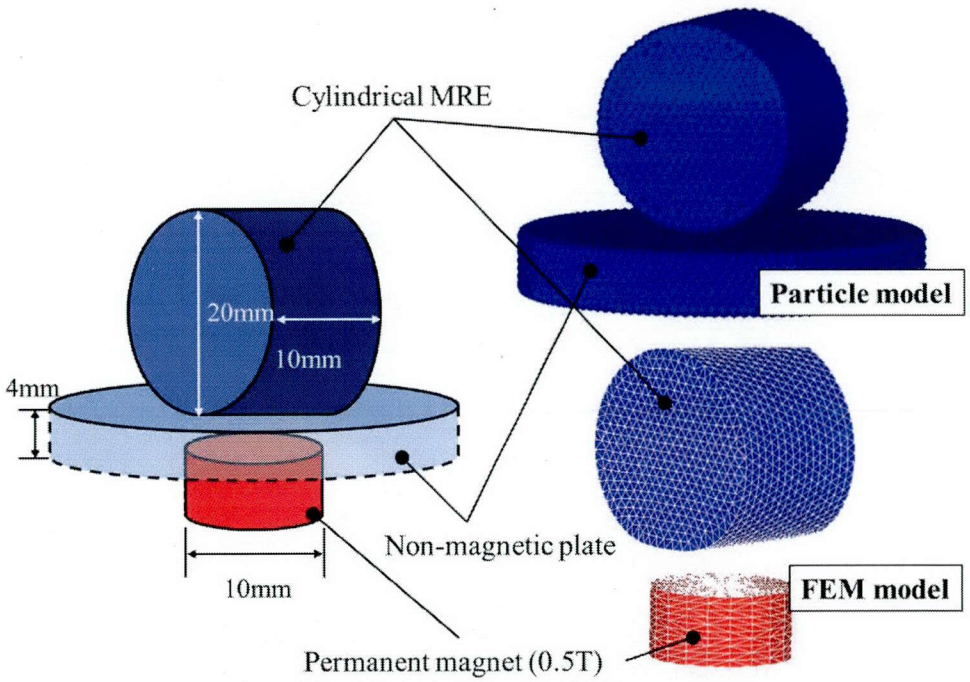
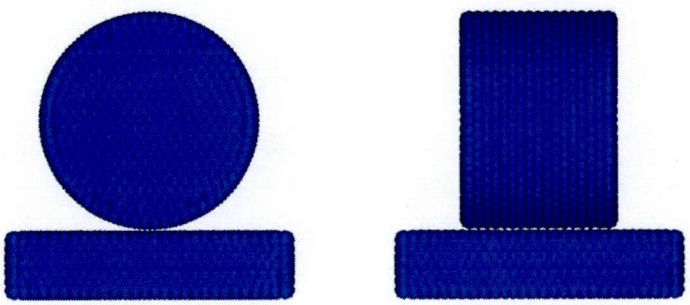



Fig. 6.15 解析モデル



正面図　　側面図

Fig. 6.16 初期粒子配置

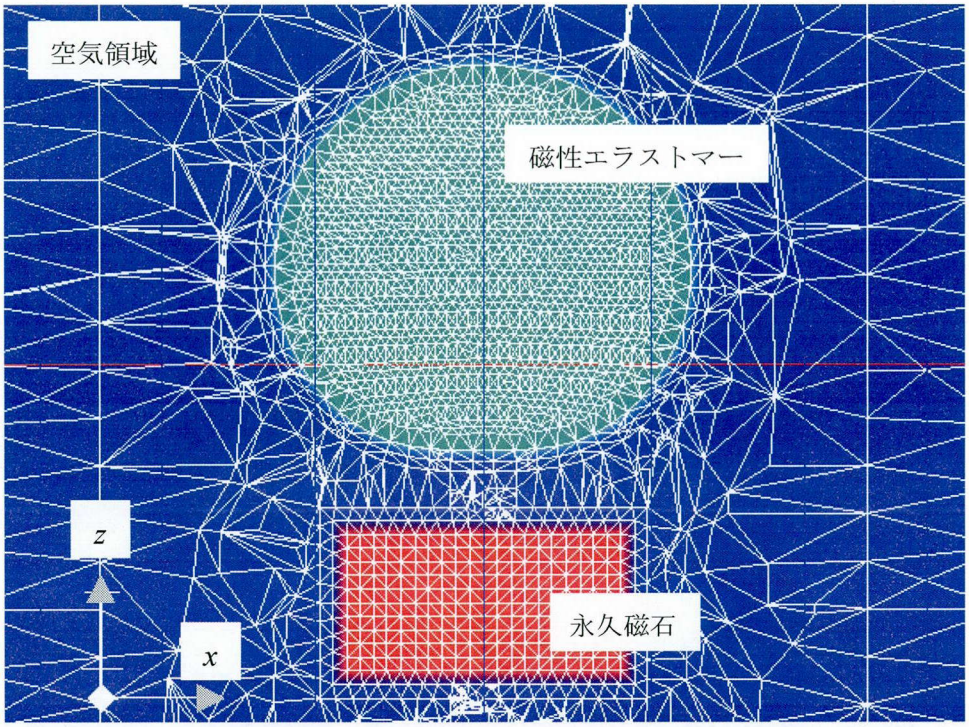



Fig. 6.17 初期メッシュ分割図の *x-z* 断面図

Table 6.1 物性値

| | |
|---|---|
| 初期密度 [kg/m$^3$] | 2,970 |
| ヤング率 [Pa] | 12,000 |
| ポアソン比 | 0.3 |
| 粘性係数 [Pa*s] | 1.0 |

Table 6.2 解析諸元

| | |
|---|---|
| 初期粒子間距離 [m] | 7.5e-3 |
| 影響半径 | 2.1 |
| 時間刻み幅（粒子法のみ）[s] | 1.0e-5 |
| 時間刻み幅（連成解析）[s] | 1.0e-6 |
| 粒子数 | 17,901 |
| ステップ数 | 3,500 |
| 節点数 | 約 2 万 |
| 要素数 | 約 13 万 |
| 辺要素数 | 約 15 万 |
| 計算時間 [h] | 約 2 |

### 6.5.2 解析結果と考察

Fig. 6.18 に赤線として重力による変形のみで計算させ安定形状に達するまでの磁性エラストマーのエネルギー履歴を示す．また，比較のため粘性係数をゼロとおいて同様の計算を行った結果を青線で示す．これより，真円状から自重により変形する過程で，粘性のない純粋な弾性計算の場合と比較すると，粘性項の影響で内部摩擦によりエネルギーが失われていることが確認できた．

また Fig. 6.19 には圧力の時間履歴を示している．自重による変形過程で内部圧力の上昇が一定値に達した時点で電磁力計算を開始するものとした（80Pa で最大値となり，これ以降は静止する）．なおこのグラフより，磁力による圧縮で圧力が急激に上昇していくことも確認できた．したがって，磁場計算を開始した後は，Table 6.2 に示したように時間刻み幅を 1/10 に落とすことで，強い外力による急激に運動状態が変化しても計算が安定化するようにしている．

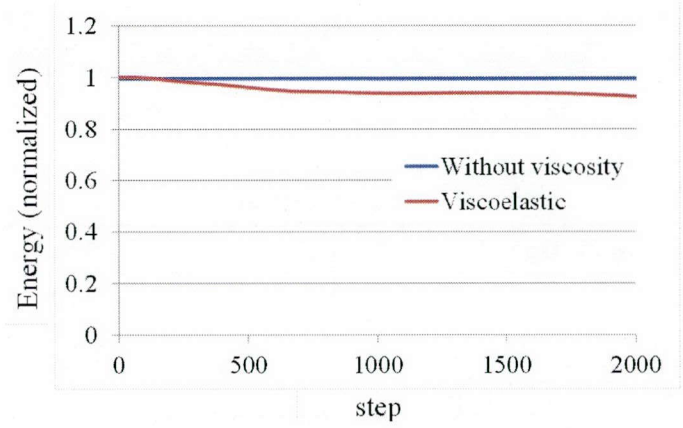



Fig. 6.18 エネルギー履歴

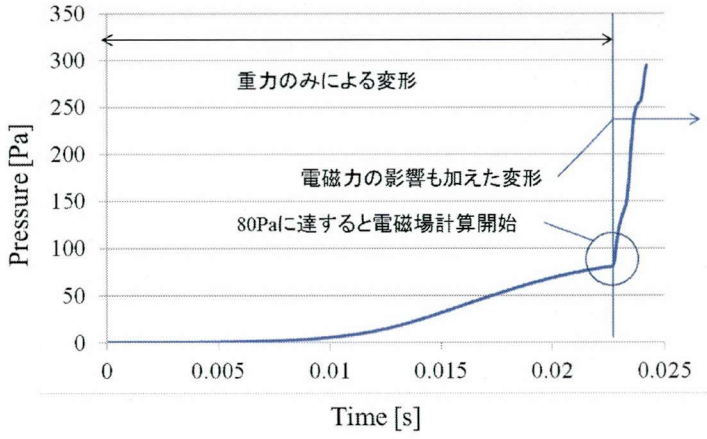



Fig. 6.19 圧力履歴と計算開始条件

Fig. 6.20 には，この圧力をフラグとして電磁力分布を開始した後の初期電磁力分布を示している．MPS 法における粒子の位置データが有限要素法における節点データに変換されたことによってメッシュが形成されていることが確認できるとともに，節点力法により磁性エラストマーの内部まで電磁力計算が行われていることを示している．また Fig. 6.21 には磁場計算開始時のメッシュ図と，計算終了時のメッシュ図を示した．電磁力を駆動力として粒子の変形が進行し，対応してメッシュが変形していることが確認できる．

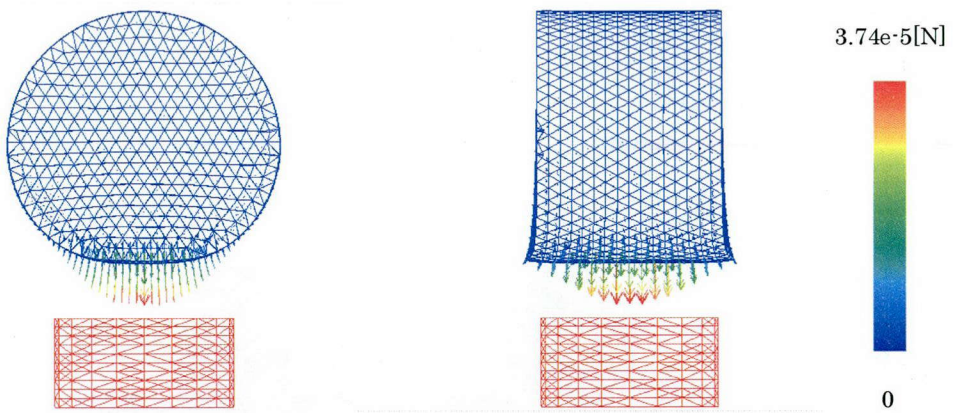



Fig. 6.20 初期電磁力分布

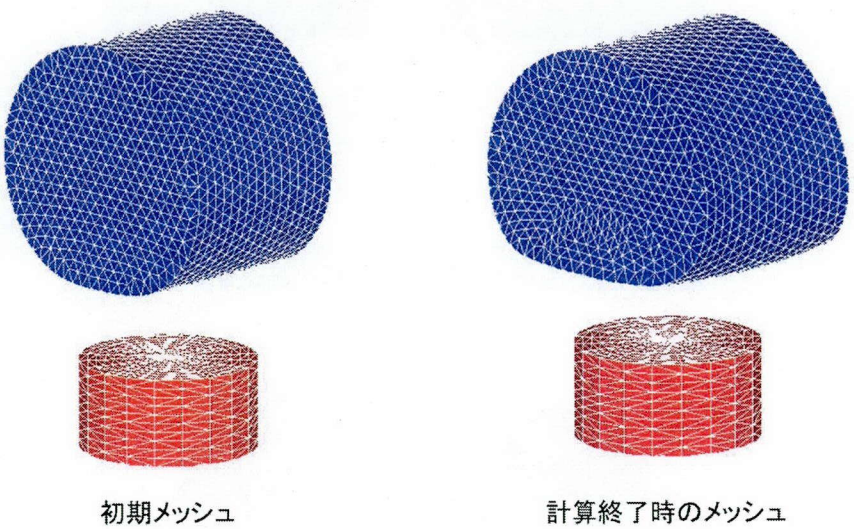



Fig. 6.21 メッシュの時間発展

Fig. 6.22 には，粒子分布の時間発展の様子を示した．この初期状態は，構造と磁場計算開始時点を表している．粒子の色は，コンターのようにひずみがゼロの状態で青，粒子の体積ひずみが 10%の状態で赤を示す．磁場によって形状の変形が進み，磁石に近い板との接触面で最も歪が大きくなっていることが確認できる．Fig. 6.23 および Fig. 6.24 には磁場計算開始時の磁性エラストマーと接触している床付近での，外部の電磁力と内部の応力ベクトルとの残差力の分布を示した．エラストマーは変形が進展するにつれて抵抗力としての内部応力が大きくなるが，これに打ち消されない残差力が磁性エラストマーに鉛直下向きに作用し，時間発展とともに磁性エラストマーは鉛直下向きに変形する．Fig. 6.24 は計算終了時点での残差力分布を示しており，床付近では残差力がほぼ相殺されていることを確認した．ただし，残差力が完全に相殺されているわけではなく，床粒子に最も近い幾つかの粒子は壁反力との重み付き平均を受けて鉛直下向きに力を受けていた．MPS 法における接触反力の正確な導入は今後の課題である．

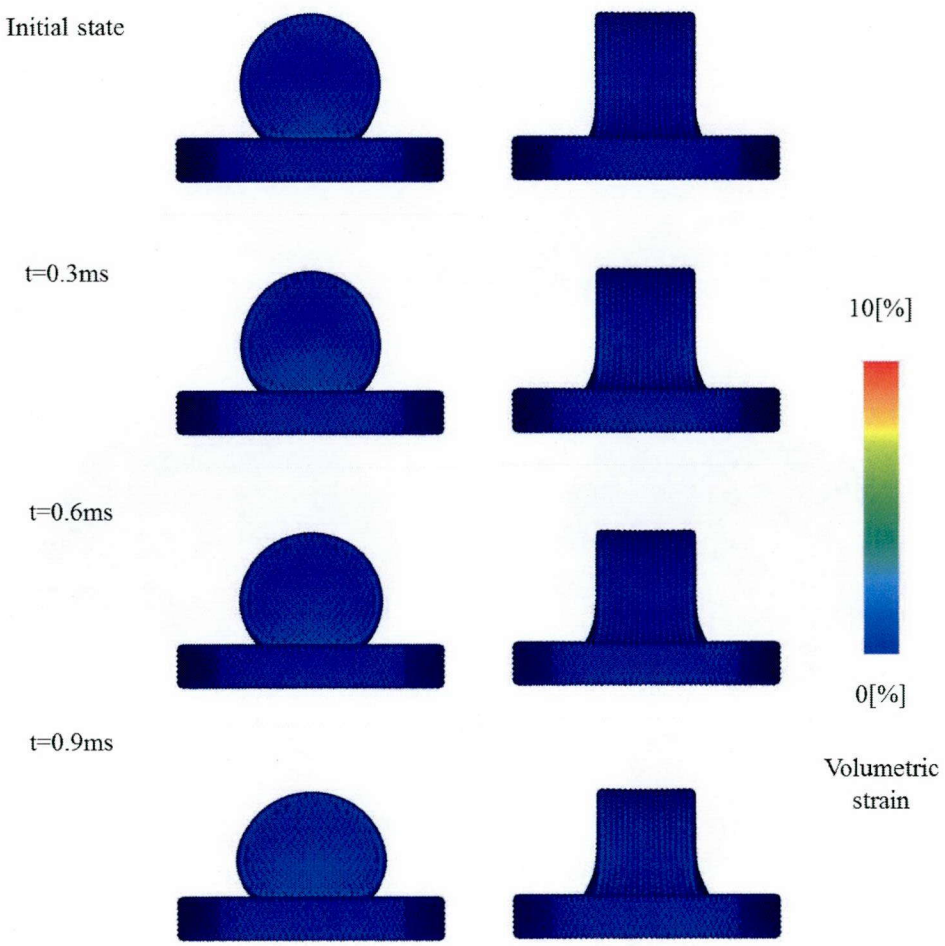



Fig. 6.22 変形の時間発展

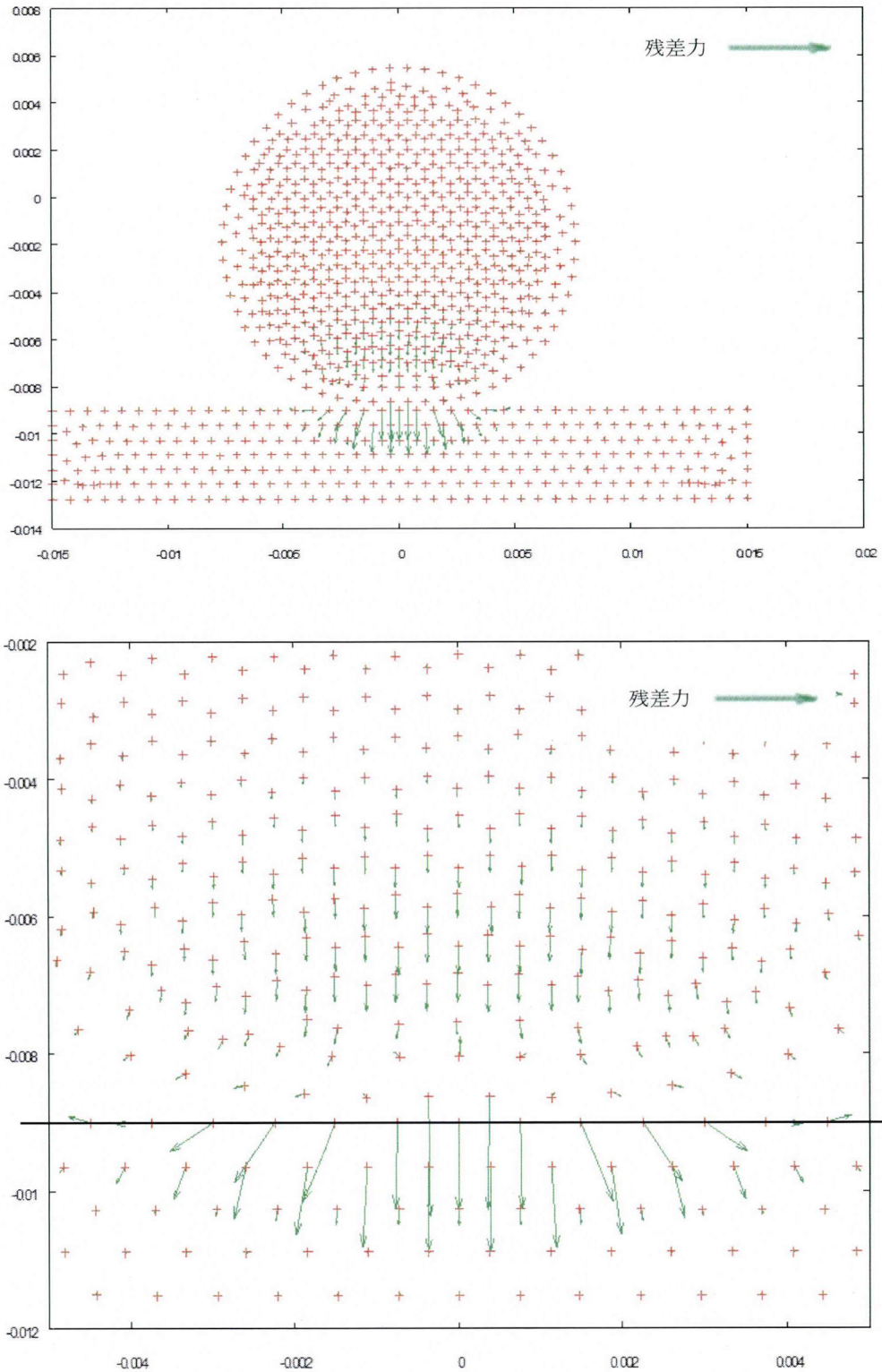



Fig. 6.23 接触判定計算結果（電磁場計算開始時）

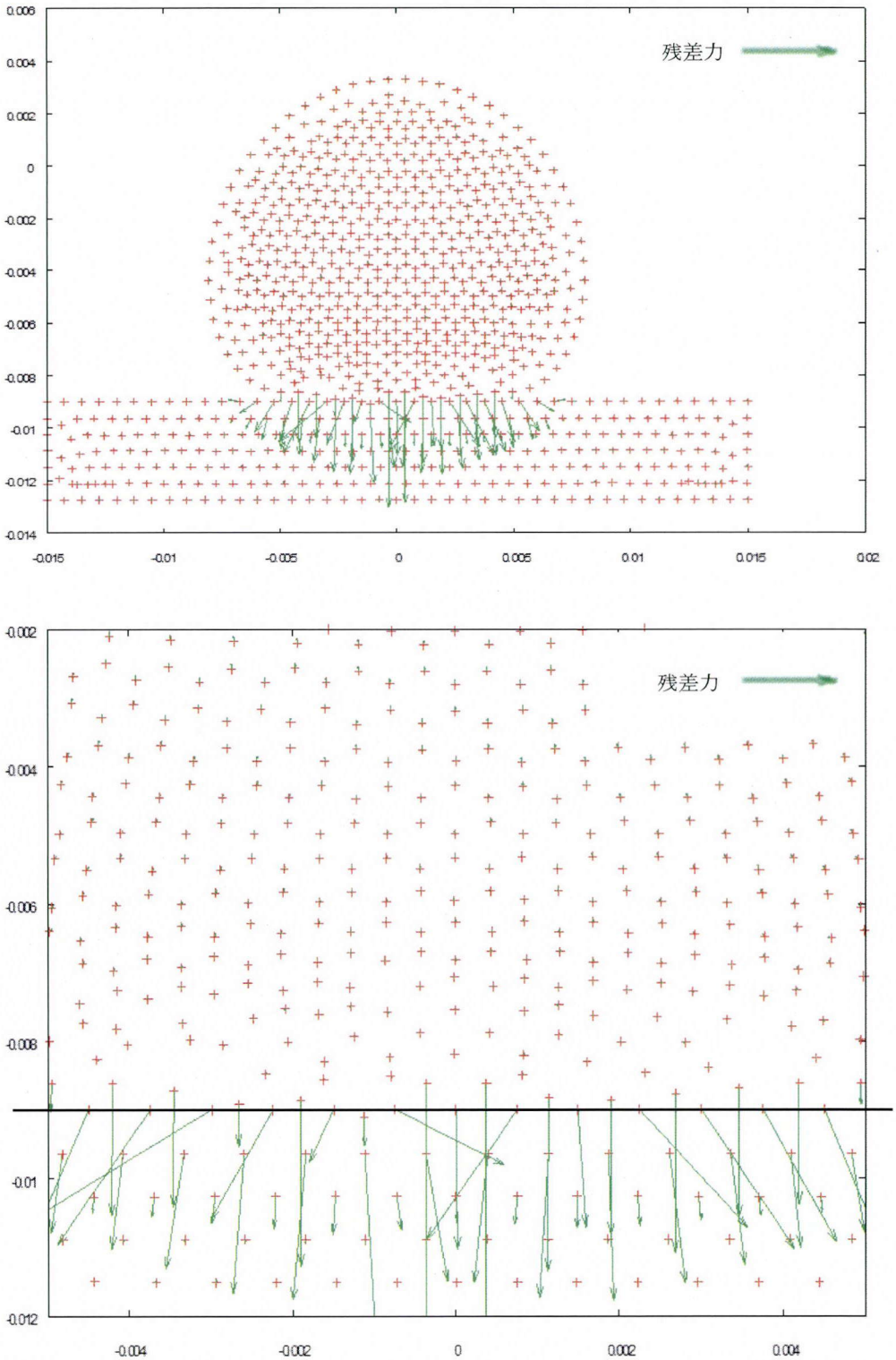
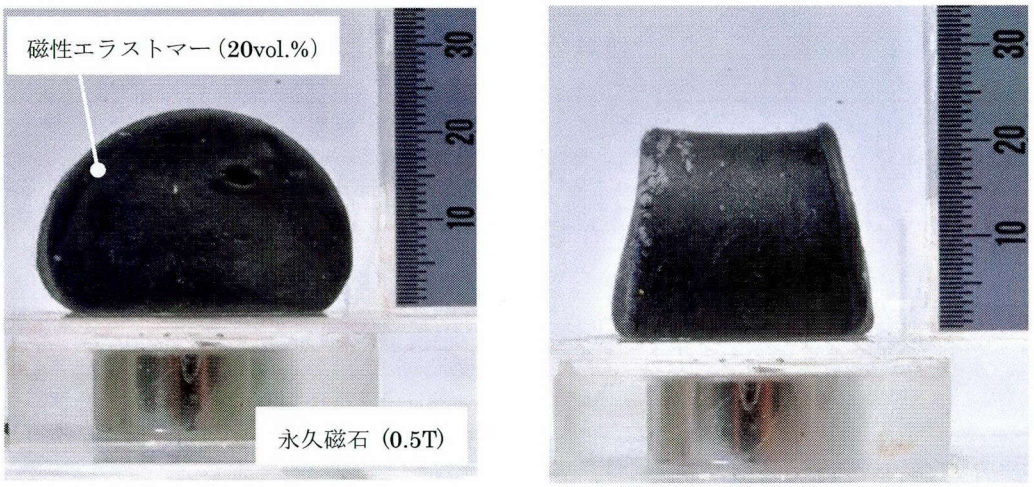



Fig. 6.24 接触判定計算結果（電磁場計算終了時）




(a) 正面からの観察図　　(b) 側面からの観察図

Fig.6.25 永久磁石による磁性エラストマーの変形

Fig. 6.25 は実際に解析条件と同様の磁化を持つ永久磁石による磁性エラストマーの変形の様子を示している．解析結果と実現象は定性的には同様の傾向を示すことが確認できるが，側面図の様子は解析結果と食い違っている．これは実際の磁性エラストマーでは透磁率の非線形性があり，線形と仮定した今回の場合に比べて磁場が強い領域では電磁力が弱く作用し，逆に磁場が相対的に弱い磁性エラストマーの上部では，強い吸引力が作用して計算結果と異なった最終形状になったためであると考えられる．

## 6.6　結言

本章では，磁性エラストマーの数値計算のために MPS 法と有限要素法の連成解析手法を提案した．解析結果と観察結果との比較によって，提案した解析手法によって定性的には同様の結果を得ることができた．弾性，磁性の非線形性を考慮したモデルでは，より一致した結果を得ることが可能だと考えられる．本手法に対しては適宜必要なモデルを追加していくことで，実際には測定が難しい磁性エラストマーの内部応力状態を検討することが可能となり，ソフトアクチュエータの磁気回路を設計するに当たって大きな手助けとなることが期待される．

# 参考文献


[1] 石川覚志：『機能性エラストマーの数値解析理論に関する研究』，京都大学学術情報リポジトリ，2009.

[2] 越塚誠一：『粒子法』，丸善，2005.

[3] Y. Okaue, G. Yoshikawa, F. Miyasaka, and K. Hirata: "Study on Analysis Method for Ferrofluid", *IEEE Trans. Mag.*, Vol.46, No.8, pp.2799-2802, 2010.

[4] G. Yoshikawa, K. Hirata, F. Miyasaka and Y. Okaue: "Numerical Analysis of Transitional Behavior of Ferrofluid Employing MPS Method and FEM", *Proc. of the 14th Biennial IEEE CEFC (Conference on Electromagnetic Field Computation)*, Chicago IL, United States, 12P9, 2010.

[5] 宋武燮，越塚誠一，岡芳明：「MPS 法による弾性構造体の動的解析」日本機械学会論文集（A 編），Vol. 71，No. 701，pp. 16-22，2005.

[6] 近藤雅裕，越塚誠一，鈴木幸人：「3 次元 MPS 法弾性体解析へのシンプレクティックスキームの適用」，日本機械学会論文集（A 編），Vol.72，No.716，pp.425-431，2006.

[7] 高橋則雄：『三次元有限要素法 －磁界解析技術の基礎－』，電気学会，2006.

[8] 高橋則雄：『磁界系有限要素法を用いた最適化』，森北出版，2001.

[9] 五十嵐一，亀有昭久，加川幸雄，西口磯春，A. ボサビ：『新しい計算電磁気学 －基礎と数理－』，培風館，2003.

[10] 本間利久，五十嵐一，川口秀樹：『数値電磁力学 －基礎と応用－』，森北出版，2006.

[11] 谷口健男：『FEM のための要素自動分割』，森北出版，2009.

# 第 7 章

# 結論

最後に，本研究で得られた結論を要約する．

緒論では，機能性材料を用いたソフトアクチュエータの研究動向およびその応用事例を概観し，それらに対する磁性流体，MR 流体，磁性エラストマーの位置づけについて述べ，本論文の対象と目的を示した．

第 2 章では，本研究で扱う物理現象の磁性流体の支配方程式を導出した．マクスウェル方程式からは磁性流体解析に対しては渦電流を考慮する磁場の支配方程式を，磁性エラストマーに対しては永久磁石を含む静磁場の支配方程式を導出した．また連続体力学の保存量の関係から，流れ場に対しては非圧縮性流体および粘弾性場の支配方程式を導出し，構成方程式とともに連続体を記述する場の方程式を示した．

第 3 章では，磁性流体を用いたソフトアクチュエータの基礎的な検討を行った．電磁場に対して 2 次元有限要素法を用いた離散化手法を，流れ場についてはレベルセット法および安定化有限要素法を用いた自由表面を含む界面挙動の数値解析手法について述べた．これらを元に電磁場から導かれる磁気力と表面張力を外力として導入し，これらを連成させた磁性流体の連成解析手法を示した．計算手法の妥当性を検証するために，交流磁場印加時の磁性流体の挙動を数値計算から求め，計算モデルと同様の実験装置を用いて検証を行った．

第 4 章では，磁性エラストマーの材料特性について述べた．まず，磁性エラストマーの作成手順を述べ，シランカップリング処理を用いた鉄粉のシリコーンへの分散特性改善について説明する．続いて平均粒子直径と粒子密度に着目し，作成した磁性エラストマーの磁化過程と弾性特性を測定結果から明らかにした．

第 5 章では，磁性エラストマーを用いたソフトアクチュエータの提案を行った．磁性エラストマーの磁気回路および磁気回路の変形を考慮した動作原理を提案し，また作成したアクチュエータの変位，発生力，減衰特性を測定した．これらの実験結果から，ソフトアクチュエータとして磁性エラストマーの適用可否について検討を行った．

第 6 章では，磁性エラストマーの数値解析手法について論述した．まず MPS 法による粘弾性場の離散化手法について論じ，3 次元辺要素有限要素法を用いた磁場計算手法を述べた．また磁場から節点力法を用いてエラストマー内部の電磁力計算方法を行う手法を示した．以上を元に粒子データと節点データの整合を取り，MPS 法と有限要素法の連成解析手法を提案した．最後に，提案した解析手法を用いて静磁場中の磁性エラストマーの挙動を数値解析し，観察結果との比較を通して解析手法の妥当性について検討を行った．

# 謝辞

本研究を行うにあたり，終始温かくご指導ご鞭撻を下さいました大阪大学大学院教授平田勝弘先生にお礼申し上げます．常日頃より議論を通じた有益なご助言を賜りました大阪大学大学院講師　宮坂史和，大阪大学大学院助教　新口昇の両先生には，深く感謝いたします．

実験設備の使用をご快諾いただくとともに，不案内なマテリアル分野で懇切丁寧なご助言をいただいた大阪大学接合科学研究所准教授　阿部浩也先生，実験手法の指導を始め様々な面でお世話になりました株式会社栗本鐵工所　野間淳一氏および室蘭工業大学助教山中信也先生，不慣れな化学実験で常に丁寧なご助言をいただいきました大阪大学大学院技術専門職員　來間和男氏に深く感謝いたします．

株式会社パナソニック　太田智浩氏，泉智博氏には，研究会等を通じて有益な助言と激励をいただきました．心より感謝申し上げます．

数値解析の面で活発な議論を通じて大阪大学大学院博士後期課程　吉川岳氏，株式会社三菱電機　岡上雄氏，ロボット工学の応用面から常に新鮮な刺激を与えてくれた大阪大学大学院博士後期課程　仲田佳弘氏には，特に厚く感謝します．また研究生活全般で常にお世話になりました平田研究室の皆様に謝意を表します．

# 研究業績一覧

## 学術論文

(1) Shunta Kashima, Fumikazu Miyasaka and Katsuhio Hirata: "Novel Soft Actuator Using Magnetorheological Elastomer," *IEEE Transaction on Magnetics*, Vol. 48, No. 4, pp. 1649-1652, April 2012.

(2) 加嶋俊大，平田勝弘，宮坂史和：「磁性エラストマーを用いたソフトアクチュエータの提案」，日本 AEM 学会誌，20 巻 1 号，pp. 47-52，2012 年 3 月.

(3) Shunta Kashima, Katsuhiro Hirata and Fumikazu Miyasaka: "Magnetic Fluid Oscillation Analysis using Finite Element Method," 電気学会論文誌.D 産業応用部門誌，132 巻 1 号，pp. 78-83，2012 年 1 月.

(4) Shunta Kashima, Katsuhiro Hirata and Fumikazu Miyasaka: "Magnetic Fluid Motion Analysis Using Finite Element Method," *Journal of the Japan Society of Applied Electromagnetics and Mechanics*, Vol.19 No.3, pp. 464-467, September 2011.

## 国際学会発表論文

(1) Shunta Kashima, Gaku Yoshikawa, Fumikazu Miyasaka, Katsuhiro Hirata and Shunta Murao: "Coupled Analysis of Particle Method and Finite Element Method for Magnetorheological Elastomers," CEFC2012 (The 15$^{th}$ Biennial IEEE Conference on Electromagnetic Field Computation), Oita, Japan, November 2012.

(2) Shunta Kashima, Katsuhiro Hirata and Fumikazu Miyasaka: "Novel soft actuator using magnetorheological elastomer," SMM20 (The 20$^{th}$ International Conference on Soft Magnetic Materials), Kos Island, Greece, September 2011.

(3) Shunta Kashima, Katsuhiro Hirata and Fumikazu Miyasaka: "Magnetic Fluid Motion Analysis Using Finite Element Method," pp. 70-71, The 6$^{th}$ APSAEM (Asia-Pacific Symposium on Applied Electromagnetics and Mechanics), Kuala Lumpur, Malaysia, July 2010.

## 国内学会発表論文

(1) 加嶋俊大，吉川岳，村尾駿太，宮坂史和，平田勝弘：「粒子法と有限要素法の連成による磁性エラストマーの大変形解析法」，リニアドライブ・回転機・家電民生機器合同研究会，電気学会，2012 年 8 月.

(2) 加嶋俊大，平田勝弘：「磁性エラストマーを用いたソフトアクチュエータの提案」，第 23 回「電磁力関連のダイナミクス」シンポジウム，電気学会，2011 年 5 月.

(3) 加嶋俊大，平田勝弘，宮坂史和：「有限要素法を用いた磁性流体の管内流れ解析」，第 22 回「電磁力関連のダイナミクス」シンポジウム，電気学会，2010 年 5 月.

破性流体および破性コンクリートを用いたソフトアクチュエータの研究

2013年1月

加嶋 俊大