Title	船舶の振動レベル推定法に関する基礎的研究
Author(s)	林, 茂弘
Citation	大阪大学, 1997, 博士論文
Version Type	VoR
URL	https://doi.org/10.11501/3129267
rights	
Note	

船舶の振動レベル推定法に関する基礎的研究

平成９年

林　　茂弘

船舶の振動レベル推定法に関する基礎的研究

平成９年

林　　　茂　弘

目　次

1章　緒論

1．1　本研究の背景及びその目的

船舶の振動解析を行う上で、流体による影響を正確に見積もることは非常に重要なことである。しかし、その影響を考慮することはそれほど簡単なことではなく、船殻の減衰現象が未解明であることもあって、正確な振動レベルを推定することは従来不可能とされていた。そして、最も重要なテーマであるはずの振動レベル推定法に関する研究はほとんど行われず、固有振動数を推定するための研究だけが活発に行われてきた。

これに対して、本研究では、船舶の振動レベル推定法を確立することを目的としている。この目的を達成するために新しい解析方法を構築し、これによって満足のいく推定が可能となることを確認した。この方法は、いまだ模型実験で確認された段階でしかないが、その解析理論について詳しく論じておくことは重要なことであり、それをまとめることを本論文の主題としている。

1．2　これまでの研究動向

船舶の振動特性を推定するために解決せねばならない難しい問題は大きく分けて２つある。第１は、巨大で複雑な構造物であり、自重を上回る貨物を搭載することから生じる問題で、構造体としての振動特性を把握し難いことである。第２は、船舶が海面に浮かぶことから生じる問題で、流体と構造物とが複雑に連成するために航海時の振動特性が空中でのそれとは全く異なることである。以下に、振動分野における研究動向を概説する。

第１の問題に対しては、古くから、中央横断面の断面慣性モーメントを用いて船体を一本の梁とみなし、その節振動を解析する手法が用いられてきた。連続系として梁の振動問題を捉え、微分方程式と境界条件から境界値問題を形成して固有値及び固有関数を求めた後、固有関数を重ね合わせて特解を得る手法である。いくつかの固有関数を基底関数として採用し、基底関数を重ねあわせた試験関数を用いて構造物を近似的に解析する方法は、今日では重み付き残差法として体系化[1),2)] *(Brebbia,1978,1980)* されているが、古くはGalerkin法やRayleigh-Ritz法などが有名である。またこれらの方法は、多少複雑な構造物で固有関数を求めにくい場合でも適切な近似関数を仮定して解くことができる利点を備えていた。このような経緯から、境界条件を満足する内挿関数を用いて構造要素をマトリクスで表現する方法が生まれ、1960年代になると有限要素法（Finite Element Method,以降FEMと略記）として脚光を浴びることとなった。元来FEMは強度解析を目的として開発されてきた[3)] *(上田,1968)* ものであるが、強度解析用の有限要素モデル（Finite Element Model,以降FEmodelと略記）を振動解析にも流用することができるため、1970年代になると、FEMの発展[4),5)] *(Zienkewicz,1977;鷲津,1981)* 及び、固有値解析方法の発展[6)] *(戸川,1971)* によって、振動解析技術は飛躍的に進歩した。そして、1980年代初めには線形FEM解析はほぼ完成され、コンピュータの発達に

合わせて大次元のマトリクス計算が行われるようになり、最近では全船FEM解析はとくに珍しいものではなくなってきた。しかし、FEmodelを作成する際にかかる手間が難点となっており、特に強度解析においては応力集中部をさらに詳細なメッシュ分割とするのが通例で、その手間を省くための研究[7)] *(川村,1994)*が続けられている。また、振動解析においてはそれほど詳細なメッシュ分割を必要とはしないものの、工数の都合から無視する要素や等価な要素に置き換えるといった技術的ノウハウが必要となっている[8)] *(笹島,1995)*。

一方1970年代には、FEMを用いた振動解析の発展とともに、不減衰系の固有値解析により得られる固有ベクトルが直交性を持つことを利用して運動方程式を非連成化させ、主座標を固有ベクトルで構成するモード解析手法が発達[9)] *(長松,1985)*してきた。これは連続系において固有関数を重ねあわせたものと同じであって、FEMの様な離散系の解析においては固有ベクトルにその役割を担わせたものである。固有振動数と固有モードを得るためだけならば不減衰系の実固有値解析で充分であるが、振動レベルを推定するためには減衰マトリクスを与える必要がある。ところが、実際の減衰現象を減衰マトリクスで表現することは難しいために、FEMにて振動応答の解析を行う場合には比例粘性減衰系を仮定[10)] *(Caughey,1960)*する方法が一般的に採用されている。比例粘性減衰はRayleigh減衰とも呼ばれるもので、これを仮定することにより、実固有値解析結果の固有ベクトルが減衰マトリクスに対しても直交性を保つこととなる。これにより、モーダルパラメータが完全に定式化され、実験的に等価な減衰(モード減衰比)を定めるための曲線適合[11)] *(Klosterman,1971)*の手法が開発されることとなった。その後、一般粘性減衰系[12)] *(Lancaster,1966)*のモーダルパラメータ[13)] *(VanLoon, 1974)*あるいはマトリクス[14)] *(大熊,1985)*を同定する手法などが開発された。

1980年代になると、モード解析を用いた構造変更解析[15)] *(Formenti,1981)*や感度解析[16)]～[18)] *(Fox,1968;Nelson,1976;Vanhonacker,1980)*の手法が発展し、simplex法を代表とする線形計画法と組み合わせた最適設計が注目されるようになった。国内においてもそれらの有用性を示す研究成果が活発に発表され、自動車の分野では振動レベルを最適化する手法[19),20)] *(著者,1993,1994)*も利用されるようになった。1990年代になると、モード解析を利用して構造と音場の連成問題を解く[21)] *(萩原,1990)*こともできるようになり、モード合成法[22)] *(馬,1991)*や感度解析[23)] *(萩原,1991)*がさらに発展することとなった。一方、船舶の分野でもモード解析は利用[24),25)] *(香川,1980;著者,1995)*されてはいるものの、大量生産品ではないこと、そして前記第２の問題すなわち流体との連成影響が分離できていないこと等によりモード減衰比の取り扱いが難しく、振動レベルを推定できる段階までには至っていないのが現状である。

次に前記第２の問題について述べる。1700年代には流体を理想流体としたEulerの運動方程式が、1800年代には粘性流体に対するNavier-Stokes方程式が明らかになっており、著名な数学者達が活躍した時代でもあって、球の付加質量効果[26)] *(Stokes,1843)*や無限平板の水平振動による粘性流体の挙動[27)] *(Stokes,1850)*について解析されている。 この年代には船舶の

振動について論じた文献は殆ど見あたらず、船体振動の加振源について論じた文献[28)] *(Schlick,1884)*が最初のものといわれている。

1900年代になると回転楕円体の剛体振動による付加質量効果[29)] *(Lamb,1932)*や、等角写像を用いることにより、各種断面に対する付加質量係数[30)] *(Lewis,1929)*も計算されている。*Lewis*[30)] は実際の船舶に近い断面について扱っており、さらに付加質量係数のチャートを載せるなど極めて有用な文献で、回転楕円体の弾性振動による付加質量効果についても述べられている。また、３次元修正係数が初めて定義された文献でもある。同時期に、Lewis[30)] が上下方向並進変位のみを扱ったのに対して、回転変位を考慮[31)] *(Taylor,1930)*した解析も行われている。その後、両者の長所をとり入れて４節振動まで扱われた[32)] *(松浦,1960)*。回転楕円体の他にも丸棒[33)] *(熊井,1962)*などの一様断面棒やその水平振動[34)] *(熊井,1960)*について扱った論文が多数あり、この頃には、振動モードを仮定して解析的に流体領域を解く方法はほぼ完成されたといえる。また、水深の影響について論じた文献も多い。矩形断面[35)] *(Koch,1933)*や、Lewis form 断面[36)] *(Prohaska,1947)*を用いた実験が行われ、円形断面について側壁の影響をも考慮した解析[37)] *(吉識,1948)*や回転楕円体の浅水影響に関する解析[38)] *(Havelock,1953)*が行われた。

一方、FEMと並んで評される境界要素法（Boundary Element Method,以降BEMと略記）の基礎も着々と固められていた。ポテンシャル問題をsource分布に関する積分方程式で表わせることは文献[29)] *(Lamb,1932)*でも述べられているが、field point を船体表面に取った場合については文献[39)] *(Kellogg,1929)*が詳しい。これらを基礎としてsource分布に関して積分方程式を解く方法[40)] *(Hess,1964)*が開発された。この方法は複雑な船型に対しても数値計算できることが特長で、種々の境界条件を満足するGreen関数を用いればなお一層その威力を発揮するために、FEM同様にコンピュータの発達と合わせて発展し、特異点分布法（Singularity Distribution Method, 以降SDMと略記）と呼ばれて定着することとなった。 Hess[40)] 以降、SDMを用いた研究は造波と振動の両分野で活発に行われ、特に造波分野では新しいGreen関数[41)] *(一色,1975)*も次々と開発され、高次要素やスプライン補間[42)] *(高木,1993)*を用いた高精度化の検討もなされている。その中で、有限水深での振動問題に対して利用できるGreen関数[43)] *(菅,1985)*も研究されたが、より優れたGreen関数計算法を用いることによって各種断面及び回転楕円体の浅水影響[44)] *(著者,1988)*も明らかにされた。なお船舶の分野ではSDMと呼ばれているが、今日では、境界要素間接法と呼ばれる分類に属する手法である。

上記文献は全て、流体領域を解く際に振動モードを仮定する方法で、流体と構造との連成振動については扱い得ないものであった。ところが、これを仮定する必要のない手法が開発され、船舶における振動解析は新たな曲面を迎えた。即ち、SDMによって流体領域を付加質量マトリクスとして定式化する手法[45),46)] *(根木,1980,1982)*の出現である。付加質量マトリクスを、船体構造のFEmodelから計算される質量マトリクスに組み込むことによって、流体と構造の連成振動解析が可能となった。これより以前には、流体領域もFEmodelで表して

解析を行う手法が用いられていたが、開領域問題には不向きであったため、SDMとFEMを結合させた解析手法は急速に普及した。以降、この手法を用いた解析が多数行われ、従来よりも相当正確な固有振動数を推定[47] *(松浦,1984)*できるようになった。そして、SDMの計算精度をさらに向上させる研究が続けられ、二重吹き出しも利用[48] *(笹島,1995)*されるようになった。また、FEM実固有値解析結果を利用してモード解析と組み合わせる[49] *(Ohta,1985)*ことにより、船殻設計における計算負担を減じる方法も考えられている。さらに、計算の際の節点数を減じる工夫[50] *(著者,1996)*なども行われている。

上述の如く、数多くの研究により船舶の固有振動数に関わる問題は随分と解明されてきたが、振動性能として非常に重要な要素、すなわち振動レベルの推定については未だ解決されていない難問となっている。これを推定するためには減衰現象を解明せねばならいが、古くから研究されているもののその数は大変少ない。流体の粘性と発散波そして構造の内部減衰についての解析[51] *(妹澤,1936)*や、それらと積み荷による影響[52] *(山本,1965)*、実験的に減衰率を算定する方法[53] *(熊井,1957)*などの研究が行われているが、３つの文献共に減衰の主要因として異なるものを主張している。それだけ難しい問題なのである。そして、造波減衰に関する研究を除けば、船舶の振動問題に関する減衰の研究は、著者の知る限りこの３つだけである。前二者[51],[52]は共に粘性流体の挙動をStokesの無限平板[27]にならって評価しており、流速方向の圧力勾配を無視する結果となっているが、著者はこれを無視するべきではないと考える。

以上の分析より、著者は、減衰現象を解明するためにはその因子をひとつずつ解析することが必要であると認識し、流体の粘性に着目して研究を行った。

本論文は、著者の発表した論文[19],[20],[25],[44],[50]の内容を基礎として、付加質量マトリクスの新しい定式化および粘性流体の理論を用いた新しい減衰マトリクスの定式化[54]、BEMと実験モーダル解析を結合させた新しい振動レベル推定法[55]とその特性[56]、さらに、それらを合わせて高い精度で船舶の振動レベルを推定する方法[57]についてまとめたものである。

１．３　本論文の構成

本論文で述べる振動レベル推定法は、幾つかの新しい要素技術から成るものであるから、それらの要素技術ごとに章を作成してその詳細を述べることにする。

第２章では、流体の運動を解析するにあたって必要不可欠となる基礎方程式の概観を行い、ポテンシャル領域と振動境界層領域に分けて解析を行うことの妥当性について述べている。流体領域をポテンシャル問題と捉えれば付加質量マトリクスを得ることとなり、これを粘性流体と捉えて振動境界層を考えれば付加減衰マトリクスを得ることになる。

第３章では、無限水深、浅水域、岸壁浅水域のGreen関数、およびその幾何学的構成について述べ、立体内角を計算する便利な方法を示している。さらに、付加質量マトリクスに対して従来よりも合理的に等価節点力を表現し、あるいは節点数を減らして解析を行う新しい定式化を行い、その妥当性を解析解と比較しながら確認している。

第４章では、従来未解明であった減衰現象の一端を解明すべく、振動境界層における散逸エネルギに着目した新しい減衰マトリクスについて述べている。振動境界層における速度分布を解析的に決定したのち層内で散逸されるエネルギを定式化すれば、減衰マトリクスを導くことができることを示し、その妥当性を確認するために模型実験を行って深水域における減衰現象を解明している。浅水域での現象解明は課題として残ったが、速度分布修正係数を導入すれば、浅水域でも利用できるマトリクスとなることを述べている。

第５章では、連成振動解析とモード解析の現状を概観した後、付加質量マトリクスおよび付加減衰マトリクスを実験計測点まわりに縮小する方法を示し、これをモーダル構造変更解析と組み合わせた振動レベル推定法について述べている。この新しい手法を用いて具体的な推定計算を行った後、実験結果と比較して、振動レベルの推定は可能となることを示している。

第６章では、本研究で得られた結果を総括している。

２章　流体の支配方程式

船体振動によって誘起される流体の運動を非圧縮性のNavier-Stokes方程式で表現し、これを無次元化して流場全体を概観すれば、その大部分をポテンシャル領域と捉えられること、および船体表面のごく近傍に振動境界層が存在することを知ることになる。

ポテンシャル領域を解いて付加質量マトリクスを得る手法は従来から知られており、船舶における振動解析の基本事項となっている。一方、振動境界層の存在はあまり知られておらず、この領域を解けば付加減衰マトリクスを得られることを著者が初めて導いた。

本章では振動境界層の概念を導入することを目的とし、Navier-Stokes方程式を無次元化して、対流項と粘性項による影響について述べるところから始める。

２．１　方程式の線形化

非圧縮性のNavier-Stokes方程式は、

$$\frac{D\mathbb{V}}{Dt} = \mathbb{B} - \frac{1}{\rho}\,grad(P) + \nu\,\nabla^2\mathbb{V} \qquad (2.1.1)$$

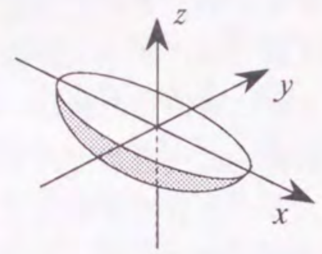


Fig.2.1.1　直角座標系

である。ここで、$\mathbb{V}(x,y,z;t)$は流体粒子の速度、$\mathbb{B}(x,y,z;t)$は流体粒子の単位質量に作用する物体力（即ち加速度）、$P(x,y,z;t)$は点(x,y,z)における圧力を示す。また、ρ及びνはそれぞれ流体の質量密度、動粘性係数を示し、∇^2はLaplace演算子を表す。ただし、座標変数(x,y,z)は直角座標系(Fig.2.1.1)にとるものとして、$D\mathbb{V}/Dt$は速度$\mathbb{V}(x,y,z;t)$の実質微分を表す。

上式左辺は対流項を含んでいて強い非線形性を示し、解として外力周波数成分（以降、単調波成分と呼ぶ）の他に倍調波成分も含まねばならず、さらには、その他の調波成分も含む必要がある。従って、この方程式をそのまま解くのではなく、線形近似することができれば便利である。そこで、線形化を検討するために上式左辺の実質微分項を無次元化する。代表長さとして船の全長L、および船の最大振幅Xを採用する。そして、座標変数(x,y,z)を全長Lで、流体速度$\mathbb{V}(x,y,z;t)$を最大振幅Xで、時間tを角振動数ωで無次元化して

$$x = L\,x_o \quad , \; y = L\,y_o \quad , \; z = L\,z_o \qquad (2.1.2)_{-1}$$

$$\mathbb{V} = \omega X\,\mathbb{V}_o \qquad (2.1.2)_{-2}$$

$$t = \frac{1}{\omega}\,t_o \qquad (2.1.2)_{-3}$$

と表す。これらを用いて実質微分項を無次元化すれば、

$$\begin{aligned}\frac{D\mathbb{V}}{Dt} &= \frac{\partial\mathbb{V}}{\partial t} + V_x\frac{\partial\mathbb{V}}{\partial x} + V_y\frac{\partial\mathbb{V}}{\partial y} + V_z\frac{\partial\mathbb{V}}{\partial z}\\ &= \omega^2 X\frac{\partial\mathbb{V}_o}{\partial t_o} + \frac{\omega^2X^2}{L}\left(V_{ox}\frac{\partial\mathbb{V}_o}{\partial x_o} + V_{oy}\frac{\partial\mathbb{V}_o}{\partial y_o} + V_{oz}\frac{\partial\mathbb{V}_o}{\partial z_o}\right)\\ &= \omega^2 X\left\{\frac{\partial\mathbb{V}_o}{\partial t_o} + \frac{X}{L}\left(V_{ox}\frac{\partial\mathbb{V}_o}{\partial x_o} + V_{oy}\frac{\partial\mathbb{V}_o}{\partial y_o} + V_{oz}\frac{\partial\mathbb{V}_o}{\partial z_o}\right)\right\} \qquad (2.1.3)\end{aligned}$$

を得る。振動問題ではX/Lは極めて小さい量であるから、右辺第２項の対流項を無視できることになり、Navier-Stokes方程式を線形化してもよいことを示す式となっている。即ち、運動方程式として

$$\frac{\partial\mathbb{V}}{\partial t} = \mathbb{B} - \frac{1}{\rho}\,grad(P) + \nu\,\nabla^2\mathbb{V} \qquad (2.1.4)$$

を得ることになる。さらに、単調波成分のみを考慮すれば物体力$\mathbb{B}(x,y,z;t)$も無視することができて、上式は次のように簡略化される[27] (Stokes,1850)。

$$\frac{\partial\mathbb{V}}{\partial t} = -\frac{1}{\rho}\,grad(P) + \nu\,\nabla^2\mathbb{V} \qquad (2.1.5)$$

これはNavier-Stokes方程式(2.1.1)から物体力の項と対流項を除去したもので、拡散項と圧力項からなる方程式である。振動問題においては上式が全ての出発点であり、流体の粘性を考慮する場合の支配方程式である。以降、これをStokes近似支配方程式と呼ぶことにする。

2．2　渦度の拡散方程式

Stokes近似支配方程式(2.1.5)の両辺に対して*rotation*をとれば、

$$\frac{\partial \mathbb{W}}{\partial t} = \nu \; \nabla^2 \mathbb{W} \qquad (2.2.1)$$

を得、渦度$\mathbb{W}(x,y,z;t)$が拡散係数νなる拡散方程式を満足することを知る。前節と同様に無次元化すれば、

$$\mathbb{W} = \frac{X}{L}\,\omega\;\mathbb{W}_o \qquad (2.2.2)$$

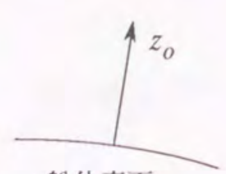
にて無次元化渦度$\mathbb{W}_o$を定義できるから、渦度の拡散方程式(2.2.1)は、

$$\frac{\partial \mathbb{W}_o}{\partial t_o} = \frac{1}{Rs}\,\nabla_o{}^2\,\mathbb{W}_o \qquad (2.2.3)$$

となる。上式で$\nabla_o{}^2$は正式な記号ではないが、位置微分を無次元座標変数(x_o,y_o,z_o)に関して行うLaplace演算子を表す。また、Rsは振動Reynolds数を示し、

$$Rs = \frac{\omega L^2}{\nu} \qquad (2.2.4)$$

である。(2.2.3)式は無次元化渦度$\mathbb{W}_o$に関する拡散方程式となっており、拡散係数は$1/Rs$である。拡散方程式の特性として、$1/Rs$が大きい場合には$\mathbb{W}_o$は広い範囲に拡散し、$1/Rs$が小さい場合には$\mathbb{W}_o$は狭い範囲にしか拡散しないことが知られている。今、座標原点を船体表面にとってFig.2.2.1の如く法線方向流体向きにz_o軸をとることにすれば、z_oが$1/\sqrt{(Rs)}$のオーダーである表面近傍の場合には拡散領域とみなすことができ、z_oのオーダーがこれよりも大きい場合にはもはや拡散しない領域とみなすことができる。本論文では振動Reynolds数Rsが非常に大きい場合を扱うことから、$1/\sqrt{(Rs)}$は小さな値となって、船体表面のごく近傍の狭い範囲だけが$\mathbb{W}_o$の拡散領域となる。そして、無限遠方では流体は静止しているものと考えることができるから、z_oが適当に大きければ渦度もゼロとみなすことができる境界条件を得ることになる。すなわち、



$$\mathbb{W}_o = 0 \qquad (z_o \rightarrow \infty) \qquad (2.2.5)$$

Fig.2.2.1　z_o軸の方向

である。

さて、実船の振動Reynolds数Rsのオーダーを示しておこう。全長Lを$200[m]$、振動数を低めにみて$1[Hz]$、動粘性係数νを$1.1\times10^{-6}[m^2/s]$とすれば、Rsは2.3×10^{11}となる。これはかなり大きな値である。また、本論文で用いた模型についても同様に計算すれば、全長$1.1[m]$、振動数$350[Hz]$として、Rsは2.4×10^{9}である。これもかなり大きな値である。よって、振動問題では、拡散係数$1/Rs$は非常に小さな値となることがわかる。

では、渦度拡散の様子を図示するために、１次元拡散方程式の一般解について示しておこう。ただし、ここで考えているのは振動問題であるため、波数$k(>0)$を虚軸上にとる。また、Fig.2.2.1の如く$z_o=0$は船体表面上にとるものとする。
１次元拡散方程式を

$$\frac{\partial \zeta_o}{\partial t_o} = \frac{1}{Rs}\,\frac{\partial^2 \zeta_o}{\partial z_o{}^2} \qquad (2.2.6)$$

とするとき、その一般解を変数分離して表せば、

$$\zeta_o = C\,e^{-(1+i)\sqrt{\frac{Rs}{2}}\,k^2 z_o}\;e^{ikt_o} \qquad (2.2.7)$$

を得る。ただし、Cは任意定数で、(2.2.5)式より$z_o=\infty$にて$\zeta_o=0$となる条件を用いている。

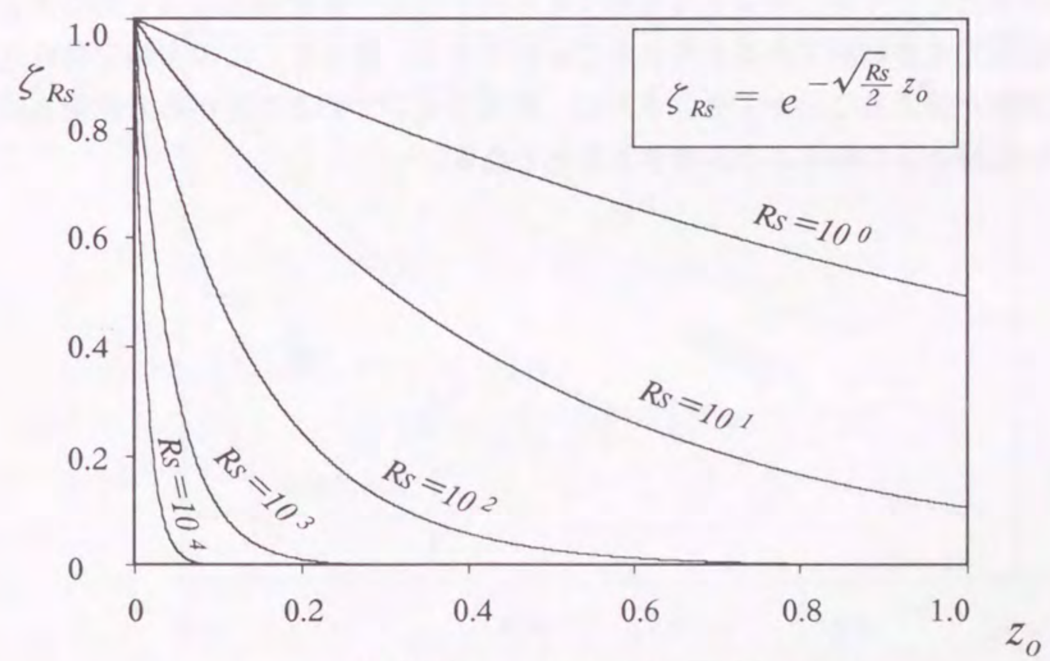


Fig.2.2.2　拡散係数$1/Rs$による渦度拡散の様子

ζ_oの分布はeの指数実数部分でほぼ決定されるから、単調波成分のみを考えることとして波数kを1とすれば、その分布関数ζ_{Rs}を次式のように定義できる。

$$\zeta_{Rs} \;=\; e^{-\sqrt{\frac{Rs}{2}}\,z_o} \qquad (2.2.8)$$

振動Reynolds数Rsをパラメータとした分布関数ζ_{Rs}を用いることによって、渦度拡散の様子をFig.2.2.2に示した。同図より、Rsが大きいほど渦度の拡散範囲は狭くなることがわかる。さらに、$Rs=10^4$の場合を観察すれば、$z_o=0.1$のときにはほぼ完全に$\zeta_{Rs}=0$となっており、渦度は船体表面$z_o=0$の近傍のみに分布していることがわかる。また、ここでは示していないが、$Rs=10^9$（模型船）及び$Rs=10^{11}$（実船）の場合には、分布曲線がほぼ完全に縦軸と重なってしまうほどに拡散範囲は狭くなる。なお、$z_o=1$は船の全長Lを表す。

渦度拡散方程式(2.2.1)は３次元のラプラス演算子で表されたものであるから、１次元での検討はその概観を調べたにすぎないものである。しかし、これによって粘性による影響が及ぶ範囲が狭い、即ち３次元的にみれば、薄いことを具体的に理解することができる。

以上のことから、船体表面においては必ず渦度が生じ、それが次第に流体領域に拡散していくこと、そして、拡散方程式の特性から渦度拡散の範囲は拡散係数$1/Rs$、即ち振動Reynolds数Rsによって決定されること、もしも粘性がなければ拡散係数はゼロとなって渦度の拡散は起こらないことがわかる。従って、渦度は粘性によって拡散されるといえるから、渦度の拡散領域では粘性による影響が大きく現れ、粘性によるエネルギ散逸も大きいこととなる。渦度がほとんどゼロとみなせる領域ではもはや渦度の拡散は起こっておらず、粘性による影響が無視できる領域であると考えることができる。従って、この領域では非圧縮、非粘性の理想流体と捉えることができ、さらに、渦度がゼロであることから非回転も加わってポテンシャル領域として扱うことができることとなる。

２．３　振動境界層

前節のような１次元での検討については無限平板の振動問題を解いた文献[27](Stokes,1850)が有名である。船体表面にあって、薄く、そして粘性による影響が無視できない流体領域の存在はこれ以降知られるようになり、振動境界層(Periodic Boundary Layer)と呼ばれている。その様子をFig.2.3.1に示す。

さて、Fig.2.2.2にて粘性による影響が及ぶ範囲は振動Reynolds数Rsのみで決定されることを示したが、ここでは、$Rs=10^9$及び$Rs=10^{11}$の場合をFig.2.3.2に示す。$Rs=10^{11}$について観察すれば、$z_o=0.3\times10^{-4}$のときにはほぼ完全に$\zeta_{Rs}=0$となっていることがわかる。このような値をδ_oとすれば、これが振動境界層の無次元化厚さであるといえる。無次元化厚さδ_oと実際の厚さδとは

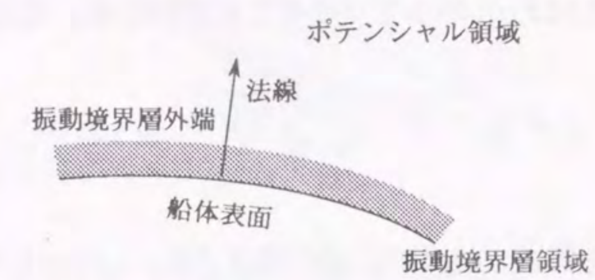


Fig.2.3.1　流体領域の分離

$$\delta = \delta_o L \qquad (2.3.1)$$

なる関係で結ばれる。

いかなる振動Reynolds数に対しても公平に境界層厚さを決定するために、定数α_oを定義して、

$$\zeta_{\alpha_o} = e^{-\alpha_o} \qquad (2.3.2)$$

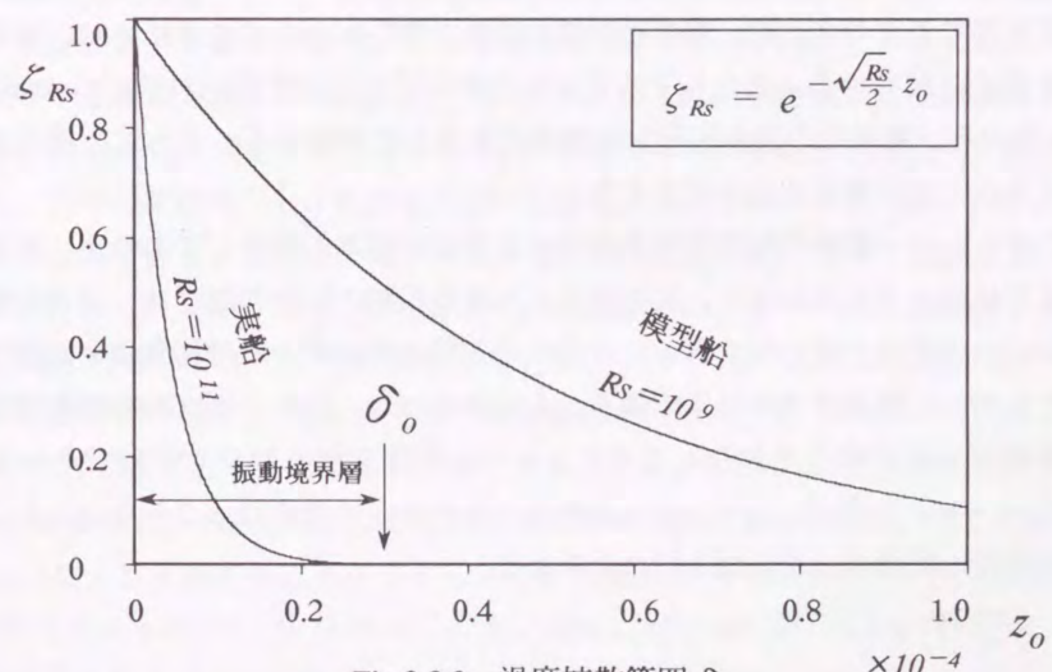


Fig.2.3.2　渦度拡散範囲δ_o

を計算し、ξ_{Rs}がこれに等しくなるようなz_oをもってδ_oとするならば、(2.2.8)式より

$$\delta_o = \alpha_o \sqrt{\frac{2}{Rs}} \qquad (2.3.3)$$

を得る。これより、層の厚みδ_oは$1/\sqrt{(Rs)}$に比例するもので、振動Reynolds数Rsが大きくなるほどδ_oが小さくなることがわかる。ここで、(2.3.1)式を用いれば、

$$\delta = \alpha_o \sqrt{\frac{2\nu}{\omega}} \qquad (2.3.4)$$

を得る。従って、層の厚さδは$\sqrt{(\nu/\omega)}$に比例することもわかる。

さて、$Rs=10^{11}$の場合に戻って層の厚さδを計算してみると、$\delta_o=0.3\times10^{-4}$を(2.3.1)式に代入して、$\delta=6\times10^{-3}[m]$となる。つまり、全長200[m]、振動数1[Hz]の船で、振動境界層の厚さは6[mm]ということになる。

このように振動境界層は非常に薄い層であるから、層内で、法線方向流体速度の法線方向変化を無視して差し支えないものと考えられる。即ち、船体表面での法線方向流体速度は振動境界層を介して変化せずに層外に伝わるものと考える訳である。この法線方向流体速度を境界条件として与えれば、理想流体領域の振動問題を解くことができる。この考え方がいわゆるポテンシャル問題の解法である。ポテンシャル問題を解けば、境界層外端の圧力分布を得ることができる。境界層が非常に薄いことから、この圧力が層内で法線方向に変化せずに船体表面に達すると考えれば、境界層外端の圧力と等しいとおくことにより、層内での圧力を決定することができる。こうして決定された層内での圧力を用いれば、Stokes近似支配方程式(2.1.5)から、層内での流体速度分布を決定することができる。さらに、層内流体速度から散逸エネルギを計算することができる。

上記の考え方は、船舶の推進性能を評価する方法と基本的に同じであるが、通常、散逸エネルギまでは評価されていない。従来扱われてきた船舶の振動問題では、固有振動数を推定するために船体表面に働く圧力あるいは流体の運動エネルギから付加質量を計算するのが通例で、ここでも、散逸エネルギまで扱うことは無かった。即ち、固有振動数を推定するためには、振動境界層の存在を無視したポテンシャル問題を解くだけで充分であった。ところが、振動レベルまで推定しようとすると散逸エネルギも考慮せねばならないために、振動境界層での挙動も評価する必要が生じた訳である。

3章　付加質量マトリクスの新しい定式化

3．1　座標系および仮定

右手系にて水線面上にx,y軸を、鉛直上向きにz軸をとって絶対座標系とし、船体表面から流体領域向きに立てた法線をn、単位法線ベクトルを$\boldsymbol{n}$とおく（Fig.3.1.1）。また、水深をh、岸壁からの距離をwとし、船体の全長、全幅、喫水をそれぞれ、L、B、Tとおいた様子をFig.3.1.2に示す。なお、同図は回転楕円体模型が浮かぶ様子を表すもので、bはその半幅を示す。

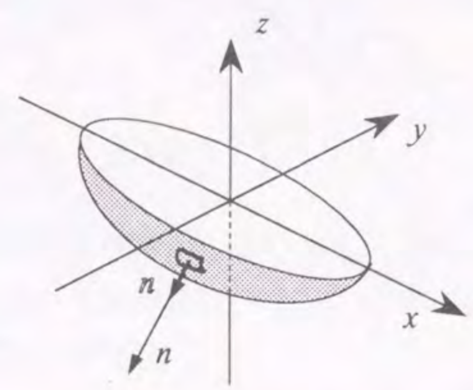


Fig.3.1.1　絶対座標系

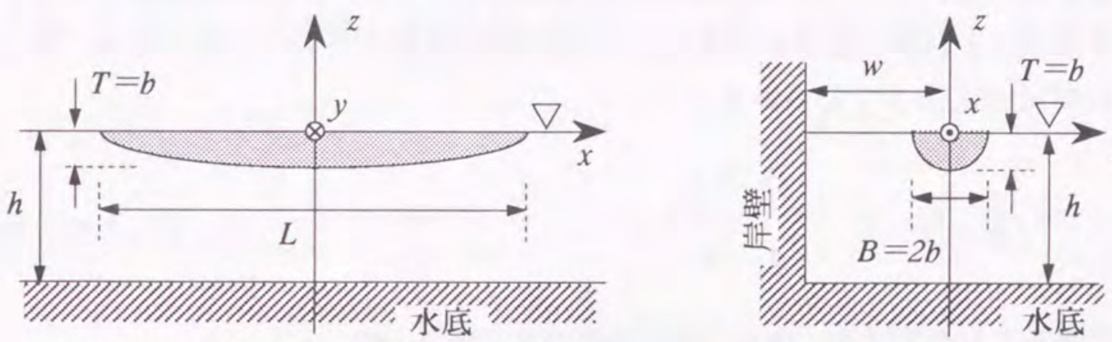


Fig.3.1.2　回転楕円体模型

本論文では船体表面をメッシュ分割した離散化解析を行うために、メッシュ要素上における局部座標系を定義する必要がある。ここでは、要素上に任意点Qをとり、これを原点とした局部座標系を２種類定義する（Fig.3.1.3）。まず、第１の局部座標系は曲線座標系と密接に関係する。要素表面を表す位置ベクトルrを曲線座標系のパラメータξ_1,ξ_2で微分することによって、２つの接線ベクトルを得ることができる。それぞれの単位ベクトルをe_1,e_2とすれば接平面が定義できる。また、法線ベクトルをその外積$e_1\times e_2$によって定義でき、単位法線ベクトル$(e_1\times e_2)\ /\ |e_1\times e_2|$を$e_3$とおく。この３つのベクトルにより構成される座標系が第１の局部座標系であり、その座標軸を$1,2,3$と表す。図中のθは$1,2$軸の成す角であり、この座標系では一般に$1,2$軸が直交せず斜交座標系となる。さらに、この座標系の原点と$1,3$軸とを共有するデカルト座標系が定義できる。これが第２の局部座標系であり、その座標軸を$\hat{x},\hat{y},\hat{z}$と表せば、1軸と$\hat{x}$軸、3軸と$\hat{z}$軸がそれぞれ共通のものとなる。残りの座標軸$\hat{y}$は外積$e_3\times e_1$によって定義することができる。この局部座標系は直交座標系であるために、$\hat{y}$軸方向の単位ベクトルは$e_3\times e_1$となる。なお、$\hat{y}$軸は2軸とは一致しないけれども、e_1,e_2によって定義される接平面上に存在することとなる。

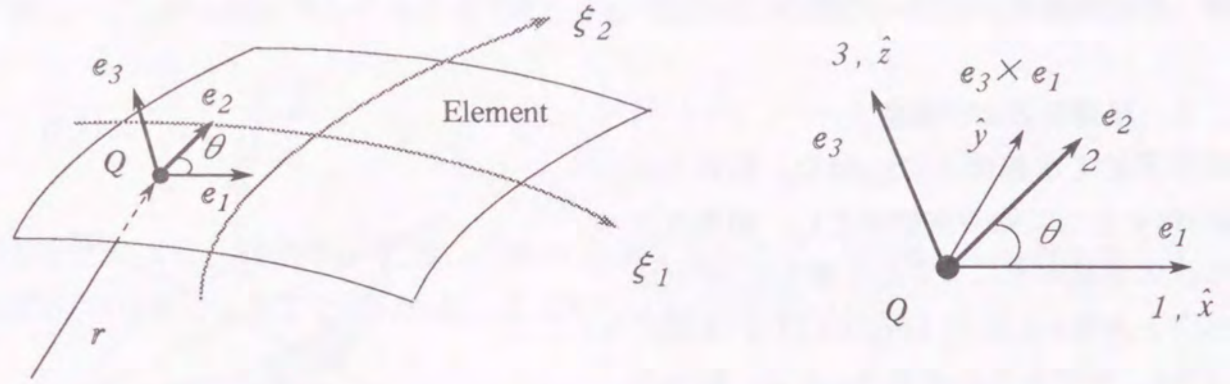


Fig.3.1.3 局部座標系

ポテンシャル理論によって付加質量マトリクスを得るだけであれば単位法線ベクトルe_3のみを計算すればよいので、局部座標系$\hat{x},\hat{y},\hat{z}$は必要ない。しかし、振動境界層における挙動を評価して減衰マトリクスを得るためには、局部座標系$\hat{x},\hat{y},\hat{z}$が必要となる。なお、単位法線ベクトルnはe_3と同じものであるから、

$$n = e_3 = \frac{e_1 \times e_2}{|e_1 \times e_2|} \qquad (3.1.1)$$

によって得ることができる。また、単位接線ベクトルe_1,e_2は、

$$e_1 = \frac{\partial r}{\partial \xi_1} \Big/ \left|\frac{\partial r}{\partial \xi_1}\right| \qquad (3.1.2)_{-1}$$

$$e_2 = \frac{\partial r}{\partial \xi_2} \Big/ \left|\frac{\partial r}{\partial \xi_2}\right| \qquad (3.1.2)_{-2}$$

にて表され、位置ベクトルrの成分を(x,y,z)として微分を実行すれば、e_1,e_2の成分は、

$$e_j^{\,T} = \left\{ h_j \frac{\partial x}{\partial \xi_j} \quad h_j \frac{\partial y}{\partial \xi_j} \quad h_j \frac{\partial z}{\partial \xi_j} \right\} \qquad (3.1.3)$$

となる。ただし、$j=1,2$であって、h_jは、

$$h_j = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial \xi_j}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \xi_j}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \xi_j}\right)^2}} \qquad (3.1.4)$$

である。以上により、単位ベクトルe_1,e_2,e_3の成分は完全に定まることとなる。

また、このように計算されたe_1,e_2,e_3の各成分は、それぞれが単位ベクトルであることから、絶対座標系に対する方向余弦でもある。この特質を利用することによって座標変換マトリクスが構成される。絶対座標系の基本単位ベクトルをe_x,e_y,e_zと表すこととして、局部斜交座標系の単位ベクトルe_iの各成分を(n_{ix},n_{iy},n_{iz})と表せば、

$$e_i = n_{ix}\, e_x + n_{iy}\, e_y + n_{iz}\, e_z \qquad (3.1.5)$$

となる。ただし、$i=1,2,3$であって、局部斜交座標系の座標軸を表すものである。さて、空間に任意のベクトル$\mathbb{A}$があるとすれば、これを絶対座標系からみた成分$\mathbb{A}^0(A_x,A_y,A_z)$あるいは局部斜交座標系からみた成分$\mathbb{A}^1(A_1,A_2,A_3)$によって表すことができて、

$$A_1 e_1 + A_2 e_2 + A_3 e_3 = A_x e_x + A_y e_y + A_z e_z \qquad (3.1.6)$$

が成立する。上式にe_1,e_2,e_3を乗じた計算を、(3.1.5)式を利用しながら順次行うことにより、

$$[T_a]\, \mathbb{A}^1 = [T_b]\, \mathbb{A}^0 \qquad (3.1.7)$$

なる関係を得る。ただし、

$$[T_a] = \begin{bmatrix} 1 & \cos\theta & 0 \\ \cos\theta & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad (3.1.8)$$

$$[T_b] = \begin{bmatrix} n_{1x} & n_{1y} & n_{1z} \\ n_{2x} & n_{2y} & n_{2z} \\ n_{3x} & n_{3y} & n_{3z} \end{bmatrix} \qquad (3.1.9)$$

である。これにより、$[T_a]$ あるいは$[T_b]$の逆行列を計算することにより座標変換マトリクスは完成する。即ち、

$$\mathbb{A}^1 = [T_a]^{-1} [T_b]\, \mathbb{A}^0 \qquad (3.1.10)_{-1}$$

$$\mathbb{A}^0 = [T_b]^{-1} [T_a]\, \mathbb{A}^1 \qquad (3.1.10)_{-2}$$

なる関係を得る。それぞれの右辺のマトリクス積が座標変換マトリクスである。

次に、局部デカルト座標系に関して述べる。局部デカルト座標系の基本単位ベクトルを$e_{\hat{x}},e_{\hat{y}},e_{\hat{z}}$と表すこととすれば、

$$e_{\hat{x}} = e_1 \qquad (3.1.11)_{-1}$$

$$e_{\hat{y}} = e_3 \times e_1 \qquad (3.1.11)_{-2}$$

$$e_{\hat{z}} = e_3 \qquad (3.1.11)_{-3}$$

となる。そして、$e_{\hat{i}}$の各成分を$(n_{\hat{i}x},n_{\hat{i}y},n_{\hat{i}z})$と表せば、(3.1.5)式と同様の関係が成立し、

$$e_{\hat{i}} = n_{\hat{i}x}\, e_x + n_{\hat{i}y}\, e_y + n_{\hat{i}z}\, e_z \qquad (3.1.12)$$

なる関係を得る。ただし、$\hat{i}=\hat{x},\hat{y},\hat{z}$であって、局部デカルト座標系の座標軸を表すものである。さて、空間の任意ベクトル$\mathbb{A}$を局部デカルト座標系からみて、その成分を$\mathbb{A}^2(A_{\hat{x}},A_{\hat{y}},A_{\hat{z}})$とおけば、(3.1.6)式と同様に、

$$A_{\hat{x}}\, e_{\hat{x}} + A_{\hat{y}}\, e_{\hat{y}} + A_{\hat{z}}\, e_{\hat{z}} = A_x\, e_x + A_y\, e_y + A_z\, e_z \qquad (3.1.13)$$

が成立する。上式に$e_{\hat{x}},e_{\hat{y}},e_{\hat{z}}$を乗じた計算を、(3.1.12)式を利用しながら順次行うことにより、

$$\mathbb{A}^2 = [T_c]\,\mathbb{A}^0 \qquad (3.1.14)$$

なる関係を得る。ただし、

$$[T_c] = \begin{bmatrix} n_{\hat{x}x} & n_{\hat{x}y} & n_{\hat{x}z} \\ n_{\hat{y}x} & n_{\hat{y}y} & n_{\hat{y}z} \\ n_{\hat{z}x} & n_{\hat{z}y} & n_{\hat{z}z} \end{bmatrix} \qquad (3.1.15)$$

である。$[T_c]$ は局部デカルト座標系と絶対座標系の間の座標変換マトリクスである。また、(3.1.9)式の$[T_b]$ との違いはマトリクスの第2行にあるだけで、第1,3行は全く同じものである。よって、第3行は単位法線ベクトルの絶対座標系での成分を示すものである。

では、局部デカルト座標系と局部斜交座標系の間の座標変換マトリクスを求めておこう。これは、(3.1.14)式に(3.1.10)の第2式を代入することにより、

$$\mathbb{A}^2 = [T_c]\,[T_b]^{-1}\,[T_a]\;\mathbb{A}^1 \qquad (3.1.16)$$

にて得ることもできるが、これでは計算量が増えてしまってあまり良くない。この2つの座標系の間の違いは$\hat{y}$軸と2軸だけで、その他の軸は共有されているから、もう少し簡略化できる。

ベクトル$\mathbb{A}$の成分$\mathbb{A}^2(A_{\hat{x}},A_{\hat{y}},A_{\hat{z}})$と$\mathbb{A}^1(A_1,A_2,A_3)$を用いれば、(3.1.6)式と同様に、

$$A_{\hat{x}}\, e_{\hat{x}} + A_{\hat{y}}\, e_{\hat{y}} + A_{\hat{z}}\, e_{\hat{z}} = A_1 e_1 + A_2 e_2 + A_3 e_3 \qquad (3.1.17)$$

が成立する。上式にe_1,e_2,e_3を乗じた計算を、(3.1.11)式を利用しながら順次行うことにより、

$$\begin{bmatrix} 1 & e_1{}^T e_{\hat{y}} & 0 \\ \cos\theta & e_2{}^T e_{\hat{y}} & 0 \\ 0 & e_3{}^T e_{\hat{y}} & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} A_{\hat{x}} \\ A_{\hat{y}} \\ A_{\hat{z}} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \cos\theta & 0 \\ \cos\theta & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{Bmatrix} \qquad (3.1.18)$$

を得る。上式左辺マトリクスの第2列は計算途中を示しているが、それぞれ、作図により簡単に求めることができる。1,2軸と$\hat{y}$軸が接平面に含まれ、1軸と$\hat{y}$軸が直交することから、

$$e_1{}^T e_{\hat{y}} = 0 \qquad (3.1.19)_{-1}$$

$$e_2{}^T e_{\hat{y}} = \sin\theta \qquad (3.1.19)_{-2}$$

$$e_3{}^T e_{\hat{y}} = 0 \qquad (3.1.19)_{-3}$$

なる関係を得る。従って、

$$[T_d]\,\mathbb{A}^2 = [T_a]\,\mathbb{A}^1 \qquad (3.1.20)$$

と表すことができる。ただし、$[T_a]$は(3.1.8) 式で示したものであり、$[T_d]$は

$$[T_d] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad (3.1.21)$$

である。これにより、$[T_d]$の逆行列を計算することにより座標変換マトリクスは完成する。即ち、

$$\mathbb{A}^2 = [T_d]^{-1}\,[T_a]\;\mathbb{A}^1 \qquad (3.1.22)$$

なる関係を得る。右辺のマトリクス積が座標変換マトリクスであり、これを計算すれば、

$$[T_d]^{-1}\,[T_a] = \begin{bmatrix} 1 & \cos\theta & 0 \\ 0 & \sin\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = [T_d]^T \qquad (3.1.23)$$

なる、大変おもしろい関係を得ることとなる。上式によって、

$$\mathbb{A}^2 = [T_d]^T \mathbb{A}^1 \tag{3.1.24}$$

となる。これにより、(3.1.16)式よりも随分簡略化されたことがわかる。

以上のことから、(3.1.14),(3.1.24)式を用いることにより、局部デカルト座標系、絶対座標系、局部斜交座標系のあいだに、

$$\mathbb{A}^2 = [T_c]\,\mathbb{A}^0 = [T_d]^T \mathbb{A}^1 \tag{3.1.25}$$

なる関係を得ることができる。振動境界層に関する定式化を行う際には、上式の関係を頻繁に利用する。そのときのために、上式の関係を

$$\mathbb{A}^2 = [T_0]\,\mathbb{A}^0 = [T_1]\,\mathbb{A}^1 \tag{3.1.26}$$

と書き換えておく。これはマトリクスの記号を変更しただけのものである。そして、各マトリクスの行成分を次式のベクトル形式で再定義しておく。

$$[T_0] = [T_c] = \begin{bmatrix} \hat{n}_{x0}{}^T \\ \hat{n}_{y0}{}^T \\ \hat{n}_{z0}{}^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{n}_{xx} & \hat{n}_{xy} & \hat{n}_{xz} \\ \hat{n}_{yx} & \hat{n}_{yy} & \hat{n}_{yz} \\ \hat{n}_{zx} & \hat{n}_{zy} & \hat{n}_{zz} \end{bmatrix} \tag{3.1.27}$$

$$[T_1] = [T_d]^T = \begin{bmatrix} \hat{n}_{x1}{}^T \\ \hat{n}_{y1}{}^T \\ \hat{n}_{z1}{}^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \cos\theta & 0 \\ 0 & \sin\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{3.1.28}$$

なお、$[T_0]$ 即ち$[T_c]$と、(3.1.9)式の$[T_b]$ との違いは、マトリクスの第２行にあるだけであって、第１,３行は全く同じものであることにもう一度注意しておく。よって、$[T_0]$の第３行は単位法線ベクトルの絶対座標系での成分を示すものである。

さて、船体表面の振動によって流体が振動させられる現象を解析することが目的であるから、船体表面の移動にともなって、その法線nの方向あるいは局部座標系の全ての座標軸の方向は時事刻々と変化するべきである。即ち、単位法線ベクトルは$n(x,y,z;t)$と表されるべきであり、その他の単位ベクトルも$e_1(x,y,z;t), e_2(x,y,z;t), e_3(x,y,z;t)$のように時間に依存したベクトルとして表されるべきである。しかし、ここでは問題を簡単にするために、通常の手法にならって、法線を$n(x,y,z)$のように時間とは関係せず位置だけで決まるものとおく。即ち、それぞれの単位ベクトルを$e_1(x,y,z), e_2(x,y,z), e_3(x,y,z)$、単位法線ベクトルを$n(x,y,z)$とおくこととする。これは船体表面の振幅が非常に小さく、その局部座標系座標軸の方向の時間的変化が無視できるほどに小さいことを仮定するものである。

流体の支配方程式としてStokes近似支配方程式(2.1.5)を得たが、これは、微小変形を仮定することによって得ることができたものである。従って、上記の局部座標系が時間に依存しないとの仮定は、Stokes近似支配方程式(2.1.5)に対して矛盾するものではない。むしろ、Stokes近似を採用することによって微小変形を仮定したことにもなるから、それに合わせて、局部座標系にも微小変形の仮定を採用する方が合理的であるといえる。

３．２　基礎公式

船体表面とそこにある粒子との間にすべりはなく空隙も生じないものと考えれば、その粒子は船体表面に付着していることとなる。船体表面に付着している流体粒子の速度は船体表面そのものの速度と完全に一致するものであるから、粒子の法線方向速度もまた船体表面そのものの法線方向速度と一致することとなる。既に述べたように、粘性による影響が大きく現れてくる振動境界層の領域は無視できる程に薄いと考えることができることから、層内における法線方向流体速度の法線方向への変化は非常に小さな量であると考えられる。むしろ、流体の法線方向速度は層内で変化することなくそのまま境界層外端まで伝わるものと考える方が自然である。従って、船体表面そのものの法線方向速度は境界層外端での流体の法線方向速度と等しいと考える。また、同じ理由により、圧力も層内で変化せず、船体表面と境界層外端での圧力は等しいと考える。

境界層の外部ではポテンシャル領域となることを以前に述べた。よって、船体表面に作用する圧力を知るためには、全流体領域をポテンシャル流体と考えて振動問題を解けば良いこととなる。この場合には、船体表面の境界条件としては法線方向速度を与えるだけでよく、すべりなしの条件を与えてはならない。なぜならすべりなしの条件は振動境界層における船体表面条件であって、境界層外端の条件ではないからである。ポテンシャル理論によって船体表面に作用する圧力が既知となれば、付加質量マトリクスを得ることができる。

以下、ポテンシャル領域の解法について述べる。

船体表面接水部分の振動変位を$U_w(x,y,z;t)$とおいて、その時間項を変数分離して表せば、

$$U_w(x,y,z;t) \quad = \quad u_w(x,y,z)\ e^{\lambda t} \qquad (3.2.1)$$

となる。これは定常振動の解、即ち微分方程式の特解を得るための常套手段である。ここで、$\lambda = i\omega,\ i=\sqrt{-1}$であり、$\omega$は角振動数を表す。そして、座標変換式(3.1.26)を利用すれば船体表面接水部分の法線方向変位$U_n(x,y,z;t)$を得ることができて、

$$U_n(x,y,z;t) \quad = \quad \hat{n_{z0}}^T\ U_w(x,y,z;t) \quad = \quad \hat{n_{z0}}^T\ u_w(x,y,z)\ e^{\lambda t} \qquad (3.2.2)$$

と表せることとなる。ここで$\hat{n_{z0}}$は単位法線ベクトルの絶対座標系での成分である。また、船体表面接水部分の法線方向速度$V_n(x,y,z;t)$は上式を時間tで微分することによって得られ、

$$V_n(x,y,z;t) \quad = \quad \hat{n_{z0}}^T\ \lambda\ u_w(x,y,z)\ e^{\lambda t} \quad = \quad \lambda\ U_n(x,y,z;t) \qquad (3.2.3)$$

となる。

次に、流体領域の速度ポテンシャルを$\Phi(x,y,z;t)$とおいて、同様に、その時間項を変数分離して、

$$\Phi(x,y,z;t) \quad = \quad \phi(x,y,z)\ e^{\lambda t} \qquad (3.2.4)$$

と表せば、線形化したBernoulliの定理により、

$$P(x,y,z;t) \quad = \quad -\lambda\ \rho\ \phi(x,y,z)\ e^{\lambda t} \qquad (3.2.5)$$

にて流体領域の圧力$P(x,y,z;t)$を評価することができる。また、自由表面条件

$$\phi(x,y,z) \ + \ \frac{g}{\lambda^2}\frac{\partial\ \phi(x,y,z)}{\partial z} \quad = \quad 0 \qquad (at\ z=0) \qquad (3.2.6)$$

において低周波近似すれば、剛壁の条件、

$$\frac{\partial\ \phi(x,y,z)}{\partial z} \quad = \quad 0 \qquad (at\ z=0) \qquad (3.2.7)$$

を得、高周波近似すれば、重力波動を無視する条件、

$$\phi(x,y,z) \quad = \quad 0 \qquad (at\ z=0) \qquad (3.2.8)$$

を得る。振動問題においては高周波近似を採用するのが通例である。なお、(3.2.6)式のgは重力加速度を表す。

さて、岸壁と水底に囲まれた流体領域の境界はFig.3.2.1のように表すことができる。即ち、流体領域とは自由表面S_F、水底S_B、岸壁S_W、船体表面S_H、その他の側面S_Rによって囲まれる領域のことであり、境界S_Rは無限遠方にあるものと考えることができる。今はポテンシャル問題を扱っているから、流体領域の支配方程式はLaplace方程式となる。従って、速度ポテンシャル$\phi(x,y,z)$は、

$$\nabla^2\ \phi(x,y,z) \quad = \quad 0 \qquad (3.2.9)$$

を満足せねばならない。さらに、速度ポテンシャル$\phi(x,y,z)$は、次の５つの境界条件を満足せねばならない。

まず第１に自由表面条件、

$$\phi(x,y,z) \quad = \quad 0 \qquad (at\ z=0) \qquad (on\ S_F) \qquad \begin{matrix}(3.2.8)_{再記}\\(3.2.10)\end{matrix}$$

である。次に、第２は水底の条件、

$$\frac{\partial\,\phi(x,y,z)}{\partial z} \quad = \quad 0 \qquad (at\ z=-h) \qquad (on\ S_B) \qquad (3.2.11)$$

である。また、無限遠方では船体振動による影響は及ばず流体は静止していると考えられるから、第３は無限遠方の条件、

$$\lim_{R'\to\infty} \phi(x,y,z) \quad = \quad 0 \qquad (\,R'=\sqrt{x^2+y^2}\,) \qquad (on\ S_R) \qquad (3.2.12)$$

である。そして、第４は岸壁の条件、

$$\frac{\partial\,\phi(x,y,z)}{\partial y} \quad = \quad 0 \qquad (at\ y=-w) \qquad (on\ S_W) \qquad (3.2.13)$$

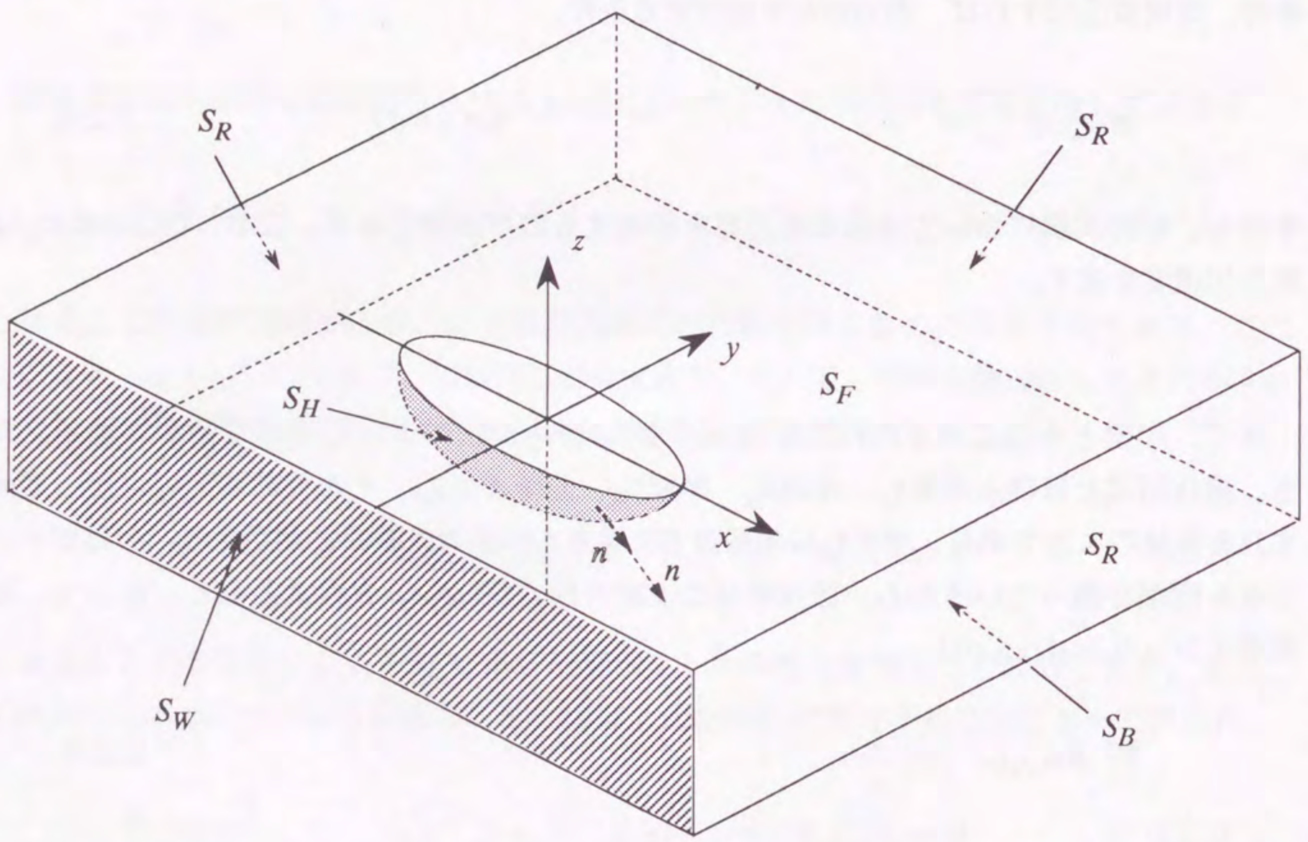


Fig.3.2.1　岸壁と水底に囲まれた流体領域の境界

であり、最後に、第５は船体表面の条件、

$$\frac{\partial\,\phi(x,y,z)}{\partial n} \quad = \quad v_n(x,y,z) \qquad (on\ S_H) \qquad (3.2.14)$$

である。ここで、$v_n(x,y,z)$は船体表面そのものの法線方向速度の振幅を表すものであって、(3.2.3)式より、

$$v_n(x,y,z) \quad = \quad \lambda \ \ \hat{n}_{z0}{}^T \ \ u_w(x,y,z) \qquad (3.2.15)$$

で表されるものとなる。なお、$\hat{n}_{z0}$は単位法線ベクトルの絶対座標系での成分である。

速度ポテンシャル$\phi(x,y,z)$は１つの支配方程式(3.2.9)と５つの境界条件との合計６条件を満足せねばならないことを示したが、船体表面条件(3.2.14)を除く他の５条件を満足する関数をあらかじめ求めておいて、その重ね合わせ具合でもって船体表面条件(3.2.14)を満足させ、結果として６条件全てを満足させる手法が有名で、特異点分布法と境界要素法は共にこの手法を代表するものである。あらかじめ求めておく関数はGreen関数と呼ばれている。

３．３　グリーン関数

Green関数をGで始まる記号にて表すこととする。source pointをQと表してその位置を(x',y',z')とおき、field pointをPと表してその位置を(x,y,z)とする。

（１）無限水深のGreen関数

２点間距離r_1及びr_2を、

$$r_1 \quad = \quad \sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2} \qquad (3.3.1)_{-1}$$

$$r_2 \quad = \quad \sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2+(z+z')^2} \qquad (3.3.1)_{-2}$$

とおくとき、$1/r_1$と$1/r_2$はそれぞれLaplace方程式を満足するから、そのいかなる重ね合わせも、全てLaplace方程式(3.2.9)を満足することとなる。例えば、

$$G_0(P,Q) \quad = \quad \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} \qquad (3.3.2)$$

$$G_\infty(P,Q) \quad = \quad \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \qquad (3.3.3)$$

である。この２つの組み合わせは特に有用なものとなっていて、$G_0(P,Q)$は低周波近似した自由表面条件(3.2.7)を満足し、$G_\infty(P,Q)$は高周波近似した自由表面条件(3.2.8)を満足する。また、両方共に無限遠方条件(3.2.12)をも満足するから、水底及び岸壁が存在しない場合を考えるならば、$G_0(P,Q)$は低周波用Green関数を、$G_\infty(P,Q)$は高周波用Green関数を表すこととなる。添字$_0$と$_\infty$とは、それぞれ周波数をイメージしてつけたものである。

さて、振動問題を解くために必要なのは高周波近似した自由表面条件を満足するGreen関数$G_\infty(P,Q)$であり、これを利用することによって無限水深での解析を行うことができる。
一方、Green関数$G_0(P,Q)$を振動問題を解くために直接的に必要とすることはないが、後述するように高次要素を用いた解析を行う場合には、立体内角を計算する必要が生じる為に$G_0(P,Q)$を利用することができる。

（２）有限水深のGreen関数

有限水深のGreen関数$G_s(P,Q)$が満足するべき条件は、Laplace方程式(3.2.9)、自由表面条件(3.2.10)、水底条件(3.2.11)、および無限遠方条件(3.2.12)の４条件であり、

$$G_s(P,Q) \quad = \quad G_\infty(P,Q) \; + \; G_h(P,Q) \qquad (3.3.4)_{-1}$$

$$G_\infty(P,Q) \quad = \quad \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \qquad (3.3.3)_{再記} \quad (3.3.4)_{-2}$$

$$G_h(P,Q) \quad = \quad \int_0^\infty \frac{2\, e^{-kh} \sinh kz' \sinh kz}{\cosh kh} J_0(kR)\, dk \qquad (3.3.4)_{-3}$$

にて表される。ここで、J_0は第１種０次Bessel関数であり、その引数Rは

$$R = \sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2} \qquad (3.3.5)$$

である。有限水深Green関数$G_s(P,Q)$は、無限水深Green関数$G_\infty(P,Q)$と修正関数$G_h(P,Q)$から構成されているのが特徴である。Green関数$G_s(P,Q)$を得る方法については付録Ａに詳述するが、$G_s(P,Q)$を構成するsourceとsinkの配列をFig.3.3.1に示しておく。

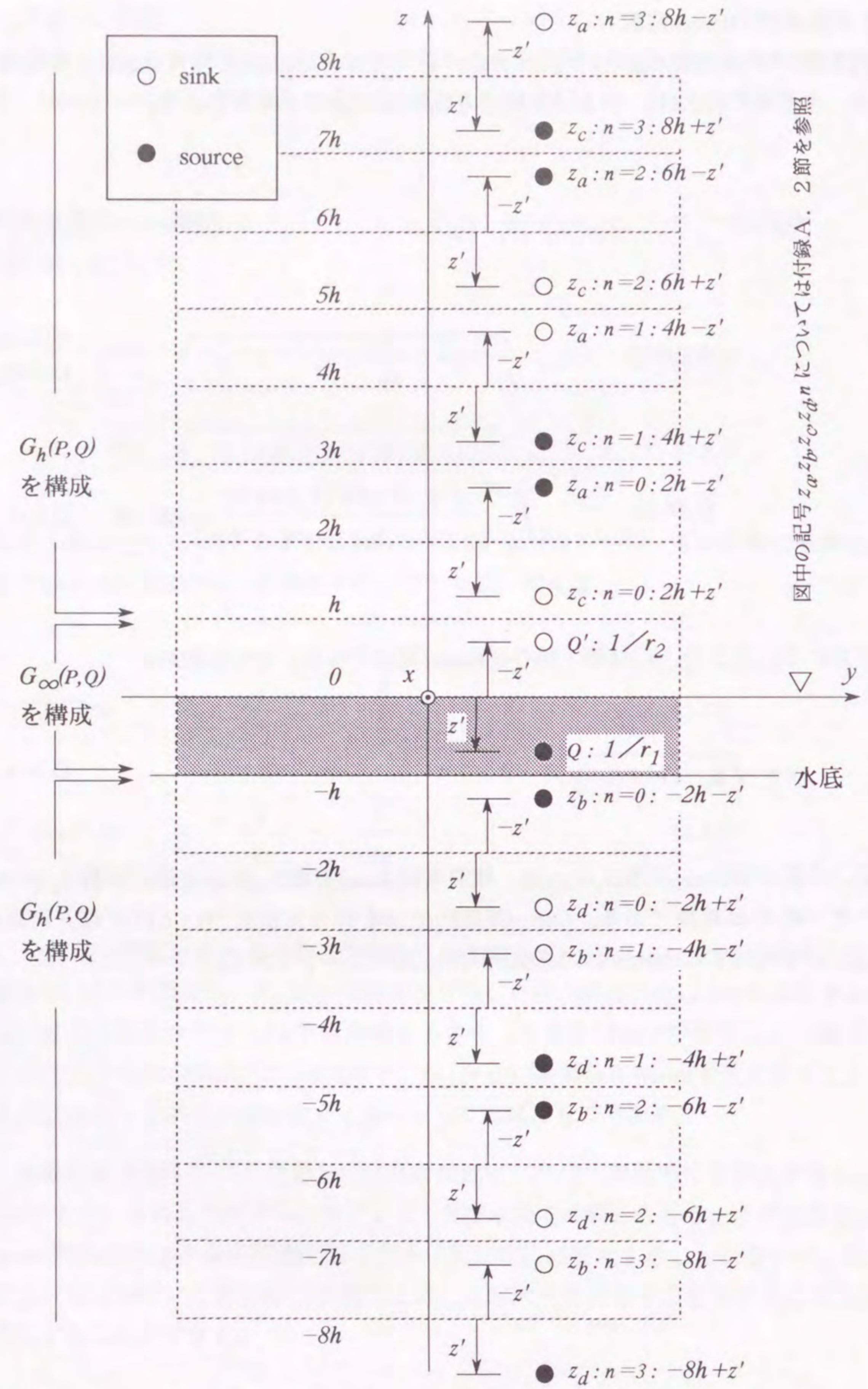


Fig.3.3.1　浅水域Green関数$G_s(P,Q)$を構成するsourceとsinkの配列

（３）岸壁有限水深のGreen関数

岸壁有限水深のGreen関数$G_w(P,Q)$が満足するべき条件は、Laplace方程式(3.2.9)、自由表面条件(3.2.10)、水底条件(3.2.11)、無限遠方条件(3.2.12)、および岸壁条件(3.2.13)の５条件である。$G_w(P,Q)$は、$G_s(P,Q)$の鏡像関係によって得ることができて、r_1,r_2及びRに含まれるy'の項を$(-2w-y')$に置き換えたものを付加すれば良いことになる。即ち、

$$G_w(P,Q) = G_{\infty R}(P,Q) + G_{hR}(P,Q) + G_{\infty L}(P,Q) + G_{hL}(P,Q) \qquad (3.3.6)_{-1}$$

$$G_{\infty R}(P,Q) = \frac{1}{r_{1R}} - \frac{1}{r_{2R}} \qquad (3.3.6)_{-2}$$

$$G_{\infty L}(P,Q) = \frac{1}{r_{1L}} - \frac{1}{r_{2L}} \qquad (3.3.6)_{-3}$$

$$G_{hR}(P,Q) = \int_0^{\infty} \frac{2\,e^{-kh}\sinh kz'\,\sinh kz}{\cosh kh} J_0(kR_R)\,dk \qquad (3.3.6)_{-4}$$

$$G_{hL}(P,Q) = \int_0^{\infty} \frac{2\,e^{-kh}\sinh kz'\,\sinh kz}{\cosh kh} J_0(kR_L)\,dk \qquad (3.3.6)_{-5}$$

である。それぞれのr_1,r_2及びRについては、

$$r_{1R} = \sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2} = r_1 \qquad (3.3.7)_{-1}$$

$$r_{2R} = \sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2+(z+z')^2} = r_2 \qquad (3.3.7)_{-2}$$

$$r_{1L} = \sqrt{(x-x')^2+(y+2w+y')^2+(z-z')^2} \qquad (3.3.7)_{-3}$$

$$r_{2L} = \sqrt{(x-x')^2+(y+2w+y')^2+(z+z')^2} \qquad (3.3.7)_{-4}$$

$$R_R = \sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2} = R \qquad (3.3.7)_{-5}$$

$$R_L = \sqrt{(x-x')^2+(y+2w+y')^2} \qquad (3.3.7)_{-6}$$

である。$G_w(P,Q)$を構成するsourceとsinkの配列をFig.3.3.2に示しておく。なお、点Pが岸壁上にあるとき、即ち$y=-w$が成り立つときには、$r_{1R}=r_{1L}$、$r_{2R}=r_{2L}$、及び$R_R=R_L$となる。

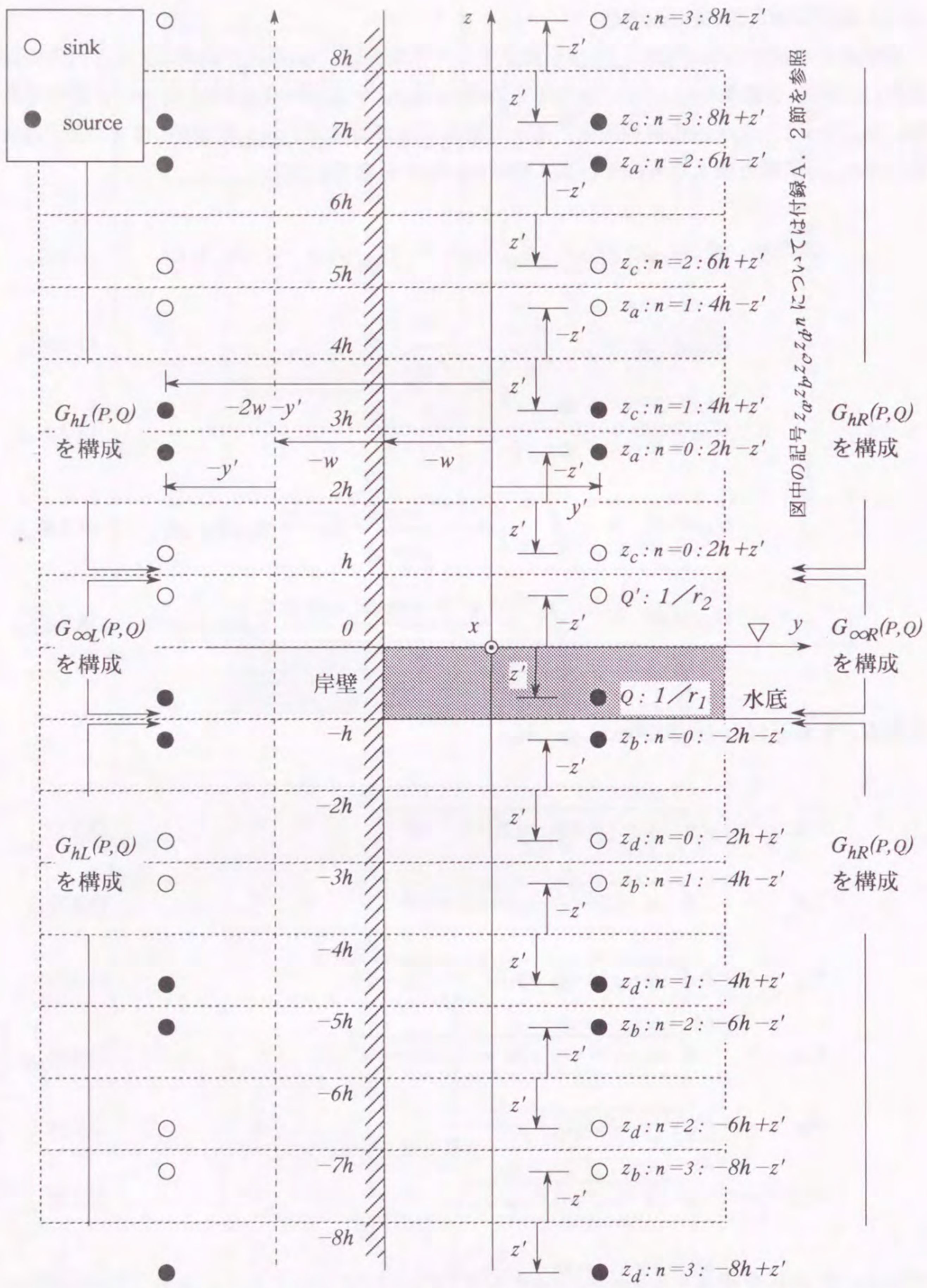


Fig.3.3.2　岸壁浅水域Green関数$G_w(P,Q)$を構成するsourceとsinkの配列

3．4　積分方程式

(1) 境界要素法

Fig.3.2.1の如く岸壁と水底に囲まれた流体領域において、各境界における法線を流体領域向きに立てれば、それぞれの境界における法線の様子はFig.3.4.1のようになる。

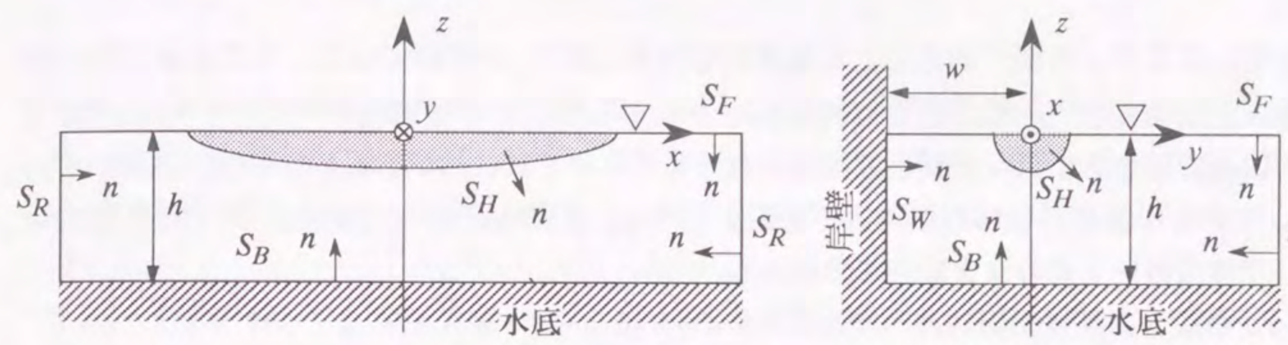


Fig.3.4.1　境界における法線方向

さらに、Fig.3.4.2の如く点Pを流体領域に取ってGreenの公式を利用すれば、積分領域は船体表面S_Hだけが残って立体内角は4πとなり、積分方程式

$$-4\pi\,\phi(P) + \int_{S_H} \left(\phi(Q)\, \frac{\partial G_w(P,Q)}{\partial n(Q)} - G_w(P,Q)\, \frac{\partial \phi(Q)}{\partial n(Q)} \right) dS(Q) = 0 \qquad (3.4.1)$$

を得る。なお、Green関数$G_w(P,Q)$を$G_s(P,Q)$或いは$G_\infty(P,Q)$に差し替えても上式は成立する。

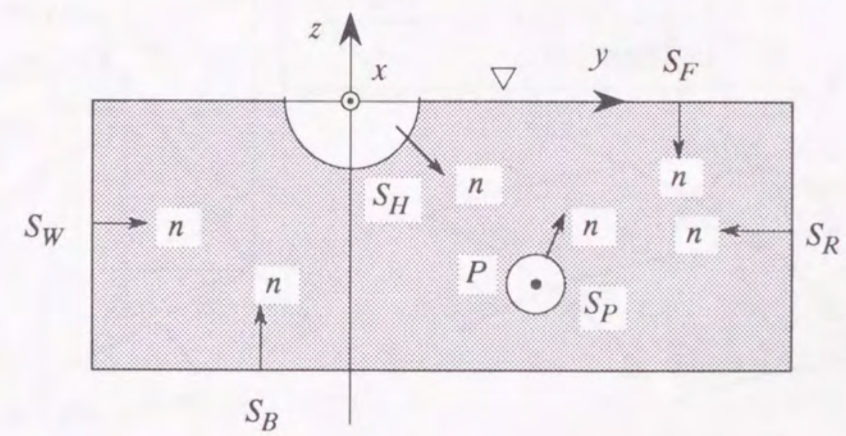


Fig.3.4.2　field point Pを流体領域に取った様子

次に、点PをFig.3.4.3の如く船体表面に取れば、船体表面から流体領域に向けて張り出した微小球面をS_{PO}とおいて、外側立体内角$C_O(P)$は

$$C_O(P) \quad = \quad \int_{S_{PO}} \sin\theta \, d\omega d\theta \qquad (3.4.2)$$

となる。ここで、外側であることを強調するために添字$_O$を付けており、その３次元的な様子をFig.3.4.4に示す。船体表面は滑らかであるから球面は半球となって$C_O(P)=2\pi$となるが、船体表面をメッシュ分割して表現した計算モデルではこれが必ずしも半球とはならず、むしろ半球とはならないのが普通である。従って、計算モデルに忠実な計算を行う場合には、立体内角を上式のまま扱う必要がある。

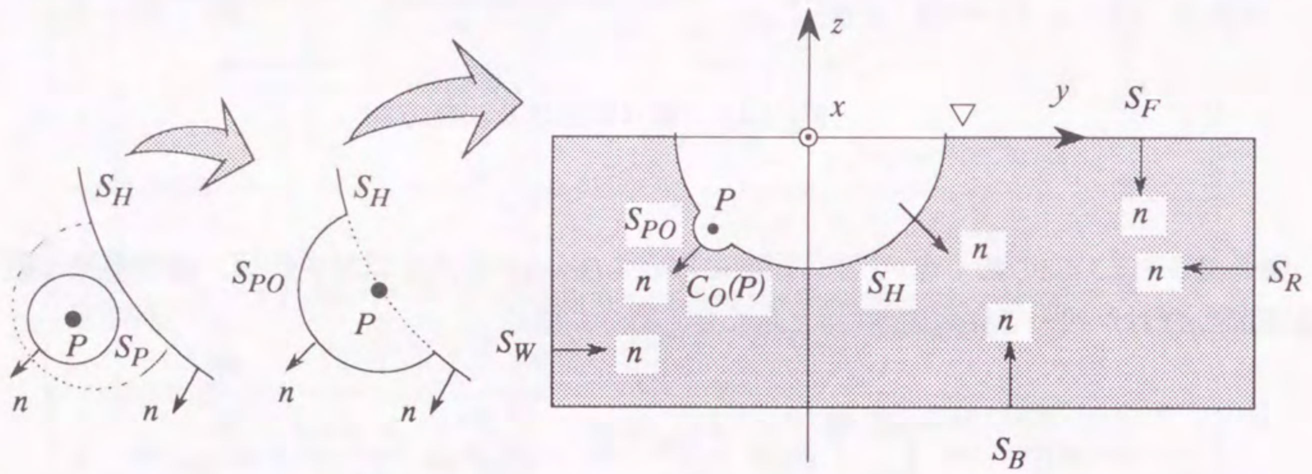


Fig.3.4.3　field point Pを船体表面に取った様子

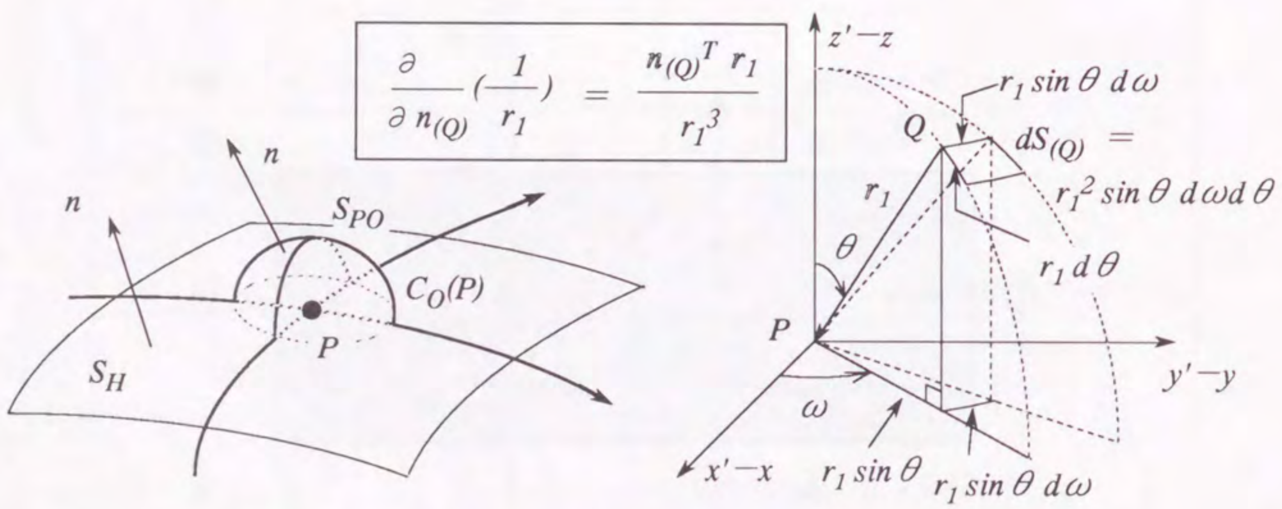


Fig.3.4.4 外側立体内角$C_O(P)$と球座標系(r_1は$Q\rightarrow P$)

外側立体内角$C_O(P)$を用いて積分方程式を表せば、

$$-\,C_O(P)\,\phi(P) \; + \; \int_{S_H} \left(\phi(Q) \frac{\partial G_w(P,Q)}{\partial n_{(Q)}} - G_w(P,Q) \frac{\partial \phi(Q)}{\partial n_{(Q)}} \right) dS_{(Q)} \; = \; 0 \qquad (3.4.3)$$

となり、これは境界積分方程式と呼ばれている。上式では、船体表面S_Hのうち点Pに関する$1/r_1$の積分評価の結果$C_O(P)$が得られている訳であるから、S_Hに関する積分項では$dS_{(Q)}$のQから点Pを除外しておく必要がある。即ち、$P \neq Q$の範囲で$1/r_1$の積分を実行せねばならないこととなる。

また、上式において法線微分項$\partial\phi(Q)/\partial n(Q)$は船体表面そのものの法線速度を表しているから、条件(3.2.14)によって$\partial\phi(Q)/\partial n(Q)$は数値的に与えられる。よって、立体内角$C_O(P)$が既知であれば未知数は$\phi(Q)$だけになって、$\phi(Q)$に関する方程式となる。なお、点$P$も船体表面上にあるから、$\phi(P)$も$\phi(Q)$の一種である。従って、上式を$\phi(Q)$について解けば船体表面の速度ポテンシャルを得ることとなる。このようにして得た$\phi(Q)$を積分方程式(3.4.1)に代入すれば、流体領域の任意点Pに関する速度ポテンシャル$\phi(P)$を求めることができる。本論文で利用する境界要素法による定式化とは、まさに上式を利用することを指す。

（2）立体内角計算法

さて、積分方程式(3.4.3)についてその解法を述べた際に、「外側立体内角$C_O(P)$が既知であれば」との一節があった。実はこの立体内角$C_O(P)$を求めるために少々工夫を要する。

一般的に境界要素法では、立体内角$C_O(P)$を計算するために、領域内に一様ポテンシャルを負荷した状態を作り出すのが通例であり常套手段となっている。しかし、一般に、外部問題において一様ポテンシャルを負荷した場合には自由表面上での積分が残って、あまり便利な表示式は得られない。これに対してRankine Source法では低周波用無限水深Green関数$G_0(P,Q)$を利用することから、外部問題に対して一様ポテンシャルを負荷しても自由表面上での積分が残らず、非常に便利な結果が得られることが文献[42)] *(高木,1993)*に示されている。ところが、今回の問題の場合には外部問題のGreen関数は$G_w(P,Q)$であるから、外部問題に一様ポテンシャルを負荷しようとすれば、必ず自由表面上での積分が残ってしまう。これは、Green関数$G_w(P,Q)$を利用しようとするところから生じる問題である。

発想を転換することによりこの問題を解決することができる。外側立体内角$C_O(P)$の替わりに内側立体内角$C_I(P)$を求めても良い訳で、$C_I(P)$を得ることができたならば、

$$C_O(P) + C_I(P) = \int_{S_{PO}+S_{PI}} \sin\theta \, d\omega d\theta = 4\pi \tag{3.4.4}$$

の関係によって外側の立体内角$C_O(P)$を知ることができる。内側の立体内角$C_I(P)$を得るためには内部問題について考えるのが便利である。

内部領域の問題において、field point Pを船体表面に取った様子をFig.3.4.5に示す。船体表面から内部流体領域に向けて張り出した微小球面をS_{PI}とおいて、S_{PI}における内側立体内角を$C_I(P)$とおく。領域を囲む境界面はS_F, S_H, S_{PI}の３つだけとなって、法線n'を内部流体領域に向けてとる。

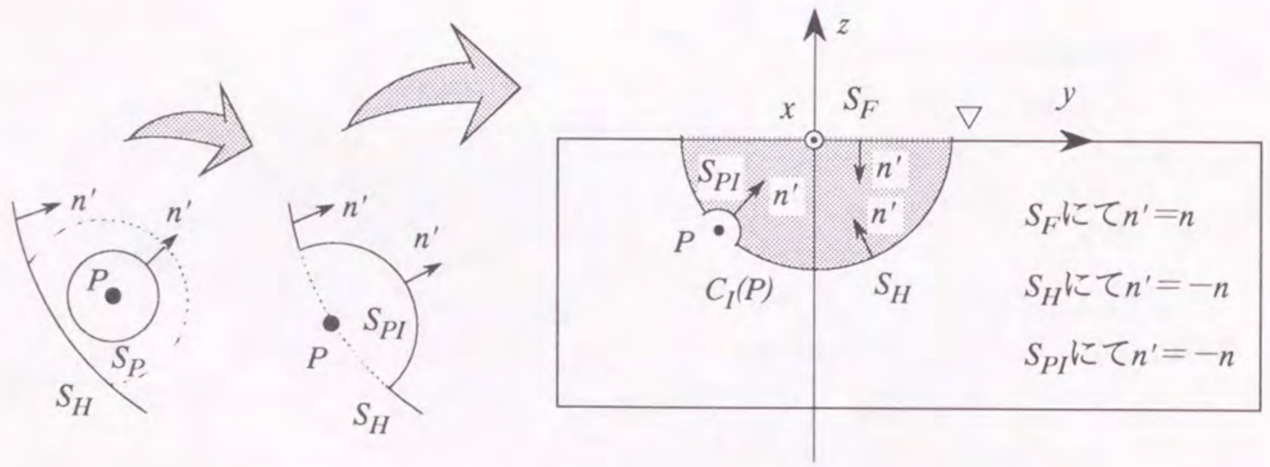


Fig.3.4.5　内部領域問題でfield point Pを船体表面に取った様子

Fig.3.4.5に示した内部問題において、(3.3.2)式で示した低周波用無限水深Green関数$G_0(P,Q)$を採用して境界積分方程式を構成し、S_F+S_Hにて囲まれた閉領域に一様ポテンシャルの条件を負荷すれば、

$$C_I(P) = -\int_{S_H} \frac{\partial G_0(P,Q)}{\partial n_{(Q)}} dS_{(Q)} \tag{3.4.5}$$

を得る。上式右辺を計算すれば、内側の立体内角$C_I(P)$を得ることができる。なお、上式右辺のS_Hに関する積分では$dS_{(Q)}$のQから点Pを除外しておく必要がある。即ち、$P \neq Q$の範囲で$1/r_1$の積分を実行せねばならない。

また、上式と(3.4.4)式の関係により外側立体内角$C_O(P)$は、

$$C_O(P) = 4\pi - C_I(P) \tag{3.4.6}$$

となる。

この方法のおもしろさは、立体内角という流体運動とは全く関係のないそして船体表面の形状だけで決定されてしまうような物理量を得るために、流体運動と密接に関連する低周波用無限水深Green関数$G_0(P,Q)$を利用するところにある。この考え方は文献[55)] *(著者,1995)*にて述べられている。なお、上式の結果は、Rankine Source法による文献[42)] *(高木,1993)*の結果と一致するものである。文献[42)]では外部問題に対して一様ポテンシャルの条件を負荷して$C_I(P)$を得ているのに対して、文献[55)]では内部問題を考えることでその導出を簡素化していることに特徴がある。また、Green関数として$G_0(P,Q)$ではないものを採用し、外部問題に対して一様ポテンシャルの条件を負荷した文献[58)] *(松井,1988)*もあるが、その結果得られた計算式はかなり複雑なもので上式のように単純かつ明快なものではない。

なお、上２式は点Pが通常の船体表面にあるときの立体内角を述べるものである。ここでいう「通常」とは、点Pが船体表面S_H上にあることをいうもので、船体表面S_Hと自由表面S_Fとの交線上にあるときを除外することを意味する。

点Pが船体表面S_Hと自由表面S_Fとの交線上にあるときの様子をFig.3.4.6に示す。同図を視察すれば、球面S_{PI}は随分小さなものとなっており、それに伴って内側立体内角$C_I(P)$も小さくなるであろうことは察しがつく。この場合には、結果として

$$C_I(P) = -\frac{1}{2}\int_{S_H} \frac{\partial G_0(P,Q)}{\partial n_{(Q)}} dS_{(Q)} \tag{3.4.7}$$

を得る。

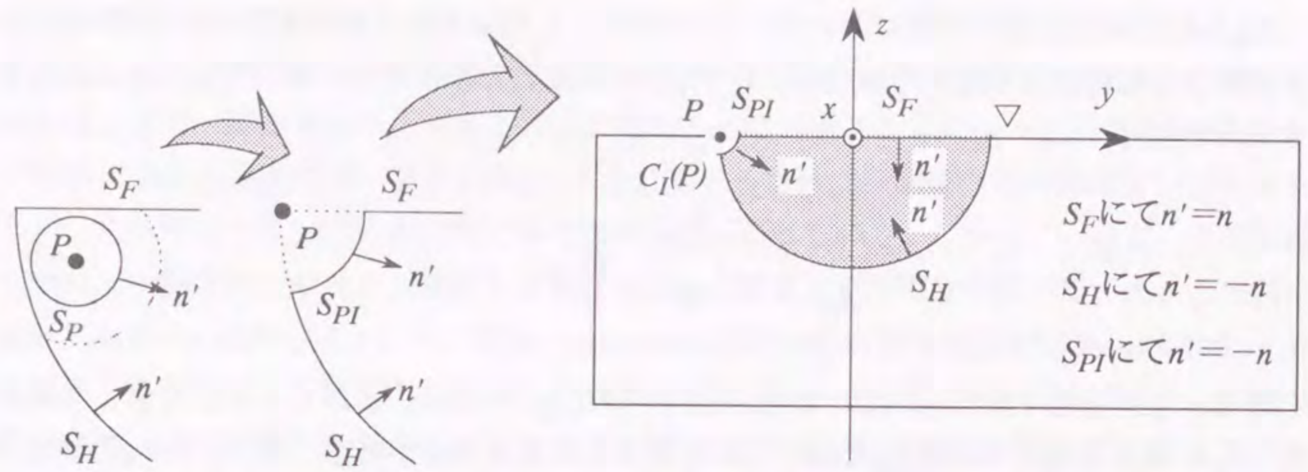


Fig.3.4.6 field point PがS_HとS_Fとの交線上にある様子（内部問題）

上式によって、点Pが船体表面S_Hと自由表面S_Fとの交線上にある場合の内側立体内角$C_I(P)$を計算することができる。また、この場合の外側立体内角$C_O(P)$はFig.3.4.7に示したものとなることから、自由表面における半球の立体内角2πから$C_I(P)$を差し引いて、

$$C_O(P) \quad = \quad 2\pi \; - \; C_I(P) \tag{3.4.8}$$

となる。この考え方は文献[50)] (著者,1996)にて述べられている。

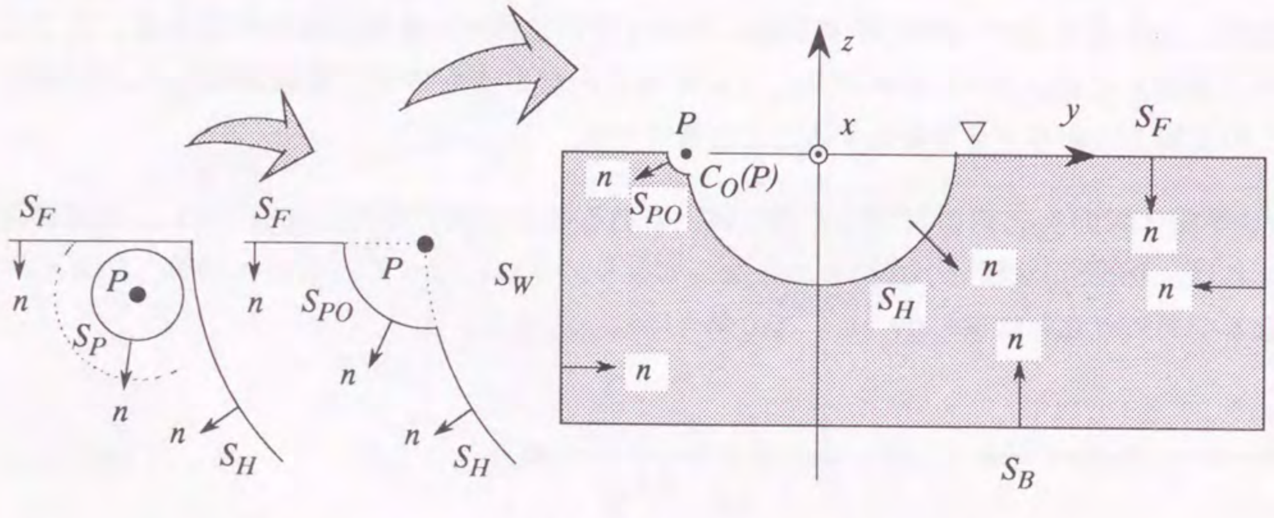


Fig.3.4.7 field point PがS_HとS_Fとの交線上にある様子（外部問題）

３．５　積分方程式の離散化

積分方程式における積分範囲は船体表面S_Hだけであったから、メッシュ分割するのは船体表面だけでよい。そのメッシュの種類として、メッシュ節点における関数値を補間する方式によって一定要素あるいは高次要素などと分類されている。要素上の全てにおいて一定の関数値を与えるものは一定要素あるいは*0*次要素と呼ばれ、*1*次関数にて補間されるものは*1*次要素、*2*次関数にて補間されるものは*2*次要素と呼ばれている。一般的には、*2*次以上の補間関数を用いるものを高次要素と呼ぶ。補間次数が上がるにつれて計算精度も向上することは良く知られたところである。

本論文では高次要素に対応した離散化の定式化を行う。しかし、実際の計算では*1*次要素を用いる。これは、要素上における特異積分の数値計算を平面上の積分として評価する方式を採用したからである。特異積分の数値計算を平面上の積分として評価しながら高次要素を採用した文献[58)] *(松井,1988)*もあるが、本論文では全ての要素上での積分を同等に扱うことを重視したために*1*次要素を用いることとしたのである。また、文献[59)] *(田中,1991)*の3.6節によれば高次要素を採用した場合の特異積分の評価方法も開発されている様[60)] *(松本,1990)*ではあるが、本論文をまとめるにあたってこれを織り込む時間的余裕がなかった。いずれにしてもマトリクスの定式化を高次要素に対応したものとしておけば、後は採用する特異積分の評価方法に応じて要素を使い分ければ良いだけであるから、あまり大きな問題ではない。

なお、*1*次要素は必ずしも平面を表すものではなく、ねじれた表面を表すこともできる要素であるが、回転楕円体のメッシュ分割においては完全なる平面にて構成することができるから、特異積分の数値計算を平面上の積分として評価する方式を採用しても良い訳である。ここで用いた*1*次のアイソパラメトリック要素をFig.3.5.1に示す。図中の記号ξ_1, ξ_2は曲線座標系のパラメータであり、三角形あるいは四角形の角点の番号は要素における局部節点番号を表す。そして、*( )*内の数字は要素節点の曲線座標系における座標値を表す。また、黒丸印は数値積分の際の積分点を表している。

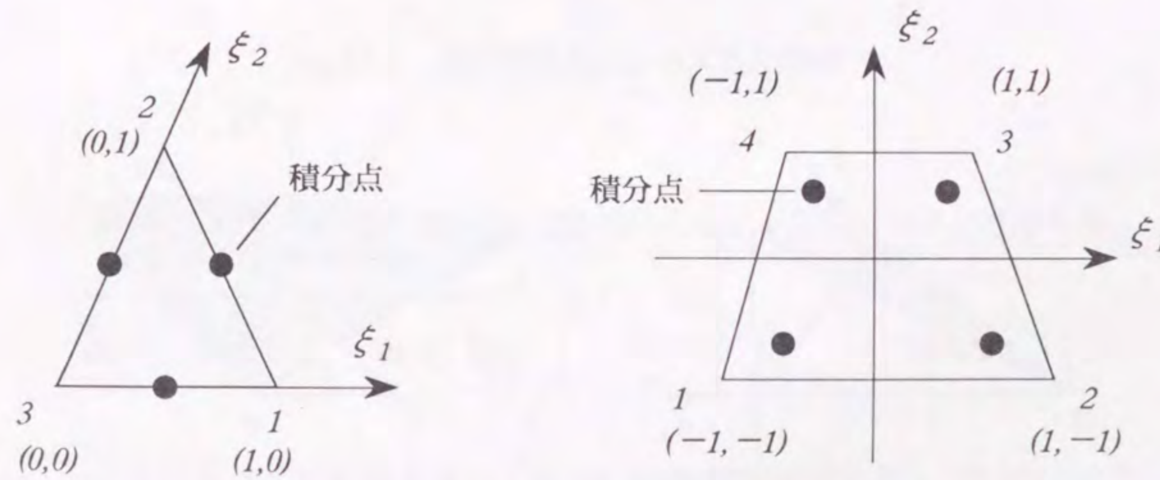


Fig.3.5.1 iso-parametric 要素（1次関数補間）

Fig.3.5.1のアイソパラメトリック要素を用いた場合の形状関数（内挿関数）は、

三角形要素に対して

$$ {}^{3}N_{1} = \xi_{1} \qquad (3.5.1)_{-1} $$

$$ {}^{3}N_{2} = \xi_{2} \qquad (3.5.1)_{-2} $$

$$ {}^{3}N_{3} = 1-\xi_{1}-\xi_{2} \qquad (3.5.1)_{-3} $$

四角形要素に対して

$$ {}^{4}N_{1} = \frac{1}{4}(1-\xi_{1})(1-\xi_{2}) \qquad (3.5.2)_{-1} $$

$$ {}^{4}N_{2} = \frac{1}{4}(1+\xi_{1})(1-\xi_{2}) \qquad (3.5.2)_{-2} $$

$$ {}^{4}N_{3} = \frac{1}{4}(1+\xi_{1})(1+\xi_{2}) \qquad (3.5.2)_{-3} $$

$$ {}^{4}N_{4} = \frac{1}{4}(1-\xi_{1})(1+\xi_{2}) \qquad (3.5.2)_{-4} $$

と表される。上式で、左上添字は三角形あるいは四角形であることを表すもので、右下添字は要素節点の局部節点番号を表す。いずれも、要素節点においてFig.3.5.1に示した曲線座標系の座標値を代入すれば、形状関数（内挿関数）が1.0になるように作られていることがわかる。例えば形状関数（内挿関数）${}^{3}N_{1}$及び${}^{4}N_{1}$のξ_{1}-ξ_{2}平面における関数値をグラフにすれば、Fig.3.5.2の如くなって、節点1でのみ関数値は1.0となり、その他の節点では関数値がゼロとなる特徴を有することがわかる。

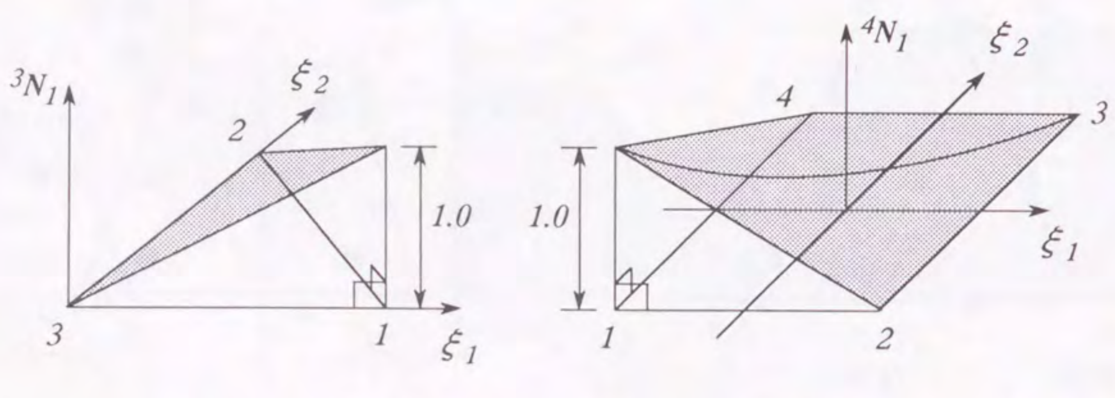


Fig.3.5.2　形状関数（内挿関数）${}^{3}N_{1}$及び${}^{4}N_{1}$のξ_{1}-ξ_{2}平面における関数値

このような特徴を用いて、要素表面そのものを表したり、要素表面上でのある物理量の関数値を表したりする訳である。このような関数は、要素表面そのものを表すことからは形状関数と呼ばれ、ある物理量の関数値を表すことからは内挿関数と呼ばれている。この関数を形状関数と内挿関数との両方に用いる場合にはアイソパラメトリック要素と呼ばれている。本論文では最終的にはアイソパラメトリック要素として計算を行うのであるが、その定式化の段階で、この関数を形状関数として用いる場合にはN'_{k}と表し、内挿関数として用いる場合にはN_{k}と表すこととする。kは局部節点番号を表す。

さて、形状関数としてN'_{k}を利用するのはマトリクスを定式化した後であって、マトリクスの構成要素を計算するために数値積分（付録B）を利用する段階である。それ以前の、マトリクスを定式化する段階では内挿関数としてしかN_{k}を利用しない。

では、まず、変位について内挿関数N_{k}を利用しよう。船体表面をメッシュ分割したときのある要素mについて考える。要素m上の任意点Qにおける変位$u_{w}(Q)$を節点変位u_{wk}によって補間して表そうとする様子をFig.3.5.3に示す。点Qの位置はξ_{1},ξ_{2}の関数であるから、変位$u_{w}(Q)$を$u_{w}(\xi_{1},\xi_{2})$と理解してもよい。あるいは、内挿関数N_{k}は$N_{k}(\xi_{1},\xi_{2})$であるが、これを$N_{k}(Q)$と理解してもよい。

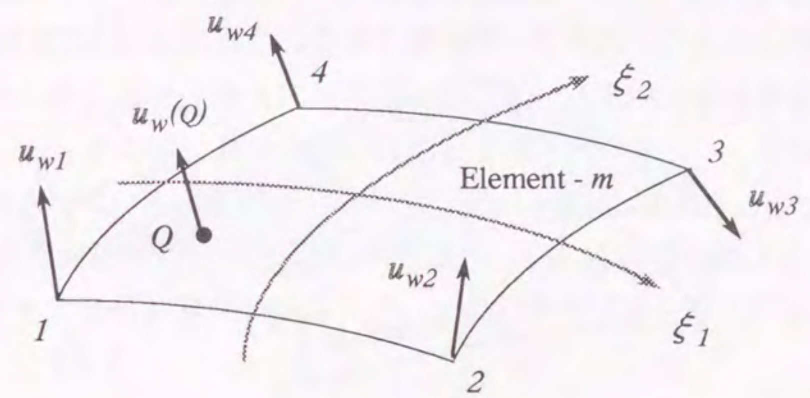


Fig.3.5.3　内挿関数N_{k}による変位の補間

変位$u_{w}(Q)$は、Fig.3.5.2に示した関数の重ね合わせによって近似的に表現できるから、

$$ u_{w}(Q) = \sum_{k=1}^{k_{max}} N_{k}(Q)\ u_{wk} \qquad (3.5.3) $$

と表すことができる。上式の関係は、「変位$u_{w}(Q)$を内挿補間する」といわれるものである。また、k_{max}は要素mの最大節点数を表すもので、四角形要素の場合には$k_{max}=4$である。

上式を用いることによって、船体表面そのものの法線方向速度の振幅$v_n(Q)$を表すことができる。$v_n(Q)$の式(3.2.15)に上式を代入すれば、

$$v_n(Q) \quad = \quad \lambda \sum_{k=1}^{k_{max}} N_k(Q)\;\; n_{\hat{z}0}(Q)^T\;\; u_{wk} \qquad (3.5.4)$$

となるから、船体表面条件(3.2.14)により、

$$\frac{\partial \phi(Q)}{\partial n_{(Q)}} = v_n(Q) = \lambda \sum_{k=1}^{k_{max}} N_k(Q)\;\; n_{\hat{z}0}(Q)^T\;\; u_{wk} \quad (on\ Ship\ Hull) \qquad (3.5.5)$$

を得る。これにより、積分方程式の一部分を節点変位という離散的な量にて表すことができたこととなる。なお、$n_{\hat{z}0}(Q)$は単位法線ベクトルの絶対座標系での成分を示すものである。

次に、速度ポテンシャルについて内挿関数N_kを利用しよう。要素m上の任意点Qにおける速度ポテンシャル$\phi(Q)$を節点での速度ポテンシャルϕ_kによって補間して表そうとする様子をFig.3.5.4に示す。

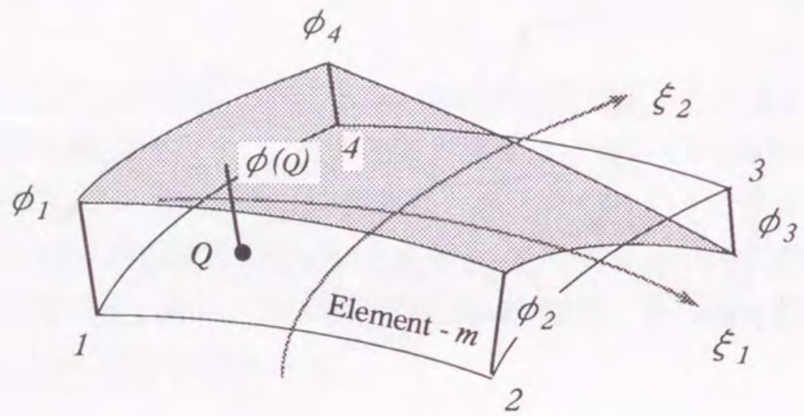


Fig.3.5.4 内挿関数N_kによる速度ポテンシャルの補間

速度ポテンシャル$\phi(Q)$も、変位と同様に、内挿補間によって近似的に

$$\phi(Q) \quad = \quad \sum_{k=1}^{k_{max}} N_k(Q)\;\; \phi_k \qquad (3.5.6)$$

と表すことができる。これもまた、積分方程式の一部分を節点ポテンシャルという離散的な量にて表すことができたことを示している。

さて、速度ポテンシャルに関連する項については(3.5.5),(3.5.6)式の如く離散化した量で表すことができたから、今度は境界積分方程式(3.4.3)そのものを離散化して表しておくこととしよう。field point Pを離散化節点 i におくこととすれば、Green関数$G_w(P,Q)$を$G_w(i,Q)$とかくことができる。さらに、外側立体内角$C_O(P)$も$C_O(i)$となり、速度ポテンシャル$\phi(P)$も$\phi(i)$と表されることとなる。そして、メッシュ分割された船体表面の１要素をΔS_Hと表すこととし、このような要素が全部でM_{max}個あるものとすれば、境界積分方程式(3.4.3)は

$$-\, C_O(i)\;\phi(i) \;+\; \sum_{m=1}^{M_{max}} \int_{\Delta S_H} \left(\phi(Q)\; \frac{\partial G_w(i,Q)}{\partial n_{(Q)}} - G_w(i,Q)\; \frac{\partial \phi(Q)}{\partial n_{(Q)}} \right) dS_{(Q)} \;=\; 0 \qquad (3.5.7)$$

となる。上式は、船体表面S_H上での積分がM_{max}個の微小要素ΔS_H上での積分の和になったことを示しているだけであり、記号 Q は source point としての点Qを表すものでFig.3.5.3及びFig.3.5.4に示した点Qのもつ意味と一致することが知れる。なお、微小要素ΔS_Hを構成する節点として点 i が含まれる場合には、積分記号$dS_{(Q)}$のQから点iを除外しておく必要があり、$i \neq Q$の範囲で$1/r_1$の積分を実行せねばならないことは今までと同じである。このような、点iを除外した積分のことは特異積分（付録B）と呼ばれている。

上式が表す離散的なイメージを図にしたものがFig.3.5.5である。同図が示す様子について述べる。点 i は微小要素$11,12,13,14$が共有する節点として存在し、４つの曲面がここで結ばれている訳であるからそこには立体内角が存在する。この立体内角を大袈裟に描いたものが$C_O(i)$である。また、点iから遠く離れたところにも船体表面は存在し、その部分は微小要素$51,52,53,54$から構成されている。そのうち53番目の要素上に点Qがある。点Qがこの要素の至る所にある場合を計算せねばならず、それが積分として上式に表されている。さらには点Qが他の要素にあるときをも計算せねばならず、それが総和Σとして上式に表されている訳である。

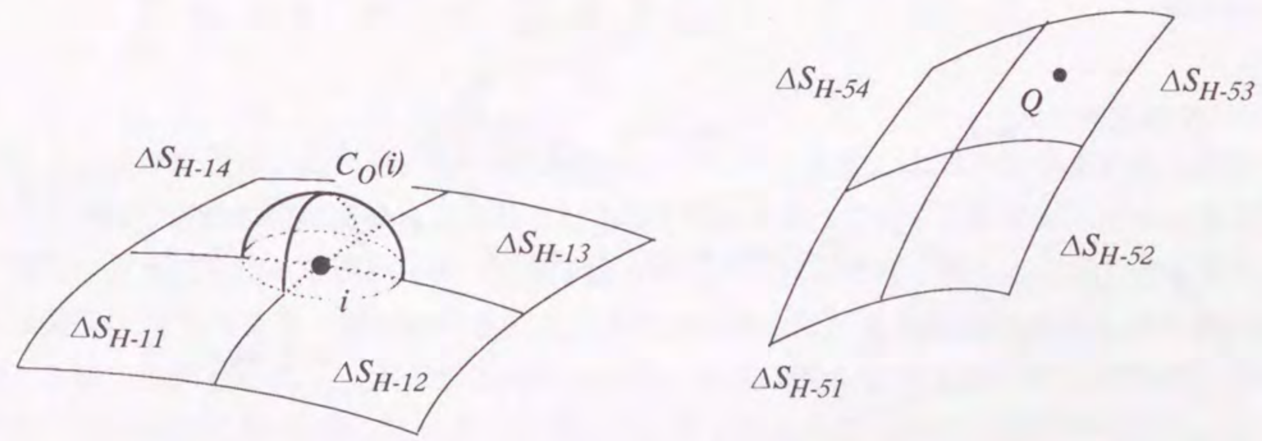


Fig.3.5.5 離散化のイメージ

これにて必要な離散化表現が完成したから、具体的にマトリクス化することとしよう。積分方程式(3.5.7)に速度ポテンシャルに関連する式(3.5.5),(3.5.6)を代入して、積分と関係のない項を積分記号の外へ出せば、

$$- C_O(i)\ \phi(i) \ + \sum_{m=1}^{M_{max}} \sum_{k=1}^{k_{max}} \phi_k \int_{\Delta S_H} N_k(Q) \frac{\partial\ G_w(i,Q)}{\partial\ n_{(Q)}}\ dS_{(Q)}$$

$$- \ \lambda \sum_{m=1}^{M_{max}} \sum_{k=1}^{k_{max}} u_{wk}{}^T \int_{\Delta S_H} \hat{n_{z0}}(Q)\ N_k(Q)\ G_w(i,Q)\ \ dS_{(Q)} \ = \ 0$$

------------------ (3.5.8)

となる。上式の積分項の総数は(要素数)×(その要素の節点数)個だけあって、その総和をとることを示している。この総和の順番を入れ替えることにより、節点ごとに整理しなおすことができる。即ち、ある節点 j について観察すれば、その節点 j を要素節点として持つような要素をひとつのグループとみなすことができる。これによって、積分項の総数を(節点数)×(その節点の要素数)個と読み変えることができて、積分項の総数にも変化は生じないこととなる。そこで、全節点数をN_{max}とおいて、要素を節点に属するグループとみなした様子をFig.3.5.6に示す。同図の場合には節点 j に属する要素の数は4個であり、これを$M(j)$と定義することとする。そして、$M(j)$個の要素のうちのL番目に注目してこの要素番号をmとすれば、mは節点番号jと順番Lの関数となって、$m(j,L)$と表すことができることとなる。同図の場合には③番目に注目しているので、要素番号mは$m(j,3)$となる。さらに、節点jは要素mにおけるいずれかの局部節点と同一のものであるから、節点jそのものを指す局部節点の番号kは節点番号jと要素番号mの関数となって、$k(j,m)$と表すことができることとなる。同図の場合には1番目の局部節点が節点jと一致しているので、局部節点番号kは$k(j,m)=1$となる。

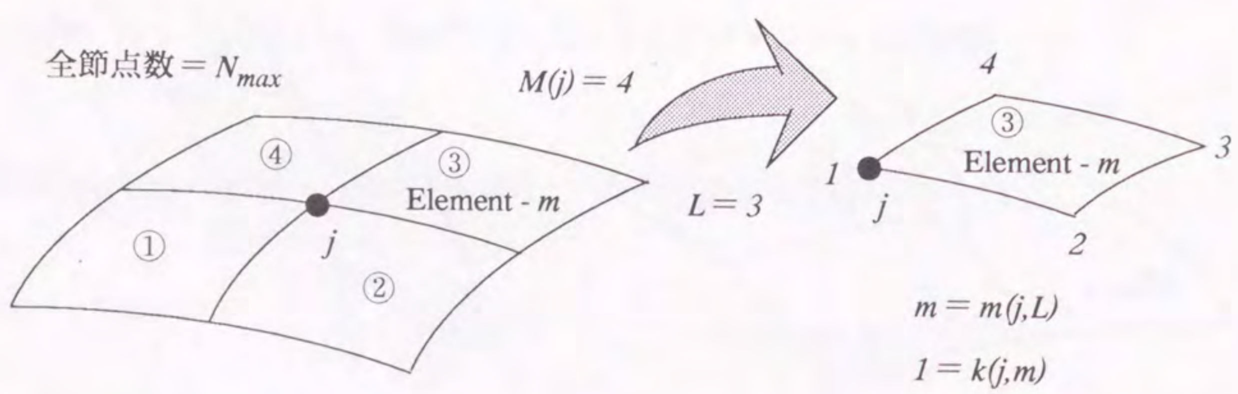


Fig.3.5.6　要素を節点 j に属するグループとみなした様子

以上のことから、離散化積分方程式(3.5.8)は、

$$- C_O(i)\ \phi(i) \ + \sum_{j=1}^{N_{max}} \phi(j) \sum_{L=1}^{M(j)} \int_{\Delta S_H} N_{k(j,m)}(Q) \frac{\partial\ G_w(i,Q)}{\partial\ n_{(Q)}}\ dS_{(Q)}$$

$$- \ \lambda \sum_{j=1}^{N_{max}} u_w(j)^T \sum_{L=1}^{M(j)} \int_{\Delta S_H} \hat{n_{z0}}(Q)\ N_{k(j,m)}(Q)\ G_w(i,Q)\ dS_{(Q)} \ = \ 0$$

------------------ (3.5.9)

と書き換えることができる。上式で$\phi(j)$及び$u_w(j)$はそれぞれ節点jにおける速度ポテンシャル及び振動変位である。さらに、積分項の和を示す部分は節点ポテンシャル$\phi(j)$及び節点変位$u_w(j)$の係数となっていることに注目すれば、その係数を

$$A_{ij} \ = \ - C_O(i)\ \delta_{ij} \ + \sum_{L=1}^{M(j)} \int_{\Delta S_H} N_{k(j,m)}(Q) \frac{\partial\ G_w(i,Q)}{\partial\ n_{(Q)}}\ dS_{(Q)} \qquad (3.5.10)$$

$$\mathbb{B}_{ij}{}^T \ = \ \sum_{L=1}^{M(j)} \int_{\Delta S_H} \hat{n_{z0}}(Q)^T\ N_{k(j,m)}(Q)\ \ G_w(i,Q)\ \ dS_{(Q)} \qquad (3.5.11)$$

とおいて、

$$\sum_{j=1}^{N_{max}} A_{ij}\ \phi(j) \ = \ \lambda \sum_{j=1}^{N_{max}} \mathbb{B}_{ij}{}^T\ u_w(j) \qquad (3.5.12)$$

とかくことができる。ただし、δ_{ij}はKroneckerのデルタを表す。上式を視察すれば、節点ポテンシャル$\phi(j)$及び節点変位$u_w(j)$に関する１次方程式となっていることに気がつく。未知数の数だけ方程式を作って連立させ、連立１次方程式とすればこれを解くことができる訳で、節点変位$u_w(j)$を与える（既知とする）ことを考えるならば、未知数は節点ポテンシャル$\phi(j)$となり、全節点の数N_{max}が未知数の数となる。上式は節点iに対してたてた方程式であるから、これを節点1から節点N_{max}まで順番に移動させることとすれば、最終的にはN_{max}個の方程式を作ることができることとなる。これを実行すれば、上式はマトリクス形式にて表されることとなり、節点ポテンシャル$\phi(j)$について解くことができるようになる。

さて、そのマトリクス化について示す前に、外側立体内角$C_O(i)$を求めるための離散化表現についてまとめておこう。これを計算するためには、(3.4.6),(3.4.8)式にて示したように、内側立体内角$C_I(i)$を求ておく必要がある。従って、離散化表現とは内側立体内角$C_I(i)$の積分式(3.4.5),(3.4.7)に対して行うものとなる。節点iが船体表面S_Hと自由表面S_Fとの交線上にあるときには$C_I(i)$は(3.4.7)式となり、節点iが交線上にないときには(3.4.5)式となることは以前に述べたとおりである。どちらも積分部分は同一形式をしていることから節点iが交線上にないときの式(3.4.5)に対して離散化表現を行っておけば、その結果を、節点iが交線上にあるときにも流用することができる。よって、まず、節点iが交線上にないときの式(3.4.5)に対する離散化表現を行えば、

$$C_I(i) \quad = \quad - \sum_{m=1}^{M_{max}} \int_{\Delta S_H} \frac{\partial\, G_0(i,Q)}{\partial\, n_{(Q)}} \; dS_{(Q)} \tag{3.5.13}$$

となる。上式は、船体表面S_H上での積分がM_{max}個の微小要素ΔS_H上での積分の和になったことを示しているだけであり、積分方程式の離散化表現(3.5.7)と同じ構成となっている。なお、微小要素ΔS_Hを構成する節点として点iが含まれる場合には、積分記号$dS_{(Q)}$のQから点iを除外しておく必要があり、$i \neq Q$の範囲で$1/r_1$の積分を実行せねばならないことは今までと同じである。即ち、点iを除外した特異積分（付録B）となる。

また、上式の数値計算はこの形式のままでも充分行えるのではあるが、１次方程式となった離散化積分方程式(3.5.12)とは異なった形式をしているために、計算プログラムを作成する上で別枠として扱わねばならなくなってしまう不便さがある。そこで、離散化積分方程式(3.5.12)と同じ形式とするために、次式に示す内挿関数N_kの特性を利用する。内挿関数N_kは、

$$1.0 \quad = \quad \sum_{k=1}^{k_{max}} N_k(Q) \tag{3.5.14}$$

を満足するように作られている。上式の関係は、変位$u_w(Q)$の内挿式(3.5.3)及び速度ポテンシャル$\phi(Q)$の内挿式(3.5.6)において節点での値を全て1.0とおいても得ることができるものであるが、内挿関数の式(3.5.1),(3.5.2)において直接総和をとれば確認できることでもある。そして、任意の点Qにおいて上式の関係は成立するものであるから、これが1.0となることを利用すれば、上式と$C_I(i)$の離散化表現(3.5.13)により、

$$C_I(i) \quad = \quad - \sum_{m=1}^{M_{max}} \sum_{k=1}^{k_{max}} \int_{\Delta S_H} N_k(Q) \; \frac{\partial\, G_0(i,Q)}{\partial\, n_{(Q)}} \; dS_{(Q)} \tag{3.5.15}$$

を得る。これは離散化積分方程式(3.5.8)と同形式であるから、Fig.3.5.6に示したような要素を節点に属するグループとみなす考え方を採用すれば、

$$C_I(i) \quad = \quad - \sum_{j=1}^{N_{max}} \sum_{L=1}^{M(j)} \int_{\Delta S_H} N_{k(j,m)}(Q) \; \frac{\partial\, G_0(i,Q)}{\partial\, n_{(Q)}} \; dS_{(Q)} \tag{3.5.16}$$

となる。そして、上式も離散化積分方程式(3.5.9)と同形式であることから、

$$C_{ij} \quad = \quad - \sum_{L=1}^{M(j)} \int_{\Delta S_H} N_{k(j,m)}(Q) \; \frac{\partial\, G_0(i,Q)}{\partial\, n_{(Q)}} \; dS_{(Q)} \tag{3.5.17}$$

とおけば、

$$C_I(i) \quad = \quad \sum_{j=1}^{N_{max}} C_{ij} \tag{3.5.18}$$

とかくことができる。上式は１次方程式となった離散化積分方程式(3.5.12)と全く同じ形式をしている。従って、離散化積分方程式(3.5.12)の係数A_{ij}, B_{ij}に含まれる積分項を計算しながら$C_I(i)$の積分項C_{ij}をも計算することができることとなるから、内側立体内角$C_I(i)$を計算するためのプログラムを別枠として作成する必要はなくなることがわかる。これは、サブルーチン構成と計算速度の両方の観点からみて、合理的な計算プログラムを構成することができるようになることを示している。

また、節点iが船体表面S_Hと自由表面S_Fとの交線上にある場合には、$C_I(i)$は(3.4.7)式で表されることとなるから、(3.5.17)式のC_{ij}を利用すれば、

$$C_I(i) \quad = \quad \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{N_{max}} C_{ij} \tag{3.5.19}$$

と表されることとなる。

上２式によってそれぞれの場合の内側立体内角$C_I(i)$を得ることができる。これらは節点iに対してたてた方程式であるから、これを節点1から節点N_{max}まで順番に移動させることとすれば、最終的にはN_{max}個の内側立体内角$C_I(i)$を得ることができることとなる。なお、$C_I(i)$を計算する際には、節点ポテンシャル$\phi(j)$について解く場合とは違って、マトリクス化する必要などはない。また、上２式に(3.4.6)或いは(3.4.8)式を利用すれば外側立体内角$C_O(i)$を求めることができる。具体的に示しておけば、

節点iが船体表面S_Hと自由表面S_Fとの交線上にある場合には、

$$C_O(i) \quad = \quad 2\pi \quad - \quad \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{N_{max}} C_{ij} \qquad (3.5.20)_{-1}$$

となり、節点iが船体表面S_Hと自由表面S_Fとの交線上にない場合には、

$$C_O(i) \quad = \quad 4\pi \quad - \quad \sum_{j=1}^{N_{max}} C_{ij} \qquad (3.5.20)_{-2}$$

となる。

外側立体内角$C_O(i)$は離散化積分方程式(3.5.12)の係数A_{ij}に含まれているから、上式によって、係数A_{ij}に関する離散化表現は完了したこととなる。もう少し正確に述べよう。A_{ij}, $\mathbb{B}_{ij}$, C_{ij}に含まれる積分については付録Bに示す数値積分にてその評価を行うけれども、その数値計算が可能であることを前提とすれば離散化積分方程式(3.5.12)の係数A_{ij}, $\mathbb{B}_{ij}$は以上によって完全に定まったこととなる。従って、離散化積分方程式(3.5.12)のマトリクス化について述べることができる。方程式を再記すれば、

$$\sum_{j=1}^{N_{max}} A_{ij}\, \phi(j) \quad = \quad \lambda \sum_{j=1}^{N_{max}} \mathbb{B}_{ij}{}^T\, u_w(j) \qquad (3.5.12)_{再記}$$

であった。上式の節点iを節点1から節点N_{max}まで順番に移動させれば、N_{max}個の方程式を作ることができる。今、N_{max}のことを単にNとかくことにして、その詳細を示せば、

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1N} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2N} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{N1} & A_{N2} & \cdots & A_{NN} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \phi(1) \\ \phi(2) \\ \vdots \\ \vdots \\ \phi(N) \end{Bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} \mathbb{B}_{11}{}^T & \mathbb{B}_{12}{}^T & \cdots & \mathbb{B}_{1N}{}^T \\ \mathbb{B}_{21}{}^T & \mathbb{B}_{22}{}^T & \cdots & \mathbb{B}_{2N}{}^T \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \mathbb{B}_{N1}{}^T & \mathbb{B}_{N2}{}^T & \cdots & \mathbb{B}_{NN}{}^T \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_w(1) \\ u_w(2) \\ \vdots \\ \vdots \\ u_w(N) \end{Bmatrix}$$

---------------- (3.5.21)

となる。そして、上式の関係を、

$$\underset{N_{max}\times N_{max}}{[A]}\ \underset{N_{max}\times 1}{\{\phi\}} \quad = \quad \lambda\ \underset{N_{max}\times 3N_{max}}{[B]}\ \underset{3N_{max}\times 1}{\{u_w\}} \qquad (3.5.22)$$

と表すこととする。このとき、$[A]$のサイズはN_{max}行N_{max}列、$[B]$のサイズはN_{max}行$3N_{max}$列となり、$\{\phi\}$のサイズはN_{max}行、$\{u_w\}$のサイズは$3N_{max}$行となる。また、$n_{z0}^{\wedge}(Q)$は単位法線ベクトルの絶対座標系での成分を意味するものであったが、$[B]$のサイズに現れる$3N_{max}$の3はこの$n_{z0}^{\wedge}(Q)$の成分数に由来するものである。そして、$\{u_w\}$のサイズに現れる$3N_{max}$の3はu_wを絶対座標系での成分で記述することに由来するものである。なお、$n_{z0}^{\wedge}(Q)$が$\mathbb{B}_{ij}$の式(3.5.11)において積分記号内部に入っていることが、高次要素に対応した定式化の特徴となっている。以降、上式のことをマトリクス化した積分方程式と呼ぶ。

上式において節点変位$\{u_w\}$を与えることを考えるならば、即ち、節点変位$\{u_w\}$を既知とするならば、右辺は計算を実行することができてN_{max}行のベクトルとなるから、未知数を節点ポテンシャル$\{\phi\}$とした連立１次方程式となる。この場合にはGaussの消去法によって、節点ポテンシャル$\{\phi\}$を得ることができる。このように節点変位$\{u_w\}$を既知とするのは、解きたい問題における船体の振動モードがあらかじめ決定されている場合である。ところが、船殻構造と流体との連成問題を扱う場合には、連成した結果の船体の振動モードを与えねばならないのにこれがわからない訳であるから、あらかじめ船体の振動モードを与えることなどできようはずがない。そこで、$[A]$の逆行列$[A]^{-1}$を両辺に乗じて節点変位$\{u_w\}$を未知数としたまま速度ポテンシャル$\{\phi\}$を表し、さらに付加質量マトリクスとして定式化する方法が開発[45),46)] (根木,1980,1982)されることとなった。この文献では一定要素による特異点分布法が利用されているが、逆行列$[A]^{-1}$を両辺に乗じる方法は上式に対しても利用できる。これを行えば、

$$\{\phi\} \quad = \quad \lambda\ [A]^{-1}\ [B]\ \{u_w\} \qquad (3.5.23)_{-1}$$

となる。上式は、速度ポテンシャル$\{\phi\}$が節点変位$\{u_w\}$の１次関数となったことを表している。そして、上式の段階になってから節点変位$\{u_w\}$を既知としても、速度ポテンシャル$\{\phi\}$を得ることができる。ただし、この場合には逆行列$[A]^{-1}$を計算し、さらに$[A]^{-1}[B]$を計算してからでないと目的とする速度ポテンシャル$\{\phi\}$を得ることはできないので、計算時間が相当余分にかかることとなる。しかし、$\{\phi\}$によって要素表面における速度ポテンシャルの分布を表現することができているから、要素表面に平行な流体速度を$\{u_w\}$によって表すことが可能となる。これによって振動境界層外端での速度ベクトルを得ることができる(4章)。

なお、上式右辺において$[A]^{-1}[B]$のことを$[AiB]$とおいて、

$$\underset{N_{max}\times 3N_{max}}{[AiB]} \quad = \quad \underset{N_{max}\times N_{max}}{[A]^{-1}}\ \underset{N_{max}\times 3N_{max}}{[B]} \qquad (3.5.23)_{-2}$$

$$\{\phi\} \quad = \quad \lambda\ [AiB]\ \{u_w\} \qquad (3.5.23)_{-3}$$

と表すこととする。

3．6　付加質量マトリクス

（1）付加質量マトリクスの作成

逆行列$[A]^{-1}$を利用することによって付加質量マトリクスを定式化する方法[45],[46] *(根木,1980,1982)*が開発されたことについて前節に述べたが、付加質量マトリクスの定式化は特異点分布法を利用して行われるのが通例で境界要素法を用いた例はほとんどない。　そして、*1980*年代には一定要素を利用した計算が数多く行われているものの、付加質量マトリクスとして定式化する際に現れる要素面積の分配方法はあまり合理的とはいえないものである。具体的には、マトリクスサイズが要素数で支配されるよう計算された付加質量マトリクスを(要素面積)／(節点数)の値でもって節点に再度分配する方法が利用されているのが通例である。それ故にその詳細について論じた文献はみあたらず、多数ある文献のそのいずれもが、要素面積の分配方法についてはややぼかした表現となっている。最近でこそ、一定要素を利用しつつも要素面積の分配方法に気を配った方法[61] *(笹島,1995)*が紹介されているけれども、一定要素を利用する限りその効果には限界があるといえよう。境界要素法を用いて付加質量マトリクスを定式化した例は少ないが、そのひとつとして文献[49] *(Ohta,1985)*がある。しかし、ここでも一定要素が利用されており要素面積の分配方法はやはり合理的とはいえないものとなっている。*1980*年代後半になると付加質量マトリクスとしては定式化せずに１次以上の要素を用いた解析例[58] *(松井,1988)*がいくつか出てきたものの、付加質量マトリクスを定式化するにあたって１次以上の要素を用いた例はみあたらず、その定式化が面倒であることを想像させるものであった。ところが、境界要素法において実際にそれを行ってみると非常に便利な結果が得られ、その考え方を利用することによって振動境界層内部での定式化も可能となることがわかった。その内容については文献[54] *(著者,1996)*にて述べられており、これに従って、高次要素に対応した付加質量マトリクスの定式化を示すことにする。

まず、ある要素mの表面における流体の圧力について考える。要素m上の任意点Qにおける圧力を$P(Q;t)$とおけば、圧力の式(3.2.5)より、

$$P(Q;t) \quad = \quad -\lambda\,\rho\,\phi(Q)\ e^{\lambda t} \qquad (3.6.1)$$

が得られる。上式右辺の速度ポテンシャル$\phi(Q)$に対して内挿補間式(3.5.6)を適用すれば、

$$P(Q;t) \quad = \quad -\lambda\,\rho\ e^{\lambda t} \sum_{k=1}^{k_{max}} N_k(Q)\ \phi_k \qquad (3.6.2)$$

となる。この圧力$P(Q;t)$は連続体としての流体の圧力であって、このままの値でもって要素表面に作用するものではなく、これは流体に作用する平均応力であったことを思い出さねばならない。平均応力と圧力の関係をあらためてかけば、局部デカルト座標系に対して、

$$\sigma_{\hat{x}}(Q;t) \ + \ \sigma_{\hat{y}}(Q;t) \ + \ \sigma_{\hat{z}}(Q;t) \quad = \quad -3\,P(Q;t) \qquad (3.6.3)$$

である。ここで、右辺に負号がついていることに注意する。そして、$\sigma(Q;t)$は垂直応力であり、これが微小直方体の$\hat{x}\hat{y}$平面に働く応力の様子をかけばFig.3.6.1のようになる。ここで、圧力$-P(Q;t)$に相当するものが$\sigma_{\hat{z}}(Q;t)$である。また、ポテンシャル問題なので剪断応力は働かない。

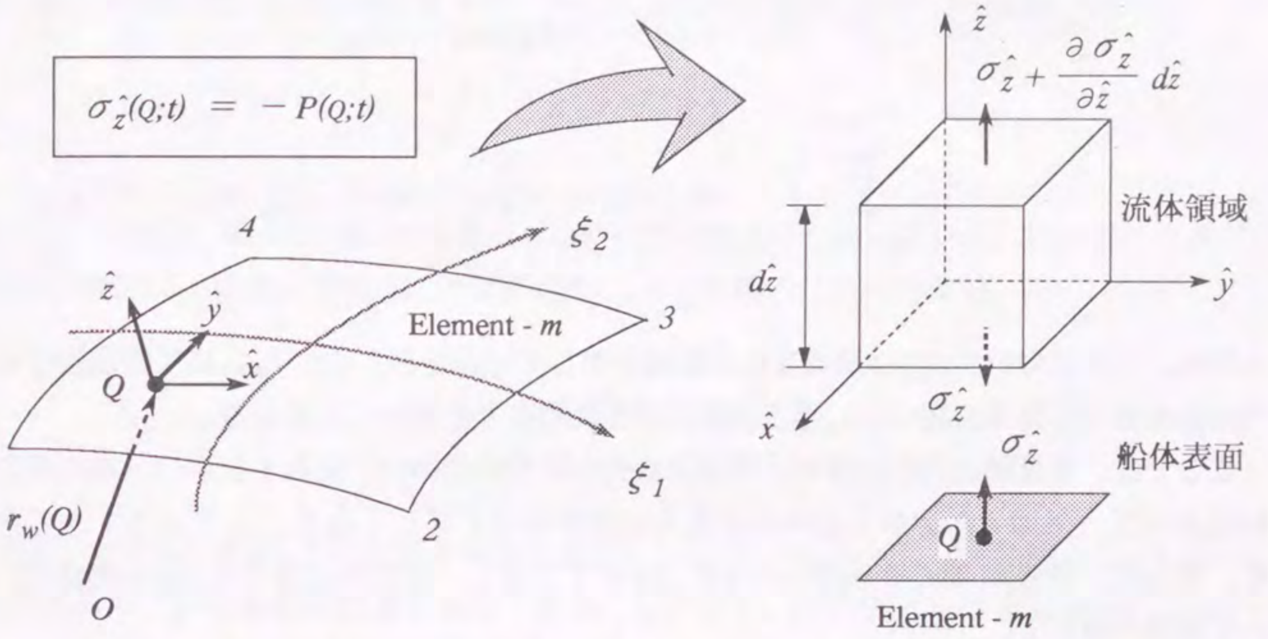


Fig.3.6.1　$\hat{x}\hat{y}$平面における表面力の成分

同図では要素mの表面が$\hat{x}\hat{y}$平面に一致する場合を考えているので、要素mに作用する応力とは、作用反作用の関係から、法線方向垂直応力$\sigma_{\hat{z}}(Q;t)$だけとなることがわかる。従って、要素mに作用する応力$\sigma_{\hat{z}}(Q;t)$のことを単に$\sigma(Q;t)$とかくことにすれば、

$$\sigma(Q;t) \quad = \quad -P(Q;t) \quad = \quad \lambda\,\rho\ e^{\lambda t} \sum_{k=1}^{k_{max}} N_k(Q)\ \phi_k \qquad (3.6.4)$$

なる関係を得ることとなる。

一方、点Qにおける法線方向速度$V_n(Q;t)$は(3.2.3)式にて与えられるから、

$$V_n(Q;t) \quad = \quad \lambda\ \ n_{\hat{z}0}(Q)^T\ u_w(Q)\ e^{\lambda t} \qquad (3.6.5)$$

を得る。上式右辺の変位$u_w(Q)$に対して内挿補間式(3.5.3)を適用すれば、

$$V_n(Q;t) \quad = \quad \lambda\ e^{\lambda t}\ \ n_{z0}^{\hat{}}(Q)^T \sum_{k=1}^{k_{max}} N_k(Q)\ u_{wk} \qquad (3.6.6)$$

となる。

以上により、要素mに働く外力$\sigma(Q;t)$が単位時間あたりになす仕事$dW_m(t)/dt$を計算することができるようになって、応力の式(3.6.4)及び法線速度の式(3.6.6)においてその実部をとれば、

$$\frac{dW_m(t)}{dt} \quad = \quad \int_{\Delta S_H} Re\,[\,\sigma(Q;t)]\quad Re\,[V_n(Q;t)]\quad dS_{(Q)}$$

$$= \quad \sum_{k=1}^{k_{max}} \int_{\Delta S_H} Re\,[\,\sigma(Q;t)]\ \ n_{z0}^{\hat{}}(Q)^T\ N_k(Q)\ \ dS_{(Q)}\ Re\,[\,\lambda\, e^{\lambda t}\ u_{wk}]$$

----------- (3.6.7)

となる。上式においてu_{wk}は節点変位の振幅を表しているから、$\lambda e^{\lambda t} u_{wk}$にて節点速度を示すものとなっている。従って、残りの部分は等価節点力を表すこととなる。

ここでは、等価節点力の定義を「等価節点力が単位時間あたりになす仕事は、あらゆる時刻において、外力$\sigma(Q;t)$が単位時間あたりになす仕事に等しくなる」ような力であるとする。そして、節点iに働く等価節点力を$\mathbb{F}_w(i;t)$にて定義し、変位の定義式(3.2.1)と同様に、これを変数分離して、

$$\mathbb{F}_w(i;t) \quad = \quad f_w(i)\ \ e^{\lambda t} \qquad (3.6.8)$$

と表すこととする。節点iを頂点としてもつ要素のグループを考えるとき、その様子はFig.3.5.6の如きものとなるから、$f_w(i)$とは各々の要素において節点iに働く等価節点力の総和として与えられることになる。そこで、要素mに関する仕事を考えた場合に局部節点番号kなる節点に働く等価節点力をf_{wk}にて定義すれば、節点iの局部番号kは$k(i,m)$となるから、節点iに関するf_{wk}とは$f_{wk(i,m)}$にて表現されることになる。従って、節点iに働く等価節点力$f_w(i)$は、

$$f_w(i) \quad = \quad \sum_{L=1}^{M(i)} f_{wk(i,m)} \qquad (3.6.9)$$

となる。ここで、要素番号mは節点番号iと順番Lの関数となるから、$m(i,L)$を意味している。また、$M(i)$は節点iに属する要素の総数であり、これらについてはFig.3.5.6で述べた内容と同じである。

では、要素mを構成する節点に働く等価節点力f_{wk}が単位時間あたりになす仕事について計算してみよう。この仕事は(3.6.7)式の$dW_m(t)/dt$と等しくなるべきものであるから、同じ記号$dW_m(t)/dt$を使えば、

$$\frac{dW_m(t)}{dt} \quad = \quad \sum_{k=1}^{k_{max}} Re\,[\,f_{wk}{}^T\, e^{\lambda t}]\ Re\,[\,\lambda\, e^{\lambda t}\, u_{wk}] \qquad (3.6.10)$$

となる。

上式と(3.6.7)式を比較すれば節点速度$\lambda e^{\lambda t} u_{wk}$の項が一致していることからその係数ベクトルはいずれも等しくならねばならず、特に$k(i,m)$なる場合について示せば、

$$f_{wk(i,m)}{}^T\, e^{\lambda t} \quad = \quad \int_{\Delta S_H} n_{z0}^{\hat{}}(Q)^T\ \ \sigma(Q;t)\ \ N_{k(i,m)}(Q)\ \ dS_{(Q)} \qquad (3.6.11)$$

を得る。上式は、節点iに関して要素m上で働く等価節点力を表している。さらに、上式右辺に応力の式(3.6.4)を代入すれば、等価節点力$f_{wk(i,m)}$を得ることができて、

$$f_{wk(i,m)} \quad = \quad \lambda\,\rho \sum_{k^*=1}^{k_{max}} \phi_{k^*} \int_{\Delta S_H} n_{z0}^{\hat{}}(Q)\ N_{k(i,m)}(Q)\ N_{k^*}(Q)\ \ dS_{(Q)} \qquad (3.6.12)$$

となる。どのkも要素mの局部節点番号を表すことに違いはないが、記号k^*は$k(i,m)$とは異なるkであって、k^*は総和に関連する項であることを示す。k^*及び$k(i,m)$の関係をFig.3.6.2に示す。そして、上式を視察すれば、節点ポテンシャルϕ_{k^*}ごとに整理しなおすことができることに気がつく。ある節点k^*の節点番号をjとすれば節点ポテンシャルϕ_{k^*}のことを$\phi(j)$とかくことができるから、上式の総和記号を分解することによって節点番号jに対応する等価節点力を新たに定義することができて、これを$f_w{}^m{}_{ij}$とかくことにする。

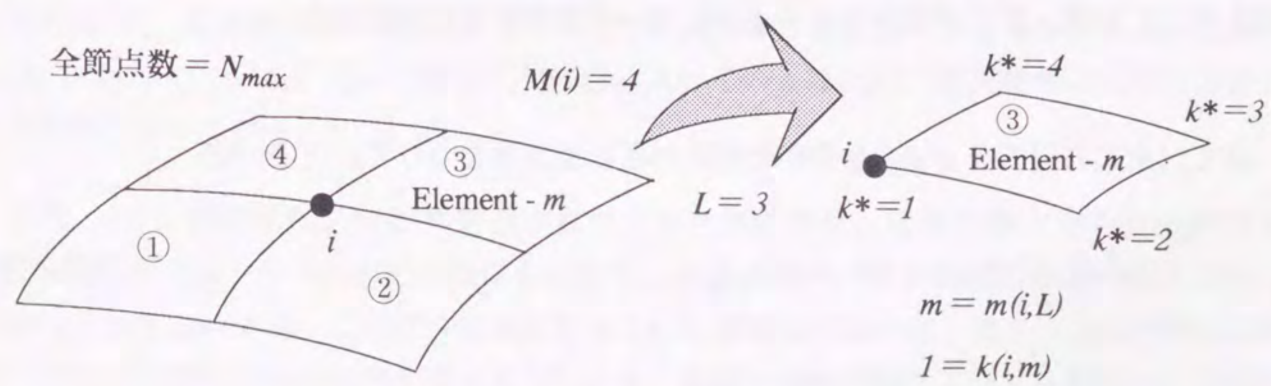


Fig.3.6.2 要素を節点 i に属するグループとみなした様子

等価節点力$f_w{}^m{}_{ij}$は、節点jの速度ポテンシャル$\phi(j)$が節点iに及ぼす影響を表すもので、

$$f_w{}^m{}_{ij} \quad = \quad \lambda\,\rho\,\phi(j) \int_{\Delta S_H} \hat{n}_{z0}(Q)\; N_{k(i,m)}(Q)\; N_{k(j,m)}(Q)\;\; dS_{(Q)} \tag{3.6.13}$$

となる。上式は節点iと節点jが共に要素mを構成する節点であることを前提とするものである。従って、節点iとjが同じ要素にないときには、等価節点力$f_w{}^m{}_{ij}$はゼロとなる。

節点iを頂点としてもつ要素のグループにおいて、節点jに関係する各々の要素での等価節点力$f_w{}^m{}_{ij}$を求めておいてその総和をとれば、速度ポテンシャル$\phi(j)$が節点iに及ぼす影響を完全に表すことができる。例えばFig.3.6.2において要素mの局部節点番号$k*=1$が節点jであるならば、即ち節点iとjが同一ならば、これに関連する要素は①②③④の４つである。また、要素mの局部節点番号$k*=2$が節点jであるならばこれに関連する要素は②③の２つである。そして、要素mの局部節点番号$k*=3$が節点jであるならばこれに関連する要素は③の１つだけである。従って、節点iとjとの関係を表す等価節点力をf_{wij}とすれば、

$$f_{wij} \quad = \quad \sum_{L=1}^{M(i)} f_w{}^m{}_{ij}$$

$$= \quad \lambda\,\rho\,\phi(j) \sum_{L=1}^{M(i)} \int_{\Delta S_H} \hat{n}_{z0}(Q)\; N_{k(i,m)}(Q)\; N_{k(j,m)}(Q)\;\; dS_{(Q)} \tag{3.6.14}$$

と表されることになる。そして、節点iとjが同じ要素にないときには右辺の積分項はゼロとなる。ここで、Fig.3.6.2を例として、(3.6.9)式に示した節点iに働く等価節点力$f_w(i)$と上式との関係について考えよう。Fig.3.6.2では節点iに関係する４つの要素を示しているが、この４つの要素を構成する節点は全部で９つある。節点jをこの９節点全てにあてはめて９つのf_{wij}を求め、その総和をとれば$f_w(i)$と一致することになる。この関係は、(3.6.9)式に(3.6.12)式を代入した後、節点ポテンシャル$\phi(j)$について整理すれば確認できる。

さて、上式右辺で$\lambda\,\rho\,\phi(j)$を除いた項にわざわざ負号をつけて$\mathbb{S}_{ij}$とおけば、

$$f_{wij} \quad = \quad -\,\lambda\,\rho\,\phi(j)\;\mathbb{S}_{ij} \tag{3.6.15}$$

$$\mathbb{S}_{ij} \quad = \quad -\sum_{L=1}^{M(i)} \int_{\Delta S_H} \hat{n}_{z0}(Q)\; N_{k(i,m)}(Q)\; N_{k(j,m)}(Q)\;\; dS_{(Q)} \tag{3.6.16}$$

となる。ただし、節点iと節点jが同じ要素m上にないときには、上式右辺の積分項をゼロとせねばならない。ここが、A_{ij}および$\mathbb{B}_{ij}$とは大きく異なるところである。そして、1からN_{max}までの全ての節点jについて上式を計算してその総和をとれば、節点iに働く等価節点力$f_w(i)$が得られる。この関係を式にすれば、

$$f_w(i) \quad = \quad -\,\lambda\,\rho \sum_{j=1}^{N_{max}} \mathbb{S}_{ij}\;\phi(j) \tag{3.6.17}$$

である。上式は節点iに対してたてた方程式となっているから、これを節点1から節点N_{max}まで順番に移動させることとすれば、最終的にはN_{max}個の方程式を作ることができることとなる。これを実行すれば、上式はマトリクス形式にて表されることとなる。今、N_{max}のことを単にNとかくことにして、その詳細を示せば、

$$\begin{Bmatrix} f_w(1) \\ f_w(2) \\ \vdots \\ \vdots \\ f_w(N) \end{Bmatrix} = -\,\lambda\,\rho \begin{bmatrix} \mathbb{S}_{11} & \mathbb{S}_{12} & \cdots & \mathbb{S}_{1N} \\ \mathbb{S}_{21} & \mathbb{S}_{22} & \cdots & \mathbb{S}_{2N} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \mathbb{S}_{N1} & \mathbb{S}_{N2} & \cdots & \mathbb{S}_{NN} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \phi(1) \\ \phi(2) \\ \vdots \\ \vdots \\ \phi(N) \end{Bmatrix} \tag{3.6.18}$$

となる。そして、上式の関係を、

$$\underset{3N_{max}\times 1}{\{f_w\}} \quad = \quad -\,\lambda\,\rho \;\; \underset{3N_{max}\times N_{max}}{[\mathbb{S}]} \; \underset{N_{max}\times 1}{\{\phi\}} \tag{3.6.19}$$

と表すこととする。$[\mathbb{S}]$のサイズは$3N_{max}$行N_{max}列となり、$\{f_w\}$のサイズは$3N_{max}$行となる。また、$\hat{n}_{z0}(Q)$は単位法線ベクトルの絶対座標系での成分を意味するものであったが、$[\mathbb{S}]$のサイズに現れる$3N_{max}$の3はこの$\hat{n}_{z0}(Q)$の成分数に由来するものである。そして、$\{f_w\}$のサイズに現れる$3N_{max}$の3はf_wを絶対座標系での成分で記述することに由来するものである。なお、$\hat{n}_{z0}(Q)$が$\mathbb{S}_{ij}$の式(3.6.16)において積分記号内部に入っていることが、高次要素に対応した定式化の特徴となっている。

また、$[\mathbb{S}]$は要素面積の分配作用をするマトリクスであり、仕事の観点から等価節点力$\{f_w\}$と節点ポテンシャル$\{\phi\}$との関係を表していることから、要素面積の分配方法はかなり合理的であるといえる。これは、従来法とは大いに異なる点である。なお、上式を導くにあたって単位時間あたりの仕事を考えたけれども、仮想仕事の原理によっても導くことができて、その結果は上式と全く同じになる。そして、$[\mathbb{S}]$の構成要素である$\mathbb{S}_{ij}$の式(3.6.16)に含まれる積分については、付録Bに述べる数値積分によって行う。

上式の関係に、速度ポテンシャルの式(3.5.23)を代入すれば、

$$\{f_w\} = -\lambda^2 \rho\ [S]\ [A]^{-1}\ [B]\ \{u_w\}$$

$$= -\lambda^2 \rho\ [S]\ [AiB]\ \{u_w\} \qquad (3.6.20)$$

を得る。これは、等価節点力$\{f_w\}$が節点変位$\{u_w\}$の１次関数となったことを表している。さらに、$\rho[S][AiB]$のことを$[M_w]$と表せば、$[M_w]$は付加質量マトリクスを表すことになる。

$$\underset{3N_{max}\times 3N_{max}}{[M_w]} = \rho \underset{3N_{max}\times N_{max}}{[S]} \underset{N_{max}\times 3N_{max}}{[AiB]} \qquad (3.6.21)$$

$[M_w]$が質量に関連するマトリクスとなることは、等価節点力$\{f_w\}$が船体表面に作用する外力であることを考慮しつつ船殻の振動方程式をたてればよくわかる。振動方程式については後述するが、ここでは$[M_w]$が付加質量マトリクスであることを前提としておく。付加質量マトリクス$[M_w]$を用いて等価節点力$\{f_w\}$を表せば、

$$\{f_w\} = -\lambda^2\ [M_w]\ \{u_w\} \qquad (3.6.22)$$

となる。なお、付加質量マトリクス$[M_w]$は実数で構成されるものであって、複素数とはならない。

（２）流体の運動エネルギ

ここでは、流体のもつ運動エネルギについて考えながら、付加質量マトリクス$[M_w]$が持つ幾つかの特徴に関して述べる。

流体のもつ運動エネルギを$T_w(t)$とすれば、単位体積の運動エネルギを流体領域で積分して

$$T_w(t) = \frac{1}{2}\int_V \rho\ grad[Re[\Phi(x,y,z;t)]]\ grad[Re[\Phi(x,y,z;t)]]\ dV \qquad (3.6.23)$$

と表すことができる。上式をGreenの第１定理にあてはめれば、

$$T_w(t) = -\frac{1}{2}\rho\int_S Re[\Phi(x,y,z;t)]\ \frac{\partial Re[\Phi(x,y,z;t)]}{\partial n}\ dS \qquad (3.6.24)$$

を得る。ここに境界面Sは流体領域を囲むものであって、自由表面S_F、水底S_B、無限遠方S_R、および岸壁S_Wの条件により、積分領域である境界面は船体表面S_Hだけが残るから、

$$T_w(t) = -\frac{1}{2}\rho\int_{S_H} Re[\Phi(x,y,z;t)]\ \frac{\partial Re[\Phi(x,y,z;t)]}{\partial n}\ dS \qquad (3.6.25)$$

を得る。さらに法線微分項は船体表面接水部分の法線方向速度を示しているから、(3.2.3)式により、

$$T_w(t) = -\frac{1}{2}\rho\int_{S_H} Re[\lambda\ u_w(x,y,z)^T\ e^{\lambda t}]\ \hat{n_{z0}}\ Re[\Phi(x,y,z;t)]\ dS \qquad (3.6.26)$$

を得る。速度ポテンシャル$\Phi(x,y,z;t)$に対しても変数分離式(3.2.4)を適用し、座標変数(x,y,z)が船体表面上の点であることから(Q)と表すこととすれば、

$$T_w(t) = -\frac{1}{2}\rho\int_{S_H} Re[\lambda\ u_w(Q)^T e^{\lambda t}]\ \hat{n_{z0}}(Q)\ Re[\phi(Q)\ e^{\lambda t}]\ dS \qquad (3.6.27)$$

となる。上式を離散化して、内挿補間式(3.5.3)(3.5.6)を利用すれば、

$$T_w(t) = -\frac{1}{2}\rho\sum_{m=1}^{M_{max}}\sum_{k=1}^{k_{max}}\sum_{k*=1}^{k_{max}} Re[\lambda\ u_{wk}{}^T e^{\lambda t}]$$

$$\int_{\Delta S_H} \hat{n_{z0}}(Q)\ N_k(Q)\ N_{k*}(Q)\ \ dS_{(Q)}\ \ Re[\phi_{k*} e^{\lambda t}] \qquad (3.6.28)$$

となる。そして、Fig.3.6.2を参考にして上式を節点iの変位$u_w(i)$について整理すれば、局部節点番号kは$k(i,m)$と表され、節点iに属する要素の数は$M(i)$となって要素番号mは$m(i,L)$と表されることとなるから、

$$T_w(t) = -\frac{1}{2}\rho \sum_{i=1}^{N_{max}} Re[\lambda\, u_w(i)^T e^{\lambda t}] \sum_{L=1}^{M(i)} \sum_{k*=1}^{k_{max}} \int_{\Delta S_H} \hat{n}_{z0}(Q)\, N_{k(i,m)}(Q)\, N_{k*}(Q)\, dS_{(Q)}\; Re[\phi_{k*} e^{\lambda t}] \qquad (3.6.29)$$

となる。さらに、上式を節点jの速度ポテンシャル$\phi(j)$について整理すれば、局部節点番号$k*$は$k(j,m)$と表されることとなる。なお、これは節点iと節点jが共に要素mを構成する節点であることを前提とするものであるから、節点iとjが同じ要素にないときには上式の積分項をゼロとして扱うことになる。これにより、

$$T_w(t) = -\frac{1}{2}\rho \sum_{i=1}^{N_{max}} Re[\lambda\, u_w(i)^T e^{\lambda t}] \sum_{j=1}^{N_{max}} Re[\phi(j)\, e^{\lambda t}] \sum_{L=1}^{M(i)} \int_{\Delta S_H} \hat{n}_{z0}(Q)\, N_{k(i,m)}(Q)\, N_{k(j,m)}(Q)\, dS_{(Q)} \qquad (3.6.30)$$

を得る。上式右辺の積分項は(3.6.16)式に示した$\mathbb{S}_{ij}$と全く同じで、運動エネルギ$T_w(t)$を考えることによっても$\mathbb{S}_{ij}$を導けることがわかる。$\mathbb{S}_{ij}$を利用すればマトリクス$[S]$に関する２次形式のベクトル積を得ることができて、

$$T_w(t) = \frac{1}{2}\rho \sum_{i=1}^{N_{max}} Re[\lambda\, u_w(i)^T e^{\lambda t}] \sum_{j=1}^{N_{max}} \mathbb{S}_{ij}\, Re[\phi(j)\, e^{\lambda t}]$$

$$= \frac{1}{2}\rho\; Re[\lambda\, \{u_w\}^T e^{\lambda t}]\; [S]\; Re[\{\phi\}\, e^{\lambda t}] \qquad (3.6.31)$$

となる。そして、上式右辺の速度ポテンシャル$\{\phi\}$に(3.5.23)式を代入すれば、

$$T_w(t) = \frac{1}{2}\rho\; Re[\lambda\, \{u_w\}^T e^{\lambda t}]\; [S]\,[AiB]\; Re[\lambda\, \{u_w\}\, e^{\lambda t}]$$

$$= \frac{1}{2}\; Re[\lambda\, \{u_w\}^T e^{\lambda t}]\; [M_w]\; Re[\lambda\, \{u_w\}\, e^{\lambda t}] \qquad (3.6.32)$$

を得る。上式右辺の$\lambda\{u_w\}^T e^{\lambda t}$及び$\lambda\{u_w\} e^{\lambda t}$は共に節点速度を表しているから、運動エネルギ$T_w(t)$とは、付加質量マトリクス$[M_w]$を挟んだ節点速度ベクトルによる２次形式にて表されるものであることがわかる。また、運動エネルギ$T_w(t)$は必ず正であって、負になることがあってはならないものである。ただし、$[M_w]$の両側から掛かっている節点速度ベクトルそのものがゼロとなる特別な場合には、当然、運動エネルギ$T_w(t)$もゼロになる。しかし、節点速度ベクトルがゼロでないときには、運動エネルギ$T_w(t)$もゼロになってはならない。この意味で、上式の２次形式は常に正であるといえる。

２次形式が正であることから、$[M_w]$は「正の定符号マトリクス」となることが知れる。さらに、後述する方法で$[M_w]$が対称行列となることを証明できる。そして、「ある対称行列が正の定符号マトリクスとなるための必要十分条件は、その対称行列の固有値が全て正となることである。」という定理が存在するから、標準固有値問題において$[M_w]$の固有値は全て正となることを導くことができる。

$[M_w]$が対称行列となることを示すために、上式を少し変形しておこう。節点変位$\{u_w\}$の実部を$\{u_w{}^R\}$、虚部を$\{u_w{}^I\}$とおけば、

$$T_w(t) = \frac{1}{2}\omega^2 \Big[\{u_w{}^R\}^T [M_w] \{u_w{}^R\} \sin^2 \omega t + \{u_w{}^I\}^T [M_w] \{u_w{}^I\} \cos^2 \omega t$$

$$+ [\{u_w{}^R\}^T [M_w] \{u_w{}^I\} + \{u_w{}^I\}^T [M_w] \{u_w{}^R\}] \sin \omega t \cos \omega t \Big] \qquad (3.6.33)$$

を得る。なお、上式では(3.2.1)式にて定義した$\lambda = i\omega, i = \sqrt{-1}$の関係を用いている。上式を時間$t$で微分すれば、流場のもつ運動エネルギの時間的変化$dT_w(t)/dt$を表すことになって、

$$\frac{d\,T_w(t)}{d\,t} = \omega^3 \Big[[\{u_w{}^R\}^T [M_w] \{u_w{}^R\} - \{u_w{}^I\}^T [M_w] \{u_w{}^I\}] \sin \omega t \cos \omega t$$

$$+ \frac{1}{2} [\{u_w{}^R\}^T [M_w] \{u_w{}^I\} + \{u_w{}^I\}^T [M_w] \{u_w{}^R\}] \cos 2\omega t \Big] \qquad (3.6.34)$$

を得る。

さて、等価節点力$\{f_w\}$が船体表面を通じて船殻になす仕事と船体表面が流場になす仕事との関係は、絶対値が等しくて符号は逆となるものである。よって、その合計はゼロとなる。これは、等価節点力$\{f_w\}$に負号をつけたものが流場に作用する力になるとして、船体表面が流場になす仕事を計算しても良いことを示している。また、今考えている流場は非粘性のポテンシャル場であるから、散逸エネルギの存在しない保存力の場である。保存力の場でひずみエネルギが存在しない系において、仕事は運動エネルギの変化量を表すこととなる。

従って、$-\{f_w\}$による仕事を計算すればそれは船体表面が流場になす仕事となって、その仕事は流場のもつ運動エネルギの変化量を表すこととなる。さらに、船体表面が流場に対して単位時間あたりになす仕事$dW_w(t)/dt$を計算すれば、これは流場のもつ運動エネルギの時間的変化$dT_w(t)/dt$を表すことになって、

$$\frac{dW_w(t)}{dt} = \frac{dT_w(t)}{dt} \tag{3.6.35}$$

となる。上式左辺を計算するために、節点速度及び流場に作用する力の実部をとって乗じれば、

$$\begin{aligned}\frac{dW_w(t)}{dt} &= Re[\,\lambda\{u_w\}^T e^{\lambda t}\,]\; Re[\,-\{f_w\}e^{\lambda t}\,] \\ &= Re[\,\lambda\{u_w\}^T e^{\lambda t}\,]\; Re[\,\lambda^2[M_w]\{u_w\}e^{\lambda t}\,]\end{aligned} \tag{3.6.36}$$

となる。上式に対しても節点変位$\{u_w\}$の実部を$\{u_w^R\}$、虚部を$\{u_w^I\}$とおけば、

$$\begin{aligned}\frac{dW_w(t)}{dt} = \omega^3 \Big[&[\{u_w^R\}^T[M_w]\{u_w^R\} - \{u_w^I\}^T[M_w]\{u_w^I\}]\sin\omega t\ \cos\omega t \\ &+ \frac{1}{2}[\{u_w^R\}^T[M_w]\{u_w^I\} + \{u_w^I\}^T[M_w]\{u_w^R\}]\cos 2\omega t \\ &+ \frac{1}{2}[\{u_w^I\}^T[M_w]\{u_w^R\} - \{u_w^R\}^T[M_w]\{u_w^I\}]\Big]\end{aligned} \tag{3.6.37}$$

となる。上式は、(3.6.35)式の関係から、(3.6.34)式に示した運動エネルギの時間的変化$dT_w(t)/dt$に等しくなければならない。従って、上式右辺第３項はゼロとならねばならず、

$$\{u_w^I\}^T[M_w]\{u_w^R\} = \{u_w^R\}^T[M_w]\{u_w^I\} \tag{3.6.38}$$

なる関係が成立する必要がある。上式の両辺はスカラーであるから、その転置をとっても同じ値となる。右辺について転置をとれば、

$$\{u_w^I\}^T[M_w]\{u_w^R\} = \{u_w^I\}^T[M_w]^T\{u_w^R\} \tag{3.6.39}$$

となる。上式が成立するためには、$[M_w]=[M_w]^T$なる関係が成立する必要がある。これは、付加質量マトリクス$[M_w]$が対称行列となることを示している。

以上のことから、$[M_w]$は正の定符号マトリクスであり、対称行列となることが知れるから、標準固有値問題において$[M_w]$の固有値は全て正となることを導くことができた。

（３）付加質量マトリクス計算の合理化

付加質量マトリクス$[M_w]$を定式化する過程において、$[M_w]$を構成する各マトリクス$[S]$,$[A]$,$[B]$に対して船体表面のメッシュ節点全てを用いて考えてきた。しかし、自由表面条件(3.2.10)により、自由表面との交線に位置する節点では速度ポテンシャルがゼロとなることがわかっているので、これについて解く必要はない。従って、その分の節点数を減らすことができる。その恩恵は全てのマトリクスサイズに及ぶ。さらに、マトリクスそのものが小さくなるということは、それらの乗算においても計算時間が減る訳であるから、計算速度を上げるためにも有益な手法である。特に、$[A]$のサイズはN_{max}行N_{max}列であり、その逆行列$[A]^{-1}$の計算には相当な時間がかかることから、少しでもマトリクスサイズを小さくしたいところである。自由表面との交線上にある節点数だけマトリクスサイズを減じる方法は、文献[50](著者,1996)に述べられている。

全節点数N_{max}から、自由表面との交線上にある節点数を減じたものをN_{min}とする。以降、N_{min}のことを減次節点数と呼ぶ。

まず、マトリクス化した積分方程式(3.5.22)について考えれば、

$$\underset{N_{min}\times N_{min}}{[A]}\ \underset{N_{min}\times 1}{\{\phi\}} = \lambda\ \underset{N_{min}\times 3N_{max}}{[B]}\ \underset{3N_{max}\times 1}{\{u_w\}} \tag{3.6.40}$$

となる。ここで、$[A]$のサイズはN_{min}行N_{min}列、$[B]$のサイズはN_{min}行$3N_{max}$列となる。特に$[A]$のサイズ減少効果が大きく、その逆行列$[A]^{-1}$の計算時間が相当短縮されることがわかる。$[B]$のサイズ減少効果は行数にあるだけで列数には影響がない。また、$\{\phi\}$のサイズはN_{min}行、$\{u_w\}$のサイズは$3N_{max}$行となる。サイズ減少効果は$\{\phi\}$にあるだけで$\{u_w\}$には影響がない。

$[A]$のサイズが減次節点数N_{min}によって支配されることから、自由表面との交線上にfield pointとしての点Pをとる必要がないことが知れる。従って、この場合には、自由表面との交線上における外側立体内角$C_O(P)$を計算する必要はなくなる。よって、外側立体内角$C_O(P)$のことを全て2πとおいた数値計算上の検討を行うことができる。これは、船体表面の要素が滑らかに結合されているとみなすことを意味する。

次に、等価節点力の式(3.6.19)について考えれば、

$$\underset{3N_{max}\times 1}{\{f_w\}} = -\lambda\rho\ \underset{3N_{max}\times N_{min}}{[S]}\ \underset{N_{min}\times 1}{\{\phi\}} \tag{3.6.41}$$

となる。ここで、$[S]$のサイズは$3N_{max}$行N_{min}列となる。$[S]$のサイズ減少効果は列数にあるだけで行数には影響がない。また、$\{f_w\}$のサイズは$3N_{max}$行となって、影響がない。

以上のことから、付加質量マトリクス$[M_w]$の式(3.6.21)は、

$$\underset{3N_{max}\times 3N_{max}}{[M_w]} = \rho \underset{3N_{max}\times N_{min}}{[S]} \underset{N_{min}\times 3N_{max}}{[AiB]} \tag{3.6.42}$$

となる。ここで、$[AiB]$のサイズはN_{min}行$3N_{max}$列となる。$[AiB]$のサイズ減少効果は行数にあるだけで列数には影響がない。また、付加質量マトリクス$[M_w]$のサイズは$3N_{max}$行$3N_{max}$列となって、影響がない。

本論文における数値計算では、全て、上記の節点減少法を用いている。回転楕円体のメッシュモデル（１次要素）において、総節点数N_{max}、減次節点数N_{min}、および総要素数M_{max}を較べてみれば、これら３つのうち減次節点数N_{min}が最も小さくなる。減次節点数N_{min}が総要素数M_{max}よりも小さくなるということは、一定要素（０次要素）を用いた定式化よりもマトリクスサイズが小さくなることを示している。次数の高い要素を使いながらマトリクスサイズまでも小さくなるという、かなり効果的な手法であることがわかる。

総節点数N_{max}、減次節点数N_{min}、および総要素数M_{max}については、後述する計算モデルの一覧表（Table 3.7.1）に記入されている。

３．７　解析解と計算例

（１）無限水深

無限水深における付加質量効果を論じた文献としては、球[26] *(Stokes,1843)*、回転楕円体の剛体振動[29] *(Lamb,1932)*、及び回転楕円体の弾性振動[30],[31],[32] *(Lewis,1929;Taylor,1930;松浦,1960)*に関する解析解が有名である。ここでは、回転楕円体に対する解析解と境界要素法による数値解[54] *(著者,1996)*との比較を行う。回転楕円体の弾性振動については３つの文献があるけれども、回転変位まで扱った文献[32] *(松浦,1960)*が最も実現象に近いと考えられているので、比較対象として松浦[32]の解を採用する。Fig.3.1.2で用いた回転楕円体の大きさに関わる記号のうち、無限水深に必要な部分だけを抜き出してFig.3.7.1に示す。

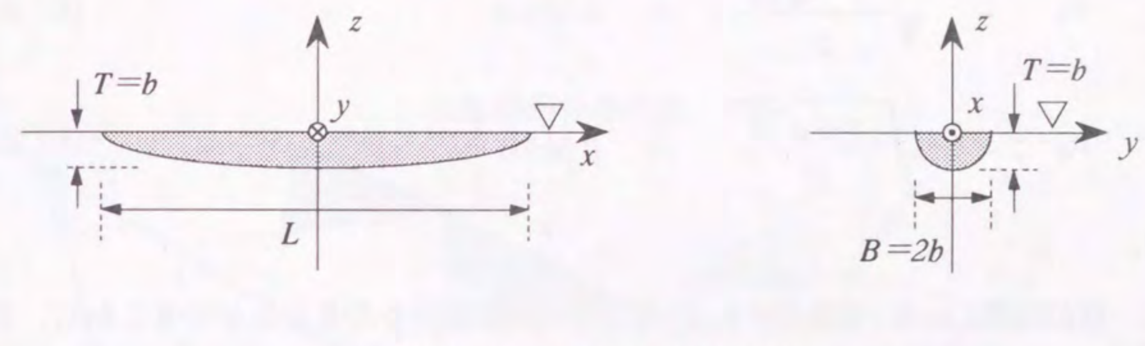


Fig.3.7.1　回転楕円体（無限水深）

回転楕円体の上下方向（z方向）の剛体振動あるいは弾性振動に関して、連成振動ではなくて変位関数をあらかじめ与える場合のx軸上における変位を$u_z(x)$とおく。変位関数$u_z(x)$を文献[32] *(松浦,1960)*の定義に合致させてかけば、

$$-1 \leqq \frac{2x}{L} \leqq 1 \tag{3.7.1}$$

なる変域に対して、２節振動では、

$$u_z(x) = \left(\frac{2x}{L}\right)^2 - a_2{}^2 \qquad (3.7.2)_{-1}$$

にて定義される。そして、３節振動では、

$$u_z(x) = \frac{2x}{L}\left\{\left(\frac{2x}{L}\right)^2 - a_3{}^2\right\} \qquad (3.7.2)_{-2}$$

と定義され、４節振動では、

$$u_z(x) = \left\{\left(\frac{2x}{L}\right)^2 - a_4{}^2\right\}\left\{\left(\frac{2x}{L}\right)^2 - b_4{}^2\right\} \qquad (3.7.2)_{-3}$$

と定義される。さらに、剛体振動では、

$$u_z(x) \quad = \quad 1.0 \qquad (3.7.2)_{-4}$$

と定義される。ただし、定数a_2, a_3, a_4, b_4は節振動における節の位置を示すもので、

$$a_2 \quad = \quad \frac{1}{\sqrt{5}} \quad = \quad 0.44721 \qquad (3.7.3)_{-1}$$

$$a_3 \quad = \quad \sqrt{\frac{3}{7}} \quad = \quad 0.65465 \qquad (3.7.3)_{-2}$$

$$a_4 \quad = \quad \sqrt{\frac{7-\sqrt{28}}{21}} \quad = \quad 0.28523 \qquad (3.7.3)_{-3}$$

$$b_4 \quad = \quad \sqrt{\frac{7+\sqrt{28}}{21}} \quad = \quad 0.76506 \qquad (3.7.3)_{-4}$$

である。

一方、変位関数$u_z(x)$をxで微分すればy軸回りの回転変位を得ることができるから、これを$u_{Ry}(x)$とおいてy軸の方向を考慮すれば、２節振動に対しては、

$$u_{Ry}(x) \quad = \quad -\frac{d\,u_z(x)}{d\,x} \quad = \quad -2\,\frac{2}{L}\,\frac{2x}{L} \qquad (3.7.4)_{-1}$$

となり、３節振動に対しては、

$$u_{Ry}(x) \quad = \quad -\frac{d\,u_z(x)}{d\,x} \quad = \quad -\frac{2}{L}\,\left\{\,3\left(\frac{2x}{L}\right)^2 - \; a_3{}^2\,\right\} \qquad (3.7.4)_{-2}$$

となる。そして、４節振動に対しては、

$$u_{Ry}(x) \quad = \quad -\frac{d\,u_z(x)}{d\,x} \quad = \quad -2\,\frac{2}{L}\,\frac{2x}{L}\,\left\{\,2\left(\frac{2x}{L}\right)^2 - (a_4{}^2+b_4{}^2)\,\right\} \qquad (3.7.4)_{-3}$$

となり、さらに、剛体振動に対しては、

$$u_{Ry}(x) \quad = \quad -\frac{d\,u_z(x)}{d\,x} \quad = \quad 0 \qquad (3.7.4)_{-4}$$

となって、回転変位は生じないこととなる。なお、これら回転変位について、文献[32] *(松浦,1960)*のものとは符号が反転しているけれども、これは、本論文におけるy軸が文献[32]でのz軸に相当するためである。

以上によって、x軸上の任意点の変位を全て定義できたこととなる。即ち、x軸上の点はz軸方向の変位とy軸回りの回転変位を持つだけで、その他の成分を持たないとする訳である。このような仮定に基づいて文献[32] *(松浦,1960)*の解析はなされている。

さて、曲げ撓み曲線$u_z(x)$を用いた振動解析では、その変位を仮定する際に断面が崩れないで元のまま保持されることを前提としている。中実の回転楕円体には無限個の横断面があるけれども、そのうちのいくつかの断面とx軸及び回転楕円体の表面との位置関係はFig.3.7.2のようなものとなっている。そして、同図では、ある横断面におけるx軸との交点に点Gを取り、回転楕円体の表面に点Aを取った場合を示している。断面が崩れないとの仮定は、同一断面内にある２点G,A間の距離が変化しないで、剛体結合されているとみなすものである。

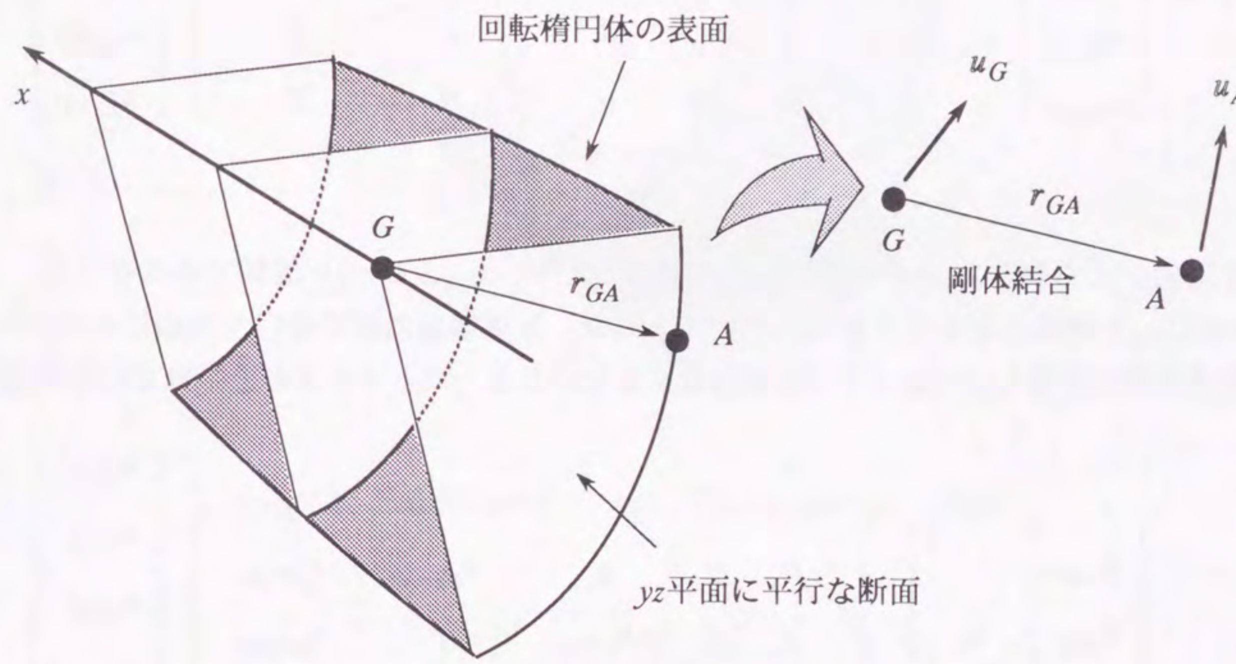


Fig.3.7.2　回転楕円体を内側からみた様子と断面内の２点GA間の距離r_{GA}

点Gから点Aに向けて取った距離ベクトルr_{GA}が既知であって点Gの変位u_Gも既知であるならば、剛体結合の関係を利用することにより点Aの変位u_Aをこれらによって表すことができるから、点Aの変位u_Aも既知となる。これを式で表すために、距離ベクトルr_{GA}の成分を

$$r_{GA}{}^T \quad = \quad \{\; r_{x(G,A)} \quad r_{y(G,A)} \quad r_{z(G,A)} \;\} \qquad (3.7.5)$$

とおき、変位ベクトルu_G及びu_Aの成分をそれぞれ、

$$u_G{}^T \quad = \quad \{\ u_{x(G)} \quad u_{y(G)} \quad u_{z(G)} \quad u_{Rx(G)} \quad u_{Ry(G)} \quad u_{Rz(G)}\ \} \qquad (3.7.6)$$

$$u_A{}^T \quad = \quad \{\ u_{x(A)} \quad u_{y(A)} \quad u_{z(A)} \quad u_{Rx(A)} \quad u_{Ry(A)} \quad u_{Rz(A)}\ \} \qquad (3.7.7)$$

とすれば、微小回転の仮定により、

$$\begin{Bmatrix} u_{x(A)} \\ u_{y(A)} \\ u_{z(A)} \\ u_{Rx(A)} \\ u_{Ry(A)} \\ u_{Rz(A)} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & r_{z(G,A)} & -r_{y(G,A)} \\ 0 & 1 & 0 & -r_{z(G,A)} & 0 & r_{x(G,A)} \\ 0 & 0 & 1 & r_{y(G,A)} & -r_{x(G,A)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_{x(G)} \\ u_{y(G)} \\ u_{z(G)} \\ u_{Rx(G)} \\ u_{Ry(G)} \\ u_{Rz(G)} \end{Bmatrix}$$

---------------- (3.7.8)

なる関係が得られる。上式が剛体結合の関係であり、r_{GA}及びu_Gが既知であるならば、点Aの変位u_Aも既知となることを示している。また、流体領域の解析を行うためには点Aの並進変位だけが必要なのであって回転変位は必要ないから、マトリクスの上半分だけを考慮して、

$$\begin{Bmatrix} u_{x(A)} \\ u_{y(A)} \\ u_{z(A)} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & r_{z(G,A)} & -r_{y(G,A)} \\ 0 & 1 & 0 & -r_{z(G,A)} & 0 & r_{x(G,A)} \\ 0 & 0 & 1 & r_{y(G,A)} & -r_{x(G,A)} & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_{x(G)} \\ u_{y(G)} \\ u_{z(G)} \\ u_{Rx(G)} \\ u_{Ry(G)} \\ u_{Rz(G)} \end{Bmatrix}$$

---------------- (3.7.9)

と表すこともできる。そして、上式の関係を、

$$\underset{3\times 1}{u_A} \quad = \quad \underset{3\times 6}{[G_d]}\ \underset{6\times 1}{u_G} \qquad (3.7.10)$$

と表すこととする。回転楕円体表面の点Aをメッシュ分割した節点に取れば、上式の関係から、x軸上の点Gの変位u_Gを与えることによってメッシュ節点の変位を知ることができる。

これによって、解析解の基になった変位分布と同じ変位を与えた状態での解析が可能となり、その解析解と境界要素法の数値解との比較ができるようになる。従って、回転楕円体をメッシュ分割する際には、節点群がyz平面に平行な断面に乗るように配慮する方法が便利である。その様子をFig.3.7.3に示す。

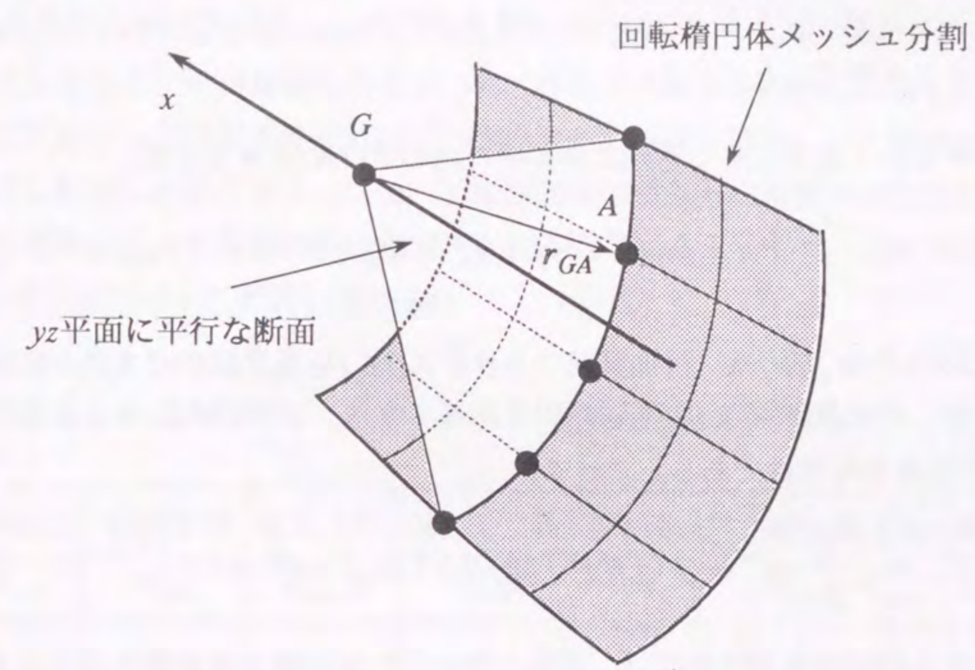


Fig.3.7.3　回転楕円体のメッシュ節点に点Aをとった様子

ある断面上にN_A個の節点があるとして、それらの変位をまとめて$\{u_A\}$と表すこととすれば、小行列$[G_d]$からなるマトリクスを$[H_A]$とおいて、

$$\underset{3N_A\times 1}{\{u_A\}} \quad = \quad \underset{3N_A\times 6}{[H_A]}\ \underset{6\times 1}{u_G} \qquad (3.7.11)$$

と表すことができる。N_A個の節点の変位$\{u_A\}$を点Gの変位u_Gだけでもって表すことができる訳である。この意味で点Gのことを基準節点と呼ぶことにする。さらに、そのような断面がN_G個あって、それぞれの断面において基準節点と剛体結合すれば、最終的にはメッシュ節点の全てを基準節点の変位によって表すことができる。そして、基準節点数は断面数と一致

するものとなってN_G個となる。N_G個の基準節点の変位をまとめて$\{u_G\}$と表すこととすれば、小行列$[G_d]$からなるマトリクスを$[H]$とおいて、

$$\underset{3N_{max}\times 1}{\{u_w\}} = \underset{3N_{max}\times 6N_G}{[H]} \ \underset{6N_G\times 1}{\{u_G\}} \tag{3.7.12}$$

なる関係を得る。なお、$\{u_w\}$は全節点の変位を表すものであり、N_{max}は全節点数であった。上式によって、全節点変位$\{u_w\}$は、基準節点の変位$\{u_G\}$によって表されたことになる。この考え方は、後述する縮小マトリクスにつながるものである。そして、マトリクス$[H]$のことを補間マトリクスと呼ぶことにする。

さて、上式を用いて流体のもつ運動エネルギ$T_w(t)$の式(3.6.32)を表せば、

$$T_w(t) = \frac{1}{2} Re[\lambda \{u_G\}^T e^{\lambda t}] \underset{6N_G\times 6N_G}{[H]^T[M_w][H]} Re[\lambda \{u_G\} e^{\lambda t}] \tag{3.7.13}$$

となる。上式の$[H]^T[M_w][H]$は、付加質量マトリクス$[M_w]$を基準節点のまわりに縮小したものとなっており、そのサイズは$6N_G$行$6N_G$列である。また、基準節点に与える変位$\{u_G\}$は(3.7.2),(3.7.4)式であるから実数である。よって、

$$T_w(t) = \frac{1}{2}\omega^2 \{u_G\}^T[H]^T[M_w][H]\{u_G\} \sin^2\omega t \tag{3.7.14}$$

を得る。上式から時間項を取り除けば、運動エネルギ$T_w(t)$の最大値を得ることとなる。この最大値から周波数成分ω^2を取り除いたものを計算することによって、解析解と比較することができる。これを、３次元計算から得られるものであることからT_3とかくことにすれば、

$$T_3 = \frac{1}{2}\{u_G\}^T[H]^T[M_w][H]\{u_G\} \tag{3.7.15}$$

となる。

一方、２次元計算による付加質量を用いて単位長さあたりの運動エネルギを計算し、さらに船長方向に積分して３次元運動エネルギを求める方法もある。これはStrip法と呼ばれるもので、船長方向への流体運動を無視することになる方法である。Strip法によって得られた流体の運動エネルギから時間項及び周波数成分を取り除いた最大値を、２次元計算を基にするものであることからT_2とかくことにすれば、

$$J_v = \frac{T_3}{T_2} \tag{3.7.16}$$

なる定数を定義することができる。定数J_vは文献[30] (Lewis,1929)にて初めて定義され、それ以来、船舶の分野では３次元修正係数と呼ばれて多用されているものである。

３次元修正係数J_vについて、境界要素法による数値解と解析解とを比較して、その計算精度について確認する。比較する解析解は、剛体振動については文献[29] (Lamb,1932)の114節、弾性振動については文献[32] (松浦,1960)とする。

回転楕円体の全長全幅比L/Bが、5.0から13.0までの範囲について数値計算を行った。それぞれのメッシュモデルにおける、総要素数M_{max}、総節点数N_{max}、減次節点数N_{min}、および基準節点数N_Gについて Table 3.7.1 にまとめておく。この表より、L/B が大きくなるほど総要素数が増えるような分割方法であることがわかる。これは、どのモデルにおいても横断面内の分割数が22要素の一定分割となるようにしたためである。もしも、船の長さ方向の分割数もそろえてしまうと、全長が長くなるにつれて要素形状が長さ方向に細長くなってしまう。これを防ぐために、全長が長くなればその方向にも分割数を増やして、要素形状が細長くならないように配慮した訳である。なお、回転楕円体の長さ方向両端では形状の変化が著しいので、その部分での分割が細かくなるように配慮している。そして、どのモデルも全幅Bが100_{mm}となる場合について計算している。

Table 3.7.1　メッシュモデルの要素数及び節点数

($B=100_{mm}$)

全長全幅比 L/B	総要素数 M_{max}	総節点数 N_{max}	減次節点数 N_{min}	基準節点数 N_G	縮小率（%） N_{min}/N_{max}	縮小率（%） N_G/N_{max}
5.0	1584	1635	1491	73	91.19	4.465
6.0	1936	2003	1827	89	91.21	4.443
7.0	2156	2233	2037	99	91.22	4.433
8.0	2464	2555	2331	113	91.23	4.423
9.0	2728	2831	2583	125	91.24	4.415
10.0	2992	3107	2835	137	91.25	4.409
11.0	3344	3475	3171	153	91.25	4.403
12.0	3608	3751	3423	165	91.26	4.399
13.0	3872	4027	3675	177	91.26	4.395

基準節点に与える変位$\{u_G\}$の並進変位成分および回転変位成分はそれぞれ(3.7.2),(3.7.4)式で表されるが、並進変位(3.7.2)は無次元、回転変位(3.7.4)は(1／長さ)の次元となっている。メッシュモデルは(mm)単位で作成しているので、それぞれの並進変位も(mm)単位で与えることとすれば、並進変位(3.7.2)をその数字のまま(mm)単位に、回転変位(3.7.4)をその数字のまま(rad)単位に読み換えれば良いこととなる。従って、(3.7.15)式の運動エネルギ最大値T_3の単位は$(kgmm^2)$となり、Strip法による運動エネルギ最大値T_2の単位も$(kgmm^2)$となる。

境界要素法(BEM)による数値解と解析解との比較を、剛体上下振動および２・３・４節上下振動について、Table 3.7.2 ～ Table 3.7.5に示す。いずれも無限水深(*infinite*)における計算値であるから、運動エネルギ最大値T_2およびT_3には添字$_{inf}$を付けている。また、全幅Bが100_{mm}となる場合について計算しているために、どのTableも、全長Lが大きくなるほどにT_{2inf}とT_{3inf}は共に大きくなっている。

まず、運動エネルギの欄について観察する。Strip法による結果では、L/Bが10.0のT_{2inf}は、L/Bが5.0のT_{2inf}のちょうど２倍の値となっている。これは、回転楕円体の排水量が２倍となるためであり、同じことはL/Bが12.0のT_{2inf}と6.0のT_{2inf}とを較べてもいえる。しかし、BEM数値解T_{3inf}ではこのような倍数の結果とはならず、流場が３次元であるための影響が現れている。なお、外側立体内角を正確に計算した場合を「$C_O(P)$」の欄に、これを計算せずに2πとして与えた場合を「2π」の欄に記入して整理している。「2π」とは、船体表面の要素が滑らかに結合されているとみなすことを意味する。外側立体内角$C_O(P)$の違いによりT_{3inf}の値にも影響がでている。$C_O(P)$を正確に計算した場合には、2πとして与えた場合よりも小さな運動エネルギが得られている。これは、回転楕円体の１次要素メッシュモデルにおいては$C_O(P) \geqq 2\pi$となるためである。即ち、$C_O(P)$の与え方によって(3.5.22)式の$[A]$の対角項に影響が現れるためである。その理由は、$[A]$の成分を示す(3.5.10)式のA_{ij}に$C_O(P)$が含まれることから明らかであろう。また、$C_O(P)$が2πよりも大きいということは尖った部分が流体を向くことであるから、流体の運動エネルギが小さくなるとの結果は力学的考察からも納得のいくところである。

次に、３次元修正係数J_vについて観察する。剛体上下振動(Table 3.7.2)の場合には、「$C_O(P)$」の数値解と「2π」の数値解とによって解析解が挟まれていることがわかる。これは、ある程度メッシュ分割を細かくしたときに現れる特有の現象である。これに対してTable 3.7.3～Table 3.7.5に示した弾性振動モードではこのような現象は起こっていない。弾性振動モードに対してこのような現象がでるためには、Table 3.7.1 に示したメッシュモデルではまだ粗いということである。計算理論の正確さからいえば、「$C_O(P)$」の数値解を採用するべきであるから、この欄に注目してみよう。

剛体上下振動(Table 3.7.2)の場合には、誤差は約*3.5%*となっており、L/Bが大きくなるほどに誤差も小さくなっている。これは、L/Bが大きくなるほどメッシュ分割が細かくなっているためである。同様の理由により、弾性振動モード(Table 3.7.3～Table 3.7.5)においてもL/Bが大きくなるほどに誤差も小さくなっている。そして、２節上下振動(Table 3.7.3)での誤差は約*4.5～5.5%*、３節上下振動(Table 3.7.4)での誤差は約*5.0～6.0%*、４節上下振動(Table 3.7.5)での誤差は約*5.5～6.5%*となっていて、節数の増加に伴って誤差も大きくなっていることがわかる。これは、高次の振動モードを表すためには船の長さ方向にもっと分割数を増やさねばならないことを示している。メッシュ分割を細かくすればするほど「$C_O(P)$」の数値解と解析解との差は縮まるが、あまり細かくすることは計算容量の問題から許されない。

Table 3.7.2　剛体上下振動モード（無限水深, heave）

($B=100_{mm}$)

全長全幅比 L/B	Strip法 T_{2inf} (kgmm²)	BEM T_{3inf} (kgmm²)		3次元修正係数 J_v T_{3inf}/T_{2inf}		3次元修正係数 J_v 解析解 Lamb[29]	J_vの誤差 (%)	
		$C_O(P)$	2π	$C_O(P)$	2π		$C_O(P)$	2π
5.0	0.653909	0.563227	0.590542	0.861	0.903	0.894	3.683	0.988
6.0	0.784691	0.694185	0.727524	0.885	0.927	0.917	3.540	1.093
7.0	0.915473	0.823650	0.863088	0.900	0.943	0.933	3.579	1.037
8.0	1.046255	0.953526	0.999058	0.911	0.955	0.945	3.531	1.076
9.0	1.177037	1.082656	1.134284	0.920	0.964	0.953	3.530	1.070
10.0	1.307819	1.211470	1.269189	0.926	0.970	0.960	3.531	1.065
11.0	1.438601	1.340804	1.404645	0.932	0.976	0.966	3.475	1.121
12.0	1.569383	1.469115	1.539044	0.936	0.981	0.970	3.481	1.114
13.0	1.700164	1.597216	1.673226	0.939	0.984	0.973	3.486	1.107

Table 3.7.3　２節上下振動モード（無限水深）

($B=100_{mm}$)

全長全幅比 L/B	Strip法 T_{2inf} (kgmm²)	BEM T_{3inf} (kgmm²)		3次元修正係数 J_v T_{3inf}/T_{2inf}		3次元修正係数 J_v 解析解 松浦[32]	J_vの誤差 (%)	
		$C_O(P)$	2π	$C_O(P)$	2π		$C_O(P)$	2π
5.0	0.029893	0.016858	0.017697	0.564	0.592	0.597	5.548	0.845
6.0	0.035872	0.022795	0.023904	0.635	0.666	0.670	5.140	0.528
7.0	0.041850	0.028771	0.030156	0.687	0.721	0.724	5.098	0.527
8.0	0.047829	0.034838	0.036500	0.728	0.763	0.766	4.929	0.392
9.0	0.053807	0.040894	0.042834	0.760	0.796	0.799	4.861	0.346
10.0	0.059786	0.046947	0.049166	0.785	0.822	0.825	4.809	0.309
11.0	0.065765	0.053042	0.055540	0.807	0.845	0.846	4.674	0.184
12.0	0.071743	0.059071	0.061849	0.823	0.862	0.864	4.650	0.166
13.0	0.077722	0.065084	0.068141	0.837	0.877	0.878	4.630	0.151

Table 3.7.4　3節上下振動モード（無限水深）

$(B=100_{mm})$

全長全幅比 L/B	Strip法 T_{2inf} $(kgmm^2)$	BEM T_{3inf} $(kgmm^2)$		3次元修正係数 J_v T_{3inf}/T_{2inf}		3次元修正係数 J_v 解析解 松浦[32]	J_v の誤差 (%)	
		$C_O(P)$	2π	$C_O(P)$	2π		$C_O(P)$	2π
5.0	0.007117	0.003343	0.003508	0.470	0.493	0.500	6.148	1.496
6.0	0.008541	0.004656	0.004883	0.545	0.572	0.578	5.720	1.126
7.0	0.009964	0.006017	0.006308	0.604	0.633	0.640	5.660	1.097
8.0	0.011388	0.007423	0.007778	0.652	0.683	0.689	5.453	0.926
9.0	0.012811	0.008840	0.009261	0.690	0.723	0.729	5.357	0.854
10.0	0.014235	0.010268	0.010754	0.721	0.755	0.762	5.279	0.794
11.0	0.015658	0.011712	0.012264	0.748	0.783	0.788	5.115	0.645
12.0	0.017082	0.013146	0.013763	0.770	0.806	0.811	5.072	0.611
13.0	0.018505	0.014579	0.015263	0.788	0.825	0.830	5.036	0.582

Table 3.7.5　4節上下振動モード（無限水深）

$(B=100_{mm})$

全長全幅比 L/B	Strip法 T_{2inf} $(kgmm^2)$	BEM T_{3inf} $(kgmm^2)$		3次元修正係数 J_v T_{3inf}/T_{2inf}		3次元修正係数 J_v 解析解 松浦[32]	J_v の誤差 (%)	
		$C_O(P)$	2π	$C_O(P)$	2π		$C_O(P)$	2π
5.0	0.001725	0.000699	0.000733	0.405	0.425	0.434	6.660	2.157
6.0	0.002071	0.000986	0.001033	0.476	0.499	0.508	6.248	1.729
7.0	0.002416	0.001294	0.001356	0.536	0.561	0.571	6.201	1.681
8.0	0.002761	0.001619	0.001697	0.587	0.615	0.624	5.984	1.484
9.0	0.003106	0.001952	0.002045	0.629	0.659	0.668	5.875	1.392
10.0	0.003451	0.002291	0.002399	0.664	0.695	0.705	5.782	1.314
11.0	0.003796	0.002635	0.002760	0.694	0.727	0.735	5.597	1.144
12.0	0.004141	0.002979	0.003119	0.719	0.753	0.762	5.539	1.096
13.0	0.004486	0.003324	0.003480	0.741	0.776	0.784	5.489	1.054

そこで、いずれの場合にも「2π」の数値解の方が誤差は少なくて、ほぼ*1.0%*となっていることに注目する。計算理論の正確さからいえば、「2π」の数値解を採用するべきではない。しかし、その理論は１次要素によって船体表面を近似したものであって、決して表面形状を正確に表したものではない。従って、運動エネルギの総量が解析解に近くなる「2π」の数値解を採用して評価を行う方が、回転楕円体に関する実際の現象を表せているものと考えることができる。よって、これ以降に扱う数値計算では、「2π」の数値解を採用することとする。

なお、３次元修正係数J_vに関する解析解との比較をFig.3.7.4に示しておく。同図において、実線は解析解を示し、「2π」の数値解を○印で、「$C_O(P)$」の数値解を△印で示している。

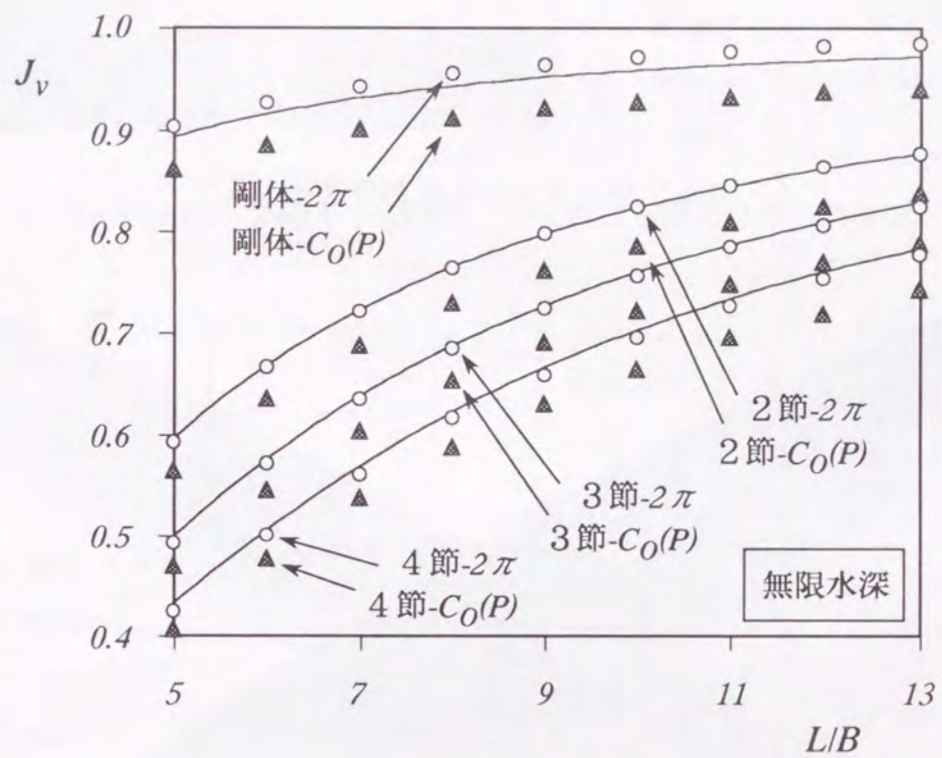


Fig.3.7.4　３次元修正係数J_vに関する解析解との比較

計算値と実験結果との比較については後述するけれども、実験に用いた模型は$L/B=11.0$, $B=100_{mm}$のものである。そこで、この場合のメッシュ分割の様子をFig.3.7.5に示しておく。また、立体内角$C_O(P)$を2πとした数値計算の結果得られた圧力分布をFig.3.7.6(a)～(d)に示す。

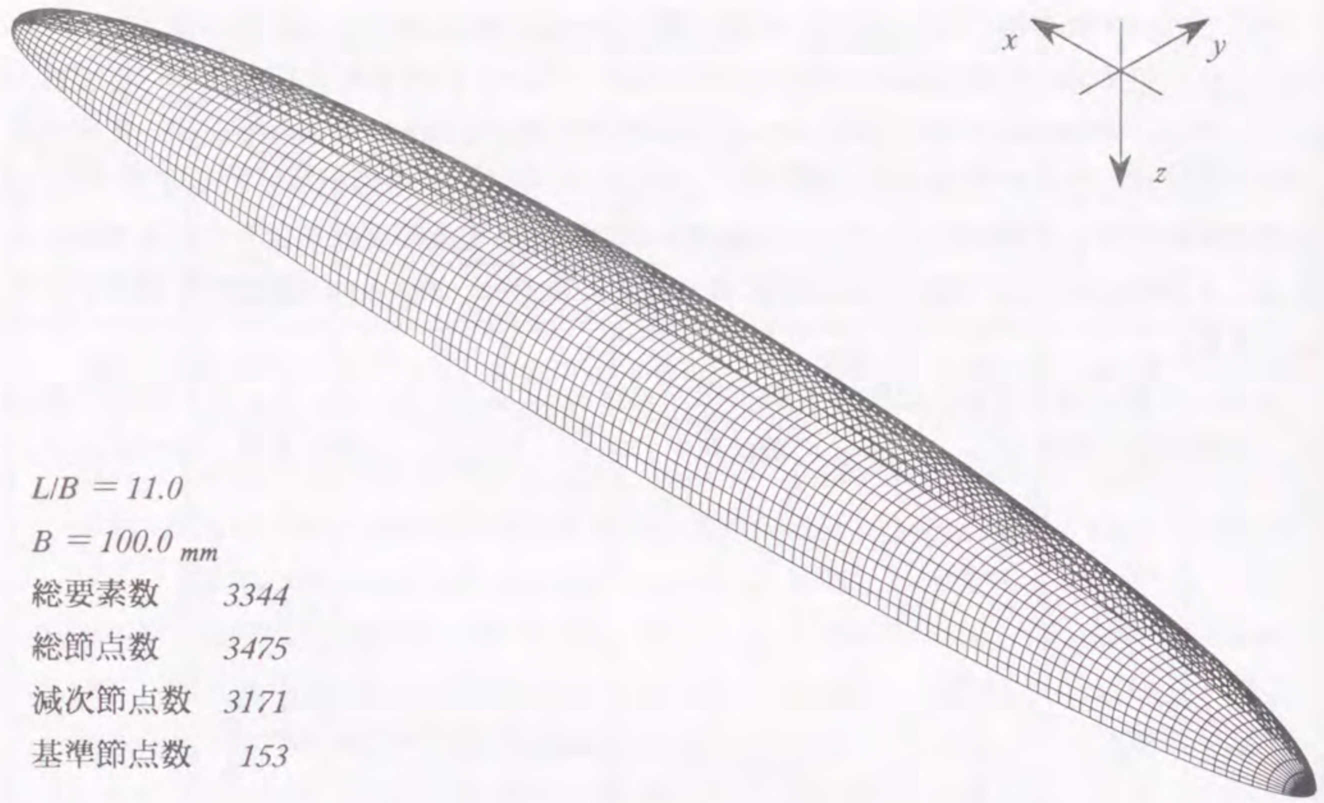


Fig.3.7.5 メッシュ分割の様子

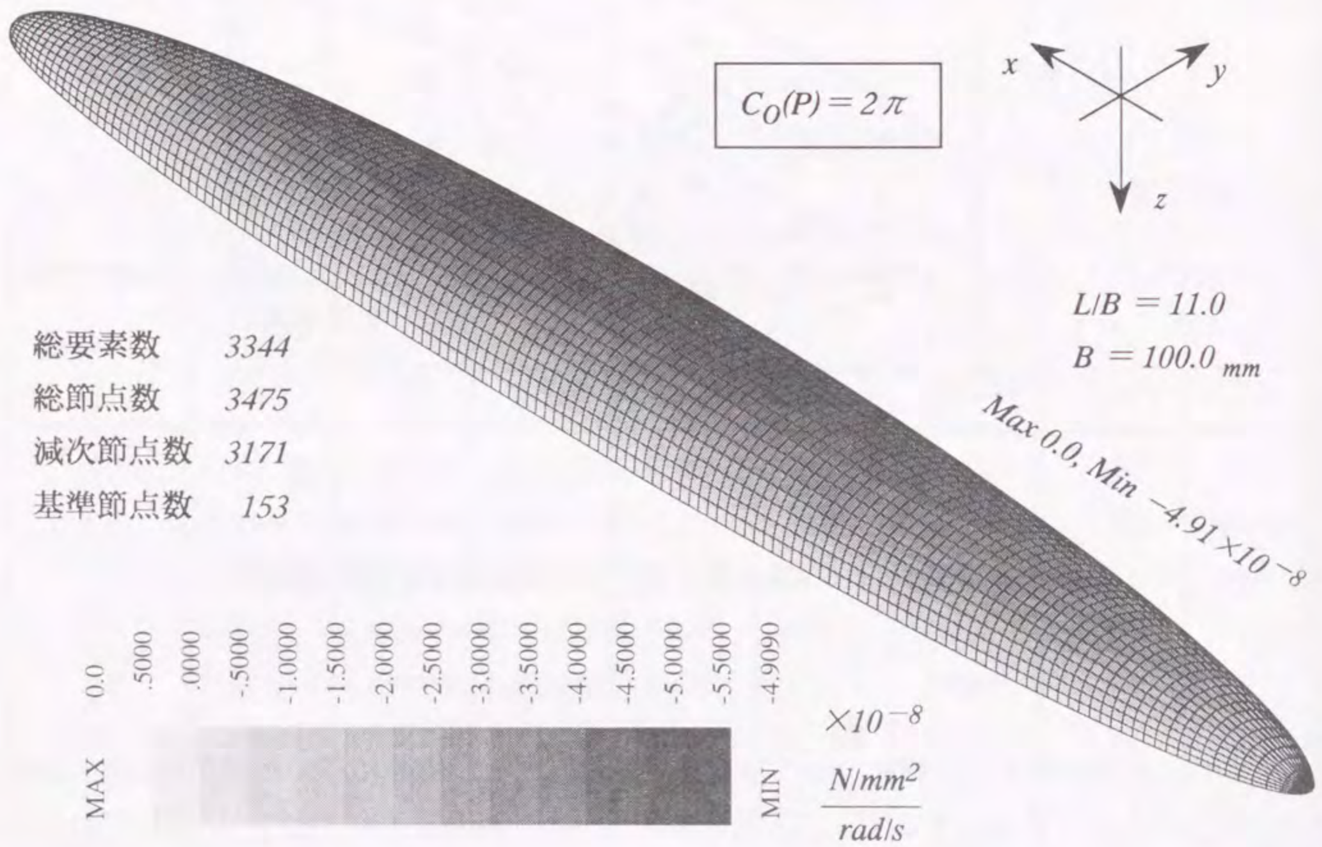


Fig.3.7.6(a) 剛体上下振動モードにおける圧力分布（無限水深）

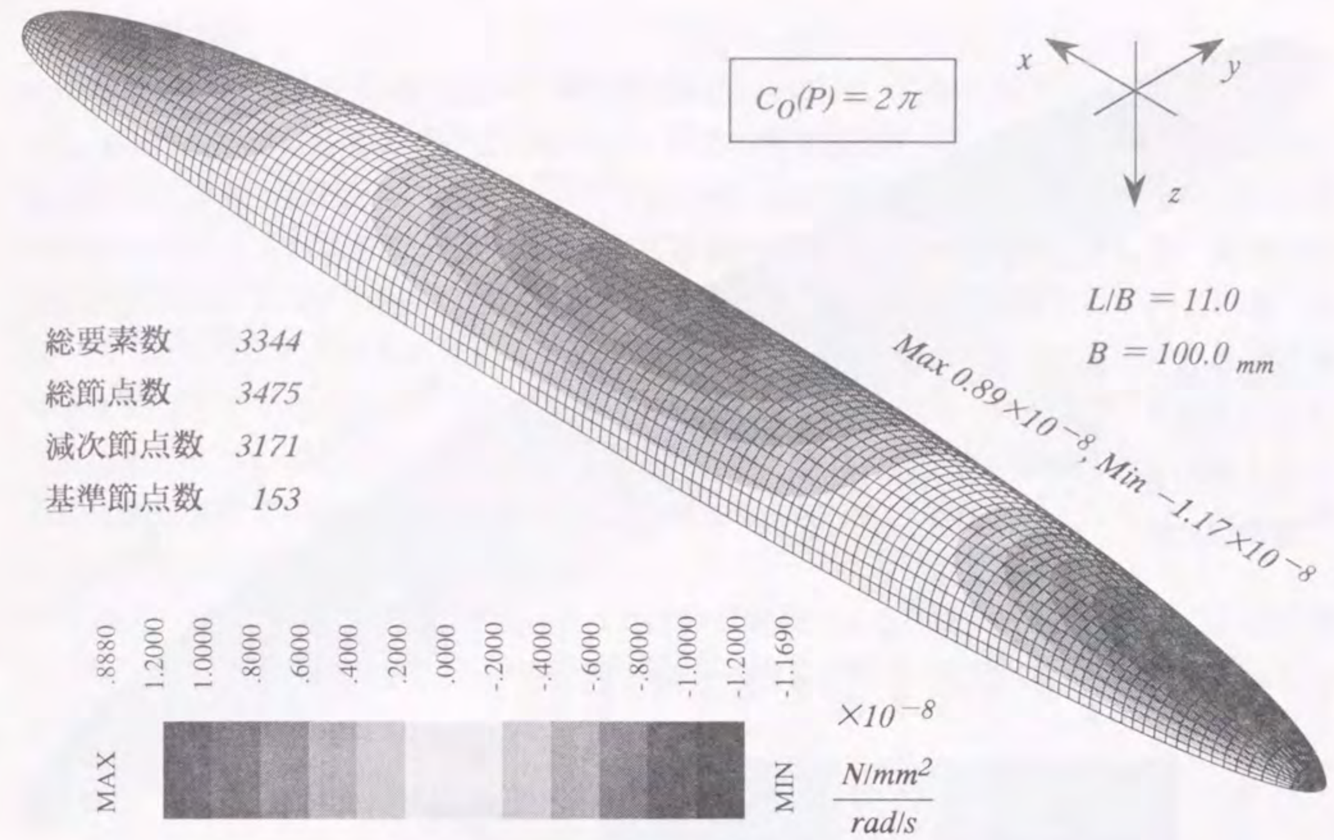


Fig.3.7.6(b) 2節上下振動モードにおける圧力分布（無限水深）

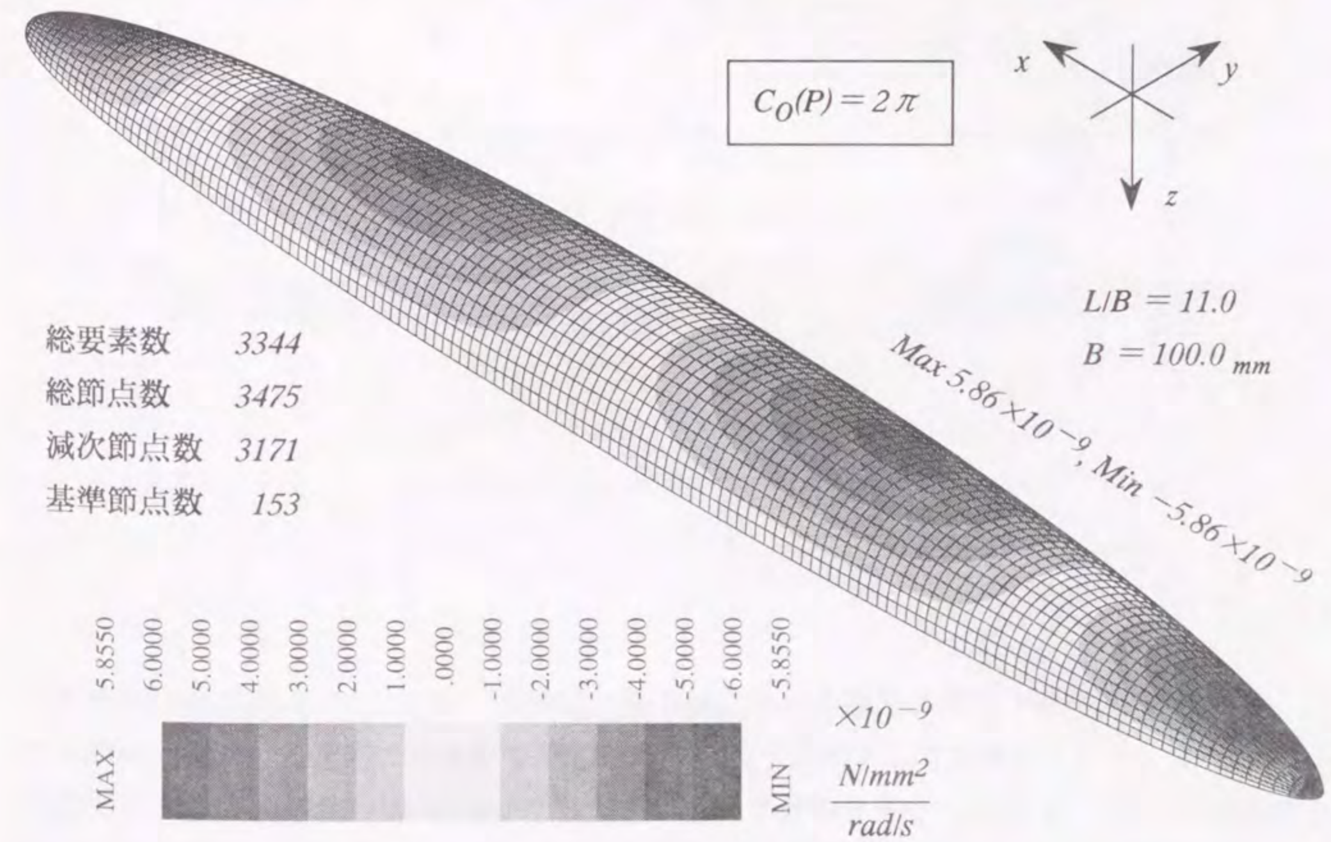


Fig.3.7.6(c) 3節上下振動モードにおける圧力分布（無限水深）

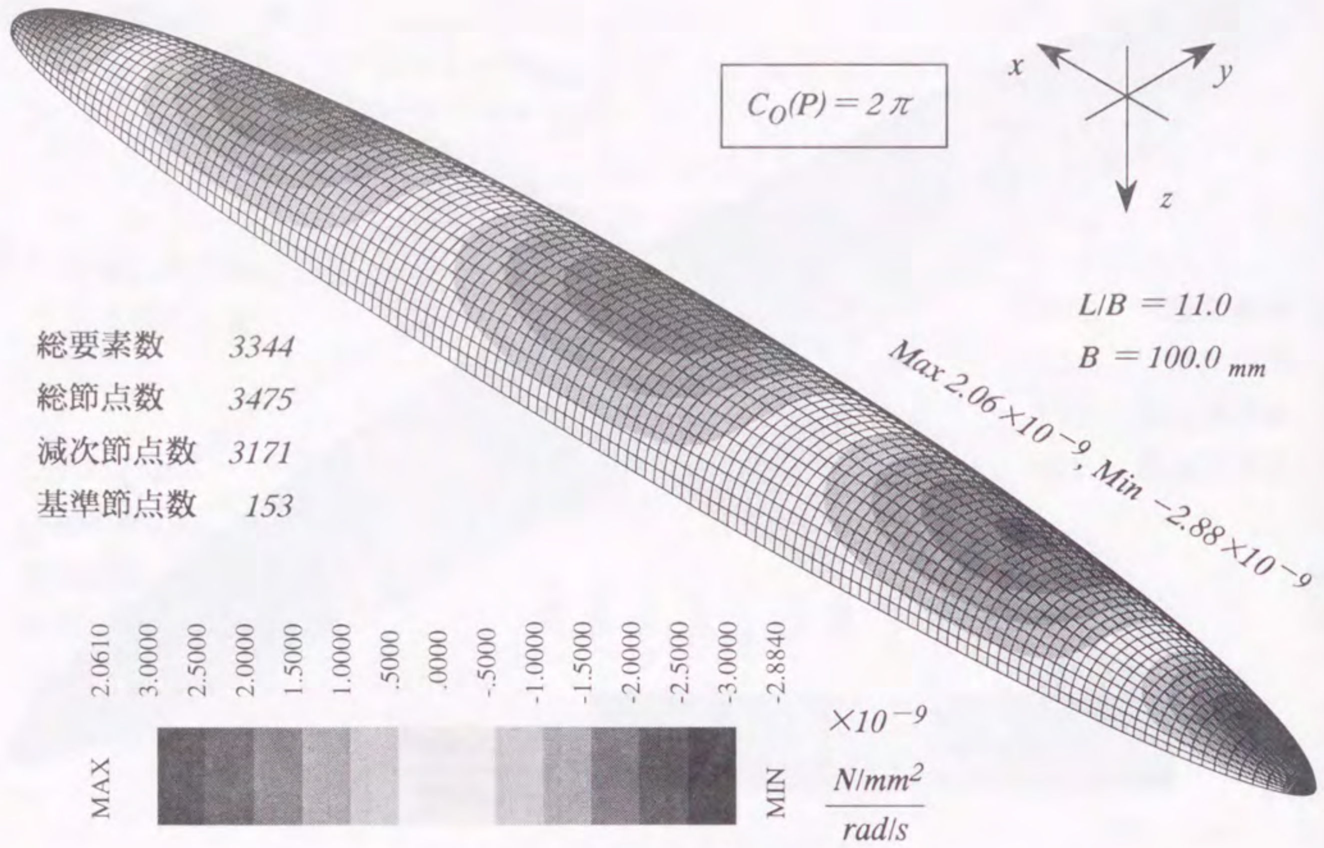


Fig.3.7.6(d)　4 節上下振動モードにおける圧力分布（無限水深）

（2）有限水深

有限水深における回転楕円体の付加質量効果については、これを解析的に論じた文献[38] *(Havelock,1953)*が有名である。これに対して、その剛体振動モードについて境界要素法による数値解析を行った例として文献[62],[43] *(菅,1984,1985)*があり、弾性振動モードについて特異点分布法による数値解析を行った例として文献[44] *(著者,1988)*がある。そして、両者の数値解は共に*Havelock*[38]の解析解とは異なる結果となっているのが特徴である。これは、文献[62] *(菅,1984)*にて述べられているように、解析解[38]を得るにあたって満足させる境界条件が正確なものではないことに起因するものである。具体的には、解析解[38]において、船体表面条件については正確に満足させているものの、水底条件と自由表面条件に関しては正確には満足させていないものとなっているのである。従って、現在のところでは、両者の数値解が正解であろうと考えられている。

本論文では、解析解[38] *(Havelock,1953)*と境界要素法による数値解[54] *(著者,1996)*との比較について述べる。Fig.3.1.2で用いた回転楕円体の大きさに関わる記号のうち、有限水深に必要な部分だけを抜き出してFig.3.7.7に示す。

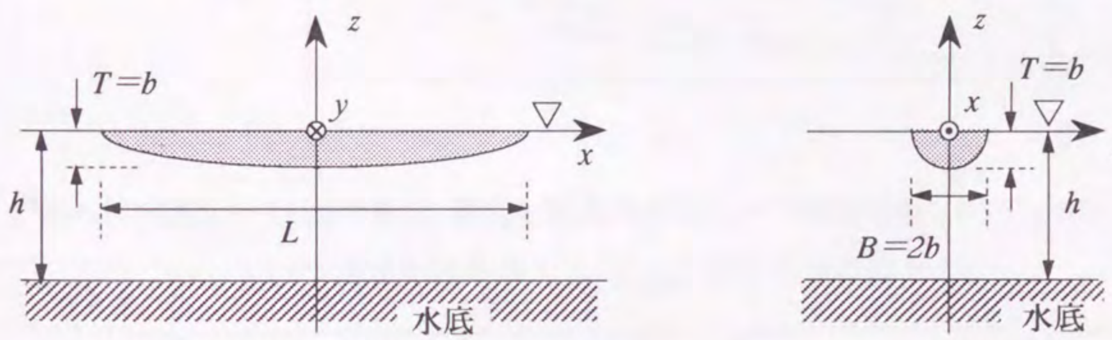


Fig.3.7.7　回転楕円体（有限水深）

文献[38] *(Havelock,1953)*では、浅水域と深水域における運動エネルギの差分をとって、これを深水域における運動エネルギで除したものを浅水影響として定義している。そして、回転楕円体の全長全幅比*L/B*が*10.0*よりも大きいという近似を施すことによって、大変便利な近似式を与えている。本論文では、浅水域と深水域における運動エネルギの単なる比をとって、これを浅水影響として定義することにする。

なお、解析解[38]における変位分布は文献[30] *(Lewis,1929)*のものと同じで、回転変位による影響を考慮していない。これに対して、ここで示す数値解では文献[32] *(松浦,1960)*の変位分布に従うために、回転変位による影響も考慮したものとなっている。よって、厳密にいえばこの両者を比較するべきではない。しかし、統一のとれた数値解を示すことの方を重視するために、あえてこの両者の比較を示す。ただし、ここでは示していないが、回転変位を考慮せずに*Lewis*[30]及び*Havelock*[38]と同じ変位分布を用いた数値計算も実は行っている。ところが、それぞれの変位分布による運動エネルギの除算を行うために、変位分布の違いによる浅水影響の差はほとんど生じなかった。このことから、その結果をわざわざ示す必要はないと判断したことを付記しておく。

後述する実験に用いた模型は$L/B=11.0, B=100_{mm}$の回転楕円体である。そして、文献[38] *(Havelock,1953)*での近似解はL/Bが10.0よりも大きいとの近似を施すことによって得られている。この２点の理由から、$L/B=11.0$の場合の比較を Table 3.7.6 に示す。ここで、T_{3inf}は無限水深での運動エネルギ最大値、T_{3shl}は浅水域*(shallow)*での運動エネルギ最大値を示す。なお、４節振動での解析解はないようなので空欄としている。*Havelock*の解より、水深による影響は低次振動モードほど顕著に現れ、高次振動モードになるにつれてその影響は小さくなることがわかる。そして、剛体振動と弾性振動とを較べればT_{3shl}/T_{3inf}の値には格段の差があるけれども、弾性振動同士を較べた場合にはそれほど差がないことがわかる。その傾向は数値解にも現れているが、浅くなるほどに数値解(BEM)と解析解[38]との乖離は大きくなっ

Table 3.7.6　各種振動モードにおける浅水影響（$L/B=11.0$）（運動エネルギ）

$C_O(P)=2\pi$

水深喫水比	剛体上下振動		２節上下振動		３節上下振動		４節上下振動	
h/T	BEM T_{3shl}/T_{3inf}	解析解[38] *Havelock*	BEM T_{3shl}/T_{3inf}	解析解[38] *Havelock*	BEM T_{3shl}/T_{3inf}	解析解[38] *Havelock*	BEM T_{3shl}/T_{3inf}	解析解
4.0	1.044	1.041	1.017	1.027	1.011	1.027	1.007	
2.0	1.196	1.165	1.126	1.110	1.114	1.107	1.101	
1.5	1.381	1.292	1.262	1.195	1.253	1.191	1.242	
1.3	1.549	1.389	1.384	1.260	1.380	1.254	1.374	
1.2	1.688	1.457	1.484	1.305	1.483	1.298	1.483	
1.1	1.915	1.544	1.643	1.363	1.645	1.355	1.658	
1.0	2.317	1.658	1.889	1.439	1.985	1.429	1.906	

ており、数値解は、解析解よりも大きな浅水影響があることを示していることがわかる。最初に述べた理由により、数値解の方が正解であろうと考えることができる。

Table 3.7.6 を図にして示すと弾性振動がほとんど重なってしまう。そこで、剛体上下振動と２節上下振動のみをFig.3.7.8に示す。同図において、実線は解析解を示し、剛体上下振動モードの数値解を○印で、２節上下振動モードの数値解を△印で示している。破線は数値解を通るように引いた近似曲線である。

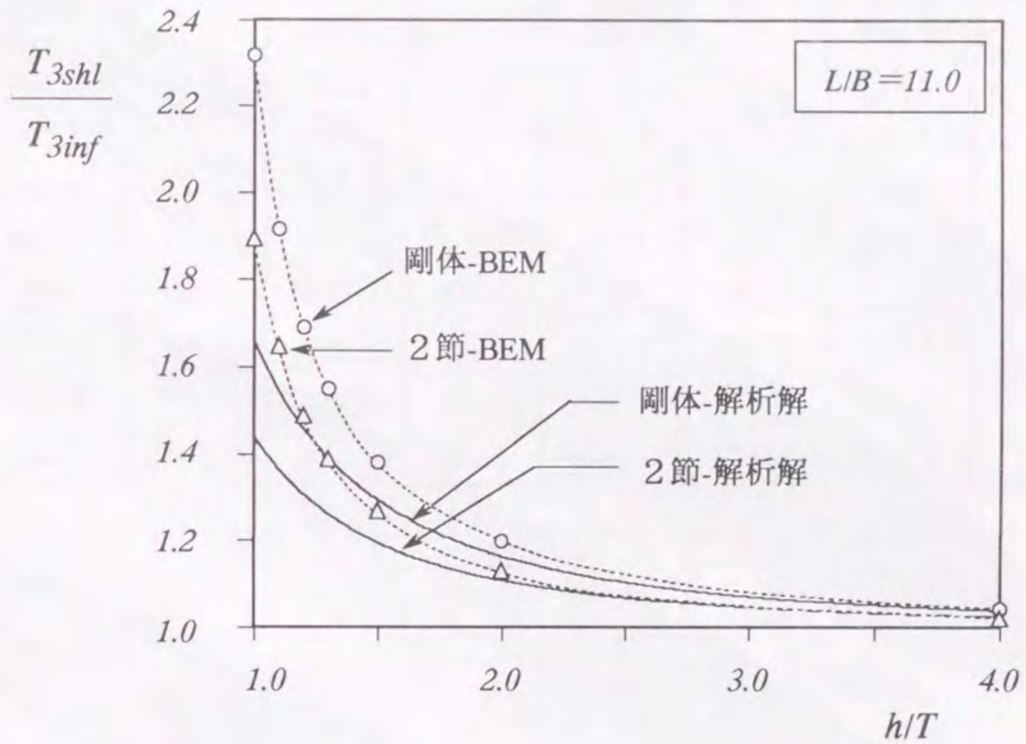


Fig.3.7.8　浅水影響係数T_{3shl}/T_{3inf}に関する解析解との比較

また、Table 3.7.1に示した計算モデルを用いて、全長全幅比L/Bが5.0から13.0までの範囲について数値計算を行った。水深喫水比$h/T=1.5$の場合を Table 3.7.7 に示す。同表から、剛体モード及び弾性モードの双方に対して、上下振動に関する限り全長全幅比L/Bによる影響はほとんどないといえる。なお、*Havelock*[38]の近似式は$L/B\geqq 10.0$に対して得られているので、その範囲外については斜線で示している。数値解によれば、$L/B<10.0$に対してもL/Bによる影響はほとんどないといえる。

また、実験に用いた回転楕円体模型（$L/B=11.0, B=100_{mm}$）の場合について、数値計算の結果得られた圧力分布をFig.3.7.9(a)～(d)に示す。いずれも深水域と同じ変位を与えている。水深が浅くなるにつれて圧力の高い領域が広がる様子がよくわかる。

Table 3.7.7　各種振動モードにおける浅水影響（$h/T=1.5$）（運動エネルギ）

$C_O(P)=2\pi$

全長全幅比	剛体上下振動		2節上下振動		3節上下振動		4節上下振動	
L/B	BEM T_{3shl}/T_{3inf}	解析解[38] Havelock	BEM T_{3shl}/T_{3inf}	解析解[38] Havelock	BEM T_{3shl}/T_{3inf}	解析解[38] Havelock	BEM T_{3shl}/T_{3inf}	解析解
5.0	1.384		1.225		1.204		1.177	
6.0	1.385		1.238		1.217		1.193	
7.0	1.385		1.248		1.228		1.207	
8.0	1.384		1.254		1.238		1.219	
9.0	1.383		1.258		1.245		1.229	
10.0	1.382	1.292	1.261	1.195	1.250	1.191	1.236	
11.0	1.381	1.292	1.262	1.195	1.253	1.191	1.242	
12.0	1.380	1.292	1.263	1.195	1.256	1.191	1.247	
13.0	1.378	1.292	1.263	1.195	1.257	1.191	1.250	

Fig.3.7.9(a)　剛体上下振動モードにおける圧力分布（浅水域）

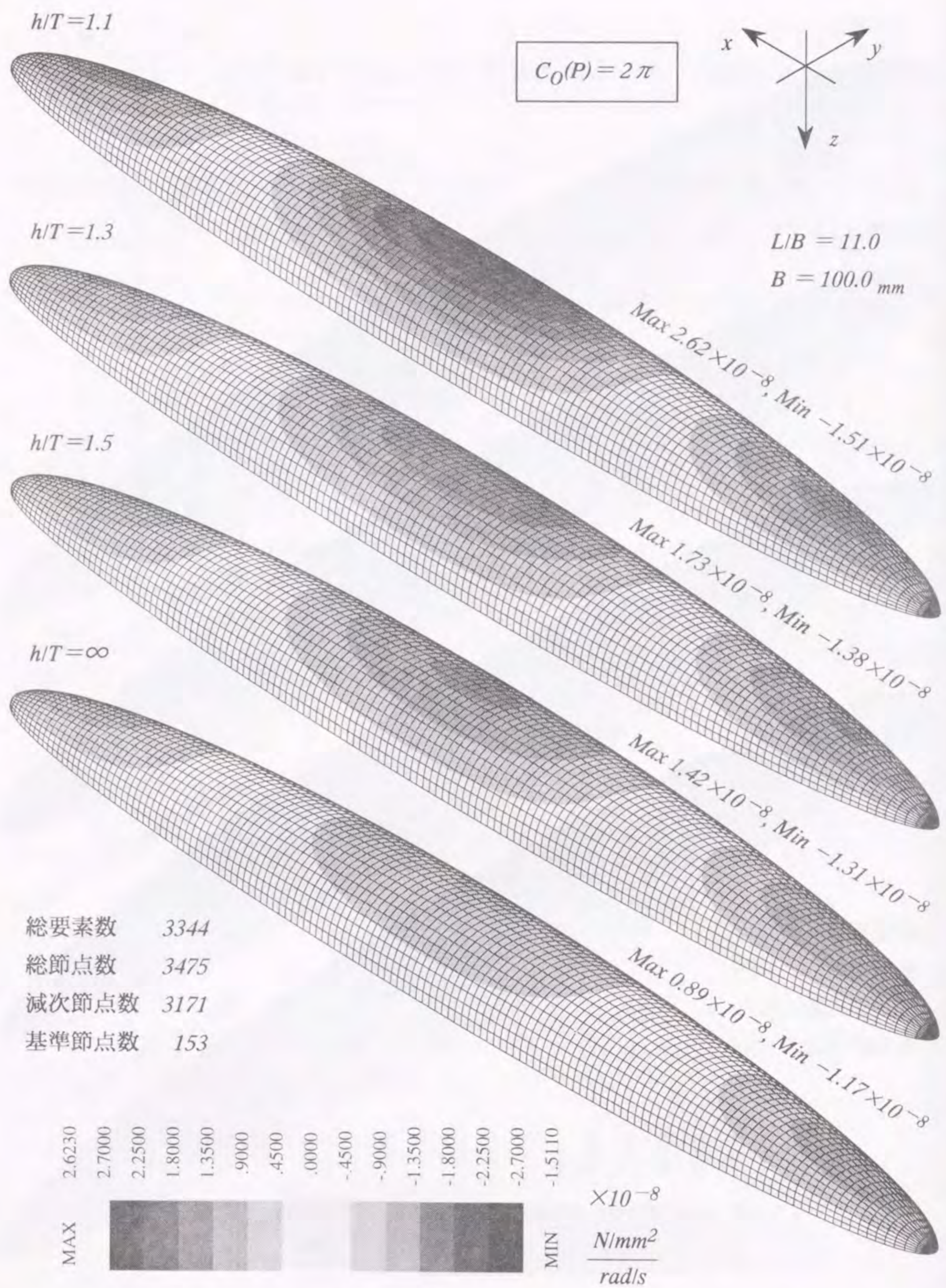


Fig.3.7.9(b)　２節上下振動モードにおける圧力分布（浅水域）

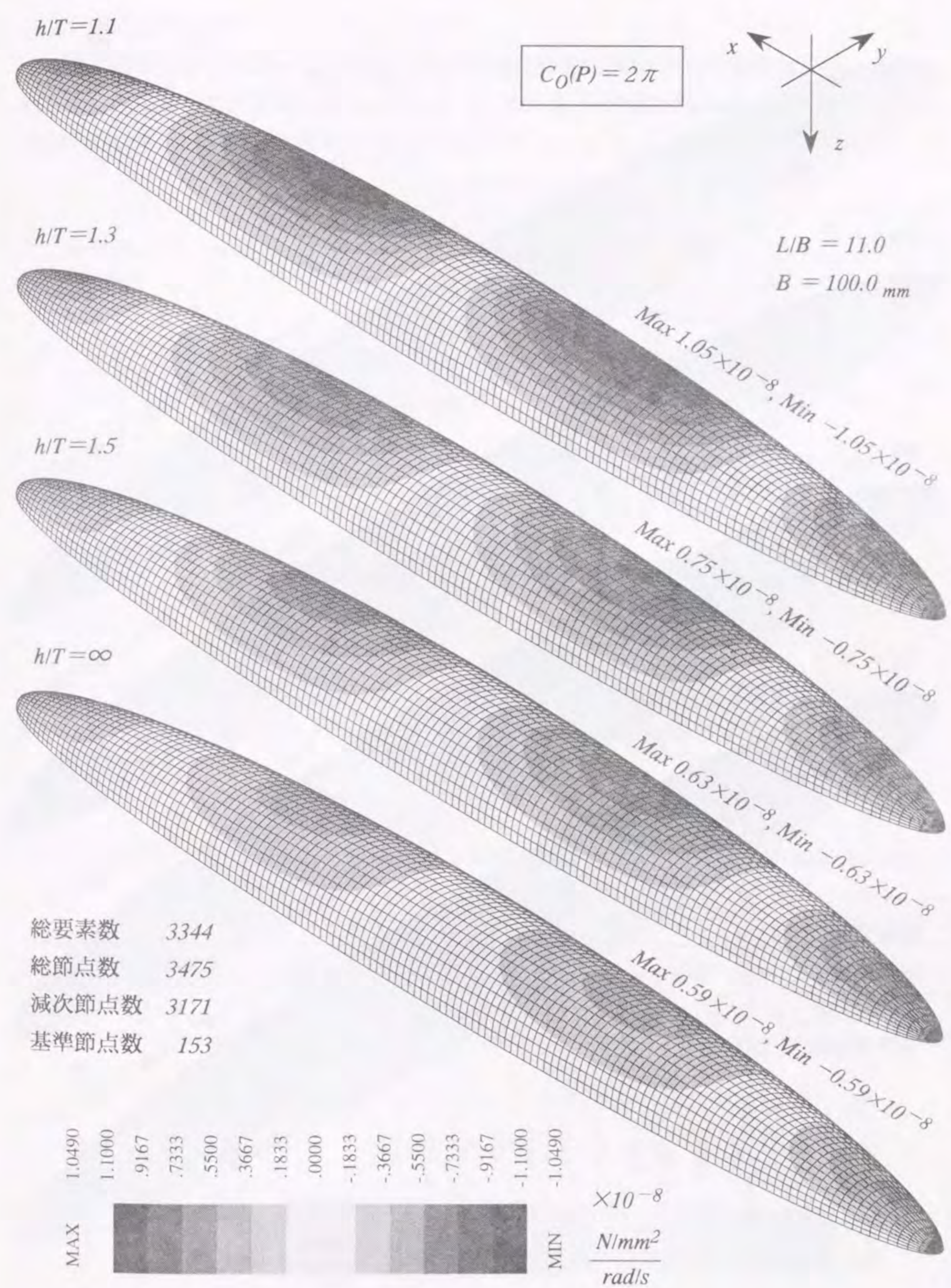


Fig.3.7.9(c)　３節上下振動モードにおける圧力分布（浅水域）

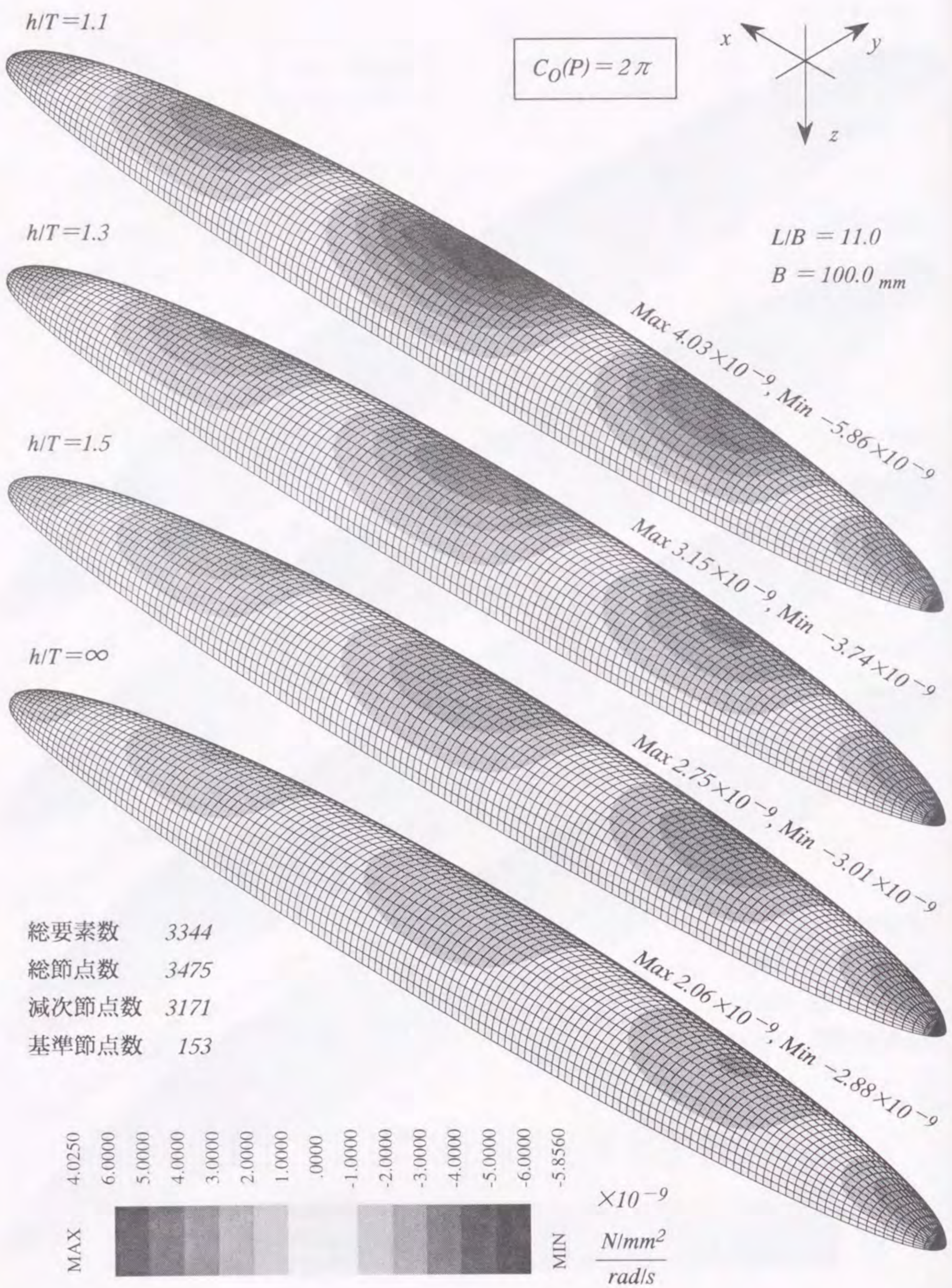


Fig.3.7.9(d)　4 節上下振動モードにおける圧力分布（浅水域）

（3）岸壁有限水深

岸壁があって有限水深となっている場合の回転楕円体に対する付加質量効果について、これを解析的に論じた文献はみあたらない。そこで、若干の数値計算結果を示すことにする。Fig.3.1.2と同じものをFig.3.7.10として示す。

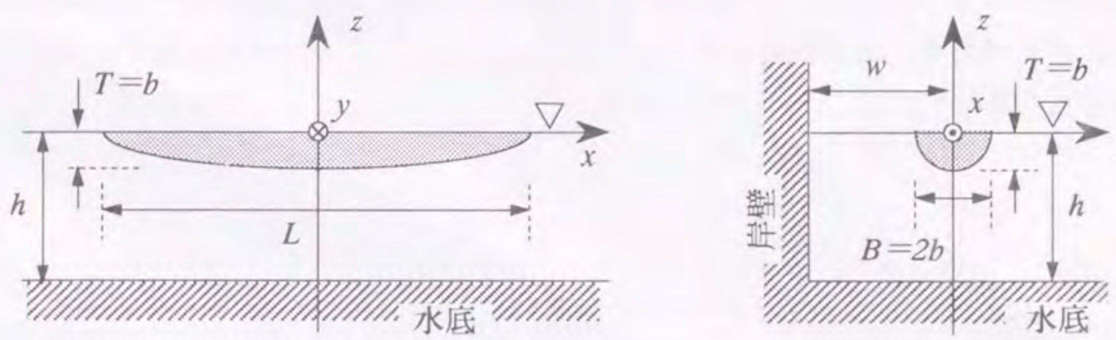


Fig.3.7.10　回転楕円体（岸壁有限水深）

ここでも、文献[32]*(松浦,1960)*の変位分布を利用して、回転変位による影響をも考慮した数値計算を行った。$L/B=11.0$で$h/T=1.5$の場合の結果を Table 3.7.8 に示す。

Table 3.7.8　各種振動モードにおける岸壁浅水影響（$L/B=11.0$）（運動エネルギ）
（$h/T=1.5$）

$C_O(P)=2\pi$

岸距半幅比	剛体上下振動	2節上下振動	3節上下振動	4節上下振動
w/b	$T_{3w\&s}$ / T_{3inf}	$T_{3w\&s}$ / T_{3inf}	$T_{3w\&s}$ / T_{3inf}	$T_{3w\&s}$ / T_{3inf}
∞	1.381	1.262	1.253	1.242
4.0	1.382	1.263	1.253	1.242
2.0	1.460	1.303	1.288	1.271
1.5	1.638	1.399	1.372	1.345
1.3	1.821	1.498	1.458	1.422
1.2	1.979	1.583	1.531	1.488
1.1	2.244	1.724	1.648	1.595
1.0	2.924	2.098	1.890	1.851

同表で、T_{3inf}は無限水深での運動エネルギ最大値、$T_{3w\&s}$は岸壁浅水域(*wharf&shallow*)での運動エネルギ最大値を示す。岸壁に近づくにつれてその影響は大きくなり、高次モードになるほどにその影響は小さくなることがわかる。その様子を、剛体上下振動と２節上下振動についてFig.3.7.11に示す。同図において、剛体上下振動モードの数値解を○印で、２節上下振動モードの数値解を△印で示している。実線および破線は数値解を通るように引いた近似曲線であり、破線は浅水影響のみを表すものでFig.3.7.8の数値解と同じ曲線、実線は岸壁浅水影響を表すもので Table 3.7.8 の結果を描いたものである。１点鎖線は$h/T=1.5$の剛体モードにおける浅水影響を、２点鎖線は同じく２節モードにおける浅水影響を表す。岸壁からの距離が大きくなるにつれて、岸壁浅水影響はこれらの鎖線に近づくことを示している。

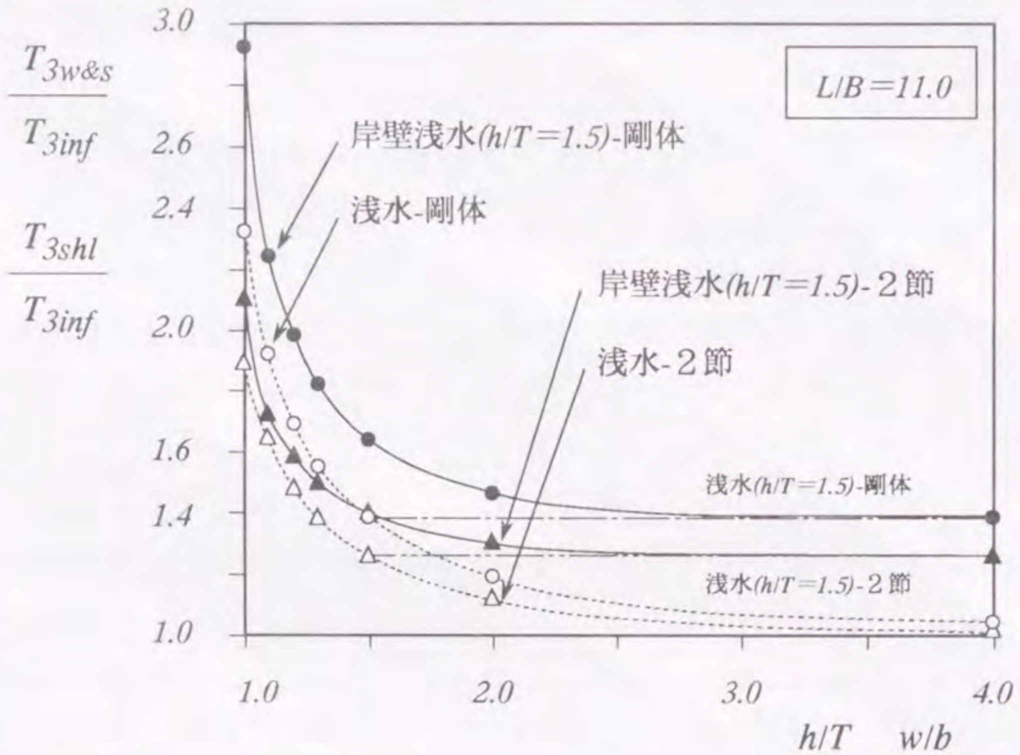


Fig.3.7.11　浅水影響と岸壁浅水影響との比較

また、回転楕円体模型（$L/B=11.0, B=100_{mm}$）の場合について、数値計算の結果得られた圧力分布をFig.3.7.12(a)～(d)に示す。いずれも深水域と同じ変位を与えている。岸壁が近くなるにつれて圧力の高い領域が岸壁側に広がる様子がよくわかる。

Fig.3.7.12(a)　剛体上下振動モードにおける圧力分布（岸壁浅水域）

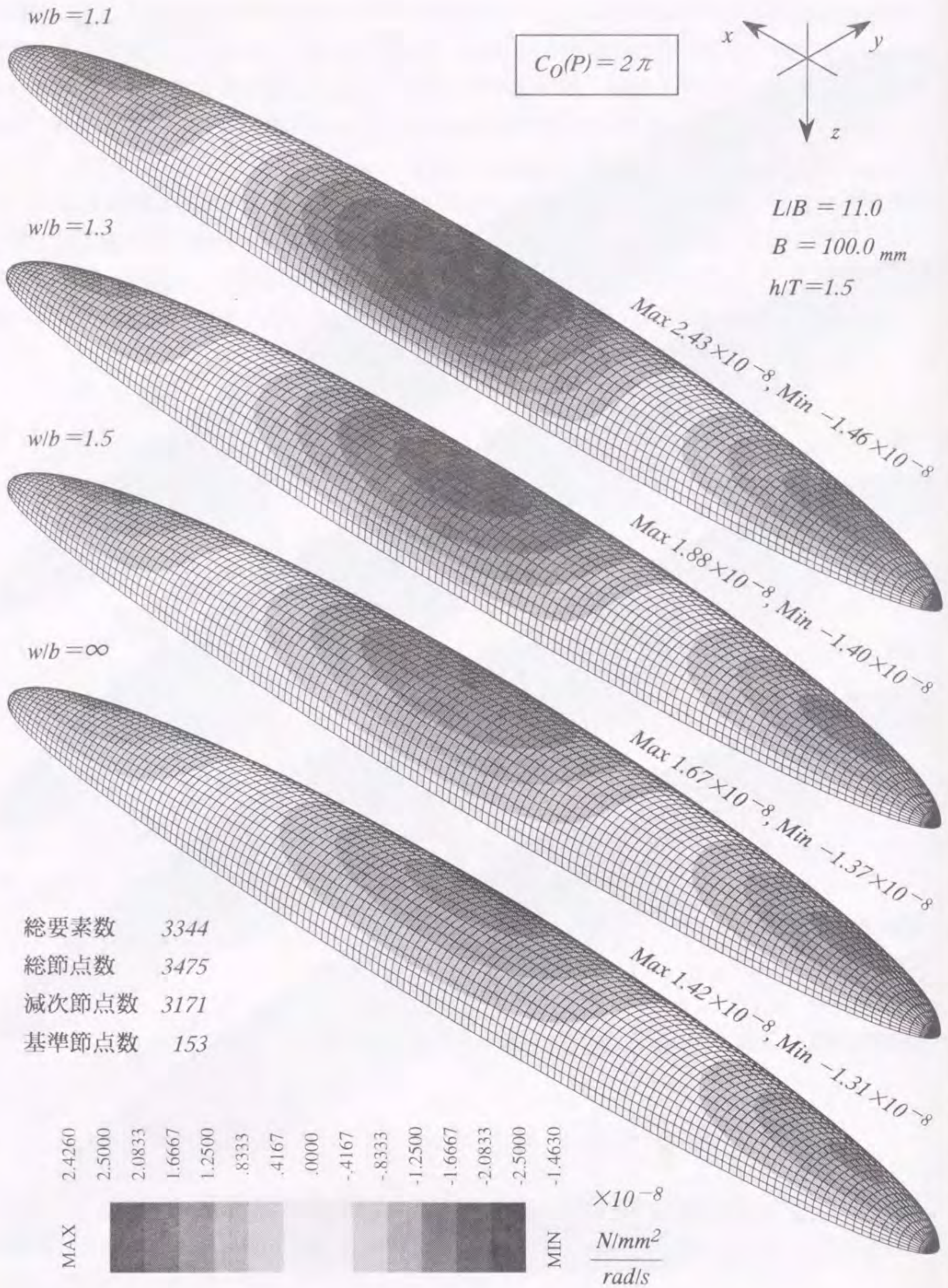


Fig.3.7.12(b)　２節上下振動モードにおける圧力分布（岸壁浅水域）

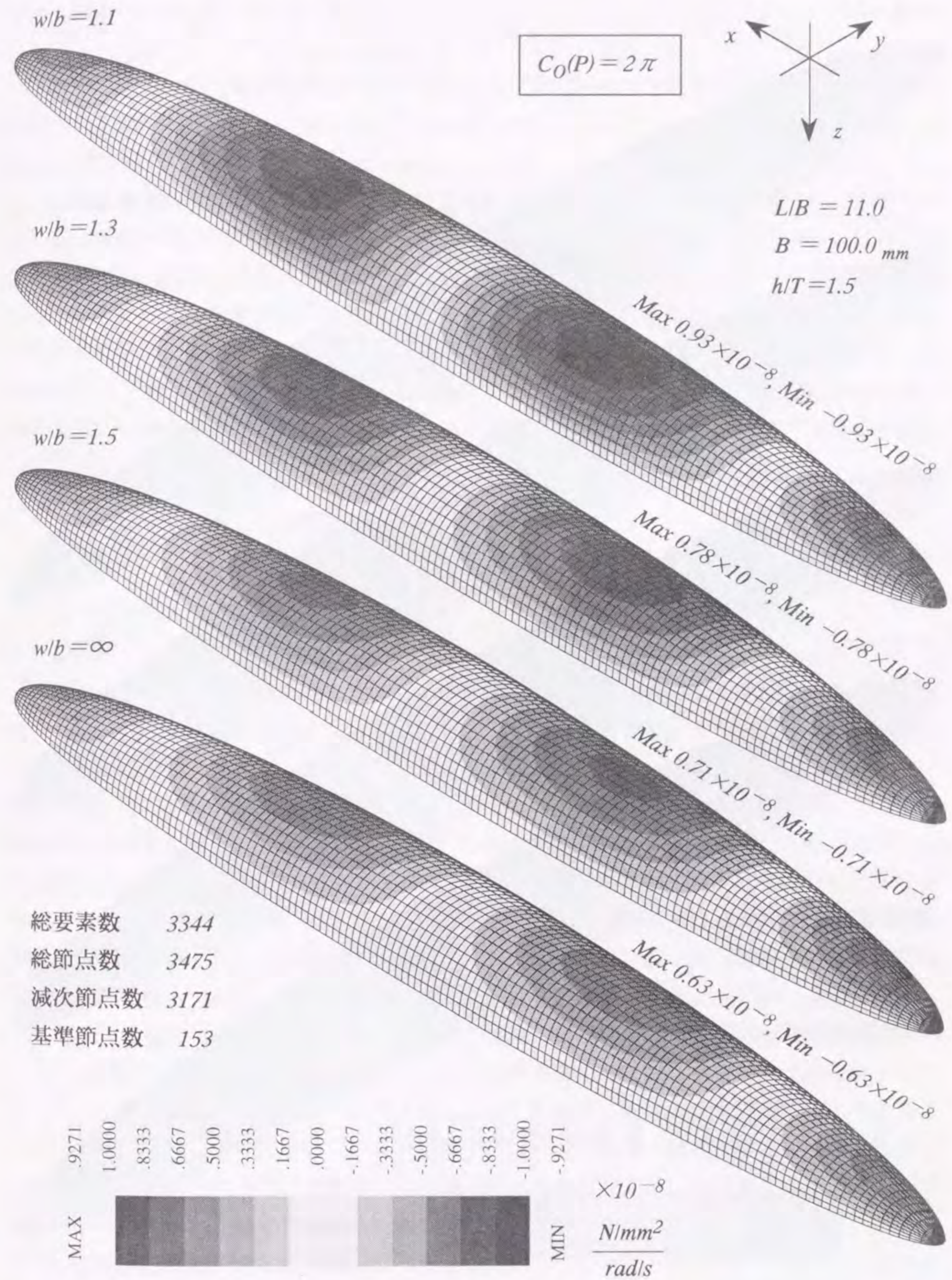


Fig.3.7.12(c)　３節上下振動モードにおける圧力分布（岸壁浅水域）

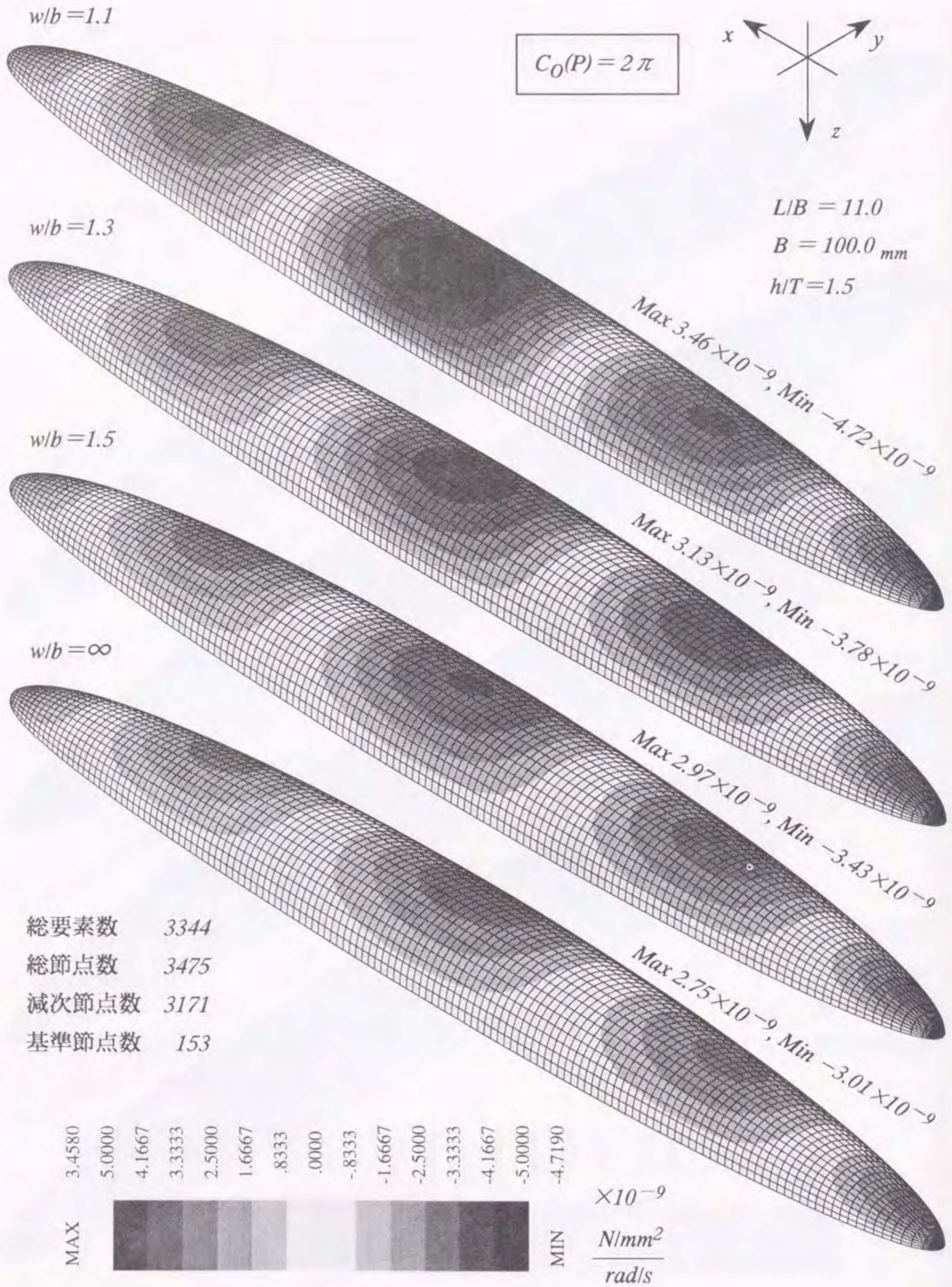


Fig.3.7.12(d)　４節上下振動モードにおける圧力分布（岸壁浅水域）

４章　新しい減衰マトリクスの定式化

流体の粘性について船体振動の面から検討を加えた文献は非常に少ない。流体の粘性による減衰力に最初に着目したのは文献[27]*(Stokes,1850)*であろう。Stokes近似支配方程式(2.1.5)とはこの文献[27]にて使われた近似であることから、そう呼ばれているものである。そして、この文献[27]の無限平板の水平振動による粘性流体の挙動について解析された部分を引用して、文献[51]*(妹澤,1936)*、および文献[52]*(山本,1965)*の解析はなされている。流体の粘性による減衰力を船体振動に対して用いた文献は、著者の知る限りこの２つだけである。しかし、文献[27]では無限平板であるが故に水平方向の圧力勾配を無視した解析となっているにもかかわらずこれをそのまま利用しているので、これらの文献[51],[52]では、船体そのものの振動による影響だけを評価して、流体運動における流速方向の圧力勾配に関する影響は考慮されない結果となっている。著者はこれを無視するべきではないと考えて解析をおこない、粘性流体の理論を用いた新しい減衰マトリクス[54]*(著者,1996)*を定式化した。

４．１　境界層内速度分布

（１）速度ベクトルによる表示

既に述べたように、船体表面とそこにある粒子との間にすべりはなく空隙も生じないものと考えれば、その粒子は船体表面に付着していることとなるから、その粒子の速度は船体表面そのものの速度と完全に一致するものである。そして、粘性による影響が大きく現れてくる振動境界層の領域は無視できる程に薄いと考えることができることから、層内における法線方向流体速度の法線方向への変化は非常に小さな量であると考えられ、むしろ、流体の法線方向速度は層内で変化することなくそのまま境界層外端まで伝わると考えることができる。このような考え方から、船体表面そのものの法線方向速度は境界層外端での流体の法線方向速度と等しいとおくことができた。これによって、ポテンシャル問題の定式化が可能となり、これを解いた結果、境界層外端での圧力を得ることができた。

また、同じ理由により、即ち、振動境界層の領域は無視できる程に薄いと考えられることにより、層内における圧力の法線方向への変化は非常に小さな量であると考えることができる。よって、流体の圧力は層内で変化することなくそのまま船体表面まで達すると考えることができる。即ち、層内において、圧力は接平面に平行な方向へは変化するけれども法線方向へは変化しないと考えて、いわゆる境界層近似を施す訳である。境界層近似により、ポテンシャル問題を解いた結果得られる圧力を、そのまま境界層内の話に持ち込むことができるようになる。これは、非常に便利な近似となる。こうして決定された層内での圧力を用いれば、Stokes近似支配方程式(2.1.5)から層内での流体速度分布を決定することができる。さらに、層内流体速度から散逸エネルギを計算することができるようになる。

流体の法線方向速度は層内で変化しないことを仮定しているから、点Qにおける接平面に平行な速度ベクトルを定義すれば、その和によって層内の速度ベクトルは完全に定まる。そこで、接平面に平行な速度ベクトルを３種類定義する。即ち、境界層外端の速度ベクトルを$v_p(Q)$、船体表面そのものの速度ベクトルを$v_s(Q)$、境界層内の速度ベクトルを$v_b(Q,\hat{z})$とおく。境界層外端の速度ベクトル$v_p(Q)$はポテンシャル問題を解いた結果得られるもので、船体表面そのものの速度ベクトル$v_s(Q)$は船体表面に付着している流体粒子の速度を表す。そして、層内速度ベクトル$v_b(Q,\hat{z})$は振動境界層内部における流体の速度を表す。

振動問題において$v_s(Q)$は無視できない大きさであって、$v_p(Q)$と平行なものでもないから、層内速度ベクトル$v_b(Q,\hat{z})$は$v_s(Q)$から始まってねじれながら$v_p(Q)$に接続されることとなる。その様子をFig.4.1.1に示す。

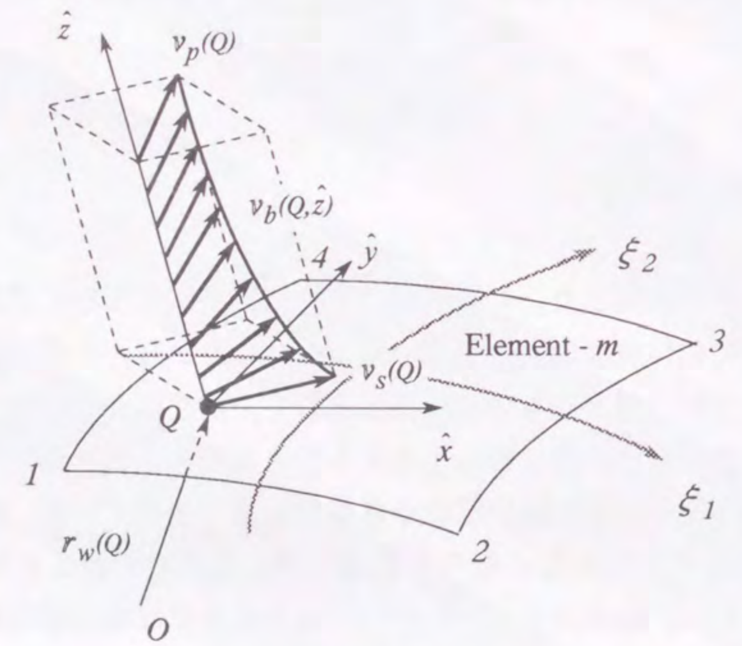


Fig.4.1.1　境界層内速度分布 $v_b(Q,\hat{z})$

流体の法線方向速度ベクトルは船体表面そのものの法線方向速度ベクトルと一致するものと仮定しているが、これを$v_n(Q)$とおけば、境界層内の速度ベクトル$\mathbb{V}(Q,\hat{z};t)$は$v_b(Q,\hat{z})$と$v_n(Q)$との和として、

$$\mathbb{V}(Q,\hat{z};t) \quad = \quad [\, v_b(Q,\hat{z}) + v_n(Q) \,] \; e^{\lambda t} \qquad (4.1.1)$$

にて表すことができる。

一方、境界層内の圧力$P(Q,\hat{z};t)$は境界層外端での圧力と等しいと仮定しているから、(3.2.5)式より、

$$P(Q,\hat{z};t) \quad = \quad -\lambda \rho \phi(Q) \quad e^{\lambda t} \qquad (4.1.2)$$

となる。上２式を、Stokes近似支配方程式(2.1.5)

$$\frac{\partial \mathbb{V}}{\partial t} \quad = \quad -\frac{1}{\rho}\, grad(P) \quad + \quad \nu\, \nabla^2 \mathbb{V} \qquad (2.1.5)_{再記} \quad (4.1.3)$$

に代入すれば、時間項$e^{\lambda t}$はキャンセルされて、

$$\frac{\lambda}{\nu}\, [\, v_b(Q,\hat{z}) + v_n(Q) \,] \quad = \quad \frac{\lambda}{\nu}\, grad[\, \phi(Q) \,] \quad + \quad \nabla^2 [\, v_b(Q,\hat{z}) + v_n(Q) \,] \qquad (4.1.4)$$

となる。さらに、上式右辺の*gradient*の項は境界層外端における速度ベクトルを意味するものであるから、

$$grad[\, \phi(Q) \,] \quad = \quad v_p(Q) + v_n(Q) \qquad (4.1.5)$$

である。上２式により、境界層内支配方程式(4.1.4)は、

$$\frac{\lambda}{\nu}\, v_b(Q,\hat{z}) \quad = \quad \frac{\lambda}{\nu}\, v_p(Q) \quad + \quad \nabla^2 [\, v_b(Q,\hat{z}) + v_n(Q) \,] \qquad (4.1.6)$$

となる。上式右辺第２項においてLaplace演算子の中身は境界層内速度ベクトルを示すままで変化しておらず、境界層内速度ベクトルについては３軸方向のうち法線方向の変化が最も大きいものと考えられるから、Laplace演算子の微分演算のうちで法線方向の微分だけを考える近似を行えば、$v_n(Q)$の項は消滅して、

$$\frac{\lambda}{\nu}\, v_b(Q,\hat{z}) \quad = \quad \frac{\lambda}{\nu}\, v_p(Q) \quad + \quad \frac{\partial^2 v_b(Q,\hat{z})}{\partial \hat{z}^2} \qquad (4.1.7)_{-1}$$

を得る。上式右辺第１項の$v_p(Q)$はポテンシャル問題の解によって既知となるから、未知数$v_b(Q,\hat{z})$に関する２階微分方程式となっていることがわかる。従って、境界条件を与えることによってこれを決定することができれば、境界層内速度分布$v_b(Q,\hat{z})$を得ることができる。

上式を見慣れた形式で表せば、

$$\frac{\partial^2 v_b(Q,\hat{z})}{\partial \hat{z}^2} - \frac{\lambda}{\nu} v_b(Q,\hat{z}) = -\frac{\lambda}{\nu} v_p(Q) \qquad (4.1.7)_{-2}$$

となって、関数$v_b(Q,\hat{z})$は、一般解として$e^{\pm\hat{\alpha}\hat{z}}$ の形式の解を持つこと、及び$v_p(Q)$なる特解を持つことがわかる。ここで、

$$\hat{\alpha} = \sqrt{\frac{\lambda}{\nu}} = (1+i)\sqrt{\frac{\omega}{2\nu}} \qquad (4.1.8)$$

である。なお、上式では(3.2.1)式にて定義した$\lambda = i\omega, i=\sqrt{-1}$の関係を用いている。そして、最右辺の根号部分を$\alpha$とおいて、(2.2.4)式にて定義した振動Reynolds 数Rs

$$Rs = \frac{\omega L^2}{\nu} \qquad (2.2.4)_{再記} \quad (4.1.9)$$

を用いれば、

$$\alpha = \sqrt{\frac{\omega}{2\nu}} = \sqrt{\frac{Rs}{2}}\,\frac{1}{L} \quad , \quad \hat{\alpha} = \alpha(1+i) \qquad (4.1.10)$$

と表すこともできる。ここで、Lは船の全長を表すものであった。

境界層外端において、速度分布$v_b(Q,\hat{z})$は滑らかに$v_p(Q)$と接続されるべきであるから、境界条件を

$$v_b(Q,\hat{z}) = v_s(Q) \qquad (at\ \hat{z}=0) \qquad (4.1.11)_{-1}$$

$$v_b(Q,\hat{z}) = v_p(Q) \qquad (at\ \hat{z}=\infty) \qquad (4.1.11)_{-2}$$

とおけば、微分方程式(4.1.7)の解は、

$$v_b(Q,\hat{z}) = e^{-\hat{\alpha}\hat{z}}\,[\,v_s(Q) - v_p(Q)\,] + v_p(Q) \qquad (4.1.12)$$

となる。上式によって、境界層内の速度分布が決定できたこととなる。

さて、上式は、単調波成分だけを考えて定式化したものであるから、実際の現象を完全に表せているとは限らない。Stokes近似支配方程式(2.1.5)を得るにあたって、倍調波成分を含む変動調波成分による影響を無視できたのは流場全域を概観したからであって、振動境界層に着目して検討を行った訳ではないのである。従って、変動調波成分による影響を何らかの形で考慮する必要があろう。変動調波成分は、接平面と平行な速度成分だけに生じるのではなくて、法線方向の速度成分にも生じるであろう。そこで、流体力学的に定常流れである抵抗推進の分野では、乱流による影響を簡単に取り扱うために見掛けの動粘性係数を用いて解析を行っている[63] *(田中,1972)*ことに注目する。振動問題においては流体力学的に非定常流れであるから乱流とは呼びにくいが、法線方向の流体速度も存在するために、やはり境界層内は乱動に満ちた状態であると考えられる。従って、境界層内壁面近傍では、上式による速度分布よりも速度勾配は大きいはずである。ところが、上式において動粘性係数νを大きくしてみれば、Fig.4.1.2に示すように速度勾配は小さくなってしまう。これは、(4.1.10)式のαが振動Reynolds数によって支配され、結果として速度分布もこれに支配されることによる影響である。速度分布がこのような特性を持つ以上、見掛けの動粘性係数としてνよりも大きな値を設定して乱動による影響を表そうとすることには無理があるように思われる。よって、速度分布に対しては見掛けの動粘性係数を設定せずに、動粘性係数νのまま変更しないこととする。なお、Fig.4.1.2は、v_sとv_pとの方向が一致する特殊な場合を示している。

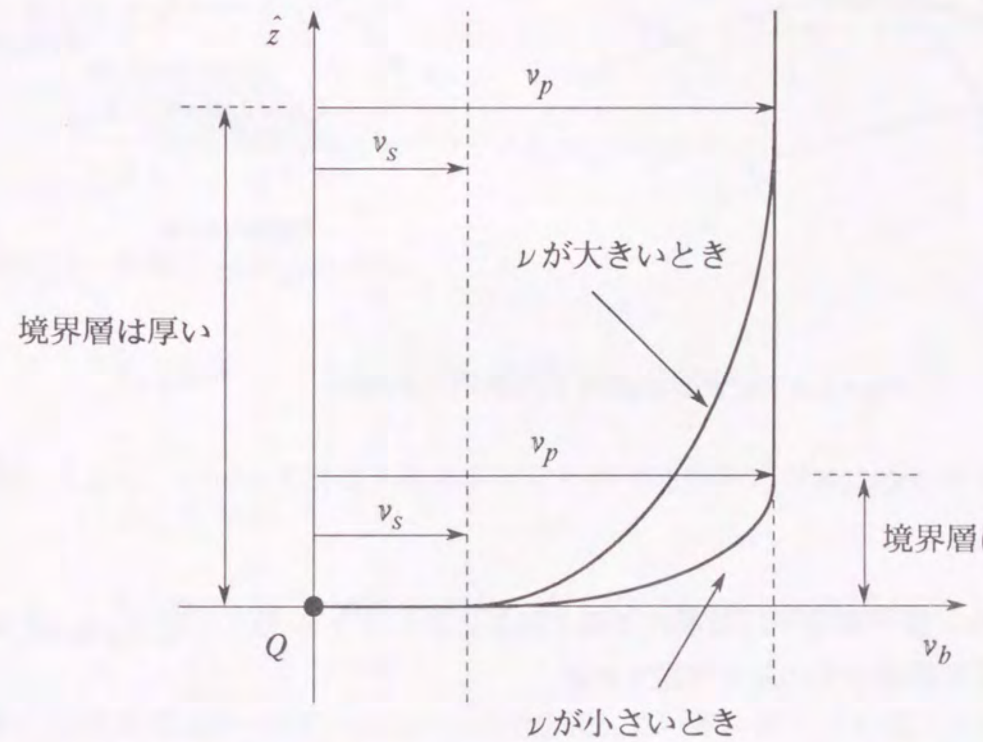


Fig.4.1.2　動粘性係数νの関数と捉えた場合の境界層内速度分布v_b

乱動による影響は表せていないものの、層流状態での境界層内の速度分布は(4.1.12)式により決定できたから、これによる剪断応力を決定することができる。

境界層内の速度変化は法線方向へのものが最も大きく、これに較べれば接平面に平行な方向への速度変化は微々たるものであるから、$\hat{x}$軸および$\hat{y}$軸に垂直な平面をゆがめる作用をする歪速度が主成分となることがわかる。この歪速度に関わる剪断応力は、接平面と平行な面内で働くものに他ならない。従って、船体表面に作用する剪断応力は作用反作用の関係によりFig.4.1.3の如きものとなって、流体に作用する剪断応力の$\hat{z}=0$における値を採用すれば、そのまま船体表面に作用する座標軸方向の剪断応力を得ることができることとなる。

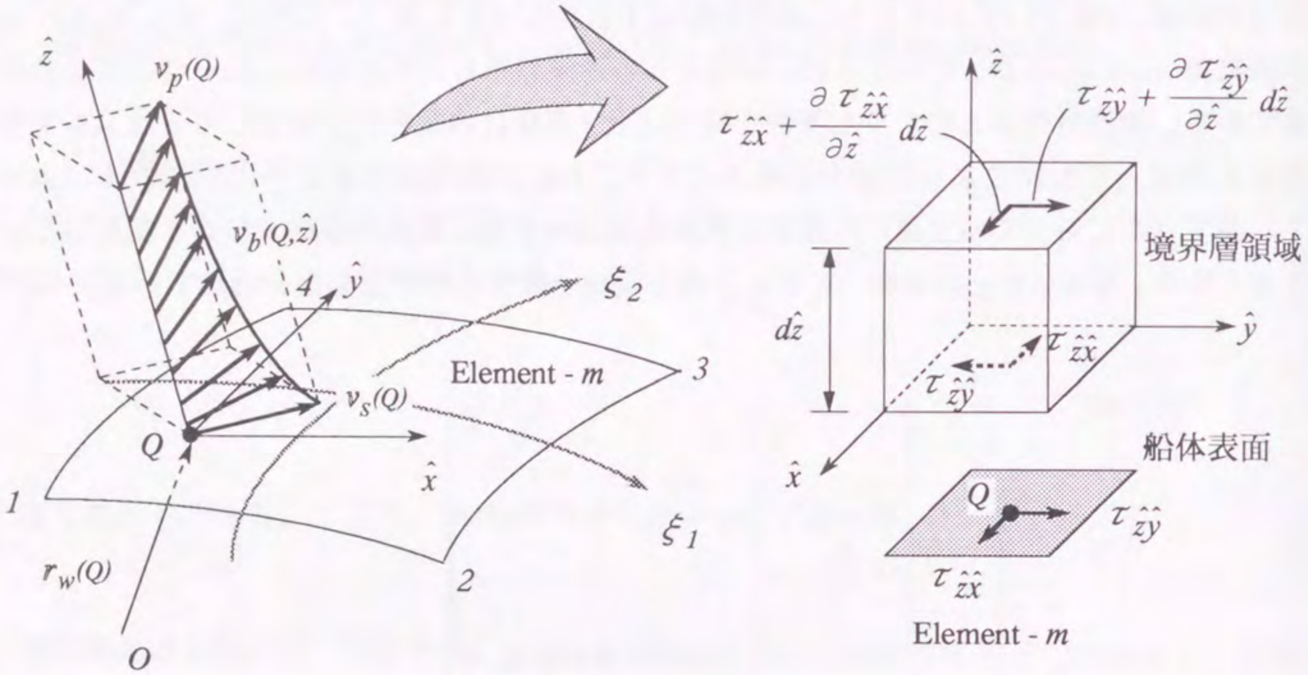


Fig.4.1.3 $\hat{x}\hat{y}$平面における剪断応力の成分

以上の理由から、接平面と平行な面内で働く剪断応力ベクトルのことを$\tau_{b}(Q,\hat{z})$とおき、その主成分となる法線微分項のみを考慮すれば、

$$\tau_{b}(Q,\hat{z}) = \rho\,\nu\,\frac{\partial\, v_b(Q,\hat{z})}{\partial \hat{z}} \tag{4.1.13}$$

を得る。ここで、動粘性係数νに倍率係数β_wを乗じることによって、見掛けの動粘性係数ν_wを定義する。

$$\nu_w = \beta_w\,\nu \tag{4.1.14}$$

Stokes近似によって無視された変動調波成分による影響、ひいては乱動による影響を、上式を利用して補おうと考える訳である。そして、剪断応力の式(4.1.13)における動粘性係数νを見掛けの動粘性係数ν_wに差し替えて、

$$\tau_{bw}(Q,\hat{z}) = \rho\,\nu_w\,\frac{\partial\, v_b(Q,\hat{z})}{\partial \hat{z}} \tag{4.1.15}$$

にて剪断応力$\tau_{bw}(Q,\hat{z})$を再定義することとする。これは、速度分布の式(4.1.12)では動粘性係数νをν_wに差し替えたりせずにそのまま扱うのに対して、剪断応力だけをβ_w倍して評価しようとするものであるから、一見非常に乱暴な方法にみえる。しかし、後でわかるように、この倍率係数β_wは速度分布の式(4.1.12)を修正するのと同じ効果を持つのである。従って、β_wのことを速度分布修正係数と呼ぶことにする。

さて、見掛けの動粘性係数ν_wを用いて計算を続けよう。上式右辺の速度分布v_bに関する微分計算を行えば、

$$\frac{\partial\, v_b(Q,\hat{z})}{\partial \hat{z}} = \hat{\alpha}\;e^{-\hat{\alpha}\hat{z}}\;[\,v_p(Q) - v_s(Q)\,] \tag{4.1.16}$$

であるから、剪断応力$\tau_{bw}(Q,\hat{z})$は、

$$\tau_{bw}(Q,\hat{z}) = \rho\,\nu_w\;\hat{\alpha}\;e^{-\hat{\alpha}\hat{z}}\;[\,v_p(Q) - v_s(Q)\,] \tag{4.1.17}$$

となる。ここで、$\hat{z}=0$とすれば、船体表面に作用する剪断応力$\tau_{sw}(Q)$を得ることができて、

$$\tau_{sw}(Q) = \rho\,\nu_w\sqrt{\frac{\omega}{2\nu}}\;(1+i)\;[\,v_p(Q) - v_s(Q)\,] \tag{4.1.18}$$

となる。上式右辺の$(1+i)$は、$\pi/4$の位相差を表している。即ち、速度$[v_p(Q)-v_s(Q)]$に対して$\pi/4$の位相差をもって船体表面に剪断応力$\tau_{sw}(Q)$が作用することになる。この$\tau_{sw}(Q)$を絶対座標系へ座標変換し、さらに船体表面で積分すれば、複素形式の線形減衰マトリクスを得ることができる。

ここで、速度分布修正係数としてのβ_wについて観察しておこう。速度分布$v_b(Q,\hat{z})$の式(4.1.12)において、指数部分にβ_wを乗じて

$$v_\beta(Q,\hat{z}) \quad = \quad e^{-\beta_w \hat{\alpha}\hat{z}}\,[\,v_s(Q)-v_p(Q)\,] \; + \; v_p(Q) \qquad (4.1.19)$$

なる関数$v_\beta(Q,\hat{z})$を定義し、これを修正速度分布と呼ぶことにしよう。この関数は、Fig.4.1.4に示すように、$\beta_w>1.0$の範囲においてβ_wが大きくなるほどに境界層内壁面近傍での速度勾配も大きくなる特徴を有するものである。よって、乱動による影響を表すためには好適の特徴を持っていることがわかる。見掛けの動粘性係数ν_wを用いない剪断応力の式(4.1.13)に上式を代入すれば、

$$\tau_b(Q,\hat{z}) \quad = \quad \rho\,\nu\,\beta_w\,\hat{\alpha}\;e^{-\beta_w\hat{\alpha}\hat{z}}\,[\,v_s(Q)-v_p(Q)\,] \qquad (4.1.20)$$

となり、さらに、$\hat{z}=0$とすれば、船体表面に作用する剪断応力$\tau_s(Q)$を得ることができて、

$$\tau_s(Q) \quad = \quad \beta_w\rho\,\nu\sqrt{\frac{\omega}{2\nu}}\;(1+i)\;[\,v_p(Q)-v_s(Q)\,] \qquad (4.1.21)$$

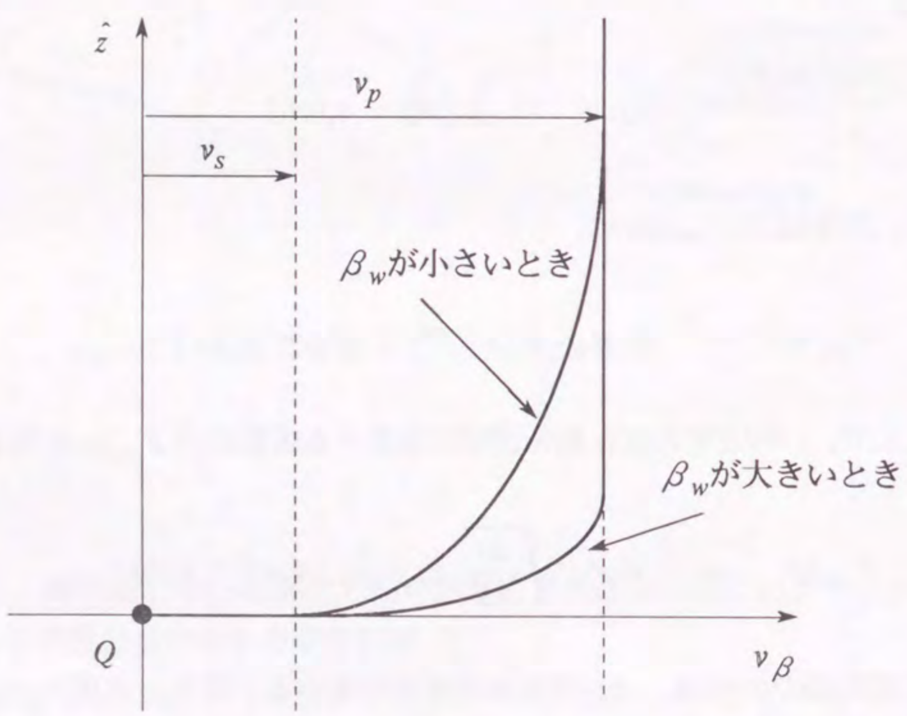


Fig.4.1.4　修正速度分布$v_\beta(Q,\hat{z})$

となる。上式は、見掛けの動粘性係数ν_wを用いた場合の船体表面の剪断応力$\tau_{sw}(Q)$の式(4.1.18)と完全に一致していることがわかる。この意味で、倍率係数β_wのことを速度分布修正係数と呼ぶことができる訳である。

速度分布修正係数β_wがいかなる値を取るべきかについての理論解析は行っていないので、現状では、実験によってβ_wを決定するしか方法がないのが辛いところである。しかし、後述する実験により、深水域では$\beta_w=1.0$として良いことが判っている。これは、深水域では乱動による影響は少ないことを意味している。

さて、上式の$\tau_s(Q)$からも複素形式の線形減衰マトリクスを得ることができる。複素形式であっても線形減衰マトリクスとして得られるものであるから、振動解析に利用することはできる。しかし、上式にて得られるのは船体表面に働く減衰力だけであって、水底あるいは岸壁に働く減衰力を示すものではない。これを得るためには、水底あるいは岸壁において上式と同様の式を導くこととなるが、これはあくまでも水底あるいは岸壁に作用する力であって、船体表面に働く減衰力ではない。従って、剪断応力を用いて減衰マトリクスを定式化しようとする限り、減衰作用を有する流体運動のうちで船体振動を抑制する力として表現できるのは、船体表面に関する部分だけとなってしまう。

そこで、粘性による散逸エネルギから減衰マトリクスを導く方法を考える必要が生じる。散逸エネルギから導く方法によれば、水底あるいは岸壁において散逸されるエネルギが船体表面変位の関数となるために、流体領域の境界面に作用する減衰力の全てを船体振動を抑制する力として評価することが可能となる。よって、本論文では、上式による減衰マトリクスを示すことは行わずに、散逸エネルギから導く方法を述べることとする（４．２節）。

（2）変位ベクトルによる表示

境界層内の速度ベクトルを表すにあたって、境界層外端の速度ベクトル$v_p(Q)$および船体表面そのものの速度ベクトル$v_s(Q)$を利用した。これらは本来、船体表面変位$u_w(Q)$の関数である。ここでは、$v_p(Q)$および$v_s(Q)$が表面変位$u_w(Q)$のいかなる関数として表されるのかについて述べる。

まずは、境界層外端の速度ベクトル$v_p(Q)$について述べる。$v_p(Q)$は局部デカルト座標系にて記述されているものとして扱ってきたから、$v_p(Q)$を局部デカルト座標系にて表すことが最終的な目標となる。しかし、速度ポテンシャルは内挿関数によって補間表現されていることから、曲線座標系のパラメータξ_1,ξ_2で記述されていることになる。従って、一度、局部斜交座標系にて速度ベクトルを得ておいてから、これを局部デカルト座標系に座標変換することにする。

曲面上に点Qを始点とする微小弧長dsを考え、その絶対座標系に対する成分を(dx,dy,dz)とした様子をFig.4.1.5に示す。また、ξ_1,ξ_2方向の単位接線ベクトルによって定義される局部斜交座標系の座標軸を$1,2$と表し、微小弧長dsを1軸方向にとった場合をds_1、微小弧長dsを2軸方向にとった場合をds_2と表せば、点Qが始点であることからds_1およびds_2は接平面上にあるものと考えることができる。なお、3軸は法線方向を示す。

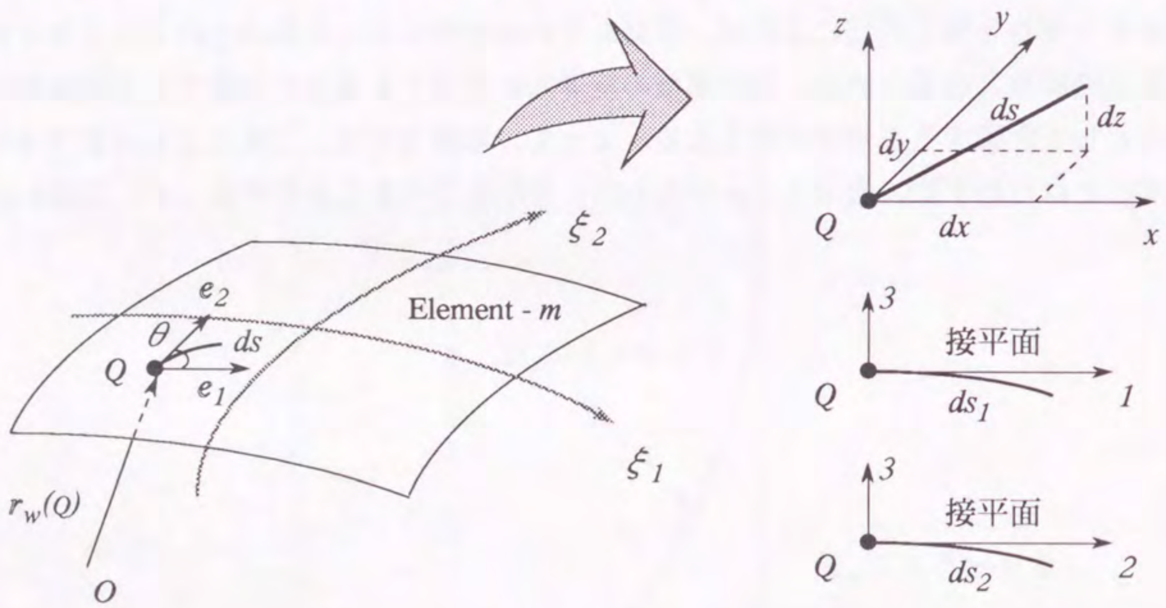


Fig.4.1.5　曲面における単位接線ベクトルと微小弧長ds

曲面上の微小弧長dsは、

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 \qquad (4.1.22)$$

なる関係を満足し、その成分(dx,dy,dz)は曲線座標系のパラメータξ_1,ξ_2によって、

$$dx = \frac{\partial x}{\partial \xi_1} d\xi_1 + \frac{\partial x}{\partial \xi_2} d\xi_2 \qquad (4.1.23)_{-1}$$

$$dy = \frac{\partial y}{\partial \xi_1} d\xi_1 + \frac{\partial y}{\partial \xi_2} d\xi_2 \qquad (4.1.23)_{-2}$$

$$dz = \frac{\partial z}{\partial \xi_1} d\xi_1 + \frac{\partial z}{\partial \xi_2} d\xi_2 \qquad (4.1.23)_{-3}$$

と表される。従って、

$$\begin{aligned} ds^2 = \; & d\xi_1^{\,2} \left\{ \left(\frac{\partial x}{\partial \xi_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \xi_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \xi_1}\right)^2 \right\} \\ & + 2\, d\xi_1\, d\xi_2 \left\{ \frac{\partial x}{\partial \xi_1}\frac{\partial x}{\partial \xi_2} + \frac{\partial y}{\partial \xi_1}\frac{\partial y}{\partial \xi_2} + \frac{\partial z}{\partial \xi_1}\frac{\partial z}{\partial \xi_2} \right\} \\ & + d\xi_2^{\,2} \left\{ \left(\frac{\partial x}{\partial \xi_2}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \xi_2}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \xi_2}\right)^2 \right\} \end{aligned} \qquad (4.1.24)$$

なる関係が得られる。

上式で、微小弧長dsを1軸方向にとってds_1とすれば$d\xi_2$はゼロとなり、微小弧長dsを2軸方向にとってds_2とすれば$d\xi_1$はゼロとなるから、

$$\frac{d\xi_j}{ds_j} = h_j = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial \xi_j}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \xi_j}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \xi_j}\right)^2}} \qquad (3.1.4)_{再記} \quad (4.1.25)$$

なる関係が得られる。ここで、$j=1,2$である。さらに、速度ポテンシャル$\phi(Q)$をj軸で微分すればその方向の流体速度を得ることができる。j軸方向の境界層外端での流体速度を$v_{pj}(Q)$とおけば、

$$v_{pj}(Q) = \frac{d\phi(Q)}{ds_j} = \frac{\partial \phi(Q)}{\partial \xi_j}\frac{d\xi_j}{ds_j} = h_j \frac{\partial \phi(Q)}{\partial \xi_j} \qquad (4.1.26)$$

となる。上式の関係に、速度ポテンシャル$\phi_{(Q)}$の内挿補間式(3.5.6)を代入すれば、

$$v_{pj(Q)} = \sum_{k=1}^{k_{max}} h_j \frac{\partial N_{k(Q)}}{\partial \xi_j} \phi_k \tag{4.1.27}$$

を得る。上式は要素mに関する式であって、マトリクス表示することができる。そのために、ϕ_kの係数を$S_{p\,jk(Q)}$とかくことにすれば、

$$S_{p\,jk(Q)} = h_j \frac{\partial N_{k(Q)}}{\partial \xi_j} \tag{4.1.28}$$

となる。ここで、要素mの節点総数k_{max}のことを単にKとかくことにして、マトリクス表示の詳細を示せば、

$$v_p{}^1{}_{(Q)} = \begin{Bmatrix} v_{p1(Q)} \\ v_{p2(Q)} \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{p\,11} & S_{p\,12} & \cdots & S_{p\,1K} \\ S_{p\,21} & S_{p\,22} & \cdots & S_{p\,2K} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ \phi_K \end{Bmatrix} \tag{4.1.29}$$

となって、境界層外端の速度ベクトル$v_{p(Q)}$の局部斜交座標系における成分$v_p{}^1{}_{(Q)}$が得られる。右上添字^{1}は3．1節の定義に従って付けたもので、局部斜交座標系における成分であることを示す。なお、$v_{p(Q)}$は接平面に平行な速度ベクトルであるから、法線方向に相当する上式中辺第3行はゼロとしておく。それに合わせて上式最右辺マトリクスの第3行もゼロとしておく。そして、上式の関係を、

$$\underset{3\times 1}{v_p{}^1{}_{(Q)}} = \underset{3\times k_{max}}{[\tilde{S}_p]}\ \underset{k_{max}\times 1}{\{\tilde{\phi}\}} \tag{4.1.30}$$

と表すこととする。上式右辺のマトリクス$[\tilde{S}_p]$及びベクトル$\{\tilde{\phi}\}$に付けた上付き記号~は、要素mの節点総数に関係するサイズであることを強調するためのもので、モデルの全節点を表す$\{\phi\}$とは異なるものであることを示している。

一方、速度ポテンシャル$\{\phi\}$は(3.5.23)式の関係により節点変位$\{u_w\}$の関数となっているから、要素mの局部節点から構成される速度ポテンシャル$\{\tilde{\phi}\}$も、当然、節点変位$\{u_w\}$の関数となる。(3.5.23)第3式を再記すれば、

$$\{\phi\} = \lambda\ [AiB]\ \{u_w\} \tag{3.5.23$_{-3\text{-再記}}$}$$

であり、$\{\phi\}$から要素mに関わる節点部分だけを抽出して$\{\tilde{\phi}\}$を構成することができることがわかる。これを行うために$[AiB]$の行成分のうち、要素mに関わる節点部分だけを抽出したものを$[\tilde{AiB}]$とおけば、

$$\{\tilde{\phi}\} = \lambda\ [\tilde{AiB}]\ \{u_w\} \tag{4.1.31}$$

を得る。上式を、$v_{p(Q)}$の局部斜交座標系における成分$v_p{}^1{}_{(Q)}$の式(4.1.30)に代入すれば、

$$\underset{3\times 1}{v_p{}^1{}_{(Q)}} = \lambda\ \underset{3\times k_{max}}{[\tilde{S}_p]}\ \underset{k_{max}\times 3N_{max}}{[\tilde{AiB}]}\ \underset{3N_{max}\times 1}{\{u_w\}} \tag{4.1.32$_{-1}$}$$

となって、$v_p{}^1{}_{(Q)}$を節点変位$\{u_w\}$の関数として表すことができる。なお、$[AiB]$の行数を減次節点数N_{min}のサイズで表している場合には、自由表面との交線上に位置する節点に関わる行成分が$[AiB]$には含まれていないから多少の注意を要する。この場合には、$[\tilde{S}_p]$の列成分のうち、自由表面との交線上に位置する節点の列を削除すればよいことになる。例えば、要素mにこのような節点が２つ含まれていたとすれば、$[\tilde{S}_p]$のサイズは$3\times(k_{max}-2)$となる訳である。この$(k_{max}-2)$に相当する節点数、即ち、$[AiB]$を減次節点数N_{min}のサイズで表している場合の要素mの減次節点数をあらためてk_{min}と定義すれば、上式は、

$$\underset{3\times 1}{v_p{}^1{}_{(Q)}} = \lambda\ \underset{3\times k_{min}}{[\tilde{S}_p]}\ \underset{k_{min}\times 3N_{max}}{[\tilde{AiB}]}\ \underset{3N_{max}\times 1}{\{u_w\}} \tag{4.1.32$_{-2}$}$$

となる。なお、減次節点数N_{min}とは、３．６（３）節にて定義したものである。

以上によって局部斜交座標系における速度ベクトルを得ることができたから、次は、これを局部デカルト座標系に座標変換することにする。座標変換式(3.1.26)により、

$$v_{p(Q)} = v_p{}^2{}_{(Q)} = \underset{3\times 3}{[T_1]}\ v_p{}^1{}_{(Q)} \tag{4.1.33}$$

を得る。上式で、$v_p{}^2{}_{(Q)}$とは$v_{p(Q)}$の局部デカルト座標系における成分を表すもので、右上添字^{2}は３．１節の定義に従って付けたものである。そして、境界層外端の速度ベクトル$v_{p(Q)}$は局部デカルト座標系における成分で記述されているものとして定式化を進めてきたから、$v_p{}^2{}_{(Q)}$とは$v_{p(Q)}$そのものを表すことを示している。なお、$v_p{}^1{}_{(Q)}$の第３行はゼロであることから、$[T_1]$の第３列は計算結果に寄与しないことがわかる。従って、$[T_1]$の３行３列目の成分1.0をゼロとみなして計算しても正しい解が得られる。即ち、$[T_1]$の成分(3.1.28)の特殊性を斟酌すれば、$[T_1]$の第３行及び第３列を考慮する必要がない訳である。

上２式を利用すれば、

$$v_p(Q) \quad = \quad \lambda \quad [\,T_1\,]\,[\,\tilde{S}_p\,]\,[\,\tilde{A}iB\,]\,\{u_w\} \tag{4.1.34}$$

を得る。上式によって、境界層外端の速度ベクトル$v_p(Q)$は完全に定まったこととなる。これを絶対座標系において作図したい場合には、座標変換式(3.1.26)により、

$$v_p{}^0(Q) \quad = \quad \underset{3\times 3}{[\,T_0\,]^{-1}}\; v_p{}^2(Q) \tag{4.1.35}$$

を得てから作図することになる。ここで、$v_p{}^0(Q)$とは$v_p(Q)$の絶対座標系における成分を表すものである。なお、逆行列$[\,T_0\,]^{-1}$には、

$$[\,T_0\,]^{-1} \quad = \quad [\,T_0\,]^T \tag{4.1.36}$$

なる性質があるから、実際には逆行列計算を行う必要はなくて、$v_p{}^0(Q)$の計算は随分と短い時間で実行できることになる。$v_p{}^0(Q)$を求めて作図すれば、船体表面の接平面に平行な速度ベクトルが描かれる。

では、次に、船体表面そのものの速度ベクトル$v_s(Q)$について述べる。$v_s(Q)$は局部デカルト座標系にて記述されているものとして扱ってきたから、$v_s(Q)$を局部デカルト座標系にて表すことが最終的な目標となる。表面変位は内挿関数によって補間表現されていることから、曲線座標系のパラメータξ_1, ξ_2で記述されている。しかし、節点変位を絶対座標系における成分で与える定式化を進めてきたから、内挿補間式(3.5.3)の結果得られる表面変位も絶対座標系における成分を表している。従って、これを局部デカルト座標系に座標変換すればよいだけである。ただ、注意するべきは、$v_s(Q)$は接平面に平行な速度ベクトルであるから、法線方向の成分を与えないように座標変換することである。

船体表面そのものの速度ベクトルを、法線方向速度も含めて$v_w{}^0(Q)$と表すこととすれば、内挿補間式(3.5.3)より、

$$v_w{}^0(Q) \quad = \quad \lambda \sum_{k=1}^{k_{max}} N_k(Q)\;u_{wk} \tag{4.1.37}$$

と表すことができる。節点変位u_{wk}が絶対座標系における成分で与えられるから、$v_w{}^0(Q)$も絶対座標系における成分で表されている。$v_w{}^0(Q)$の成分を$(v_{wx}\, v_{wy}\, v_{wz})$として、上式の関係をマトリクスで表せば、

$$v_w{}^0(Q) = \begin{Bmatrix} v_{wx} \\ v_{wy} \\ v_{wz} \end{Bmatrix} = \lambda \left[\begin{array}{ccc:ccc:c:ccc} N_1 & 0 & 0 & N_2 & 0 & 0 & \cdots & N_K & 0 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & 0 & N_2 & 0 & \cdots & 0 & N_K & 0 \\ 0 & 0 & N_1 & 0 & 0 & N_2 & \cdots & 0 & 0 & N_K \end{array}\right] \begin{Bmatrix} u_{w1} \\ u_{w2} \\ \vdots \\ \vdots \\ u_{wK} \end{Bmatrix} \tag{4.1.38}$$

となる。ここで、要素mの節点総数k_{max}のことを単にKとかいている。そして、上式の関係を、

$$\underset{3\times 1}{v_w{}^0(Q)} \quad = \quad \lambda \quad \underset{3\times 3k_{max}}{[\,\tilde{N}_w\,]}\;\underset{3k_{max}\times 1}{\{\tilde{u}_w\}} \tag{4.1.39}$$

と表すこととする。上式を、座標変換式(3.1.26)により、局部デカルト座標系に座標変換すれば、

$$v_w{}^2(Q) \quad = \quad \underset{3\times 3}{[\,T_0\,]}\; v_w{}^0(Q) \;=\; \lambda\; \underset{3\times 3}{[\,T_0\,]}\,\underset{3\times 3k_{max}}{[\,\tilde{N}_w\,]}\;\underset{3k_{max}\times 1}{\{\tilde{u}_w\}} \tag{4.1.40}$$

を得る。上式で、$v_w{}^2(Q)$とは船体表面そのものの速度ベクトルの局部デカルト座標系における成分を表すものである。しかし、これは法線方向の速度成分も含むために、まだ、$v_s(Q)$と等しいものではない。$v_s(Q)$は接平面に平行な速度ベクトルであるから、$v_w{}^2(Q)$の第３行をゼロとしたものこそが$v_s(Q)$に等しいものとなる。そのような作用を有する座標変換マトリクスを$[T_2]$とすれば、$[T_2]$とは$[T_0]$の第３行をゼロとしたものである。(3.1.27)式の記号を用いれば、

$$[\,T_2\,] \quad = \quad \begin{bmatrix} \hat{n}_{x0}{}^T \\ \hat{n}_{y0}{}^T \\ 0^T \end{bmatrix} \quad = \quad \begin{bmatrix} \hat{n}_{xx} & \hat{n}_{xy} & \hat{n}_{xz} \\ \hat{n}_{yx} & \hat{n}_{yy} & \hat{n}_{yz} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{4.1.41}$$

である。この$[T_2]$を用いれば、

$$v_s(Q) \quad = \quad \underset{3\times 3}{[\,T_2\,]}\; v_w{}^0(Q) \;=\; \lambda\; \underset{3\times 3}{[\,T_2\,]}\,\underset{3\times 3k_{max}}{[\,\tilde{N}_w\,]}\;\underset{3k_{max}\times 1}{\{\tilde{u}_w\}} \tag{4.1.42}$$

となる。上式によって、船体表面そのものの速度ベクトル$v_s(Q)$は完全に定まったこととなる。なお、減次節点を使った解析をおこなっていても$v_s(Q)$には全く影響がなくて、要素mの減次節点数を考える必要はない。

以上のようにして得られた速度ベクトル$v_p(Q)$の式(4.1.34)および$v_s(Q)$の式(4.1.42)を、層流状態速度分布式(4.1.12)あるいは修正速度分布式(4.1.19)に代入すれば、変位の関数としての速度分布表示を得ることができる。

層流状態速度分布の場合には、

$$v_b(Q,\hat{z}) = \lambda e^{-\hat{\alpha}\hat{z}} \left[[T_2][\tilde{N}_w]\{\tilde{u}_w\} - [T_1][\tilde{S}_p][\tilde{AiB}]\{u_w\} \right] + \lambda [T_1][\tilde{S}_p][\tilde{AiB}]\{u_w\} \qquad (4.1.43)$$

となり、修正速度分布の場合には、

$$v_\beta(Q,\hat{z}) = \lambda e^{-\beta_w \hat{\alpha}\hat{z}} \left[[T_2][\tilde{N}_w]\{\tilde{u}_w\} - [T_1][\tilde{S}_p][\tilde{AiB}]\{u_w\} \right] + \lambda [T_1][\tilde{S}_p][\tilde{AiB}]\{u_w\} \qquad (4.1.44)$$

となる。

４．２　粘性による散逸エネルギ

（１）減衰マトリクスによる散逸エネルギ

船体表面の各節点に作用する外力としての減衰力について考える。全節点に作用する減衰力ベクトルを$\{\mathbb{F}_{wc}(t)\}$にて定義し、変位の定義式(3.2.1)と同様に、時間項を変数分離して、

$$\{\mathbb{F}_{wc}(t)\} = \{f_{wc}\}\, e^{\lambda t} \qquad (4.2.1)$$

と表す。また、節点減衰力$\{\mathbb{F}_{wc}(t)\}$は節点速度に比例して作用する力であるから、その比例定数としての減衰マトリクスを$[C]$とすれば、

$$\{\mathbb{F}_{wc}(t)\} = -\lambda\, [C]\, \{u_w\}\, e^{\lambda t} \qquad (4.2.2)$$

となる。上式右辺の負号は、節点減衰力$\{\mathbb{F}_{wc}(t)\}$が船体表面に作用する外力であることを示すものである。そして、上２式から、

$$\{f_{wc}\} = -\lambda\, [C]\, \{u_w\} \qquad (4.2.3)$$

なる関係が得られる。節点減衰力$\{f_{wc}\}$とは流体から船体表面に向けて働く力であるから、これに負号を付ければ、船殻が流体に働きかける力となる。従って、$-\{f_{wc}\}$による仕事を計算すれば、それは流体中で散逸されるエネルギを表すこととなる。

船体表面が流場に対して単位時間あたりになす仕事を$dW_{wc}(t)/dt$とすれば、

$$\frac{dW_{wc}(t)}{dt} = Re\left[\lambda \{u_w\}^T e^{\lambda t} \right] Re\left[-\{f_{wc}\} e^{\lambda t} \right]$$

$$= Re\left[\lambda \{u_w\}^T e^{\lambda t} \right] [C]\, Re\left[\lambda \{u_w\} e^{\lambda t} \right] \qquad (4.2.4)$$

となる。上式は、運動エネルギの式(3.6.32)と全く同形で、減衰マトリクス$[C]$を節点速度ベクトルで挟んだ２次形式にて表されていることがわかる。また、流場に対して単位時間あたりになす仕事$dW_{wc}(t)/dt$は必ず正であって、負になることがあってはならないものである。もしも、負になるようなことがあれば流場からエネルギを供給される瞬間があることとなって、それはもはや減衰力ではなくなってしまうからである。また、$dW_{wc}(t)/dt$は必ず正であることから、散逸エネルギは時刻とともに増え続け、決して減ることがないものであることもわかる。ただし、$[C]$の両側から掛かっている節点速度ベクトルそのものがゼロとなる特別な場合には、当然、$dW_{wc}(t)/dt$もゼロになる。しかし、節点速度ベクトルがゼロでないときには、$dW_{wc}(t)/dt$もゼロになってはならない。この意味で、上式の２次形式は常に正であるといえる。

２次形式が正であることから、$[C]$は「正の定符号マトリクス」となることが知れる。さらに、$[C]$が流体の粘性による減衰マトリクスである場合には、$[C]$は対称行列となることを後述する。そして、「ある対称行列が正の定符号マトリクスとなるための必要十分条件は、その対称行列の固有値が全て正となることである。」という定理が存在するから、標準固有値問題において$[C]$の固有値は全て正となることを導くことができる。

さて、上式において節点変位$\{u_w\}$の実部を$\{u_w{}^R\}$、虚部を$\{u_w{}^I\}$とおけば、

$$\begin{aligned}\frac{dW_{wc}(t)}{d\,t} =\ & \omega^2\ \Big[\,[\,\{u_w{}^R\}^T[\,C\,]\,\{u_w{}^I\}+\{u_w{}^I\}^T[\,C\,]\,\{u_w{}^R\}\,]\,\sin\omega t\ \cos\omega t \\ & +\ \frac{1}{2}\,[\,\{u_w{}^I\}^T[\,C\,]\,\{u_w{}^I\}-\{u_w{}^R\}^T[\,C\,]\,\{u_w{}^R\}\,]\cos 2\omega t \\ & +\ \frac{1}{2}\,[\,\{u_w{}^R\}^T[\,C\,]\,\{u_w{}^R\}+\{u_w{}^I\}^T[\,C\,]\,\{u_w{}^I\}\,]\,\Big]\end{aligned} \qquad (4.2.5)$$

を得る。なお、上式では(3.2.1)式にて定義した$\lambda=i\omega, i=\sqrt{-1}$の関係を用いている。

そして、上式は単位時間あたりに散逸されるエネルギを示すものでもある。上式を１周期で積分すれば、１周期あたりになす仕事E_cを得ることができて、

$$\begin{aligned}E_c\ &=\ \int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} \frac{dW_{wc}(t)}{d\,t}\,dt \\ &=\ \pi\omega\ [\,\{u_w{}^R\}^T[\,C\,]\,\{u_w{}^R\}+\{u_w{}^I\}^T[\,C\,]\,\{u_w{}^I\}\,]\end{aligned} \qquad (4.2.6)$$

を得る。上式は、１周期あたりに流体中で散逸されるエネルギを表している。

運動エネルギの場合にはエネルギそのものの最大値を定義することができたが、散逸エネルギの場合にはそれができない。なぜなら、時刻とともに散逸エネルギは増え続けるからである。そこで、散逸エネルギを比較する場合には、上式の如く１周期あたりの散逸エネルギを用いることとする。あるいは、上式から周波数成分を取り除いたものを利用する。

（2）流体の粘性による散逸エネルギ

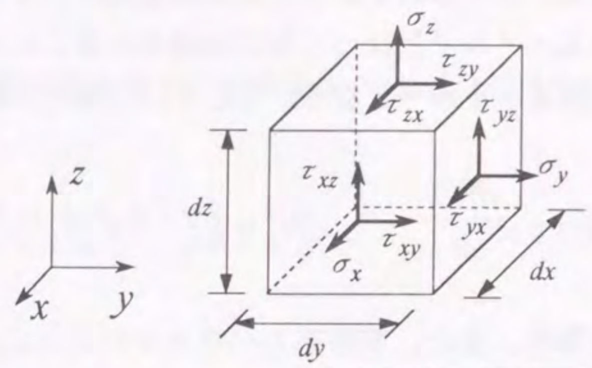
流体領域で散逸されるエネルギについて考える。まずは、見掛けの動粘性係数ν_wを用いた場合の散逸エネルギを定式化し、その後で、β_wが速度分布修正係数としての効果を持つことを示す。

流体の変形を生じせしめる仕事を表すために、微小直方体をFig.4.2.1に示す。単位時間あたりに単位体積の流体がなされる仕事を$dW(t)/dt$とおく。まず、直歪速度をεとおいて、直応力σによる単位時間あたりの仕事は、それぞれx,y,z方向に、

$\sigma_x\,dydz\ \varepsilon_x\,dx$ (4.2.7) -1

$\sigma_y\,dxdz\ \varepsilon_y\,dy$ (4.2.7) -2

$\sigma_z\,dxdy\ \varepsilon_z\,dz$ (4.2.7) -3



$$\begin{aligned}\tau_{yz} &= \tau_{zy} \equiv \tau_x\\ \tau_{zx} &= \tau_{xz} \equiv \tau_y\\ \tau_{xy} &= \tau_{yx} \equiv \tau_z\end{aligned}$$

Fig.4.2.1　微小直方体に作用する応力の成分

と表せる。次に、x,y,z軸に垂直な面をゆがめる作用をする剪断応力をτ、剪断歪速度をγとおいて、これによる単位時間あたりの仕事は、それぞれ

$\tau_x\,dxdz\ \gamma_x\,dy$ (4.2.8) -1

$\tau_y\,dxdy\ \gamma_y\,dz$ (4.2.8) -2

$\tau_z\,dydz\ \gamma_z\,dx$ (4.2.8) -3

と表せる。これらの総和が微小直方体に作用する単位時間あたりの仕事である。これを$dxdydz$で除せば単位体積の流体がなされる単位時間あたりの仕事となるから、

$$\begin{aligned}\frac{dW(t)}{dt}\ &=\ \sigma_x\,\varepsilon_x+\sigma_y\,\varepsilon_y+\sigma_z\,\varepsilon_z\\ &\qquad +\tau_x\,\gamma_x+\tau_y\,\gamma_y+\tau_z\,\gamma_z\end{aligned} \qquad (4.2.9)$$

と表すことができる。ここに応力-歪速度の関係を利用すれば、一般的な表示式

$$\begin{aligned}\frac{dW(t)}{dt}\ &=\ -P\,e^h-\frac{2}{3}\,\rho\,\nu\,e^h e^h+2\rho\,\nu\,(\,\varepsilon_x{}^2+\varepsilon_y{}^2+\varepsilon_z{}^2)\\ &\qquad +\rho\,\nu\,(\,\gamma_x{}^2+\gamma_y{}^2+\gamma_z{}^2)\end{aligned} \qquad (4.2.10)$$

を得る。ただし、e^hは体積歪速度を表す。上式は、文献[27] (Stokes,1850)で現れ、そこで初めて示されたものと思われる。今考えている流体は非圧縮性であるから、体積歪速度e^hはゼロである。従って、上式右辺第１,２項は消失し、粘性係数νが掛かった項だけが残ることとなる。粘性係数νが掛かる項は散逸エネルギを表しているから、流体になされる仕事は全て散逸エネルギとなって熱に変換されることとなる。即ち、非圧縮性とした時点で仕事イコール散逸エネルギとなる。そして、見掛けの動粘性係数ν_wを用いた場合には、

$$\frac{dW(t)}{dt} = \rho\,\nu_w\,[\,2(\,\varepsilon_x^2+\varepsilon_y^2+\varepsilon_z^2)+(\,\gamma_x^2+\gamma_y^2+\gamma_z^2)\,] \qquad (4.2.11)$$

となる。また、剪断応力ベクトルの式(4.1.13),(4.1.15)を得た際に境界層内速度分布の法線微分項だけを考慮した経緯を思い出せば、直歪の項は無視することができる。さらに、剪断歪の項のなかでも法線微分項だけを考慮すればよいから、

$$\frac{dW(t)}{dt} = \rho\,\nu_w\,\left[\,\left\{Re\left(\frac{\partial v_{b\hat{x}}}{\partial\hat{z}}e^{\lambda t}\right)\right\}^2+\left\{Re\left(\frac{\partial v_{b\hat{y}}}{\partial\hat{z}}e^{\lambda t}\right)\right\}^2\,\right] \qquad (4.2.12)$$

を得る。ここで、$v_{b\hat{x}}$および$v_{b\hat{y}}$は境界層内速度分布$v_b(Q,\hat{z})$の$\hat{x},\hat{y}$方向の成分であり、これらは時間項を含むものであるから、その実部を採用した計算を行わねばならない。また、$v_b(Q,\hat{z})$の$\hat{z}$方向の成分はゼロであることから、上式は次のような内積で表すことができる。

$$\frac{dW(t)}{dt} = \rho\,\nu_w\;Re\left(\frac{\partial {v_b}^T}{\partial\hat{z}}e^{\lambda t}\right)\,Re\left(\frac{\partial v_b}{\partial\hat{z}}e^{\lambda t}\right) \qquad (4.2.13)$$

上式右辺のベクトル項に$v_b(Q,\hat{z})$の微分式(4.1.16)を代入して虚数部分を整理すれば、

$$\begin{aligned}\frac{\partial v_b}{\partial\hat{z}}e^{\lambda t} &= \hat{\alpha}\;e^{-\hat{\alpha}\hat{z}}\;[\,v_p(Q)-v_s(Q)\,]\;e^{\lambda t}\\ &= (1+i)\,e^{i(\omega t-\alpha\hat{z})}\cdot\alpha\,e^{-\alpha\hat{z}}\cdot[\,v_p(Q)-v_s(Q)\,] \qquad (4.2.14)\end{aligned}$$

となる。ここで、$\alpha\,e^{-\alpha\hat{z}}$は実数で、その他は複素数である。また、

$$A = (1+i)\,e^{i(\omega t-\alpha\hat{z})} \qquad (4.2.15)_{-1}$$

$$\mathbb{B} = [\,v_p(Q)-v_s(Q)\,] \qquad (4.2.15)_{-2}$$

とおけば、

$$\begin{aligned}Re\left(\frac{\partial v_b}{\partial\hat{z}}e^{\lambda t}\right) &= Re\left(\,\alpha\,e^{-\alpha\hat{z}}\cdot A\mathbb{B}\right)\\ &= \frac{1}{2}\,\alpha\,e^{-\alpha\hat{z}}\;(A\mathbb{B}+A^*\mathbb{B}^*) \qquad (4.2.16)\end{aligned}$$

と表すことができる。ここで、右上添字*は共役複素数を表す。上式を(4.2.13)式に代入すれば、

$$\frac{dW(t)}{dt} = \rho\,\nu_w\;\alpha^2 e^{-2\alpha\hat{z}}\;\frac{1}{4}(A\mathbb{B}^T+A^*\mathbb{B}^{*T})(A\mathbb{B}+A^*\mathbb{B}^*) \qquad (4.2.17)$$

を得る。上式を展開するときのために、

$$AA = 2i\,e^{2i(\omega t-\alpha\hat{z})} \qquad (4.2.18)_{-1}$$

$$A^*A^* = -2i\,e^{-2i(\omega t-\alpha\hat{z})} \qquad (4.2.18)_{-2}$$

$$AA^* = A^*A = 2 \qquad (4.2.18)_{-3}$$

を準備しておく。

さて、このように計算してきた$dW(t)/dt$は、単位時間あたりに単位体積の流体領域で消失される散逸エネルギである。これを法線方向に、そして１周期にわたって積分すれば、点Qにおける単位面積、１周期あたりの散逸エネルギ$E_q(Q)$

$$E_q(Q) = \int_0^{\infty}\int_0^{\frac{2\pi}{\omega}}\frac{dW(t)}{dt}\;dt\;d\hat{z} \qquad (4.2.19)$$

を得る。上式に(4.2.17)式を代入して時間に関する積分を実行すれば、AA^*およびA^*Aの項だけが残って、

$$E_q(Q) = \rho\,\nu_w\int_0^{\infty}\alpha^2 e^{-2\alpha\hat{z}}\;d\hat{z}\;\frac{\pi}{\omega}\;(\mathbb{B}^T\mathbb{B}^*+\mathbb{B}^{*T}\mathbb{B}) \qquad (4.2.20)$$

となり、法線方向の積分も実行すれば、

$$E_q(Q) = \rho\,\nu_w\;\frac{\alpha}{2}\;\frac{\pi}{\omega}\;(\mathbb{B}^T\mathbb{B}^*+\mathbb{B}^{*T}\mathbb{B}) \qquad (4.2.21)$$

となる。上式の( )内部を計算しておけば、

$$(\mathbb{B}^T\mathbb{B}^* + \mathbb{B}^{*T}\mathbb{B}) = (v_p{}^T v_p{}^* + v_p{}^{*T} v_p) + (v_s{}^T v_s{}^* + v_s{}^{*T} v_s)$$

$$- [(v_p{}^T v_s{}^* + v_p{}^{*T} v_s) + (v_s{}^T v_p{}^* + v_s{}^{*T} v_p)] \quad (4.2.22)$$

となり、さらに、v_pの実部を$v_p{}^R$、虚部を$v_p{}^I$、同様にv_sの実部を$v_s{}^R$、虚部を$v_s{}^I$とすれば、

$$(\mathbb{B}^T\mathbb{B}^* + \mathbb{B}^{*T}\mathbb{B}) = 2[(v_p{}^{RT} v_p{}^R + v_p{}^{IT} v_p{}^I) + (v_s{}^{RT} v_s{}^R + v_s{}^{IT} v_s{}^I)]$$

$$- 2[(v_p{}^{RT} v_s{}^R + v_p{}^{IT} v_s{}^I) + (v_s{}^{RT} v_p{}^R + v_s{}^{IT} v_p{}^I)] \quad (4.2.23)$$

となる。上式を(4.2.21)式に代入して、(4.1.10)式によってαを書き換えれば、

$$E_q(Q) = \rho\,\nu_w \sqrt{\frac{\omega}{2\nu}}\ \frac{\pi}{\omega} \Big[(v_p{}^{RT} v_p{}^R + v_p{}^{IT} v_p{}^I) + (v_s{}^{RT} v_s{}^R + v_s{}^{IT} v_s{}^I)$$

$$- [(v_p{}^{RT} v_s{}^R + v_p{}^{IT} v_s{}^I) + (v_s{}^{RT} v_p{}^R + v_s{}^{IT} v_p{}^I)] \Big] \quad (4.2.24)$$

となる。上式が、速度ベクトルを用いて表した場合の、点Qにおける単位面積、1周期あたりの散逸エネルギ$E_q(Q)$の計算式である。

振動問題においては$E_q(Q)$も変位の関数としておく方が都合がよい。そこで、(4.1.34)および(4.1.42)式の関係を利用して$E_q(Q)$を変位の関数に書き換える。これらの式より、

$$v_p{}^R(Q) = -\omega\ [T_1]\ [\tilde{S}_p]\ [\tilde{AiB}]\ \{u_w{}^I\} \quad (4.2.25)_{-1}$$

$$v_p{}^I(Q) = \omega\ [T_1]\ [\tilde{S}_p]\ [\tilde{AiB}]\ \{u_w{}^R\} \quad (4.2.25)_{-2}$$

$$v_s{}^R(Q) = -\omega\ [T_2]\ [\tilde{N}_w]\ \{\tilde{u}_w{}^I\} \quad (4.2.25)_{-3}$$

$$v_s{}^I(Q) = \omega\ [T_2]\ [\tilde{N}_w]\ \{\tilde{u}_w{}^R\} \quad (4.2.25)_{-4}$$

なる関係を得るから、次に示すマトリクスを準備しておく。

$$[\tilde{Q}_{11}] = [\tilde{AiB}]^T\ [\tilde{S}_p]^T\ [T_1]^T\ [T_1]\ [\tilde{S}_p]\ [\tilde{AiB}] \quad (4.2.26)_{-1}$$

$$[\tilde{Q}_{10}] = [\tilde{AiB}]^T\ [\tilde{S}_p]^T\ [T_1]^T\ [T_2]\ [\tilde{N}_w] \quad (4.2.26)_{-2}$$

$$[\tilde{Q}_{00}] = [\tilde{N}_w]^T\ [T_2]^T\ [T_2]\ [\tilde{N}_w] \quad (4.2.26)_{-3}$$

(4.2.25)式を(4.2.24)式に代入して、上式のマトリクスを利用すれば、

$$E_q(Q) = \rho\,\nu_w\,\alpha\ \frac{\pi}{\omega}\ \omega^2 \Big[\Big(\{u_w{}^R\}^T [\tilde{Q}_{11}] \{u_w{}^R\} + \{u_w{}^I\}^T [\tilde{Q}_{11}] \{u_w{}^I\} \Big)$$

$$+ \Big(\{\tilde{u}_w{}^R\}^T [\tilde{Q}_{00}] \{\tilde{u}_w{}^R\} + \{\tilde{u}_w{}^I\}^T [\tilde{Q}_{00}] \{\tilde{u}_w{}^I\} \Big)$$

$$- \Big(\{u_w{}^R\}^T [\tilde{Q}_{10}] \{\tilde{u}_w{}^R\} + \{u_w{}^I\}^T [\tilde{Q}_{10}] \{\tilde{u}_w{}^I\} \Big)$$

$$- \Big(\{\tilde{u}_w{}^R\}^T [\tilde{Q}_{10}]^T \{u_w{}^R\} + \{\tilde{u}_w{}^I\}^T [\tilde{Q}_{10}]^T \{u_w{}^I\} \Big) \Big] \quad (4.2.27)$$

$\sqrt{\dfrac{\omega}{2\nu}}$

(4.1.10)式

を得る。これによって、$E_q(Q)$も変位の関数として記述されたこととなる。上式を観察すれば、ν_wとαだけが流体の粘性に関わる値であり、その他は粘性とは全く関係のない値であることがわかる。そして、$[\tilde{Q}_{11}]$、$[\tilde{Q}_{00}]$、$[\tilde{Q}_{10}]$はそれぞれポテンシャル流場による影響を表すものである。具体的には、$[\tilde{Q}_{11}]$がv_pによる影響を、$[\tilde{Q}_{00}]$はv_sによる影響を、$[\tilde{Q}_{10}]$はv_pとv_sとの相互影響を表している。また、上式は減衰マトリクス$[C]$の散逸エネルギE_cの式(4.2.6)とそっくりで、これらのマトリクスによって$[C]$を構成できそうであることがわかる。上式を計算することにより、船体表面の任意点Qにおいて$E_q(Q)$を知ることができる。

なお、上式を視察すれば、粘性による影響を表す項は$\nu_w\alpha$なる乗算となっていることに気づく。ここで、ν_wのことを(4.1.14)式にて定義した倍率係数β_wを用いて$\nu\beta_w$と書き換えれば$\nu_w\alpha$は$\nu\beta_w\alpha$となって、νに$\beta_w\alpha$が掛かったものと理解することができる。これは、単位時間あたりの仕事の式(4.2.11)の段階において、見掛けの動粘性係数ν_wを用いずに本当の動粘性係数νで表して、速度分布として(4.1.19)式の修正速度分布v_βを採用した場合と同じ結果となることを示している。具体的にかけば、

$$\frac{dW(t)}{dt} = \rho\,\nu_w\ \ Re\Big(\frac{\partial v_b{}^T}{\partial \hat{z}} e^{\lambda t}\Big)\ Re\Big(\frac{\partial v_b}{\partial \hat{z}} e^{\lambda t}\Big) \quad (4.2.13)_{再記}$$

から散逸エネルギ$E_q(Q)$を計算してきたのに対して、

$$\frac{dW(t)}{dt} = \rho\,\nu\ \ Re\Big(\frac{\partial v_\beta{}^T}{\partial \hat{z}} e^{\lambda t}\Big)\ Re\Big(\frac{\partial v_\beta}{\partial \hat{z}} e^{\lambda t}\Big) \quad (4.2.28)$$

を計算のスタート時点としても良いことを示している訳である。上２式の違いは、ν_wがνに、そして速度分布 v_bがv_βに変更されているだけである。上２式のどちらを計算しても同じ結果を得るという意味において、倍率係数β_wのことを速度分布修正係数と呼ぶことができる訳である。これは、船体表面に働く剪断応力の式(4.1.21)の段で述べた内容とも一致するものである。従って、以降、散逸エネルギ$E_q(Q)$の式(4.2.27)のことを、

$$
\begin{aligned}
E_q(Q) = \pi\omega\beta_w\rho\nu\sqrt{\frac{\omega}{2\nu}}\Big[& \big(\{u_w{}^R\}^T [\tilde{Q}_{11}] \{u_w{}^R\} + \{u_w{}^I\}^T [\tilde{Q}_{11}] \{u_w{}^I\} \big) \\
& + \big(\{\tilde{u}_w{}^R\}^T [\tilde{Q}_{00}] \{\tilde{u}_w{}^R\} + \{\tilde{u}_w{}^I\}^T [\tilde{Q}_{00}] \{\tilde{u}_w{}^I\} \big) \\
& - \big(\{u_w{}^R\}^T [\tilde{Q}_{10}] \{\tilde{u}_w{}^R\} + \{u_w{}^I\}^T [\tilde{Q}_{10}] \{\tilde{u}_w{}^I\} \big) \\
& - \big(\{\tilde{u}_w{}^R\}^T [\tilde{Q}_{10}]^T \{u_w{}^R\} + \{\tilde{u}_w{}^I\}^T [\tilde{Q}_{10}]^T \{u_w{}^I\} \big) \Big]
\end{aligned}
\qquad \text{(4.2.29)}
$$

と表すこととする。速度分布修正係数β_wは、船体表面の場所によって異なる値をもつべきものである。しかし、それを決定することは難しいので、本論文では、これを一定値として扱うことにする。即ち、上式を船体表面で積分する際には、β_wを積分記号の外へ出せるものとして取り扱う。

さて、このあたりで$[\tilde{Q}_{11}]$、$[\tilde{Q}_{00}]$、$[\tilde{Q}_{10}]$に含まれる座標変換マトリクスの積について述べておく。まず、$[\tilde{Q}_{11}]$には$[T_1]^T[T_1]$なる項が含まれている。これをダイアド積で表せば、

$$[T_1]^T [T_1] = \hat{n}_{x1}\ \hat{n}_{x1}{}^T + \hat{n}_{y1}\ \hat{n}_{y1}{}^T + \hat{n}_{z1}\ \hat{n}_{z1}{}^T \qquad (4.2.30)$$

となる。ところが、$[\tilde{S}_p]$の作用により$[T_1]$の３行３列目の成分1.0をゼロとみなして計算してもよいことを(4.1.33)式の段で述べた。従って、$\hat{n}_{z1}$をゼロベクトルとみなしても良い訳で、

$$[T_{11}] = \hat{n}_{x1}\ \hat{n}_{x1}{}^T + \hat{n}_{y1}\ \hat{n}_{y1}{}^T \qquad (4.2.31)$$

にて$[T_{11}]$を定義すれば、$[\tilde{Q}_{11}]$に含まれている$[T_1]^T[T_1]$の項をこの$[T_{11}]$に差し替えても良いこととなる。むしろ、この$[T_{11}]$を使って$[\tilde{Q}_{11}]$を表しておく方が、速度ベクトルの$\hat{x},\hat{y}$成分を利用した散逸エネルギであることがよく理解できよう。その意味で、文献[54]$\,$(著者,1996)では$[T_{11}]$を利用している。なお、任意行列とその転置行列を乗じたものは必ず対称行列となることから、$[T_1]^T[T_1]$は対称行列である。また、上式のダイアド積もその形式となっているから、$[T_{11}]$も対称行列である。

次に、$[\tilde{Q}_{10}]$には$[T_1]^T[T_2]$なる項が含まれている。これをダイアド積で表せば、

$$[T_1]^T [T_2] = \hat{n}_{x1}\ \hat{n}_{x0}{}^T + \hat{n}_{y1}\ \hat{n}_{y0}{}^T + \hat{n}_{z1}\ 0^T \qquad (4.2.32)$$

となる。この場合には、上式右辺第３項は必ずゼロとなるから、

$$[T_{10}] = \hat{n}_{x1}\ \hat{n}_{x0}{}^T + \hat{n}_{y1}\ \hat{n}_{y0}{}^T = [T_1]^T [T_2] \qquad (4.2.33)$$

にて$[T_{10}]$を定義すれば、これは必ず$[T_1]^T[T_2]$と等しいものとなる。よって、$[\tilde{Q}_{10}]$に含まれている$[T_1]^T[T_2]$の項を$[T_{10}]$とかくことができる。

同様に、$[\tilde{Q}_{00}]$には$[T_2]^T[T_2]$なる項が含まれている。これをダイアド積で表せば、

$$[T_2]^T [T_2] = \hat{n}_{x0}\ \hat{n}_{x0}{}^T + \hat{n}_{y0}\ \hat{n}_{y0}{}^T + 0\ 0^T \qquad (4.2.34)$$

となる。この場合にも、上式右辺第３項は必ずゼロとなるから、

$$[T_{00}] = \hat{n}_{x0}\ \hat{n}_{x0}{}^T + \hat{n}_{y0}\ \hat{n}_{y0}{}^T = [T_2]^T [T_2] \qquad (4.2.35)$$

にて$[T_{00}]$を定義すれば、これは必ず$[T_2]^T[T_2]$と等しいものとなる。よって、$[\tilde{Q}_{00}]$に含まれている$[T_2]^T[T_2]$の項を$[T_{00}]$とかくことができる。なお、任意行列とその転置行列を乗じたものは必ず対称行列となることから、$[T_2]^T[T_2]$は対称行列である。よって、$[T_{00}]$も対称行列である。

上記によって定義された$[T_{11}]$、$[T_{10}]$、$[T_{00}]$を用いて$[\tilde{Q}_{11}]$、$[\tilde{Q}_{00}]$、$[\tilde{Q}_{10}]$を表しておけば、

$$\underset{3N_{max}\times 3N_{max}}{[\tilde{Q}_{11}]} = [\tilde{AiB}]^T [\tilde{S}_p]^T [T_{11}] [\tilde{S}_p] [\tilde{AiB}] \qquad (4.2.36)_{-1}$$

$$\underset{3N_{max}\times 3k_{max}}{[\tilde{Q}_{10}]} = [\tilde{AiB}]^T [\tilde{S}_p]^T [T_{10}] [\tilde{N}_w] \qquad (4.2.36)_{-2}$$

$$\underset{3k_{max}\times 3k_{max}}{[\tilde{Q}_{00}]} = [\tilde{N}_w]^T [T_{00}] [\tilde{N}_w] \qquad (4.2.36)_{-3}$$

である。以降、上式の記号を利用することとする。

なお、$[\tilde{Q}_{11}]$に注目すれば、対称行列$[T_{11}]$を挟んで行列$[\tilde{S}_p][\tilde{AiB}]$及びその転置が掛かっていることがわかる。このような形式も必ず対称行列となるから、$[\tilde{Q}_{11}]$も対称行列である。そして、同じ理由により$[\tilde{Q}_{00}]$も対称行列となる。

4．3　減衰マトリクス

（1）船体表面に関する減衰マトリクス

さて、(4.2.29)式によって得られた$E_q(Q)$は、点Qにおける単位面積、１周期あたりの散逸エネルギであるから、これを要素m上で積分すれば１周期あたりの散逸エネルギE_mを得ることができる。前述の如く速度分布修正係数β_wを一定値として扱えば、β_wと節点変位とは共に積分には関与せず積分記号の外へ出すことができるから、結局は、$[\tilde{Q}_{11}]$、$[\tilde{Q}_{00}]$、$[\tilde{Q}_{10}]$を積分することとなる。さらに、船体表面全域での積分とするために、各要素におけるE_mの総和をとれば、船体表面で消失される全散逸エネルギE_{SH}を得ることができる。

まず、$[\tilde{Q}_{11}]$の積分について考える。$[\tilde{Q}_{11}]$に含まれる$[\tilde{AiB}]$は積分には関与せず、積分記号の外へ出すことができるから、

$$\underset{3N_{max}\times 3N_{max}}{\int_{\Delta S_H}[\tilde{Q}_{11}]\,dS_{(Q)}} = \underset{3N_{max}\times k_{min}}{[\tilde{AiB}]^T}\ \underset{k_{min}\times k_{min}}{\int_{\Delta S_H}[\tilde{S}_p]^T[T_{11}][\tilde{S}_p]\,dS_{(Q)}}\ \underset{k_{min}\times 3N_{max}}{[\tilde{AiB}]} \qquad (4.3.1)$$

となる。ここで、ΔS_Hは船体表面の微小要素であることを表す。そして、各マトリクスのサイズは減次節点数N_{min}を用いた場合を示している。上式の場合、その影響はk_{min}として現れている。なお、k_{min}とは要素に関する減次節点数のことで、(4.1.32)式にて定義したものである。減次節点を用いない場合には、k_{min}をk_{max}と書き換えればよい。

上式右辺の積分項内部を$[\tilde{S}_{c11}]$とおけば、

$$\underset{k_{min}\times k_{min}}{[\tilde{S}_{c11}]} = \underset{k_{min}\times 3}{[\tilde{S}_p]^T}\ \underset{3\times 3}{[T_{11}]}\ \underset{3\times k_{min}}{[\tilde{S}_p]} \qquad (4.3.2)$$

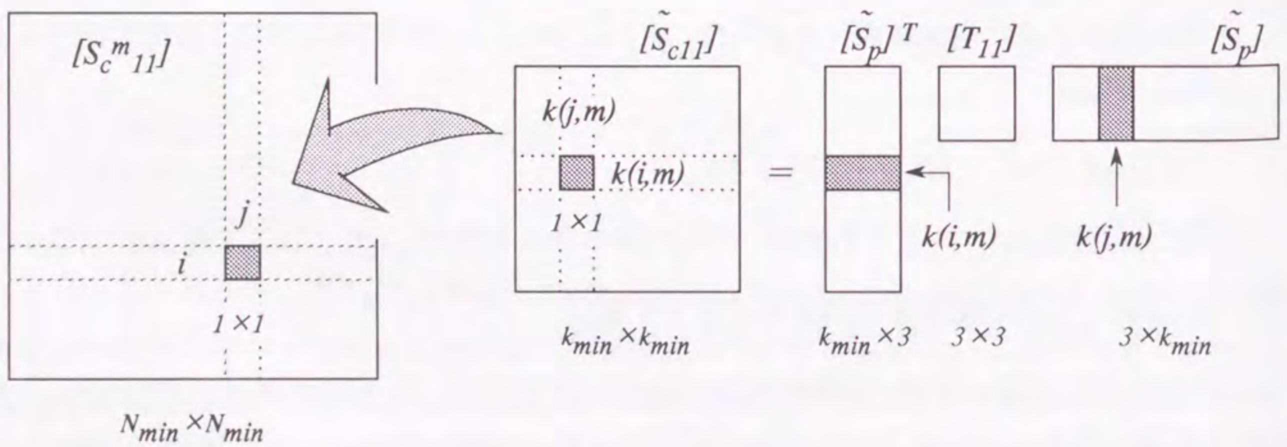


Fig.4.3.1　$[\tilde{S}_{c11}]$の成分と拡張マトリクス$[S_c{}^m{}_{11}]$

となって、これを模式的に示せば、Fig.4.3.1のようになる。$[\tilde{S}_{c11}]$の成分の位置は関与する節点の番号によって決まる。要素m上に節点iと節点jがあるとすれば、その局部節点番号kは、それぞれ$k(i,m)$および$k(j,m)$にて表すことができる。そして、$[\tilde{S}_p]$の第k列のベクトルを$\tilde{S}_{pk}$、$[\tilde{S}_{c11}]$の$k(i,m)$行$k(j,m)$列目の成分を$[\tilde{S}_{c11}]_{ij}$と表せば、

$$\underset{1\times 1}{[\tilde{S}_{c11}]_{ij}} = \underset{1\times 3}{\tilde{S}_{pk(i,m)}{}^T}\ \underset{3\times 3}{[T_{11}]}\ \underset{3\times 1}{\tilde{S}_{pk(j,m)}} \qquad (4.3.3)$$

となる。上式は節点番号iとjに関する成分を与えるものであるから、要素mの節点数で支配されるマトリクスである$[\tilde{S}_{c11}]$を、メッシュモデルの全節点数で支配されるマトリクスに拡張できることを示している。今、$[AiB]$については減次節点数N_{min}を用いた場合を示しているから、拡張マトリクス$[S_c{}^m{}_{11}]$を$N_{min}\times N_{min}$なるサイズとして定義すれば、その成分が上式にて与えられる訳である。その様子もFig.4.3.1に示してある。$[S_c{}^m{}_{11}]$のi行j列目の成分を$[S_c{}^m{}_{11}]_{ij}$と表せば、

$$\underset{1\times 1}{[S_c{}^m{}_{11}]_{ij}} = \underset{1\times 1}{[\tilde{S}_{c11}]_{ij}} = \underset{1\times 3}{\tilde{S}_{pk(i,m)}{}^T}\ \underset{3\times 3}{[T_{11}]}\ \underset{3\times 1}{\tilde{S}_{pk(j,m)}} \qquad (4.3.4)$$

となる。なお、節点iと節点jが同じ要素m上にないときには、上式右辺をゼロとせねばならない。この場合をゼロとすることにより、$[\tilde{AiB}]$をも$[AiB]$に拡張できることとなって、

$$\underset{3N_{max}\times 3N_{max}}{\int_{\Delta S_H}[Q^m{}_{11}]\,dS_{(Q)}} = \underset{3N_{max}\times N_{min}}{[AiB]^T}\ \underset{N_{min}\times N_{min}}{\int_{\Delta S_H}[S_c{}^m{}_{11}]\,dS_{(Q)}}\ \underset{N_{min}\times 3N_{max}}{[AiB]} \qquad (4.3.5)$$

を得る。上式左辺で$[Q^m{}_{11}]$は$[\tilde{Q}_{11}]$と同じものであるが、右辺を拡張した都合から記号を変えておく。なお、減次節点を用いない場合には上式右辺でN_{min}をN_{max}と書き換えればよい。

船体表面全体で積分する場合には、全ての要素について上式の総和をとればよい。これを$[Q_{11}]$と表すこととすれば、総和記号Σは$[S_c{}^m{}_{11}]$の積分項だけに作用することとなって、

$$\underset{3N_{max}\times 3N_{max}}{[Q_{11}]} = \sum_{m=1}^{M_{max}}\int_{\Delta S_H}[Q^m{}_{11}]\,dS_{(Q)} = \underset{3N_{max}\times N_{min}}{[AiB]^T}\ \underset{N_{min}\times N_{min}}{[S_{c11}]}\ \underset{N_{min}\times 3N_{max}}{[AiB]} \qquad (4.3.6)$$

$$\underset{N_{min}\times N_{min}}{[S_{c11}]} = \sum_{m=1}^{M_{max}}\int_{\Delta S_H}[S_c{}^m{}_{11}]\,dS_{(Q)} \qquad (4.3.7)$$

を得る。(4.3.6)式により、船体表面全域を対象とした$[Q_{11}]$を得ることができた訳である。そして、$[Q_{11}]$は対称行列となるものである。なお、上式の$[S_{c11}]$を計算するにあたっては、付加質量マトリクスを定式化する際に用いた$[S]$と同様の形式にて処理できる方が便利である。Fig.3.6.2を参考にして節点iに属する要素のグループを考えれば、$[S_{c11}]$のi行j列目の成分を$[S_{c11}]_{ij}$と表して(4.3.4)式を利用することにより、

$$\underset{1\times1}{[S_{c11}]_{ij}} = \sum_{m=1}^{M_{max}} \int_{\Delta S_H} [S_c{}^m{}_{11}]_{ij} \; dS_{(Q)}$$

$$= \sum_{L=1}^{M(i)} \int_{\Delta S_H} \underset{1\times3}{\tilde{S}_{pk(i,m)}{}^T} \; \underset{3\times3}{[T_{11}]} \; \underset{3\times1}{\tilde{S}_{pk(j,m)}} \; dS_{(Q)} \qquad (4.3.8)$$

を得る。上式で用いた記号$M(i)$およびLは(3.6.16)式に示したS_{ij}のときと同じものである。そして、節点iと節点jが同じ要素m上にないときには、上式右辺の積分項をゼロとせねばならないこともS_{ij}と同じである。従って、S_{ij}を計算しながら$[S_{c11}]_{ij}$も計算できて効率的であることがわかるであろう。

次に、$[\tilde{Q}_{10}]$の積分について考える。$[\tilde{Q}_{10}]$に含まれる$[\tilde{AiB}]$も積分には関与せず、積分記号の外へ出すことができるから、

$$\underset{3N_{max}\times3k_{max}}{\int_{\Delta S_H} [\tilde{Q}_{10}] \; dS_{(Q)}} = \underset{3N_{max}\times k_{min}}{[\tilde{AiB}]^T} \underset{k_{min}\times3k_{max}}{\int_{\Delta S_H} [\tilde{S}_p]^T [T_{10}] [\tilde{N}_w] \; dS_{(Q)}} \qquad (4.3.9)$$

となる。ここでも、減次節点を用いない場合には、k_{min}をk_{max}と書き換えればよい。

上式右辺の積分項内部を$[\tilde{S}_{c10}]$とおけば、

$$\underset{k_{min}\times3k_{max}}{[\tilde{S}_{c10}]} = \underset{k_{min}\times3}{[\tilde{S}_p]^T} \; \underset{3\times3}{[T_{10}]} \; \underset{3\times3k_{max}}{[\tilde{N}_w]} \qquad (4.3.10)$$

となって、これを模式的に示せば、Fig.4.3.2のようになる。$[\tilde{S}_{c10}]$の成分の位置は関与する節点の番号によって決まる。要素m上に節点iと節点jがあるとすれば、その局部節点番号kは、それぞれ$k(i,m)$および$k(j,m)$にて表すことができる。

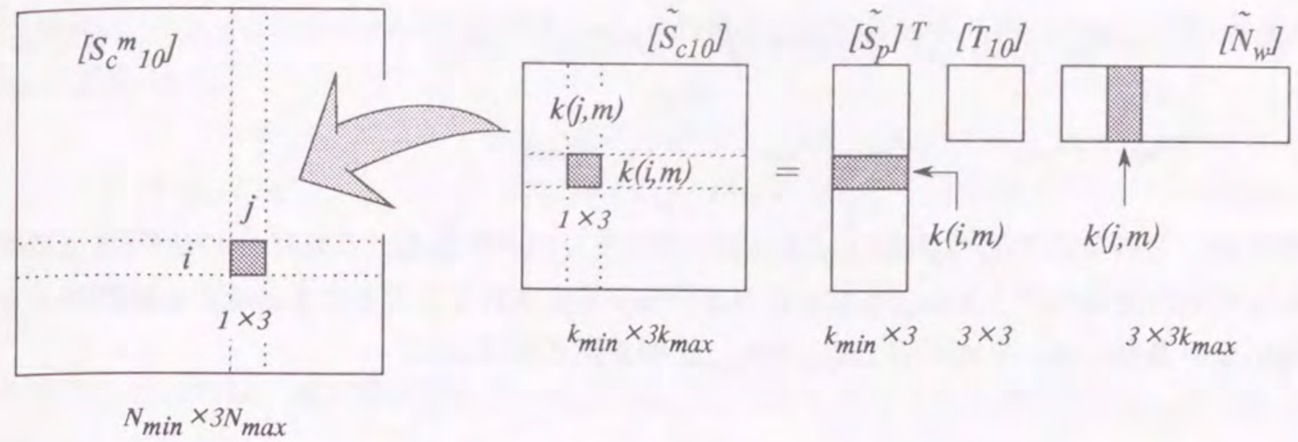


Fig.4.3.2　$[\tilde{S}_{c10}]$の成分と拡張マトリクス$[S_c{}^m{}_{10}]$

そして、$[\tilde{S}_p]$の第k列のベクトルを$\tilde{S}_{pk}$、$[\tilde{N}_w]$の第k列番目のマトリクスを$[\tilde{N}_w]_k$とおく。ここで、$[N_w]_k$とは、3×3なるサイズの単位行列を$[I]$とすれば、(4.1.38)式より、

$$\underset{3\times3}{[\tilde{N}_w]_{k(j,m)}} = \underset{1\times1}{N_{k(j,m)}} \; \underset{3\times3}{[I]} \qquad (4.3.11)$$

にて表されるものである。さて、$[\tilde{S}_{c10}]$の行節点$k(i,m)$、列節点$k(j,m)$にある行ベクトルの成分を$[\tilde{S}_{c10}]_{ij}$と表せば、

$$\underset{1\times3}{[\tilde{S}_{c10}]_{ij}} = \underset{1\times3}{\tilde{S}_{pk(i,m)}{}^T} \; \underset{3\times3}{[T_{10}]} \; \underset{3\times3}{[\tilde{N}_w]_{k(j,m)}} \qquad (4.3.12)$$

となる。上式は節点番号iとjに関する成分を与えるものであるから、要素mの節点数で支配されるマトリクスである$[\tilde{S}_{c10}]$を、メッシュモデルの全節点数で支配されるマトリクスに拡張できることを示している。今、$[AiB]$については減次節点数N_{min}を用いた場合を示しているから、拡張マトリクス$[S_c{}^m{}_{10}]$を$N_{min}\times3N_{max}$なるサイズとして定義すれば、その成分が上式にて与えられる訳である。その様子もFig.4.3.2に示してある。$[S_c{}^m{}_{10}]$の行節点i、列節点jにある行ベクトルの成分を$[S_c{}^m{}_{10}]_{ij}$と表せば、上２式より、

$$\underset{1\times3}{[S_c{}^m{}_{10}]_{ij}} = \underset{1\times3}{[\tilde{S}_{c10}]_{ij}} = \underset{1\times1}{N_{k(j,m)}} \; \underset{1\times3}{\tilde{S}_{pk(i,m)}{}^T} \; \underset{3\times3}{[T_{10}]} \qquad (4.3.13)$$

となる。なお、節点iと節点jが同じ要素m上にないときには、上式右辺をゼロとせねばならない。この場合をゼロとすることにより、$[\tilde{AiB}]$をも$[AiB]$に拡張できることとなって、

$$\underset{3N_{max}\times 3N_{max}}{\int_{\Delta S_H} [Q^m{}_{10}]\, dS_{(Q)}} = \underset{3N_{max}\times N_{min}}{[AiB]^T} \underset{N_{min}\times 3N_{max}}{\int_{\Delta S_H} [S_c{}^m{}_{10}]}\, dS_{(Q)} \tag{4.3.14}$$

を得る。上式左辺で$[Q^m{}_{10}]$は$[\tilde{Q}_{10}]$を拡張したマトリクスである。これに合わせて$[\tilde{Q}_{10}]$に掛かっていた変位ベクトル$\{\tilde{u}_w\}$も拡張されて、$\{u_w\}$と表されることとなる。なお、減次節点を用いない場合には、上式右辺でN_{min}をN_{max}と書き換えればよい。

船体表面全体で積分する場合には、全ての要素について上式の総和をとればよい。これを$[Q_{10}]$と表すこととすれば、総和記号Σは$[S_c{}^m{}_{10}]$の積分項だけに作用することとなって、

$$\underset{3N_{max}\times 3N_{max}}{[Q_{10}]} = \sum_{m=1}^{M_{max}} \int_{\Delta S_H} [Q^m{}_{10}]\, dS_{(Q)} = \underset{3N_{max}\times N_{min}}{[AiB]^T}\ \underset{N_{min}\times 3N_{max}}{[S_{c10}]} \tag{4.3.15}$$

$$\underset{N_{min}\times 3N_{max}}{[S_{c10}]} = \sum_{m=1}^{M_{max}} \int_{\Delta S_H} [S_c{}^m{}_{10}]\, dS_{(Q)} \tag{4.3.16}$$

を得る。(4.3.15)式により、船体表面全域を対象とした$[Q_{10}]$を得ることができた訳であり、その際に変位ベクトルも拡張されたことに注意しておく。なお、ここでも上式の$[S_{c10}]$を計算するにあたって、付加質量マトリクスを定式化する際に用いた$[S]$と同様の形式にて処理することができる。Fig.3.6.2を参考にして節点iに属する要素のグループを考えれば、$[S_{c10}]$の行節点i、列節点jにある行ベクトルの成分を$[S_{c10}]_{ij}$と表して(4.3.13)式を利用することにより、

$$\underset{1\times 3}{[S_{c10}]_{ij}} = \sum_{m=1}^{M_{max}} \int_{\Delta S_H} [S_c{}^m{}_{10}]_{ij}\ dS_{(Q)}$$

$$= \sum_{L=1}^{M(i)} \int_{\Delta S_H} \underset{1\times 1}{N_{k(j,m)}}\ \underset{1\times 3}{\tilde{S}_{pk(i,m)}{}^T}\ \underset{3\times 3}{[T_{10}]}\ dS_{(Q)} \tag{4.3.17}$$

を得る。上式で用いた記号$M(i)$およびLは(3.6.16)式に示した$\mathbb{S}_{ij}$のときと同じものである。そして、節点iと節点jが同じ要素m上にないときには、上式右辺の積分項をゼロとせねばならないことも$\mathbb{S}_{ij}$と同じである。従って、$\mathbb{S}_{ij}$を計算しながら$[S_{c10}]_{ij}$も計算できて効率的であることがわかるであろう。

最後に、$[\tilde{Q}_{00}]$の積分について考える。$[\tilde{Q}_{00}]$の場合には積分記号の外へ出すことができるものはないから、

$$\underset{3k_{max}\times 3k_{max}}{\int_{\Delta S_H} [\tilde{Q}_{00}]\ dS_{(Q)}} = \underset{3k_{max}\times 3k_{max}}{\int_{\Delta S_H} [\tilde{N}_w]^T [T_{00}] [\tilde{N}_w]\ dS_{(Q)}} \tag{4.3.18}$$

となる。ここでは、減次節点を使うかどうかに関わりなくマトリクスサイズはk_{max}に支配され、k_{min}は現れない。

上式右辺の積分項内部を$[\tilde{S}_{c00}]$とおけば、

$$\underset{3k_{max}\times 3k_{max}}{[\tilde{S}_{c00}]} = \underset{3k_{max}\times 3}{[\tilde{N}_w]^T}\ \underset{3\times 3}{[T_{00}]}\ \underset{3\times 3k_{max}}{[\tilde{N}_w]} \tag{4.3.19}$$

となって、これを模式的に示せば、Fig.4.3.3のようになる。$[\tilde{S}_{c00}]$の成分の位置は関与する節点の番号によって決まる。要素m上に節点iと節点jがあるとすれば、その局部節点番号kは、それぞれ$k(i,m)$および$k(j,m)$にて表すことができる。そして、ここでも(4.3.11)式の$[\tilde{N}_w]_k$を利用する。$[\tilde{S}_{c00}]$の行節点$k(i,m)$、列節点$k(j,m)$にある小マトリクスの成分を$[\tilde{S}_{c00}]_{ij}$と表せば、

$$\underset{3\times 3}{[\tilde{S}_{c00}]_{ij}} = \underset{3\times 3}{[\tilde{N}_w]_{k(i,m)}{}^T}\ \underset{3\times 3}{[T_{00}]}\ \underset{3\times 3}{[\tilde{N}_w]_{k(j,m)}} \tag{4.3.20}$$

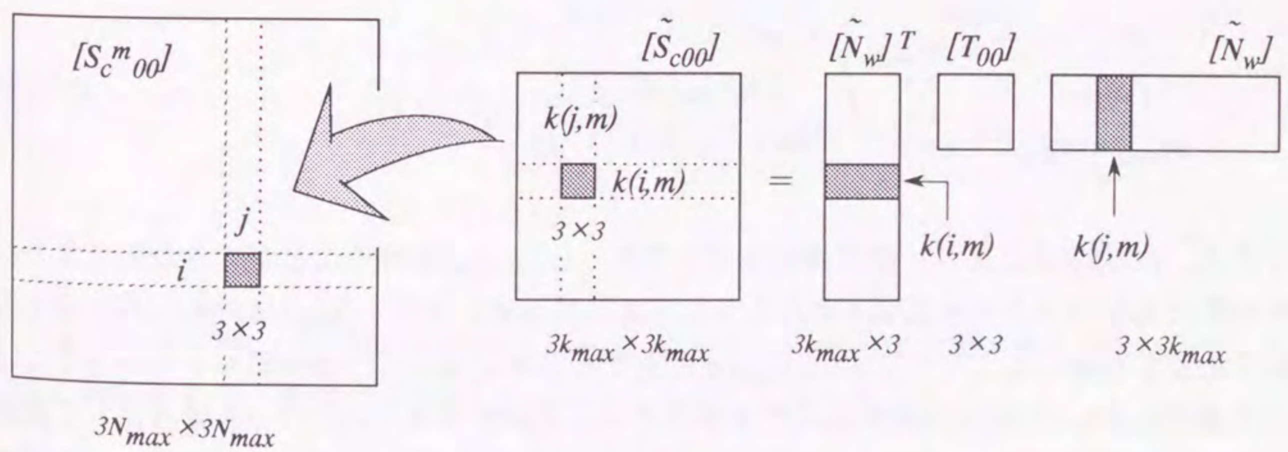


Fig.4.3.3 $[\tilde{S}_{c00}]$の成分と拡張マトリクス$[S_c{}^m{}_{00}]$

となる。上式は節点番号iとjに関する成分を与えるものであるから、要素mの節点数で支配されるマトリクスである$[\tilde{S}_{c00}]$を、メッシュモデルの全節点数で支配されるマトリクスに拡張できることを示している。今、拡張マトリクス$[S_c{}^m{}_{00}]$を$3N_{max}\times 3N_{max}$なるサイズとして定義すれば、その成分が上式にて与えられる訳である。その様子もFig.4.3.3に示してある。$[S_c{}^m{}_{00}]$の行節点i、列節点jにある小マトリクスの成分を$[S_c{}^m{}_{00}]_{ij}$と表せば、上式と(4.3.11)式とにより、

$$\underset{3\times 3}{[S_c{}^m{}_{00}]_{ij}} = \underset{3\times 3}{[\tilde{S}_{c00}]_{ij}} = \underset{1\times 1}{N_{k(i,m)}}\ \underset{1\times 1}{N_{k(j,m)}}\ \underset{3\times 3}{[T_{00}]} \qquad (4.3.21)$$

となる。なお、節点iと節点jが同じ要素m上にないときには、上式右辺をゼロとせねばならない。これによって、$[\tilde{S}_{c00}]$を$[S_c{}^m{}_{00}]$に拡張した積分を計算できることとなって、

$$\underset{3N_{max}\times 3N_{max}}{\int_{\Delta S_H} [Q^m{}_{00}]\, dS_{(Q)}} = \underset{3N_{max}\times 3N_{max}}{\int_{\Delta S_H} [S_c{}^m{}_{00}]\ dS_{(Q)}} \qquad (4.3.22)$$

を得る。上式左辺で$[Q^m{}_{00}]$は$[\tilde{Q}_{00}]$を拡張したマトリクスである。これに合わせて$[\tilde{Q}_{00}]$に掛かっていた変位ベクトル$\{\tilde{u}_w\}$も拡張されて、$\{u_w\}$と表されることとなる。

船体表面全体で積分する場合には、全ての要素について上式の総和をとればよい。これを$[Q_{00}]$と表すこととすれば、

$$\underset{3N_{max}\times 3N_{max}}{[Q_{00}]} = \sum_{m=1}^{M_{max}} \int_{\Delta S_H} [Q^m{}_{00}]\, dS_{(Q)} = \underset{3N_{max}\times 3N_{max}}{[S_{c00}]} \qquad (4.3.23)$$

$$\underset{3N_{max}\times 3N_{max}}{[S_{c00}]} = \sum_{m=1}^{M_{max}} \int_{\Delta S_H} [S_c{}^m{}_{00}]\, dS_{(Q)} \qquad (4.3.24)$$

を得る。(4.3.23)式により、船体表面全域を対象とした$[Q_{00}]$を得ることができた訳であり、その際に変位ベクトルも拡張されたことに注意しておく。また、$[Q_{00}]$は対称行列となるものである。なお、ここでも上式の$[S_{c00}]$を計算するにあたって、付加質量マトリクスを定式化する際に用いた$[S]$と同様の形式にて処理することができる。Fig.3.6.2を参考にして節点iに属する要素のグループを考えれば、$[S_{c00}]$の行節点i、列節点jにある小マトリクスの成分を$[S_{c00}]_{ij}$と表して(4.3.21)式を利用することにより、

$$\underset{3\times 3}{[S_{c00}]_{ij}} = \sum_{m=1}^{M_{max}} \int_{\Delta S_H} [S_c{}^m{}_{00}]_{ij}\ dS_{(Q)}$$

$$= \sum_{L=1}^{M(i)} \int_{\Delta S_H} \underset{1\times 1}{N_{k(i,m)}}\ \underset{1\times 1}{N_{k(j,m)}}\ \underset{3\times 3}{[T_{00}]}\ dS_{(Q)} \qquad (4.3.25)$$

を得る。上式で用いた記号$M(i)$およびLは(3.6.16)式に示したS_{ij}のときと同じものである。そして、節点iと節点jが同じ要素m上にないときには、上式右辺の積分項をゼロとせねばならないこともS_{ij}と同じである。従って、S_{ij}を計算しながら$[S_{c00}]_{ij}$も計算できて効率的であることがわかるであろう。

以上によって、拡張マトリクスは全て準備できた。即ち、(4.3.6)式の$[Q_{11}]$、(4.3.15)式の$[Q_{10}]$、(4.3.23)式の$[Q_{00}]$を計算することにより、船体表面全域で散逸されるエネルギE_{SH}を知ることができる訳である。E_{SH}とは、(4.2.29)式によって得られた$E_q(Q)$を船体表面全域で積分したものであるから、これらの拡張マトリクスを用いて表せば、

$$\begin{aligned} E_{SH} &= \int_{S_H} E_q(Q)\ \ dS_{(Q)} \\ &= \pi\,\omega\,\beta_w\,\rho\,\nu\sqrt{\frac{\omega}{2\nu}}\Big[\Big(\{u_w{}^R\}^T[Q_{11}]\{u_w{}^R\} + \{u_w{}^I\}^T[Q_{11}]\{u_w{}^I\}\Big) \\ &\quad + \Big(\{u_w{}^R\}^T[Q_{00}]\{u_w{}^R\} + \{u_w{}^I\}^T[Q_{00}]\{u_w{}^I\}\Big) \\ &\quad - \Big(\{u_w{}^R\}^T[Q_{10}]\{u_w{}^R\} + \{u_w{}^I\}^T[Q_{10}]\{u_w{}^I\}\Big) \\ &\quad - \Big(\{u_w{}^R\}^T[Q_{10}]^T\{u_w{}^R\} + \{u_w{}^I\}^T[Q_{10}]^T\{u_w{}^I\}\Big)\Big] \end{aligned}$$

-------------- (4.3.26)

となる。上式において、節点変位ベクトル$\{u_w\}$がモデルの全節点を表すサイズとなっていることに注目すれば、変位ベクトルについてまとめることができて、

$$[Q_{SH}] = [Q_{11}] + [Q_{00}] - \Big([Q_{10}] + [Q_{10}]^T\Big) \qquad (4.3.27)$$

なるマトリクス$[Q_{SH}]$を定義することができる。そして、上式右辺第１,２項の$[Q_{11}]$および$[Q_{00}]$は対称行列であり、第３項の$([Q_{10}]+[Q_{10}]^T)$も対称行列となるから、$[Q_{SH}]$は必ず対称行列となることが知れる。上式を用いて船体表面での散逸エネルギE_{SH}を表せば、

$$E_{SH} = \pi \omega \beta_w \rho \nu \sqrt{\frac{\omega}{2\nu}} \left[\{u_w^R\}^T [Q_{SH}] \{u_w^R\} + \{u_w^I\}^T [Q_{SH}] \{u_w^I\} \right] \tag{4.3.28}$$

となる。上式は、一般の減衰マトリクスによる散逸エネルギの式(4.2.6)と全く同じ形をしていることがわかる。従って、上式と(4.2.6)式とを等置すれば、即ちE_{SH}とE_cとを等しいとおけば、船体表面での散逸エネルギが等しくなるような減衰マトリクスを得ることができる。この減衰マトリクスのことを等価減衰マトリクスと呼ぶことにして$[C_{SH}]$とおけば、

$$[C_{SH}] = \beta_w \rho \nu \sqrt{\frac{\omega}{2\nu}} [Q_{SH}] \tag{4.3.29}$$

を得ることができる。$[Q_{SH}]$が対称行列となることから$[C_{SH}]$もやはり対称行列となる。そして、$[C_{SH}]$は「正の定符号マトリクス」となるから、標準固有値問題において$[C_{SH}]$の固有値は全て正となることを導くことができる。

上式は、従来にはなかった新しい減衰マトリクス[54] *(著者,1996)*であり、これを用いることによって一層効果的な振動解析が行えるようになった[57] *(著者,1996)*のである。

（2）岸壁及び水底に関する減衰マトリクス

さて、岸壁あるいは水底にも振動境界層は存在する。(4.2.29)式によって得られた散逸エネルギ$E_q(Q)$は点Qを船体表面にとった場合を示すものであるが、岸壁あるいは水底においてはv_sをゼロとして扱えばよいだけである。即ち、表面そのものの速度をゼロとする訳である。(4.2.24)式の段階でこれを行えば、v_pに関する項だけが残るから、結局は$[\tilde{Q}_{11}]$についてのみ計算すればよいことになる。ただし、$[\tilde{Q}_{11}]$に含まれる$[\tilde{A}iB]$,$[\tilde{S}_p]$,$[T_{11}]$の各項については、岸壁あるいは水底表面の速度ポテンシャルを表すものとせねばならない。これは、v_pが岸壁あるいは水底表面の境界層外端速度ベクトルとなることから明らかであろう。従って、まずはこれらの表面におけるv_pを得る必要がある。

岸壁あるいは水底の表面におけるv_pを得るためには、それら表面における速度ポテンシャルを求めればよい。岸壁有限水深のGreen関数を用いた離散化方程式(3.5.23)によって船体表面の速度ポテンシャルが既知となれば、積分方程式(3.4.1)より流体領域の任意の点の速度ポテンシャルを得ることができるから、岸壁あるいは水底の表面における速度ポテンシャルも得ることができる。それらの表面をあらかじめメッシュ分割しておいて、メッシュ節点における速度ポテンシャルを得れば、要素内部の速度ポテンシャルを内挿補間することによって表面における速度ポテンシャルは全て既知となる。v_pはその微分にて与えられるからこれもまた既知となる。従って、これらの表面にて散逸されるエネルギも定式化できるのである。

岸壁および水底の表面をあらかじめメッシュ分割しておいて、そのメッシュ節点に点Pをとる。そして、点Pにおける速度ポテンシャルを$\phi_b(P)$とすれば、積分方程式(3.4.1)より、

$$4\pi \phi_b(P) = \int_{S_H} \left(\phi(Q) \frac{\partial G_w(P,Q)}{\partial n_{(Q)}} - G_w(P,Q) \frac{\partial \phi(Q)}{\partial n_{(Q)}} \right) dS_{(Q)} \tag{4.3.30}$$

を得る。上式右辺の$\phi(Q)$は船体表面の速度ポテンシャルであり、$\phi(Q)$は既知となっていることから左辺の$\phi_b(P)$も既知となる訳である。また、点Pは船体表面上にはないから、右辺の積分は特異積分とはならなず、通常の数値積分で評価することができる。なお、上式左辺の4πは立体内角を示すものである。点Pは船体表面上ではないけれども岸壁あるいは水底という境界上にあることから立体内角は2πとするべきようにみえるかもしれないが、上式が正しい。例えば、点Pを水底にとっていた場合、水底表面S_Bでの積分においてFig.3.3.1に示したように$1/r_1$の鏡像がそれ自身に一致してくるから特異性は2倍になる。従って、半球分の立体内角2πを2倍にした4πが正しい。また、点Pを岸壁にとっていた場合、岸壁表面S_Wでの積分においても同じことがいえる。そして、水底と岸壁との交線上に点Pをとっていた場合には特異性は4倍になるが、球も$1/4$となって、$1/4$球分の立体内角πを4倍にすることとなるので、やはり4πが正しい。

さて、上式右辺を離散化して表現すれば、即ち、船体表面の速度ポテンシャル$\phi(Q)$及び変位$u_w(Q)$を船体表面要素の内挿関数N_kで内挿補間すれば、積分領域が船体表面であることから、(3.5.8)式とよく似た表現を得ることができる。点Pを岸壁あるいは水底要素の節点iにとった場合、上式は

$$\phi_b(i) = \sum_{m=1}^{M_{max}} \sum_{k=1}^{k_{max}} \phi_k \frac{1}{4\pi} \int_{\Delta S_H} N_k(Q) \frac{\partial G_w(i,Q)}{\partial n_{(Q)}} dS_{(Q)}$$

$$- \lambda \sum_{m=1}^{M_{max}} \sum_{k=1}^{k_{max}} u_{wk}{}^T \frac{1}{4\pi} \int_{\Delta S_H} \hat{n_{z0}}(Q)\ N_k(Q)\ G_w(i,Q)\ dS_{(Q)} \qquad (4.3.31)$$

となり、Fig.3.5.6と同様に要素を節点jに属するグループとみなせば、

$$A_{b\,ij} = \frac{1}{4\pi} \sum_{L=1}^{M(j)} \int_{\Delta S_H} N_{k(j,m)}(Q) \frac{\partial G_w(i,Q)}{\partial n_{(Q)}} dS_{(Q)} \qquad (4.3.32)$$

$$\mathbb{B}_{b\,ij}{}^T = \frac{1}{4\pi} \sum_{L=1}^{M(j)} \int_{\Delta S_H} \hat{n_{z0}}(Q)^T\ N_{k(j,m)}(Q)\ G_w(i,Q)\ dS_{(Q)} \qquad (4.3.33)$$

とおいて、

$$\phi_b(i) = \sum_{j=1}^{N_{max}} A_{b\,ij}\ \phi(j) - \lambda \sum_{j=1}^{N_{max}} \mathbb{B}_{b\,ij}{}^T u_w(j) \qquad (4.3.34)$$

とかくことができる。なお、A_{bij}および$\mathbb{B}_{bij}$に含まれる積分は特異積分とはならなず、通常の数値積分で評価することができる。岸壁および水底のメッシュ節点総数をN_{wb}とすれば、上式はN_{wb}個作ることができて、これをマトリクス表示すれば、

$$\underset{N_{wb}\times 1}{\{\phi_b\}} = \underset{N_{wb}\times N_{min}}{[A_b]}\ \underset{N_{min}\times 1}{\{\phi\}} - \lambda\ \underset{N_{wb}\times 3N_{max}}{[B_b]}\ \underset{3N_{max}\times 1}{\{u_w\}} \qquad (4.3.35)$$

となる。上式のマトリクスサイズは船体表面にて減次節点を用いた場合であるが、これを用いない場合には上式右辺でN_{min}をN_{max}と書き換えればよい。また、岸壁と自由表面の交線上にある節点の分だけN_{wb}を減らす方法（減次節点）もあるが、船体表面の場合とは違って減らせる節点数が少なく、新たなる逆行列を計算する必要もないことから、岸壁水底メッシュに対しては減次節点を用いないこととする。

上式の$\{\phi\}$に、船体表面速度ポテンシャルの式(3.5.23)を代入すれば、

$$\{\phi_b\} = \lambda \left([A_b]\,[A]^{-1}\,[B] - [B_b] \right) \{u_w\} \qquad (4.3.36)_{-1}$$

となって、速度ポテンシャル$\{\phi_b\}$が節点変位$\{u_w\}$の１次関数として表されることとなる。上式右辺の()内部を$[AiB_b]$とおいて、

$$\underset{N_{wb}\times 3N_{max}}{[AiB_b]} = [A_b]\,[A]^{-1}\,[B] - [B_b] \qquad (4.3.36)_{-2}$$

$$\underset{N_{wb}\times 1}{\{\phi_b\}} = \lambda\ \underset{N_{wb}\times 3N_{max}}{[AiB_b]}\ \underset{3N_{max}\times 1}{\{u_w\}} \qquad (4.3.36)_{-3}$$

と表すこととする。

速度ポテンシャル$\{\phi_b\}$が節点変位$\{u_w\}$の関数として表されたから、(4.1.34)式と同様に、境界層外端での速度ベクトル$v_{pb}(Q)$を得ることができる。

$$v_{pb}(Q) = \lambda\ [T_{b1}]\,[\tilde{S}_{pb}]\,[\tilde{AiB}_b]\,\{u_w\} \qquad (4.3.37)$$

上式で、$[T_{b1}]$は$[T_1]$に対応するもので、岸壁あるいは水底要素に関する座標変換マトリクスを表している。そして、$[\tilde{S}_{pb}]$は$[\tilde{S}_p]$に対応するもので、岸壁あるいは水底要素に関する微分作用素を表している。また、$[\tilde{AiB}_b]$は$[\tilde{AiB}]$に対応するもので、岸壁あるいは水底要素に関わる節点部分の行成分だけを抽出したものを表している。

境界層外端での速度ベクトル$v_{pb}(Q)$を得ることができたから、点Qにおける単位面積、１周期あたりの散逸エネルギ$E_{bq}(Q)$を知ることができる。これは、前述の如く(4.2.29)式の$[\tilde{Q}_{11}]$に相当する部分だけを考慮すればよいから、

$$E_{bq}(Q) = \pi\,\omega\,\beta_w\,\rho\,\nu \sqrt{\frac{\omega}{2\nu}} \left[\{u_w{}^R\}^T [\tilde{Q}_{b11}] \{u_w{}^R\} + \{u_w{}^I\}^T [\tilde{Q}_{b11}] \{u_w{}^I\} \right]$$

-------------- (4.3.38)

となる。ここで、注目しておくべきは、節点変位ベクトル$\{u_w\}$がモデルの全節点を表すサイズとなっていることである。そして、

$$\underset{3N_{max}\times 3N_{max}}{[\tilde{Q}_{b11}]} = [\tilde{AiB}_b]^T\,[\tilde{S}_{pb}]^T\,[T_{b11}]\,[\tilde{S}_{pb}]\,[\tilde{AiB}_b] \qquad (4.3.39)$$

であり、$[T_{b11}]$は$[T_{11}]$に対応するもので、岸壁あるいは水底要素に関する座標変換マトリクスのダイアド積を表している。

さて、(4.2.38)式によって得られた$E_{bq}(Q)$は、点Qにおける単位面積、1周期あたりの散逸エネルギであるから、これを要素m上で積分すれば1周期あたりの散逸エネルギE_{bm}を得ることができる。前述の如く速度分布修正係数β_wを一定値として扱えば、β_wと節点変位とは共に積分には関与せず積分記号の外へ出すことができるから、結局は、$[\tilde{Q}_{b11}]$を積分することとなる。さらに、岸壁および水底全域での積分とするために、各要素におけるE_{bm}の総和をとれば、そこで消失される全散逸エネルギE_{WB}を得ることができる。

$[\tilde{Q}_{b11}]$に含まれる$[\widetilde{AiB}_b]$は積分には関与せず、積分記号の外へ出すことができるから、

$$\underset{3N_{max}\times 3N_{max}}{\int_{\Delta S_{WB}}[\tilde{Q}_{b11}]\,dS_{(Q)}} = \underset{3N_{max}\times k_{max}}{[\widetilde{AiB}_b]^T}\int_{\Delta S_{WB}}\underset{k_{max}\times k_{max}}{[\tilde{S}_{pb}]^T[T_{b11}][\tilde{S}_{pb}]\,dS_{(Q)}}\ \underset{k_{max}\times 3N_{max}}{[\widetilde{AiB}_b]} \tag{4.3.40}$$

となる。ここで、ΔS_{WB}は岸壁あるいは水底表面の微小要素であることを表す。また、船体表面の場合とは違って減次節点を用いる効果は少ない（岸壁と自由表面の交線上の節点しか減らせないし、新たなる逆行列を計算する必要もない）から、要素局部節点の総数は全てk_{max}と表している。

上式右辺の積分項内部を$[\tilde{S}_{b11}]$とおけば、

$$\underset{k_{max}\times k_{max}}{[\tilde{S}_{b11}]} = \underset{k_{max}\times 3}{[\tilde{S}_{pb}]^T}\ \underset{3\times 3}{[T_{b11}]}\ \underset{3\times k_{max}}{[\tilde{S}_{pb}]} \tag{4.3.41}$$

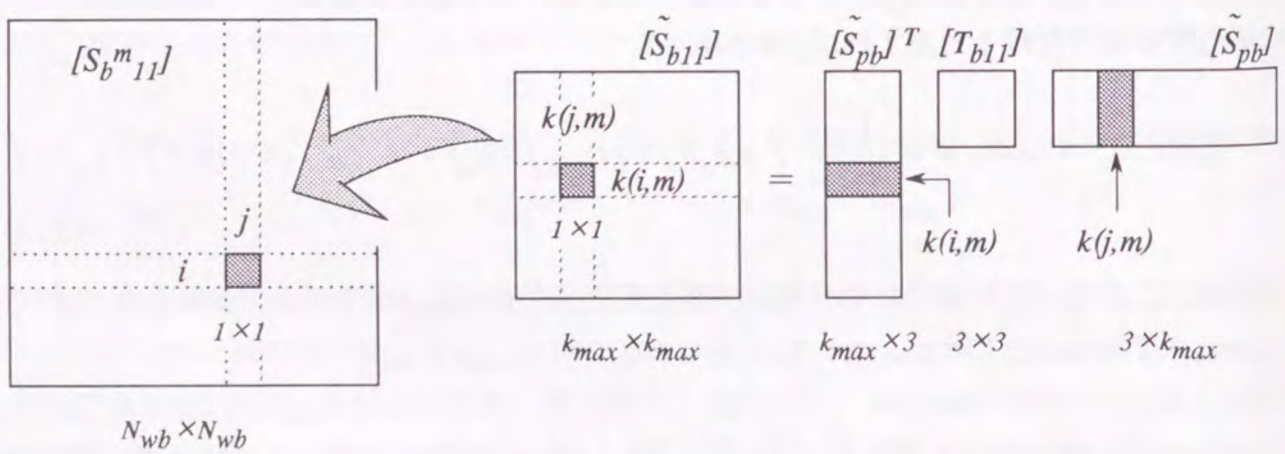


Fig.4.3.4 $[\tilde{S}_{b11}]$の成分と拡張マトリクス$[S_b{}^m{}_{11}]$

となって、これを模式的に示せば、Fig.4.3.4のようになる。$[\tilde{S}_{b11}]$の成分の位置は関与する節点の番号によって決まる。要素m上に節点iと節点jがあるとすれば、その局部節点番号kは、それぞれ$k(i,m)$および$k(j,m)$にて表すことができる。そして、$[\tilde{S}_{pb}]$の第k列のベクトルを$\tilde{S}_{pb\,k}$、$[\tilde{S}_{b11}]$の$k(i,m)$行$k(j,m)$列目の成分を$[\tilde{S}_{b11}]_{ij}$と表せば、

$$\underset{1\times 1}{[\tilde{S}_{b11}]_{ij}} = \underset{1\times 3}{\tilde{S}_{pb\,k(i,m)}{}^T}\ \underset{3\times 3}{[T_{b11}]}\ \underset{3\times 1}{\tilde{S}_{pb\,k(j,m)}} \tag{4.3.42}$$

となる。上式は節点番号iとjに関する成分を与えるものであるから、要素mの節点数で支配されるマトリクスである$[\tilde{S}_{b11}]$を、岸壁水底メッシュの全節点数で支配されるマトリクスに拡張できることを示している。今、拡張マトリクス$[S_b{}^m{}_{11}]$を$N_{wb}\times N_{wb}$なるサイズとして定義すれば、その成分が上式にて与えられる訳である。その様子もFig.4.3.4に示してある。$[S_b{}^m{}_{11}]$のi行j列目の成分を$[S_b{}^m{}_{11}]_{ij}$と表せば、

$$\underset{1\times 1}{[S_b{}^m{}_{11}]_{ij}} = \underset{1\times 1}{[\tilde{S}_{b11}]_{ij}} = \underset{1\times 3}{\tilde{S}_{pb\,k(i,m)}{}^T}\ \underset{3\times 3}{[T_{b11}]}\ \underset{3\times 1}{\tilde{S}_{pb\,k(j,m)}} \tag{4.3.43}$$

となる。なお、節点iと節点jが同じ要素m上にないときには、上式右辺をゼロとせねばならない。この場合をゼロとすることにより、$[\widetilde{AiB}_b]$をも$[AiB_b]$に拡張できることとなって、

$$\underset{3N_{max}\times 3N_{max}}{\int_{\Delta S_{WB}}[Q_b{}^m{}_{11}]\,dS_{(Q)}} = \underset{3N_{max}\times N_{wb}}{[AiB_b]^T}\int_{\Delta S_{WB}}\underset{N_{wb}\times N_{wb}}{[S_b{}^m{}_{11}]\,dS_{(Q)}}\ \underset{N_{wb}\times 3N_{max}}{[AiB_b]} \tag{4.3.44}$$

を得る。上式左辺で$[Q_b{}^m{}_{11}]$は$[\tilde{Q}_{b11}]$と同じものであるが、右辺を拡張した都合から記号を変えておく。

岸壁水底表面全体で積分する場合には、全ての要素について上式の総和をとればよい。これを$[Q_{b11}]$と表すこととして、その要素総数をM_{wb}とすれば、総和記号Σは$[S_b{}^m{}_{11}]$の積分項だけに作用することとなって、

$$\underset{3N_{max}\times 3N_{max}}{[Q_{b11}]} = \sum_{m=1}^{M_{wb}}\int_{\Delta S_{WB}}[Q_b{}^m{}_{11}]\,dS_{(Q)} = \underset{3N_{max}\times N_{wb}}{[AiB_b]^T}\ \underset{N_{wb}\times N_{wb}}{[S_{b11}]}\ \underset{N_{wb}\times 3N_{max}}{[AiB_b]} \tag{4.3.45}$$

$$\underset{N_{wb}\times N_{wb}}{[S_{b11}]} = \sum_{m=1}^{M_{wb}}\int_{\Delta S_{WB}}[S_b{}^m{}_{11}]\,dS_{(Q)} \tag{4.3.46}$$

を得る。(4.3.45)式により、岸壁水底表面全域を対象とした$[Q_{b11}]$を得ることができた訳である。なお、上式の$[S_{b11}]$を計算するにあたっては、付加質量マトリクスを定式化する際に用いた$[S]$と同様の形式にて処理できる方が便利である。Fig.3.6.2を参考にして節点iに属する要素のグループを考えれば、$[S_{b11}]$のi行j列目の成分を$[S_{b11}]_{ij}$と表して(4.3.43)式を利用することにより、

$$\underset{1\times 1}{[S_{b11}]_{ij}} = \sum_{m=1}^{M_{wb}} \int_{\Delta S_{WB}} [S_b{}^m{}_{11}]_{ij} \; dS_{(Q)}$$

$$= \sum_{L=1}^{M(i)} \int_{\Delta S_{WB}} \underset{1\times 3}{\tilde{\mathbb{S}}_{pb\,k(i,m)}{}^T} \; \underset{3\times 3}{[T_{b11}]} \; \underset{3\times 1}{\tilde{\mathbb{S}}_{pb\,k(j,m)}} \; dS_{(Q)} \qquad (4.3.47)$$

を得る。上式で用いた記号$M(i)$およびLは(3.6.16)式に示した$\mathbb{S}_{ij}$のときと同じものである。そして、節点iと節点jが同じ要素m上にないときには、上式右辺の積分項をゼロとせねばならないことも$\mathbb{S}_{ij}$と同じである。ところが、$\mathbb{S}_{ij}$とは積分領域が異なるために、$\mathbb{S}_{ij}$を計算しながら$[S_{b11}]_{ij}$を得ることはできない。それでも、同じサブルーチンを使うことができる点において便利になる訳である。

岸壁および水底で散逸されるエネルギE_{WB}とは、(4.3.38)式によって得られた$E_{bq}(Q)$を表面全域で積分したものであるから、

$$E_{WB} = \int_{S_W+S_B} E_{bq}(Q) \quad dS_{(Q)}$$

$$= \pi \omega \beta_w \rho \nu \sqrt{\frac{\omega}{2\nu}} \left[\{u_w{}^R\}^T [Q_{b11}] \{u_w{}^R\} + \{u_w{}^I\}^T [Q_{b11}] \{u_w{}^I\} \right]$$

-------------- (4.3.48)

となる。上式は、一般の減衰マトリクスによる散逸エネルギの式(4.2.6)と全く同じ形をしていることがわかる。従って、上式と(4.2.6)式とを等置すれば、即ちE_{WB}とE_cとを等しいとおけば、岸壁水底表面での散逸エネルギが等しくなるような減衰マトリクスを得ることができる。この減衰マトリクスも等価減衰マトリクスと呼ぶことができて$[C_{WB}]$とおけば、

$$[C_{WB}] = \beta_w \rho \nu \sqrt{\frac{\omega}{2\nu}} \; [Q_{b11}] \qquad (4.3.49)$$

を得ることができる。そして、$[C_{WB}]$もやはり対称行列となり、$[C_{WB}]$は「正の定符号マトリクス」となるから、標準固有値問題において$[C_{WB}]$の固有値は全て正となることを導くことができる。

上式も、従来にはなかった新しい減衰マトリクス[54] (著者,1996)であり、これを用いることによって一層効果的な振動解析が行えるようになった[57] (著者,1996)のである。

以上により、粘性による散逸エネルギから導いた減衰マトリクスを、全ての境界面で定式化することができた。

船体表面に対しては、

$$[C_{SH}] = \beta_w \rho \nu \sqrt{\frac{\omega}{2\nu}} \; [Q_{SH}] \qquad (4.3.29)_{再記}$$

であり、岸壁水底表面に対しては、

$$[C_{WB}] = \beta_w \rho \nu \sqrt{\frac{\omega}{2\nu}} \; [Q_{b11}] \qquad (4.3.49)_{再記}$$

である。そして、船体の振動を抑制する力として作用する減衰力は、上２式による減衰力の和である。減衰マトリクス$[C_{SH}]$および$[C_{WB}]$は、どちらも船体表面の節点速度に関する比例定数となるものであるから、これらをあらかじめ足し合わせておいてもよい。従って、

$$[C_w] = [C_{SH}] + [C_{WB}] \qquad (4.3.50)$$

で表される$[C_w]$が、流体による粘性減衰マトリクスを表すこととなる。従って、船体表面に作用する減衰力$\{f_{wc}\}$は、(4.2.3)式より、

$$\{f_{wc}\} = -\lambda [C_w] \{u_w\} \qquad (4.3.51)$$

と表すことができる。また、$[C_w]$は線形減衰マトリクスでもあるから、以降、$[C_w]$のことを、等価粘性減衰マトリクスあるいは等価線形減衰マトリクスと呼ぶことにする。あるいは、付加質量マトリクスとの関連から、付加減衰マトリクスと呼ぶこともある。そして、$[C_w]$もやはり対称行列となり、$[C_w]$は「正の定符号マトリクス」となるから、標準固有値問題において$[C_w]$の固有値は全て正となることを導くことができる。

なお、船体表面と岸壁水底表面に対して同じ速度分布修正係数β_wを用いているが、これを同じとする必要はない。

４．４　散逸エネルギ計測理論

流体の粘性による散逸エネルギを計測するために、その計測理論について述べる。これを計測するためには、２種類の実験を行わねばならない。その第１は模型が空中にあるときの実験であり、その第２は模型が流体に浮かんでいるときの実験である。第１の実験によって流体とは関係のない模型自身の散逸エネルギを計測し、第２の実験によって流体と模型の両方による散逸エネルギを計測する。これらの差をとることにより、流体の粘性による散逸エネルギを得ることができる。

この２種類の実験において、それぞれの場合の散逸エネルギを、同じ方法によって計測することができる。定常振動においては散逸エネルギと入力エネルギとは等しいから、どちらも定常振動状態での実験を行って、その入力エネルギを計測すれば散逸エネルギを得ることができる訳である。ここでは、回転楕円体模型の船尾端１カ所を加振して、その励振力と加振点応答とを計測することによって入力エネルギを算出する方法を用いている。その様子をFig.4.4.1に示す。模型を吊り下げるために支持する位置は振動の節の位置とし、支持ばねは充分柔らかいものを使用する。

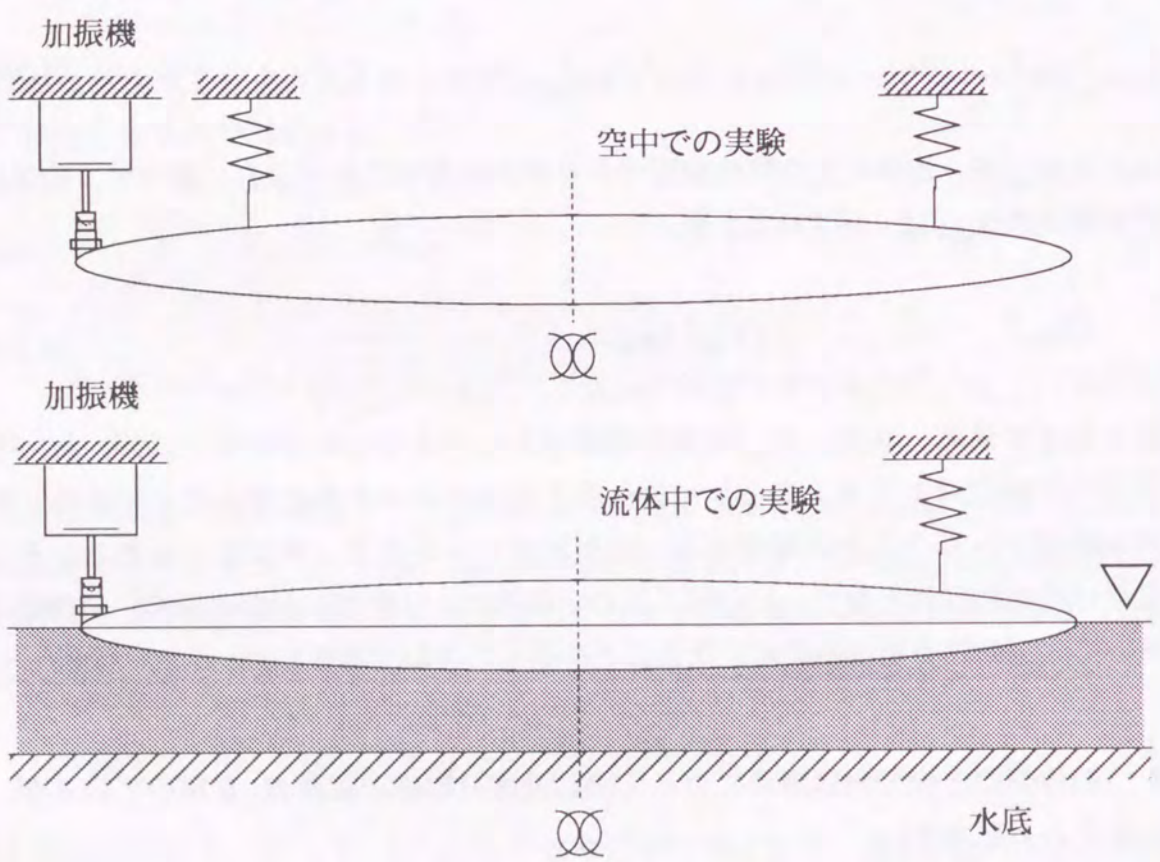


Fig.4.4.1　散逸エネルギ計測のための実験

励振力と加振点応答から入力エネルギを算出する方法について述べる。励振力を$F_L(t)$、加振点応答（変位）を$U_L(t)$とおき、時間項を変数分離して表せば、

$$F_L(t) \quad = \quad f_L \ e^{\lambda t} \tag{4.4.1}$$

$$U_L(t) \quad = \quad u_L \ e^{\lambda t} \tag{4.4.2}$$

となる。ここで、$\lambda = i\omega, i = \sqrt{-1}$である。そして、励振力$f_L$は実数であり、加振点変位$u_L$は複素数である。これは、加振点変位$u_L$には励振力$f_L$に対する位相差が入るためである。この２つの量を用いるだけで入力エネルギを計算することができる。単位時間あたりの入力エネルギを$E'_L(t)$とすれば、これは、励振力$F_L(t)$が単位時間あたりになす仕事$dW_L(t)/dt$と等しいものである。従って、

$$E'_L(t) \quad = \quad \frac{dW_L(t)}{dt} \quad = \quad Re\,[\, f_L \ e^{\lambda t} \,] \quad Re\,[\, \lambda \ u_L \ e^{\lambda t} \,] \tag{4.4.3}$$

となる。上式において加振点変位u_Lの実部を$u_L{}^R$、虚部を$u_L{}^I$とおけば、

$$E'_L(t) \quad = \quad -\omega f_L \ \left(u_L{}^I \cos^2 \omega t + u_L{}^R \sin \omega t \ \cos \omega t \right) \tag{4.4.4}$$

を得る。これを１周期で積分すれば、１周期あたりの入力エネルギE_Lを得ることができる。

$$E_L \quad = \quad \int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} E'_L(t) \ \ dt \quad = \quad -\pi \ f_L \ u_L{}^I \tag{4.4.5}$$

上式は、励振力の振幅f_Lと加振点変位の虚部$u_L{}^I$さえわかれば、１周期あたりの入力エネルギ、即ち散逸エネルギE_Lを得ることができることを示している。

さて、定常振動において、散逸エネルギと入力エネルギが等しくなることを確認しておこう。振動系の質量マトリクスを$[M]$、減衰マトリクスを$[C]$、剛性マトリクスを$[K]$とおき、変位ベクトルを$\{u\}e^{\lambda t}$、励振力ベクトルを$\{f\}e^{\lambda t}$とおく。この励振力ベクトルは多点加振を表すものであるから必ずしも実数とは限らず、ある位相基準に対して何らかの位相差を持ったものであると考える。従って、$\{f\}$は複素数から成るものとして扱う。変位ベクトルもその位相基準に対して位相差をもつから、当然、$\{u\}$も複素数である。また、各マトリクス$[M]$、$[C]$、$[K]$は実数対称行列であるとする。

このとき、振動方程式は、

$$(\lambda^2 [M] + \lambda [C] + [K]) \{u\} = \{f\} \tag{4.4.6}$$

となる。ここで、変位ベクトル$\{u\}$および励振力ベクトル$\{f\}$の実部と虚部を、それぞれ、$\{u^R\}$,$\{u^I\}$および$\{f^R\}$,$\{f^I\}$と表すこととする。そして、上式を変形すれば、

$$\omega \{u^R\}^T [C] \{u^R\} = \{u^R\}^T (\omega^2 [M] - [K]) \{u^I\} + \{u^R\}^T \{f^I\} \qquad (4.4.7)_{-1}$$

$$\omega \{u^I\}^T [C] \{u^I\} = \{u^I\}^T ([K] - \omega^2 [M]) \{u^R\} - \{u^I\}^T \{f^R\} \qquad (4.4.7)_{-2}$$

なる２式を得る。

一方、減衰マトリクスによる１周期あたりの散逸エネルギも(4.2.6)式にて得られている。(4.2.6)式では、船体の接水部分の振動変位という意味で$\{u\}$ではなく$\{u_w\}$と表しているが、それを気にする必要はなくて、船体全体としての変位ベクトル$\{u\}$と振動系全体としての減衰マトリクス$[C]$を用いれば、同様に、

$$E_c = \pi \omega \, [\{u^R\}^T [C] \{u^R\} + \{u^I\}^T [C] \{u^I\}] \tag{4.4.8}$$

なる関係が得られる。ここでも、E_cは１周期あたりの散逸エネルギである。従って、上式に、(4.4.7)式を代入して、$[M]$,$[K]$が対称行列であることを利用すれば、

$$E_c = \pi \, (\{u^R\}^T \{f^I\} - \{u^I\}^T \{f^R\}) \tag{4.4.9}$$

を得ることができる。上式は、変位ベクトル$\{u\}$と励振力ベクトル$\{f\}$がわかれば、散逸エネルギE_cを得ることができることを示している。また、単点加振を考えて位相基準をその励振力とすれば、上式は(4.4.5)式と全く同じ結果を与えるのである。

４．５　計算例と実験検証

新しい手法による効果及びその問題点の分析を行うためには、できるだけ簡単な境界条件を設定する方が良い。それ故に、これ以降に示す計算及び実験では、岸壁による影響がでないように配慮し、無限水深と有限水深の場合だけを取り扱うこととする。岸壁の条件を考慮するための定式化はすでに終えてあるから、問題点がない場合には、いつでもその目的を達成することができる。よって、あえて岸壁による計算及び実験は扱わないこととする。

（１）計算例

回転変位による影響も考慮した計算を行うために、３．７節と同様に文献[32] *(松浦,1960)*の変位分布に従う。まず、無限水深にて回転楕円体の数値計算を行った。その結果得られた流体中での散逸エネルギの値を Table 4.5.1 に示す。なお、１周期あたりの散逸エネルギから周波数成分を除いたものをEとおき、いずれも無限水深*(infinite)*における計算値であることから、Eには添字$_{inf}$を付けている。Eを式で表しておこう。１周期あたりの散逸エネルギE_cは

$$E_c = \pi \omega \, [\{u_w{}^R\}^T [C] \{u_w{}^R\} + \{u_w{}^I\}^T [C] \{u_w{}^I\}] \qquad (4.2.6)_{再記}$$

であり、減衰マトリクス$[C]$としては

$$[C_w] = [C_{SH}] + [C_{WB}] \qquad (4.3.50)_{再記}$$

の左辺$[C_w]$を用いる。そして、上式右辺には$\sqrt{}(\omega)$が含まれているから、

$$E = \pi \frac{1}{\sqrt{\omega}} [\{u_w{}^R\}^T [C_w] \{u_w{}^R\} + \{u_w{}^I\}^T [C_w] \{u_w{}^I\}] \tag{4.5.1}$$

にてEを定義することができる。上式は、１周期あたりの散逸エネルギから周波数成分を除いたものとなっており、メッシュモデルを*(mm)*単位で作成して並進変位も*(mm)*単位で与える場合には、その単位は$(kgmm^2/\sqrt{s})$となる。従って、

$$E_c = \omega \sqrt{\omega} \; E \tag{4.5.2}$$

なる関係が成立することとなる。また、ここで用いた密度ρおよび動粘性係数νの値は、

$$\rho = 0.9991 \times 10^{-6} \quad (kg/mm^3) \qquad (4.5.3)_{-1}$$

$$\nu = 1.138 \quad (mm^2/s) \qquad (4.5.3)_{-2}$$

であり、速度分布修正係数β_wは1.0としている。

Table 4.5.1　各種振動モードにおける散逸エネルギE_{inf}（無限水深）

$(B=100_{mm})$

全長全幅比 L/B	剛体上下振動 E_{inf} $(kgmm^2/\sqrt{s})$		2節上下振動 E_{inf} $(kgmm^2/\sqrt{s})$		3節上下振動 E_{inf} $(kgmm^2/\sqrt{s})$		4節上下振動 E_{inf} $(kgmm^2/\sqrt{s})$	
	$C_O(P)$	2π	$C_O(P)$	2π	$C_O(P)$	2π	$C_O(P)$	2π
5.0	0.265564	0.277865	0.015607	0.016147	0.004020	0.004127	0.001060	0.001079
6.0	0.322422	0.337368	0.018891	0.019607	0.004791	0.004945	0.001235	0.001266
7.0	0.378960	0.396589	0.022267	0.023160	0.005607	0.005808	0.001428	0.001472
8.0	0.435962	0.456281	0.025763	0.026829	0.006467	0.006714	0.001635	0.001691
9.0	0.492821	0.515831	0.029299	0.030539	0.007348	0.007640	0.001851	0.001919
10.0	0.549687	0.575389	0.032875	0.034288	0.008246	0.008584	0.002074	0.002154
11.0	0.606919	0.635335	0.036513	0.038099	0.009167	0.009550	0.002304	0.002396
12.0	0.663766	0.694876	0.040134	0.041894	0.010088	0.010516	0.002535	0.002639
13.0	0.720591	0.754393	0.043768	0.045701	0.011016	0.011489	0.002770	0.002885

さて、Table 4.5.1においても、外側立体内角を正確に計算した場合を「$C_O(P)$」の欄に、これを計算せずに2πとして与えた場合を「2π」の欄に記入して整理している。これらを観察すれば、全幅Bが100_{mm}となる場合について計算しているために、全長Lが大きくなるほどにE_{inf}も大きくなっていることがわかる。また、$C_O(P)$を正確に計算した場合には、2πとして与えた場合よりも小さな散逸エネルギが得られている。これは、$C_O(P)$を正確に計算する方が、境界層外端の流体速度を小さく評価することになるためである。付加質量の場合には「2π」を採用したから、ここでも「2π」を採用することにする。

次に、$L/B=11.0$の場合について散逸エネルギの浅水影響を調査した。１周期あたりの浅水域(*shallow*)散逸エネルギから周波数成分を除いたものをE_{shl}とおき、これをE_{inf}で除したものを浅水影響係数E_{shl}/E_{inf}として定義する。各種水深について、船体表面および水底表面の速度分布修正係数をともに$\beta_w=1.0$とした計算を行い、その結果を Table 4.5.2 にまとめた。どの振動モードについて観察しても浅くなるほど散逸エネルギが増えており、また、剛体上下振動と弾性モードとではその値に大きな開きがあって、高次モードになるほどに浅水影響は小さくなることがわかる。なお、船体表面および水底表面の境界層にて散逸されるエネルギの割合を、全散逸エネルギの内訳としてパーセント表示している。例えば、$h/T=1.5$の２節上下振動の場合には散逸エネルギは深水域の約25%増えるが、全散逸エネルギの95%は船体表面で、5%は水底表面で消費されることを示している。そして、同表より、浅くなるほどに船体表面で散逸されるエネルギの割合は減って、水底表面で散逸される割合が増えることがわかる。

Table 4.5.2　各種振動モードにおける浅水影響（$L/B=11.0$）（散逸エネルギ）

$C_O(P)=2\pi$

水深喫水比 h/T	剛体上下振動 船体 (%)	水底 (%)	E_{shl}/E_{inf}	2節上下振動 船体 (%)	水底 (%)	E_{shl}/E_{inf}	3節上下振動 船体 (%)	水底 (%)	E_{shl}/E_{inf}	4節上下振動 船体 (%)	水底 (%)	E_{shl}/E_{inf}
4.0	99.6	0.4	1.046	99.8	0.2	1.013	99.9	0.1	1.007	99.9	0.1	1.004
2.0	96.5	3.5	1.234	98.1	1.9	1.110	98.3	1.7	1.084	98.5	1.5	1.064
1.5	91.9	8.1	1.513	95.3	4.7	1.252	95.6	4.4	1.209	95.8	4.2	1.174
1.3	87.6	12.4	1.821	92.4	7.6	1.402	92.8	7.2	1.343	93.0	7.0	1.297
1.2	84.1	15.9	2.128	89.9	10.1	1.547	90.3	9.7	1.471	90.4	9.6	1.417
1.1	78.6	21.4	2.770	85.2	14.8	1.845	86.2	13.8	1.718	85.9	14.1	1.662
1.0	69.3	30.7	7.223	73.7	26.3	4.072	77.0	23.0	2.835	74.9	25.1	3.239

Table 4.5.2 の結果のうち、剛体上下振動と２節上下振動の様子を Fig.4.5.1 に示す。実線及び破線は、各計算ポイントを通るように近似的に引いた線である。

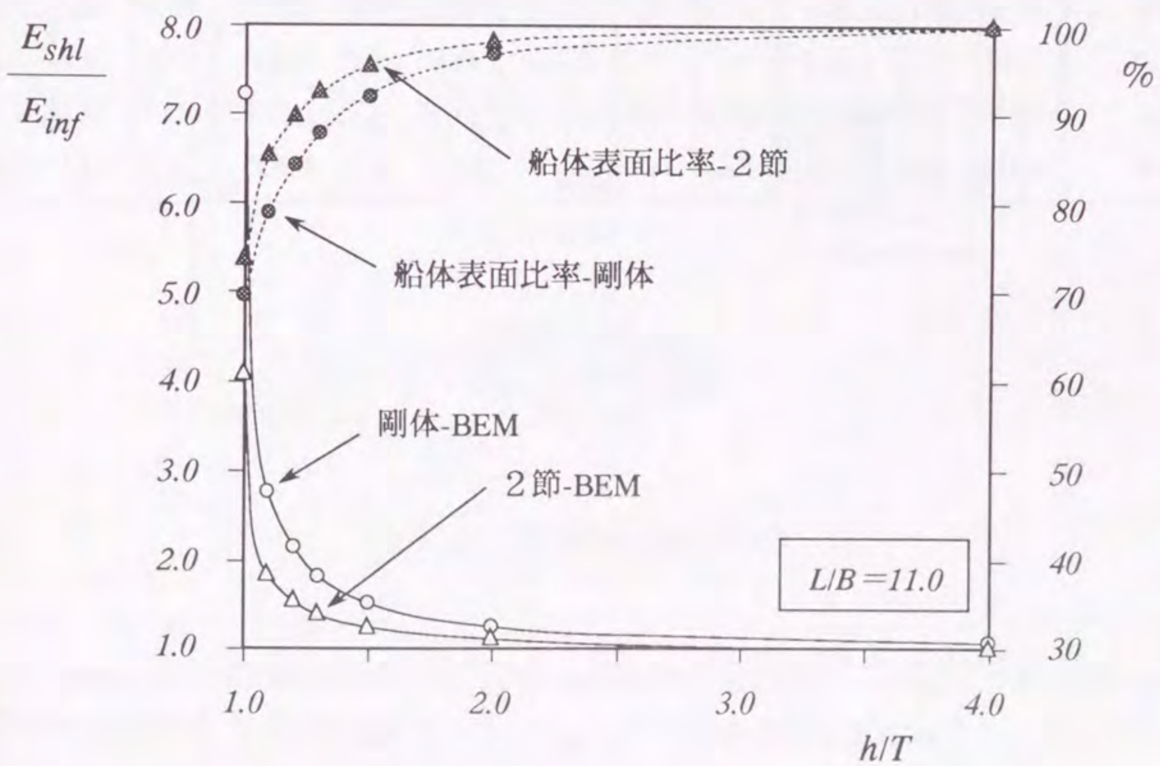


Fig.4.5.1　浅水影響係数E_{shl}/E_{inf}の様子（散逸エネルギ）

また、Table 3.7.1に示した計算モデルを用いて、全長全幅比*L/B*が*5.0*から*13.0*までの範囲について数値計算を行った。水深喫水比$h/T=1.5$の場合を Table 4.5.3 に示す。同表から、剛体モード及び弾性モードの双方に対して、上下振動に関する限り全長全幅比*L/B*による影響はほとんどないといえる。

Table 4.5.3　各種振動モードにおける浅水影響（$h/T=1.5$）（散逸エネルギ）

$C_O(P)=2\pi$

全長全幅比	剛体上下振動			2節上下振動			3節上下振動			4節上下振動		
L/B	船体 (%)	水底 (%)	E_{shl}/E_{inf}	船体 (%)	水底 (%)	E_{shl}/E_{inf}	船体 (%)	水底 (%)	E_{shl}/E_{inf}	船体 (%)	水底 (%)	E_{shl}/E_{inf}
5.0	91.8	8.2	1.502	95.8	4.2	1.158	96.4	3.6	1.094	97.1	2.9	1.054
6.0	91.8	8.2	1.509	95.5	4.5	1.190	96.0	4.0	1.127	96.6	3.4	1.083
7.0	91.8	8.2	1.512	95.4	4.6	1.212	95.8	4.2	1.153	96.2	3.8	1.109
8.0	91.9	8.1	1.513	95.3	4.7	1.228	95.7	4.3	1.173	96.0	4.0	1.130
9.0	91.9	8.1	1.514	95.3	4.7	1.239	95.6	4.4	1.188	95.9	4.1	1.148
10.0	91.9	8.1	1.514	95.3	4.7	1.246	95.6	4.4	1.200	95.8	4.2	1.162
11.0	91.9	8.1	1.513	95.3	4.7	1.252	95.6	4.4	1.209	95.8	4.2	1.174
12.0	92.0	8.0	1.510	95.4	4.6	1.255	95.7	4.3	1.215	95.8	4.2	1.182
13.0	92.0	8.0	1.510	95.4	4.6	1.258	95.7	4.3	1.220	95.8	4.2	1.190

（2）実験検証

前記計算例の検証を行うために実験を行った。木製の回転楕円体模型（全幅*B:100mm*,全長*L:1100mm*）をFig.4.4.1に述べた方法で吊り下げ、空中にて船尾加振を行ってその加振力及び応答量を計測した。水中についても同様に計測した。また浅水域を模擬するための水底には、表面がそれほどなめらかとはいえない（少し錆がある状態の）鉄板を用いた。計測設備の概要をFig.4.5.2に示す。

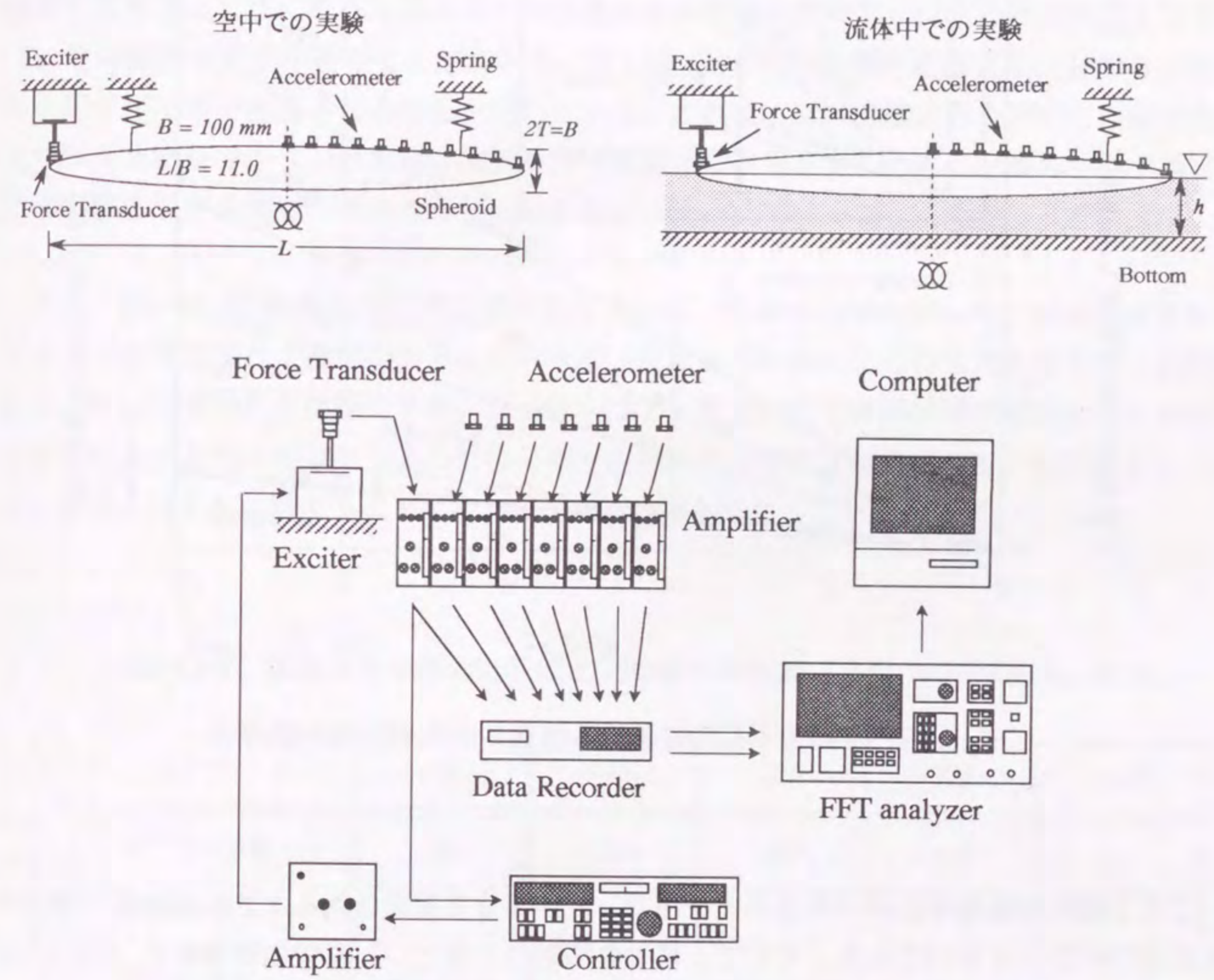


Fig.4.5.2　実験計測設備の概要

まず、散逸エネルギの振幅依存性について調査した。加振力を一定に保つように制御をかけ、種々の加振力について実験を行った。Fig.4.5.2では多点応答を計測する様子となっているが、ここでの実験では加振点だけを計測すればよいのである。よって、加振点にのみ加速度ピックを配置し、加速度ピックの重さによる影響を無視した解析を行う。

4．4節で述べたように定常振動において入力エネルギは散逸エネルギに等しいから、加振点応答量及び加振力から入力エネルギを算定することにより振動系全体としての散逸エネルギを得ることができる。種々の加振力でのピーク周波数においてそれぞれの振幅に対する１周期あたりの散逸エネルギE_Lを(4.4.5)式より計算し、２節振動での実験点をFig.4.5.3にプロットした。

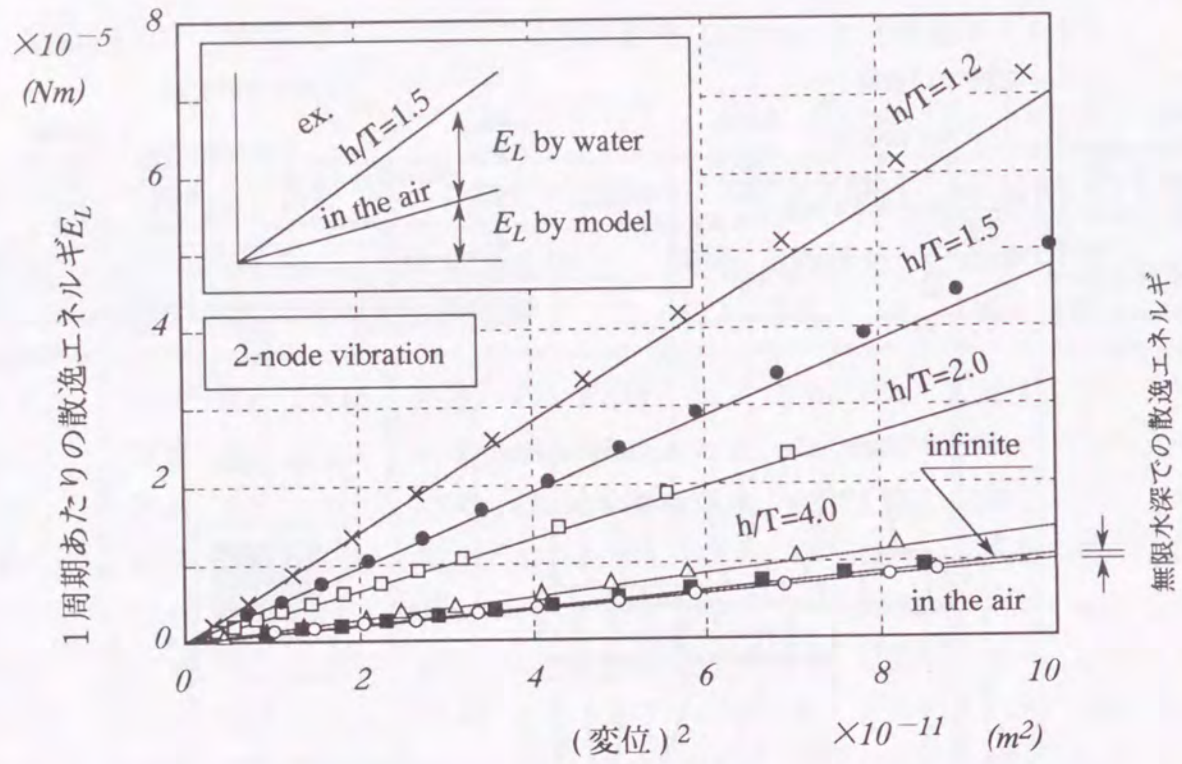


Fig.4.5.3　２節上下振動における散逸エネルギの振幅依存性

ここで縦軸は振動系全体の散逸エネルギで、流体部分で散逸されるエネルギと模型部分のそれとの和を示すものである。そして、横軸を振幅の２乗とし、模型の喫水をT、水深をhと表している。また図中の直線は、振幅の最も小さい実験点４個を採用した最小２乗法によって直線近似を行ったものである。(4.4.8)式により、線形減衰系ではこの直線に実験点が乗ることとなる。従って、この直線からの乖離が散逸エネルギの振幅依存性を示している。即ち、乖離が大きいほど線形減衰系では評価できなくなる。全ての水深において11種類以上の加振力にて実験を行っており、11個以上の実験点がプロットされている。よって、それぞれの水深において、振幅の大きい７個以上の実験点について振幅依存性をみることができる。変位固定で較べた場合には水深が浅いほど振幅依存性は大きく、また水深固定で観察した場合には浅くなるほど小さな変位でその影響が出ていることが判る。

しかし、散逸エネルギの値そのものに注目した場合にはそれほど大きな乖離ではなく、散逸エネルギは振幅の２乗にほぼ比例することを示している。即ち、少なくとも図中の変位領域では、模型の弾性振動により発現する流体の減衰現象を線形減衰マトリクスで評価しても良い事を示すものである。従って、$[C_w]$の如く減衰を等価線形とすることの妥当性が実験的に証明されたこととなる。

また空中と深水域での散逸エネルギの差は、他に較べて格段に小さい。今回の模型は木製であることから、鉄製の場合よりも模型自身の減衰が大きい為にその差が小さく見えていることが原因とも考えられるが、従来からいわれている流体の減衰は小さいとの説を裏付ける結果でもある。これに較べて浅水域での散逸エネルギは相当大きく、また水深が浅くなるほどにその影響も大きくなることがわかる。例えば、$h/T=1.2$の場合には模型自身の６倍ものエネルギが水中で散逸されることを示している。これは、流体の減衰は小さいとの従来説をくつがえす結果であり、何度同じ実験を行っても同じ結果が得られることから、浅水域ではこの実験結果が真実なのであろうと思われる。

さて、Fig.4.5.3の直線近似した結果を利用すれば、任意の振幅に対して、流体による散逸エネルギを算定することができる。これを$[C_w]$によって計算した理論散逸エネルギと比較すれば、$[C_w]$の妥当性を検証できる。４．５．（１）節で示した計算結果は変位分布を仮定して得たものであり、そこで与えた変位分布と実験結果の変位とは必ずしも一致するものではないが、これらを比較することによって大まかな検討を行うことはできる。

Table 4.5.4　散逸エネルギの計算値と実験値との比較（２節上下振動0.8mm相当）

	h/T	∞	4.0	2.0	1.5	1.2
実験	ピーク周波数 (Hz)	366	360	357	355	335
	１周期散逸エネルギ E_c (Nm)	4.21×10^{-3}	2.76×10^{-2}	1.48×10^{-1}	2.43×10^{-1}	3.89×10^{-1}
計算	E_{inf}あるいはE_{shl} (kgmm²/√s)	0.038099	0.038594	0.042290	0.047700	0.058939
	１周期散逸エネルギ E_c (Nm)	4.20×10^{-3}	4.15×10^{-3}	4.49×10^{-3}	5.02×10^{-3}	5.69×10^{-3}
速度分布修正係数β_w		1.00	6.65	32.9	48.3	68.3

（注）　計算の段で示した数値は$\beta_w=1.0$として得られたものである。
これに対して最下段にあるβ_wは、実験によるE_cを計算によるE_cで除したものである。

2節上下振動にて与えた変位分布は加振点での変位が*0.8(mm)*となるものであった。従って、実験結果も加振点振幅*0.8(mm)*相当の散逸エネルギに換算する。これは、Fig.4.5.3の近似直線の傾きを利用すれば換算できる。そして空中における散逸エネルギを差し引けば、実験結果として、流体による散逸エネルギを得ることができる。以上のようにして得た理論計算結果と実験結果との比較を Table 4.5.4 に示す。ここで周波数の段は実験により得られたピーク周波数を示しており、これを用いて1周期あたりの理論散逸エネルギを計算している。

同表より、深水域においては計算と実験で散逸エネルギが非常に良く一致しており、速度分布修正係数を$\beta_w=1.0$とした計算を行ってもよいことがわかる。$\beta_w=1.0$とは、深水域においては乱動による影響を考慮する必要がないことを意味している。そして、本論文で示した減衰マトリクス$[C_w]$によって、深水域での低次振動に対する現象を再現できているものと考えることができる。

これに対して浅水域においてはオーダーすら一致せず、水深が浅くなるほどに理論値と実験値との乖離が大きくなっており、$\beta_w=1.0$とした計算では浅水域での現象を再現できなくなっていることがわかる。その原因として、調波変動成分による影響、水底の粗度による影響、層外での散逸エネルギによる影響、或いは粘性とは関係しない散逸エネルギによる影響などが考えられるが、現段階では、そのどれであるかを特定することはできない。しかし、エネルギは全て境界層内で散逸されるものと仮定すると、前2者がその原因となり得る。そして、乱動による影響が大きなものであることをうかがわせる結果となっている。浅水域における現象を明らかにすることは重要な仕事であるけれども、ここでは簡便に、全体としての散逸エネルギを再現することに主眼をおくこととする。

定式化した$[C_w]$においてβ_wは比例定数となっていたから、散逸エネルギが実験結果と一致するようにβ_wを決定することができる。今、ピーク周波数における1周期あたりの散逸エネルギが、計算と実験とで一致するように決定しようとすると、β_wは、計算結果と実験から得られた結果との比そのものであり、 Table 4.5.4 にβ_wとしてまとめている。これにより、未知であったβ_wを決定できたこととなる。ただし、β_wを決定することによって実際の現象を明らかにできた訳ではなく、全体としての散逸エネルギを再現できるという利便性があるにすぎない。なぜなら、速度分布修正係数β_wは、本来、位置によって異なる値をとるはずのものであったからである。このβ_wを理論的に決定する必要はあるが、未だ、そのよき方策を発見できていない。

しかし、従来未解明であった減衰現象のうち、散逸エネルギが定量的に一致することから、少なくとも深水域における現象は解明できたものと考える。これら検証実験については文献[57] *(著者,1996)*に述べられている。

5章　新しい振動レベル推定手法

いかなる工業製品にとっても、振動性能は非常に重要な設計要素である。振動性能とは固有振動数と振動振幅あるいは振動加速度のことをいい、本論文では、振動振幅および振動加速度のことをまとめて振動レベルと呼ぶことにする。船舶の振動性能を推定するに際して、付加質量マトリクスを組み込んだ有限要素法による実固有値解析が威力を発揮し、現在ではかなり正確な固有振動数を推定できるようになっていることは前述したとおりである。しかし、減衰マトリクスが未解明であるために、最も重要な性能である振動レベルについては未だ推定不可能とされている。本論文では流体の粘性による減衰マトリクスの定式化について示したが、それでも未だ鋼材の減衰と積み荷による摩擦減衰の問題が未解明のまま残っている。このように、減衰とは全くもって厄介な現象でなかなか解明できていないのである。もしも減衰現象が全て解明されたならば、有限要素法による解析によって設計段階から振動レベルを推定することも可能となるであろうが、現状の技術水準では、あまりにも減衰現象の未解明部分が多すぎて設計段階での振動レベル推定はやはり不可能といえる。

それでも、製品として造り込む以上振動レベルを推定しない訳にもいかず、実績船の実験結果を基にモード減衰比を割り出し、これを実固有値解析の結果に流用して経験的に振動レベルを推定しているのが造船所の現状である。しかし、その方法ではあまり良い推定ができていないのもまた事実である。

そこで、設計段階での推定はそれとして、船舶の建造中に正確な振動レベルを推定する手法について考える。船舶主要部分の建造を終えて艤装岸壁に係留されている状態に着目する訳である。この段階ならば、少なくとも船舶本体については、完工就航時の振動性能に近い実験データを得ることができるものと考えられる。ところが、船舶本体は完工就航時の状態に近いものの、そこには岸壁と水底があるために艤装中の実験データをそのまま就航時の性能とみなす訳にはいかない。岸壁と水底による影響が案外大きいことは経験的に知られているから、現状では艤装中に実験を行うようなことはせず、試運転の段階になってから振動計測を行っている。そして、試運転になって初めて振動トラブルを知ることとなるから手直し工事にも素早い対応がとれず、また船主が乗り合わせることもあって、重大な問題に発展することもある。しかし、本論文に示したように岸壁浅水域での付加質量マトリクスと付加減衰マトリクスを得ることができていることから、その影響を数値的に評価することは可能となっている。従って、艤装岸壁での実験データをうまく修正すれば、完工就航時の振動性能を事前に推定することも可能となるのである。ここに着目して、新しい振動レベル推定手法[55] *(著者,1995)*を開発した。これは、これらのマトリクスを実験計測点まわりに縮小し、構造変更解析によって岸壁と水底による影響を取り除いて就航時の振動性能を推定する方法である。振動トラブルが発生しそうならばその場で手直し工事の立案および実施ができることになるから、この手法は実用上有益なものといえよう。

５．１　流体と構造の連成振動解析

（１）連成振動方程式

有限要素法にてモデル化された船舶本体の質量マトリクスを$[M_s]$、減衰マトリクスを$[C_s]$、剛性マトリクスを$[K_s]$とおき、変位ベクトルを$\{u\}e^{\lambda t}$、励振力ベクトルを$\{f\}e^{\lambda t}$とおく。ただし、$\lambda=i\omega, i=\sqrt{-1}$である。この励振力ベクトルは多点加振を表すものであるから必ずしも実数とは限らず、ある位相基準に対して何らかの位相差を持ったものであると考える。従って、$\{f\}$は複素数から成るものとして扱う。変位ベクトルもその位相基準に対して位相差をもつから、当然、$\{u\}$も複素数である。そして、$\{u\}$を構成する節点は、船体表面接水部分の節点を包含するものであるから、船体表面接水部分の変位ベクトル$\{u_w\}$は$\{u\}$の一部分を構成するに過ぎないものとなる。なお、uは6自由度であるのに対してu_wは3自由度であることに注意せねばならない。また、各マトリクス$[M_s],[C_s],[K_s]$は実数対称行列であるとし、剛体モードについては復元力項として$[K_s]$に組み込まれていると考えて、$[M_s],[C_s],[K_s]$ともに「正の定符号マトリクス」であるとする。

励振力ベクトル$\{f\}$は、船舶が振動することによって発生する流体力ではなく、例えばエンジンの起振力やプロペラフォースのように船殻そのものに直接作用する外力を表す。励振力$\{f\}$の他に、船体表面が振動することによって発生する流体力をも外力として扱わねばならない。これは、流体の圧力による力$\{f_w\}$と粘性による力$\{f_{wc}\}$とで表すことができて、それぞれ(3.6.22)および(4.3.51)式にて示されている。そして、$\{f\}$を構成する節点は船舶本体の全域に及ぶのに対して、$\{f_w\}$および$\{f_{wc}\}$を構成する節点は船体表面接水部分のみからなるものであったから、$\{f_w\}$および$\{f_{wc}\}$のサイズを$\{f\}$と同じサイズに拡張して、接水部分を除いてゼロが並ぶように配慮せねばならない。即ち、有限要素メッシュモデルにおいて船舶本体の節点数がN_{str}、船体表面接水部分の節点数がN_{max}であるとすれば、$[M_s],[C_s],[K_s]$は$6N_{str}$行$6N_{str}$列、$\{u\},\{f\}$は$6N_{str}$行となるのに対して$\{f_w\},\{f_{wc}\}$は$3N_{max}$行であるから、そのサイズをそろえておかねばならない訳である。その操作を終えたものとして、流体と構造の連成振動方程式をかけば、

$$(\lambda^2[M_s]+\lambda[C_s]+[K_s])\{u\} = \{f\}+\{f_w\}+\{f_{wc}\} \qquad (5.1.1)$$

となる。そして、上式右辺第２,３項に(3.6.22),(4.3.51)式を代入すれば、

$$[\lambda^2([M_s]+[M_w])+\lambda([C_s]+[C_w])+[K_s]]\{u\} = \{f\} \qquad (5.1.2)$$

となる。左辺の付加質量マトリクス$[M_w]$および付加減衰マトリクス$[C_w]$は$3N_{max}$行$3N_{max}$列であったから、これらも$6N_{str}$行$6N_{str}$列に拡張して接水部分を除いてゼロが並ぶように配慮せねばならない。上式では、すでにその操作を終えたものとしてかいている。

ここで、上式を簡単に、

$$(\lambda^2[M]+\lambda[C]+[K])\{u\} = \{f\} \qquad (5.1.3)$$

とかくことにする。$[M_s],[C_s],[K_s]$は実数対称行列であり、$[M_w],[C_w]$もそうであったから、上式の$[M],[C],[K]$は実数対称行列となる。また、$[M_s],[C_s],[K_s]$は「正の定符号マトリクス」であり、$[M_w],[C_w]$もそうであったから、上式の$[M],[C],[K]$は「正の定符号マトリクス」でもある。上式を解けば流体と構造の連成振動の様子を知ることができる。しかし、本論文で述べたように境界要素法によって$[M_w]$および$[C_w]$を得ることはできるものの、有限要素法によって得られるのは$[M_s]$および$[K_s]$だけであり、現状の技術水準では、減衰マトリクス$[C_s]$を得ることができない。従って、実際には上式を解くことはできず、机上の空論となっている。

現在行われている解析は、上式の$[C]$および$\{f\}$をゼロとみなした実固有値解析と、その結果を利用したモード解析である。以下、これらの関係について述べることにしよう。そのための準備として２種類の固有値問題を定義しておく。

まず、第１は、上式の$[C]$をゼロとした自由振動の方程式

$$(\lambda_e^2[M]+[K])\{\chi_e\} = \{0\} \qquad (5.1.4)$$

である。上式で、λ_eは不減衰系の固有値、$\{\chi_e\}$はそれに対応した固有ベクトルを表している。次に、第２は、$[C]$を考慮した自由振動の方程式

$$(\lambda_d^2[M]+\lambda_d[C]+[K])\{\chi_d\} = \{0\} \qquad (5.1.5)$$

である。上式で、λ_dは減衰系の固有値、$\{\chi_d\}$はそれに対応した固有ベクトルを表している。そして、上２式は$6N_{str}$元の方程式であるが、以降、$6N_{str}$のことを単にNとかくことにする。また、これらの固有値問題を解くにあたって、次の一般固有値問題が威力を発揮する。

$$(\mu[M]+[K])\{\phi\} = \{0\} \qquad (5.1.6)$$

これは、(5.1.4)式においてλ_e^2をμに書き換えただけのものであるが、(5.1.4),(5.1.5)式は振動方程式から導かれるものであるのに対して、上式は数学的な一般固有値問題を表す点において意味が異なる。$[M],[K]$は実数対称行列で「正の定符号マトリクス」であった。このような場合には、上式の固有値μは全て負の実数となることが知られている。

また、固有値μに対応した固有ベクトル$\{\phi\}$は実数となり、固有値および固有ベクトルはN個の対として得られることになる。そこで、r次の固有値をμ_r、固有ベクトルを$\{\phi_r\}$と表すことにする。（ここで記号ϕを使うことは速度ポテンシャルと同じ記号となってしまうのであまり良くないのではあるが、振動の分野では固有ベクトルを記号ϕで表すことが通例となっていることと、これ以降に速度ポテンシャルの話は出てこないことから、あえて記号ϕを使うこととする。）

上式の一般固有値問題ではマトリクスを挟んだ直交性が成立する。r次とs次の固有値と固有ベクトルを用いて上式を表せば、

$$\mu_r [M] \{\phi_r\} + [K] \{\phi_r\} = \{0\} \qquad (5.1.7)_{-1}$$

$$\mu_s [M] \{\phi_s\} + [K] \{\phi_s\} = \{0\} \qquad (5.1.7)_{-2}$$

となる。ここに$r \neq s$とする。そして、上第１式の両辺に左側から$\{\phi_s\}^T$を乗じ、上第２式の両辺に左側から$\{\phi_r\}^T$を乗じれば、

$$\mu_r \{\phi_s\}^T [M] \{\phi_r\} + \{\phi_s\}^T [K] \{\phi_r\} = 0 \qquad (5.1.8)_{-1}$$

$$\mu_s \{\phi_r\}^T [M] \{\phi_s\} + \{\phi_r\}^T [K] \{\phi_s\} = 0 \qquad (5.1.8)_{-2}$$

となる。上第２式の転置をとれば、$[M]$,$[K]$が対称行列であることから

$$\mu_r \{\phi_s\}^T [M] \{\phi_r\} + \{\phi_s\}^T [K] \{\phi_r\} = 0 \qquad (5.1.9)_{-1}$$

$$\mu_s \{\phi_s\}^T [M] \{\phi_r\} + \{\phi_s\}^T [K] \{\phi_r\} = 0 \qquad (5.1.9)_{-2}$$

となる。ここで、上第１式から上第２式を引けば、

$$(\mu_r - \mu_s) \{\phi_s\}^T [M] \{\phi_r\} = 0 \qquad (5.1.10)$$

を得る。一般に$\mu_r \neq \mu_s$であるから、

$$\{\phi_s\}^T [M] \{\phi_r\} = 0 \qquad (5.1.11)_{-1}$$

となる。また、上式を(5.1.9)式に代入すれば、

$$\{\phi_s\}^T [K] \{\phi_r\} = 0 \qquad (5.1.11)_{-2}$$

を得る。上２式は、異なる次数の固有ベクトルに対して$[M]$,$[K]$をマトリクスを挟んだ直交性が成立することを示している。

同じ次数の固有ベクトルに対しては、(5.1.8)式にて$s=r$とおいて、

$$\mu_r \{\phi_r\}^T [M] \{\phi_r\} + \{\phi_r\}^T [K] \{\phi_r\} = 0 \qquad (5.1.12)$$

が成立し、

$$\{\phi_r\}^T [M] \{\phi_r\} = m_r \qquad (5.1.13)_{-1}$$

$$\{\phi_r\}^T [K] \{\phi_r\} = k_r \qquad (5.1.13)_{-2}$$

とおけば、(5.1.12)式より

$$\mu_r m_r + k_r = 0 \qquad (5.1.14)$$

なる関係を得る。

そこで、固有ベクトル$\{\phi\}$を低次から順番に列方向に並べて、行列$[\phi]$を

$$[\phi] = [\ \{\phi_1\}\ \{\phi_2\}\ \cdots\cdots\ \{\phi_N\}\ ] \qquad (5.1.15)$$

のように定義すれば、(5.1.11),(5.1.13)式より、

$$[\phi]^T [M] [\phi] = \ulcorner m \lrcorner \qquad (5.1.16)_{-1}$$

$$[\phi]^T [K] [\phi] = \ulcorner k \lrcorner \qquad (5.1.16)_{-2}$$

なる関係を得る。ここで、$\ulcorner m \lrcorner$および$\ulcorner k \lrcorner$は対角行列であり、そのr行r列目にはそれぞれm_rおよびk_rが位置することとなる。行列$[\phi]$はモードマトリクスと呼ばれており、上式は、固有ベクトルのもつ直交性をひとまとめに表したものとなっている。なお、m_rはモード質量、k_rはモード剛性と呼ばれている。

さて、上第１式において$m_r=1$、即ち対角項が全て1になるように固有ベクトルを正規化しよう。正規化固有ベクトルを$\{\psi\}$とおく。そのためには、r次の固有ベクトルに対して(5.1.13)式より、

$$\{\psi_r\} = \frac{1}{\sqrt{m_r}} \{\phi_r\} \qquad (5.1.17)$$

を満足するように$\{\psi\}$を定義すれば良いことがわかる。そうすれば、(5.1.13),(5.1.14)式より、

$$\{\psi_r\}^T[M]\{\psi_r\} = 1 \qquad (5.1.18)_{-1}$$

$$\{\psi_r\}^T[K]\{\psi_r\} = -\mu_r \qquad (5.1.18)_{-2}$$

を得ることとなる。$\{\psi_r\}$は質量行列$[M]$について正規化したr次の固有ベクトルと呼ばれており、上式は正規化固有ベクトル$\{\psi\}$がもつ直交性を示している。特に、第２式右辺が固有値μ_rで表されていることが重要な特徴である。なお、$\{\psi\}$も実数となる。

(5.1.15)式と同様に、正規化固有ベクトル$\{\psi\}$を低次から順番に列方向に並べて、

$$[\psi] = [\,\{\psi_1\}\ \{\psi_2\}\ \cdots\cdots\ \{\psi_N\}\,] \qquad (5.1.19)$$

を定義すれば、(5.1.16)式と同様に、

$$[\psi]^T[M][\psi] = \ulcorner I \lrcorner \qquad (5.1.20)_{-1}$$

$$[\psi]^T[K][\psi] = \ulcorner \Lambda \lrcorner \qquad (5.1.20)_{-2}$$

と表すことができる。ここで「I」は単位行列を、「Λ」は対角項に$-\mu_r$が並んだ行列を示している。対角項を除いた成分は、当然、ゼロである。

(a) 不減衰系

一般固有値方程式(5.1.6)

$$(\,\mu[M]+[K]\,)\{\phi\} = \{0\} \qquad (5.1.6)_{再記}$$

においてr次固有値μ_rは全て負の実数となることを述べた。そこで、正の実数ω_rを定義して、

$$\mu_r = -\omega_r^2 \qquad (5.1.21)$$

とおく。また、不減衰系の自由振動方程式(5.1.4)

$$(\,\lambda_e^2[M]+[K]\,)\{\chi_e\} = \{0\} \qquad (5.1.4)_{再記}$$

は一般固有値方程式(5.1.6)と一致するものであるから、固有値については

$$\lambda_e^2 = \mu_r = -\omega_r^2 \qquad (r=1,2,\cdots,N) \qquad (5.1.22)$$

が成立する。よって、

$$\lambda_e = \pm i\omega_r \qquad (r=1,2,\cdots,N) \qquad (5.1.23)$$

を得る。正の実数ω_rはN個あることから、上式は、不減衰系の固有値λ_eが$2N$個であることを示している。従って、$2N$個の固有値をλ_{er}およびλ_{er}^*と表すこととして、

$$\lambda_{er} = +i\omega_r \qquad (5.1.24)_{-1}$$

$$\lambda_{er}^* = -i\omega_r \qquad (5.1.24)_{-2}$$

を定義する。

一方、固有ベクトルについては、正規化固有ベクトル$\{\psi\}$を採用することとすれば、

$$\{\chi_e\} = \{\psi_r\} \qquad (r=1,2,\cdots,N) \qquad (5.1.25)$$

が成立する。固有値$\lambda_{er}, \lambda_{er}^*$に対応する固有ベクトルを$\{\chi_{er}\},\{\chi_{er}^*\}$と表すこととすれば、$2N$個ある固有ベクトルのうち$N$個は同じものであるから、

$$\{\chi_{er}\} = \{\psi_r\} \qquad (5.1.26)_{-1}$$

$$\{\chi_{er}^*\} = \{\psi_r\} = \{\psi_r^*\} \qquad (5.1.26)_{-2}$$

となる。$\{\psi\}$は実数であるけれども、共役複素数の記号*を用いて不合理は生じていない。

さて、正規化固有ベクトル$\{\psi\}$はN次元空間で張られた１次独立なものであることから、それらの１次結合によってN次元空間の任意のベクトルを表すことができる。従って、強制振動の式

$$(\lambda^2[M]+[K])\{u\} = \{f\} \tag{5.1.27}$$

の解となる振動変位$\{u\}$を正規化固有ベクトル$\{\psi\}$の１次結合によって表すことができて、

$$\{u\} = \sum_{r=1}^{N} \xi_r\{\psi_r\} = [\psi]\{\xi\} \tag{5.1.28}$$

とおくことができる。上式中辺でξ_rは線形重ね合わせ（１次結合）のための係数であり、問題によっては実数となるのであるが、通常は複素数と認識しておくべきものである。また、最右辺の$\{\xi\}$は係数ξ_rを行方向に並べたものである。

$$\{\xi\}^T = \{\ \xi_1\ \ \xi_2\ \cdots\cdots\ \xi_N\ \} \tag{5.1.29}$$

この$\{\xi\}$を決定することができれば、(5.1.28)式より、任意の周波数$\lambda(=i\omega)$において振動変位$\{u\}$を得ることができるわけである。よって、$\{\xi\}$を決定することにしよう。(5.1.28)式を強制振動の式(5.1.27)に代入して、左側から$[\psi]^T$を乗じれば、

$$(\lambda^2[\psi]^T[M][\psi]+[\psi]^T[K][\psi])\{\xi\} = [\psi]^T\{f\} \tag{5.1.30}$$

を得る。上式左辺において$[\psi]$で挟まれたマトリクス部分は直交性(5.1.20)によって対角行列となって、

$$(\lambda^2\lceil I \rfloor+\lceil \Lambda \rfloor)\{\xi\} = [\psi]^T\{f\} \tag{5.1.31}$$

を得る。ここで、$\lceil \Lambda \rfloor$とは、対角項にω_r^2が並んだ行列である。上式を観察すれば、方程式は非連成化されていることがわかる。従って、$\{\xi\}$を決定することは簡単で、行成分の等式を満足させるだけでよい。行成分の等式は、

$$(\lambda^2+\omega_r^2)\ \xi_r = \{\psi_r\}^T\{f\} \tag{5.1.32}$$

となって、ξ_rに関する１次方程式となっているに過ぎないのである。従って、

$$\xi_r = \frac{\{\psi_r\}^T\{f\}}{\lambda^2+\omega_r^2} \tag{5.1.33}$$

にてξ_rが決定されることとなる。λ^2は実数であるから、上式で励振力ベクトル$\{f\}$が実数ならばξ_rも実数となる。例えば、単点加振で励振力を位相基準とするのであれば、$\{f\}$とξ_rは共に実数となるのである。しかし、多点加振で$\{f\}$がある位相基準に対して何らかの位相差を持ったものであると考えるならば、ξ_rは複素数となる。従って、前述のようにξ_rは複素数であると認識しておく方が良いのである。

上式を(5.1.28)式に代入すれば、振動変位（応答関数）$\{u\}$を得ることができて、

$$\{u\} = \sum_{r=1}^{N} \frac{\{\psi_r\}^T\{f\}}{\lambda^2+\omega_r^2}\{\psi_r\} \tag{5.1.34}$$

となる。

では、応答関数ではなくて、伝達関数としての振動変位についてみてみよう。上式右辺を変形すれば、

$$\{u\} = \sum_{r=1}^{N} \frac{\{\psi_r\}\{\psi_r\}^T}{\lambda^2+\omega_r^2}\{f\} \tag{5.1.35}$$

となる。ここで、右辺分子の$\{\psi_r\}\{\psi_r\}^T$はダイアド積を表しており、N行N列のマトリクスとなるものである。それらの総和が伝達マトリクス$[H_u]$を表すこととなって、

$$[H_u] = \sum_{r=1}^{N} \frac{\{\psi_r\}\{\psi_r\}^T}{\lambda^2+\omega_r^2} \tag{5.1.36}$$

$$\{u\} = [H_u]\{f\} \tag{5.1.37}$$

なる関係を得ることになる。次に、(5.1.34)式において、節点jだけに励振力を与えれば、

$$\{u\} = \sum_{r=1}^{N} \frac{\psi_r(j)^T f(j)}{\lambda^2+\omega_r^2}\{\psi_r\} \tag{5.1.38}$$

となる。ここで、$f(j)$は節点jに作用する6成分の励振力を表し、$\psi_r(j)$はr次の固有ベクトルのうち節点jに関わる6成分を表している。さらに、上式から節点iの応答だけを抜き出せば、

$$u(i) = \sum_{r=1}^{N} \frac{\psi_r(j)^T f(j)}{\lambda^2+\omega_r^2}\psi_r(i) = \sum_{r=1}^{N} \frac{\psi_r(i)\ \psi_r(j)^T}{\lambda^2+\omega_r^2} f(j)$$

----------- (5.1.39)

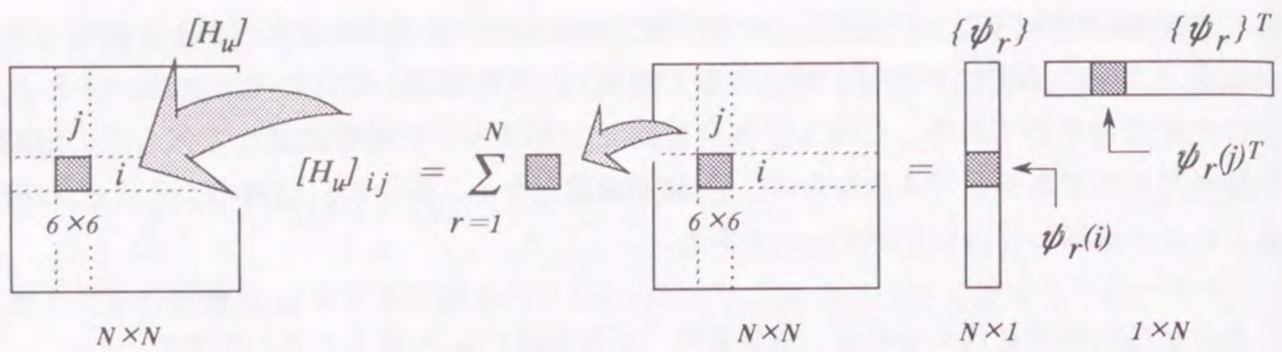


Fig.5.1.1　伝達マトリクスの成分

となる。ここでも最右辺分子の$\psi_r(i)\,\psi_r(j)^T$はダイアド積を表すもので、6行6列のマトリクスとなるものである。そして、この小行列の総和をとったものを$[H_u]_{ij}$とすれば、

$$[H_u]_{ij} = \sum_{r=1}^{N} \frac{\psi_r(i)\ \psi_r(j)^T}{\lambda^2 + \omega_r^2} \tag{5.1.40}$$

$$u(i) = [H_u]_{ij}\ f(j) \tag{5.1.41}$$

と表すことができる。この小行列$[H_u]_{ij}$は、伝達マトリクス$[H_u]$の一部分を構成するものである。その様子をFig.5.1.1に示す。

なお、以上に述べた応答関数および伝達関数は、いずれも不減衰系のものであるから、共振周波数においては分母がゼロとなって$\{u\}$は無限大になる。

さて、(5.1.36)式に示した伝達マトリクス$[H_u]$の分母を少し変形してみよう。(5.1.24)式により、

$$\lambda^2 + \omega_r^2 = (\lambda - \lambda_{er})(\lambda - \lambda_{er}^*) \tag{5.1.42}$$

を得る。そして、

$$\frac{1}{\lambda^2 + \omega_r^2} = \frac{\dfrac{1}{2(i\omega_r)}}{(\lambda - \lambda_{er})} + \frac{\dfrac{1}{2(-i\omega_r)}}{(\lambda - \lambda_{er}^*)} \tag{5.1.43}$$

と変形できるから、

$$[R_r] = \frac{1}{2(i\omega_r)}\ \{\psi_r\}\{\psi_r\}^T \qquad (5.1.44)_{-1}$$

$$[R_r^*] = \frac{1}{2(-i\omega_r)}\ \{\psi_r^*\}\{\psi_r^*\}^T \qquad (5.1.44)_{-2}$$

なるマトリクス$[R_r]$を定義することができる。正規化固有ベクトル$\{\psi\}$は実数であるけれども、共役複素数の記号*を用いて不合理は生じていない。$[R_r]$を用いて伝達マトリクス$[H_u]$を表せば、

$$[H_u] = \sum_{r=1}^{N} \frac{\{\psi_r\}\{\psi_r\}^T}{\lambda^2 + \omega_r^2}$$

$$= \sum_{r=1}^{N} \left(\frac{[R_r]}{(\lambda - \lambda_{er})} + \frac{[R_r^*]}{(\lambda - \lambda_{er}^*)} \right) \tag{5.1.45}$$

となる。上式は、複素変数λの関数である伝達マトリクス$[H_u]$を級数に展開した形式をしており、$[H_u]$は特異点$\lambda_{er}, \lambda_{er}^*$を持つことを示している。そして、分母が１次式で表されていることから、$[R_r]$は複素関数論でいう留数(residue)となっている。このような意味から、$[R_r]$および$[R_r^*]$はレジデュマトリクスと呼ばれている。振動方程式の外力項に単位ステップ関数(Heaviside関数)が作用した際のインデシアル応答を求めるときなどに複素関数論が必要となり、周波数領域で解いた問題をFourier逆変換によって時間領域に変換する際に複素周回積分を行わねばならないことがある。上式の特異点$\lambda_{er}, \lambda_{er}^*$は、まさにそのときの極の位置を示しているのである。

不減衰系の場合の極配置をFig.5.1.2に示す。この場合には特異点$\lambda_{er}, \lambda_{er}^*$が純虚数となるから、１位の極が虚軸上に並ぶこととなる。そして、そのうちのr次の極を図に示している。複素共役型の極配置となるのが特徴である。そして、減衰がある場合には、共に負の実軸方向（$-\sigma$）へ極が移動することとなる。

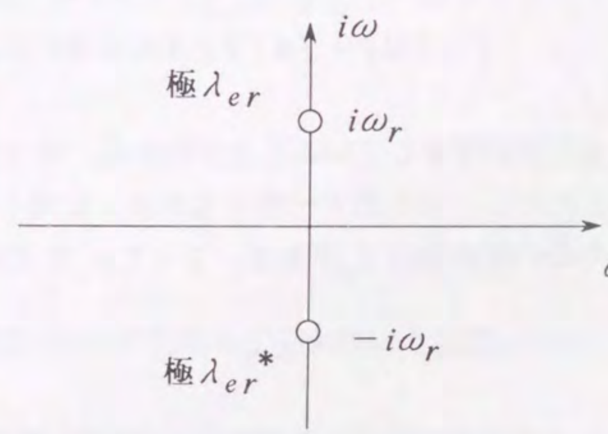


Fig.5.1.2　不減衰系のr次極配置

(b) 比例粘性減衰系

減衰マトリクスは全くわからないのだけれども、減衰を入れない限り応答関数が無限大となる周波数が存在してしまう。そこで、ある仮定をして減衰を方程式に組み込み、無限大とはならない応答関数を得る方法がある。それは、

$$[C] \quad = \quad a[M] + b[K] \tag{5.1.46}$$

なる形で減衰マトリクス$[C]$を仮定する方法である。上式は、質量マトリクス$[M]$と剛性マトリクス$[K]$の線形結合によって$[C]$を表そうとするもので、実数aおよびbはその係数を表している。上式のように表した$[C]$はRayleigh減衰と呼ばれ、その振動系は比例粘性減衰系と呼ばれている。比例粘性減衰系を仮定すれば、実固有値解析との相性が良く、有限要素法による解析結果をそのまま利用できる点で重宝されている。

さて、減衰系の自由振動方程式(5.1.5)

$$(\lambda_d^2[M] + \lambda_d[C] + [K])\{\chi_d\} \quad = \quad \{0\} \qquad (5.1.5)_{再記}$$

に、(5.1.46)式に示した減衰マトリクス$[C]$を代入すれば、

$$(\mu[M] + [K])\{\chi_d\} \quad = \quad \{0\} \tag{5.1.47}$$

$$\mu \quad = \quad \frac{\lambda_d^2 + a\lambda_d}{b\lambda_d + 1} \tag{5.1.48}$$

を得る。ただし、上式(5.1.48)右辺の分母がゼロでないことを仮定している。そして、上式(5.1.47)を観察すれば、一般固有値方程式(5.1.6)

$$(\mu[M] + [K])\{\phi\} \quad = \quad \{0\} \qquad (5.1.6)_{再記}$$

と全く同じ形をしていることがわかる。従って、固有値および固有ベクトルも同じものとなる。ただし、固有値が一致するのはμに対してであって、λ_dに対してではない。求めねばならない固有値はλ_dである。よってλ_dを求めよう。r次固有値μ_rは全て負の実数で、

$$\mu_r \quad = \quad -\omega_r^2 \qquad (5.1.21)_{再記}$$

とおくことができた。上式を(5.1.48)式に代入すれば、固有値λ_dに関する方程式を得ることができて、

$$\lambda_d^2 + (a+b\omega_r^2)\lambda_d + \omega_r^2 \quad = \quad 0 \qquad (r = 1,2,\cdots,N) \tag{5.1.49}$$

となる。上式を解いてλ_dを求めれば、正の実数ω_rに対応したr次の固有値λ_{dr}を得ることができる。上式左辺第２項の()内部は実数であるから、

$$(a+b\omega_r^2) \quad = \quad 2\zeta_r\omega_r \tag{5.1.50}$$

とおけば解きやすい。ここで、ζ_rは実数である。これにより、

$$\lambda_d \quad = \quad -\zeta_r\omega_r \pm i\,\omega_r\sqrt{1-\zeta_r^2} \qquad (r = 1,2,\cdots,N) \tag{5.1.51}$$

を得る。正の実数ω_rはN個あることから、上式は、減衰系の固有値λ_dが$2N$個であることを示している。従って、$2N$個の固有値をλ_{dr}およびλ_{dr}^*と表すこととして、

$$\lambda_{dr} \quad = \quad -\zeta_r\omega_r + i\,\omega_r\sqrt{1-\zeta_r^2} \qquad (5.1.52)_{-1}$$

$$\lambda_{dr}^* \quad = \quad -\zeta_r\omega_r - i\,\omega_r\sqrt{1-\zeta_r^2} \qquad (5.1.52)_{-2}$$

を定義する。以上により減衰系の固有値を決定することができた。なお、ζ_rはr次のモード減衰比と呼ばれている。

一方、固有ベクトルについては、何の問題もなく一般固有値方程式(5.1.6)のものと一致する。よって、正規化固有ベクトル$\{\psi\}$を採用することとすれば、

$$\{\chi_d\} \quad = \quad \{\psi_r\} \qquad (r = 1,2,\cdots,N) \tag{5.1.53}$$

が成立する。固有値λ_{dr}, λ_{dr}^*に対応する固有ベクトルを$\{\chi_{dr}\}$,$\{\chi_{dr}^*\}$と表すこととすれば、$2N$個ある固有ベクトルのうちN個は同じものであるから、

$$\{\chi_{dr}\} \quad = \quad \{\psi_r\} \qquad (5.1.54)_{-1}$$

$$\{\chi_{dr}^*\} \quad = \quad \{\psi_r\} \quad = \quad \{\psi_r^*\} \qquad (5.1.54)_{-2}$$

となる。$\{\psi\}$は実数であるけれども、共役複素数の記号*を用いて不合理は生じていない。

以上のことから、比例粘性減衰系では、固有値は複素数となるのに対して、固有ベクトルは実数となることがわかる。

さて、正規化固有ベクトル$\{\psi\}$はN次元空間で張られた１次独立なものであることから、それらの１次結合によってN次元空間の任意のベクトルを表すことができる。従って、強制振動の式

$$(\lambda^2[M]+\lambda[C]+[K])\{u\} = \{f\} \qquad (5.1.3)_{再記}$$

の解となる振動変位$\{u\}$を正規化固有ベクトル$\{\psi\}$の１次結合によって表すことができて、

$$\{u\} = \sum_{r=1}^{N} \xi_r \{\psi_r\} = [\psi]\{\xi\} \qquad (5.1.28)_{再記}$$

とおくことができる。これは、不減衰系の場合と全く同様である。そして、この$\{\xi\}$を決定することができれば、上式より、任意の周波数$\lambda(=i\omega)$において振動変位$\{u\}$を得ることができるわけである。よって、$\{\xi\}$を決定することにしよう。上２式より、

$$(\lambda^2[\psi]^T[M][\psi]+\lambda[\psi]^T[C][\psi]+[\psi]^T[K][\psi])\{\xi\} = [\psi]^T\{f\}$$

----------- (5.1.55)

を得るが、これもやはり直交性によって対角行列となる。$[M],[K]$を挟んだ直交性については(5.1.20)式に示したので、ここでは、$[C]$を挟んだ直交性についてみておこう。Rayleigh減衰の式(5.1.46)

$$[C] = a[M]+b[K] \qquad (5.1.46)_{再記}$$

において両辺の左側から$[\psi]^T$を、右側から$[\psi]$を乗じて、$[M],[K]$を挟んだ直交性(5.1.20)を利用すれば、

$$[\psi]^T[C][\psi] = a\lceil I \rfloor + b\lceil \Lambda \rfloor \qquad (5.1.56)$$

を得る。上式右辺を観察すれば対角行列の足し算となっているだけであるから、左辺もまた対角行列とならねばならないことがわかる。そして、$\lceil \Lambda \rfloor$とは対角項にω_r^2が並んだ行列であったから、上式の対角項は、

$$\{\psi_r\}^T[C]\{\psi_r\} = a + b\,\omega_r^2 \qquad (5.1.57)_{-1}$$

となる。さらに上式右辺は(5.1.50)式そのものであり、そこで定義されたr次のモード減衰比ζ_rによって、

$$\{\psi_r\}^T[C]\{\psi_r\} = 2\zeta_r\omega_r \qquad (5.1.57)_{-2}$$

と表すことができる。そこで、r行r列目に$2\zeta_r\omega_r$が並んだ行列として対角行列$\lceil \zeta \rfloor$を定義して、比例粘性減衰系における直交性をまとめれば、

$$[\psi]^T[M][\psi] = \lceil I \rfloor \qquad (5.1.20)_{-1\text{-}再記}\ (5.1.58)_{-1}$$

$$[\psi]^T[C][\psi] = \lceil \zeta \rfloor \qquad (5.1.58)_{-2}$$

$$[\psi]^T[K][\psi] = \lceil \Lambda \rfloor \qquad (5.1.20)_{-2\text{-}再記}\ (5.1.58)_{-3}$$

と表すことができる。上式の関係を用いて(5.1.55)式をかきなおせば、

$$(\lambda^2\lceil I \rfloor+\lambda\lceil \zeta \rfloor+\lceil \Lambda \rfloor)\{\xi\} = [\psi]^T\{f\} \qquad (5.1.59)$$

となる。上式を観察すれば、方程式は非連成化されていることがわかる。従って、$\{\xi\}$を決定することは簡単で、行成分の等式を満足させるだけでよい。行成分の等式は、

$$(\lambda^2+2\zeta_r\omega_r\lambda+\omega_r^2)\,\xi_r = \{\psi_r\}^T\{f\} \qquad (5.1.60)$$

となって、ξ_rに関する１次方程式となっているに過ぎないのである。従って、

$$\xi_r = \frac{\{\psi_r\}^T\{f\}}{\lambda^2+2\zeta_r\omega_r\lambda+\omega_r^2} \qquad (5.1.61)$$

にてξ_rが決定されることとなる。上式を(5.1.28)式に代入すれば、振動変位（応答関数）$\{u\}$を得ることができて、

$$\{u\} = \sum_{r=1}^{N} \frac{\{\psi_r\}^T\{f\}}{\lambda^2+2\zeta_r\omega_r\lambda+\omega_r^2}\{\psi_r\} \qquad (5.1.62)$$

となる。上式で、減衰による効果をなくすために$\zeta_r=0$とすれば、(5.1.34)式と一致する。

　では、応答関数ではなくて、伝達関数としての振動変位についてみてみよう。上式右辺を変形すれば、

$$\{u\} = \sum_{r=1}^{N} \frac{\{\psi_r\}\{\psi_r\}^T}{\lambda^2+2\zeta_r\omega_r\lambda+\omega_r^2}\{f\} \qquad (5.1.63)$$

となる。ここで、右辺分子の$\{\psi_r\}\{\psi_r\}^T$はダイアド積を表しており、N行N列のマトリクスとなるものである。それらの総和が伝達マトリクス$[H_u]$を表すこととなって、

$$[H_u] = \sum_{r=1}^{N} \frac{\{\psi_r\}\{\psi_r\}^T}{\lambda^2 + 2\zeta_r\omega_r\lambda + \omega_r^2} \tag{5.1.64}$$

$$\{u\} = [H_u]\{f\} \tag{5.1.65}$$

なる関係を得ることになる。ここで、再び分母を変形しておけば、

$$\lambda^2 + 2\zeta_r\omega_r\lambda + \omega_r^2 = (\lambda - \lambda_{dr})(\lambda - \lambda_{dr}^*) \tag{5.1.66}$$

となり、また、上式右辺が分母にきた場合には

$$\frac{1}{(\lambda - \lambda_{dr})(\lambda - \lambda_{dr}^*)} = \frac{1}{(\lambda_{dr} - \lambda_{dr}^*)(\lambda - \lambda_{dr})} + \frac{1}{(\lambda_{dr}^* - \lambda_{dr})(\lambda - \lambda_{dr}^*)} \tag{5.1.67}$$

なる変形ができる。そして、

$$\sigma_{dr} = \zeta_r\omega_r \tag{5.1.68-1}$$

$$\omega_{dr} = \omega_r\sqrt{1-\zeta_r^2} \tag{5.1.68-2}$$

とおけば、(5.1.52)式に示した固有値は

$$\lambda_{dr} = -\sigma_{dr} + i\omega_{dr} \tag{5.1.69-1}$$

$$\lambda_{dr}^* = -\sigma_{dr} - i\omega_{dr} \tag{5.1.69-2}$$

と表すことができて、(5.1.67)式は

$$\frac{1}{(\lambda - \lambda_{dr})(\lambda - \lambda_{dr}^*)} = \frac{1}{2(i\omega_{dr})(\lambda - \lambda_{dr})} + \frac{1}{2(-i\omega_{dr})(\lambda - \lambda_{dr}^*)} \tag{5.1.70}$$

となる。これを用いてレジデュマトリクス$[R_r]$を表せば、

$$[R_r] = \frac{\{\psi_r\}\{\psi_r\}^T}{\lambda_{dr} - \lambda_{dr}^*} = \frac{\{\psi_r\}\{\psi_r\}^T}{2(i\omega_{dr})} \tag{5.1.71-1}$$

$$[R_r^*] = \frac{\{\psi_r^*\}\{\psi_r^*\}^T}{\lambda_{dr}^* - \lambda_{dr}} = \frac{\{\psi_r^*\}\{\psi_r^*\}^T}{2(-i\omega_{dr})} \tag{5.1.71-2}$$

となる。正規化固有ベクトル$\{\psi\}$は実数であるけれども、共役複素数の記号*を用いて不合理は生じていない。$[R_r]$を用いて伝達マトリクス$[H_u]$を表せば、

$$[H_u] = \sum_{r=1}^{N} \frac{\{\psi_r\}\{\psi_r\}^T}{\lambda^2 + 2\zeta_r\omega_r\lambda + \omega_r^2} = \sum_{r=1}^{N} \left(\frac{[R_r]}{(\lambda - \lambda_{dr})} + \frac{[R_r^*]}{(\lambda - \lambda_{dr}^*)} \right) \tag{5.1.72}$$

となって、(5.1.45)式と同じ形式が得られる。また、上式で、減衰による効果をなくすために$\zeta_r=0$とすれば、(5.1.45)式と一致する。

比例粘性減衰系の場合の極配置をFig.5.1.3に示す。この場合には特異点λ_{dr}, λ_{dr}^*は純虚数ではなく負の実部をもった複素数となるから、１位の極が第２,３象限に分布することとなる。そして、そのうちのr次の極を図に示している。この場合にも複素共役型の極配置となるのが特徴である。

なお、σ_{dr}はr次のモード減衰率と呼ばれるもので減衰に関与し、ω_{dr}は比例粘性減衰系におけるr次の共振周波数を表すものである。

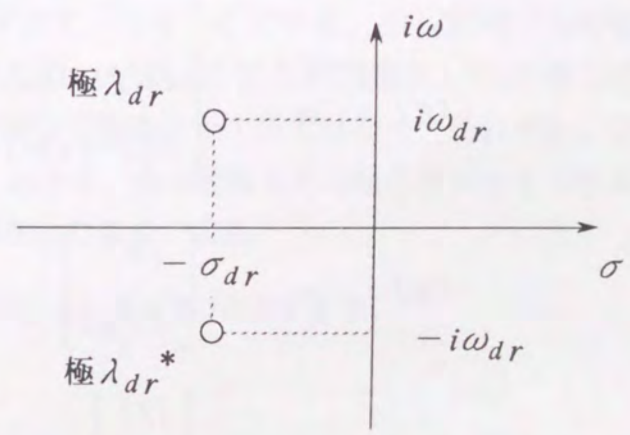


Fig.5.1.3　比例粘性減衰系のr次極配置

(c) 一般粘性減衰系

減衰マトリクス[C]は全くわからないのだけれども、もしも[C]がわかったとして、それがRayleigh減衰(5.1.46)となる保証はない。[C]に関する直交性は、Rayleigh減衰(5.1.46)を仮定したから得られたのであって、これ以外の場合には直交性は成立しない。そこで、[C]の様態に制限を設けない場合の解法も必要となってくる。[C]が実数対称行列となることだけを仮定して、その他には一切の制約を付けないわけである。このような振動系は一般粘性減衰系と呼ばれている。ところが、一般粘性減衰系で解析を行うと固有ベクトルも複素数となるために、実固有値解析との相性が悪く、有限要素法による解析結果も利用しづらくなる。この点においてあまり重宝されていない。しかし、一般粘性減衰系での定式化は比例粘性減衰系を含むものとなるから、確かに一般的な定式化であることに間違いはない。

さて、減衰系の強制振動の式(5.1.3)

$$(\lambda^2[M]+\lambda[C]+[K])\{u\} = \{f\} \qquad (5.1.3)_{再記}$$

に、自明の式

$$(\lambda[M]-\lambda[M])\{u\} = \{0\} \qquad (5.1.73)$$

を組み合わせれば、

$$\left(\lambda\begin{bmatrix}[C] & [M]\\ [M] & [0]\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}[K] & [0]\\ [0] & -[M]\end{bmatrix}\right)\begin{Bmatrix}\{u\}\\ \lambda\{u\}\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}\{f\}\\ \{0\}\end{Bmatrix} \qquad (5.1.74)$$

を得る。そして、

$$[D] = \begin{bmatrix}[C] & [M]\\ [M] & [0]\end{bmatrix} \qquad (5.1.75)_{-1}$$

$$[E] = \begin{bmatrix}[K] & [0]\\ [0] & -[M]\end{bmatrix} \qquad (5.1.75)_{-2}$$

$$\{y\} = \begin{Bmatrix}\{u\}\\ \lambda\{u\}\end{Bmatrix} \qquad (5.1.75)_{-3}$$

$$\{q\} = \begin{Bmatrix}\{f\}\\ \{0\}\end{Bmatrix} \qquad (5.1.75)_{-4}$$

とおくこととすれば、強制振動の式

$$(\lambda[D]+[E])\{y\} = \{q\} \qquad (5.1.76)$$

を解くことになる。[D],[E]は共に実数対称行列となっており、そのサイズは2N行2N列である。このようにおけば、減衰マトリクス[C]に関する直交性を心配する必要が無くなるのである。よって、上式に関する固有値問題を解いた後で、その固有ベクトルを重ねあわせて{y}を得ることを考える。{y}を得ることができれば、{u}を得ることもできる訳である。

そこで、まず、自由振動の式

$$(\lambda_d[D]+[E])\{\eta_d\} = \{0\} \qquad (5.1.77)$$

を定義する。ここで、λ_dおよび$\{\eta_d\}$はそれぞれ固有値および固有ベクトルを表す。上式は、減衰系の自由振動の方程式(5.1.5)

$$(\lambda_d^2[M]+\lambda_d[C]+[K])\{\chi_d\} = \{0\} \qquad (5.1.5)_{再記}$$

から成り立つものであるから、これら２つの固有値問題において、全く同じ固有値を持たねばならない。また、2N個の固有値λ_dおよび固有ベクトル$\{\chi_d\}$は、それぞれ、共役な複素数から構成されることが知られている。ここで、自由振動の式(5.1.77)は、見掛けの上からは一般固有値方程式(5.1.6)

$$(\mu[M]+[K])\{\phi\} = \{0\} \qquad (5.1.6)_{再記}$$

と全く同一である。しかし、上式では[M],[K]が「正の定符号マトリクス」であったから全ての固有値μが負の実数として得られたのであったことに注意せねばならない。自由振動の式(5.1.77)を構成する[D],[E]を観察すれば、その対角項がゼロであったり負であったりしている。「正の定符号マトリクス」では対角項が全て正となることから、[D],[E]は「正の定符号マトリクス」ではないのである。よって、[D],[E]による固有値問題(5.1.77)の場合には、2N個の固有値λ_dおよび固有ベクトル$\{\eta_d\}$が全て実数となる訳ではなく、それぞれ、共役な複素数となることも合点がいくであろう。通常は、負の実数または負の実部をもつ複素数から固有値が構成され、固有ベクトルも複素数となるのである。

さて、自由振動の式(5.1.77)の固有ベクトル$\{\eta_d\}$は、(5.1.75)第３式より、

$$\{\eta_d\} = \begin{Bmatrix}\{\chi_d\}\\ \lambda_d\{\chi_d\}\end{Bmatrix} \qquad (5.1.78)$$

なる形式で得られることとなる。そして、$2N$個の固有値λ_dおよび固有ベクトル$\{\eta_d\}$のうち、r次の固有値をλ_r、固有ベクトルを$\{\Phi_r\}$と表すことにする。これらを用いて、(5.1.7)から(5.1.14)式までと全く同じことを行えば、

$$\{\Phi_s\}^T[D]\{\Phi_r\} = 0 \qquad (5.1.79)_{-1}$$

$$\{\Phi_s\}^T[E]\{\Phi_r\} = 0 \qquad (5.1.79)_{-2}$$

および、

$$\{\Phi_r\}^T[D]\{\Phi_r\} = d_r \qquad (5.1.80)_{-1}$$

$$\{\Phi_r\}^T[E]\{\Phi_r\} = e_r \qquad (5.1.80)_{-2}$$

なる直交関係を得ることができ、さらに

$$\lambda_r d_r + e_r = 0 \qquad (5.1.81)$$

を得ることもできる。ここで、$d_r=1$になるように固有ベクトルを正規化しよう。そのためには、(5.1.80)式より、

$$\{\Psi_r\} = \frac{1}{\sqrt{d_r}}\{\Phi_r\} \qquad (5.1.82)$$

を満足する正規化固有ベクトル$\{\Psi\}$を定義すれば良いことがわかる。そうすれば、(5.1.80),(5.1.81)式より、

$$\{\Psi_r\}^T[D]\{\Psi_r\} = 1 \qquad (5.1.83)_{-1}$$

$$\{\Psi_r\}^T[E]\{\Psi_r\} = -\lambda_r \qquad (5.1.83)_{-2}$$

を得ることとなる。ここで、$\{\Psi_r\}$は$[D]$について正規化したr次の固有ベクトルとなっており、上式は$\{\Psi\}$がもつ直交性を示している。特に、第２式右辺が固有値λ_rで表されていることが重要な特徴である。なお、$\{\Psi\}$も複素数である。

正規化固有ベクトル$\{\Psi\}$を低次から順番に列方向に並べて、

$$[\Psi] = [\ \{\Psi_1\}\ \{\Psi_2\}\ \cdots\cdots\ \{\Psi_{2N}\}\ ] \qquad (5.1.84)$$

なる$2N$行$2N$列の正規化モードマトリクス$[\Psi]$を定義すれば、

$$[\Psi]^T[D][\Psi] = \lceil I \rfloor \qquad (5.1.85)_{-1}$$

$$[\Psi]^T[E][\Psi] = \lceil \Lambda \rfloor \qquad (5.1.85)_{-2}$$

と表すことができる。ここで$\lceil I \rfloor$は単位行列を、$\lceil \Lambda \rfloor$は対角項に$-\lambda_r$が並んだ行列を示している。対角項を除いた成分は、当然、ゼロである。また、そのサイズは共に$2N$行$2N$列である。

さて、正規化固有ベクトル$\{\Psi\}$は$2N$次元空間で張られた１次独立なものであることから、それらの１次結合によって$2N$次元空間の任意のベクトルを表すことができる。従って、強制振動の式(5.1.76)

$$(\lambda[D]+[E])\{y\} = \{q\} \qquad (5.1.76)_{再記}$$

の解となる変位速度混合ベクトル$\{y\}$を正規化固有ベクトル$\{\Psi\}$の１次結合によって表すことができて、

$$\{y\} = \sum_{r=1}^{2N}\xi_r\{\Psi_r\} = [\Psi]\{\xi\} \qquad (5.1.86)$$

とおくことができる。上式中辺でξ_rは線形重ね合わせ（１次結合）のための係数であり、総和項数が$2N$となっていることに注意しておく。また、最右辺の$\{\xi\}$は係数ξ_rを行方向に並べたものである。

$$\{\xi\}^T = \{\ \xi_1\ \xi_2\ \cdots\cdots\ \xi_{2N}\ \} \qquad (5.1.87)$$

この$\{\xi\}$を決定することができれば、(5.1.86)式より、任意の周波数$\lambda(=i\omega)$において変位速度混合ベクトル$\{y\}$を得ることができるわけである。よって、$\{\xi\}$を決定することにしよう。(5.1.86)式を強制振動の式(5.1.76)に代入して、左側から$[\Psi]^T$を乗じれば、

$$(\lambda[\Psi]^T[D][\Psi]+[\Psi]^T[E][\Psi])\{\xi\} = [\Psi]^T\{q\} \qquad (5.1.88)$$

を得る。上式左辺において$[\Psi]$で挟まれたマトリクス部分は直交性(5.1.85)によって対角行列となって、

$$(\lambda\lceil I \rfloor + \lceil \Lambda \rfloor)\{\xi\} = [\Psi]^T\{q\} \qquad (5.1.89)$$

を得る。ここで、「Λ」とは、対角項に$-\lambda_r$が並んだ行列であった。上式を観察すれば、方程式は非連成化されていることがわかる。従って、$\{\xi\}$を決定することは簡単で、行成分の等式を満足させるだけでよい。行成分の等式は、

$$(\lambda - \lambda_r)\,\xi_r = \{\Psi_r\}^T\{q\} \tag{5.1.90}$$

となって、ξ_rに関する１次方程式となっているに過ぎないのである。従って、

$$\xi_r = \frac{\{\Psi_r\}^T\{q\}}{\lambda - \lambda_r} \tag{5.1.91}$$

にてξ_rが決定されることとなる。上式を(5.1.86)式に代入すれば、変位速度混合ベクトル$\{y\}$を得ることができて、

$$\{y\} = \sum_{r=1}^{2N} \frac{\{\Psi_r\}^T\{q\}}{\lambda - \lambda_r}\{\Psi_r\} \tag{5.1.92}$$

となる。$\{y\}$を得ることができたから、振動変位$\{u\}$を得ることにしよう。正規化固有ベクトル$\{\Psi\}$の内部は(5.1.78)式の形式で構成されていることから、そのr次成分についてかけば、

$$\{\Psi_r\} = \begin{Bmatrix} \{\tilde{\psi}_r\} \\ \lambda_r\{\tilde{\psi}_r\} \end{Bmatrix} \tag{5.1.93}$$

となっている。ここで$\{\tilde{\psi}_r\}$は、$2N$行ベクトル$\{\Psi_r\}$の上半分N行だけを示すベクトルである。そして、外力項$\{q\}$は上半分N行だけが$\{f\}$で下半分N行は$\{0\}$であったから、(5.1.92)式右辺分子は

$$\{\Psi_r\}^T\{q\} = \{\tilde{\psi}_r\}^T\{f\} \tag{5.1.94}$$

なるスカラー量となる。そして、$\{y\}$の上半分N行を表す振動変位$\{u\}$に対応するベクトル部分は、(5.1.92)式の一番右にある$\{\Psi_r\}$の上半分N行であるから、

$$\{u\} = \sum_{r=1}^{2N} \frac{\{\tilde{\psi}_r\}^T\{f\}}{\lambda - \lambda_r}\{\tilde{\psi}_r\} \tag{5.1.95}$$

を得ることになる。上式により、振動変位$\{u\}$を決定することができたことになる。

では、応答関数ではなくて、伝達関数としての振動変位についてみてみよう。上式右辺を変形すれば、

$$\{u\} = \sum_{r=1}^{2N} \frac{\{\tilde{\psi}_r\}\{\tilde{\psi}_r\}^T}{\lambda - \lambda_r}\{f\} \tag{5.1.96}$$

となる。ここで、右辺分子の$\{\tilde{\psi}_r\}\{\tilde{\psi}_r\}^T$はダイアド積を表しており、$N$行$N$列のマトリクスとなるものである。それらの総和が伝達マトリクス$[H_u]$を表すこととなって、

$$[H_u] = \sum_{r=1}^{2N} \frac{\{\tilde{\psi}_r\}\{\tilde{\psi}_r\}^T}{\lambda - \lambda_r} \tag{5.1.97}$$

$$\{u\} = [H_u]\{f\} \tag{5.1.98}$$

なる関係を得ることになる。また、これを用いてレジデュマトリクス$[R_r]$を表せば、

$$[R_r] = \{\tilde{\psi}_r\}\{\tilde{\psi}_r\}^T \tag{5.1.99}$$

となる。$[R_r]$を用いて伝達マトリクス$[H_u]$を表せば、

$$[H_u] = \sum_{r=1}^{2N} \frac{\{\tilde{\psi}_r\}\{\tilde{\psi}_r\}^T}{\lambda - \lambda_r} = \sum_{r=1}^{2N} \frac{[R_r]}{\lambda - \lambda_r} \tag{5.1.100}$$

となる。総和項数が$2N$となっていることから、上式は共役複素数を全て含む表現となっていることがわかる。従って、(5.1.72)式と全く同じ内容を示しているのである。その違いは、(5.1.72)式では固有ベクトルが実数であったのに対して、上式ではそれを複素数とすることにある。

また、比例粘性減衰系にて定式化した伝達関数を、上式の一般粘性減衰系の定式化に変換することは容易であるが、その逆は行えない。それは、実数である固有ベクトルを複素数とみなすことはできるのに対して、複素数はあくまで複素数であって決して実数とはみなせないことに起因する。従って、有限要素法における実固有値解析の結果を利用して応答解析を行うにあたって、ひとたび一般粘性減衰系にて応答解析を行えば、これを実数固有ベクトルには変換できなくなることから、二度と実固有値解析には戻せなくなる不便さがある。これに対して比例粘性減衰系にて応答解析を行えば、実数固有ベクトルとして得られているために、いつでも実固有値解析に戻すことができる便利さがある。

比例粘性減衰系にて得られた固有ベクトルを一般粘性減衰系の形式に変換する手法について述べておく。これは、どちらの減衰系でも同じ応答関数となるように変換すればよいだけである。そのためには、比例粘性減衰系のレジデュマトリクス$[R_r]$

$$[R_r] = \frac{\{\psi_r\}\{\psi_r\}^T}{\lambda_{dr}-\lambda_{dr}^*} = \frac{\{\psi_r\}\{\psi_r\}^T}{2(i\omega_{dr})} \qquad (5.1.71)_{\text{-1-再記}}$$

$$[R_r^*] = \frac{\{\psi_r^*\}\{\psi_r^*\}^T}{\lambda_{dr}^*-\lambda_{dr}} = \frac{\{\psi_r^*\}\{\psi_r^*\}^T}{2(-i\omega_{dr})} \qquad (5.1.71)_{\text{-2-再記}}$$

が、一般粘性減衰系のレジデュマトリクス$[R_r]$

$$[R_r] = \{\tilde{\psi}_r\}\{\tilde{\psi}_r\}^T \qquad (5.1.99)_{\text{再記}}$$

に等しくなればよい。これらを比較すれば、

$(r=1,2,\cdots,N)$ に対しては、

$$\lambda_r = \lambda_{dr} \qquad (5.1.101)_{-1}$$

$$\{\tilde{\psi}_r\} = \frac{\{\psi_r\}}{\sqrt{2(i\omega_{dr})}} \qquad (5.1.101)_{-2}$$

$(r=N+1,N+2,\cdots,2N)$ に対しては、

$$\lambda_r = \lambda_{dr}^* \qquad (5.1.102)_{-1}$$

$$\{\tilde{\psi}_r\} = \frac{\{\psi_r\}}{\sqrt{2(-i\omega_{dr})}} \qquad (5.1.102)_{-2}$$

とすればよいことがわかる。

（2）構造変更解析

本論文で述べる「新しい振動レベル推定手法」では有限要素法を利用しないことにその特徴がある。有限要素法を利用せず、減衰マトリクス$[C_w]$も計算することができるわけであるから、比例粘性減衰系を仮定する必要はない。即ち、一般粘性減衰系で解析を行う価値があるわけである。従って、一般粘性減衰系での構造変更解析について述べることとする。

なお、構造変更解析を比例粘性減衰系で行えば、その解析結果をいつでも有限要素法に戻すことができることは前述のとおりである。従って、この場合には、有限要素法を利用せずに応答関数を推定しておきながら、その結果を有限要素法に持ち込んだ解析を続行できることとなる。そのようなメリットが生じるのであるから、実用的には比例粘性減衰系で構造変更解析を行う方が便利であると考えられる。しかし、ここでは基礎的な研究を目的としているから、減衰マトリクス$[C_w]$による影響を充分反映した解析方法を採用するべきである。それが、一般粘性減衰系での構造変更解析なのである。

ある状態の振動系に対して外力が作用すれば、強制振動の式

$$(\lambda[D]+[E])\{y\} = \{q\} \qquad (5.1.76)_{\text{再記}}$$

が成立する。この振動系は一般粘性減衰系にて表されているために、その特性が$[D],[E]$によって特徴付けられている。また、$[D],[E]$は(5.1.75)式に示したように、$[M],[C],[K]$から成るマトリクスである。この振動系に構造の変更もしくは水深の変化等によって、マトリクスに変化が現れたとしよう。その変化量を$[\Delta M],[\Delta C],[\Delta K]$と表すことにする。$[M],[C],[K]$に変化が現れると$[D],[E]$にも変化が生じるから、その変化量を$[\Delta D],[\Delta E]$と表すことにする。そして$[D],[E]$が変化した結果、それぞれ$[D_a],[E_a]$となったとすれば、

$$[D_a] = [D] + [\Delta D] \qquad (5.1.103)_{-1}$$

$$[E_a] = [E] + [\Delta E] \qquad (5.1.103)_{-2}$$

と表すことができる。そして$[D],[E]$が変化した結果、$\{y\}$も変化して$\{y_a\}$となり、強制振動の式は

$$(\lambda[D_a]+[E_a])\{y_a\} = \{q\} \qquad (5.1.104)$$

となる。上式を解けば状態が変化した後の振動特性を知ることができる。しかし、この作業をモード解析を用いて行えば、随分大きなメリットが生じるのである。ただし、ここで示す構造変更解析は、変更前と変更後とで節点数に変化はないものとする。

さて、構造変更前の自由振動の式は

$$(\lambda_d [D] + [E]) \{ \eta_d \} \quad = \quad \{0\} \qquad (5.1.77)_{再記}$$

であった。これに合わせて、構造変更後の自由振動の式

$$(\lambda_a [D_a] + [E_a]) \{ \eta_a \} \quad = \quad \{0\} \qquad (5.1.105)$$

を準備しておく。ここで、λ_aおよび$\{\eta_a\}$はそれぞれ変更後の固有値および固有ベクトルを表す。変更後の固有ベクトル$\{\eta_a\}$を得ることができれば、$\{y_a\}$を得ることができ、さらには変更後の振動変位$\{u_a\}$を得ることもできる。これは、正規化固有ベクトルによって(5.1.96)式に示したとおりである。よって、λ_aおよび$\{\eta_a\}$を求めることにしよう。

変更前の固有ベクトル$\{\eta_d\}$は$2N$次元空間で張られた１次独立なものであることから、それらの１次結合によって$2N$次元空間の任意のベクトルを表すことができる。従って、上式の解となる変更後の固有ベクトル$\{\eta_a\}$を$\{\eta_d\}$の１次結合によって表すこともできる。$\{\eta_d\}$として正規化固有ベクトル$\{\Psi\}$を採用することにすれば、

$$\{ \eta_a \} \quad = \quad \sum_{r=1}^{2N} \xi_r \{\Psi_r\} \quad = \quad [\Psi] \{\xi\} \qquad (5.1.106)$$

とおくことができる。上式中辺でξ_rは線形重ね合わせ（１次結合）のための係数であり、一般粘性減衰系であるために総和項数が$2N$となっている。そして、最右辺にある$\{\xi\}$は係数ξ_rを行方向に並べたものである。

$$\{\xi\}^T \quad = \quad \{ \ \xi_1 \quad \xi_2 \quad \cdots\cdots \quad \xi_{2N} \ \} \qquad (5.1.87)_{再記}$$

また、(5.1.106)の線形重ね合わせでは変更後の固有ベクトル$\{\eta_a\}$のモード次数を問わずに表現しているが、実際には、1から$2N$次モードまでの$\{\eta_a\}$を表わさねばならないから、$\{\xi\}$も$2N$個存在することになる。即ち、係数ベクトル$\{\xi\}$も低次から順番に列方向に並べて、

$$[\xi] \quad = \quad [\ \{\xi\}_1 \quad \{\xi\}_2 \quad \cdots\cdots \quad \{\xi\}_{2N} \ ] \qquad (5.1.107)$$

なる$2N$行$2N$列の係数マトリクス$[\xi]$を定義できるわけである。

構造変更後の自由振動の式(5.1.105)に(5.1.106)式を代入して、左側から$[\Psi]^T$を乗じれば、

$$(\lambda_a [\Psi]^T [D_a] [\Psi] + [\Psi]^T [E_a] [\Psi]) \{\xi\} \quad = \quad \{0\} \qquad (5.1.108)$$

となる。(5.1.103),(5.1.85)式を利用して、上式左辺各項の計算を行えば、

$$\begin{aligned} [\Psi]^T [D_a] [\Psi] &= [\Psi]^T [D] [\Psi] \quad + \quad [\Psi]^T [\Delta D] [\Psi] \\ &= \quad \ulcorner I \lrcorner \quad + \quad [\Psi]^T [\Delta D] [\Psi] \qquad (5.1.109)_{-1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} [\Psi]^T [E_a] [\Psi] &= [\Psi]^T [E] [\Psi] \quad + \quad [\Psi]^T [\Delta E] [\Psi] \\ &= \quad \ulcorner \Lambda \lrcorner \quad + \quad [\Psi]^T [\Delta E] [\Psi] \qquad (5.1.109)_{-2} \end{aligned}$$

を得る。これは非常に重要な結果を与えている。直交性によって変更前のマトリクス$[D]$, $[E]$が消滅し、変わって「I」「Λ」が現れているからである。従って上式は、構造変更解析においては、変更前の固有値と固有ベクトルがわかっておれば、元の構造を表すマトリクス$[D]$,$[E]$は必要なくて、構造変更量$[\Delta D]$,$[\Delta E]$さえ与えれば解析を行えることを示しているのである。もうひつ重要なことがある。それは、右辺第２項の$[\Delta D]$,$[\Delta E]$に関するマトリクス積である。ある節点に質量を付加するとか、ある節点間に剛性や減衰を付加する場合には、$[\Delta D]$,$[\Delta E]$のごくかぎられた部分にだけ構造変更量が入力され、その変更に関わらない節点に関してはゼロが入ることになる。この場合、$[\Psi]^T[\Delta D][\Psi]$や$[\Psi]^T[\Delta E][\Psi]$を計算する際には、固有ベクトル$[\Psi]$のうち変更に関与する節点の成分だけが必要となるのであって、変更に関わらない節点の成分は必要ないのである。以上の２点は、モーダル構造変更解析の特徴となっており、次節において活用される。なお、ひとつの節点には6自由度あるのだけれども、ここでいう節点とは、その節点のある1自由度（方向）のことである。

さて、(5.1.108)式に(5.1.109)式を代入すれば、変更後の固有値λ_aおよび係数$\{\xi\}$に関する固有値方程式

$$\begin{aligned} &[\ \lambda_a (\ulcorner I \lrcorner + [\Psi]^T [\Delta D] [\Psi]) \\ &\quad + (\ulcorner \Lambda \lrcorner + [\Psi]^T [\Delta E] [\Psi]) \ ] \{\xi\} \quad = \quad \{0\} \qquad (5.1.110) \end{aligned}$$

を得る。よって、これを解けばλ_aおよび$\{\xi\}$を得ることができる。そこで、r次の固有値をλ_{ar}、係数を$\{\xi\}_r$とおく。係数$\{\xi\}_r$を(5.1.106)式に代入すれば、r次の固有ベクトル$\{\eta_a\}_r$を得ることができて、

$$\{\eta_a\}_r = [\Psi]\ \{\xi\}_r \qquad (5.1.111)$$

となる。上式の計算を1から$2N$次モードまで順次行えば、$\{\eta_a\}$を全て得ることができる。以上により、構造変更後の固有値λ_aおよび固有ベクトル$\{\eta_a\}$を知ることができる。

変更後の振動変位$\{u_a\}$を得るために、(5.1.96)式を使うことにしよう。この式は正規化固有ベクトルによって表されているから、$\{\eta_a\}$を正規化しておく必要がある。そのためには、(5.1.83)式同様に、

$$\{\eta_a\}_r^T [D_a]\ \{\eta_a\}_r = 1 \qquad (5.1.112)$$

が成立すればよい。ところが、上式左辺に(5.1.111)式を代入すれば、(5.1.109)第１式より

$$\begin{aligned}\{\eta_a\}_r^T [D_a]\ \{\eta_a\}_r &= \{\xi\}_r^T [\Psi]^T [D_a] [\Psi]\ \{\xi\}_r \\ &= \{\xi\}_r^T (\ulcorner I \lrcorner + [\Psi]^T [\Delta D] [\Psi])\ \{\xi\}_r \\ &= d_{ar}\end{aligned} \qquad (5.1.113)$$

なるスカラー量d_{ar}が得られることとなって、固有値解析の結果得られた係数$\{\xi\}$を用いたのでは、必ずしも$\{\eta_a\}$が正規化されているとは限らない。そこで、上式にて一度d_{ar}を得た後に、

$$\{\xi_a\}_r = \frac{1}{\sqrt{d_{ar}}}\ \{\xi\}_r \qquad (5.1.114)_{-1}$$

$$\{\eta_a\}_r = [\Psi]\ \{\xi_a\}_r \qquad (5.1.114)_{-2}$$

として、$\{\eta_a\}$そのものが正規化されるように$\{\xi_a\}$を設定するか、もしくは、

$$\{\Psi_a\}_r = \frac{1}{\sqrt{d_{ar}}}\ \{\eta_a\}_r \qquad (5.1.115)$$

として、正規化固有ベクトル$\{\Psi_a\}$を新たに定義するかせねばならないこととなる。どちらの方法にしろ、正規化固有ベクトルを(5.1.96)式に適用すれば、変更後の振動変位$\{u_a\}$を得ることができる。

５．２　モード解析と境界要素法の結合

（１）採用モード数

有限要素法にて船舶本体をモデル化した場合について述べてきた。この場合には非常に多くの節点が存在するから、その固有値の数も計り知れないほどである。通常、我々が必要とするのはほんの少しの低次モードだけであって、ほとんどの高次モードは不要である。そしてまた、それは振動変位$\{u\}$の式(5.1.96)にもいえることであって、必要とする周波数領域から大きく離れた領域での固有値および固有モードなどほとんど影響してこないのである。

$$\{u\} = \sum_{r=1}^{2N} \frac{\{\tilde{\psi}_r\}\ \{\tilde{\psi}_r\}^T}{\lambda - \lambda_r}\ \{f\} \qquad (5.1.96)_{再記}$$

従って、自由度がNであった有限要素モデルから得られる固有値および固有ベクトルも、低次モードm個分だけを採用して議論を進めることができる。よって、上式に示した振動変位$\{u\}$は、

$$\{u\} = \sum_{r=1}^{2m} \frac{\{\tilde{\psi}_r\}\ \{\tilde{\psi}_r\}^T}{\lambda - \lambda_r}\ \{f\} \qquad (5.2.1)$$

とかくことができる。上式で総和項数が$2m$となっているのは、複素共役項を含むためである。これに伴って、(5.1.84)式の正規化モードマトリクス$[\Psi]$は$2N$行$2m$列となって、

$$\underset{2N\times 2m}{[\Psi]} = [\ \underset{2N\times 1}{\{\Psi_1\}}\ \underset{2N\times 1}{\{\Psi_2\}}\ \cdots\cdots\ \underset{2N\times 1}{\{\Psi_{2m}\}}\ ] \qquad (5.2.2)$$

と表されることになる。従って、構造変更の固有値方程式(5.1.110)は、

$$\begin{aligned}&\Big[\ \lambda_a \big(\underset{2m\times 2m}{\ulcorner I \lrcorner} + \underset{2m\times 2N}{[\Psi]^T} \underset{2N\times 2N}{[\Delta D]} \underset{2N\times 2m}{[\Psi]}\big) \\ &+ \big(\underset{2m\times 2m}{\ulcorner \Lambda \lrcorner} + \underset{2m\times 2N}{[\Psi]^T} \underset{2N\times 2N}{[\Delta E]} \underset{2N\times 2m}{[\Psi]}\big)\ \Big]\ \underset{2m\times 1}{\{\xi\}} = \underset{2m\times 1}{\{0\}}\end{aligned} \qquad (5.2.3)$$

となって、$2m$行$2m$列のサイズに縮小されることになる。即ち、採用モード数を減らすことによって固有値方程式はかなり解きやすくなるのである。そのかわり、１次独立な固有ベクトルが減ることになるから、必ずしも変更後の固有ベクトルを正しく得られるわけではなくなる。しかし、低次モードを扱う限りその影響は小さいものであって、実用上の問題はないことが知られている。

（2）採用節点数

有限要素モデルの段階では節点数を減らすことなどできようはずもないが、固有値と固有ベクトルになった段階で節点数を大幅に減らすことができる。これは、応答点と加振点そして構造変更に関与する点さえ固有ベクトルに含まれていれば良いからである。応答点と加振点については、振動変位$\{u\}$の式(5.2.1)からも明らかであろう。この式において、分子にあるダイアド積の部分は(5.1.99)式のレジデュマトリクス$[R_r]$によって表されるもので、N行N列となっている。

$$[R_r] \quad = \quad \{\tilde{\psi}_r\}\{\tilde{\psi}_r\}^T \qquad (5.1.99)_{再記}$$

しかし、応答点として評価を行わない点は$[R_r]$の行成分に含まれている必要がないのである。さらに、加振点として外力を作用させない点は$[R_r]$の列成分に含まれている必要ないのである。よって、必要のある点を$[R_r]$に含ませておくためには、固有ベクトルの行成分のうち応答点と加振点さえあればよいことがわかる。以上のことから、自由度がNであった有限要素モデルから得られる固有ベクトルも、応答点と加振点のn個分だけの成分を採用して議論を進めることができる。従って、上式に示したレジデュマトリクス$[R_r]$は、

$$\underset{n\times n}{[R_r]} \quad = \quad \underset{n\times 1}{\{\tilde{\psi}_r\}}\,\underset{1\times n}{\{\tilde{\psi}_r\}^T} \qquad (5.2.4)$$

とかくことができる。

一方、構造変更解析を行う為には、質量あるいは剛性や減衰を付加する点が必要である。そこで、応答点と加振点そして構造変更に関与する点の合計をあらためてn個とすれば、(5.2.2)式の正規化モードマトリクス$[\Psi]$は$2n$行$2m$列となって、

$$\underset{2n\times 2m}{[\Psi]} \quad = \quad [\ \underset{2n\times 1}{\{\Psi_1\}}\ \underset{2n\times 1}{\{\Psi_2\}}\ \cdots\cdots\ \underset{2n\times 1}{\{\Psi_{2m}\}}\ ] \qquad (5.2.5)$$

と表されることになる。従って、構造変更の固有値方程式(5.2.3)は、

$$\Big[\ \lambda_a \Big(\underset{2m\times 2m}{\lceil I \rfloor} + \underset{2m\times 2n}{[\Psi]^T}\underset{2n\times 2n}{[\Delta D]}\underset{2n\times 2m}{[\Psi]} \Big)$$

$$+ \Big(\underset{2m\times 2m}{\lceil \Lambda \rfloor} + \underset{2m\times 2n}{[\Psi]^T}\underset{2n\times 2n}{[\Delta E]}\underset{2n\times 2m}{[\Psi]} \Big) \Big]\ \underset{2m\times 1}{\{\xi\}} \quad = \quad \underset{2m\times 1}{\{0\}} \qquad (5.2.6)$$

となる。方程式自体のサイズは$2m$行$2m$列のままで変更はない。

構造変更の固有値方程式(5.2.6)は、構造変更前の固有値と固有ベクトルが既知であることを必須の条件としている。さらに、振動応答(5.2.1)を計算するためにも固有値と固有ベクトルが必要である。よって、固有値と固有ベクトルは非常に重要な情報であることがわかる。そこで、固有値と固有ベクトルは、まとめて、モーダルパラメータと呼ばれている。

構造変更の固有値方程式(5.2.6)に入力するものは構造変更量と構造変更前のモーダルパラメータであり、その出力は構造変更後のモーダルパラメータである。その様子をFig.5.2.1に示す。同図の入力としてのモーダルパラメータでは、必要な範囲での低次モードにしぼることができて、しかも、固有ベクトルは構造変更に必要な成分だけでよい。これは、実験データを曲線適合によってモーダルパラメータに変換すれば、その実験計測点に関する構造変更解析を行えることを意味している。従って、水深変化による付加質量あるいは付加減衰の変化を構造変更量と考えることにすれば、構造変更解析を用いることによって、船舶まわりの境界条件の違いによる振動性能の変化を知ることができることとなる。即ち、岸壁にて艤装中の船舶が深水域にあるときの性能を推定することができるようになる。ただし、それには、ある工夫が必要である。なぜなら、付加質量マトリクスおよび付加減衰マトリクスは、船体表面接水部分の節点数に支配されるサイズなのであって、実験計測点に関するサイズではないからである。

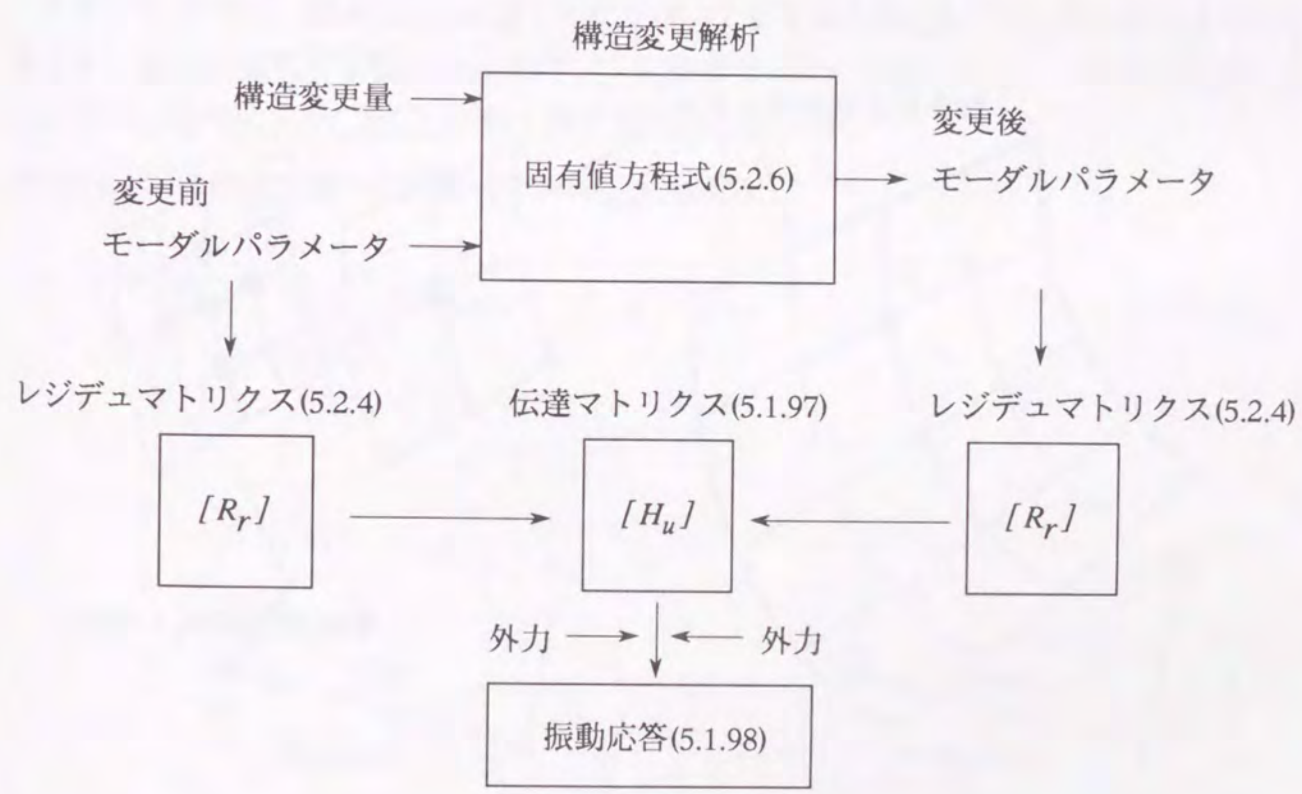


Fig.5.2.1　振動解析のながれ

（3）観測点と縮小マトリクス

連成振動方程式(5.1.2)

$$[\ \lambda^2([M_s]+[M_w])+\lambda([C_s]+[C_w])+[K_s]\ ]\{u\}=\{f\} \qquad (5.1.2)_{再記}$$

は、境界要素法(BEM)から得られる$[M_w]$,$[C_w]$を有限要素法(FEM)から得られる$[M_s]$,($[C_s]$)に組み込んだ式であって、これを計算すれば流体と構造の連成振動の解析ができるのであった。ところが、もしもFEMメッシュとBEMメッシュとの節点が異なる場合には、剛体結合によって$[M_w]$,$[C_w]$の節点を$[M_s]$,$[C_s]$の節点に変換する必要があり、この変換作業を終えねば上式を得ることはできないのである。その作業について述べよう。船体表面FEMメッシュとBEMメッシュとが異なる場合の節点関係をFig.5.2.2に示す。ここで点GはFEM節点で、点AはBEM節点である。そして、BEMメッシュの方が細かくて、点G近傍のN_A個の点Aをこれに剛体結合する場合を示している。なお、FEMメッシュおよびBEMメッシュはともに、船体表面接水部分を表すものであるから、外板の板厚を考慮しない場合あるいは外板の流体側面を曲面の基準面とした場合には、同じ曲面を近似表現したものとなる。

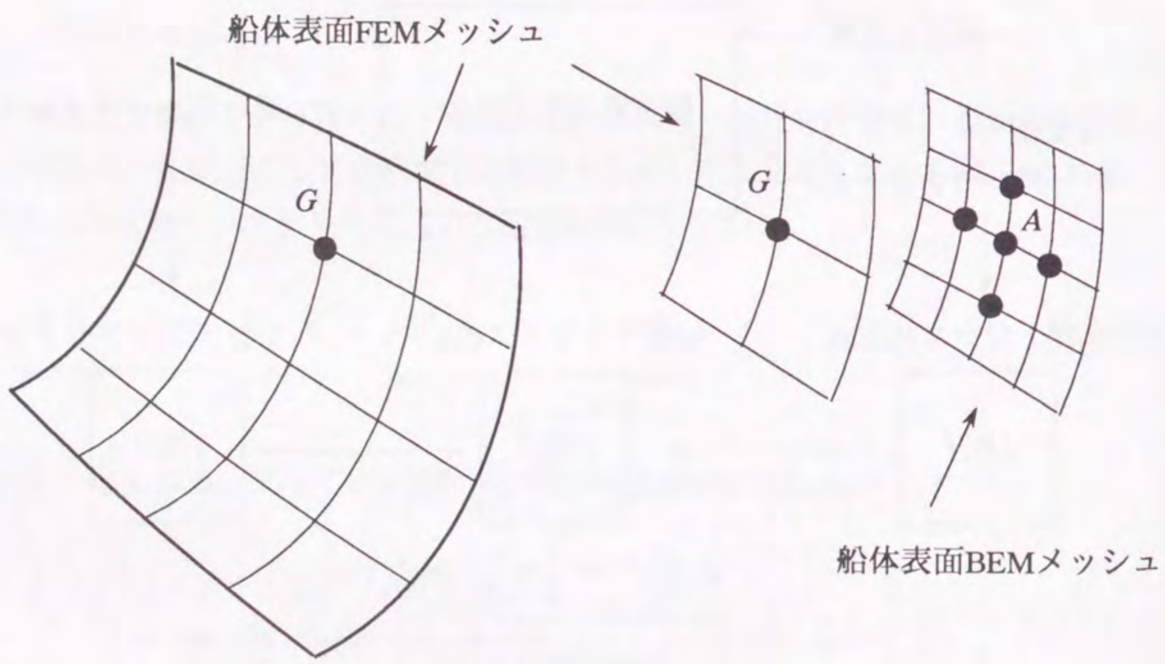


Fig.5.2.2　船体表面におけるFEMメッシュとBEMメッシュとの節点関係

節点を剛体結合する考え方については(3.7.11)式にて述べた。そこでは、点Gのことを基準節点と定義した。ここでもその考え方をそのまま利用することができて、

$$\underset{3N_A\times 1}{\{u_A\}}=\underset{3N_A\times 6}{[H_A]}\ \underset{6\times 1}{u_G} \qquad (3.7.11)_{再記}$$

と表すことができる。上式で$\{u_A\}$は点Aの変位u_AをN_A個まとめて表したもので、u_Gは点Gの変位、$[H_A]$は(3.7.10)式の小行列$[G_d]$からなるマトリクスであった。上式によって、BEM節点の変位がFEM節点の変位によって表されたことになるのである。さらに、その他のBEM節点もFEM節点に代表させるためにN_G個の基準節点を定義すれば、補間マトリクス$[H]$を用いて、

$$\underset{3N_{max}\times 1}{\{u_w\}}=\underset{3N_{max}\times 6N_G}{[H]}\ \underset{6N_G\times 1}{\{u_G\}} \qquad (3.7.12)_{再記}$$

となって、BEM節点の全節点変位$\{u_w\}$は、基準節点の変位$\{u_G\}$によって表されるのであった。ここでN_{max}はBEM節点の全節点数であった。

さて、ここでは、BEM節点Aに働く力f_Aを用いて基準節点Gに働く力f_Gを表現することを考える。変位を表現する際にはu_Gを用いてu_Aを表現したのに較べると、その反対を行うことになる。力ベクトルf_A及びf_Gが働く様子をFig.5.2.3に示す。

点Gから点Aに向けて取った距離ベクトルr_{GA}の成分を

$$r_{GA}{}^T=\{\ r_{x(G,A)}\ \ r_{y(G,A)}\ \ r_{z(G,A)}\ \} \qquad (3.7.5)_{再記}$$

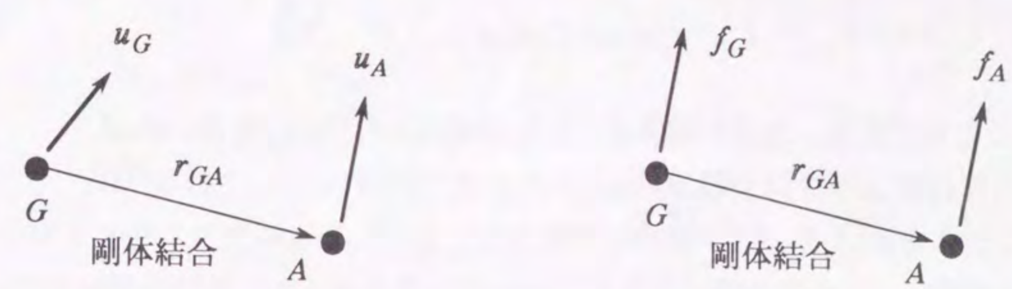


Fig.5.2.3　剛体結合における節点変位と節点力の関係

とおき、力ベクトルf_G及びf_Aの成分をそれぞれ、

$$f_G{}^T \quad = \quad \{\, f_{x(G)} \quad f_{y(G)} \quad f_{z(G)} \quad f_{Rx(G)} \quad f_{Ry(G)} \quad f_{Rz(G)} \,\} \qquad (5.2.7)$$

$$f_A{}^T \quad = \quad \{\, f_{x(A)} \quad f_{y(A)} \quad f_{z(A)} \quad f_{Rx(A)} \quad f_{Ry(A)} \quad f_{Rz(A)} \,\} \qquad (5.2.8)$$

とすれば、力学的考察から

$$\left\{\begin{matrix} f_{x(G)} \\ f_{y(G)} \\ f_{z(G)} \\ f_{Rx(G)} \\ f_{Ry(G)} \\ f_{Rz(G)} \end{matrix}\right\} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -r_{z(G,A)} & r_{y(G,A)} & 1 & 0 & 0 \\ r_{z(G,A)} & 0 & -r_{x(G,A)} & 0 & 1 & 0 \\ -r_{y(G,A)} & r_{x(G,A)} & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \left\{\begin{matrix} f_{x(A)} \\ f_{y(A)} \\ f_{z(A)} \\ f_{Rx(A)} \\ f_{Ry(A)} \\ f_{Rz(A)} \end{matrix}\right\}$$

---------------- (5.2.9)

なる関係が得られる。上式が剛体結合の関係であり、r_{GA}及びf_Aが既知であるならば、点Gに働く力f_Gも既知となることを示している。また、流体領域の解析から得られる点Aに働く力は並進方向だけなのであって回転方向は存在しないから、マトリクスの左半分だけを考慮して、

$$\left\{\begin{matrix} f_{x(G)} \\ f_{y(G)} \\ f_{z(G)} \\ f_{Rx(G)} \\ f_{Ry(G)} \\ f_{Rz(G)} \end{matrix}\right\} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -r_{z(G,A)} & r_{y(G,A)} \\ r_{z(G,A)} & 0 & -r_{x(G,A)} \\ -r_{y(G,A)} & r_{x(G,A)} & 0 \end{bmatrix} \left\{\begin{matrix} f_{x(A)} \\ f_{y(A)} \\ f_{z(A)} \end{matrix}\right\} \qquad (5.2.10)$$

と表すこともできる。上式の関係は、(3.7.10)式の小行列$[G_d]$を用いれば、

$$\underset{6\times 1}{f_G} \quad = \quad \underset{6\times 3}{[\,G_d\,]^T} \; \underset{3\times 1}{f_A} \qquad (5.2.11)$$

となる。上式の関係から、BEM節点Aに働く力f_Aを与えることによって基準節点Gに働く力f_Gを知ることができるわけである。

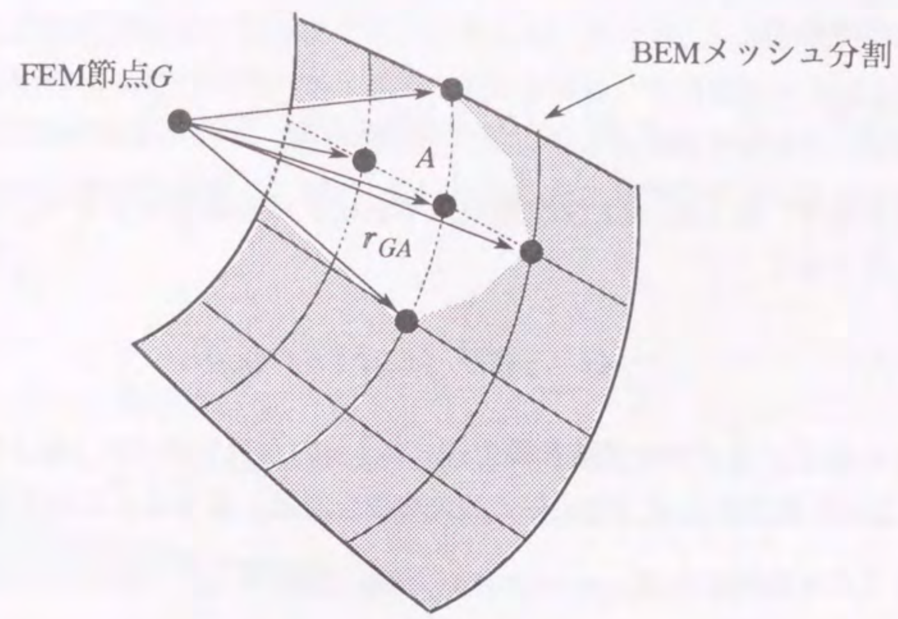


Fig.5.2.4　BEM節点AとFEM節点Gとの剛体結合の様子

では、N_A個の点Aと基準節点Gとを剛体結合した様子をFig.5.2.4に示す。点Aに働く力f_AをN_A個まとめて表したものを$\{f_A\}$とおけば、基準節点Gに働く力f_Gは上式の重ね合わせとなるから、

$$\underset{6\times 1}{f_G} \quad = \quad \underset{6\times 3N_A}{[\,H_A\,]^T} \; \underset{3N_A\times 1}{\{f_A\}} \qquad (5.2.12)$$

と表すことができる。上式で、$[H_A]^T$は(3.7.11)式の$[H_A]$の転置行列を示しており、小行列$[G_d]^T$からなるマトリクスである。さらに、その他のBEM節点もFEM節点に代表させるためにN_G個の基準節点を定義すれば、補間マトリクス$[H]$を用いて、

$$\underset{6N_G\times 1}{\{f_G\}} \quad = \quad \underset{6N_G\times 3N_{max}}{[\,H\,]^T} \; \underset{3N_{max}\times 1}{\{f_w\}} \qquad (5.2.13)$$

となる。上式で、$[H]^T$は(3.7.12)式の補間マトリクス$[H]$の転置行列を示しており、小行列$[G_d]^T$からなるマトリクスである。また、$\{f_G\}$は基準節点に働く力f_GをN_G個まとめて表したもので、$\{f_w\}$はBEM節点に働く力f_Aを全節点についてまとめたものである。$\{f_w\}$は流体力を表す等価節点力そのものである。上式より、基準節点に働く力$\{f_G\}$は、BEM節点に働く力$\{f_w\}$によって表されることがわかる。

従って、上式右辺に(3.6.22),(3.7.12)式を代入すれば、付加質量マトリクスをFEM節点用に変換することができて、

$$\{f_G\} \quad = \quad -\lambda^2 \quad [H]^T\ [M_w]\ [H]\ \{u_G\} \qquad (5.2.14)$$

を得ることとなり、(4.3.51),(3.7.12)式を代入すれば、付加減衰マトリクスをFEM節点用に変換することができて、

$$\{f_G\} \quad = \quad -\lambda^2 \quad [H]^T\ [C_w]\ [H]\ \{u_G\} \qquad (5.2.15)$$

を得ることになる。上２式を連成振動方程式(5.1.1)の右辺外力項$\{f_w\}$および$\{f_{wc}\}$として与えれば、(5.1.2)式に相当する式（FEM節点用に変換した式）を得ることができるのである。

さて、上２式を観察すれば、

$$\underset{6N_G\times 6N_G}{[M_G]} \quad = \quad \underset{6N_G\times 3N_{max}}{[H]^T}\ \underset{3N_{max}\times 3N_{max}}{[M_w]}\ \underset{3N_{max}\times 6N_G}{[H]} \qquad (5.2.16)$$

$$\underset{6N_G\times 6N_G}{[C_G]} \quad = \quad \underset{6N_G\times 3N_{max}}{[H]^T}\ \underset{3N_{max}\times 3N_{max}}{[C_w]}\ \underset{3N_{max}\times 6N_G}{[H]} \qquad (5.2.17)$$

なるマトリクス$[M_G]$および$[C_G]$を定義することができる。ここで、$6N_G$方が$3N_{max}$よりも小さければ、$[M_w]$,$[C_w]$はFEM節点まわりに縮小されたことになる。従って、これが確実に縮小されるような場合の$[M_G]$,$[C_G]$のことを縮小マトリクスと呼ぶことにする。また、縮小にともなう流体運動への影響はFEM板要素のごく近傍に限られたものとなるから、船底外板あるいは船側外板の局部振動に対する流体運動もほぼ正確に扱うことができるものと考えられる。よって、局部振動ではなくて船舶全体でみた場合には、縮小による影響は皆無であろうと考えることができる。

では、FEM節点ではなくて、実験計測点まわりに縮小すればどうなるのであろうか。この場合も実験計測点が充分多くて、振動の様子を把握できるのであれば、縮小による流体運動への影響は非常に小さなものとなるであろう。そして、実験計測点を大骨の上に選んでおけば流体力はそこに作用することとなるから、流体力が構造全体に及ぼす影響についても正しく評価を行うことができるものと考えられる。船底外板あるいは船側外板の局部振動に対する影響を正確に知りたい場合には、その部位の実験計測点を密にとればよいのである。このように考えてくると、境界要素法にて得られた$[M_w]$,$[C_w]$を実験計測点まわりに縮小して、モード解析と結合した解析を行うことが可能であることがわかる。そして、実験計測点は、振動の様子を表す代表点となり、流体運動をモニタリングする基準点となる。以上のことから、実験計測点のことを観測点[55] *(著者,1995)*と呼ぶことにする。

船舶の振動問題では、船底外板あるいは船側外板などの局部振動よりも、まずは、船舶全体としての振動性能を把握する方が重要である。そこで、この新しい解析方法の妥当性を検証するために、回転楕円体模型の節振動（４節以下）を対象とする解析と実験を行った。$L/B=11$の回転楕円体模型を用いて、観測点数と流体運動との関係を調査した結果、対象範囲とする４節以下の低次振動に対してはFig.5.2.5に示した21観測点でよいことがわかっている[56] *(著者,1996)*。

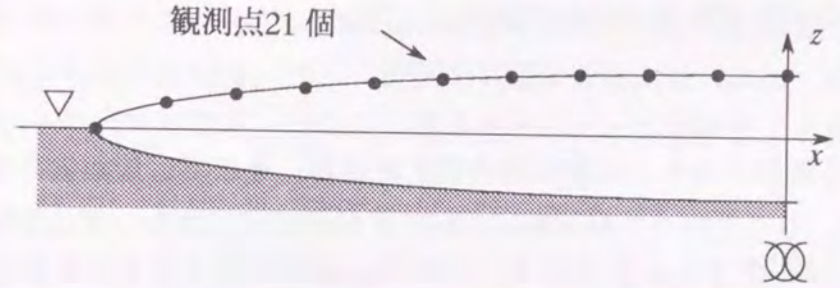


Fig.5.2.5　観測点配置

よって、同図の配置を採用することとして、回転楕円体表面を表すBEMメッシュの節点を、21観測点のうちで最も近い点に剛体結合して補間マトリクス$[H]$を構成し、付加質量マトリクス$[M_w]$及び付加減衰マトリクス$[C_w]$を観測点まわりに縮小する。そして、$[M_w]$,$[C_w]$を観測点まわりに縮小したものを$[M_o]$,$[C_o]$とおく。なお、同図の観測点が喫水線よりも上にあるのは、振動計測の都合からである。

また、Fig.5.2.6のように、ひとつの観測点と結合されるBEM節点は比較的多いが、それでも、節振動を扱うことから良い近似が可能となるのである。

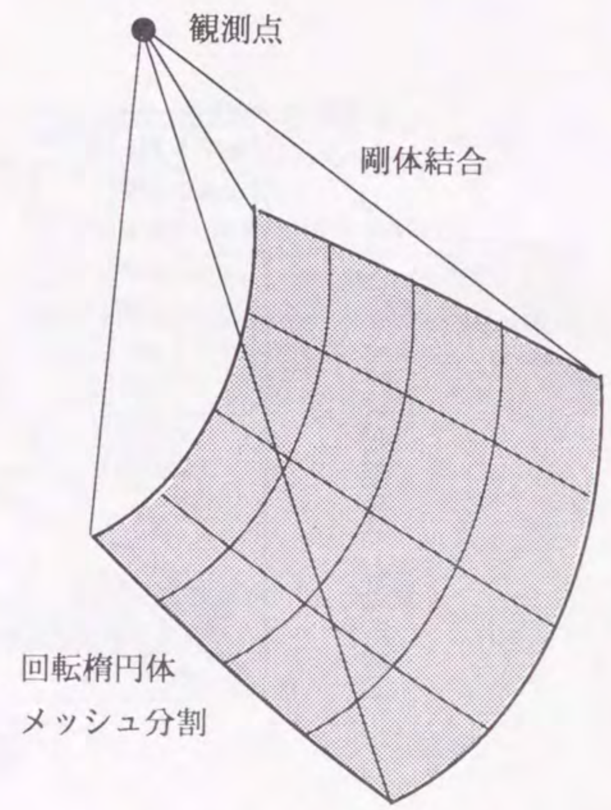


Fig.5.2.6　観測点とBEM節点との結合

５．３　振動レベルの推定

岸壁に係留されている船舶の伝達関数を計測し、これに曲線適合を施して係留船舶のモーダルパラメータを抽出する。このモーダルパラメータと縮小マトリクス$[M_o]$,$[C_o]$とを用いて構造変更解析を行い、船舶が深水域にあるときのモーダルパラメータを求める。これにより、深水域航行中の振動レベルを知ることができる。ここでは、その一連のながれを模型実験にて確認することを目的とする。

新しい手法による効果及びその問題点の分析を行うためには、できるだけ簡単な境界条件を設定する方が良い。それ故に、ここでも岸壁による影響がでないように配慮し、無限水深と有限水深の場合だけを取り扱うこととする。

（１）計測方法

Fig.4.5.3において散逸エネルギの振幅依存性をみたが、そこでは振幅依存性がほとんどないことがわかった。ここで行う加振試験についても振幅依存性がない変位領域であることが望ましいから、加振力による影響を調べておく。Fig.4.5.3の近似直線の傾きを利用すれば、各々の水深において一定加振力で振動させた場合の共振振幅を近似的に得ることができる。この振幅を用いてそれぞれの水深における散逸エネルギを計算すれば、加振力によって散逸エネルギがどのように変化するかを知ることができる。２節振動において*0.3(N)*,*0.6(N)*,*0.9(N)*の３種類の加振力について計算し、その結果をFig.5.3.1にまとめた。

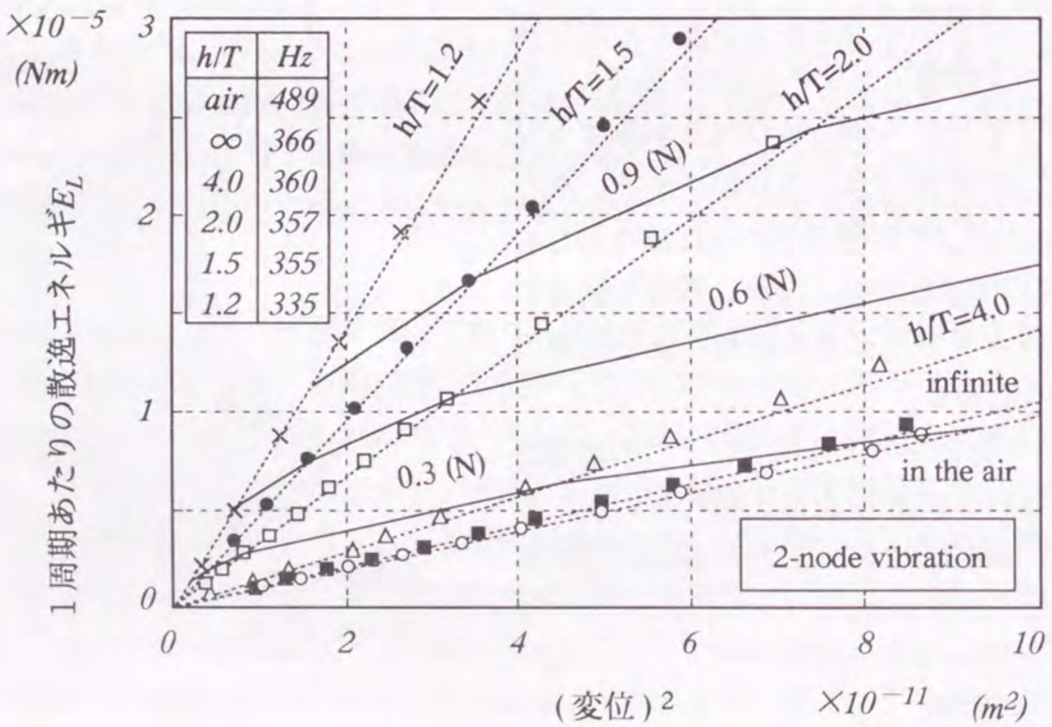


Fig.5.3.1　２節上下振動における加振力と散逸エネルギの関係

３つの曲線ともに、散逸エネルギの振幅依存性を無視できる領域にあることがわかる。なかでも*0.3(N)*で加振する場合には変位領域が全て図中に含まれており、振幅依存性を完全に無視できることがわかる。従って、この場合には散逸エネルギの線形性が保証されているので、$[C_w]$を用いた周波数応答解析を行っても良いことが導かれる。よって、以降の実験では*0.3(N)*の加振力を採用する。なお高次振動の変位は、通常２節振動よりも格段に小さいため、加振力による影響はさらに小さくなるものと考えてFig.5.3.1の様な検証は行っていない。ここでもう一度0.3(N)加振について観察すれば、深水域の振動変位は空中の９割程度、浅水域（*h/T=1.5*）では空中の２割程度となることがわかる。従って、深水域で従来説により流体の減衰を無視する場合には、上記９割による影響すなわち振動変位の１割に相当する変化量を考慮しないこととなる。そして加速度レベルでみた場合には、共振周波数の違いから、その差はさらに大きくなる。よって、深水域といえども流体による減衰を考慮するべきである。

周波数応答解析に用いる伝達関数は、多点応答を収録することが望ましい。そこで、Fig.4.5.2と同様の計測設備にて多点応答を計測した。その際、Fig.5.3.2のように、加速度ピックの重さによる影響を排除するために計測点全てに相当する重りを載せた。従って、散逸エネルギを計測したときのデータと今回の多点応答計測データとを較べた場合ピーク周波数に多少の違いが生じているが、周波数応答解析をより正確に行うために配慮した結果である。

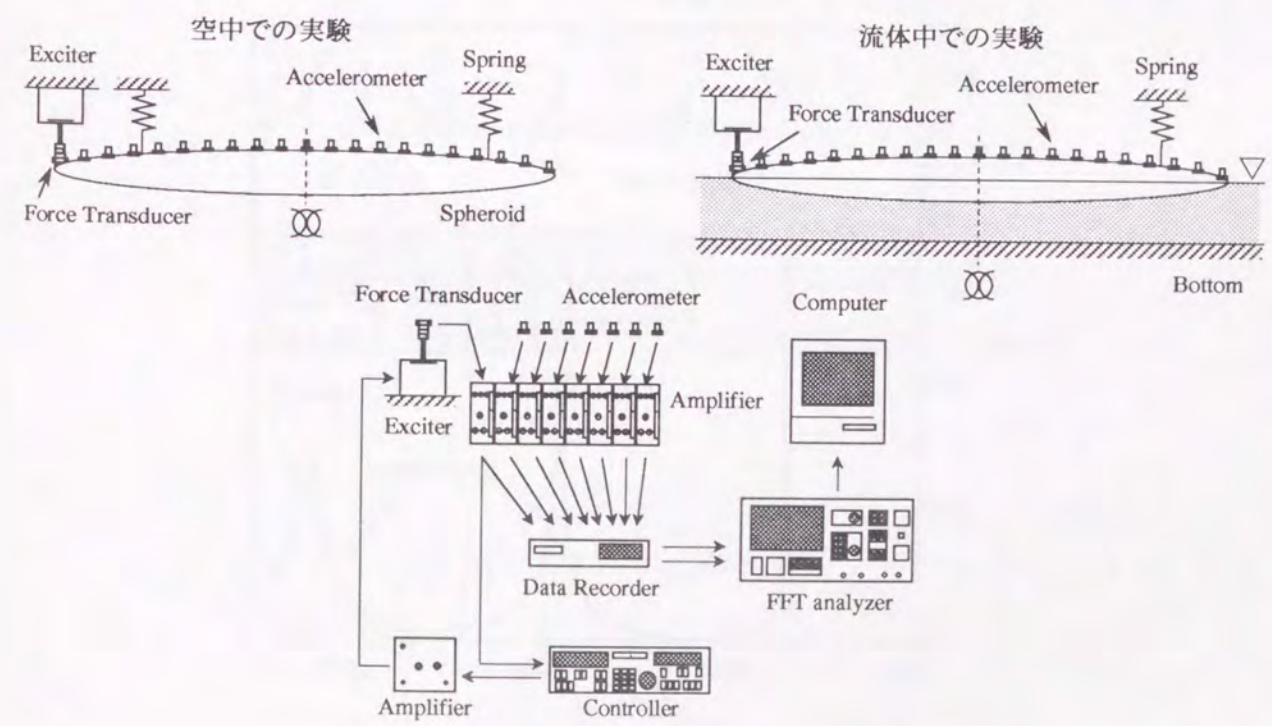


Fig.5.3.2　伝達関数計測方法

（2）実験検証

仮定した振動モードを用いてTable4.5.4のようにβ_wを決定した。実際の振動モードは必ずしもこれと一致する訳ではないので、決定されたβ_wに近い値を用いて振動レベルを推定する。振動モードごとにβ_wを設定すれば、振動レベルの推定はほぼ完璧なものになるであろうが、これでは計算が煩雑になるので水深の違いによってのみβ_wを与える。なお、$[C_w]$においてβ_wは比例定数であったから、$\beta_w=1$とした計算にて一度$[C_w]$を求めておけば、これにβ_wを乗じることによって、与えたβ_wでの$[C_w]$を即座に得ることができる。また$[C_w]$は周波数の関数でもあるから、まず周波数帯域を設定して、各ピーク周波数における$[C_0]$を用いた構造変更解析によって伝達関数を得た後、これを周波数帯域ごとにつなぎ合わせて周波数応答曲線とする。そして、全ての実験に対して、Fig.5.3.1にて線形性が保証されている*0.3 (N)*の加振力を採用し、回転ベクトルを計測していないために上下方向並進成分のみを用いた構造変更解析を行う。

以下、実験計測点まわりに縮小したマトリクス$[M_0],[C_0]$において、無限水深あるいは有限水深でのマトリクスに、それぞれ右上添字$^{\infty}$あるいは^{h}を付けて表すこととする。

(a) 空中の実験データから深水域の性能を推定

空中における伝達関数を計測し、曲線適合によってモーダルパラメータを抽出した。計測結果と適合結果との比較をFig.5.3.3に示す。

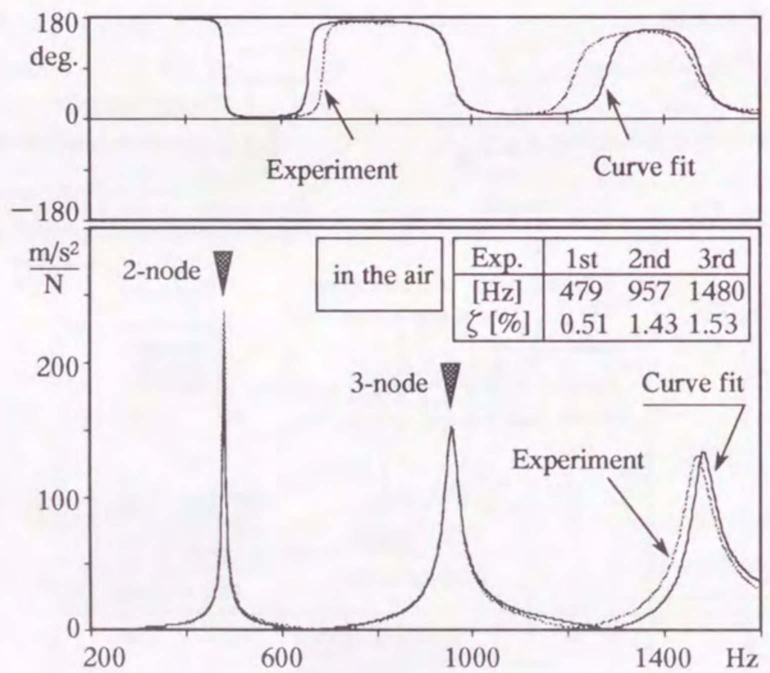


Fig.5.3.3　実験値とその曲線適合結果の比較
（空中実験加振点応答）

ここで得られたモーダルパラメータを用いて深水域の振動性能を推定した。構造変更解析に用いたマトリクスは$[M_0^{\infty}]$と$[C_0^{\infty}]$で、$[C_w^{\infty}]$を計算する際にはTable4.5.4の結果をそのまま利用して$\beta_w=1$とした。 推定結果と深水域実験結果の比較をFig.5.3.4に示す。 なお、ζはモード減衰比を表す。２節振動（1st）について観察すると、深水域実験結果の振動加速度は空中実験の６割程度に小さくなっているが、計算においてもこれをほぼ再現できていることがわかる。３節振動（2nd）においても良く推定できているが、４節振動（3rd）ではそれほどでもない。なお、高次振動ほどピーク周波数のずれが大きくなっているが、これは回転ベクトルを無視したこと及び採用モード数が３個と少ないための影響と考えられる。

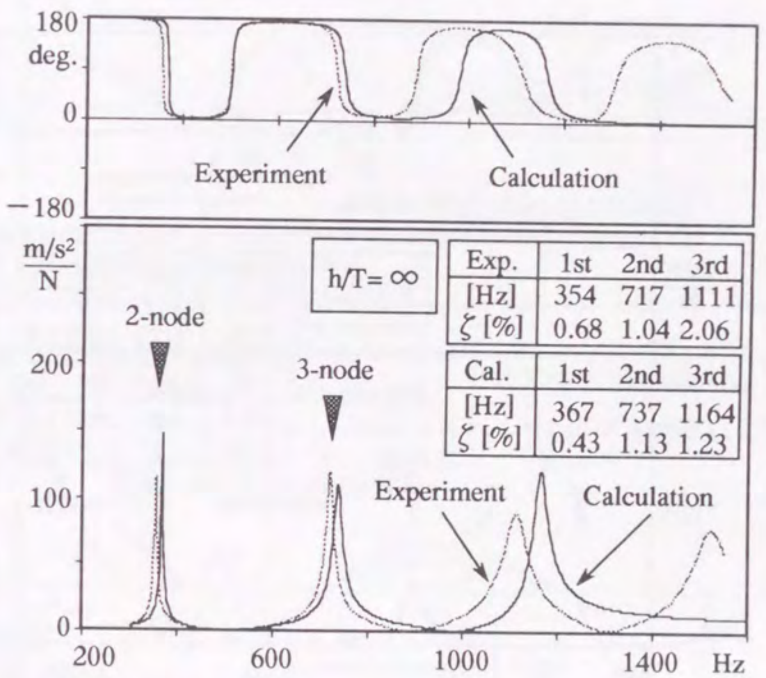


Fig.5.3.4　推定結果と実験値との比較（加振点応答）
（空中実験データから深水域振動性能を推定）

(b) 空中の実験データから浅水域の性能を推定

空中での実験で得られたモーダルパラメータを用いて、今度は浅水域（$h/T=1.5$）の振動性能を推定した。構造変更解析に用いたマトリクスは$[M_o^h]$と$[C_o^h]$で、$[C_w^h]$を計算する際には$\beta_w=35$とした。推定結果と浅水域実験結果の比較をFig.5.3.5に示す。２節振動に注目すると、浅水域実験結果の振動加速度は空中実験の２割以下に小さくなっているが、計算においてもこれを再現できていてピークレベルも良く一致していることがわかる。図中の全域にわたって振動レベルは良く一致しているが、ピーク周波数は多少ずれており前記同様の影響と考えられる。

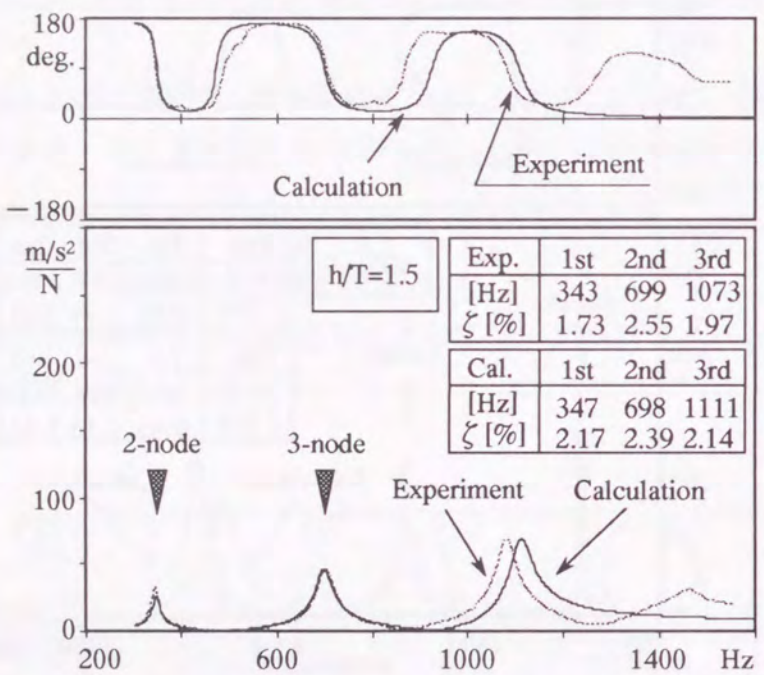


Fig.5.3.5　推定結果と実験値との比較（加振点応答）
（空中実験データから浅水域振動性能を推定）

次に、加振点以外の応答点についても比較するために、ピーク周波数における振動モードを変位に関する伝達関数の形式にてFig.5.3.6に示した。ただし、位相基準は加振点応答である。２節振動について観察すれば、空中実験結果の振動変位は浅水域のそれよりも相当大きいにもかかわらず、これを用いて推定した振動モードは浅水域実験結果と極めて近いことがわかる。また空中と浅水域の実験データそのものを較べると、高次モードになるにつれて振動変位の差は小さくなる特徴があることがわかる。そして、これも推定計算にて再現できている。従って、ほぼ完全に振動性能を推定できているといえる。

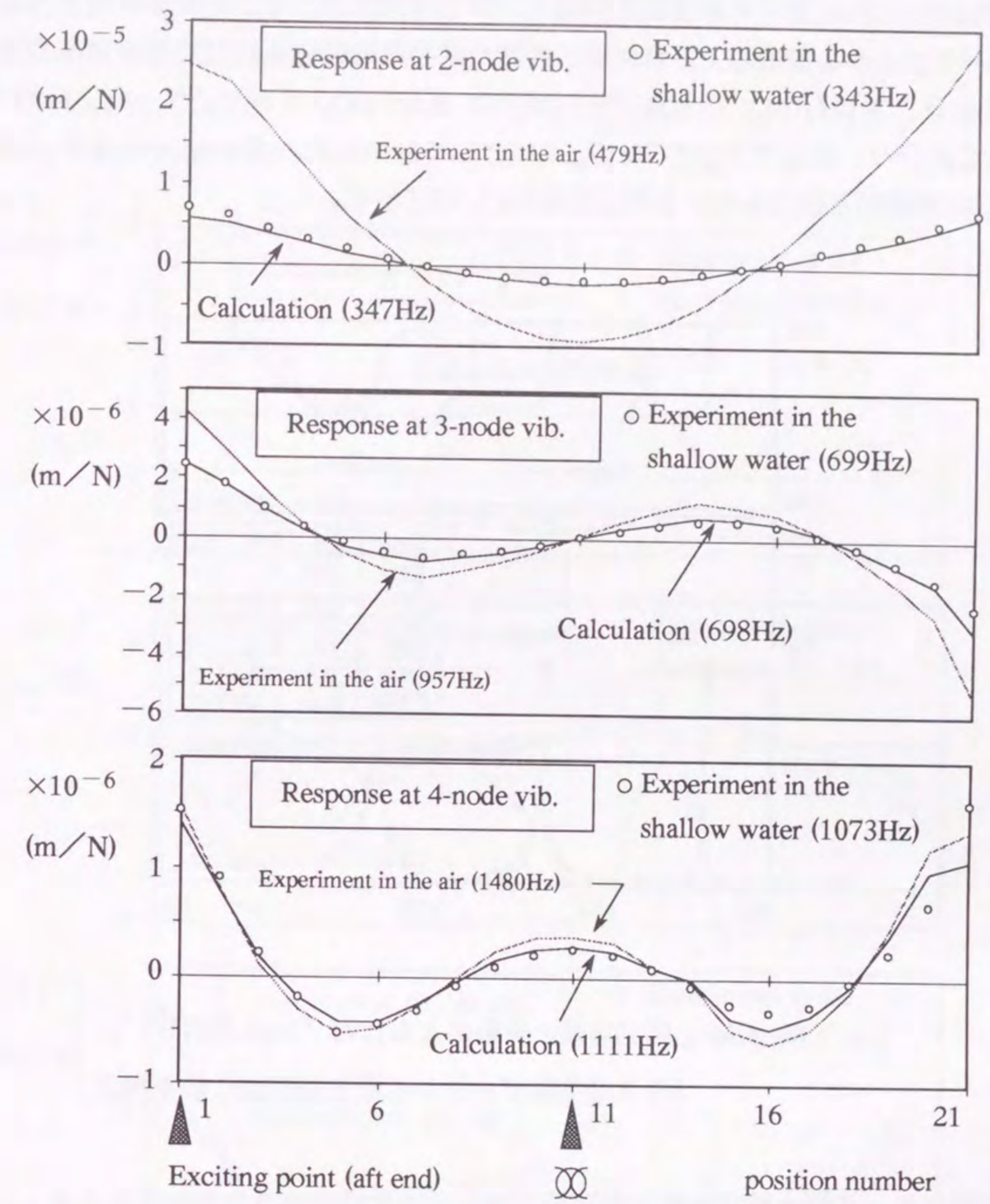


Fig.5.3.6　推定結果と実験値との比較（振動変位）（$h/T=1.5$）
（空中実験データから浅水域振動性能を推定）

(c) 浅水域の実験データから深水域の性能を推定

浅水域($h/T=1.5$)における伝達関数(Fig.5.3.5の実験値と同じもの)から曲線適合によってモーダルパラメータを抽出し、これを用いて深水域の振動性能を推定した。構造変更解析に用いたマトリクスは$[\Delta M_0]$（$=[M_0^{\infty}]-[M_0^{h}]$）及び$[\Delta C_0]$（$=[C_0^{\infty}]-[C_0^{h}]$）であり、$[C_w^{\infty}]$にて$\beta_w=1$、そして$[C_w^{h}]$では$\beta_w=35$として計算した。推定結果と深水域実験結果（Fig.5.3.4の実験値と同じもの）との比較をFig.5.3.7に示す。

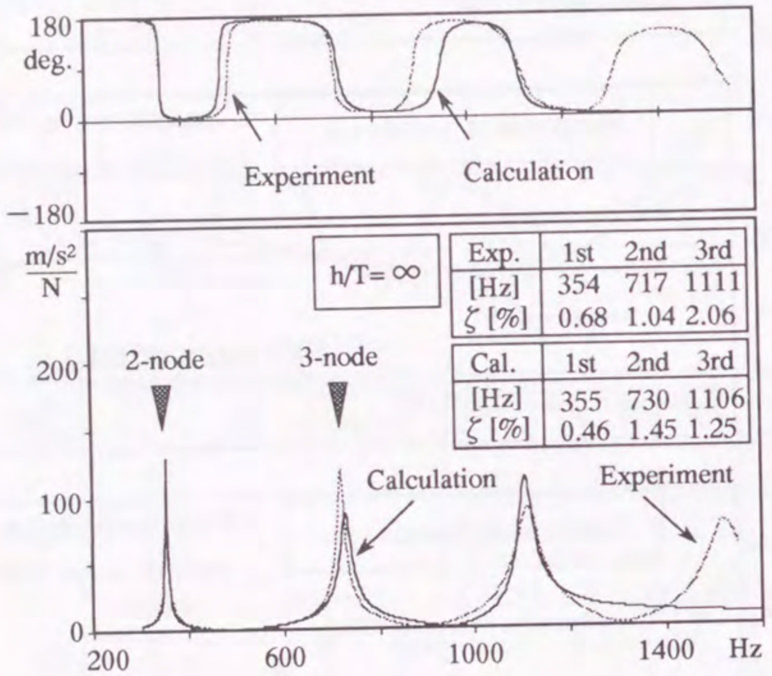


Fig.5.3.7　推定結果と実験値との比較（加振点応答）
（浅水域実験データから深水域振動性能を推定）

2節振動において深水域実験結果の振動加速度は浅水域実験の3倍程度に大きくなっているが、計算でもこれを再現できていて、Fig.5.3.4よりも推定精度は良くなっている。また、ピーク周波数のずれについても前記2例よりも改善されている。これは、構造変更量$[\Delta M_0]$が$[M_0^{\infty}]$及び$[M_0^{h}]$に較べて小さいためと考えられる。全般的に共振周波数、振動レベルともまずまずの推定精度といえる。

加振点以外の応答点についても比較するため、Fig.5.3.6同様に振動モード図をFig.5.3.8に示す。2節振動について注目すれば、浅水域実験結果の振動変位は深水域のそれよりも相当小さいにもかかわらず、これを用いて推定した振動モードは深水域実験結果と極めて近いことがわかる。また深水域と浅水域の実験データそのものを較べると、やはり振動変位の差は高次モードになるにつれて小さくなる特徴があることがわかる。

従って、実船にて浅水域で計測する際には、低次振動モードの励起に注意を払う必要があると考えられる。推定計算ではこの現象についても再現できており、浅水域の実験結果から深水域での振動性能を推定する方法は、共振周波数と振動レベルの両面からみて優れた方法であるといえる。

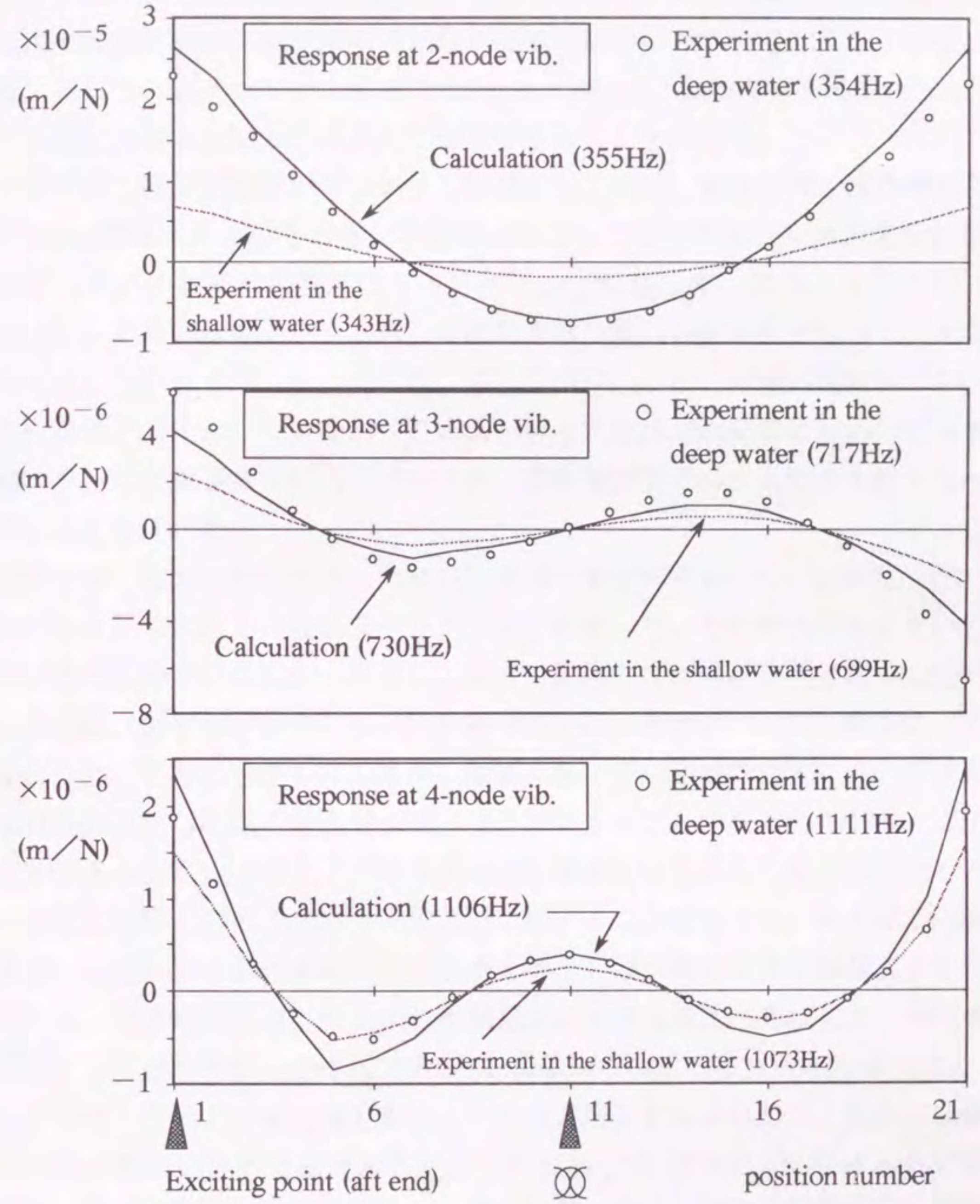


Fig.5.3.8　推定結果と実験値との比較（振動変位）（$h/T=\infty$）
（浅水域実験データから深水域振動性能を推定）

なお、ここで示した３例全てにおいて３個の弾性モードしか採用していない為、剛体モード及び高次弾性モードを含めれば推定精度はもっと良くなるものと考えられる。

以上のことから、β_wを適切に与えることさえできれば等価線形減衰マトリクス$[C_w]$は浅水域においても有効なマトリクスで、岸壁にて艤装中の船舶の実験データを利用することによって、深水域での振動性能を推定することは可能であると考えられる。なお、以上の内容については、文献[57] *(著者,1996)*にて述べられている。

6章　結論

船舶の振動レベルを正確に推定するための新しい解析方法を構築し、回転楕円体模型を用いた種々の実験と解析を行ってその妥当性を確認した。以下に、その内容を総括する。

第２章では、Navier-Stokes方程式により流体振動の様子を概観して振動境界層の概念を導入し、流体領域をポテンシャル領域と振動境界層に分けて解析を行うことの妥当性について述べた。そして、ポテンシャル領域ではLaplace方程式、振動境界層ではStokes近似式をそれぞれの領域における支配方程式として採用できることを示した。

第３章では、流体領域をポテンシャル領域として扱い、無限水深、浅水域あるいは岸壁浅水域のGreen関数、およびその幾何学的構成について述べた後、立体内角を計算する便利な方法を示した。そして、付加質量マトリクス$[M_w]$に対して、従来よりも合理的に等価節点力を表現し、あるいは節点数を減らして解析を行う新しい定式化を行って、その妥当性を解析解と比較しながら確認した。その際、解析解が存在しない岸壁有限水深での回転楕円体に関する計算例も若干示した。なお、この新しい定式化は高次要素に対応していることから要素表面に平行な流体速度を得ることができ、振動境界層での定式化が可能となって、次章に発展することを述べた。

第４章では、従来未解明であった減衰現象の一端を解明すべく、振動境界層における散逸エネルギに着目した新しい減衰マトリクス$[C_w]$を導いた。その導出過程において、振動境界層における速度分布を解析的に決定し、層内で散逸されるエネルギを節点変位によって表現した。さらに、解析解が存在しない回転楕円体の接水振動について、模型による種々の確認実験を行った。その内容として、まず、散逸エネルギの振幅依存性について調査を行い、流体の減衰現象を$[C_w]$の如く線形減衰マトリクスで表すことの妥当性を実験的に証明した。また、流体による減衰は小さいとの従来説は浅水域においてはあてはまらないことを示した。次に、実験と計算との散逸エネルギ総量を比較することによって、深水域では速度分布修正係数を$\beta_w=1$としても誤差が生じないことを導き、深水域における減衰現象を解明した。これに対して、浅水域では$\beta_w=1$とすれば誤差が大きくなることを示した。浅水域での現象解明は課題として残ったが、浅水域でのβ_wを実験的に決定する方法を提案した。

第５章では、モーダル構造変更解析と境界要素法とを組み合わせ、船舶の振動レベルを推定するための新しい解析方法を示した。これに$[M_w]$および$[C_w]$を組み込んだ周波数応答計算を行い、種々の実験結果と比較した。その結果、流体の減衰が振動変位に及ぼす影響は高次モードになるにつれて小さくなる実験事実を得、推定計算においてもこれを再現できること、適切なβ_w値を用いれば周波数応答をほぼ完全に再現することができて複雑な構造体である船舶の振動レベルを高い精度で推定できることを示した。

謝辞

本論文をまとめるにあたって、終始ご指導を戴くとともにご助言を戴きました大阪大学工学部　船木俊彦教授、鈴木敏夫教授、冨田康光教授に厚くお礼を申し上げます。また、研究の実施にあたって、流体力学の基礎的質問事項にも快く応えてくださり著者の考え違いを指摘修正いただきました松村清重助教授に厚くお礼を申し上げます。さらに、整った計算機環境を提供していただきました大澤直樹助手、実験機材の調達にご協力いただきました和久田宏技官、実験解析および数値解析あるいはその作図処理に分担協力をいただきました研究室のみなさまにお礼を申し上げます。

最後に、本論文作成のあいだ、家庭をかえりみずに没頭している私を支え、安心して没頭できる環境を提供してくれた妻典子、よい子にしていてくれた亮秀に、ありがとう。

参考文献

1) Brebbia,C.A. : The Boundary Element Method for Engineers, *Pentech Press*(1978).
邦訳／神谷紀生,田中正隆,田中喜久昭：境界要素法入門, 培風館(1980)

2) Brebbia,C.A. and Walker,S. : Boundary Element Techniques in Engineering, *Butterworth*(1980).
邦訳／神谷紀生,田中正隆,田中喜久昭：境界要素法の基礎と応用, 培風館(1981)

3) 上田幸雄, 松石正克, 山川武人, 赤松毅人：マトリックス法による骨組構造物の弾塑性解析, *日本造船学会論文集*, 第124号,(1968) pp.183～191.

4) Zienkewicz,O.C. : The Finite Element Method,3rd edition, *McGraw-Hill*(1977).
邦訳／吉識雅夫,山田嘉昭：マトリックス有限要素法, 培風館(1984)

5) 鷲津久一郎, 宮本博, 山田嘉昭, 山本善之, 川井忠彦：有限要素法ハンドブック I 基礎編, *培風館*(1981).

6) 戸川隼人：マトリクスの数値計算, *オーム社*(1971).

7) 川村恭己, 大坪英臣, 鈴木克幸：船体構造における自動メッシュ生成法の研究　−応力集中部における四角形要素生成法−, *日本造船学会論文集*, 第175号,(1994) pp.291～298.

8) 笹島洋, 水野博介, 楠本裕己, 金山維史：コンテナ船就航時の振動計測および特異点分布法を用いた数値解析, *関西造船協会誌*, 第223号,(1995), pp.113～118.

9) 長松昭男：モード解析, *培風館*(1985).

10) Caughey,T.K. : Classical Normal Modes in Damped Linear Dynamic Systems, *Transactions ASME series E*, Vol.27,No.2,(1960), pp.269～271.

11) Klosterman,A.L. : On the Experimental Determination and Use of Modal Representation of Dynamic Characteristics, Ph. Doctor dissertation, *Univ. of Cincinnati*(1971).

12) Lancaster,P. : Lambda-Matrices and Vibrating Systems, *Pergamon Press*(1966).

13) Van Loon,P. : Modal Parameters of Mechanical Structures, Ph. Doctor dissertation, *Katholieke Univ. of Leuven*(1974).

14) 大熊政明, 長松昭男：特性行列の実験的決定による系の同定（第１報　方法の提案と基礎的検討）, *日本機械学会論文集（C編）*, 第51巻,第464号,(1985) pp.719～728.

15) Formenti,D. and Welaratna,S. : Structural Dynamics Modification - An Extension to Modal Analysis, *SAE Paper*, 811043,(1981), pp.1～23.

16) Fox,R.L. and Kapoor,M.P. : Rates of Change of Eigenvalues and Eigenvectors, *AIAA Journal*, Vol.6,No.12,(1968), pp.2426～2429.

17) Nelson,R.B. : Simplified Calculation of Eigenvector Derivatives, *AIAA Journal*, Vol.14,No.9,(1976), pp.1201～1205.

18) Vanhonacker,P. : Differential and Difference Sensitivities of Natural Frequencies and Mode Shapes of Mechanical Structures, *AIAA Journal*, Vol.18,No.12,(1980), pp.1511～1514.

19) Hayashi,S. and Kano,S. : Optimization Method for Mount Layout and Mount Specifications of Vehicle Sub-frame, *Proceeding Asia-Pacific Vibration Conference '93*,Japan SME,(1993), pp.688～693.

20) 林茂弘, 加納昭一：サブフレームのマウント配置・諸元最適化手法, *自動車技術会論文集*, Vol.25,No.2,9432327,(1994).

21) 萩原一郎, 馬正東, 荒井昭, 永渕和夫：構造－音場連成系の固有モード感度解析手法の開発, *日本機械学会論文集（C編）*, 第56巻,第527号,(1990) pp.1704～1711.

22) 馬正東, 萩原一郎：高次と低次のモードの省略可能な新しいモード合成技術の開発（第１報　ダンピング系の周波数応答解析）, *日本機械学会論文集（C編）*, 第57巻,第536号,(1991) pp.1148～1155.

23) 萩原一郎, 馬正東：高次と低次のモードの省略可能な新しいモード合成技術の開発（第２報　固有モード感度解析への適用）, *日本機械学会論文集（C編）*, 第57巻,第539号,(1991) pp.2198～2204.

24) 香川洸二, 藤田一誠, 太田和秀, 林泰道：モード合成法による船体振動解析, *三菱重工技報*, Vol.17,No.5,(1980), pp.776～784.

25) 船木俊彦, 林茂弘, 大矢部直樹, 藤田政樹：モード合成法による船体と上部構造の連成振動解析, *関西造船協会誌*, 第224号,(1995) pp.111～120.

26) Stokes,G.G. : On some cases of Fluid Motion, *Cambr.Trans.*, Vol.8,(1843), pp.105～137.

27) Stokes,G.G. : On the Effect of the Internal Friction of Fluids on the Motion of Pendulums, *Cambr.Phil.Trans.*, Vol.9,(1850), pp.8～106.

28) Schlick,O. : On the Vibration of Steam Vessels, *Transactions INA*, Vol.25,(1884), pp.29～44.

29) Lamb,H. : Hydrodynamics,6th edition, *Cambr.Univ.Press*(1932).
邦訳／今井功,橋本英典：ラム流体力学１・２・３, 東京図書(1982)

30) Lewis,F.M. : The Inertia of the Water Surrounding a Vibrating Ship, *Transactions SNAME*, Vol.37,(1929),pp.1～20.

31) Taylor,J.L. : Some Hydrodynamical Inertia Coefficients, *Phil.Mag. 7th Series*, Vol.9,No.55,(1930), pp.161～183.

32) 松浦義一：貨物船垂直撓み振動の解析, *造船協会論文集*, 第108号,(1960), pp.255～275.

33) 熊井豊二 ： 船体上下振動付加質量の三次元修正値について（第１報　楕円筒の振動におけるＪ）, *造船協会論文集*, 第112号,(1962), pp.85～90.

34) 熊井豊二 ： 船体水平振動の付加慣性質量に対する二,三の修正について, *造船協会論文集*, 第108号,(1960), pp.287～292.

35) Koch,J.J. : Eine experimentelle Methode zur Bestimmung der redugierten Masse des mitschwingunden Wassers Sei Schiffsschwingungen, *Ingenieur-Archiv*, 4Bd.,2Ht.,(1933), 103～109.

36) Prohaska,C.W. : The Vartical Vibration of Ships, *The Shipbuilder and Mar. Eng.-builder*, (1947).

37) 吉識雅夫, 山本善之, 佐久間武, 長本良男 ： 船体振動における付加質量に関する一考察, *造船協会論文集*, 第84号,(1948), pp.93～102.

38) Havelock.T.H. : Ship Vibrations; The Virtual Inertia of a Spheroid in Shallow Water, *Transactions INA*, Vol.95,No.1,(1953), pp.1～9.

39) Kellogg,O.D. : Foundations of Potential Theory, *Springer-Verlag*(1929),reprinted in 1967.

40) Hess,J.L. and Smith,A.M.O. : Calculation of Nonlifting Potential Flow about Arbitrary Three-Dimensional Bodies, *Journal of Ship Research*, Vol.8,No.2,(1964), pp.22～44.

41) 一色浩, 前田久明：周期的吹き出しの公式とその数値計算法, *関西造船協会誌*, 第157号,(1975), pp.73～82.

42) 高木健 ： Rankine Source 法による波浪変動圧力の計算, *関西造船協会誌*, 第219号,(1993) pp.47～56.

43) 菅信 ： ３次元物体の付加質量に及ぼす浅水影響　－K=0とK=∞の場合（その２,一般船型への適用）－, *船舶技術研究所報告*, 第22巻,第2号,(1985), pp.103～123.

44) 松浦義一, 斎藤公男, 有馬健次, 林茂弘 : 船体上下振動付加水質量に対する浅水影響（特異点分布法による理論解析）, *関西造船協会誌*, 第209号,(1988) pp.133～143.

45) 根木勲, 笹島洋 : 有限要素法と特異点分布法の連成による弾性体の接水振動解析, *石川島播磨技報*, 第20巻,第4号,(1980), pp.201～204.

46) 根木勲, 笹島洋 : 構造物の接水振動問題の一解法　－特異点分布法と有限要素法の連成による応用－, *日本造船学会誌*, 第640号,(1982), pp.544～549.

47) 松浦義一, 松本亙平, 有馬健次, 木下篤 : 水中構造物の振動解析法, *日立造船技報*, 第45巻, 第1号,(1984) pp.38～43.

48) 笹島洋, 金山維史 : 特異点分布法による接水振動の解法, *関西造船協会誌*, 第223号, (1995), pp.99～104.

49) Ohta,K., Kagawa,K. and Honda,I. : Analysis of Fluid-Structural Vibration Using Boundary Element Method and Modal Analysis Technique, *ASME PVP*, Vol.98,No.7,(1985), pp.215～220.

50) Funaki,T. and Hayashi,S. : An Efficient Calculation Method in Vibration Analysis for the Added Mass Matrix on Floating Structures, *Proceeding The Third Asian-Pacific Conference on Computational Mechanics*,Vol.3,Korea AIST,(1996), pp.1911～1916.

51) 妹澤克惟, 渡辺亘 : 船体振動の減衰力, *造船協会会報*, 第59号,(1936), pp.99～120.

52) 山本善之, 在田正義 : 船体振動の減衰力の研究, *造船協会論文集*, 第118号,(1965), pp.138～146.

53) 熊井豊二 : 船体高次振動の減衰率について, *造船協会論文集*, 第102号,(1957), pp.143～150.

54) 船木俊彦, 林茂弘 : 船舶の振動レベル推定に関する基礎的研究（流体の粘性による散逸エネルギに基づく減衰マトリクスの定式化）, *日本造船学会論文集*, 第179号,(1996) pp.253～261.

55) 船木俊彦, 林茂弘 : 船舶の振動レベル推定に関する基礎的研究（実験モーダル解析と境界要素法の結合）, *日本造船学会論文集*, 第178号,(1995) pp.363～370.

56) 船木俊彦, 林茂弘 : 縮小付加質量マトリクスにおける観測点の影響に関する研究, *日本造船学会論文集*, 第179号,(1996) pp.263～269.

57) 船木俊彦, 林茂弘 : 振動境界層における散逸エネルギに関する基礎的研究, *日本造船学会論文集*, 第180号,(1996) pp.491～498.

58) 松井徹哉, 加藤賢治 : ハイブリッド型積分方程式法による浮体の定常動揺問題の数値解析, *日本建築学会構造系論文報告集*, 第393号,(1988), pp.165～175.

59) 田中正隆, 松本敏郎, 中村正行 : 計算力学とCAEシリーズ２境界要素法, *培風館*(1991).

60) 松本敏郎, 田中正隆, 平田秀生 : ポテンシャル問題における境界積分方程式の正則化とその離散化に関する考察, 日本シミュレーション学会第11回計算電気・電子工学シンポジウム論文集, (1990),pp.189～194.

61) 笹島洋 : 有限要素法と特異点分布法の連成による船体構造の接水振動に関する研究, *大阪大学博士論文*, (1995).

62) 菅信 : ３次元物体の付加質量に及ぼす浅水影響（K=0とK=∞の場合）, *船舶技術研究所報告*, 第21巻,第3号,(1984), pp.91～102.

63) 田中一朗, 姫野洋司 : 渦動粘性係数を使った２次元乱流境界層の計算, 関西造船協会誌, 第146号,(1972),pp.45～54.

64) 林茂弘 : 特異点分布法による付加水質量計算法（梁の水中振動に対する浅水影響の計算）, *大阪大学修士論文*, (1988).

65) Kan,Makoto : The Added Mass Coefficient of a Cylinder Oscillating in Shallow Water in the limit $K\to 0$ and $K\to\infty$, *Papers of Ship Research Institute*,No.52,(1977), pp.1～18.

66) 原武久 : 非構造分野における有限要素法の基礎, *昭晃堂*(1981).

67) Tong,P. and Rossettos,J.N. : Finite-Element Method Basic Technique and Implemetation, *Massachusetts Institute of Technology* (1977).
邦訳／矢川元基 : エンジニアのための有限要素法, 共立出版(1983)

68) Hammer,P.C., Marlowe,O.J. and Stroud,A.H. : Numerical Integration over Simplexs and Cones, *Mathematical Tables and Other Aids to Computation*, Vol.10,(1956), pp.130～137.

付録A　　有限水深あるいは岸壁有限水深のグリーン関数

A．1　Green関数の定式化

(1) 有限水深のGreen関数

浅水域Green関数$G_s(P,Q)$が満足するべき条件は、

第１に、Laplace方程式(3.2.9)より、

$$\nabla^2 G_s(P,Q) \quad = \quad 0 \qquad \text{(A.1.1)}$$

第２に、自由表面条件(3.2.10)より、

$$G_s(P,Q) \quad = \quad 0 \qquad (at\ z=0) \qquad \text{(A.1.2)}$$

第３に、水底の条件(3.2.11)より、

$$\frac{\partial G_s(P,Q)}{\partial z} \quad = \quad 0 \qquad (at\ z=-h) \qquad \text{(A.1.3)}$$

第４に、無限遠方の条件(3.2.12)より、

$$\lim_{R\to\infty} G_s(P,Q) \quad = \quad 0 \qquad \left(R=\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2} \right) \qquad \text{(A.1.4)}$$

の合計４つである。

さて、無限水深のGreen関数$G_\infty(P,Q)$はFig.A.1.1のような構成となっており、すでに水底条件を除く３つの条件を満足している。そこで、$G_\infty(P,Q)$に修正関数$G_h(P,Q)$を付加することによって、水底条件をも満足させ、結果として上記４条件全てを満足させようとする。

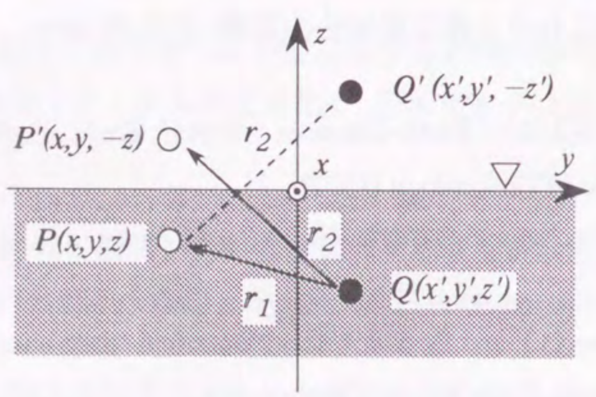


Fig.A.1.1　距離r_1,r_2とベクトル$\boldsymbol{r}_1$,$\boldsymbol{r}_2$

すなわち、

$$G_s(P,Q) \quad = \quad G_\infty(P,Q) \ + \ G_h(P,Q) \qquad \text{(A.1.5)}$$

とおく。これにより、修正関数$G_h(P,Q)$が満足すべき条件は、

第１に、Laplace方程式(A.1.1)より、

$$\nabla^2 G_h(P,Q) \quad = \quad 0 \qquad \text{(A.1.6)}$$

第２に、自由表面条件(A.1.2)より、

$$G_h(P,Q) \quad = \quad 0 \qquad (at\ z=0) \qquad \text{(A.1.7)}$$

第３に、水底の条件(A.1.3)より、

$$\frac{\partial G_h(P,Q)}{\partial z} \quad = \quad - \frac{\partial G_\infty(P,Q)}{\partial z} \qquad (at\ z=-h) \qquad \text{(A.1.8)}$$

第４に、無限遠方の条件(A.1.4)より、

$$\lim_{R\to\infty} G_h(P,Q) \quad = \quad 0 \qquad \left(R=\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2} \right) \qquad \text{(A.1.9)}$$

の合計４つとなる。この４条件を満足する修正関数$G_h(P,Q)$を見つけることができれば浅水域Green関数$G_s(P,Q)$が決定される。以降、修正関数$G_h(P,Q)$を求める手順について述べる。

すでに、無限遠方の条件(A.1.4)及び(A.1.9)にて使っているが、

$$R=\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2} \qquad \text{(A.1.10)}$$

を改めて定義すれば、Lipschitzの積分により、

$$\frac{1}{r_1} \ = \ \frac{1}{\sqrt{R^2+(z-z')^2}} \ = \ \int_0^\infty e^{-k\,|z-z'|}\, J_0(kR)\ dk \qquad \text{(A.1.11)}_{-1}$$

$$\frac{1}{r_2} \ = \ \frac{1}{\sqrt{R^2+(z+z')^2}} \ = \ \int_0^\infty e^{-k\,|z+z'|}\, J_0(kR)\ dk \qquad \text{(A.1.11)}_{-2}$$

を得る。ここで、J_0は第１種０次Bessel関数であり、上式の関係は文献[29] *(Lamb,1932)*の102節にも現れる公式となっている。それによれば1859年に見いだされたようである。

$1/r$の積分形式(A.1.11)を視察することにより、未定関数$A(k,z,z')$を用いて、修正関数$G_h(P,Q)$を、

$$G_h(P,Q) = \int_0^\infty A(k,z,z')\, J_0(kR)\, dk \tag{A.1.12}$$

なる形で仮定するのが適切であろう。上式で修正関数$G_h(P,Q)$はRとzの関数となっているから、Laplace方程式(A.1.6)を変数変換すれば、

$$\nabla^2 G_h(P,Q) = \frac{\partial^2 G_h(P,Q)}{\partial R^2} + \frac{1}{R}\frac{\partial G_h(P,Q)}{\partial R} + \frac{\partial^2 G_h(P,Q)}{\partial z^2}$$

$$= 0 \tag{A.1.13}$$

となって、これが成り立たねばならないこととなる。Rとzによる微分はそれぞれ積分記号の中に入ることができるから、Bessel関数の公式

$$\frac{\partial J_0(kR)}{\partial R} = -k\, J_1(kR) \qquad \text{(A.1.14)}_{-1}$$

$$\frac{\partial^2 J_0(kR)}{\partial R^2} = -k^2 J_0(kR) + \frac{k}{R} J_1(kR) \qquad \text{(A.1.14)}_{-2}$$

を準備しておくことにより、Laplace方程式(A.1.13)は、

$$\nabla^2 G_h(P,Q) = \int_0^\infty \left\{ \frac{\partial^2 A(k,z,z')}{\partial z^2} - k^2 A(k,z,z') \right\} J_0(kR)\, dk$$

$$= 0 \tag{A.1.15}$$

となる。なお、J_1は第１種１次Bessel関数であるが、上式を導く過程でJ_1に関連する項は消滅する。そして、上式が常に成立するためには、未定関数$A(k,z,z')$が微分方程式

$$\frac{\partial^2 A(k,z,z')}{\partial z^2} - k^2 A(k,z,z') = 0 \tag{A.1.16}$$

を満足せねばならないことがわかる。従って、未定関数$A(k,z,z')$は、

$$A(k,z,z') = C_1(k,z')\, e^{kz} + C_2(k,z')\, e^{-kz} \tag{A.1.17}$$

なる一般解をもつことになる。よって、修正関数$G_h(P,Q)$は、

$$G_h(P,Q) = \int_0^\infty \left\{ C_1(k,z')\, e^{kz} + C_2(k,z')\, e^{-kz} \right\} J_0(kR)\, dk \tag{A.1.18}$$

となって、必ずLaplace方程式を満足することとなる。なお、$C_1(k,z')$及び$C_2(k,z')$は未定係数である。

次に、上式を自由表面条件(A.1.7)にあてはめれば、

$$C_1(k,z') + C_2(k,z') = 0 \tag{A.1.19}$$

を得るから、結局、修正関数$G_h(P,Q)$は、

$$G_h(P,Q) = \int_0^\infty C(k,z')\, \sinh kz\, J_0(kR)\, dk \tag{A.1.20}$$

なる形式で表されることとなる。上式は、Laplace方程式(A.1.6)と自由表面条件(A.1.7)を満足する。従って、以降の問題は、水底の条件(A.1.8)を満足させるような未定係数$C(k,z')$を求めることに移る。

無限水深のGreen関数$G_\infty(P,Q)$について、その微分を計算しておけば、

$$\frac{\partial G_\infty(P,Q)}{\partial z} = \int_0^\infty -k \left\{ sgn(z-z') e^{-k|z-z'|} - sgn(z+z') e^{-k|z+z'|} \right\} J_0(kR)\, dk$$

$$\text{-----------} \quad \text{(A.1.21)}$$

となる。ここで、sgnは符号関数である。上式で$z=-h$とすれば、水底条件(A.1.8)の右辺を得ることができる。ところが、Fig.A.1.1で示したようにsource point Q を流体領域に取ることとしているから、z'の取り得る値の範囲は$-h \leqq z' \leqq 0$である。従って、$-h \leqq (-h-z') \leqq 0$及び$-2h \leqq (-h+z') \leqq -h$となるから、

$$\left.\frac{\partial G_\infty(P,Q)}{\partial z}\right|_{z=-h} = \int_0^\infty -k \left\{ -e^{k(-h-z')} + e^{k(-h+z')} \right\} J_0(kR)\, dk$$

$$= \int_0^\infty -2k\, e^{-kh} \sinh kz'\, J_0(kR)\, dk \tag{A.1.22}$$

を得る。上式により水底条件(A.1.8)の右辺を得ることができた。一方、その左辺を計算するために(A.1.20)式の修正関数$G_h(P,Q)$を微分しておけば、

$$\frac{\partial G_h(P,Q)}{\partial z} = \int_0^\infty k\, C(k,z')\, \cosh kz\, J_0(kR)\, dk \tag{A.1.23}$$

となり、ここで、$z=-h$とすれば、

$$\left.\frac{\partial G_h(P,Q)}{\partial z}\right|_{z=-h} = \int_0^\infty k\, C(k,z')\, \cosh kh\, J_0(kR)\, dk \tag{A.1.24}$$

を得る。上式により水底条件(A.1.8)の左辺を得ることができた。従って、(A.1.22),(A.1.24)式を水底条件(A.1.8)に代入することにより、未定係数$C(k,z')$を、

$$C(k,z') = \frac{2\ e^{-kh}\ \sinh kz'}{\cosh kh} \qquad (A.1.25)$$

の如く決定することができる。上式により、(A.1.20)式の修正関数$G_h(P,Q)$は、

$$G_h(P,Q) = \int_0^{\infty} \frac{2\ e^{-kh}\ \sinh kz'\ \sinh kz}{\cosh kh}\ J_0(kR)\ dk \qquad (A.1.26)$$

となる。上式は、Laplace方程式(A.1.6)、自由表面条件(A.1.7)、及び水底条件(A.1.8)を満足する。

では、上式が無限遠方条件(A.1.9)をも満足することについて述べる。上式に$kR=t$なる変数変換を施すことによってBessel関数内部からRを除去すれば、

$$G_h(P,Q) = \frac{1}{R}\int_0^{\infty} \frac{2\ e^{-ht/R}\ \sinh z't/R\ \sinh zt/R}{\cosh ht/R}\ J_0(t)\ dt \qquad (A.1.27)$$

となる。よって、積分の値が有界であれば、$R\rightarrow\infty$にて修正関数$G_h(P,Q)$はゼロとなる。即ち、無限遠方条件(A.1.9)を満足することとなる。従って、積分の値が有界であることを示しておこう。z及びz'の取り得る値の範囲は$-h\leqq z,z'\leqq 0$であるから、

$$\sinh z't/R\ \sinh zt/R \leqq \sinh ht/R\ \sinh ht/R \qquad (A.1.28)$$

が成り立つ。従って、$0\leqq t<\infty$の範囲において、被積分関数から$J_0(t)$を除いた部分の下界及び上界について次の関係が得られる。

$$\begin{aligned} 0 \leqq \frac{2\ e^{-ht/R}\ \sinh z't/R\ \sinh zt/R}{\cosh ht/R} &\leqq \frac{2\ e^{-ht/R}\ \sinh^2 ht/R}{\cosh ht/R} \\ &= (1-e^{-2ht/R})\ \tanh ht/R \\ &\leqq \tanh ht/R \\ &\leqq 1 \qquad (A.1.29) \end{aligned}$$

これにより、(A.1.27)式による修正関数$G_h(P,Q)$の積分の値が有界であることを次のように示

すことができる。

$$\begin{aligned} \left| \int_0^{\infty} \frac{2\ e^{-ht/R}\ \sinh z't/R\ \sinh zt/R}{\cosh ht/R}\ J_0(t)\ dt \right| &\leqq \left| \int_0^{\infty} J_0(t)\ dt \right| \\ &= 1 \qquad (A.1.30) \end{aligned}$$

これは、積分値の絶対値は必ず１以下となることを示しており、その値が有界であることを証明している。以上により、(A.1.26)式の修正関数$G_h(P,Q)$は無限遠方条件(A.1.9)をも満足することが証明されたこととなる。

以上のことから、高周波用の浅水域Green関数$G_s(P,Q)$は、

$$G_s(P,Q) = G_{\infty}(P,Q) + G_h(P,Q) \qquad (3.3.4)_{-1\text{-再記}}\ (A.1.31)_{-1}$$

$$G_{\infty}(P,Q) = \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \qquad (3.3.4)_{-2\text{-再記}}\ (A.1.31)_{-2}$$

$$G_h(P,Q) = \int_0^{\infty} \frac{2\ e^{-kh}\ \sinh kz'\ \sinh kz}{\cosh kh}\ J_0(kR)\ dk \qquad (3.3.4)_{-3\text{-再記}}\ (A.1.31)_{-3}$$

となることは完全に証明された。

（２）岸壁有限水深のGreen関数

岸壁浅水域Green関数$G_w(P,Q)$が満足するべき条件は、(A.1.1)～(A.1.4)の４条件と、岸壁条件

$$\frac{\partial G_w(P,Q)}{\partial y} = 0 \qquad (at\ y=-w) \qquad \text{(A.1.32)}$$

である。そして、岸壁を考慮する際にはFig.A.1.2に示したように鏡像の関係を利用すれば良いから、r_1, r_2およびRに含まれるy'の項を$(-2w-y')$に置き換えたものを(A.1.31)式に付加すれば良いこととなる。

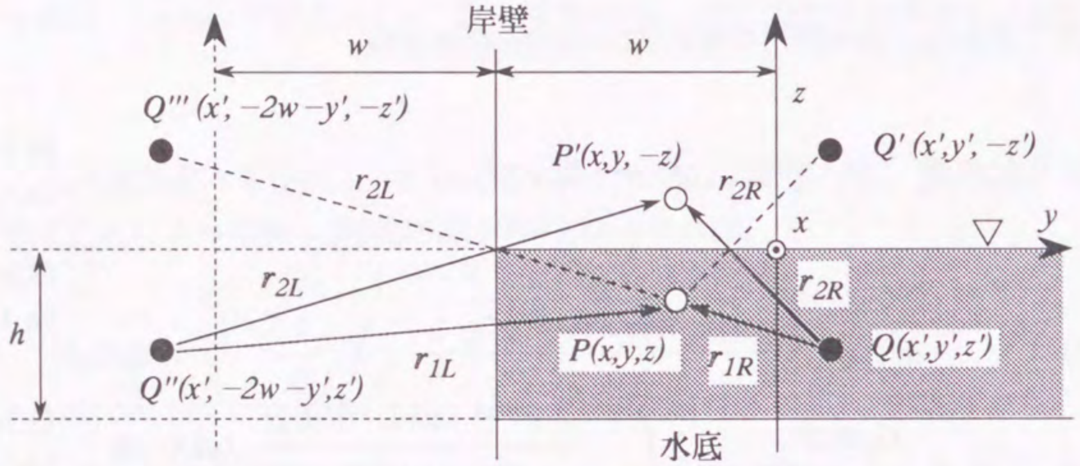


Fig.A.1.2　水底を考慮しつつ岸壁を表すための鏡像関係

具体的にかけば、

$$G_w(P,Q) = G_{\infty R}(P,Q) + G_{hR}(P,Q) + G_{\infty L}(P,Q) + G_{hL}(P,Q) \qquad \text{(3.3.6)}_{\text{-1-再記}}\ \text{(A.1.33)}_{-1}$$

$$G_{\infty R}(P,Q) = \frac{1}{r_{1R}} - \frac{1}{r_{2R}} \qquad \text{(3.3.6)}_{\text{-2-再記}}\ \text{(A.1.33)}_{-2}$$

$$G_{\infty L}(P,Q) = \frac{1}{r_{1L}} - \frac{1}{r_{2L}} \qquad \text{(3.3.6)}_{\text{-3-再記}}\ \text{(A.1.33)}_{-3}$$

$$G_{hR}(P,Q) = \int_0^{\infty} \frac{2\ e^{-kh} \sinh kz' \sinh kz}{\cosh kh} J_0(kR_R)\ dk \qquad \text{(3.3.6)}_{\text{-4-再記}}\ \text{(A.1.33)}_{-4}$$

$$G_{hL}(P,Q) = \int_0^{\infty} \frac{2\ e^{-kh} \sinh kz' \sinh kz}{\cosh kh} J_0(kR_L)\ dk \qquad \text{(3.3.6)}_{\text{-5-再記}}\ \text{(A.1.33)}_{-5}$$

となる。それぞれのr_1, r_2及びRについては、

$$r_{1R} = \sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2} = r_1 \qquad \text{(3.3.7)}_{\text{-1-再記}}\ \text{(A.1.34)}_{-1}$$

$$r_{2R} = \sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2+(z+z')^2} = r_2 \qquad \text{(3.3.7)}_{\text{-2-再記}}\ \text{(A.1.34)}_{-2}$$

$$r_{1L} = \sqrt{(x-x')^2+(y+2w+y')^2+(z-z')^2} \qquad \text{(3.3.7)}_{\text{-2-再記}}\ \text{(A.1.34)}_{-3}$$

$$r_{2L} = \sqrt{(x-x')^2+(y+2w+y')^2+(z+z')^2} \qquad \text{(3.3.7)}_{\text{-2-再記}}\ \text{(A.1.34)}_{-4}$$

$$R_R = \sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2} = R \qquad \text{(3.3.7)}_{\text{-2-再記}}\ \text{(A.1.34)}_{-5}$$

$$R_L = \sqrt{(x-x')^2+(y+2w+y')^2} \qquad \text{(3.3.7)}_{\text{-2-再記}}\ \text{(A.1.34)}_{-6}$$

である。　なお、field point P が岸壁上にあるとき、すなわち$y=-w$が成り立つときには、$r_{1R}=r_{1L}$、$r_{2R}=r_{2L}$、及び$R_R=R_L$となる。

さて、(A.1.33)式の岸壁浅水域Green関数$G_w(P,Q)$は、浅水域Green関数$G_s(P,Q)$を重ね合わせただけであるから、当然、Laplace方程式、自由表面条件、水底条件、及び無限遠方条件を満足する。これら４条件の他に岸壁条件をも満足することを確認するために、$G_w(P,Q)$を構成する各項について微分しておくと、

$$\frac{\partial G_{\infty R}(P,Q)}{\partial y} = \frac{-(y-y')}{r_{1R}^3} - \frac{-(y-y')}{r_{2R}^3} \qquad \text{(A.1.35)}_{-1}$$

$$\frac{\partial G_{\infty L}(P,Q)}{\partial y} = \frac{-(y+2w+y')}{r_{1L}^3} - \frac{-(y+2w+y')}{r_{2L}^3} \qquad \text{(A.1.35)}_{-2}$$

$$\frac{\partial G_{hR}(P,Q)}{\partial y} = \int_0^{\infty} \frac{2\ e^{-kh} \sinh kz' \sinh kz}{\cosh kh} \frac{d J_0(kR_R)}{d R_R} \frac{\partial R_R}{\partial y}\ dk$$

$$= \int_0^{\infty} \frac{2\ e^{-kh} \sinh kz' \sinh kz}{\cosh kh} \{-k J_1(kR_R)\} \frac{(y-y')}{R_R}\ dk \qquad \text{(A.1.35)}_{-3}$$

$$\frac{\partial G_{hL}(P,Q)}{\partial y} = \int_0^\infty \frac{2\ e^{-kh} \sinh kz' \sinh kz}{\cosh kh} \frac{d J_0(kR_L)}{d R_L} \frac{\partial R_L}{\partial y}\ dk$$

$$= \int_0^\infty \frac{2\ e^{-kh} \sinh kz' \sinh kz}{\cosh kh} \{-k J_1(kR_L)\} \frac{(y+2w+y')}{R_L}\ dk \quad (A.1.35)_{-4}$$

となる。なお、上式第３,４式の変形に際して、Bessel関数の公式(A.1.14)の第１式を利用した。ここで、$y=-w$とすれば、$r_{1R}=r_{1L}$、$r_{2R}=r_{2L}$、及び$R_R=R_L$となるから、

$$\left. \frac{\partial G_{\infty R}(P,Q)}{\partial y} + \frac{\partial G_{\infty L}(P,Q)}{\partial y} \right|_{y=-w} = 0 \quad (A.1.36)_{-1}$$

$$\left. \frac{\partial G_{hR}(P,Q)}{\partial y} + \frac{\partial G_{hL}(P,Q)}{\partial y} \right|_{y=-w} = 0 \quad (A.1.36)_{-2}$$

となる。従って、これらを加え合わせれば、

$$\left. \frac{\partial G_w(P,Q)}{\partial y} \right|_{y=-w} = 0 \quad (A.1.37)$$

を得ることとなる。上式は岸壁条件(A.1.32)を満足することを示しているから、(A.1.33)式の$G_w(P,Q)$は、間違いなく岸壁浅水域のGreen関数であることがわかる。即ち、$G_w(P,Q)$はLaplace方程式(A.1.1)、自由表面条件(A.1.2)、水底条件(A.1.3)、無限遠方条件(A.1.4)、及び岸壁条件(A.1.32)の５条件を満足する。以上により、目的とするGreen関数の定式化は完了した。

Ａ．２　Green関数の幾何学的構成およびその数値計算方法

さて、浅水域のGreen関数$G_s(P,Q)$及び岸壁浅水域のGreen関数$G_w(P,Q)$はともに積分形式の部分を持っており、このままの形式では具体的な数値計算の段階で非常に不便となる。そこで、この積分を数値計算し易いように変形しておく。この変形は、浅水域のGreen関数$G_s(P,Q)$に対してだけ行えばよい。なぜなら、岸壁を考慮した場合のGreen関数$G_w(P,Q)$はこれと全く同じ形式の積分を持っており、その結果を流用すればよいからである。それは、$G_s(P,Q)$の式(A.1.31)と$G_w(P,Q)$の式(A.1.33)とを見比べれば明らかであろう。

上記Green関数の積分形式の部分とは、(A.1.26)式の修正関数$G_h(P,Q)$のことである。これに$kh=t$なる変数変換を施すことによって座標変数を無次元化すれば、

$$G_h(P,Q) = \frac{1}{h} \int_0^\infty \frac{2\ e^{-t} \sinh z't/h\ \sinh zt/h}{\cosh t} J_0(Rt/h)\ dt \quad (A.2.1)$$

となり、さらに分解計算を進めれば、

$$G_h(P,Q) = \frac{1}{h} \{ F_0(z_a,R_h) + F_0(z_b,R_h) - F_0(z_c,R_h) - F_0(z_d,R_h) \} \quad (A.2.2)$$

となる。ここで、関数$F_0(\varepsilon,\beta)$の定義は、

$$F_0(\varepsilon,\beta) = \int_0^\infty \frac{1}{1+e^{-2t}} e^{-\varepsilon t} J_0(\beta t)\ dt \qquad (0 \leqq \varepsilon, 0 \leqq \beta) \quad (A.2.3)$$

である。また、z_a,z_b,z_c,z_d,R_hとはそれぞれ無次元化長さであって、その定義と値域を次式に示す。

$$2 \leqq z_a = 2 - \frac{(z+z')}{h} \leqq 4 \quad (A.2.4)_{-1}$$

$$0 \leqq z_b = 2 + \frac{(z+z')}{h} \leqq 2 \quad (A.2.4)_{-2}$$

$$1 \leqq z_c = 2 - \frac{(z-z')}{h} \leqq 3 \quad (A.2.4)_{-3}$$

$$1 \leqq z_d = 2 + \frac{(z-z')}{h} \leqq 3 \quad (A.2.4)_{-4}$$

$$0 \leqq R_h = \frac{R}{h} < \infty \quad (A.2.4)_{-5}$$

これら無次元化長さの持つ値域は、関数$F_0(\varepsilon,\beta)$の定義域に属している。従って、関数$F_0(\varepsilon,\beta)$を数値計算することができれば、(A.2.2)式によって修正関数$G_h(P,Q)$も数値計算できることとなる。関数$F_0(\varepsilon,\beta)$の展開方法については文献[64] *(著者,1988)*に詳しく記されている

ので、ここではその結果だけをかくこととすれば、

$$F_0(\varepsilon,\beta) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{(2n+\varepsilon)^2+\beta^2}} \qquad (0\leqq\varepsilon, 0\leqq\beta) \tag{A.2.5}$$

となる。これによって、修正関数$G_h(P,Q)$も数値計算できることとなった。しかし、この段階では、その計算精度はnの採用項数に依存する。

さて、上式は関数$1/r$と同じ形式をしていることに注目して、修正関数$G_h(P,Q)$をもう少し変形してみよう。上式を(A.2.2)式に代入して変形すれば、

$$\begin{aligned} G_h(P,Q) = & \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{R^2+[z-\{2h(n+1)-z'\}]^2}} \\ & + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{R^2+[z-\{-2h(n+1)-z'\}]^2}} \\ & + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{R^2+[z-\{2h(n+1)+z'\}]^2}} \\ & + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{R^2+[z-\{-2h(n+1)+z'\}]^2}} \end{aligned} \tag{A.2.6}$$

を得る。上式で、第1項は$F_0(z_a,R_h)$に関して整理したもので、以降第4項まで順番に、$F_0(z_b,R_h)$,$F_0(z_c,R_h)$,$F_0(z_d,R_h)$に関して整理したものである。上式を視察すれば、修正関数$G_h(P,Q)$は関数$1/r$の組み合わせからできていることがわかる。$1/r$の係数が正のものは吹き出し(source)を、負のものは吸い込み(sink)を示しており、修正関数$G_h(P,Q)$を構成するsourceとsinkの配列は本文Fig.3.3.1に示したものになることがわかる。岸壁がある場合には、岸壁を挟んでその反対側にも同様の配列が加わることになって本文Fig.3.3.2に示したものとなる。

Fig.3.3.1に示したsourceとsinkの配列は文献[65] *(Kan,1977)*に記されているものと一致する。この文献は2次元問題について扱ったもので、Fig.3.3.1の配列を定義してから直接的に浅水域のGreen関数を求めている。さらに、文献[62],[43] *(菅,1984,1985)*では、3次元問題におけるFig.3.3.1の配列から直接的に浅水域のGreen関数を求めており、表示形式は異なるものの上式と同じ結果を得ている。これらの文献と著者[44] *(1988)*との違いは、Fig.3.3.1の配列をGreen関数よりも先に得るか、或いはその配列をGreen関数よりも後に得るかにある。後者にあった著者[44] *(1988)*の方法では、関数$F_0(\varepsilon,\beta)$が現れることからその計算方法にさらなる工夫が施され、計算精度の面で優れたものとなっている。以下にその具体的な方法について述べる。

関数$F_0(\varepsilon,\beta)$の式(A.2.5)を少し変形すれば、

$$F_0(\varepsilon,\beta) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{(4n+\varepsilon)^2+\beta^2}} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{(4n+2+\varepsilon)^2+\beta^2}} \tag{A.2.7}$$

となる。これによって、少ない採用項数で精度よく計算するための定式化が可能となる。

まず、上式第1項を$F_{01}(\varepsilon,\beta)$とおいて、これを作図により求めようとすればFig.A.2.1を得る。

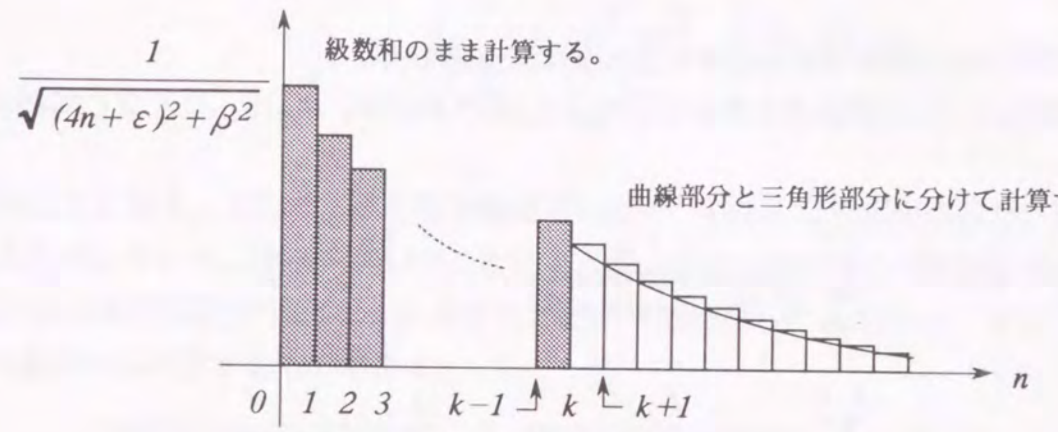


Fig.A.2.1　$F_{01}(\varepsilon,\beta)$の計算方法

Fig.A.2.1では、関数値の変化の大きい最初の$n=0$項から$n=(k-1)$項までを級数の和として計算し、残りの部分を曲線部分と三角形部分との面積として計算する様子を示している。これにより、

$$\begin{aligned} F_{01}(\varepsilon,\beta) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{(4n+\varepsilon)^2+\beta^2}} \\ &= \sum_{n=0}^{k-1} \frac{1}{\sqrt{(4n+\varepsilon)^2+\beta^2}} + \int_k^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{(4x+\varepsilon)^2+\beta^2}} \\ &\quad + \sum_{n=k}^{\infty} \left[\frac{1}{2} \times 1 \times \left\{ \frac{1}{\sqrt{(4n+\varepsilon)^2+\beta^2}} - \frac{1}{\sqrt{\{4(n+1)+\varepsilon\}^2+\beta^2}} \right\} \right] \end{aligned} \tag{A.2.8}$$

を得る。ここで、第1項は級数和の部分、第2項は曲線の部分、第3項は三角形の部分を示している。第2項の積分は解析的に評価できる。そして、第3項の級数を展開表示すれば、

各項は連続的に交互に打ち消し合って、最終的には展開表示第１項だけが残る。従って、

$$F_{01}(\varepsilon,\beta) = \sum_{n=0}^{k-1} \frac{1}{\sqrt{(4n+\varepsilon)^2+\beta^2}} + \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{(4k+\varepsilon)^2+\beta^2}}$$

$$+ \int_k^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{(4x+\varepsilon)^2+\beta^2}} \qquad \text{(A.2.9)}$$

となる。この段階では積分を計算せずにこのままにしておく。

次に、関数$F_0(\varepsilon,\beta)$の式(A.2.7)第２項を$F_{02}(\varepsilon,\beta)$とおけば、$F_{01}(\varepsilon,\beta)$と全く同様の変形ができて、

$$F_{02}(\varepsilon,\beta) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{(4n+2+\varepsilon)^2+\beta^2}}$$

$$= \sum_{n=0}^{k-1} \frac{1}{\sqrt{(4n+\varepsilon+2)^2+\beta^2}} + \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{(4k+\varepsilon+2)^2+\beta^2}}$$

$$+ \int_k^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{(4x+\varepsilon+2)^2+\beta^2}} \qquad \text{(A.2.10)}$$

となる。ここでも、この段階では積分を計算せずにこのままにしておく。

以上の２式によって、関数$F_0(\varepsilon,\beta)$は次のようになる。

$$F_0(\varepsilon,\beta) = F_{01}(\varepsilon,\beta) - F_{02}(\varepsilon,\beta)$$

$$= \sum_{n=0}^{k-1} \left\{ \frac{1}{\sqrt{(4n+\varepsilon)^2+\beta^2}} - \frac{1}{\sqrt{(4n+\varepsilon+2)^2+\beta^2}} \right\}$$

$$+ \frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{\sqrt{(4k+\varepsilon)^2+\beta^2}} - \frac{1}{\sqrt{(4k+\varepsilon+2)^2+\beta^2}} \right\}$$

$$+ \int_k^{\infty} \left\{ \frac{dx}{\sqrt{(4x+\varepsilon)^2+\beta^2}} - \frac{dx}{\sqrt{(4x+\varepsilon+2)^2+\beta^2}} \right\} \qquad \text{(A.2.11)}$$

上式の形になれば、積分を実行することができて、

$$F_0(\varepsilon,\beta) = \sum_{n=0}^{k-1} \left\{ \frac{1}{\sqrt{(4n+\varepsilon)^2+\beta^2}} - \frac{1}{\sqrt{(4n+\varepsilon+2)^2+\beta^2}} \right\}$$

$$+ \frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{\sqrt{(4k+\varepsilon)^2+\beta^2}} - \frac{1}{\sqrt{(4k+\varepsilon+2)^2+\beta^2}} \right\}$$

$$+ \frac{1}{4} \ln \frac{\sqrt{(4k+\varepsilon+2)^2+\beta^2} + (4k+\varepsilon+2)}{\sqrt{(4k+\varepsilon)^2+\beta^2} + (4k+\varepsilon)} \qquad \text{(A.2.12)}$$

を得ることとなる。ここで、第１項は級数和の部分、第２項は三角形の部分、第３項は曲線の部分を示している。上式を導いたことによって、$F_0(\varepsilon,\beta)$を(A.2.5)式のまま計算するよりも、少ない採用項数kで精度よく計算することが可能となった訳である。そして、上式は$\beta=0$の場合にも成立するものである。

以上のことをまとめておく。浅水域及び岸壁浅水域でのGreen関数はそれぞれ(A.1.31)及び(A.1.33)式にて表され、浅水域Green関数$G_s(P,Q)$に含まれる修正関数$G_h(P,Q)$、あるいは、岸壁浅水域Green関数$G_w(P,Q)$に含まれる修正関数$G_{hR}(P,Q)$及び$G_{hL}(P,Q)$は、それぞれ上式の$F_0(\varepsilon,\beta)$を利用することによって数値計算することができる。

まず、$G_h(P,Q)$について示せば、

$$G_h(P,Q) = \frac{1}{h} \{ F_0(z_a,R_h) + F_0(z_b,R_h) - F_0(z_c,R_h) - F_0(z_d,R_h) \} \qquad \text{(A.2.2)}_{再記}\ \text{(A.2.13)}_{-1}$$

$$z_a = 2 - \frac{(z+z')}{h} \qquad \text{(A.2.4)}_{-1\text{-}再記}\ \text{(A.2.13)}_{-2}$$

$$z_b = 2 + \frac{(z+z')}{h} \qquad \text{(A.2.4)}_{-2\text{-}再記}\ \text{(A.2.13)}_{-3}$$

$$z_c = 2 - \frac{(z-z')}{h} \qquad \text{(A.2.4)}_{-3\text{-}再記}\ \text{(A.2.13)}_{-4}$$

$$z_d = 2 + \frac{(z-z')}{h} \qquad \text{(A.2.4)}_{-4\text{-}再記}\ \text{(A.2.13)}_{-5}$$

$$R_h = \frac{\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2}}{h} \qquad \text{(A.2.4)}_{-5\text{-}再記}\ \text{(A.2.13)}_{-6}$$

となる。次に、$G_{hR}(P,Q)$は$G_h(P,Q)$と全く同じものであるから、

$$G_{hR}(P,Q) \quad = \quad G_h(P,Q) \tag{A.2.14}$$

であり、$G_{hL}(P,Q)$はR_hに含まれるy'の項を$(-2w-y')$に置き換えれば良いだけなので、

$$G_{hL}(P,Q) \quad = \quad \frac{1}{h}\left\{ F_0(z_a,R_{Lh}) + F_0(z_b,R_{Lh}) - F_0(z_c,R_{Lh}) - F_0(z_d,R_{Lh}) \right\} \qquad (\mathrm{A.2.15})_{-1}$$

$$R_{Lh} = \frac{\sqrt{(x-x')^2+(y+2w+y')^2}}{h} \qquad (\mathrm{A.2.15})_{-2}$$

となる。ここで、z_a, z_b, z_c, z_dは(A.2.13)式のものと全く同じである。

A．３　Green関数の微分およびその数値計算法

Green関数の境界における法線微分を計算するときのために、それぞれのGreen関数についてsource point Q による微分を計算しておく。まずは、浅水域Green関数$G_s(P,Q)$に関する計算について述べる。$G_s(P,Q)$は、

$$G_s(P,Q) \quad = \quad G_\infty(P,Q) \; + \; G_h(P,Q) \qquad (\mathrm{A.1.31})_{-1\text{-再記}}$$

$$G_\infty(P,Q) \quad = \quad \frac{1}{r_1} \; - \; \frac{1}{r_2} \qquad (\mathrm{A.1.31})_{-2\text{-再記}}$$

$$G_h(P,Q) \quad = \quad \int_0^\infty \frac{2\,e^{-kh}\sinh kz' \,\sinh kz}{\cosh kh} J_0(kR)\,dk \qquad (\mathrm{A.1.31})_{-3\text{-再記}}$$

にて表され、その一部を構成する無限水深のGreen関数$G_\infty(P,Q)$の微分を計算すれば、

$$\frac{\partial G_\infty(P,Q)}{\partial x'} \quad = \quad \frac{(x-x')}{r_1^3} \; - \; \frac{(x-x')}{r_2^3} \qquad (\mathrm{A.3.1})_{-1}$$

$$\frac{\partial G_\infty(P,Q)}{\partial y'} \quad = \quad \frac{(y-y')}{r_1^3} \; - \; \frac{(y-y')}{r_2^3} \qquad (\mathrm{A.3.1})_{-2}$$

$$\frac{\partial G_\infty(P,Q)}{\partial z'} \quad = \quad \frac{(z-z')}{r_1^3} \; + \; \frac{(z+z')}{r_2^3} \qquad (\mathrm{A.3.1})_{-3}$$

を得る。そして、修正関数$G_h(P,Q)$の変数変換した式

$$G_h(P,Q) \quad = \quad \frac{1}{h}\int_0^\infty \frac{2\,e^{-t}\sinh z't/h \,\sinh zt/h}{\cosh t} J_0(Rt/h)\,dt \qquad (\mathrm{A.2.1})_{\text{再記}}$$

を準備しておけば、その微分は、

$$\begin{aligned}
\frac{\partial G_h(P,Q)}{\partial x'} &= \frac{1}{h}\int_0^\infty \frac{2\,e^{-t}\sinh z't/h \,\sinh zt/h}{\cosh t} \frac{d\,J_0(Rt/h)}{d\,R} \frac{\partial R}{\partial x'}\,dt \\
&= \frac{1}{h}\int_0^\infty \frac{2\,e^{-t}\sinh z't/h \,\sinh zt/h}{\cosh t} \left\{-t/h\,J_1(Rt/h)\right\} \frac{-(x-x')}{R}\,dt \\
&= \frac{(x-x')}{h^3}\frac{h}{R}\int_0^\infty \frac{2\,e^{-t}\sinh z't/h \,\sinh zt/h}{\cosh t}\, t\,J_1(Rt/h)\,dt \qquad (\mathrm{A.3.2})_{-1}
\end{aligned}$$

$$\frac{\partial G_h(P,Q)}{\partial y'} = \frac{1}{h}\int_0^\infty \frac{2\ e^{-t}\ \sinh z't/h\ \sinh zt/h}{\cosh t}\ \frac{d\,J_0(Rt/h)}{d\,R}\ \frac{\partial R}{\partial y'}\ dt$$

$$= \frac{1}{h}\int_0^\infty \frac{2\ e^{-t}\ \sinh z't/h\ \sinh zt/h}{\cosh t}\ \{-t/h\ J_1(Rt/h)\}\ \frac{-(y-y')}{R}\ dt$$

$$= \frac{(y-y')}{h^3}\ \frac{h}{R}\int_0^\infty \frac{2\ e^{-t}\ \sinh z't/h\ \sinh zt/h}{\cosh t}\ t\,J_1(Rt/h)\ dt \qquad \text{(A.3.2)}_{-2}$$

$$\frac{\partial G_h(P,Q)}{\partial z'} = \frac{1}{h}\int_0^\infty \frac{2\ e^{-t}\ \sinh zt/h\ J_0(Rt/h)}{\cosh t}\ \frac{\partial \sinh z't/h}{\partial z'}\ dt$$

$$= \frac{1}{h}\int_0^\infty \frac{2\ e^{-t}\ \sinh zt/h\ J_0(Rt/h)}{\cosh t}\ \{t/h \cosh z't/h\}\ dt$$

$$= \frac{1}{h^2}\int_0^\infty \frac{2\ e^{-t}\ \cosh z't/h\ \sinh zt/h}{\cosh t}\ t\,J_0(Rt/h)\ dt \qquad \text{(A.3.2)}_{-3}$$

となる。これら$G_h(P,Q)$の微分式について、さらに分解計算を進めれば、

$$\frac{\partial G_h(P,Q)}{\partial x'} = \frac{(x-x')}{h^3}\ \{F_1(z_a,R_h)+F_1(z_b,R_h)-F_1(z_c,R_h)-F_1(z_d,R_h)\} \qquad \text{(A.3.3)}_{-1}$$

$$\frac{\partial G_h(P,Q)}{\partial y'} = \frac{(y-y')}{h^3}\ \{F_1(z_a,R_h)+F_1(z_b,R_h)-F_1(z_c,R_h)-F_1(z_d,R_h)\} \qquad \text{(A.3.3)}_{-2}$$

$$\frac{\partial G_h(P,Q)}{\partial z'} = \frac{1}{h^2}\ \{F_2(z_a,R_h)-F_2(z_b,R_h)+F_2(z_c,R_h)-F_2(z_d,R_h)\} \qquad \text{(A.3.3)}_{-3}$$

となる。ここで、関数$F_1(\varepsilon,\beta)$及び$F_2(\varepsilon,\beta)$の定義は、

$$F_1(\varepsilon,\beta) = \frac{1}{\beta}\int_0^\infty \frac{t}{1+e^{-2t}}\ e^{-\varepsilon t}\ J_1(\beta t)\ dt \qquad (0\leqq\varepsilon,0\leqq\beta) \qquad \text{(A.3.4)}_{-1}$$

$$F_2(\varepsilon,\beta) = \int_0^\infty \frac{t}{1+e^{-2t}}\ e^{-\varepsilon t}\ J_0(\beta t)\ dt \qquad (0\leqq\varepsilon,0\leqq\beta) \qquad \text{(A.3.4)}_{-2}$$

である。また、z_a,z_b,z_c,z_d,R_hの定義と値域は(A.2.4)式に示したものと全く同じである。従って、関数$F_1(\varepsilon,\beta)$及び$F_2(\varepsilon,\beta)$を数値計算することができれば、(A.3.3)式によって修正関数$G_h(P,Q)$の微分も数値計算できることとなる。関数$F_1(\varepsilon,\beta)$及び$F_2(\varepsilon,\beta)$の展開方法については文献[64]（著者,1988)に詳しく記されているので、ここではその結果だけをかくこととすれば、

$$F_1(\varepsilon,\beta) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\{(2n+\varepsilon)^2+\beta^2\}^{3/2}} \qquad (0\leqq\varepsilon,0\leqq\beta) \qquad \text{(A.3.5)}_{-1}$$

$$F_2(\varepsilon,\beta) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n\ (2n+\varepsilon)}{\{(2n+\varepsilon)^2+\beta^2\}^{3/2}} \qquad (0\leqq\varepsilon,0\leqq\beta) \qquad \text{(A.3.5)}_{-2}$$

となる。これによって、修正関数$G_h(P,Q)$の微分も数値計算できることとなった。しかし、この段階では、その計算精度はnの採用項数に依存する。

一方、(A.3.3)式の微分関係は、(A.2.2)式の修正関数$G_h(P,Q)$を微分しても得られるはずである。この方法で計算してみると、

$$G_h(P,Q) = \frac{1}{h}\ \{F_0(z_a,R_h)+F_0(z_b,R_h)-F_0(z_c,R_h)-F_0(z_d,R_h)\} \qquad \text{(A.2.2)}_{\text{再記}}$$

であるから、これを微分して、

$$\frac{\partial G_h(P,Q)}{\partial x'} = \frac{1}{h}\ \frac{\partial R_h}{\partial x'}\ \{\frac{d\,F_0(z_a,R_h)}{d\,R_h}+\frac{d\,F_0(z_b,R_h)}{d\,R_h}-\frac{d\,F_0(z_c,R_h)}{d\,R_h}-\frac{d\,F_0(z_d,R_h)}{d\,R_h}\}$$

$$= \frac{1}{h}\ \frac{-(x-x')}{hR}\ (-R_h)\ \{F_1(z_a,R_h)+F_1(z_b,R_h)-F_1(z_c,R_h)-F_1(z_d,R_h)\}$$

$$= \frac{(x-x')}{h^3}\ \{F_1(z_a,R_h)+F_1(z_b,R_h)-F_1(z_c,R_h)-F_1(z_d,R_h)\} \qquad \text{(A.3.6)}_{-1}$$

$$\frac{\partial G_h(P,Q)}{\partial y'} = \frac{1}{h}\ \frac{\partial R_h}{\partial y'}\ \{\frac{d\,F_0(z_a,R_h)}{d\,R_h}+\frac{d\,F_0(z_b,R_h)}{d\,R_h}-\frac{d\,F_0(z_c,R_h)}{d\,R_h}-\frac{d\,F_0(z_d,R_h)}{d\,R_h}\}$$

$$= \frac{1}{h}\ \frac{-(y-y')}{hR}\ (-R_h)\ \{F_1(z_a,R_h)+F_1(z_b,R_h)-F_1(z_c,R_h)-F_1(z_d,R_h)\}$$

$$= \frac{(y-y')}{h^3}\ \{F_1(z_a,R_h)+F_1(z_b,R_h)-F_1(z_c,R_h)-F_1(z_d,R_h)\} \qquad \text{(A.3.6)}_{-2}$$

$$\frac{\partial G_h(P,Q)}{\partial z'} = \frac{1}{h}\left\{ \frac{dF_0(z_a,R_h)}{dz_a}\frac{\partial z_a}{\partial z'} + \frac{dF_0(z_b,R_h)}{dz_b}\frac{\partial z_b}{\partial z'} - \frac{dF_0(z_c,R_h)}{dz_c}\frac{\partial z_c}{\partial z'} - \frac{dF_0(z_d,R_h)}{dz_d}\frac{\partial z_d}{\partial z'} \right\}$$

$$= \frac{1}{h}\left\{ -F_2(z_a,R_h)\frac{-1}{h} - F_2(z_b,R_h)\frac{1}{h} + F_2(z_c,R_h)\frac{1}{h} + F_2(z_d,R_h)\frac{-1}{h} \right\}$$

$$= \frac{1}{h^2}\left\{ F_2(z_a,R_h) - F_2(z_b,R_h) + F_2(z_c,R_h) - F_2(z_d,R_h) \right\} \qquad (A.3.6)_{-3}$$

となる。これらは、それぞれ(A.3.3)に示した微分式と一致している。これによって、関数$F_1(\varepsilon,\beta)$及び$F_2(\varepsilon,\beta)$の展開式(A.3.5)に間違いがないことを確認したこととなる。

さて、ここでも関数$F_1(\varepsilon,\beta)$及び$F_2(\varepsilon,\beta)$の計算を効率良く行うための変形を行う。それぞれの展開式(A.3.5)を少し変形すれば、

$$F_1(\varepsilon,\beta) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\{(4n+\varepsilon)^2+\beta^2\}^{3/2}} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\{(4n+2+\varepsilon)^2+\beta^2\}^{3/2}} \qquad (A.3.7)_{-1}$$

$$F_2(\varepsilon,\beta) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{4n+\varepsilon}{\{(4n+\varepsilon)^2+\beta^2\}^{3/2}} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{4n+2+\varepsilon}{\{(4n+2+\varepsilon)^2+\beta^2\}^{3/2}} \qquad (A.3.7)_{-2}$$

となる。上式第1項をそれぞれ$F_{11}(\varepsilon,\beta)$及び$F_{21}(\varepsilon,\beta)$とおいて、これを作図により求めようとすればFig.A.2.1と同様に、Fig.A.3.1及びFig.A.3.2を得る。

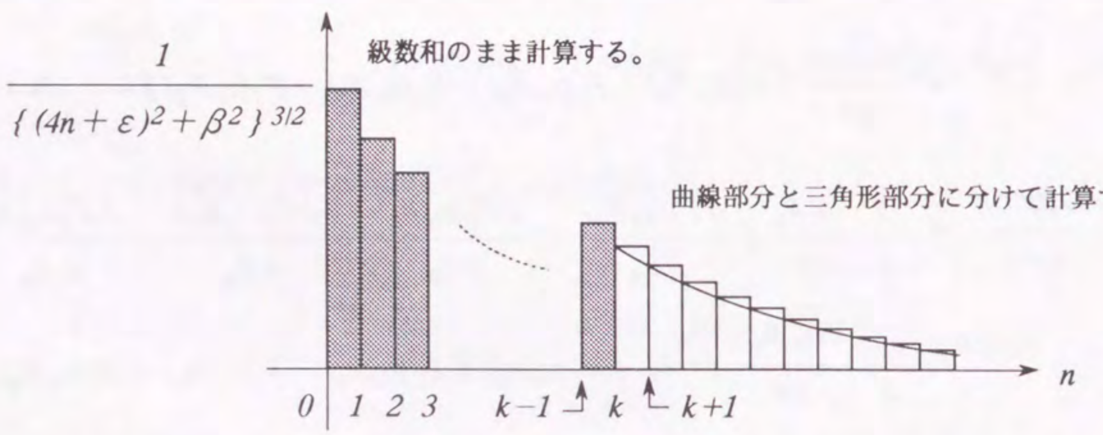


Fig.A.3.1　$F_{11}(\varepsilon,\beta)$の計算方法

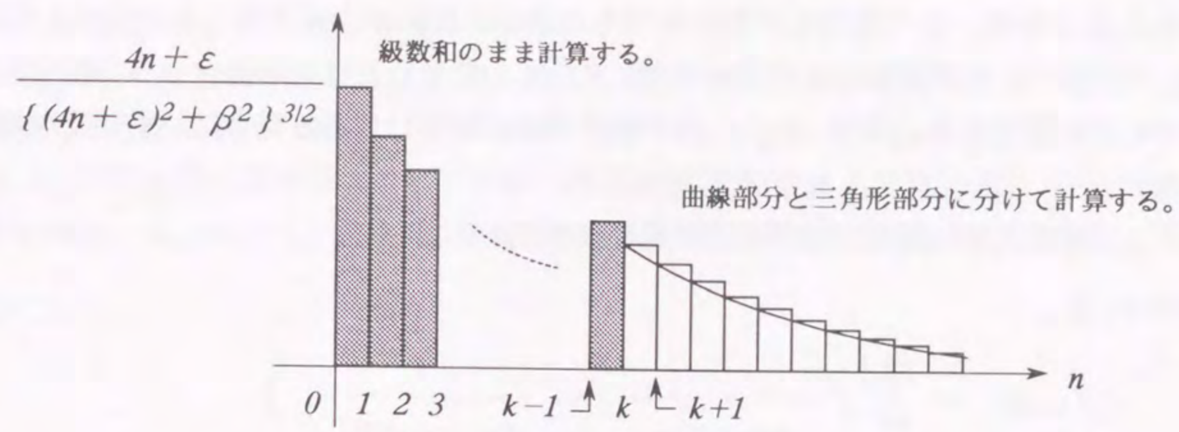


Fig.A.3.2　$F_{21}(\varepsilon,\beta)$の計算方法

これらの図では、関数値の変化の大きい最初の$n=0$項から$n=(k-1)$項までを級数の和として計算し、残りの部分を曲線部分と三角形部分との面積として計算する様子を示している。三角形部分の面積は、$F_{01}(\varepsilon,\beta)$の場合と同様に、各項が連続的に交互に打ち消し合って最終的には展開表示第1項だけが残ることとなる。さらに、(A.3.7)式第2項をそれぞれ$F_{12}(\varepsilon,\beta)$及び$F_{22}(\varepsilon,\beta)$とおいて同様の検討を行えば、やはり同じ結果となる。従って、

$$F_1(\varepsilon,\beta) = \sum_{n=0}^{k-1} \left\{ \frac{1}{\{(4n+\varepsilon)^2+\beta^2\}^{3/2}} - \frac{1}{\{(4n+2+\varepsilon)^2+\beta^2\}^{3/2}} \right\}$$
$$+ \frac{1}{2}\left\{ \frac{1}{\{(4k+\varepsilon)^2+\beta^2\}^{3/2}} - \frac{1}{\{(4k+2+\varepsilon)^2+\beta^2\}^{3/2}} \right\}$$
$$+ \int_k^{\infty} \left\{ \frac{dx}{\{(4x+\varepsilon)^2+\beta^2\}^{3/2}} - \frac{dx}{\{(4x+2+\varepsilon)^2+\beta^2\}^{3/2}} \right\} \qquad (A.3.8)_{-1}$$

$$F_2(\varepsilon,\beta) = \sum_{n=0}^{k-1} \left\{ \frac{4n+\varepsilon}{\{(4n+\varepsilon)^2+\beta^2\}^{3/2}} - \frac{4n+2+\varepsilon}{\{(4n+2+\varepsilon)^2+\beta^2\}^{3/2}} \right\}$$
$$+ \frac{1}{2}\left\{ \frac{4k+\varepsilon}{\{(4k+\varepsilon)^2+\beta^2\}^{3/2}} - \frac{4k+2+\varepsilon}{\{(4k+2+\varepsilon)^2+\beta^2\}^{3/2}} \right\}$$
$$+ \int_k^{\infty} \left\{ \frac{(4x+\varepsilon)\,dx}{\{(4x+\varepsilon)^2+\beta^2\}^{3/2}} - \frac{(4x+2+\varepsilon)\,dx}{\{(4x+2+\varepsilon)^2+\beta^2\}^{3/2}} \right\} \qquad (A.3.8)_{-2}$$

を得ることとなる。この積分を計算すればその数値計算法が完成することとなる。なお、$F_2(\varepsilon,\beta)$の場合には問題はないのであるが、$F_1(\varepsilon,\beta)$の場合にはβの値によって積分計算を使い分ける必要がある。即ち、$F_1(\varepsilon,\beta)$の場合にはβがゼロとなる場合に特別の配慮を必要とする。

まず、上式の$F_1(\varepsilon,\beta)$について積分計算を実行すれば、

$\beta=0$のとき、

$$F_1(\varepsilon,\beta) = \sum_{n=0}^{k-1}\left\{\frac{1}{(4n+\varepsilon)^3}-\frac{1}{(4n+\varepsilon+2)^3}\right\} + \frac{1}{2}\left\{\frac{1}{(4k+\varepsilon)^3}-\frac{1}{(4k+\varepsilon+2)^3}\right\} + \frac{1}{8}\left\{\frac{1}{(4k+\varepsilon)^2}-\frac{1}{(4k+\varepsilon+2)^2}\right\} \qquad \text{(A.3.9)}_{-1}$$

$\beta\neq 0$のとき、

$$F_1(\varepsilon,\beta) = \sum_{n=0}^{k-1}\left\{\frac{1}{\{(4n+\varepsilon)^2+\beta^2\}^{3/2}}-\frac{1}{\{(4n+\varepsilon+2)^2+\beta^2\}^{3/2}}\right\} + \frac{1}{2}\left\{\frac{1}{\{(4k+\varepsilon)^2+\beta^2\}^{3/2}}-\frac{1}{\{(4k+\varepsilon+2)^2+\beta^2\}^{3/2}}\right\} + \frac{1}{4\beta^2}\left\{-\frac{4k+\varepsilon}{\sqrt{(4k+\varepsilon)^2+\beta^2}}+\frac{4k+\varepsilon+2}{\sqrt{(4k+\varepsilon+2)^2+\beta^2}}\right\} \qquad \text{(A.3.9)}_{-2}$$

を得ることとなる。

次に、(A.3.8)式の$F_2(\varepsilon,\beta)$について積分計算を実行すれば、

$$F_2(\varepsilon,\beta) = \sum_{n=0}^{k-1}\left\{\frac{4n+\varepsilon}{\{(4n+\varepsilon)^2+\beta^2\}^{3/2}}-\frac{4n+\varepsilon+2}{\{(4n+\varepsilon+2)^2+\beta^2\}^{3/2}}\right\} + \frac{1}{2}\left\{\frac{4k+\varepsilon}{\{(4k+\varepsilon)^2+\beta^2\}^{3/2}}-\frac{4k+\varepsilon+2}{\{(4k+\varepsilon+2)^2+\beta^2\}^{3/2}}\right\} + \frac{1}{4}\left\{\frac{1}{\sqrt{(4k+\varepsilon)^2+\beta^2}}-\frac{1}{\sqrt{(4k+\varepsilon+2)^2+\beta^2}}\right\} \qquad \text{(A.3.10)}$$

を得ることとなる。

(A.3.9)及び(A.3.10)の計算式で、第１項は級数和の部分、第２項は三角形の部分、第３項は曲線の部分を示している。これらの計算式を導いたことによって、$F_1(\varepsilon,\beta)$及び$F_2(\varepsilon,\beta)$を(A.3.5)式のまま計算するよりも、少ない採用項数kで精度よく計算することが可能となった訳である。以上により、浅水域Green関数$G_S(P,Q)$に関する微分計算は実行可能となった。

次に、岸壁浅水域Green関数$G_W(P,Q)$について述べる。$G_W(P,Q)$は、

$$G_W(P,Q) = G_{\infty R}(P,Q) + G_{hR}(P,Q) + G_{\infty L}(P,Q) + G_{hL}(P,Q) \qquad \text{(A.1.33)}_{\text{-1-再記}}$$

$$G_{\infty R}(P,Q) = \frac{1}{r_{1R}} - \frac{1}{r_{2R}} \qquad \text{(A.1.33)}_{\text{-2-再記}}$$

$$G_{\infty L}(P,Q) = \frac{1}{r_{1L}} - \frac{1}{r_{2L}} \qquad \text{(A.1.33)}_{\text{-3-再記}}$$

$$G_{hR}(P,Q) = \int_0^\infty \frac{2\, e^{-kh} \sinh kz' \sinh kz}{\cosh kh} J_0(kR_R)\, dk \qquad \text{(A.1.33)}_{\text{-4-再記}}$$

$$G_{hL}(P,Q) = \int_0^\infty \frac{2\, e^{-kh} \sinh kz' \sinh kz}{\cosh kh} J_0(kR_L)\, dk \qquad \text{(A.1.33)}_{\text{-5-再記}}$$

にて表される。まず、その一部を構成する無限水深のGreen関数$G_{\infty R}(P,Q)$及び$G_{\infty L}(P,Q)$の微分を計算することとすれば、$G_{\infty R}(P,Q)$は$G_\infty(P,Q)$と全く同じものであるから(A.3.1)式と同形で、

$$\frac{\partial G_{\infty R}(P,Q)}{\partial x'} = \frac{(x-x')}{r_{1R}^3} - \frac{(x-x')}{r_{2R}^3} = \frac{\partial G_\infty(P,Q)}{\partial x'} \qquad \text{(A.3.11)}_{-1}$$

$$\frac{\partial G_{\infty R}(P,Q)}{\partial y'} = \frac{(y-y')}{r_{1R}^3} - \frac{(y-y')}{r_{2R}^3} = \frac{\partial G_\infty(P,Q)}{\partial y'} \qquad \text{(A.3.11)}_{-2}$$

$$\frac{\partial G_{\infty R}(P,Q)}{\partial z'} = \frac{(z-z')}{r_{1R}^3} + \frac{(z+z')}{r_{2R}^3} = \frac{\partial G_\infty(P,Q)}{\partial z'} \qquad \text{(A.3.11)}_{-3}$$

にて表され、$G_{\infty L}(P,Q)$の微分には多少の注意が必要で、

$$\frac{\partial G_{\infty L}(P,Q)}{\partial x'} = \frac{(x-x')}{r_{1L}{}^3} - \frac{(x-x')}{r_{2L}{}^3} \tag{A.3.12)$_{-1}$ (}$$

$$\frac{\partial G_{\infty L}(P,Q)}{\partial y'} = -\frac{(y+2w+y')}{r_{1L}{}^3} + \frac{(y+2w+y')}{r_{2L}{}^3} \qquad \text{(A.3.12)}_{-2}$$

$$\frac{\partial G_{\infty L}(P,Q)}{\partial z'} = \frac{(z-z')}{r_{1L}{}^3} + \frac{(z+z')}{r_{2L}{}^3} \qquad \text{(A.3.12)}_{-3}$$

となる。また、修正関数$G_{hR}(P,Q)$及び$G_{hL}(P,Q)$の微分計算において、$G_{hR}(P,Q)$は$G_h(P,Q)$と全く同じものであるから(A.3.3)式と同形で、

$$\frac{\partial G_{hR}(P,Q)}{\partial x'} = \frac{(x-x')}{h^3}\{F_1(z_a,R_{Rh}) + F_1(z_b,R_{Rh}) - F_1(z_c,R_{Rh}) - F_1(z_d,R_{Rh})\}$$

$$= \frac{\partial G_h(P,Q)}{\partial x'} \qquad \text{(A.3.13)}_{-1}$$

$$\frac{\partial G_{hR}(P,Q)}{\partial y'} = \frac{(y-y')}{h^3}\{F_1(z_a,R_{Rh}) + F_1(z_b,R_{Rh}) - F_1(z_c,R_{Rh}) - F_1(z_d,R_{Rh})\}$$

$$= \frac{\partial G_h(P,Q)}{\partial y'} \qquad \text{(A.3.13)}_{-2}$$

$$\frac{\partial G_{hR}(P,Q)}{\partial z'} = \frac{1}{h^2}\{F_2(z_a,R_{Rh}) - F_2(z_b,R_{Rh}) + F_2(z_c,R_{Rh}) - F_2(z_d,R_{Rh})\}$$

$$= \frac{\partial G_h(P,Q)}{\partial z'} \qquad \text{(A.3.13)}_{-3}$$

となる。ここで、記号z_a, z_b, z_c, z_dはそれぞれ(A.2.13)式と同じものであって、R_{Rh}は、

$$R_{Rh} = \frac{\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2}}{h} = R_h \qquad \text{(A.3.14)}$$

である。

さて、修正関数$G_{hL}(P,Q)$の微分計算には多少の注意が必要である。(A.2.1)式と同形の、変数変換した式

$$G_{hL}(P,Q) = \frac{1}{h}\int_0^\infty \frac{2\,e^{-t}\sinh z't/h\,\sinh zt/h}{\cosh t} J_0(R_L\,t/h)\,dt \qquad \text{(A.3.15)}$$

を準備しておけば、その微分は、

$$\frac{\partial G_{hL}(P,Q)}{\partial x'} = \frac{1}{h}\int_0^\infty \frac{2\,e^{-t}\sinh z't/h\,\sinh zt/h}{\cosh t}\,\frac{d\,J_0(R_L\,t/h)}{d\,R_L}\,\frac{\partial\,R_L}{\partial x'}\,dt$$

$$= \frac{1}{h}\int_0^\infty \frac{2\,e^{-t}\sinh z't/h\,\sinh zt/h}{\cosh t}\{-t/h\,J_1(R_L\,t/h)\}\,\frac{-(x-x')}{R_L}\,dt$$

$$= \frac{(x-x')}{h^3}\,\frac{h}{R_L}\int_0^\infty \frac{2\,e^{-t}\sinh z't/h\,\sinh zt/h}{\cosh t}\,t\,J_1(R_L\,t/h)\,dt \qquad \text{(A.3.16)}_{-1}$$

$$\frac{\partial G_{hL}(P,Q)}{\partial y'} = \frac{1}{h}\int_0^\infty \frac{2\,e^{-t}\sinh z't/h\,\sinh zt/h}{\cosh t}\,\frac{d\,J_0(R_L\,t/h)}{d\,R_L}\,\frac{\partial\,R_L}{\partial y'}\,dt$$

$$= \frac{1}{h}\int_0^\infty \frac{2\,e^{-t}\sinh z't/h\,\sinh zt/h}{\cosh t}\{-t/h\,J_1(R_L\,t/h)\}\,\frac{(y+2w+y')}{R_L}\,dt$$

$$= \frac{-(y+2w+y')}{h^3}\,\frac{h}{R_L}\int_0^\infty \frac{2\,e^{-t}\sinh z't/h\,\sinh zt/h}{\cosh t}\,t\,J_1(R_L\,t/h)\,dt$$

--------------- (A.3.16)$_{-2}$

$$\frac{\partial G_{hL}(P,Q)}{\partial z'} = \frac{1}{h}\int_0^\infty \frac{2\,e^{-t}\sinh zt/h\,J_0(R_L\,t/h)}{\cosh t}\,\frac{\partial\sinh z't/h}{\partial z'}\,dt$$

$$= \frac{1}{h}\int_0^\infty \frac{2\,e^{-t}\sinh zt/h\,J_0(R_L\,t/h)}{\cosh t}\{t/h\cosh z't/h\}\,dt$$

$$= \frac{1}{h^2}\int_0^\infty \frac{2\,e^{-t}\cosh z't/h\,\sinh zt/h}{\cosh t}\,t\,J_0(R_L\,t/h)\,dt \qquad \text{(A.3.16)}_{-3}$$

となる。これら$G_{hL}(P,Q)$の微分式について、さらに分解計算を進めれば、

$$\frac{\partial G_{hL}(P,Q)}{\partial x'} = \frac{(x-x')}{h^3}\{F_1(z_a,R_{Lh})+F_1(z_b,R_{Lh})-F_1(z_c,R_{Lh})-F_1(z_d,R_{Lh})\} \qquad \text{(A.3.17)}_{-1}$$

$$\frac{\partial G_{hL}(P,Q)}{\partial y'} = \frac{-(y+2w+y')}{h^3}\{F_1(z_a,R_{Lh})+F_1(z_b,R_{Lh})-F_1(z_c,R_{Lh})-F_1(z_d,R_{Lh})\}$$

------------------ (A.3.17)$_{-2}$

$$\frac{\partial G_{hL}(P,Q)}{\partial z'} = \frac{1}{h^2}\{F_2(z_a,R_{Lh})-F_2(z_b,R_{Lh})+F_2(z_c,R_{Lh})-F_2(z_d,R_{Lh})\} \qquad \text{(A.3.17)}_{-3}$$

を得る。これが、最終的な計算式であって、R_{Lh}は(A.2.15)式でも利用したが、

$$R_{Lh} = \frac{\sqrt{(x-x')^2+(y+2w+y')^2}}{h} \qquad \begin{array}{l}\text{(A.2.15)}_{-2\text{-再記}}\\ \text{(A.3.18)}\end{array}$$

である。$G_{hR}(P,Q)$と$G_{hL}(P,Q)$の微分において、注意するべきはy'による微分である。その他即ちx'及びz'による微分には符号の反転はないが、y'による微分には符号の反転が生じる。同じことは、$G_{\infty R}(P,Q)$と$G_{\infty L}(P,Q)$の微分に関してもいえる。

A．4　Green関数およびその微分の数値計算精度

Green関数およびその微分の数値計算を効率的に行うために、関数$F_0(\varepsilon,\beta)$、$F_1(\varepsilon,\beta)$及び$F_2(\varepsilon,\beta)$の効果的な計算方法を示した。その有効性を示すために、それぞれの計算精度についてその具体例を示す。

具体的な計算を行うために、

$$\varepsilon = 2.0 \qquad \text{(A.4.1)}_{-1}$$

$$\beta = 1.0 \qquad \text{(A.4.1)}_{-2}$$

を仮定する。これは、(A.2.4)式に示したz_a,z_b,z_c,z_d及びR_hの値域にあって、その代表的な値を示すものである。

まず、関数$F_0(\varepsilon,\beta)$についてみてみよう。関数$F_0(\varepsilon,\beta)$の完全なる解を求めるのは不可能であるが、無限級数のうち1000項ほど採用すれば、これはほぼ完全なる解とみなすことができるであろう。そこで、関数$F_0(\varepsilon,\beta)$の定義式(A.2.5)を少し変形した式

$$F_0(\varepsilon,\beta) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{(4n+\varepsilon)^2+\beta^2}} - \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{(4n+2+\varepsilon)^2+\beta^2}} \qquad \text{(A.2.7)}_{\text{再記}}$$

において、$n=0\sim1000$まで採用したものを正解とみなすこととする。これに対して、$n=0\sim k$まで採用したものは正解値の何パーセントになるかを示したものがFig.A.4.1である。例えば、$n=0\sim0$の場合の計算結果は$k=0$にプロットされ、$n=0\sim50$の場合の計算結果は$k=50$にプロットされている。kが大きくなるほどに、正解に近づく様子がわかる。さらに、同図には、工夫した計算方法(A.2.12)

$$\begin{aligned} F_0(\varepsilon,\beta) = & \sum_{n=0}^{k-1}\left\{\frac{1}{\sqrt{(4n+\varepsilon)^2+\beta^2}} - \frac{1}{\sqrt{(4n+\varepsilon+2)^2+\beta^2}}\right\} \\ & + \frac{1}{2}\left\{\frac{1}{\sqrt{(4k+\varepsilon)^2+\beta^2}} - \frac{1}{\sqrt{(4k+\varepsilon+2)^2+\beta^2}}\right\} \\ & + \frac{1}{4}\ln\frac{\sqrt{(4k+\varepsilon+2)^2+\beta^2}+(4k+\varepsilon+2)}{\sqrt{(4k+\varepsilon)^2+\beta^2}+(4k+\varepsilon)} \end{aligned} \qquad \text{(A.2.12)}_{\text{再記}}$$

による結果も載せている。これも、$k=1$の場合の計算結果は$k=1$にプロットされ、$k=50$の場合の計算結果は$k=50$にプロットされている。やはり、kが大きくなるほどに正解に近づく様子がわかる。

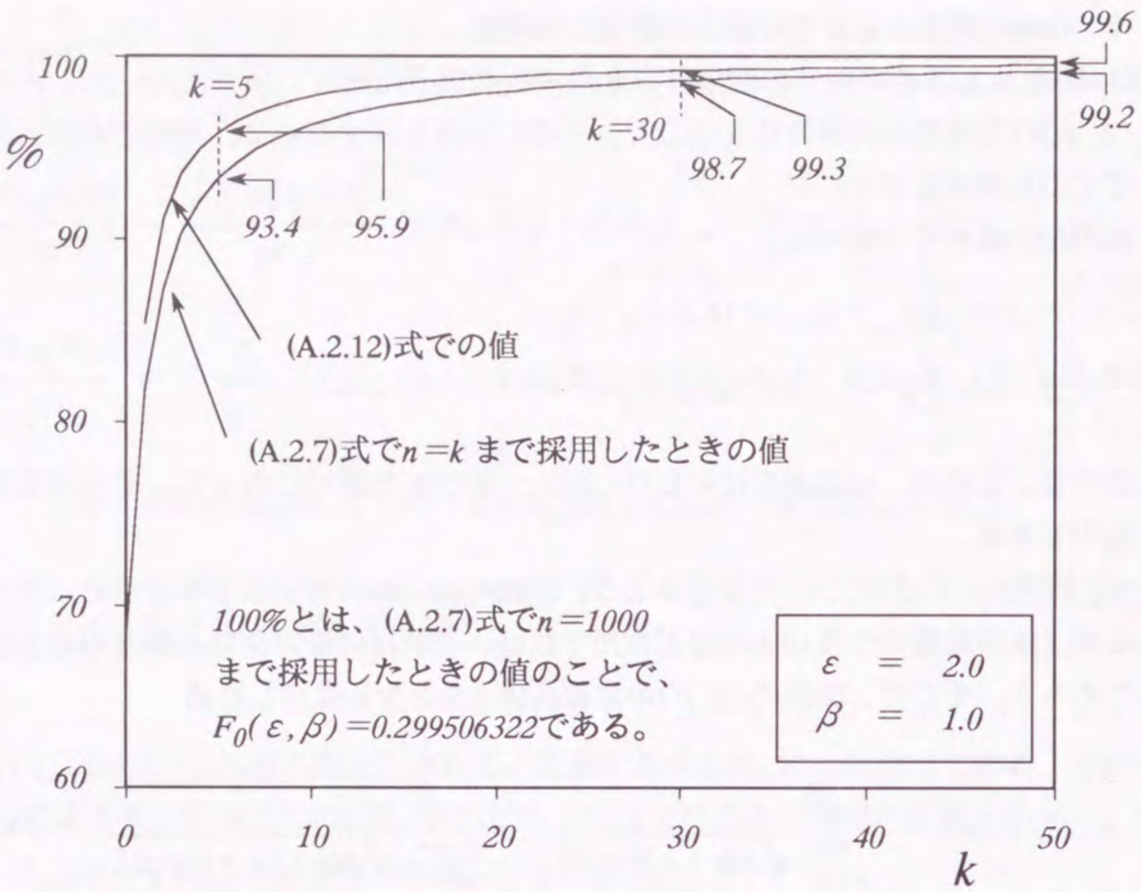


Fig.A.4.1　関数$F_0(\varepsilon,\beta)$の収束状況

Fig.A.4.1より、関数$F_0(\varepsilon,\beta)$は比較的収束の悪い関数であることがわかる。$k=50$まで計算しても99.2%までしか得ることができず、工夫した方法を用いても99.6%までとなっている。実際のBEM計算では$k=50$までも採用するのは非現実的で、せいぜい$k=5$くらいでなんとかしたいのが実状である。$k=5$にて両者を比較してみるとそれぞれ93.4%及び95.9%で、工夫した方法(A.2.12)式の方が相当効果的であることが良くわかる。最近の計算機はかなり高性能になっているので、本論文における数値計算では$k=30$を採用している。とはいえ、これにはかなりの計算時間がかかっており、やはり$k=30$は実用的ではないと感じている。なお、kが大きくなるほどに正解に近づくのではあるが、工夫した方法(A.2.12)の優位性は薄れることとなる。それでも、必ず(A.2.7)式よりは正解値に近くなることに間違いはない。

次に、関数$F_1(\varepsilon,\beta)$についてみてみよう。ここでも、関数$F_1(\varepsilon,\beta)$の定義式(A.3.5)の第１式を少し変形した式

$$F_1(\varepsilon,\beta) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{\{(4n+\varepsilon)^2+\beta^2\}^{3/2}} - \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{\{(4n+2+\varepsilon)^2+\beta^2\}^{3/2}} \qquad \text{(A.3.7)}_{\text{-1-再記}}$$

において、$n=0\sim1000$まで採用したものを正解とみなすこととする。これに対して、$n=0\sim k$まで採用したものは正解値の何パーセントになるかを示したものがFig.A.4.2であり、ここには工夫した計算方法(A.3.9)の第２式

$$\begin{aligned} F_1(\varepsilon,\beta) = & \sum_{n=0}^{k-1}\left\{\frac{1}{\{(4n+\varepsilon)^2+\beta^2\}^{3/2}} - \frac{1}{\{(4n+\varepsilon+2)^2+\beta^2\}^{3/2}}\right\} \\ & + \frac{1}{2}\left\{\frac{1}{\{(4k+\varepsilon)^2+\beta^2\}^{3/2}} - \frac{1}{\{(4k+\varepsilon+2)^2+\beta^2\}^{3/2}}\right\} \\ & + \frac{1}{4\beta^2}\left\{-\frac{4k+\varepsilon}{\sqrt{(4k+\varepsilon)^2+\beta^2}} + \frac{4k+\varepsilon+2}{\sqrt{(4k+\varepsilon+2)^2+\beta^2}}\right\} \qquad \text{(A.3.9)}_{\text{-2-再記}} \end{aligned}$$

による結果も載せている。両者ともに、kが大きくなるほどに正解に近づく様子がわかる。

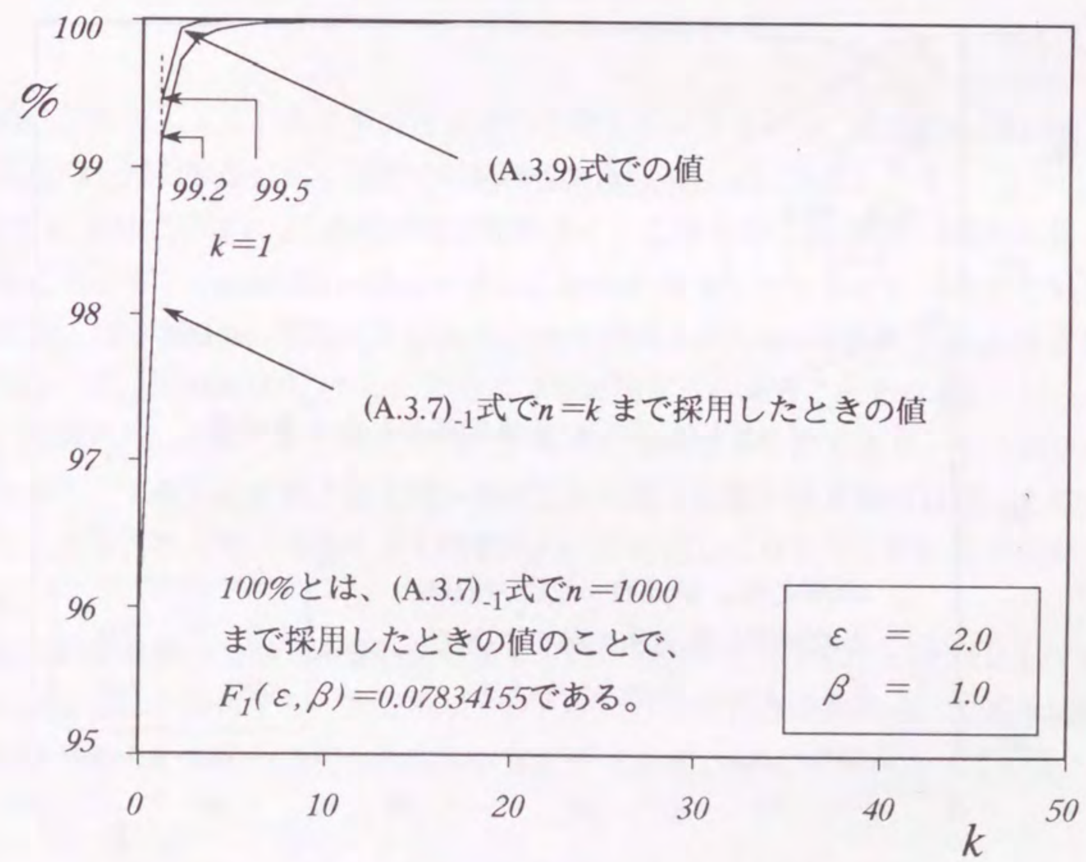


Fig.A.4.2　関数$F_1(\varepsilon,\beta)$の収束状況

また、Fig.A.4.2より、関数$F_1(\varepsilon,\beta)$はかなり収束の良い関数であることもわかる。$k=20$程度でほぼ100%となっており、工夫した方法を用いた場合には$k=5$程度でほぼ100%となっている。本論文のように$k=30$を採用した場合には、工夫した計算方法(A.3.9)の優位性は非常に薄れるが、それでも、必ず(A.3.7)式よりは正解値に近くなる。

次に、関数$F_2(\varepsilon,\beta)$についてみてみよう。ここでも、関数$F_2(\varepsilon,\beta)$の定義式(A.3.5)の第２式を少し変形した式

$$F_2(\varepsilon,\beta) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{4n+\varepsilon}{\{(4n+\varepsilon)^2+\beta^2\}^{3/2}} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{4n+2+\varepsilon}{\{(4n+2+\varepsilon)^2+\beta^2\}^{3/2}} \qquad \text{(A.3.7)}_{\text{-2-再記}}$$

において、$n=0\sim1000$まで採用したものを正解とみなすこととする。これに対して、$n=0\sim k$まで採用したものは正解値の何パーセントになるかを示したものがFig.A.4.3である。

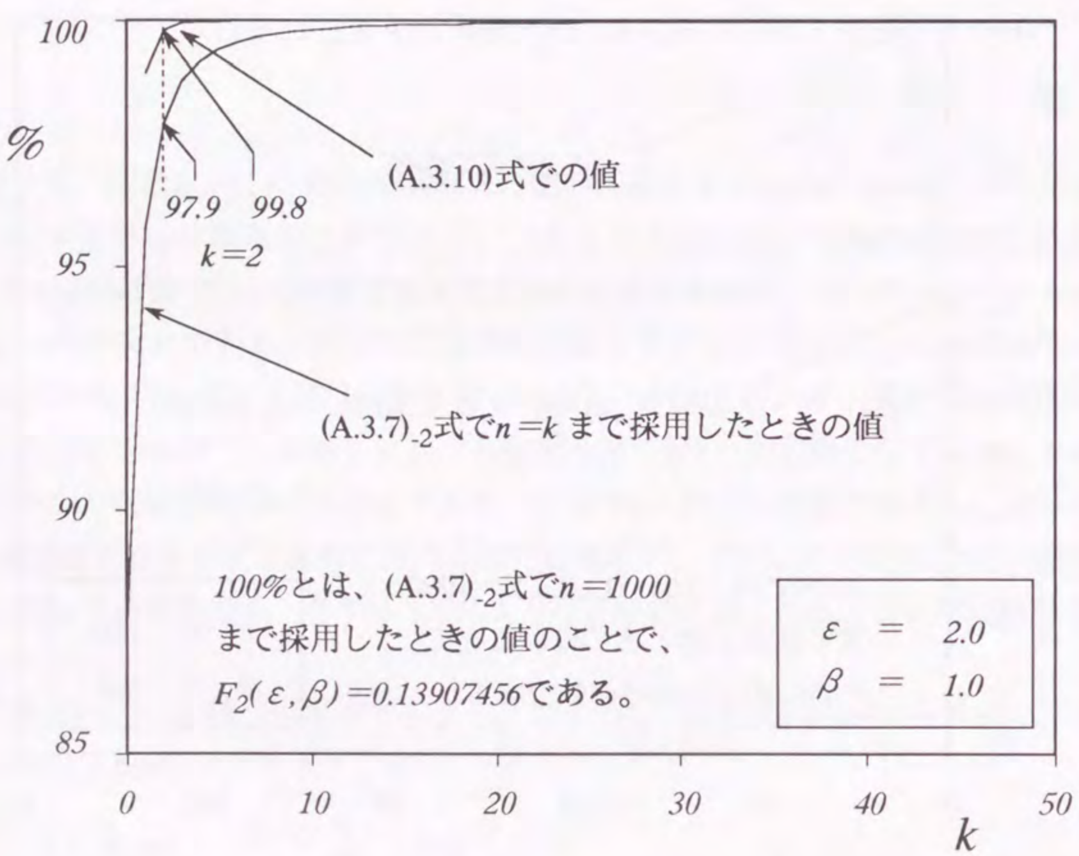


Fig.A.4.3　関数$F_2(\varepsilon,\beta)$の収束状況

同図には工夫した計算方法(A.3.10)

$$F_2(\varepsilon,\beta) = \sum_{n=0}^{k-1} \left\{ \frac{4n+\varepsilon}{\{(4n+\varepsilon)^2+\beta^2\}^{3/2}} - \frac{4n+\varepsilon+2}{\{(4n+\varepsilon+2)^2+\beta^2\}^{3/2}} \right\}$$
$$+ \frac{1}{2} \left\{ \frac{4k+\varepsilon}{\{(4k+\varepsilon)^2+\beta^2\}^{3/2}} - \frac{4k+\varepsilon+2}{\{(4k+\varepsilon+2)^2+\beta^2\}^{3/2}} \right\}$$
$$+ \frac{1}{4} \left\{ \frac{1}{\sqrt{(4k+\varepsilon)^2+\beta^2}} - \frac{1}{\sqrt{(4k+\varepsilon+2)^2+\beta^2}} \right\} \qquad \text{(A.3.10)}_{\text{再記}}$$

による結果も載せている。

Fig.A.4.3より、両者ともにkが大きくなるほどに正解に近づく様子がわかる。また、関数$F_2(\varepsilon,\beta)$は、関数$F_1(\varepsilon,\beta)$ほどではないが比較的収束の良い関数であることもわかる。
$k=40$程度でほぼ100%となっており、工夫した方法を用いた場合には$k=5$程度でほぼ100%となっている。本論文のように$k=30$を採用した場合には工夫した計算方法(A.3.10)の優位性は薄れることとなるが、それでも、必ず(A.3.7)式よりは正解値に近くなる。

以上のことから、工夫した計算方法を用いる最大のメリットは、比較的収束が悪くなっている関数$F_0(\varepsilon,\beta)$を少ない採用項数で計算することにあるといえる。

関数$F_1(\varepsilon,\beta)$及び$F_2(\varepsilon,\beta)$の収束は比較的良く、これらはGreen関数の微分に寄与するものであることから、Green関数の微分計算は比較的高精度で行えることとなるといえよう。具体的には、浅水域Green関数$G_s(P,Q)$あるいは岸壁浅水域Green関数$G_w(P,Q)$に含まれる修正関数$G_h(P,Q)$、$G_{hR}(P,Q)$及び$G_{hL}(P,Q)$の微分計算が高精度に行えることとなる。

一方、関数$F_0(\varepsilon,\beta)$はこれら修正関数そのものに寄与するものであり、その収束は比較的悪いことから、工夫した計算方法を用いねばこれら修正関数の計算精度は高いものとはならないこととなる。従って、少なくとも関数$F_0(\varepsilon,\beta)$に対しては工夫した計算方法を用いる必要がある。

これらの影響は積分方程式を離散化計算する際に現れてくるから、いずれにしても計算精度が高くなる方法を採用するべきである。ここに示した計算方法を利用して浅水域の問題について解き、さらに実験と比較した結果が文献[44]*(著者,1988)*にて述べられている。

B．１　数値積分の一般形

（１）曲面の表現と座標変換マトリクスの計算

数値積分を行う際には(3.5.1),(3.5.2)に示した関数N_kを形状関数N'_kとして利用する。ここでは、形状関数N'_kによる曲面の表現と、３．１節で示した座標変換マトリクスの計算方法、そしてA_{ij}, B_{ij}, C_{ij}に含まれる被積分関数の計算方法について述べる。

船体表面をメッシュ分割したときのある要素mについて考える。この要素mは節点によって定義されているものの、その節点によって張られる曲面そのものについては未だ定義されていなかった。要素mの曲面を表すために形状関数N'_kが利用されている。というよりは、節点の座標値とN'_kとを利用した補間によって曲面を構成することからN'_kは形状関数と呼ばれている、という方が正確であろう。要素m上の任意点Qにおける座標値$r_w(Q)$を節点座標r_{wk}によって補間して表そうとする様子をFig.B.1.1に示す。点Qの位置はξ_1, ξ_2の関数であるから、座標値$r_w(Q)$を$r_w(\xi_1, \xi_2)$と理解してもよい。あるいは、形状関数N'_kは$N'_k(\xi_1, \xi_2)$であるが、これを$N'_k(Q)$と理解してもよい。そして、点Qの絶対座標系における座標値は(x', y', z')であったから、座標値$r_w(Q)$とは(x', y', z')そのものを指す位置ベクトルのことである。

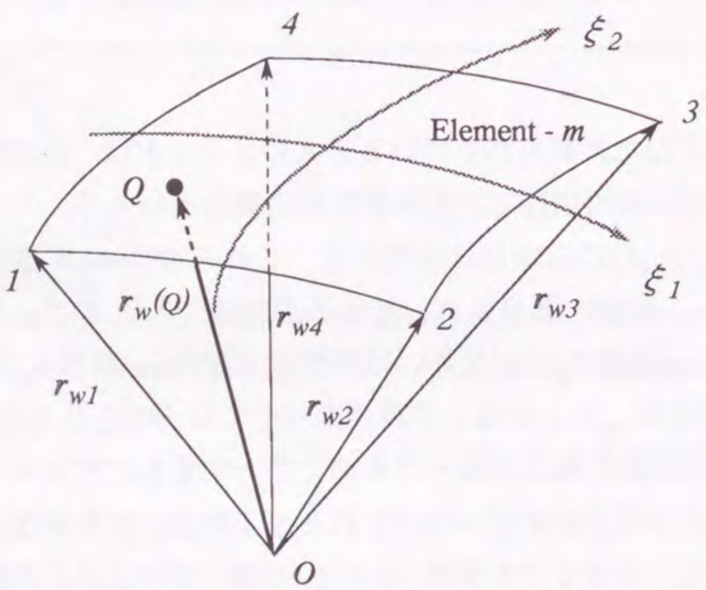


Fig.B.1.1　形状関数N'_kによる座標値の補間

本来、要素の節点が張る曲面はモデル化したい実物が持っている曲面と一致するように構成されるべきではあるが、曲面情報までモデル化することは面倒であるから、実物が持っている節点座標だけをモデルに織り込む訳である。その節点座標から補間によって曲面を構成し、これを実物が持っている曲面と一致するとみなすような近似をすることとなる。

さて、形状関数N'_kの関数値が曲面を構成する様子を本文Fig.3.5.2に示した。この重ね合わせによって節点によって張られる曲面を、

$$r_w(Q) \quad = \quad \sum_{k=1}^{k_{max}} N'_k(Q)\ r_{wk} \qquad \text{(B.1.1)}$$

と表すことができる。上式の関係は、「座標値$r_w(Q)$を内挿補間する」といわれるものである。この場合も、節点が要素mの一番外側にあってその内部の関数値を補間近似して表すことから、内挿補間という。

上式によって曲面は完全に定義されることとなったから、曲面上の単位法線ベクトル等の計算が行えるようになる。本文Fig.3.1.3に示した局部座標系の話に戻れば、そこで定義されていた単位接線ベクトルe_1, e_2及び単位法線ベクトルe_3はFig.B.1.2のようになる。

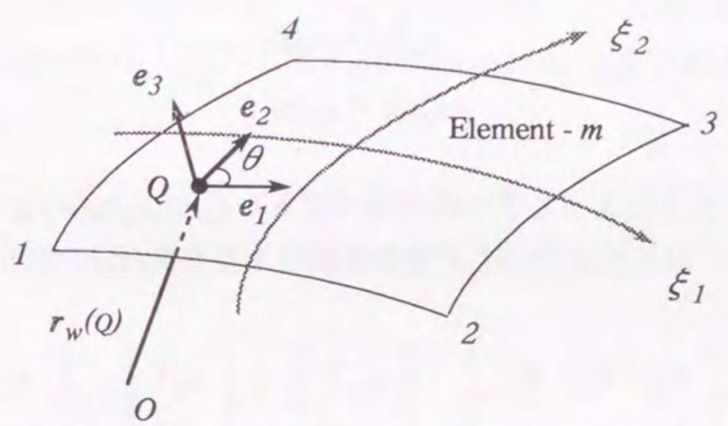


Fig.B.1.2　曲面における単位接線ベクトル及び単位法線ベクトル

よって、単位接線ベクトルe_1, e_2の式(3.1.2)に従えば、

$$e_1(Q) \quad = \quad \frac{\partial\, r_w(Q)}{\partial\, \xi_1} \Bigg/ \left| \frac{\partial\, r_w(Q)}{\partial\, \xi_1} \right| \qquad \text{(B.1.2)}_{-1}$$

$$e_2(Q) \quad = \quad \frac{\partial\, r_w(Q)}{\partial\, \xi_2} \Bigg/ \left| \frac{\partial\, r_w(Q)}{\partial\, \xi_2} \right| \qquad \text{(B.1.2)}_{-2}$$

となるから、右辺の微分計算を実行すれば単位接線ベクトルe_1, e_2を得ることができる。

曲面の式(B.1.1)の$r_w(Q)$に対して微分計算を実行すれば、この微分は形状関数$N'_k(Q)$だけに作用することになるから、

$$\frac{\partial r_w(Q)}{\partial \xi_1} = \sum_{k=1}^{k_{max}} \frac{\partial N'_k(Q)}{\partial \xi_1} r_{wk} \qquad \text{(B.1.3)}_{-1}$$

$$\frac{\partial r_w(Q)}{\partial \xi_2} = \sum_{k=1}^{k_{max}} \frac{\partial N'_k(Q)}{\partial \xi_2} r_{wk} \qquad \text{(B.1.3)}_{-2}$$

を得ることとなる。形状関数の微分$\partial N'_k(Q)/\partial \xi_1$及び$\partial N'_k(Q)/\partial \xi_2$は形状関数の式(3.5.1)及び(3.5.2)に対して行えば良いので既知となり、節点座標r_{wk}も既知であるから、曲面座標の微分値$\partial r_w(Q)/\partial \xi_1$及び$\partial r_w(Q)/\partial \xi_2$は完全に定まる。よって、単位接線ベクトル$e_1(Q)$及び$e_2(Q)$も完全に定まることとなる。これにより、単位法線ベクトル$e_3(Q)$も完全に定まって、(3.1.1)式より

$$\hat{n_{z0}}(Q) = e_3(Q) = \frac{e_1(Q) \times e_2(Q)}{| e_1(Q) \times e_2(Q) |} \qquad \text{(B.1.4)}$$

を得ることとなる。以上によって３つの単位ベクトル$e_1(Q),e_2(Q),e_3(Q)$が完全に定まったから、(3.1.11)式により、(3.1.27)式に示した座標変換マトリクス$[T_0]$の成分は全て既知となって

$$[T_0] = \begin{bmatrix} \hat{n_{xx}} & \hat{n_{xy}} & \hat{n_{xz}} \\ \hat{n_{yx}} & \hat{n_{yy}} & \hat{n_{yz}} \\ \hat{n_{zx}} & \hat{n_{zy}} & \hat{n_{zz}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{n_{x0}}^T \\ \hat{n_{y0}}^T \\ \hat{n_{z0}}^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{e_x}^T \\ \hat{e_y}^T \\ \hat{e_z}^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e_1^T \\ \{ e_3 \times e_1 \}^T \\ e_3^T \end{bmatrix} \qquad \text{(B.1.5)}$$

を得る。また、

$$\cos\theta = e_1(Q)^T e_2(Q) \qquad \text{(B.1.6)}_{-1}$$

$$\sin\theta = e_3(Q)^T \{ e_1(Q) \times e_2(Q) \} \qquad \text{(B.1.6)}_{-2}$$

なる関係があるから、(3.1.28)式に示した座標変換マトリクス$[T_1]$の成分も全て既知となって

$$[T_1] = \begin{bmatrix} \hat{n_{x1}}^T \\ \hat{n_{y1}}^T \\ \hat{n_{z1}}^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \cos\theta & 0 \\ 0 & \sin\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \text{(B.1.7)}$$

を知ることとなる。なお、本論文では要素をアイソパラメトリックとした計算を行っているので、最終的には$N'_k(Q) = N_k(Q)$とした単位法線ベクトル$\hat{n_{z0}}(Q)$を用いることになる。

さらに、単位法線ベクトル$\hat{n_{z0}}(Q)$が既知となり、Green関数およびその微分の計算方法についても付録Aにて詳しく述べたから、微分公式

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial n_{(Q)}} &= \frac{\partial x'}{\partial n_{(Q)}} \frac{\partial}{\partial x'} + \frac{\partial y'}{\partial n_{(Q)}} \frac{\partial}{\partial y'} + \frac{\partial z'}{\partial n_{(Q)}} \frac{\partial}{\partial z'} \\ &= \hat{n_{zx}} \frac{\partial}{\partial x'} + \hat{n_{zy}} \frac{\partial}{\partial y'} + \hat{n_{zz}} \frac{\partial}{\partial z'} \\ &= \hat{n_{z0}}(Q)^T \, grad_{(Q)}(\ ) \end{aligned} \qquad \text{(B.1.8)}$$

により、(3.5.10),(3.5.11),(3.5.17)式に示したA_{ij}, B_{ij}, C_{ij}の積分記号内部の計算は行えることになる。ただし、上式で*gradient*に付けた下添字$_{(Q)}$はsource point $Q\ (x',y',z')$での微分を意味するものである。

（２）数値積分のための変数変換

次に、面積分を表す微小面積要素$ds_{(Q)}$について述べる。一般に$ds_{(Q)}$は絶対座標系における積分を表しているが、これを曲線座標系のパラメータξ_1,ξ_2に関する積分に書き換える方が便利である。そこで、$ds_{(Q)}$を絶対座標系から曲線座標系へ変数変換すれば、

$$ds_{(Q)} = \left| \frac{\partial r_w(Q)}{\partial \xi_1} \times \frac{\partial r_w(Q)}{\partial \xi_2} \right| d\xi_1 \, d\xi_2 \qquad \text{(B.1.9)}$$

となる。上式の絶対値部分は接線ベクトルの外積となっていることから平行四辺形の面積となっていることが知れる。また、この部分は記号$|J|$を用いてJacobianと呼ばれており、

$$|J| = \left| \frac{\partial r_w(Q)}{\partial \xi_1} \times \frac{\partial r_w(Q)}{\partial \xi_2} \right| \qquad \text{(B.1.10)}$$

と定義される。また、絶対値とする前のJは接線ベクトルの外積となっているから、Jが持つ方向は法線方向と一致するものとなる。さらに、J　はξ_1,ξ_2の関数となることが明らかであるから、ξ_1,ξ_2の位置によって法線方向が異なることをも表すものとなる。これにより、計算プログラム上では、Jacobianと法線ベクトルが同時に得られることとなる。

上２式によって、Jacobian $|J|$を用いて絶対座標系から曲線座標系への変数変換の関係を表せば、

$$ds_{(Q)} = |J| \; d\xi_1 \, d\xi_2 \qquad \text{(B.1.11)}$$

となる。従って、被積分関数を$f_w(P,Q)$とおけば、その積分は、

$$\int_{\Delta S_H} f_w(P,Q) \; dS_{(Q)} = \int_{\Delta S_H(\xi_1,\xi_2)} f_w(P,Q(\xi_1,\xi_2)) \; |J| \; d\xi_1 \, d\xi_2 \qquad \text{(B.1.12)}$$

と表されることになる。上式右辺の形になれば、数値積分を行うことができるようになる。

Ｂ．２　四角形要素における数値積分

（１）通常の数値積分

四角形要素の場合について、その写像関係をFig.B.2.1に示す。

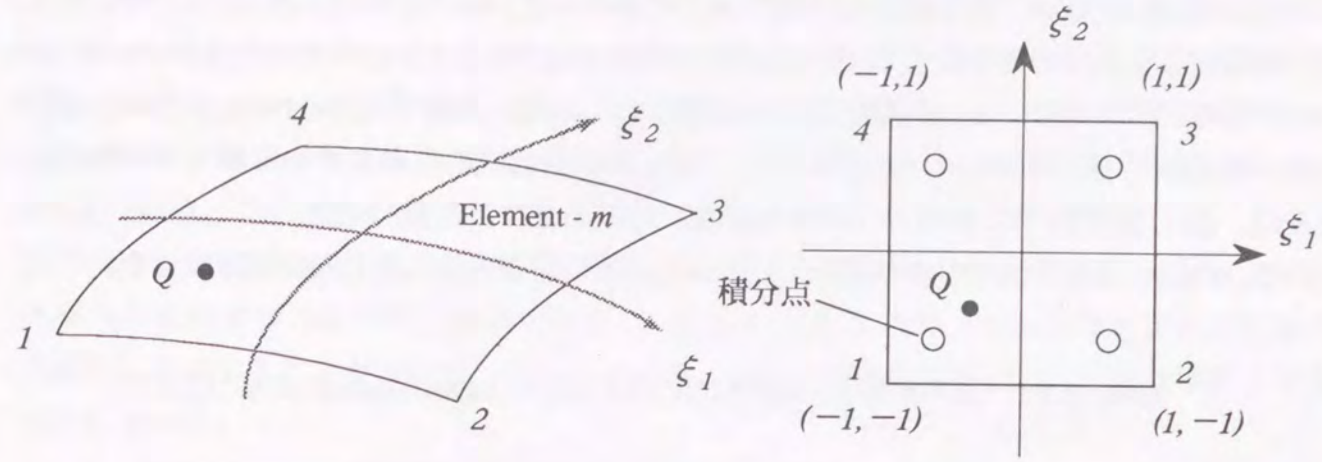


Fig.B.2.1　四角形要素の写像関係

４節点の四角形要素では同図のような曲線状の辺は得られず、直線的な辺しか構成できない。これは形状関数の式(3.5.2)からも明らかであるが、定式化を高次要素に対応して進めてきたことから同図のような曲面を描いている。例えば、四角形を８節点要素として表現すれば、同図のような曲線状の辺が得られる。

さて、曲線座標系のパラメータξ_1,ξ_2の変域を考慮すれば、積分式(B.1.12)は、

$$\int_{\Delta S_H} f_w(P,Q) \; dS_{(Q)} = \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} f_w(P,Q(\xi_1,\xi_2)) \; |J| \; d\xi_1 \, d\xi_2 \qquad \text{(B.2.1)}$$

となる。そして、上式右辺にGauss-Legendreの積分公式をあてはめれば、

$$\int_{\Delta S_H} f_w(P,Q) \; dS_{(Q)} = \sum_{i=1}^{ni_{max}} \sum_{j=1}^{nj_{max}} w_{1i} \; w_{2j} \; f_w(P,Q(\xi_{1i},\xi_{2j})) \quad |J(\xi_{1i},\xi_{2j})|$$

---------- (B.2.2)

となる。上式右辺を計算することにより数値積分は完了する。ここで、iはξ_1軸方向の積分点の番号、ni_{max}はξ_1軸方向の積分点総数を示し、同様に、jはξ_2軸方向の積分点の番号、nj_{max}はξ_2軸方向の積分点総数を示す。そして、各々の積分点に対する重みがw_{1i}及びw_{2j}である。また、ξ_{1i}は積分点番号iに対する座標値、ξ_{2j}は積分点番号jに対する座標値を示す。

P及びQはそれぞれ点P及び点Qの絶対座標系での位置を示すものであるが、点Pは積分とは関係のない項である。点Qは積分と関係があって、$Q(\xi_{1i},\xi_{2j})$は点Qがξ_{1i},ξ_{2j}の関数となっていることを表す。同様に、$|J(\xi_{1i},\xi_{2j})|$もJacobian $|J|$がξ_{1i},ξ_{2j}の関数となっていることを表す。Fig.B.2.1に示した積分点は全部で４つであり、ξ_1軸とξ_2軸の方向にそれぞれ２つずつの積分点をとった場合を示している。積分点をいくつ取ろうと公式を利用する者の勝手だけれども、それが多いほど高精度なことが知られている。文献[4] *(Zienkewicz,1977)*の8.8節あるいは文献[5] *(鷲津,1981)*の4.2.3節にて、１次元の積分公式の段階において積分点総数がnならば、$(2n-1)$次以下の多項式（被積分関数）は誤差ゼロにて積分できることが述べられている。Fig.B.2.1に示した４つの積分点について、その位置と重みをTable B.2.1に示す。

Table B.2.1　四角形要素の積分点および重み（Gauss-Legendreの積分公式）

積分点総数 $ni_{max}\times nj_{max}$	積分点 (ξ_{1i},ξ_{2j})	重み (w_{1i},w_{2j})
2×2	$\left(\frac{1}{\sqrt{3}},\ \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$	$(1.0,1.0)$
	$\left(\frac{1}{\sqrt{3}},\ -\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$	$(1.0,1.0)$
	$\left(-\frac{1}{\sqrt{3}},\ \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$	$(1.0,1.0)$
	$\left(-\frac{1}{\sqrt{3}},\ -\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$	$(1.0,1.0)$

さて、点Pも同一要素上にある場合には、Green関数に含まれる$1/r_1$のために２つの特異性が生じる。そのひとつは$1/r_1$そのものの特異性、もうひとつは$\partial(1/r_1)/\partial n$による特異性である。$\partial(1/r_1)/\partial n$の特異性は$1/r_1^2$となるために、その処理は特に難しい。点$P$が同一要素上にある場合には、$r_1\to 0$の領域で被積分関数の関数値に急激な変化が生じるために被積分関数を多項式で表した場合の次数が高くなって、数値積分による誤差が大きくなることが知られている。従って、点Pが同一要素上にあるときには、数値積分公式(B.2.2)を用いるべきではない。また、点Pにおける積分評価の結果として積分方程式に立体内角が含まれていることから、立体内角の項を積分内部に戻す操作をしない場合には、要素上の積分から点Pを除いた特異積分を行わねばならないこととなる。数値積分公式(B.2.2)は特異積分に対する公式ではないから、この場合にも用いるべきではない。

（２）特異積分

文献[59] *(田中,1991)*の3.6節によれば高次要素を採用した場合の$1/r_1^2$の処理方法も開発されている様[60] *(松本,1990)*である。この方法によれば$1/r_1^2$の特異性もキャンセルさせることができて、立体内角の項を積分内部に戻すことによって数値積分による計算が可能となる。この方法を利用しておれば、本論文における高次要素を用いるための定式化も一層有意義なものとなっていたであろう。しかし、本論文をまとめるにあたってこの方法を織り込む時間的余裕がなかったため、立体内角の項を積分内部に戻すような操作は行わずに、特異積分を正直に行う方法を採用している。それは、文献[58] *(松井,1988)*の手法に従って、$1/r_1^2$の特異性を簡単に処理するために平面要素を用いる方法である。平面要素ならば、$1/r_1^2$の特異性を処理するのは非常に簡単であり、$1/r_1$の特異性もキャンセルさせることができて解析的に計算することができる。従って、本論文における数値計算は全て平面要素によるものとしている。

(a) $1/r_1^2$の特異性

まず、$1/r_1^2$の特異性について述べる。点Pが要素mに含まれる様子をFig.B.2.2に示す。積分方程式を離散化する段階において点Pを要素節点に取ったから、ここではその一例として局部節点番号1の節点に点Pがある場合を示している。そして、点Qから点Pに向けてとった位置ベクトルをr_1と表しておく。

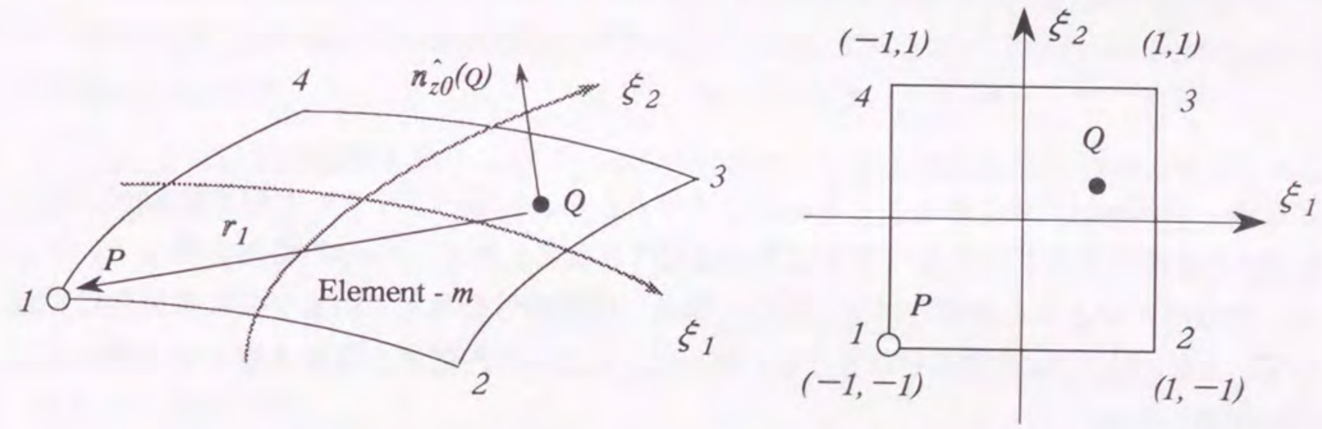


Fig.B.2.2　四角形要素の写像関係（特異積分）

Green関数$G_w(P,Q)$が$1/r_1$を含むことに注目して、これを$1/r_1$とその他の部分に分ければ

$$G_w(P,Q) = \frac{1}{r_1} + f(P,Q) \qquad \text{(B.2.3)}$$

と表すことができる。

上式を用いて、(3.5.10)式のA_{ij}に含まれる積分をかけば、

$$\left.\int_{\Delta S_H} f_w(P,Q)\ dS_{(Q)}\right|_{A_{ij}} = \int_{\Delta S_H} N_{k(j,m)}(Q)\ \frac{\partial\ G_w(P,Q)}{\partial\ n_{(Q)}}\ dS_{(Q)}$$

$$= \int_{\Delta S_H} N_{k(j,m)}(Q)\ \left\{ \frac{\partial}{\partial\ n_{(Q)}}\left(\frac{1}{r_1}\right) + \frac{\partial\ f(P,Q)}{\partial\ n_{(Q)}} \right\}\ dS_{(Q)} \quad \text{(B.2.4)}$$

となる。上式右辺第２項にあるその他の部分$f(P,Q)$には特異性は存在せず立体内角を定義する際にもその影響を省略できるから、第２項に関する積分は特異積分とはならず、数値積分公式(B.2.2)によってそのまま評価すればよいこととなる。これに対して、上式右辺第１項の$\partial(1/r_1)/\partial n$には特別の配慮を必要とする。この項についてはすでに立体内角を抽出した積分であるから、$P \neq Q$の範囲で積分を実行せねばならない。これを行うために微分公式(B.1.8)及び$G_\infty(P,Q)$の微分式群(A.3.1)第１項を利用すれば、

$$\frac{\partial}{\partial n_{(Q)}}\left(\frac{1}{r_1}\right) = \hat{n_{zx}}\frac{\partial}{\partial x'}\left(\frac{1}{r_1}\right) + \hat{n_{zy}}\frac{\partial}{\partial y'}\left(\frac{1}{r_1}\right) + \hat{n_{zz}}\frac{\partial}{\partial z'}\left(\frac{1}{r_1}\right)$$

$$= \frac{1}{r_1^3}\left\{ \hat{n_{zx}}\,(x-x') + \hat{n_{zy}}\,(y-y') + \hat{n_{zz}}\,(z-z') \right\}$$

$$= \frac{1}{r_1^3}\ \hat{n_{z0}}(Q)^T\ \boldsymbol{r_1} \quad \text{(B.2.5)}$$

となる。要素mが平面であることを仮定しているから、位置ベクトル$\boldsymbol{r_1}$と単位法線ベクトル$\hat{n_{z0}}(Q)$とは直交することとなって上式右辺はゼロとなる。また、$P \neq Q$の範囲を考えているから、分母がゼロとなる特異性は生じない。即ち、特異積分を考えているが故に特異性は消滅して、$\partial(1/r_1)/\partial n$は常にゼロとなる。従って、(B.2.4)式右辺第１項を考慮する必要がないことが導かれる。

以上により、(3.5.10)式のA_{ij}の積分部分において特異積分を計算する際には、その他の部分$f(P,Q)$だけを考慮して、

$$\left.\int_{\Delta S_H} f_w(P,Q)\ dS_{(Q)}\right|_{A_{ij}} = \int_{\Delta S_H} N_{k(j,m)}(Q)\ \frac{\partial\ G_w(P,Q)}{\partial\ n_{(Q)}}\ dS_{(Q)}$$

$$= \int_{\Delta S_H} N_{k(j,m)}(Q)\ \frac{\partial\ f(P,Q)}{\partial\ n_{(Q)}}\ dS_{(Q)} \quad \text{(B.2.6)}$$

となり、上式を数値積分公式(B.2.2)によってそのまま評価すればよいこととなる。また、点Pが自由表面にある場合には、$r_1=r_2$となって$G_\infty(P,Q)$の微分式群(A.3.1)は全てゼロとなることが知れるから、点Pが要素mに含まれていようがいまいが、$\partial G_\infty/\partial n$部分の計算をする必要はなくなる。なお、文献[58]（松井,1988）では高次要素であっても曲面の曲率が浅いことを仮定して、上式のまま計算してもよいことを述べている。本論文では回転楕円体に対して数値計算を行うので、曲率が浅いとの仮定は用いずに要素全てを平面で構成し、アイソパラメトリック１次要素を用いることとしたものである。

点Pが要素mに含まれている場合に$1/r_1^2$の特異性を有する積分はもうひとつある。それは(3.5.17)式のC_{ij}に含まれる積分である。C_{ij}に含まれるGreen関数は$G_0(P,Q)$で、$1/r_1$と$1/r_2$だけで構成されている。この場合にはその他の部分などと分けずにそのままかくことにすれば、r_1に関する項は前記同様にゼロとなるから、

$$\left.\int_{\Delta S_H} f_w(P,Q)\ dS_{(Q)}\right|_{C_{ij}} = \int_{\Delta S_H} N_{k(j,m)}(Q)\ \frac{\partial\ G_0(P,Q)}{\partial\ n_{(Q)}}\ dS_{(Q)}$$

$$= \int_{\Delta S_H} N_{k(j,m)}(Q)\ \frac{\partial}{\partial\ n_{(Q)}}\left(\frac{1}{r_2}\right)\ dS_{(Q)} \quad \text{(B.2.7)}$$

となる。上式を数値積分公式(B.2.2)によってそのまま評価すればよいこととなる。また、点Pが自由表面にある場合の特異性の積分評価は(3.4.7)式にて終えているから、r_1同様にr_2についてもゼロとする。

以上により、平面要素を用いれば、$1/r_1^2$の特異性を有する積分の評価は随分簡単に行えることがわかった。

(b) $1/r_1$の特異性

次に、$1/r_1$の特異性について述べる。これを有するのは、(3.5.11)式の$\mathbb{B}_{ij}$に含まれる積分である。(B.2.3)式で定義したその他の部分$f(P,Q)$を用いて、その積分についてかけば、

$$\left.\int_{\Delta S_H} f_w(P,Q)\ dS_{(Q)}\right|_{\mathbb{B}_{ij}} = \int_{\Delta S_H} \hat{n_{z0}}(Q)\ N_{k(j,m)}(Q)\ G_w(i,Q)\ dS_{(Q)}$$

$$= \int_{\Delta S_H} \hat{n_{z0}}(Q)\ N_{k(j,m)}(Q)\ \left\{\frac{1}{r_1} + f(P,Q)\right\}\ dS_{(Q)} \quad \text{(B.2.8)}$$

となる。上式右辺第２項にあるその他の部分$f(P,Q)$には特異性は存在せず特異積分とはならないから、数値積分公式(B.2.2)によってそのまま評価すればよいこととなる。これに対して、上式右辺第１項の$1/r_1$には特別の配慮を必要とする。この項についてはすでに立体内角を抽出する際の積分でその評価を終えているから、$P\neq Q$の範囲で積分を実行せねばならない。しかし、点Pと節点jとが一致しないときには、内挿関数の性質から点Pにおいて$N_{k(j,m)}(P)=0$となること、及び$dS_{(Q)}$によって$1/r_1$の特異性がキャンセルされることの２点から、点Pにおける関数値は必ずゼロとなることが知れる。従って、点Pと節点jとが一致しない場合には関数値がゼロとなるが故に特異積分とする必要はなくなって、$1/r_1$に関わる項についても数値積分公式(B.2.2)によって評価すればよいこととなる。ただし、点Pと節点jとが一致する場合には工夫を要する。その工夫の第１段階として、$1/r_1$と$N_{k(j,m)}(Q)$とを分離して上式右辺第１項を次のように変形する。

$$\int_{\Delta S_H} \hat{n_{z0}}(Q)\ N_{k(j,m)}(Q)\ \frac{1}{r_1}\ dS_{(Q)}$$

$$= \int_{\Delta S_H} \hat{n_{z0}}(Q)\ \{N_{k(j,m)}(Q)-1\}\ \frac{1}{r_1}\,dS_{(Q)} + \int_{\Delta S_H} \hat{n_{z0}}(Q)\ \frac{1}{r_1}\,dS_{(Q)} \qquad \text{------------ (B.2.9)}$$

上式右辺第１項の$\{N_{k(j,m)}(P)-1\}$は、点Pと節点jとが一致する場合にはゼロとなることがわかる。従って、$dS_{(Q)}$によって$1/r_1$の特異性がキャンセルされるから、点Pにおける関数値は必ずゼロとなる。関数値がゼロとなるが故に特異積分とする必要はなくなって、数値積分公式(B.2.2)によって評価すればよいこととなる。即ち、上式は、特異性を有する項から内挿関数による影響を分離し、$1/r_1$の特異性を右辺第２項に集中させて、これを別途計算することを意図するものである。

では、その工夫の第２段階として、上式右辺第２項を計算するために要素を２つの三角形に分割した様子をFig.B.2.3に示す。ここでは点Pが局部節点番号1の節点に一致するときを例として、局部節点番号$1,2,3$及び$1,3,4$から構成される２つの三角形を示し、それぞれ三角形PBCとして表せることを述べるものである。そして辺PCの長さをL_Bとおき、頂点B,Cの角度をθ_B, θ_Cとおいている。さらに、頂点Pから直線BCに降ろした垂線の足をHとおき、辺BC上の任意の点をDとおいた様子をFig.B.2.4に示す。そして、線分PDの長さをr_{max}としてこの上に点Qをとれば２点P,Q間の距離はr_1である。また、角DPHをθと表すこととすれば、角度θの変域は、

$$\theta_B - \frac{\pi}{2} \leqq \theta \leqq \frac{\pi}{2} - \theta_C \qquad \text{(B.2.10)}$$

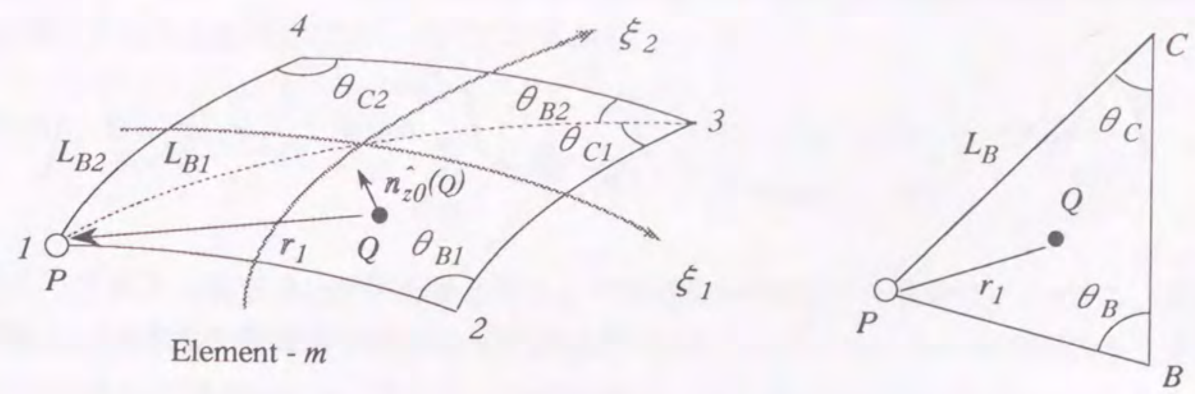


Fig.B.2.3　四角形要素の分割（特異積分）

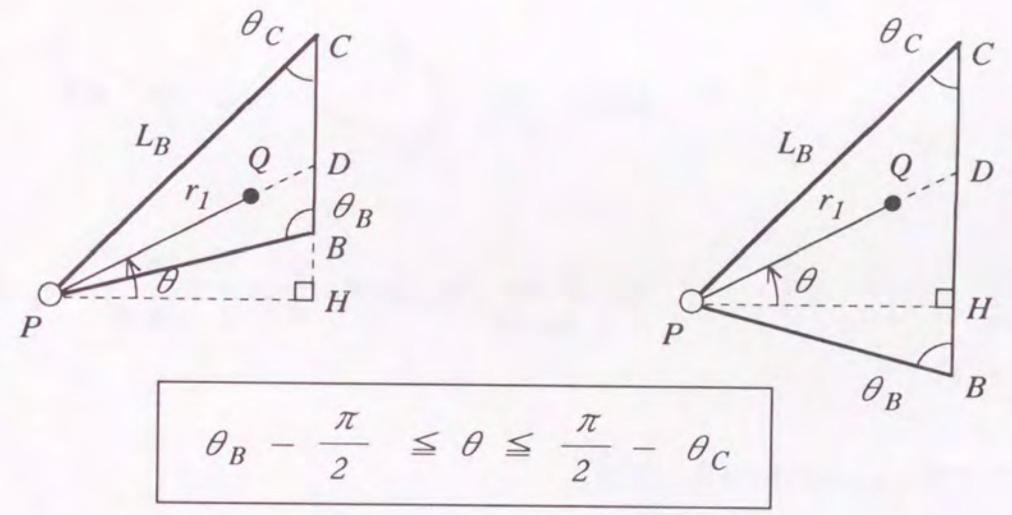


Fig.B.2.4　角度θの変域（特異積分）

となる。一方、三角形PHDについて考えれば、線分PDの長さr_{max}はθの関数となって、

$$r_{max} = L_B \ \sin\theta_C\ \frac{1}{\cos\theta} \qquad \text{(B.2.11)}$$

と表すことができる。また、微小面積要素$dS_{(Q)}$を極座標形式でかけば、

$$dS_{(Q)} = r_1\ dr_1\ d\theta \qquad \text{(B.2.12)}$$

となるから、(B.2.9)式右辺第２項の積分の三角形部分は、

$$\int_{\Delta S_H} \hat{n_{z0}}(Q)\ \frac{1}{r_1}\ dS_{(Q)} \Bigg|_{\Delta PBC} = \lim_{r_P \to 0} \int_{\theta_B - \frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2} - \theta_C} \int_{r_P}^{r_{max}} \hat{n_{z0}}(Q)\ \frac{1}{r_1}\ r_1\ dr_1\, d\theta \qquad \text{(B.2.13)}$$

となる。ここで、点Pを除外するために点Pを中心とする微小半径r_Pを定義しており、積分計算の後でその極限をとることとする。また、今考えているのは平面要素であるから、単位法線ベクトル$\hat{n_{z0}}(Q)$は積分領域を通じて一定値である。よって、$\hat{n_{z0}}(Q)$を積分記号の外へ出し、r_1を単にrとかくことにすれば、

$$\int_{\Delta S_H} \hat{n_{z0}}(Q)\ \frac{1}{r_1}\ dS_{(Q)} \Bigg|_{\Delta PBC} = \hat{n_{z0}}(Q)\ \lim_{r_P \to 0} \int_{\theta_B - \frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2} - \theta_C} \int_{r_P}^{r_{max}} dr\, d\theta$$

$$= \hat{n_{z0}}(Q)\ \lim_{r_P \to 0} \int_{\theta_B - \frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2} - \theta_C} (r_{max} - r_P)\ d\theta$$

$$= \hat{n_{z0}}(Q)\ \lim_{r_P \to 0} \left[L_B \sin\theta_C \frac{1}{2} \ln \frac{1+\sin\theta}{1-\sin\theta} - r_P\,\theta \right]_{\theta_B - \frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2} - \theta_C}$$

---------- (B.2.14)

となる。ここで、$r_P \to 0$の極限をとれば、

$$\int_{\Delta S_H} \hat{n_{z0}}(Q)\ \frac{1}{r_1}\ dS_{(Q)} \Bigg|_{\Delta PBC} = \hat{n_{z0}}(Q)\ L_B \sin\theta_C\ \frac{1}{2} \ln \left[\frac{(1+\cos\theta_C)(1+\cos\theta_B)}{(1-\cos\theta_C)(1-\cos\theta_B)} \right]$$

---------- (B.2.15)

を得る。上式によって特異積分はほぼ完了したこととなり、右辺を計算してその値を得ることができる。上式の対数関数の部分を文献[58]（松井,1988)の形式に合わせておくためには、$1/2$を対数関数内部に入れて頂点B,Cの角度θ_B, θ_Cの変域を考慮すれば良くて、

$$\int_{\Delta S_H} \hat{n_{z0}}(Q)\ \frac{1}{r_1}\ dS_{(Q)} \Bigg|_{\Delta PBC} = \hat{n_{z0}}(Q)\ L_B \sin\theta_C\ \ln \left[\frac{1}{\tan\frac{\theta_C}{2}}\ \frac{1}{\tan\frac{\theta_B}{2}} \right] \qquad \text{(B.2.16)}$$

となる。従って、４節点から構成される四角形要素の場合には、上式を２つの三角形について計算して加え合わせれば良いだけであるから、

$$\int_{\Delta S_H} \hat{n_{z0}}(Q)\ \frac{1}{r_1}\ dS_{(Q)} = \sum_{k=1}^{2} \hat{n_{z0}}(Q)\ L_{Bk} \sin\theta_{Ck}\ \ln \left[\frac{1}{\tan\frac{\theta_{Ck}}{2}}\ \frac{1}{\tan\frac{\theta_{Bk}}{2}} \right]$$

---------- (B.2.17)

を得る。上式によって工夫の第２段階は終了である。

以上によって、点Pと節点jとが一致する場合の式(B.2.9)の計算も行えるようになったから、$1/r_1$の特異性に関する式(B.2.8)についても全ての計算が行えるようになった訳である。これにて四角形要素の場合の積分計算法に関する説明を終える。

Ｂ．３　三角形要素における数値積分

（１）通常の数値積分

三角形要素の場合について、その写像関係をFig.B.3.1に示す。

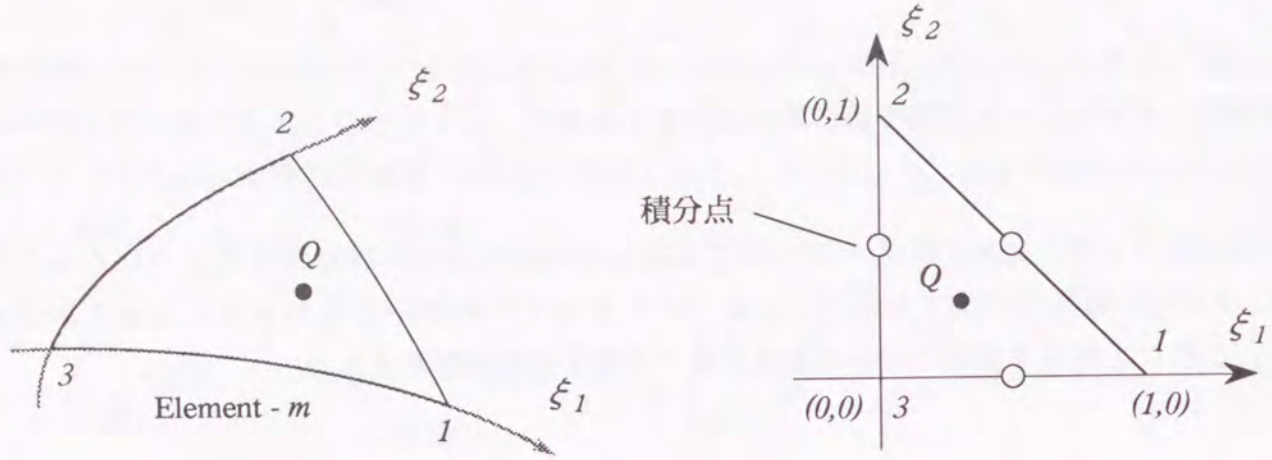


Fig.B.3.1　三角形要素の写像関係

３節点の三角形要素では同図のような曲面は得られず、完全な平面しか構成できない。これは形状関数の式(3.5.1)からも明らかであるが、定式化を高次要素に対応して進めてきたことから同図のような曲面を描いている。例えば、三角形を６節点要素として表現すれば、同図のような曲面が得られる。

さて、曲線座標系のパラメータ ξ_1, ξ_2 の変域を考慮すれば、積分式(B.1.12)は、

$$\int_{\Delta S_H} f_w(P,Q)\ dS_{(Q)} = \int_0^1 \int_0^{1-\xi_2} f_w(P,Q(\xi_1,\xi_2))\ \ |J|\ d\xi_1\ d\xi_2 \qquad \text{(B.3.1)}$$

となる。そして、上式右辺の積分範囲を視察すれば四角形要素のときとは違って、$1-\xi_2$ なる項があることに気づく。このままではGauss-Legendreの積分公式は使えないので、変数変換によって積分範囲を $(-1,1)$ にする方法が文献[66] *(原,1981)*の8.6節に紹介されている。しかし、この方法によれば三角形のある領域に密接した積分点をとってしまうことがあるので、そこでも述べられているように、Hammerの積分公式を用いることが推奨されている。頂点近傍あるいは底辺近傍に密接した積分点をとってしまう様子を分かり易く図で示した例として、文献[67] *(Tong,1977)*の6.5.3節がある。Hammerの積分公式は、文献[4] *(Zienkewicz,1977)*

の8.10節あるいは文献[5] *(鷲津,1981)*の4.2.4節にも紹介されており、その他の多くの書物で取り上げられている。従って、本論文においてもHammerの積分公式を用いることとし、３点公式における積分点をFig.B.3.1に示している。この公式においても積分点をいくつ取ろうと公式を利用する者の勝手であって、それが多いほど高精度なことが知られている。文献[68] *(Hammer,1956)*ではある定数 w_k に三角形の面積を乗じたものを重みとして整理しているが、ここでは、この重みをあらかじめ面積で除しておいたもの、即ち w_k そのものを重みとしてTable B.3.1 に示す。Fig.B.3.1の場合パラメータ ξ_1,ξ_2 による三角形の面積は $1/2$ であるから、$1/2$ を w_k に乗じた $w_k/2$ が文献[68] *(Hammer,1956)*にいう重みとなる。なお、添字 k は積分点の番号を示す。k 番目の積分点の位置を (ξ_{1k},ξ_{2k}) と表すこととすれば、Hammerの積分公式は、

$$\int_{\Delta S_H} f_w(P,Q)\ dS_{(Q)} = \sum_{k=1}^{nk_{max}} \frac{1}{2}\ w_k\ f_w(P,Q(\xi_{1k},\xi_{2k}))\ \ |J(\xi_{1k},\xi_{2k})| \qquad \text{---------- (B.3.2)}$$

となる。上式右辺を計算することにより数値積分は完了する。P 及び Q はそれぞれ点 P 及び点 Q の絶対座標系での位置を示すものであるが、点 P は積分とは関係のない項である。点 Q は積分と関係があって、$Q(\xi_{1k},\xi_{2k})$ は点 Q が ξ_{1k},ξ_{2k} の関数となっていることを表す。　同様に、$|J(\xi_{1k},\xi_{2k})|$ もJacobian $|J|$ が ξ_{1k},ξ_{2k} の関数となっていることを表す。なお、nk_{max} は積分点総数を示す。また、Jacobian $|J|$ を実際に計算すれば、３節点の三角形要素の場合には形状関数の式(3.5.1)から $|J|$ は定数となって、絶対座標系での三角形面積の２倍の値となることが知れる。６節点の三角形要素の場合には、$|J|$ は定数とはならず、曲面の部位によって異なった値が得られる。この意味で、$|J|$ は ξ_{1k},ξ_{2k} の関数となっている訳である。

Table B.3.1　三角形要素の積分点および重み（Hammerの積分公式）

積分点総数 nk_{max}	積分点 (ξ_{1k},ξ_{2k})	重み w_k
3	$(0,\ \frac{1}{2})$	$\frac{1}{3}$
	$(\frac{1}{2},\ 0)$	$\frac{1}{3}$
	$(\frac{1}{2},\ \frac{1}{2})$	$\frac{1}{3}$

（2）特異積分

点Pが要素mに含まれる場合には、四角形要素と同様に特異積分とする。

(a) $1/r_1^2$の特異性

A_{ij}及びC_{ij}に含まれる積分は$1/r_1^2$の特異性を有するから、三角形要素の場合にもそれを考慮せねばならない。しかし、３節点要素を用いる限り要素は必ず平面となるから、$1/r_1^2$の特異性においてr_1に関する項は前記同様にゼロとなる。従って、四角形要素の考え方をそのまま利用することができるので、A_{ij}に対しては(B.2.6)式、C_{ij}に対しては(B.2.7)式にて計算を行えばよいことになる。そして、それらの数値積分には、数値積分公式(B.3.2)を利用する訳である。

(b) $1/r_1$の特異性

B_{ij}に含まれる積分は$1/r_1$の特異性を有する。この場合にも、四角形要素の考え方をそのまま利用することができるから、(B.2.8),(B.2.9)式にて計算を行えばよいことになる。そして、それらの数値積分には、数値積分公式(B.3.2)を利用する訳である。また、工夫の第２段階に相当する計算は、三角形の式(B.2.16)にて行えばよいことになる。

以上によって、三角形要素の積分計算を行うことができる。これにて三角形要素の場合の積分計算法に関する説明を終える。