Title	円柱状および球状物体の電磁波散乱係数に関する研究
Author(s)	安藤，俊一
Citation	大阪大学，1985，博士論文
Version Type	VoR
URL	https://hdl.handle.net/11094/27677
rights	
Note	

円柱状および球状物体の電磁波散乱係数に関する研究

昭和60年3月

安　藤　俊　一

論　文　概　要

本論文は，著者が大阪工業大学において行った，円柱状および球状物体による電磁散乱波のモード振幅係数（以下，これを散乱係数という）についての一連の研究を，本文6章と付録1章にまとめたものである．

第1章　序　論

第1章では，円柱状および球状物体の電磁波散乱問題に関する研究の歴史的背景と現状について概説し，これまで多くの研究成果があるものの，未だ解明されていない問題点を挙げて，本研究の目的と地位を明確にしている．

第2章　無限長円柱物体のダイポール波励振

第2章では，均質な無限長円柱物体（以下，円柱という）の近くに円柱軸と平行に電気または磁気ダイポール波源を置いたときの遠点の散乱電磁界を，ヘルツベクトルと複素積分の鞍点法を用いて解析し，円柱の散乱係数を導出している．そして，散乱係数の性質を知るために，円柱の媒質が完全導体，誘電体および誘電性と磁性を共に示す場合について，円柱の代表的な固有モードに関する数値計算を行っている．ここでは，散乱係数の振幅周波数特性および代表的な周波数における円柱軸を含む面内の指向特性を示している．そして，媒質が低損失のときの散乱係数は各モードごとに入射周波数に対して多くの共振を示し，その共振周波数は散乱方向が円柱軸に近づくに従い高くなること，共振周波数の間隔も同様な傾向で広くなること，さらに，媒質の損失が大きくなるに従い共振は次第に減衰し媒質が完全導体のときの性質に近づくことなどを計算例で示している．また，円柱軸に直角で波源を含む面内の散乱係数は，円柱に軸と直角な方向から平面波が入射したときの円柱の散乱係数と同一になることも示している．

第3章　球状物体のダイポール波励振

第3章では，均質な球状物体（以下，球という）にダイポール波が入射したときの散乱

電磁界をグリーン関数を用いて解析し，球の磁気形および電気形散乱係数を導出している．そして，それらが平面波入射のときの散乱係数と同一になることを示している．さらに，この磁気形および電気形散乱係数は，円柱軸と平行に電気（または磁気）ダイポール波源を置いたときの円柱軸に直角で波源を含む面内の円柱の磁気形（または電気形）散乱係数とそれぞれ同じ形式になることを述べている．

第4章　円柱および球の散乱係数の統一的取扱い

第4章は，本論文の主要部分である．ここでは，第2章と第3章の結論から，円柱の磁気形および電気形散乱係数，球の磁気形および電気形散乱係数などを一つの式で統一的に表示し，さらに，この式を複素平面上の点（−1/2，0）を中心とする式に変形することにより，散乱係数の性質が見通しよく得られることを示している．すなわち，物体を構成する媒質が無損失または完全導体のときの散乱係数は常に複素平面上の点（−1/2，0）を中心とする半径1/2の円周上にあること，媒質に有限な損失があるときは点（−1/2，0）からの距離が1/2以下になること，媒質の定数が周波数に無関係であれば周波数が高くなるに従い点（−1/2，0）からの距離が一定の値に近づくことを示している．そして，媒質が低損失のときの散乱係数は各固有モードごとに共振を示し，その共振周波数間隔は媒質定数が大きくなるに従い狭くなること，共振周波数は損失の大きさによって大きく変化しないこと，媒質の損失が大きくなるに従い共振は次第に減衰し媒質が完全導体のときの性質に漸近することなどを数値計算例で示している．また，高い周波数領域における散乱係数の簡単な近似式を導出し，このときの磁気形および電気形散乱係数が相互に点（−1/2，0）に関してほぼ点対称の関係になることを示している．また，この近似式による値を厳密な値で評価し，近似式の適用範囲を示している．さらに，これらの散乱係数の性質を基にして，円柱および球の散乱断面積の適切な計算法を示している．

第5章　実　験

第5章では，散乱係数の解析の妥当性を実証するために行った誘電体および金属円柱に関する散乱実験について述べている．散乱係数を電磁界の中から分離して測定することは困難であるため，ここでは円柱の近くに軸と平行に線状空中線を置いたときの遠点における入射波と散乱波との合成電界強度を実測し，計算値と比較する方法を用いている．誘電

体としては純水および食塩水を用い，円柱の共振周波数における遠点の電界の水平面指向特性並びに媒質の損失に対する相対電界強度を実測し，計算値とよく一致することを示している．また，円柱軸に直角で波源を含む面内の散乱指向特性は，円柱の長さに無関係であることを確めている．さらに，工業用アルコールおよび固体の誘電体を用いた実験においても同様であることを述べている．また，銅の円筒を用いた場合も計算値とよく一致することを示している．このような実験では到底解析の全域にわたる確認は困難であるが，少くとも実測の範囲内では散乱係数の解析が妥当であることを実証している．

第6章　結　論

第6章は，以上の各章で得られた結果をまとめて結論としている．

付　録

付録は，本研究の値数計算に用いた複素ベッセル関数の数値計算法と，食塩水の損失係数の測定結果を示している．

目　　次

主要記号表

参照ページ

a：円柱および球の半径 …… 5, 29

ω：角周波数 …… 5

n：モード次数 …… 6, 40

$\varepsilon_0,\ \mu_0$：自由空間の誘電率と透磁率 …… 5

$\varepsilon_1,\ \mu_1$：円柱および球の誘電率と透磁率 …… 5

$\varepsilon_r=\varepsilon_1/\varepsilon_0=\varepsilon_{r0}(1-j\ \tan\delta_d)$：複素比誘電率 …… 5, 16

$\mu_r=\mu_1/\mu_0=\mu_{r0}(1-j\ \tan\delta_m)$：複素比透磁率 …… 5, 16

$k=\omega\sqrt{\varepsilon_0\cdot\mu_0}$：自由空間波数 …… 5

$k_1=\omega\sqrt{\varepsilon_1\cdot\mu_1}$：円柱および球の媒質波数 …… 7

$\boldsymbol{\pi},\ \boldsymbol{\pi}^*$：電気および磁気ヘルツベクトル …… 7

π_Z^p, π_Z^{*p}：１次界のZ方向の電気および磁気ヘルツベクトル …… 5

π_Z^{es}, π_Z^{*es}：波源が電気ダイポールのときの円柱散乱界のZ方向の電気および磁気ヘルツベクトル …… 6

π_Z^{er}, π_Z^{*er}：波源が電気ダイポールのときの円柱内部界のZ方向の電気および磁気ヘルツベクトル …… 6

B_n^e, C_n^e：π_Z^{es}とπ_Z^{*es} の展開係数 …… 6

B_{Mn}^e, C_{Mn}^e：円柱が完全導体のときの B_n^e と C_n^e …… 10

D_n^e, F_n^e：π_Z^{er} と π_Z^{*er} の展開係数 …… 6

$\boldsymbol{E}, \boldsymbol{H}$：電界および磁界ベクトル …… 7

$\boldsymbol{E}^{ep}, \boldsymbol{H}^{ep}$：波源が電気ダイポールのときの１次界の電界および磁界ベクトル …… 8

$\boldsymbol{E}^{es}, \boldsymbol{H}^{es}$：波源が電気ダイポールのときの円柱の散乱電界および散乱磁界ベクトル …… 8

$\boldsymbol{E}^{er}, \boldsymbol{H}^{er}$：波源が電気ダイポールのときの円柱の内部電界および内部磁界ベクトル …… 8

$\boldsymbol{E}^{hp}, \boldsymbol{H}^{hp}$：波源が磁気ダイポールのときの１次界の電界および磁界ベクトル …… 10

$\boldsymbol{E}^{hs}, \boldsymbol{H}^{hs}$：波源が磁気ダイポールのときの円柱の散乱電界および散乱磁界ベクトル …… 10

$\boldsymbol{E}^{hr}, \boldsymbol{H}^{hr}$：波源が磁気ダイポールのときの円柱の内部電界および内部磁界ベクトル …… 11

$x=ka$：正規化周波数 …………………………………………………………………… 16, 38

x_{n1}^{e}, x_{n1}^{h}：B_{ns}^{e} と B_{ns}^{h}の第1共振点のxの値……………………………………………20

x_{Mn1}^{e}, x_{Mn1}^{h}：B_{Mns}^{e} と B_{Mns}^{h} の第1共振点のxの値 …………………………………………17

x_{an1}, x_{bn1}：a_n と b_n の第1共振点のxの値 ……………………………………………………48

x_{aMn1}, x_{bMn1}：a_{Mn} と b_{Mn} の第1共振点のxの値……………………………………………58

σ_s^e, σ_s^h：円柱にＴＭ波およびＴＥ波が入射したときの円柱の単位長さ当りの散乱断面積……………………………………………………………………………………56

σ_s：球の散乱断面積…………………………………………………………………………………56

第1章　序　論

均一な媒質の無限長円柱および球状の物体(以下，これらを円柱および球という)による電磁波散乱についての研究は古くから始められた[(1),(2),(3)]．初期にはこれらの物体に平面波が入射した場合の散乱現象が取扱われた[(2)~(5),(11),(12),(18)]．後にダイポール波[(8),(9),(13),(20),(23)]をはじめ，球面波，円偏波およびビーム波などが入射した場合が多く取扱われ，その成果は枚挙に尽し難い．円柱および球の散乱問題は，これまで一般にそれらの半径aと入射波長λとの関係で，$a \ll \lambda$をレイリー領域，$a \gg \lambda$を幾何光学領域，$a \simeq \lambda$を共振領域としてそれぞれ取扱われてきた．前の二つの領域に適した解法として，それぞれレイリー近似および幾何光学近似がある．共振領域に対しては，これら二つの近似法の拡張によるかまたは他の適当な近似法が用いられるが，一般的な方法はまだ確立されていないといってよい[(18),(19)]．

周知のように，散乱波は，伝搬媒質における電磁界の波動を表すベクトルモード関数と，散乱体の境界条件によって決まるモード振幅係数（以下，散乱係数という）との積として展開される．このうち，ベクトルモード関数は，散乱波の伝搬媒質が自由空間であれば実変数になる．それに対し，円柱（または球）の散乱係数の表式は，散乱体の媒質定数と円柱（または球）ベッセル関数とによって構成される．ここで，媒質が無損失または完全導体であれば表式を構成するベッセル関数はすべて実変数になる．しかし，媒質に有限な損失があるときは，表式の一部に複素ベッセル関数が含まれる．一般に複素変数関数の数値計算は容易でない．特に，複素変数の虚数部が大きくなると計算し難くなる．そのため，複素変数の範囲により適当な近似法がしばしば用いられる．複素変数の虚数部が実数部に比べて小さい場合の近似計算は比較的容易であるため，円柱および球の散乱問題においても，媒質が無損失または低損失の場合について多くの報告がなされてきた[(4),(5),(7),(10),(11),(14)~(18),(20)~(24)]．それに対し，媒質の損失が大きい場合については，これまでほとんど検討されていないのが現状である．

散乱問題を取扱う場合，種々の形状の散乱体について解析を試みることは必要である．しかし，解析的に散乱係数が得られている散乱体について，限られた範囲における近似を用いることなく，入射周波数および散乱体の媒質定数に制限されない取扱い方法を検討し，

広い範囲にわたる散乱係数の性質を系統的に解明することも一つの重要な課題と考えられる．

本論文は，電磁散乱の基礎的問題として，円柱および球に電気または磁気ダイポール波が入射したときの散乱電磁界を解析し，それらの散乱係数の振舞いについて考察しようとするものである．なお，ここでは平面波入射のときの散乱係数との比較を行うとともに，円柱および球の散乱係数に共通する事柄を取り上げて，入射周波数および媒質定数の広い範囲における散乱係数の性質を，以下の各章において明らかにしている．

本論文の第２章では，円柱の近くに円柱軸と平行に電気または磁気ダイポール波源を置いたときの遠点の散乱電磁界を，ヘルツベクトルと複素積分の鞍点法とを用いて解析し，このときの円柱の散乱係数を導出している．散乱係数の性質を知るための数値計算は，円柱の代表的な固有モードについて行い，円柱の媒質が完全導体，誘電体および誘電性と磁性を共に示す場合を取扱っている．そして，散乱係数の振幅周波数特性と，代表的な周波数における円柱軸を含む面内の指向特性を求め，媒質の損失が大きくなるに従い円柱が完全導体の場合の性質に近づく様子を計算例で示している．さらに，円柱軸に直角で波源を含む面内の散乱係数は，円柱軸に直角な方向から平面波が入射したときの散乱係数と同一になることも示している．

第３章では，球にダイポール波が入射したときの電磁界をグリーン関数を用いて解析し，球の磁気形および電気形散乱係数を導出している．そして，この散乱係数が平面波入射の場合と同一になることを示している．また，この散乱係数は，円柱の軸に直角で波源を含む面内の散乱係数と同様な形式になることも示している．

第４章では，第２章と第３章の結論から，円柱の軸に直角で波源を含む面内の磁気形および電気形散乱係数と，球の磁気形および電気形散乱係数を一つの式で統一的に表している．本章は，本論文の主要な部分であり，円柱および球における散乱係数の周波数および媒質定数に対する基本的性質を明らかにしている．すなわち，これまで一般的に用いられてきた散乱係数の表現形式を，複素平面上の点（−1/2，0）を中心とする式に書き変えることにより，円柱および球の散乱係数の性質が見通しよく得られることを示している．そして，媒質が無損失または完全導体のときの散乱係数は常に複素平面上の点（−1/2，0）を中心とする半径1/2の円周上にあること，媒質に有限な損失があるときは点（−1/2，0）からの距離が1/2以下になること，媒質の定数が周波数に無関係であれば周波数が高くな

るに従い点（$-1/2, 0$）からの距離が一定の値に近づくことを示している．また，媒質の損失が大きくなるに従い完全導体のときの性質に近づく様子を数値計算によって示している．ついで，高い周波数領域における散乱係数の簡単な近似式を導出し，このときの磁気形および電気形散乱係数は相互に点（$-1/2, 0$）に関してほぼ点対称の関係になることを示している．また，近似式による値を本来の厳密な値で評価し，近似式の適用範囲などについて述べている．さらに，これらの散乱係数の性質を基にして，円柱および球の散乱断面積の適切な計算法についても示している．

第5章では，これまでの解析の妥当性を確認するために行った実験について述べている．散乱係数を電磁界の中から分離して直接的に測定することは困難である．したがって，ここでは遠点における入射波と散乱波との合成電界を計算し，実測値との比較を行う方法を用いた．実験は，ＶＨＦ，ＵＨＦ帯およびＳＨＦ帯において行った．散乱体には，塩化ビニール系の薄いフイルムを円筒状にした容器に純水および食塩水（食塩の濃度により損失が変わる誘電体）または工業用アルコール（CH_3OH）を入れたもの，固体誘電体（ＴＤＫ製，KU-16,25）を円柱状にしたものおよび金属（銅）円筒などを用いた．また，波源には半波長以下の細い線状空中線を用い，これを円柱の近くに円柱軸と平行に置いた．このように構成したときの円柱軸に直角で波源を含む面内の遠点の相対電界強度を計算し，実測値と比較した．このような実験では，解析の全域にわたる確認は困難であるが，少なくとも実験の範囲内においては解析の妥当性が実証された．

付録においては，通常の電子計算機を用いて広い範囲の複素変数に対する円柱および球ベッセル関数を数値計算する場合の一つの方法について述べている．この数値計算法は，本研究の成果に大きく寄与している．付録には，また，誘電体としての食塩水の種々の濃度に対する損失係数の測定結果も示している．

第 2 章　無限長円柱物体のダイポール波励振

2－1　まえがき

均一な媒質の無限長円柱物体（以下，円柱という）による電磁波散乱についての研究は古くから始められた[3]．初期の段階では平面波入射の場合が取扱われたが，後に平面波以外の入射波についても研究されてきた．ダイポール波入射の場合もいくつかの報告があるが，それらは主に円柱の媒質が完全導体の場合[6],[8],[9] または低損失の誘電体[10],[13],[20],[32] のものが多く，損失の大きな誘電体および媒質が誘電性と磁性を共に示す場合はあまり取扱われていない．また，波源については，円柱軸に平行な電気ダイポールの場合が多く，磁気ダイポールを取扱った例は少ない[6],[9]．しかも，円柱軸に直角で波源を含む面内の散乱特性が主に取扱われ，任意の方向の散乱電磁界については完全導体円柱の場合を除いてほとんど検討されていない．また，円柱が任意の媒質である場合と完全導体の場合とを比較して検討されたものも見当らない．

本章では，円柱の近くに円柱軸と平行に電気または磁気ダイポール波源を置いたときの遠点の散乱電磁界を解析することにより，散乱波のモード振幅係数（以下，散乱係数という）を導出し，その諸特性を明らかにしている．解析では，まず，入射１次界．円柱からの散乱界および円柱の内部界のヘルツベクトルから得た散乱電磁界の展開係数を求めた．ついで，遠点の散乱電磁界の表式に複素積分の鞍点法を用いて散乱係数を導出した．周知のように，円柱による散乱波は，円柱の固有モードごとに分解することができる．これまで散乱波をモード別に取扱って議論されたものは少ない．ここでは，散乱波の性質を知るため，代表的なモード次数における散乱係数を種々の円柱媒質について数値計算している．そして，散乱係数の振幅周波数特性と，代表的な周波数における円柱軸を含む面内の指向特性を示した．その結果から，媒質の損失が小さいとき散乱係数は各モードごとに多くの共振を示すが，損失が大きくなるに従い共振は減衰し，完全導体円柱の性質に近づく様子を計算例で明らかにしている．また，共振周波数は，散乱方向が円柱軸に接近するに従って高くなり，各共振点の間隔も同様な傾向で広くなることを示している．さらに，円柱軸に直角で波源を含む面内の散乱係数は，円柱軸に直角な方向から平面波が入射したとの散乱係数と同一になることも述べている．

2－2　散乱電磁界の解析

自由空間 (ε_0, μ_0) 中に置かれた円柱（半径 a，誘電率 ε_1，透磁率 μ_1）とダイポール波源との座標関係を図2－1のようにとり，直交座標 (X, Y, Z)，円筒座標 (ρ, ϕ, Z)

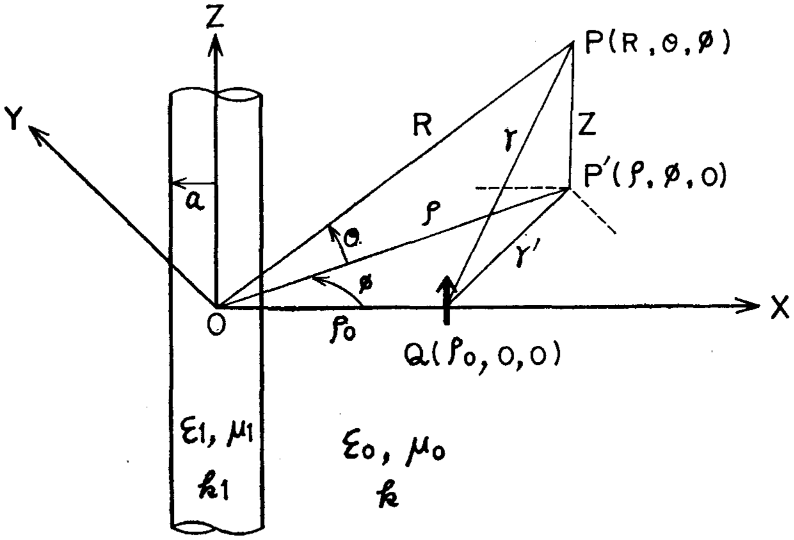


図2－1　座標関係

および球座標 (R, θ, ϕ)（ただし，本章では θ を図2－1のようにとる）を併用する．電磁界の時間因子を $\exp(j\omega t)$（ω は波源の角周波数）とし，以後の記述においてはこれを省略する．点 Q $(\rho_0, 0, 0)$ にある Z 方向をむいた電気ダイポール IdZ（I は素電流，dZ は長さ）または磁気ダイポール mdZ $(m=j\omega\mu_0 IS$ は電流 I が流れる面積 S の微小ループの素磁流）が点 P (R, θ, ϕ) につくるヘルツベクトルは Z 成分のみである[18]．モーメント $IdZ/j\omega$ または $mdZ/j\omega$ によるヘルツトルベクをそれぞれ π_Z^p または π_Z^{*p}（p は入射1次界を表す）とすれば，それらは次のように与えられる[18],[28]．

$$[\pi_Z^p, \pi_Z^{*p}] = \frac{[I, m]dZ}{j\,4\pi\omega[\varepsilon_0, \mu_0]} \cdot \frac{e^{-jkr}}{r} \qquad (2-1)$$

ここで，r は点 Q から点 P までの距離，$k=\omega\sqrt{\varepsilon_0 \cdot \mu_0}$（自由空間波数）である．式（2－1）を円筒波に展開する．まず，2次元におけるグリーン関数は，図2－1の r' を用い，$H_0^{(2)}$ を0次の第2種円柱ハンケル関数として，次式で与えられる[13]．

$$G(0|r') = -j\pi H_0^{(2)}(kr') \qquad (2-2)$$

そして，$\exp(-jkr)/r$ をZ方向の波数hに関するフーリエ積分で表せば，次のようになる[13]．

$$\frac{e^{-jkr}}{r}=-\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} j\pi\cdot H_0^{(2)}(\beta r')\cdot e^{-jhZ}dh \qquad (2-3)$$

ただし，$\beta^2=k^2-h^2$.

式（2－1）のヘルツベクトルを図2－1の座標で表すため，式（2－3）にベッセル関数の加法定理を適用すれば，式（2－1）は次のようになる[13],[20],[28]．

$$\left[\pi_Z^p, \pi_Z^{*p}\right]=-\frac{[I, m]dZ}{8\pi\omega[\varepsilon_0, \mu_0]}\int_{-\infty}^{\infty}\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{jn\phi}$$

$$\cdot\begin{pmatrix} H_n^{(2)}(\beta\rho_0)\cdot J_n(\beta\rho) \\ J_n(\beta\rho_0)\cdot H_n^{(2)}(\beta\rho) \end{pmatrix}\cdot e^{-jhZ}dh \qquad (\rho\lessgtr\rho_0) \qquad (2-4)$$

ここで，$J_n, H_n^{(2)}$ はそれぞれn次の円柱ベッセル関数，第2種円柱ハンケル関数である．点Qにある電気または磁気ダイポールの1次界が円柱に入射したとき，円柱表面における電磁界の境界条件を満足する形で円柱による散乱界および円柱の内部界が決定される．この計算の遂行には，波源が電気または磁気ダイポールの場合のそれぞれについて，散乱界と内部界の電気および磁気ヘルツベクトルを求めなければならない．

まず，波源が電気ダイポールの場合の散乱界と内部界の電気および磁気ヘルツベクトルをそれぞれ π_Z^{es}, π_Z^{*es}（eは電気ダイポールを表し，sは散乱界を表す），π_Z^{er}, π_Z^{*er}（rは内部界を表す）とすれば，それらはヘルムホルツの方程式を満足することから，次のように与えられる[28]．

$$\begin{bmatrix}\pi_Z^{es} \\ \pi_Z^{*es}\end{bmatrix}=-\frac{IdZ}{8\pi\omega\varepsilon_0}\int_{-\infty}^{\infty}\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{jn\phi}\begin{bmatrix}B_n^e \\ C_n^e\end{bmatrix}$$

$$\cdot H_n^{(2)}(\beta\rho_0)\cdot H_n^{(2)}(\beta\rho)\cdot e^{-jhZ}dh \qquad (\rho\geqq a) \qquad (2-5)$$

$$\begin{bmatrix}\pi_Z^{er} \\ \pi_Z^{*er}\end{bmatrix}=-\frac{IdZ}{8\pi\omega\varepsilon_1}\int_{-\infty}^{\infty}\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{jn\phi}\begin{bmatrix}D_n^e \\ F_n^e\end{bmatrix}$$

$$\cdot J_n(\alpha\rho)\cdot e^{-jhZ}dh \qquad (\rho\leqq a) \qquad (2-6)$$

式（2－5）と（2－6）のB_n^e, C_n^e と D_n^e, F_n^e はそれぞれ π_Z^{es}, π_Z^{*es} と π_Z^{er}, π_Z^{*er} の展

開係数であり，$\alpha=\sqrt{k_1{}^2-h^2}$（ただし，$k_1=\omega\sqrt{\varepsilon_1\cdot\mu_1}$）である．また，$\pi^{*es}_Z, \pi^{*er}_Z$ においては，$\varepsilon_0, \varepsilon_1$ の代りに μ_0, μ_1 を用いなければならないが，それらは後の計算に便宜を与えるため係数 C^e_n, F^e_n に含めるものとする．

展開係数 B^e_n, C^e_n および D^e_n, F^e_n は，式（２－４），（２－５）および（２－６）のヘルツベクトルがつくる電磁界に円柱表面の境界条件を適用した連立方程式を解くことによって求められる．

波源が磁気ダイポールの場合もまったく同様である．このときの散乱界と内部界は，式（２－５）と（２－６）における $\pi^{es}_Z\to\pi^{*hs}_Z$（h は磁気ダイポールを表す），$\pi^{*es}_Z\to\pi^{hs}_Z, \pi^{er}_Z\to\pi^{*hr}_Z, \pi^{*er}_Z\to\pi^{hr}_Z$ とし，また，展開係数は，$B^e_n\to B^h_n$，$C^e_n\to C^h_n$，$D^e_n\to D^h_n$，$F^e_n\to F^h_n$ とそれぞれ変更することにより得られる．

周知のように，電気および磁気ヘルツベクトルをそれぞれ $\boldsymbol{\pi}$ および $\boldsymbol{\pi}^*$ とすれば，電磁界 $\boldsymbol{E}, \boldsymbol{H}$ は次式で与えられる．

$$\left.\begin{aligned}\boldsymbol{E}&=\nabla\times\nabla\times\boldsymbol{\pi}-j\omega\mu\nabla\times\boldsymbol{\pi}^*\\ \boldsymbol{H}&=j\omega\varepsilon\nabla\times\boldsymbol{\pi}+\nabla\times\nabla\times\boldsymbol{\pi}^*\end{aligned}\right\}\qquad(2-7)$$

図２－１の点 Q の電気（または磁気）ダイポールによるヘルツベクトル $\boldsymbol{\pi}$（または $\boldsymbol{\pi}^*$）は Z 成分のみである．したがって，それらを F_Z で代表し，円筒座標 (ρ, ϕ, Z) を用いると，ベクトル解析の公式から，$\boldsymbol{i}_\rho, \boldsymbol{i}_\phi, \boldsymbol{i}_Z$ を単位ベクトルとして，$\nabla\times(\boldsymbol{i}_Z F_Z), \nabla\times\nabla\times(\boldsymbol{i}_Z F_Z)$ は次のように与えられる．

$$\nabla\times(\boldsymbol{i}_Z F_Z)=\boldsymbol{i}_\rho\,\frac{1}{\rho}\frac{\partial F_Z}{\partial\phi}-\boldsymbol{i}_\phi\frac{\partial F_Z}{\partial\rho}\qquad(2-8)$$

$$\nabla\times\nabla\times(\boldsymbol{i}_Z F_Z)=\boldsymbol{i}_\rho\frac{\partial^2 F_Z}{\partial\rho\partial Z}+\boldsymbol{i}_\phi\frac{1}{\rho}\frac{\partial^2 F_Z}{\partial\phi\partial Z}-\boldsymbol{i}_Z\left\{\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial F_Z}{\partial\rho}\right)+\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 F_Z}{\partial\phi^2}\right\}\qquad(2-9)$$

電磁界がヘルムホルツの方程式を満足するとき，式（２－９）の最終項は，具体的な $\alpha^2=k_1{}^2-h^2$ または $\beta^2=k^2-h^2$ を用いて，次のように表せる．

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial F_Z}{\partial\rho}\right)+\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 F_Z}{\partial\phi^2}=-(\alpha^2, \beta^2)F_Z\qquad(2-10)$$

また，界が $\exp(jn\phi)\cdot\exp(-jhZ)$ に比例することから，

$$\frac{\partial F_Z}{\partial\phi}=jnF_Z,\ \frac{\partial F_Z}{\partial z}=-jhF_Z\qquad(2-11)$$

である．そして，J_n と$H_n^{(2)}$ を Z_n で代表し，Z'_n を Z_n の第１次導関数とすれば，次のように表せる．

$$\frac{\partial}{\partial\rho} Z_n(\beta\rho)=\beta\cdot Z'_n(\beta\rho) \tag{2—12}$$

以上の関係から，波源が電気ダイポールの場合の入射電磁界 $\boldsymbol{E}^{ep}$, $\boldsymbol{H}^{ep}$（e は波源が電気ダイポールであることを表す），円柱の散乱電磁界 $\boldsymbol{E}^{es}, \boldsymbol{H}^{es}$ および円柱の内部電磁界 $\boldsymbol{E}^{er}, \boldsymbol{H}^{er}$ は式（2－4）～（2—12）を用いて次のように与えられる．

$$\boldsymbol{E}^{ep}=-\frac{IdZ}{8\pi\omega\varepsilon_0}\int_{-\infty}^{\infty}\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{jn\phi}\left(-\boldsymbol{i}_\rho jh\beta \begin{matrix} H_n^{(2)}(\beta\rho_0)\cdot J_n'(\beta\rho) \\ J_n(\beta\rho_0)\cdot H_n^{(2)\prime}(\beta\rho)\end{matrix} + \boldsymbol{i}_\phi\frac{hn}{\rho} \begin{matrix} H_n^{(2)}(\beta\rho_0)\cdot J_n(\beta\rho) \\ J_n(\beta\rho_0)\cdot H_n^{(2)}(\beta\rho)\end{matrix} + \boldsymbol{i}_Z\beta^2 \begin{matrix} H_n^{(2)}(\beta\rho_0)\cdot J_n(\beta\rho) \\ J_n(\beta\rho_0)\cdot H_n^{(2)}(\beta\rho)\end{matrix}\right)\cdot e^{-jhZ}dh \quad \begin{pmatrix} a\leqq\rho<\rho_0 \\ \rho>\rho_0\end{pmatrix} \tag{2—13}$$

$$\boldsymbol{H}^{ep}=-\frac{IdZ}{8\pi\omega\varepsilon_0}\int_{-\infty}^{\infty}\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{jn\phi}(j\omega\varepsilon_0)\left(\boldsymbol{i}_\rho j\frac{n}{\rho} \begin{matrix} H_n^{(2)}(\beta\rho_0)\cdot J_n(\beta\rho) \\ J_n(\beta\rho_0)\cdot H_n^{(2)}(\beta\rho)\end{matrix} - \boldsymbol{i}_\phi\beta \begin{matrix} H_n^{(2)}(\beta\rho_0)\cdot J_n'(\beta\rho) \\ J_n(\beta\rho_0)\cdot H_n^{(2)\prime}(\beta\rho)\end{matrix}\right)\cdot e^{-jhZ}dh \quad \begin{pmatrix} a\leqq\rho<\rho_0 \\ \rho>\rho_0\end{pmatrix} \tag{2—14}$$

$$\begin{bmatrix}\boldsymbol{E}^{es} \\ \boldsymbol{H}^{es}\end{bmatrix}=-\frac{IdZ}{8\pi\omega\varepsilon_0}\int_{-\infty}^{\infty}\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{jn\phi}\Bigg(\boldsymbol{i}_\rho\Bigg\{-jh\beta\begin{bmatrix} B_n^e \\ C_n^e\end{bmatrix}\cdot H_n^{(2)}(\beta\rho_0)\cdot H_n^{(2)\prime}(\beta\rho) \pm\frac{\omega n}{\rho}\begin{bmatrix}\mu_0\cdot C_n^e \\ \varepsilon_0\cdot B_n^e\end{bmatrix}\cdot H_n^{(2)}(\beta\rho_0)\cdot H_n^{(2)}(\beta\rho)\Bigg\} + \boldsymbol{i}_\phi\Bigg\{\frac{hn}{\rho}\begin{bmatrix} B_n^e \\ C_n^e\end{bmatrix}\cdot H_n^{(2)}(\beta\rho_0)\cdot H_n^{(2)}(\beta\rho) \pm j\omega\beta\begin{bmatrix}\mu_0\cdot C_n^e \\ \varepsilon_0\cdot B_n^e\end{bmatrix}\cdot H_n^{(2)}(\beta\rho_0)\cdot H_n^{(2)\prime}(\beta\rho)\Bigg\} + \boldsymbol{i}_Z\beta^2\begin{bmatrix} B_n^e \\ C_n^e\end{bmatrix}\cdot H_n^{(2)}(\beta\rho_0)\cdot H_n^{(2)}(\beta\rho)\Bigg)\cdot e^{-jhZ}dh \quad (\rho\geqq a) \tag{2—15}$$

$$\begin{bmatrix}\boldsymbol{E}^{er} \\ \boldsymbol{H}^{er}\end{bmatrix}=-\frac{IdZ}{8\pi\omega\varepsilon_0}\int_{-\infty}^{\infty}\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{jn\phi}\Bigg(\boldsymbol{i}_\rho\Bigg\{-j\frac{h\alpha}{\varepsilon_r}\begin{bmatrix} D_n^e \\ F_n^e\end{bmatrix}\cdot J_n'(\alpha\rho)$$

$$\pm\frac{\omega n}{\rho\varepsilon_r}\begin{bmatrix}\mu_0\cdot\mu_r\cdot F^e_n\\ \varepsilon_0\cdot\varepsilon_r\cdot D^e_n\end{bmatrix}\cdot J_n(\alpha\rho)$$

$$+\boldsymbol{i}_\phi\left\{\frac{hn}{\rho\varepsilon_r}\begin{bmatrix}D^e_n\\ F^e_n\end{bmatrix}\cdot J_n(\alpha\rho)\pm j\frac{\omega\alpha}{\varepsilon_r}\begin{bmatrix}\mu_0\cdot\mu_r\cdot F^e_n\\ \varepsilon_0\cdot\varepsilon_r\cdot D^e_n\end{bmatrix}\cdot J_n'(\alpha\rho)\right\}$$

$$\left.+\boldsymbol{i}_z\frac{\alpha^2}{\varepsilon_r}\begin{bmatrix}D^e_n\\ F^e_n\end{bmatrix}\cdot J_n(\alpha\rho)\right)\cdot e^{-jhz}dh \qquad (\rho\leqq a) \qquad (2-16)$$

ただし，$\varepsilon_r=\varepsilon_1/\varepsilon_0$，$\mu_r=\mu_1/\mu_0$．

式（2－13）～（2－16）および円柱表面$\rho=a$における境界条件

$$\left.\begin{aligned}\boldsymbol{i}_\rho\times(\boldsymbol{E}^{ep}+\boldsymbol{E}^{es})&=\boldsymbol{i}_\rho\times\boldsymbol{E}^{er}\\ \boldsymbol{i}_\rho\times(\boldsymbol{H}^{ep}+\boldsymbol{H}^{es})&=\boldsymbol{i}_\rho\times\boldsymbol{H}^{er}\end{aligned}\right\} \qquad (2-17)$$

から展開係数 $B^e_n, C^e_n, D^e_n, F^e_n$ は求められる．このうち，散乱電磁界に関係する B^e_n と C^e_n を求めると次のようになる(28)．

$$B^e_n=\frac{1}{\Delta^e}\left[\left(\frac{hn}{a}\right)^2\left(1-\frac{\beta^2}{\alpha^2}\right)^2\frac{J_n(\beta a)}{H^{(2)}_n(\beta a)}+k^2\beta^2\left\{\frac{H^{(2)\prime}_n(\beta a)}{H^{(2)}_n(\beta a)}-\mu_r\frac{\beta}{\alpha}\frac{J_n'(\alpha a)}{J_n(\alpha a)}\right\}\right.$$

$$\left.\cdot\left\{\frac{J_n'(\beta a)}{H^{(2)}_n(\beta a)}-\frac{1}{\mu_r}\frac{\beta}{\alpha}\frac{k_1^2}{k^2}\frac{J_n'(\alpha a)}{J_n(\alpha a)}\frac{J_n(\beta a)}{H^{(2)}_n(\beta a)}\right\}\right] \qquad (2-18\,\mathrm{a})$$

$$C^e_n=\frac{1}{\Delta^e}\left[j\omega\varepsilon_0\beta\left(\frac{hn}{a}\right)\left(1-\frac{\beta^2}{\alpha^2}\right)\frac{1}{\{H^{(2)}_n(\beta a)\}^2}\right.$$

$$\left.\cdot\left\{H^{(2)\prime}_n(\beta a)\cdot J_n(\beta a)-H^{(2)}_n(\beta a)\cdot J_n'(\beta a)\right\}\right] \qquad (2-18\,\mathrm{b})$$

ただし，

$$\Delta^e=-\left[\left(\frac{hn}{a}\right)^2\left(1-\frac{\beta^2}{\alpha^2}\right)^2+k^2\beta^2\left\{\frac{H^{(2)\prime}_n(\beta a)}{H^{(2)}_n(\beta a)}-\mu_r\frac{\beta}{\alpha}\frac{J_n'(\alpha a)}{J_n(\alpha a)}\right\}\right.$$

$$\left.\cdot\left\{\frac{H^{(2)\prime}_n(\beta a)}{H^{(2)}_n(\beta a)}-\frac{1}{\mu_r}\frac{\beta}{\alpha}\frac{k_1^2}{k^2}\frac{J_n'(\alpha a)}{J_n(\alpha a)}\right\}\right].$$

特に，円柱が完全導体のときの B_n^e と C_n^e をそれぞれ B_{Mn}^e と C_{Mn}^e（M は完全導体を表す）とすれば，それらは式（2－15），（2－16）および式（2－18 a），（2－18 b）において，$\varepsilon_r\to\infty$，$\mu_r=1$, $k_1\to\infty$，$\alpha\to\infty$ として次のように与えられる[20),(28)].

$$B_{Mn}^e=-\frac{J_n(\beta a)}{H_n^{(2)}(\beta a)} \tag{2－19 a}$$

$$C_{Mn}^e=0 \tag{2－19 b}$$

波源が磁気ダイポールの場合の1次電磁界 $\boldsymbol{E}^{hp}, \boldsymbol{H}^{hp}$（$h$ は波源が磁気ダイポールであることを表す），散乱電磁界 $\boldsymbol{E}^{hs}, \boldsymbol{H}^{hs}$ および内部電磁界 $\boldsymbol{E}^{hr}, \boldsymbol{H}^{hr}$ も上記と同様にして次のように得られる．

$$\boldsymbol{E}^{hp}=-\frac{mdZ}{8\pi\omega\mu_0}\int_{-\infty}^{\infty}\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{jn\phi}(-j\omega\mu_0)\left(\boldsymbol{i}_\rho j\frac{1}{\rho}\begin{matrix}H_n^{(2)}(\beta\rho_0)\cdot J_n(\beta\rho)\\ J_n(\beta\rho_0)\cdot H_n^{(2)}(\beta\rho)\end{matrix}\right.$$
$$\left.-\boldsymbol{i}_\phi\beta\begin{matrix}H_n^{(2)}(\beta\rho_0)\cdot J_n'(\beta\rho)\\ J_n(\beta\rho)\cdot H_n^{(2)\prime}(\beta\rho)\end{matrix}\right)\cdot e^{-jhz}dh \qquad \begin{pmatrix}a\leqq\rho<\rho_0\\ \rho>\rho_0\end{pmatrix} \tag{2－20}$$

$$\boldsymbol{H}^{hp}=-\frac{mdZ}{8\pi\omega\mu_0}\int_{-\infty}^{\infty}\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{jn\phi}\left(-\boldsymbol{i}_\rho jh\beta\begin{matrix}H_n^{(2)}(\beta\rho_0)\cdot J_n'(\beta\rho)\\ J_n(\beta\rho_0)\cdot H_n^{(2)\prime}(\beta\rho)\end{matrix}\right.$$
$$\left.+\boldsymbol{i}_\phi\frac{hn}{\rho}\begin{matrix}H_n^{(2)}(\beta\rho_0)\cdot J_n(\beta\rho)\\ J_n(\beta\rho_0)\cdot H_n^{(2)}(\beta\rho)\end{matrix}+\boldsymbol{i}_z\beta^2\begin{matrix}H_n^{(2)}(\beta\rho_0)\cdot J_n(\beta\rho)\\ J_n(\beta\rho_0).H_n^{(2)}(\beta\rho)\end{matrix}\right)\cdot e^{-jhz}dh$$
$$\begin{pmatrix}a\leqq\rho<\rho_0\\ \rho>\rho_0\end{pmatrix} \tag{2－21}$$

$$\begin{bmatrix}\boldsymbol{E}^{hs}\\ \boldsymbol{H}^{hs}\end{bmatrix}=-\frac{mdZ}{8\pi\omega\mu_0}\int_{-\infty}^{\infty}\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{jn\phi}\left(\boldsymbol{i}_\rho\left\{-jh\beta\begin{bmatrix}C_n^h\\ B_n^h\end{bmatrix}\cdot H_n^{(2)}(\beta\rho_0)\cdot H_n^{(2)\prime}(\beta\rho)\right.\right.$$
$$\left.\pm\frac{\omega n}{\rho}\begin{bmatrix}\mu_0\cdot B_n^h\\ \varepsilon_0\cdot C_n^h\end{bmatrix}\cdot H_n^{(2)}(\beta\rho_0)\cdot H_n^{(2)}(\beta\rho)\right\}+\boldsymbol{i}_\phi\left\{\frac{hn}{\rho}\begin{bmatrix}C_n^h\\ B_n^h\end{bmatrix}\cdot H_n^{(2)}(\beta\rho_0)\cdot H_n^{(2)}(\beta\rho)\right.$$
$$\left.\left.\pm j\omega\beta\begin{bmatrix}\mu_0\cdot B_n^h\\ \varepsilon_0\cdot C_n^h\end{bmatrix}\cdot H_n^{(2)}(\beta\rho_0)\cdot H_n^{(2)}(\beta\rho)\right\}+\boldsymbol{i}_z\beta^2\begin{bmatrix}C_n^h\\ B_n^h\end{bmatrix}\cdot H_n^{(2)}(\beta\rho_0)\cdot H_n^{(2)}(\beta\rho)\right)$$
$$\cdot e^{-jhz}dh \qquad (\rho\geqq a) \tag{2－22}$$

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{E}^{hr} \\ \boldsymbol{H}^{hr} \end{bmatrix} = -\frac{mdZ}{8\pi\omega\mu_0}\int_{-\infty}^{\infty}\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{jn\phi}\left(\boldsymbol{i}_\rho\left\{-jh\alpha\begin{bmatrix} F_n^h \\ D_n^h \end{bmatrix}\cdot J_n'(\alpha\rho)\right.\right.$$

$$\left.\pm\frac{\omega n}{\rho}\begin{bmatrix} \mu_0\cdot\mu_r\cdot D_n^h \\ \varepsilon_0\cdot\varepsilon_r\cdot F_n^h \end{bmatrix}\cdot J_n(\alpha\rho)\right\}+\boldsymbol{i}_\phi\left\{\frac{hn}{\rho}\begin{bmatrix} F_n^h \\ D_n^h \end{bmatrix}\cdot J_n(\alpha\rho)\right.$$

$$\left.\left.\pm j\omega\alpha\begin{bmatrix} \mu_0\cdot\mu_r\cdot D_n^h \\ \varepsilon_0\cdot\varepsilon_r\cdot F_n^h \end{bmatrix}\cdot J_n(\alpha\rho)\right\}+\boldsymbol{i}_z\alpha^2\begin{bmatrix} F_n^h \\ D_n^h \end{bmatrix}\cdot J_n(\alpha\rho)\right)\cdot e^{-jhz}dh$$

$$(\rho\leqq a) \qquad (2-23)$$

そして，この場合の散乱電磁界の展開係数 B_n^h, C_n^h を求めると次のようになる(28)．

$$B_n^h = \frac{1}{\Delta^h}\left[\left(\frac{hn}{a}\right)^2\left(1-\frac{\beta^2}{\alpha^2}\right)\cdot H_n^{(2)}(\beta a)\cdot J_n(\beta a)\right.$$

$$-k^2\beta^2\left\{J_n'(\beta a)-\mu_r\frac{\beta}{\alpha}\frac{J_n'(\alpha a)}{J_n(\alpha a)}\cdot J_n(\beta a)\right\}$$

$$\left.\cdot\left\{H_n^{(2)\prime}(\beta a)-\frac{1}{\mu_r}\frac{\beta}{\alpha}\frac{k_1^2}{k^2}\frac{J_n'(\alpha a)}{J_n(\alpha a)}\cdot H_n^{(2)}(\beta a)\right\}\right] \qquad (2-24\text{a})$$

$$C_n^h = \frac{1}{\Delta^h}\left[j\omega\mu_0\beta\left(\frac{hn}{a}\right)\left(1-\frac{\beta^2}{\alpha^2}\right)\right.$$

$$\left.\cdot\left\{H_n^{(2)}(\beta a)\cdot J_n'(\beta a)-H_n^{(2)\prime}(\beta a)\cdot J_n(\beta a)\right\}\right] \qquad (2-24\text{b})$$

ただし，

$$\Delta^h = -\left[\left(\frac{hn}{a}\right)^2\left(1-\frac{\beta^2}{\alpha^2}\right)\cdot\left\{H_n^{(2)}(\beta a)\right\}^2\right.$$

$$-k^2\beta^2\left\{H_n^{(2)\prime}(\beta a)-\mu_r\frac{\beta}{\alpha}\frac{J_n'(\alpha a)}{J_n(\alpha a)}\cdot H_n^{(2)}(\beta a)\right\}$$

$$\left.\cdot\left\{H_n^{(2)\prime}(\beta a)-\frac{1}{\mu_r}\frac{\beta}{\alpha}\frac{k_1^2}{k^2}\frac{J_n'(\alpha a)}{J_n(\alpha a)}\cdot H_n^{(2)}(\beta a)\right\}\right]$$

また，円柱が完全導体のときの B_n^h と C_n^h をそれぞれ B_{Mn}^h と C_{Mn}^h とすれば，それらは次のようになる．

$$B_{Mn}^h = -\frac{J_n'(\beta a)}{H_n^{(2)\prime}(\beta a)} \qquad (2-25\text{a})$$

$$C^{h}_{Mn}=0 \tag{2-25b}$$

以上の解析により，図２－１に示す座標関係にある電気または磁気ダイポール波源からの入射波による円柱の散乱電磁界が表示できた．

２－３　遠方界の電磁波散乱係数

２－２節で得た散乱電磁界の表式には h に関する無限積分が含まれるため実際の散乱電界などを求めるには不向きである．そこで，観測点 P (ρ,ϕ,Z) が波源 Q $(\rho_0,0,0))$ の位置に比べて充分遠くにある場合を考える．

ここでは，波源が電気ダイポールの場合を主として取扱うことにする．このとき，遠点 $(\rho\to\infty)$ の散乱電磁界 $\boldsymbol{E}^{es}_{\rho\to\infty},\boldsymbol{H}^{es}_{\rho\to\infty}$ は，式（２－15）に $\rho\to\infty$ を代入し，$H^{(2)}_n(\beta\rho)$ と $H^{(2)'}_n(\beta\rho)$ の $\rho\to\infty$ における次の近似式

$$\left.\begin{aligned} H^{(2)}_n(\beta\rho)&\simeq\sqrt{\frac{2}{\pi\beta\rho}}\cdot e^{-j\left(\beta\rho-\frac{2n+1}{4}\pi\right)} \\ H^{(2)'}_n(\beta\rho)&\simeq\sqrt{\frac{2}{\pi\beta\rho}}\cdot e^{-j\left(\beta\rho-\frac{2n-1}{4}\pi\right)} \end{aligned}\right\}\quad(\rho\to\infty) \tag{2-26}$$

と，図２－１に示す座標関係

$$\rho=R\cos\theta,\ \ Z=R\sin\theta$$

を用いて次のように表せる．

$$\begin{aligned}\begin{bmatrix}\boldsymbol{E}^{es}_{\rho\to\infty}\\ \boldsymbol{H}^{es}_{\rho\to\infty}\end{bmatrix}\simeq&-\frac{IdZ}{8\pi\omega\varepsilon_0}\int_{-\infty}^{\infty}\sum_{n=-\infty}^{\infty}e^{j\left(n\phi+\frac{2n+1}{4}\pi\right)}\cdot\sqrt{\frac{2}{\pi\beta R\cos\theta}}\cdot H^{(2)}_n(\beta\rho_0)\\ &\cdot\left\{-\boldsymbol{i}_\rho h\beta\begin{bmatrix}B^{e}_{n}\\ C^{e}_{n}\end{bmatrix}\pm\boldsymbol{i}_\phi\omega\beta\begin{bmatrix}\mu_0\cdot C^{e}_{n}\\ \varepsilon_0\cdot B^{e}_{n}\end{bmatrix}+\boldsymbol{i}_Z\beta^2\begin{bmatrix}B^{e}_{n}\\ C^{e}_{n}\end{bmatrix}\right\}\\ &\cdot e^{-jR(\beta\cos\theta+h\sin\theta)}\,dh \qquad (\rho\to\infty)\end{aligned} \tag{2-27}$$

ここで，式（２－27）の無限積分に鞍点法を適用する．そのため，

$$\beta=k\cos\gamma,\ \ h=k\sin\gamma,\ \ \gamma=\Theta+j\Psi \tag{2-28}$$

として，γ なる複素平面に変数変換すると，

$$\left.\begin{aligned} &e^{-jR(\beta\cos\theta+h\sin\theta)}=e^{-jRk\cdot\cos(\gamma-\theta)}\\ &dh=k\cos\gamma d\gamma\end{aligned}\right\} \tag{2-29}$$

となる．また， $f(\gamma)=jk\cos(\gamma-\theta)$ とすると，被積分関数の鞍部点 $\gamma=\gamma_s$ は，

$$f'(\gamma)=-jk\sin(\gamma-\theta)=0 \qquad (2-30)$$

を満足し，$\gamma_s=\theta$ を通る積分によって最良表示される．さらに，遠点を問題にすることから，この積分は γ_s のごく近くの最急勾配路での積分により漸近値を求めることができる．この積分路は γ 平面の実軸と約 $-45°$ で交る直線である．積分路と γ_s との距離 $|\gamma-\theta|$ を η とすれば，

$$\gamma-\theta=\eta\cdot e^{-j\frac{\pi}{4}} \qquad (2-31)$$

となる．ここで，$f(\gamma)$の第1近似

$$f(\gamma)\simeq jk-k\frac{\eta^2}{2} \qquad (2-32)$$

を用いれば，式（2－27）は次のように表せる．

$$\begin{bmatrix} E^{es}_{\rho\to\infty} \\ H^{es}_{\rho\to\infty} \end{bmatrix} \simeq -\frac{IdZ}{8\pi\omega\varepsilon_0}\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{j\left(n\phi+\frac{2n+1}{4}\pi\right)}\cdot e^{j\frac{\pi}{4}}\cdot e^{-jkR}\cdot H_n^{(2)}(\beta\rho_0)$$
$$\cdot\int_{-\eta\cdot e^{-j\frac{\pi}{4}}}^{\eta\cdot e^{j\frac{\pi}{4}}}\left\{-i_\rho h\beta\begin{bmatrix} B^e_n \\ C^e_n \end{bmatrix}\pm i_\phi\omega\beta\begin{bmatrix} \mu_0\cdot C^e_n \\ \varepsilon_0\cdot B^e_n \end{bmatrix}+i_Z\beta^2\begin{bmatrix} B^e_n \\ C^e_n \end{bmatrix}\right\}$$
$$\cdot\sqrt{\frac{2k\cos\gamma}{\pi R\,\mathrm{coo}\theta}}\cdot e^{-\eta^2\frac{kR}{2}}\,d\eta \qquad (\rho\to\infty) \qquad (2-33)$$

特に，γ_s では，

$$\left.\begin{aligned} h&\to h_s=k\sin\theta \\ \beta&\to\beta_s=k\cos\theta \\ \alpha&\to\alpha_s=\sqrt{\varepsilon_r\cdot\mu_r}\cdot k\cos\theta \end{aligned}\right\} \qquad (2-34)$$

となり，次の結果が得られる．

$$\begin{bmatrix} E^{es}_{\rho\to\infty} \\ H^{es}_{\rho\to\infty} \end{bmatrix} \simeq -\frac{IdZ}{4\pi\omega\varepsilon_0}\frac{e^{-jkR}}{R}\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{j\left(n\phi+\frac{n+1}{2}\pi\right)}$$
$$\cdot\left\{-i_\rho h_s\beta_s\begin{bmatrix} B^e_{ns} \\ C^e_{ns} \end{bmatrix}\pm i_\phi\omega\beta_s\begin{bmatrix} \mu_0\cdot C^e_{ns} \\ \varepsilon_0\cdot B^e_{ns} \end{bmatrix}+i_Z\beta_s^2\begin{bmatrix} B^e_{ns} \\ C^e_{ns} \end{bmatrix}\right\}\cdot H_n^{(2)}(\beta_s\cdot\rho_0)$$
$$(\rho\to\infty) \qquad (2-35)$$

ただし，B^{e}_{ns} と C^{e}_{ns}はそれぞれ式（2—18 a）と（2—18 b）に $h=k\sin\theta, \beta=k\cos\theta$ および $\alpha=\sqrt{\varepsilon_r\cdot\mu_r}\cdot k\cos\theta$ を代入したものである．また，円柱が完全導体のときの B^{e}_{ns} を B^{e}_{Mns} とすれば，B^{e}_{Mns} は式（2—19 a）に $\beta=k\cos\theta$ を代入したものであり，これは Carter[6] および Luck[8] の結果と一致する．本論文では，B^{e}_{ns}, B^{e}_{Mns} および C^{e}_{ns} を波源が電気ダイポールのときの散乱係数と呼ぶことにする．また，

$$\left.\begin{aligned} &e^{j\left(n\phi+\frac{n+1}{2}\pi\right)}=j^{n+1}(\cos n\phi+j\sin n\phi) \\ &H^{(2)}_{-n}=(-1)^n\ H^{(2)}_n,\ B^{e}_{-ns}=B^{e}_{ns} \end{aligned}\right\} \qquad (2-36)$$

の関係から式（2—35）はさらに次のように表せる．

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \boldsymbol{E}^{es}_{\rho\to\infty} \\ \boldsymbol{H}^{es}_{\rho\to\infty} \end{bmatrix} \simeq &-\frac{IdZ}{4\pi\omega\varepsilon_0}\frac{e^{-jkR}}{R}\sum_{n=0}^{\infty}\ \epsilon_n\cdot j^{n+1}\cdot H^{(2)}_n(k\rho_0\cos\theta) \\ &\cdot\left\{-\boldsymbol{i}_\rho k^2\sin\theta\cdot\cos\theta\begin{bmatrix} B^{e}_{ns} \\ C^{e}_{ns}\end{bmatrix}\pm\boldsymbol{i}_\phi\omega k\cos\theta\begin{bmatrix}\mu_0\cdot C^{e}_{ns} \\ \varepsilon_0\cdot B^{e}_{ns}\end{bmatrix}\right. \\ &\left.+\boldsymbol{i}_Z(k\cos\theta)^2\begin{bmatrix} B^{e}_{ns} \\ C^{e}_{ns}\end{bmatrix}\right\}\cdot\cos n\phi \qquad (\rho\to\infty) \end{aligned} \qquad (2-37)$$

ただし，$\epsilon_0=1$，$\epsilon_n=2(n\geqq1)$

式（2—37）の電磁界表現を球座標 (R,θ,ϕ) を用いて書き直すと，θ成分の単位ベクトルを $\boldsymbol{i}_\theta$ として，

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \boldsymbol{E}^{es}_{\rho\to\infty} \\ \boldsymbol{H}^{es}_{\rho\to\infty} \end{bmatrix} \simeq &-\frac{IdZ}{4\pi\omega\varepsilon_0}\frac{e^{-jkR}}{R}\sum_{n=0}^{\infty}\ \epsilon_n\cdot j^{n+1}\cdot H^{(2)}_n(k\rho_0\cos\theta) \\ &\cdot\left\{\boldsymbol{i}_\theta k^2\cos\theta\begin{bmatrix} B^{e}_{ns} \\ C^{e}_{ns}\end{bmatrix}\pm\boldsymbol{i}_\phi\omega k\cos\theta\begin{bmatrix}\mu_0\cdot C^{e}_{ns} \\ \varepsilon_0\cdot B^{e}_{ns}\end{bmatrix}\right\}\cdot\cos n\phi \qquad (\rho\to\infty) \end{aligned}$$

(2—38)

となる．また，$\boldsymbol{E}^{es}_{\rho\to\infty}$ と $\boldsymbol{H}^{es}_{\rho\to\infty}$ の θ成分およびϕ成分をそれぞれE^{es}_θ, E^{es}_ϕ と H^{es}_θ, H^{es}_ϕ で表せば，予想されるように，

$$\frac{E^{es}_\theta}{H^{es}_\phi}=-\sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}}\ ,\ \frac{E^{es}_\phi}{H^{es}_\theta}=\sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} \qquad (2-39)$$

となる。

波源が磁気ダイポールのときも上記と同様な方法により式（2－22）から遠点の散乱電磁界が求められる．そして，この場合の散乱係数 B^h_{ns}，B^h_{Mns} および C^h_{ns} も，式（2－24 a)，（2－25 a）および（2－24 b）に $h=k\sin\theta, \beta=k\cos\theta$ および $\alpha=\sqrt{\varepsilon_r\cdot\mu_r}\cdot k\cos\theta$ を代入して得られる．

特に，円柱軸に直角で波源を含む面内($\theta=0$)の $B^e_{ns}(\theta=0), B^e_{Mns}(\theta=0)$ と $C^e_{ns}(\theta=0)$ および $B^h_{ns}(\theta=0)$，B^h_{Mns} $(\theta=0)$ と $C^h_{ns}(\theta=0)$ は次のようになる．

$$B^e_{ns}(\theta=0)=-\frac{\sqrt{\varepsilon_r}\cdot J_n(ka)\cdot J_n'(\sqrt{\varepsilon_r\cdot\mu_r}\cdot ka)-\sqrt{\mu_r}\cdot J_n'(ka)\cdot J_n(\sqrt{\varepsilon_r\cdot\mu_n}\cdot ka)}{\sqrt{\varepsilon_r}\cdot H_n^{(2)}(ka)\cdot J_n'(\sqrt{\varepsilon_r\cdot\mu_r}\cdot ka)-\sqrt{\mu_r}\cdot H_n^{(2)\prime}(ka)\cdot J_n(\sqrt{\varepsilon_r\cdot\mu_r}\cdot ka)} \tag{2-40}$$

$$B^e_{Mns}(\theta=0)=-\frac{J_n(ka)}{H_n^{(2)}(ka)} \tag{2-41}$$

$$C^e_{ns}(\theta=0)=0 \tag{2-42}$$

$$B^h_{ns}(\theta=0)=-\frac{\sqrt{\mu_r}\cdot J_n(ka)\cdot J_n'(\sqrt{\varepsilon_r\cdot\mu_r}\cdot ka)-\sqrt{\varepsilon_r}\cdot J_n'(ka)\cdot J_n(\sqrt{\varepsilon_r\cdot\mu_r}\cdot ka)}{\sqrt{\mu_r}\cdot H_n^{(2)}(ka)\cdot J_n'(\sqrt{\varepsilon_r\cdot\mu_r}\cdot ka)-\sqrt{\varepsilon_r}\cdot H_n^{(2)\prime}(ka)\cdot J_n(\sqrt{\varepsilon_r\cdot\mu_r}\cdot ka)} \tag{2-43}$$

$$B^h_{Mns}(\theta=0)=-\frac{J_n'(ka)}{H_n^{(2)\prime}(ka)} \tag{2-44}$$

$$C^h_{ns}(\theta=0)=0 \tag{2-45}$$

式（2－40）～（2－45）は，円柱に軸と直角な方向から平面波が入射したときの散乱係数と一致する[(2),(6),(8),(18)]．式（2－40)，（2－41）は一般に円柱の磁気形散乱係数といわれ，式（2－43)，（2－44）は電気形散乱係数といわれるものである．

2－4　散乱係数の計算例

散乱波は，例えば式（2－38）で示されるように，モード別に分解することができる．そして，各モードにおける散乱波は，散乱係数，$H_n^{(2)}(k\rho_0\cos\theta)$ および $\cos\theta\cdot\cos n\phi$ に比例している．そのため，散乱波の状態は容易に推測し難い．しかし，モード別の $|H_n^{(2)}$

$(k\rho_0\cos\theta)|$ と $|\cos n\phi|$ の性質は簡単にわかるため，各モードにおける散乱係数の大きさがわかれば，散乱波の大略は予想できる．ここでは，主として $|B_{Mns}^{e}|$，$|B_{Mns}^{h}|$ および $|B_{ns}^{e}|$ の代表的なモードについての数値計算例を示す．計算では，入射周波数に代えて正規化周波数を採用し，これを $ka=x$ と表示する．また，円柱の媒質定数 ε_r および μ_r は，

$$\left.\begin{aligned}\varepsilon_r&=\varepsilon_{r0}(1-j\tan\delta_d)\\ \mu_r&=\mu_{r0}(1-j\tan\delta_m)\end{aligned}\right\}\qquad(2-46)$$

の形で表す．

完全導体円柱の x に対する $|B_{M1s}^{e}|$ と $|B_{M1s}^{h}|$ $(n=1)$ の特性（周波数特性に相当）に

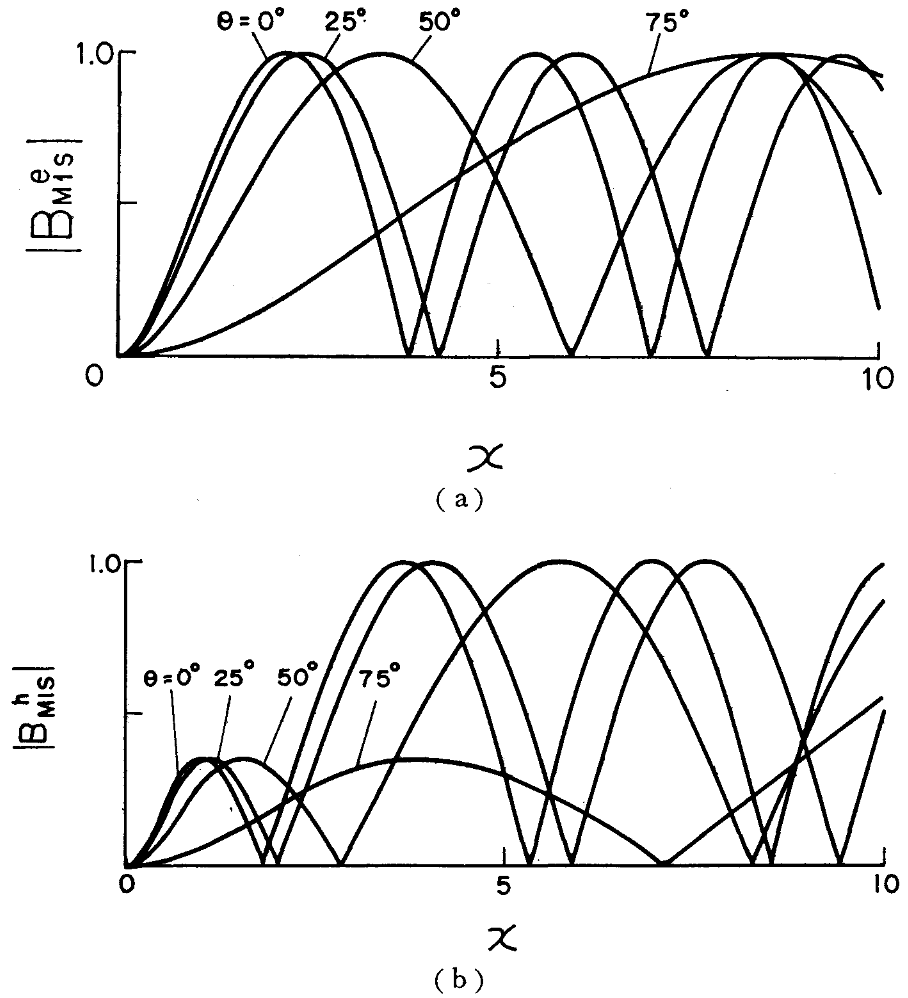


図 2—2 $|B_{M1s}^{e}|$，$|B_{M1s}^{h}|$ の周波数特性$(x=ka)$

ついての計算結果を θ をパラメータにして図2－2(a), (b)に示した．$|B^e_{M1s}|$ と $|B^h_{M1s}|$ は x に対して多くの共振を示す．θ が大きくなるに従い第1番目の共振点は x の大きい方にずれる．$n=1$ 以外のモードにおいても同様な傾向が示される．$|B^h_{Mns}|$ の第1共振点を除く各共振点の $|B^e_{Mns}|$ と $|B^h_{Mns}|$ は常に1となる．また，最小値は零となる．

$|B^e_{M1s}|$ と $|B^h_{M1s}|$ の第1共振点の x を x^e_{M11} と x^h_{M11}（添字1，1は $n=1$ の第1共振点を表す）と表し，θ に対する x^e_{M11} と x^h_{M11} の変化を図2－3に示す．$n=1$ 以外のモードでも同様な特性を示し，θ が $\pi/2$ に近づくと x^e_{Mn1} および x^h_{Mn1} は無限大に近づく．そして，各共振点の間隔も図2－3と同様な傾向を示す．また，$\theta=0$ のときの x^e_{Mn1} と x^h_{Mn1} は，n が大きくなるに従い比例的に大きくなる．

$|B^e_{M1s}|$ と $|B^h_{M1s}|$ の正規化周波数 x をパラメータとする θ 指向特性を図2－4(a), (b)に示す．図2－4(a)は，$|B^e_{M1s}|$ が $\theta=0$ の方向で最初に零となる x の値（$\simeq 3.8$）までの特性を示した．図2－4(a)において，$0<x\leq 1.8$（B^e_{M1s} の第1共振点の x の値）の範囲の $|B^e_{M1s}|$ は $\theta=0$ の方向で最大となる．しかし，$x\gtrsim 1.8$ では x が大きくなるに従い指向性の最大方向が円柱軸に近づくことがわかる．$x\simeq 3.8$ では $|B^e_{M1s}(\theta=0)|\simeq 0$ となる．そ

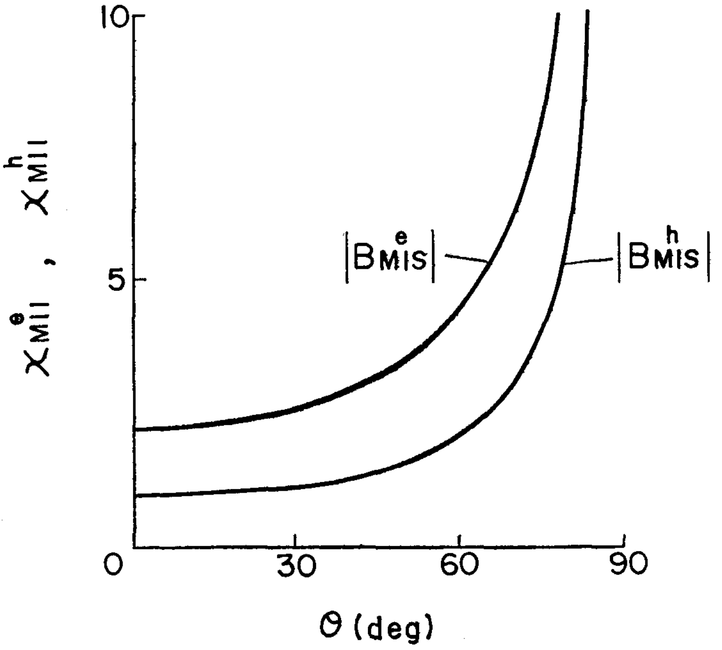
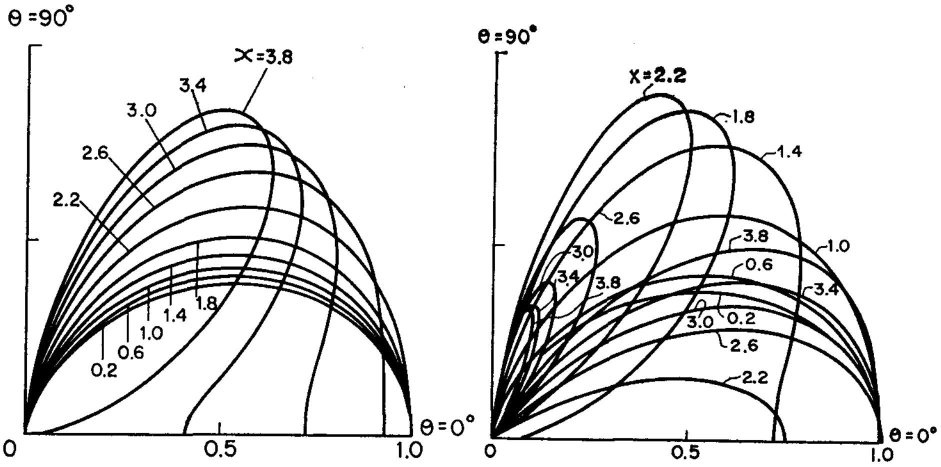


図2－3　θ に対する $|B^e_{M1s}|$, $|B^h_{M1s}|$ の第1共振点 x^e_{M11}, x^h_{M11}



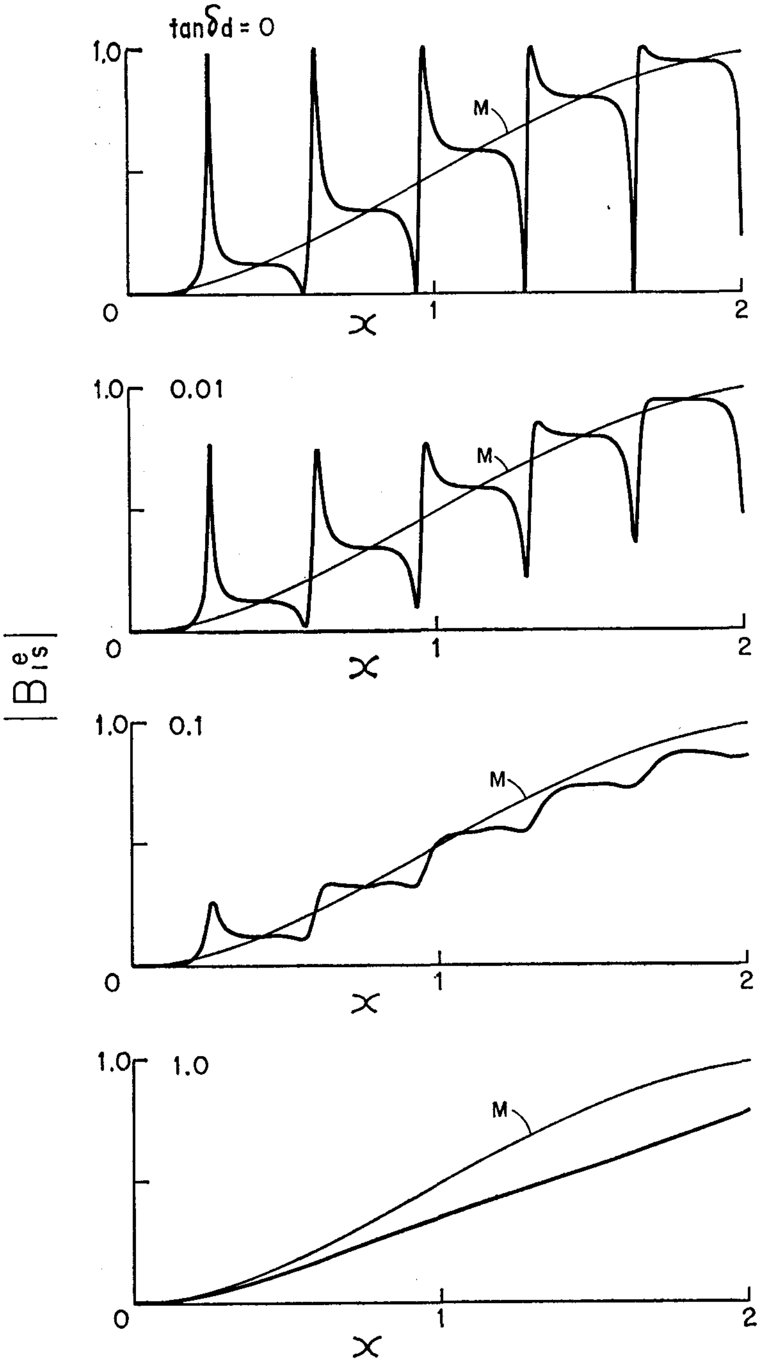
$|B^e_{M1s}(\theta)|$　　　$|B^h_{M1s}(\theta)|$

(a)　　　(b)

図２－４　$|B^e_{M1s}|$，$|B^h_{M1s}$ の θ 指向特性

して，$x\gtrsim3.8$ では $\theta=0$ の方向から新しいローブが現れ，x が増大するに従いローブの数が増えることも計算結果からわかっている．このことは，図２－２(a)からも予想できる．図２－４(b)は，図２－４(a)と同じ x の範囲における $|B^h_{M1s}|$ の指向特性を示す．$|B^h_{M1s}|$ の第１共振点 x^h_{M11}（$\simeq0.95$）までの x では $\theta=0$ の方向で最大となるが，$0.95\lesssim x\lesssim1.81$（$|B^h_{M11}(\theta=0)|$ が最初に零となる x の値）では $\theta=0$ 以外の方向で最大となる．$x\gtrsim1.81$ では新しいローブが $\theta=0$の方向から現れてくる．一般に $|B^e_{Mns}|$ および $|B^h_{Mns}|$ の θ 指向特性においては，x が大きくなるに従いローブの数は比例的に増加する．

円柱の媒質定数が $\varepsilon_{r0}=81$（水），$\tan\delta_d=0,\ 0.01,\ 0.1,\ 1$，$\mu_r=1$ のとき，$\theta=0$ 方向の x に対する $|B^e_{1s}|$ の変化を図２－５に示した．また，図２－５には円柱が完全導体のときの $|B^e_{M1s}|$（図中にMで表示）も示してある．$\tan\delta_d=0$ のとき，共振点では常に $|B^e_{1s}|=1$ であり，最小値は零である．$\tan\delta_d\neq0$ では，$\tan\delta_d$ が大きくなるに従い $|B^e_{1s}|$ は $|B^e_{M1s}|$ に漸近する．$\varepsilon_{r0}'=81$ では，$\tan\delta_d\gtrsim10$ で $|B^e_{1s}|\simeq|B^e_{M1s}|$ となる．ここで興味あることは，$|B^e_{1s}|$の共振曲線の途中のたるみの部分が $|B^e_{M1s}|$ の近くにあり，特に $\tan\delta_d=0$ ではその性質がよく現れていることである．このような性質は，$\varepsilon_{r0}\gtrsim3$ におけるすべてのモードで常に現れることが計算結果からわかっている．したがって，$\tan\delta_d=0$ のときの $|B^e_{ns}|$ の各共振点と，$|B^e_{Mns}|$ の x に対する特性がわかれば（この計算は簡単で



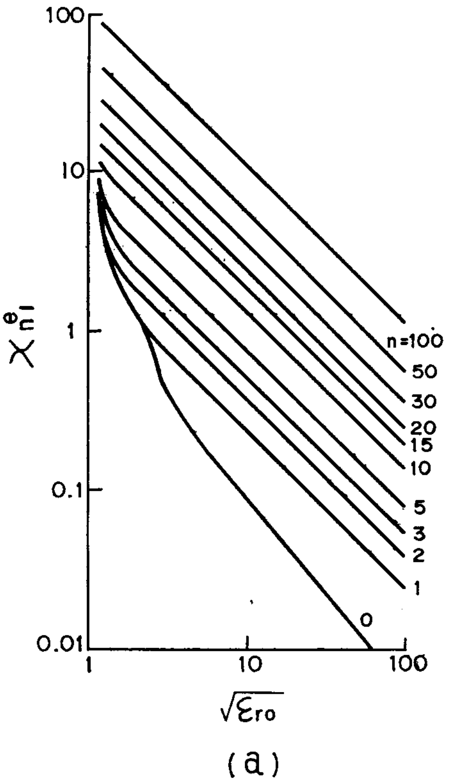
($\varepsilon_{ro}=81$, $\tan\delta_d=0, 0.01, 0.1, 1$, $\mu_r=1$, $n=1$)

図2－5　$\theta=0$のときの $|B^e_{is}|$ の周波数特性 (M: $|B^e_{MIS}|$)

ある)，各nについての $|B^e_{ns}|$ のxに対する特性が容易に予想できる．$|B^h_{ns}|$ と $|B^h_{Mns}|$ との関係も同様である．

図2－6は，無損失の誘電体円柱について，$\theta=0$ 方向における B^e_{ns}, B^h_{ns} の$\sqrt{\varepsilon_{r0}}$ に対するそれぞれの第1共振点 x^e_{n1}, x^h_{n1}を，nをパラメータに計算した結果である．x^e_{n1} と x^h_{n1} はほぼ $1/\sqrt{\varepsilon_r}$ に比例している．第1共振点より上の周波数における共振点の間隔もほぼ $1/\sqrt{\varepsilon_{r0}}$，に比例するが$n$の値により大きく変化しないことも数値計算からわかっている．また，円柱の媒質が誘電性と磁性とを共に示すときの第1共振点もほぼ $1/\sqrt{\varepsilon_{r0}\cdot\mu_{r0}}$ に比例する．

円柱の媒質定数が $\varepsilon_{r0}=81$, $\tan\delta_d=0$, 0.01, 0.1, 1, $\mu_r=1$ のとき，xに対する $|B^e_{1s}|$ の変化をθをパラメータにして図2－7に示す．θが大きくなるに従い第1共振点の x および各共振点の間隔が大きくなることがわかる．また，$\tan\delta_d$ が大きくなるに従い $|B^e_{1s}|$ が $|B^e_{M1s}|$ に漸近する様子もよくわかる．そして，$\tan\delta_d$ が小さいとき，$\theta=0$



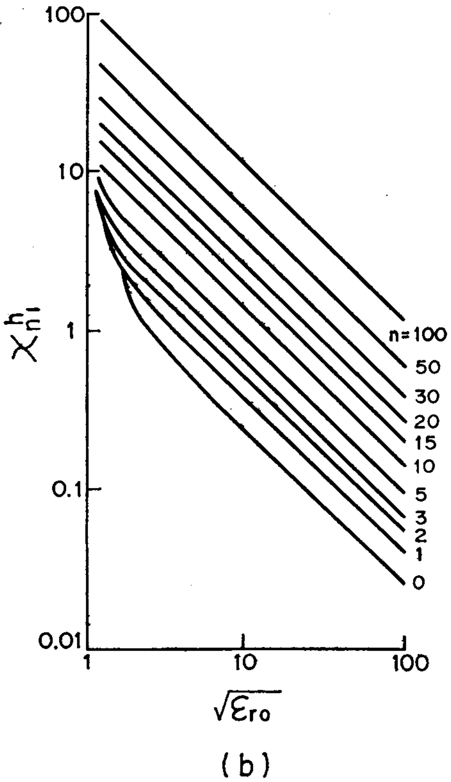


図2－6 $\sqrt{\varepsilon_{ro}}$に対する B^e_{ns}, B^h_{ns} の第1共振点 x^e_{n1}, x^h_{n1}($\theta=0$, $\tan\delta_d=0$, $\mu_r=1$ の場合)

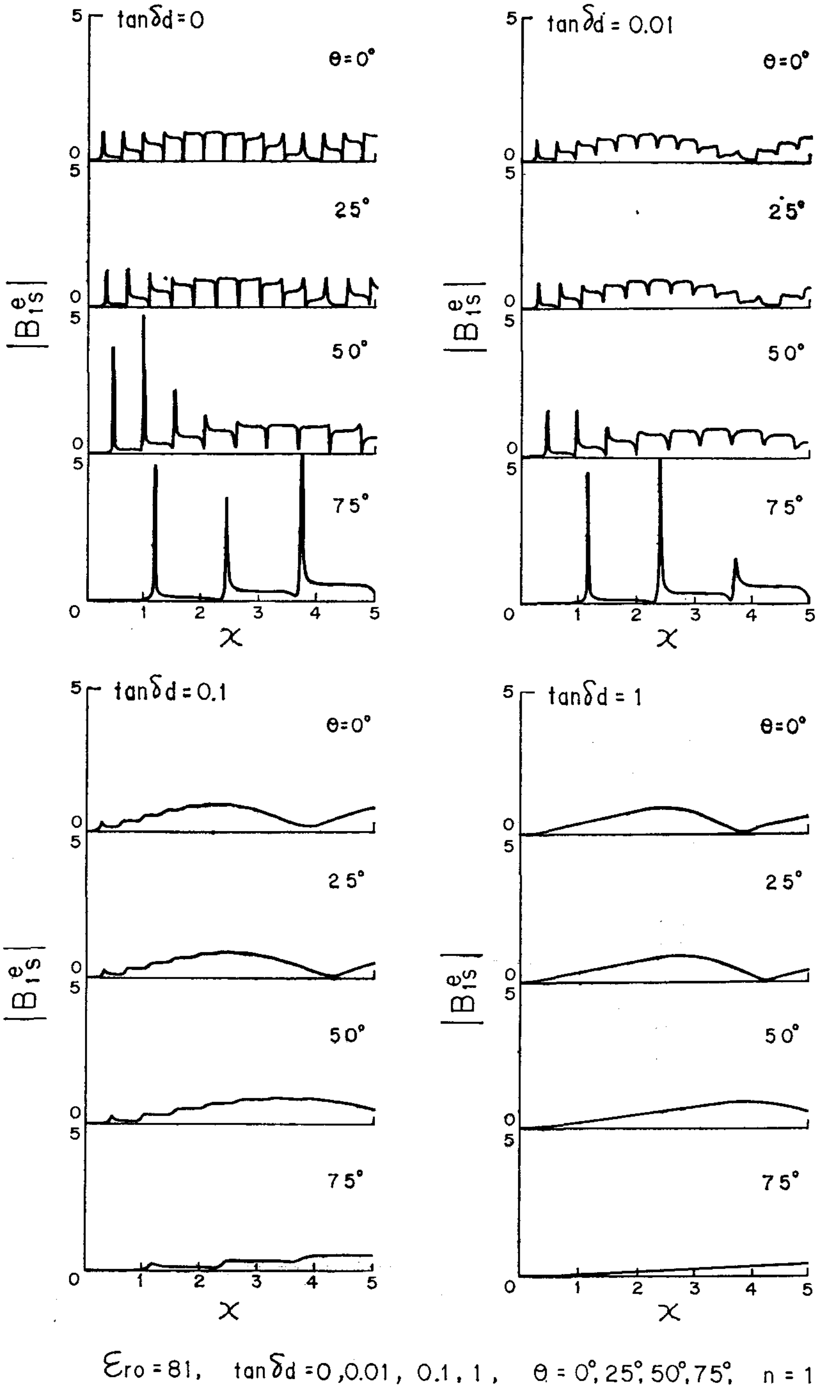


図2—7　誘電体円柱における $|B^e_{1s}|$ $(n=1)$ の周波数特性
($\tan\delta_d$ と θ をパラメータとする)

以外では共振点の $|B^e_{1s}|$ が1以上になる場合もあることが示されている．$n=1$ 以外のときも類似の傾向が見られ，共振点の x の値も $\tan\delta_d$ により大きく変化しない．これらのことは $|B^h_{ns}|$ についても同様である．

円柱の媒質定数が $\varepsilon_{r0}=4,\ 81,\ 400,\ \tan\delta_d=0,\ \mu_r=1$ のとき，θ に対する $|B^e_{1s}|$ の第1共振点 x^e_{11} および共振点間隔の概略値 Δx^e_1 を図2－8に示す．θ に対して x^e_{11} と Δx^e_1 は同じ傾向を示し，θ が $\pi/2$ に近づくと x^e_{11} と Δx^e_1 はともに無限大に近づく．$n=1$ 以外の $|B^e_{ns}|$ および $|B^h_{ns}|$ に関しても同様な性質が見られる．

円柱の媒質が誘電性と磁性を共に示すときの x に対する $|B^e_{1s}|$ の計算例を図2－9に示す．ここでは，これまでの計算例との比較を考慮して，$\varepsilon_{r0}\cdot\mu_{r0}=81$ に選んだ．図2－9の下部の(1)，(2)，(3)で示す媒質定数のときの $|B^e_{1s}|$ を図中の(1)，(2)，(3)で示した．なお，図の左側(a)には $\tan\delta_d=\tan\delta_m=0$ の場合を，右側(b)には $\tan\delta_d=\tan\delta_m=0.1$ の場合をそれぞれ示した．図2－9(a)からわかるように，$\theta=0$ では常に $|B^e_{1s}|\leqq 1$ であるが，$\theta=0$ 以外では $|B^e_{1s}|$ が1以上になることもある．図2－9(b)から，$\tan\delta_d$ および $\tan\delta_m$

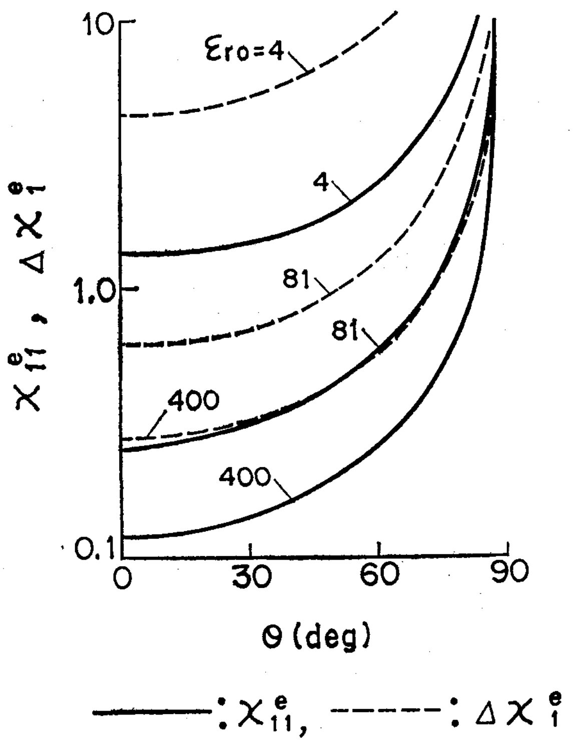


図2－8　θ に対する $|B^e_{1s}|$ の第1共振点 x^e_{11} と共振点間隔 Δx^e_1

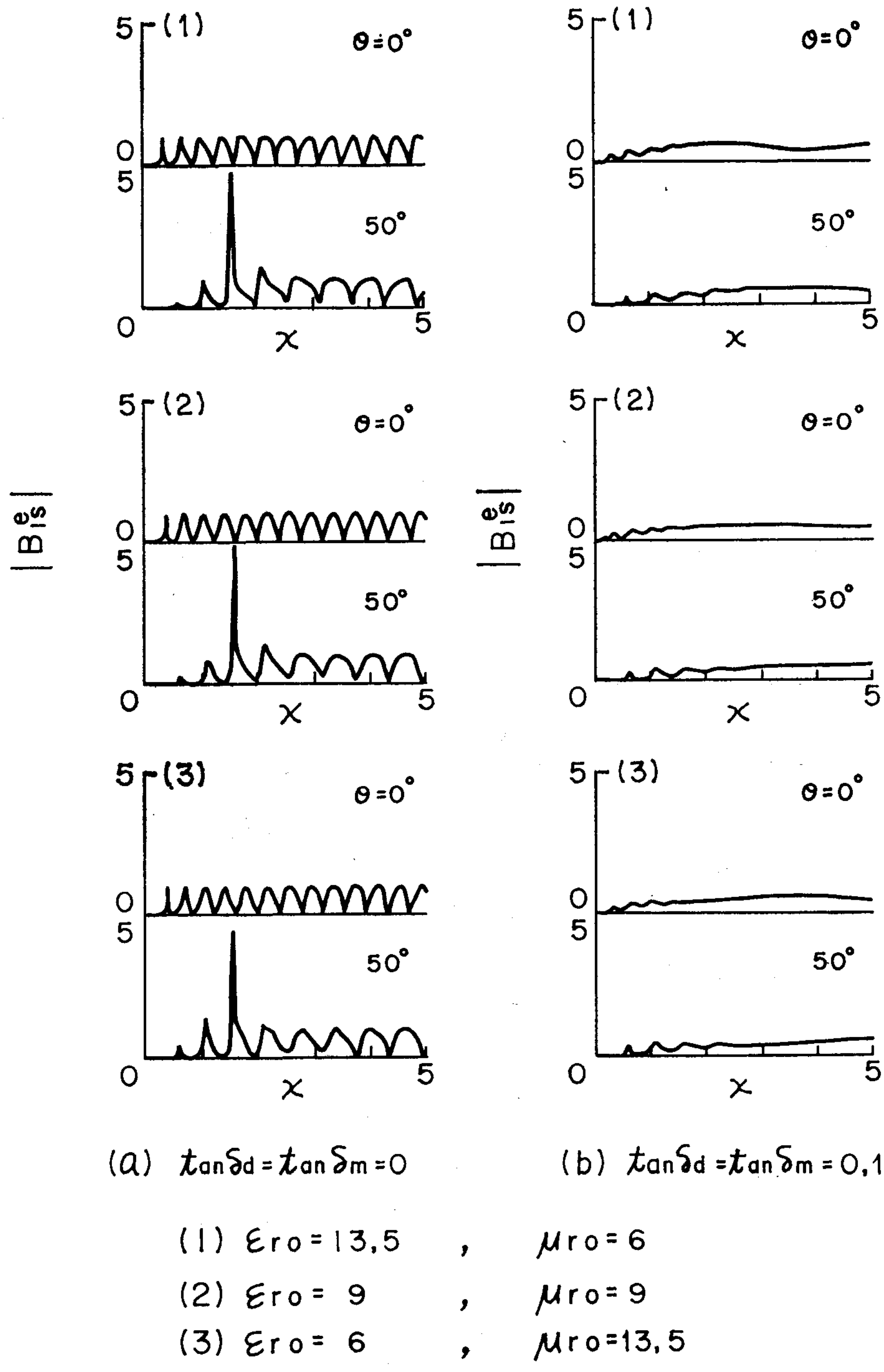


図2—9　円柱が ε_r と μ_r で構成されるときの $|B^e_{1s}|(n=1)$ の周波数特性
（媒質定数と θ をパラメータとする）

が大きくなると，(1)の場合は $|B^e_{M1s}|$ の性質に，(3)の場合は $|B^h_{M1s}|$ の性質にそれぞれ漸近し，(2)の場合は $|B^e_{M1s}|$ と $|B^h_{M1s}|$ との中間的な性質に漸近することがわかる．一般に円柱の損失が大きくなるに従い，$|\varepsilon_r|>|\mu_r|$ のときの $|B^e_{ns}|$ は $|B^e_{Mns}|$ の性質に，$|\varepsilon_r|<|\mu_r|$ のときの $|B^e_{ns}|$ は $|B^h_{Mns}|$ の性質にそれぞれ漸近する．$|B^h_{ns}|$ ではこれ

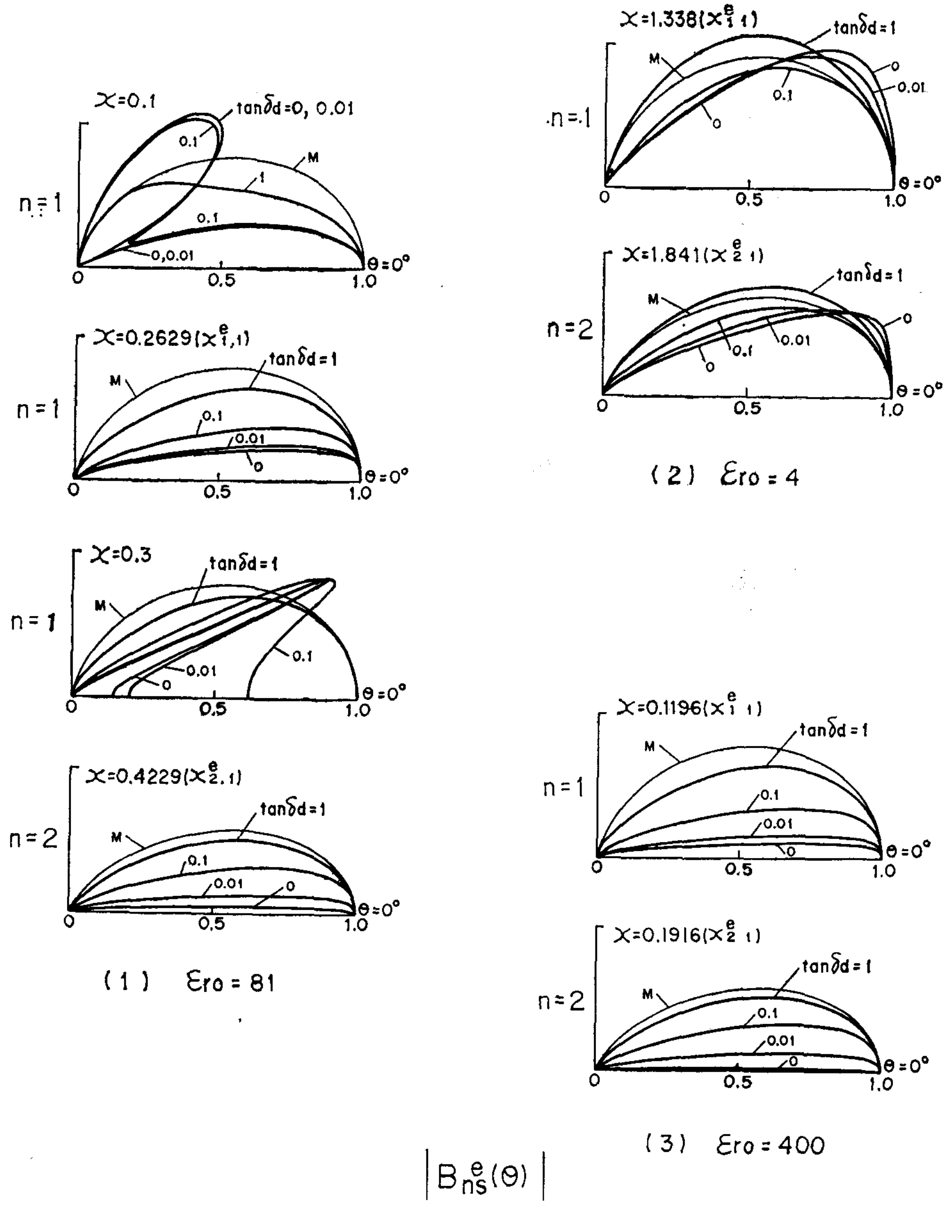


図2—10 $|B^e_{ns}|$, $|B^e_{Mns}|$ の θ 指向特性 ($n=1, 2$)

らの関係が $|B^{e}_{ns}|$ と逆になる．

円柱の媒質定数が $\varepsilon_{r0}=4,\ 81,\ 400,\quad \tan\delta_d=0,\ 0.01,\ 0.1,\ 1,\ \mu_r=1$ のとき，$n=1$ および2における $|B^{e}_{ns}|$ の θ 指向特性を代表的な x の値について求め，同じ n と x における $|B^{e}_{Mns}|$（図中に M で表示）と共に図2－10に示した．図2－10(1)は，$\varepsilon_{r0}=81$ のときである．(1)の最上段の図は，$n=1$ モードで $x=0.1$ の場合であり，x が $n=1$ モードの第1共振点 x^{e}_{11} より小さい場合の例である．$\tan\delta_d$ が小さいときは複数のローブをもつが，$\tan\delta_d$ が大きくなるに従い $|B^{e}_{1s}|$ が $|B^{e}_{M1s}|$ に漸近することを示している．(1)の上から2番目の図は，$n=1$ で $x=x^{e}_{11}$ の場合である．このときは，常に $\theta=0$ の方向で最大となる単一ローブとなり，$\tan\delta_d$ の増大に従い $|B^{e}_{1s}|$ は $|B^{e}_{M1s}|$ に漸近する．(1)の上から3番目の図は，$n=1$ で $x=0.3$ の場合である．この x の値は $|B^{e}_{1s}|$ が $n=1$ モードの第1共振点より大きい場合の例である．$\tan\delta_d$ が小さいときの $|B^{e}_{1s}|$ は特定の θ 方向に鋭い指向性をもっている．(1)の最下段の図は，$n=2$ で $x=x^{e}_{21}$ の場合であり，$n=1$，$x=x^{e}_{11}$ の場合より $\theta=0$ の方向で鋭い指向性をもっている．図2－10(2)および(3)は，それぞれ $\varepsilon_{r0}=4$ および 400 の場合の $n=1$，2 モードの x^{e}_{11}, x^{e}_{21} における $|B^{e}_{ns}|$ の θ 指向特性である．これらはいずれも $\theta=0$ の方向で最大となる単一ローブをもち，ε_{r0} が大きくて $\tan\delta_d$ が小さいときの θ 指向特性は極度に鋭くなることを示している．一般に共振点での $|B^{e}_{ns}|$ と $|B^{h}_{ns}|$ は $\theta=0$ で最大となる単一ローブであり，共振点を外れると複数のローブまたは特定の θ 方向のローブをもつようになる．そして，n の値が大きいほど，また $\tan\delta_d$ が小さいほど θ 指向特性は鋭くなる．しかし，いずれの場合も $\tan\delta_d$ が大きくなるに従い完全導体のときの特性に漸近する．円柱の媒質が誘電性と磁性を共に示す場合の θ 指向特性についても図2－9で述べた事柄と同様なことが言える．

以上の図2－2から図2－10までの計算例は，主に $|B^{e}_{Mns}|$，$|B^{h}_{Mns}|$ と $|B^{e}_{ns}|$ について示した．これらの計算例から $|B^{h}_{ns}|$ についても予想することができる．

また，2－2節で述べたように，完全導体円柱については $C^{e}_{Mn}=C^{h}_{Mn}=0$ であり，一般の円柱においても $\theta=0$ 方向では常に $C^{e}_{ns}(\theta=0)=C^{h}_{ns}(\theta=0)=0$ である．$\theta\fallingdotseq 0$ における $|C^{e}_{ns}|$（または $|C^{h}_{ns}|$）を正規化周波数 $ka=x$ について数値計算するためには，式(2－18b)（または式2－24b）からわかるように，ω または a を指定する必要がある．したがって，ここでは図2－7との対応を考慮して，$|C^{e}_{ns}|/(\omega\varepsilon_0)$ についての計算例を示す．円柱の媒質定数が $\varepsilon_{r0}=81,\ \tan\delta_d=0,\ 0.01,\ 0.1,\ 1,\ \mu_r=1$ のとき，$n=1$ で $\theta=0^\circ, 25^\circ, 50^\circ,$

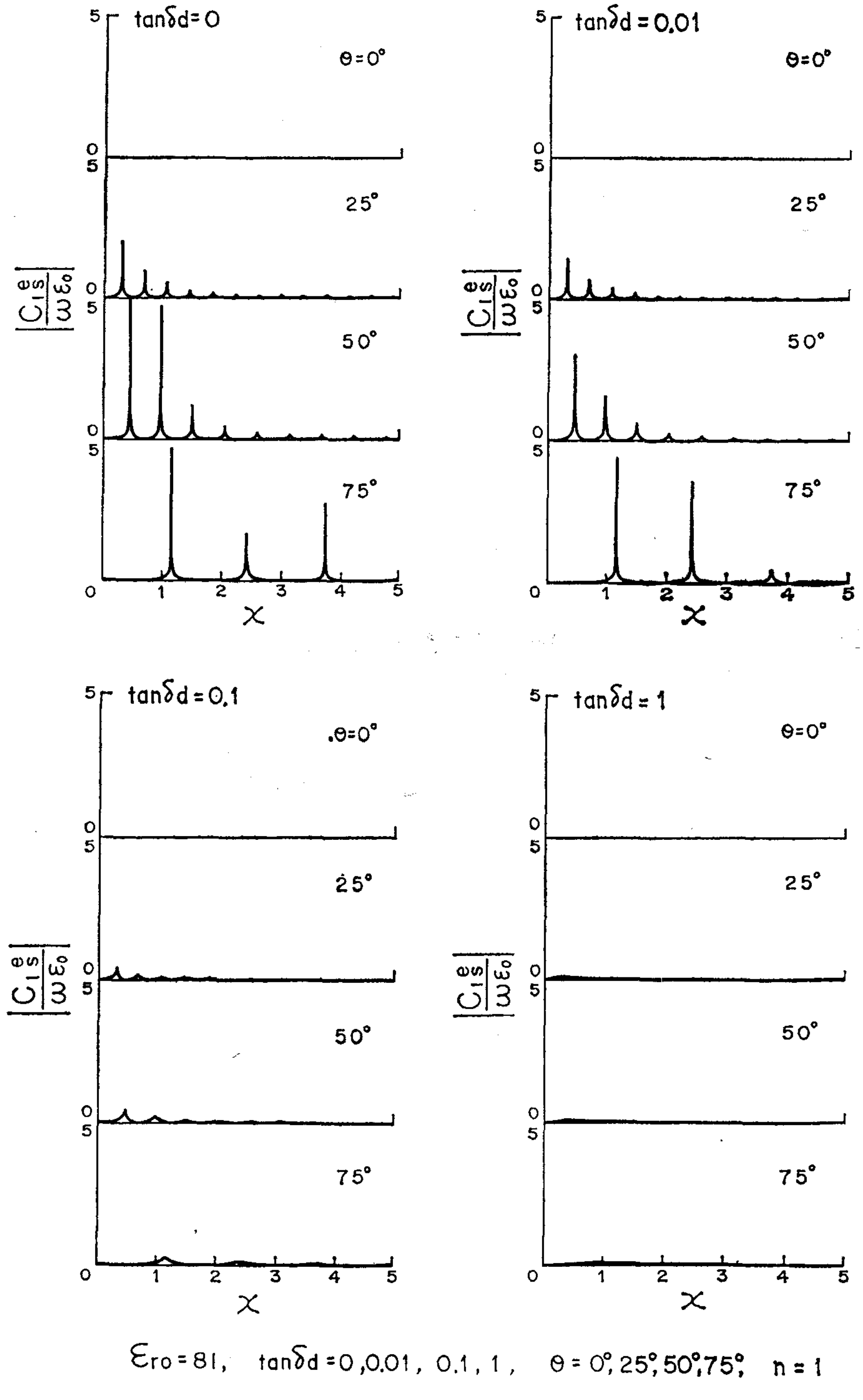


図2―11 誘電体円柱における $|C^{e}_{1s}|/(\omega\varepsilon_0)$ の周波数特性
(tanδ_d と θ をパラメータとする)

75° における $|C^e_{1s}|/(\omega\varepsilon_0)$ の計算結果を図2—11に示した．$\theta=0°$ では常に $|C^e_{1s}|/(\omega\varepsilon_0)=0$ である．$\theta=25°, 50°, 75°$ における $|C^e_{1s}|/(\omega\varepsilon_0)$ の各共振点の x の値は，それらに対応する図2—7の各共振点の x とほぼ同じである．そして，共振点における $|C^e_{1s}|/(\omega\varepsilon_0)$ の大きさも図2—7と同様な傾向を示す．すなわち，$\tan\delta_d$ が大きくなるに従い共振点における $|C^e_{1s}|/(\omega\varepsilon_0)$ は小さくなる．図2—11の場合は $\tan\delta_d \gtrsim 10$ で $|C^e_{1s}|/(\omega\varepsilon_0)\simeq 0$ となる．これは，完全導体円柱の C^e_{Mns} が常に零であることからも予想できる．このような $|C^e_{ns}|/(\omega\varepsilon_0)$ の性質は，$|B^e_{ns}|$ において $\tan\delta_d$ が大きくなると $|B^e_{Mns}|$ に漸近する性質に類似している．$|C^h_{ns}|/(\omega\mu_0)$ についても同様である．これらのことから，$|C^e_{ns}|$（または $|C^h_{ns}|$）も $|B^e_{ns}|$（または $|B^h_{ns}|$）と基本的に同じ性質をもつことがわかる．したがって，一般に円柱における $\theta=0$ 方向の散乱波は入射ダイポール波と同一偏波方向であるが，完全導体円柱以外の $\theta\neq 0$ 方向では楕円偏波になっていることがわかった．

2—5　むすび

本章では，無限長円柱の近くに円柱軸と平行に電気または磁気ダイポール波源を置いたときの遠点の散乱波の散乱係数を導出した．そして，種々の円柱媒質における散乱係数の入射周波数および散乱方向に対する諸特性を計算例によって明らかにした．すなわち，この場合の円柱の散乱係数には，次のような性質があることがわかった．

1．　完全導体円柱ではその大きさが常に1以下であり，周波数に対して各モードごとに多くの共振を示す．また，周波数が高くなるに従い円柱軸を含む面内の指向特性のローブの数は増加する．

2．　一般の媒質においても，その損失が小さいときは，各モードごとに多くの共振を示し，媒質定数が大きくなるに従い共振周波数の間隔は狭くなる．

3．　媒質の損失が大きくなるに従い共振は次第に減衰し，完全導体円柱の性質に漸近する．

4．　円柱軸に直角で波源を含む面内では平面波入射のときと同一であり，その大きさは常に1以下になる．そして，この面内の散乱波は入射ダイポール波と同一の偏波方向になる．

5．　円柱軸に直角でない方向ではその大きさが1以上になることもある．そして，散

乱波は一般に楕円偏波になる.

6．　散乱方向が円柱軸に近づくに従い，各モードの共振周波数は高くなり，同様な傾向で各共振周波数の間隔も広くなる.

本章で取扱った散乱係数は，円柱軸に直角で波源を含む面内を除いて，実際の有限長円柱には適用できない．しかし，ここでの解析結果によって，円柱散乱の基礎的性質が明らかとなった.

第 3 章　球状物体のダイポール波励振

3－1　まえがき

均一な媒質の球状物体（以下，球という）による電磁波散乱についての研究は今世紀の初頭円柱より早くから始められ[(1)]，散乱問題の基礎として，これまでに多くの報告がなされてきた[(2),(4),(5),(12),(15)]．したがって，平面波入射の場合の球の散乱波のモード振幅係数（以下，散乱係数という）もすでに解析的に得られている[(4),(12)]．ここでは，第2章との関連により，球にダイポール波が入射したときの散乱電磁界をグリーン関数を用いて解析する．そして，球の磁気形および電気形散乱係数が平面波入射のときと同一になることを示す．また，これらの散乱係数が円柱の場合の軸に直角で波源を含む面内における円柱の磁気形および電気形散乱係数と同じ形式になることも示す．

3－2　散乱電磁界の解析

解析には，直交座標 (X, Y, Z) と球座標 (r, θ, ϕ) を用い，球（半径 a，誘電率 ε_1，透磁率 μ_1）の中心を座標の原点と一致させる．また，第2章との関連において，単位の強さの電気（または磁気）ダイポール波源が X 軸上で Z 軸と平行にあるものとする（図3－

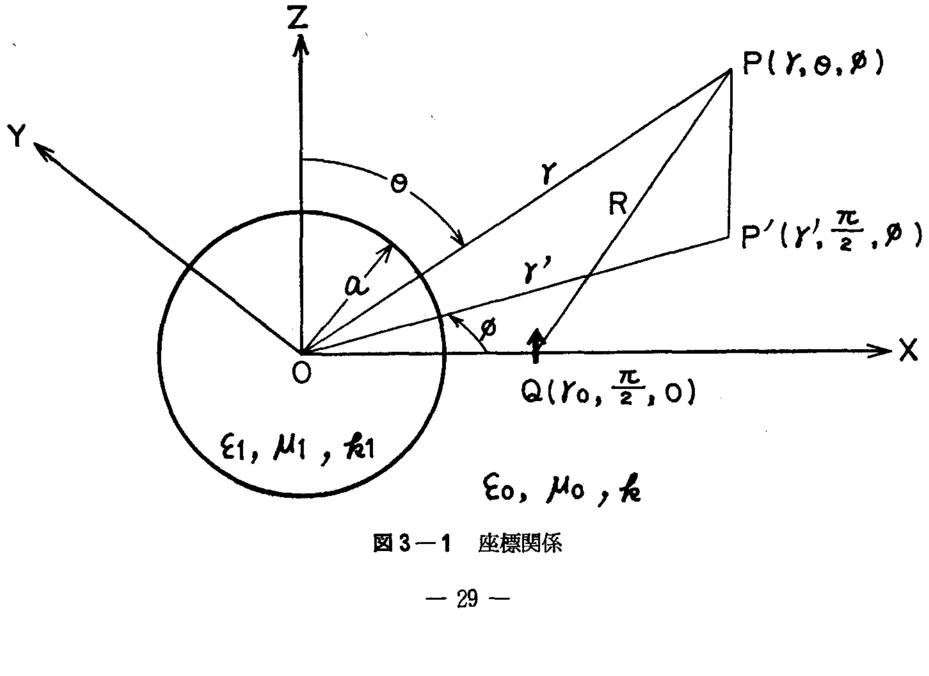


図 3－1　座標関係

1参照).

点 $\boldsymbol{r}_0$ にある波源から球に電磁波が入射したときの散乱電磁界を解析するため， 自由空間におけるグリーン関数を示せば次の如くである[30].

$$\boldsymbol{G}(\boldsymbol{r}|\boldsymbol{r}_0|k)=jk\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2n+1}{n(n+1)}\sum_{m}\epsilon_m\frac{(n-m)!}{(n+m)!}$$

$$\cdot\left\{\boldsymbol{M}^1_{mn}\binom{\boldsymbol{r}_0}{\boldsymbol{r}}\cdot\boldsymbol{M}^4_{mn}\binom{\boldsymbol{r}}{\boldsymbol{r}_0}+\boldsymbol{N}^1_{mn}\binom{\boldsymbol{r}_0}{\boldsymbol{r}}\cdot\boldsymbol{N}^4_{mn}\binom{\boldsymbol{r}}{\boldsymbol{r}_0}\right\}\qquad(\boldsymbol{r}\gtrless\boldsymbol{r}_0)\qquad(3-1)$$

なお，ここでは時間因子 $\exp(j\omega t)$ を省略し，以後も同様とする．式（3－1）において，$n=0,1,2,\cdots$，$m=0,1,2,\cdots n$，$\epsilon_0=1$，$\epsilon_m=2(m\geqq1)$ である．また，$\boldsymbol{M}_{mn}$，$\boldsymbol{N}_{mn}$ は複素球面関数 $\exp jm\phi\cdot P_n^m(\cos\theta)$（ただし，$P_n^m(\cos\theta)$ は陪ルジャンドル関数）から作られた複素球面角ベクトル関数と球ベッセル関数との積で構成されるベクトル関数であり，次式で表わされる[30].

$$\begin{bmatrix}\boldsymbol{M}^1_{mn}\ (\boldsymbol{r})\\ \boldsymbol{M}^4_{mn}\ (\boldsymbol{r})\end{bmatrix}=\sqrt{n(n+1)}\cdot\boldsymbol{C}_{mn}(\theta,\phi)\begin{bmatrix}j_n(kr)\\ h_n^{(2)}(kr)\end{bmatrix}\qquad(3-2)$$

$$\begin{bmatrix}\boldsymbol{N}^1_{mn}\ (\boldsymbol{r})\\ \boldsymbol{N}^4_{mn}\ (\boldsymbol{r})\end{bmatrix}=n(n+1)\cdot\boldsymbol{P}_{mn}(\theta,\phi)\cdot\frac{1}{kr}\begin{bmatrix}j_n(kr)\\ h_n^{(2)}(kr)\end{bmatrix}$$

$$+\sqrt{n(n+1)}\cdot\boldsymbol{B}_{mn}(\theta,\phi)\cdot\frac{1}{kr}\frac{d}{dr}\begin{bmatrix}rj_n(kr)\\ rh_n^{(2)}(kr)\end{bmatrix}\qquad(3-3)$$

ここで，$\boldsymbol{P},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C}$ は，

$$\left.\begin{aligned}&X_n^m(\theta,\phi)=e^{jm\phi}\cdot P_n^m(\cos\theta)\\&\delta_{mn}=\begin{cases}0\ (n=m)\\1\ (n\neq m)\end{cases}\end{aligned}\right\}\qquad(3-4)$$

とし，$\boldsymbol{i}_x$, $\boldsymbol{i}_y$, $\boldsymbol{i}_z$ および $\boldsymbol{i}_r$, $\boldsymbol{i}_\theta$, $\boldsymbol{i}_\phi$ をそれぞれ直角座標および球座標の単位ベクトルとすれば，次式で与えられる[30].

$$\boldsymbol{P}_n^m(\theta,\phi)=\boldsymbol{i}_r\times X_n^m(\theta,\phi)$$

$$=\frac{1}{2n+1}\left\{\frac{1}{2}\boldsymbol{i}_x\left[(1-\delta_{0m})(n+m)(n+m-1)X_{n-1}^{m-1}\right.\right.$$

$$-(1+\delta_{0m})X_{n-1}^{m+1}-(1-\delta_{0m})(n-m+1)$$

$$\cdot (n-m+2)X_{n+1}^{m-1}+(1+\delta_{0m})X_{n+1}^{m+1}\Big]$$

$$-\frac{1}{2}\boldsymbol{i}_y\Big[(1-\delta_{0m})(n+m)(n+m-1)jX_{n-1}^{m-1}$$

$$+(1+\delta_{0m})jX_{n-1}^{m+1}-(1-\delta_{0m})(n-m+1)$$

$$\cdot (n-m+2)jX_{n+1}^{m-1}-(1-\delta_{0m})jX_{n+1}^{m+1}\Big]$$

$$+\boldsymbol{i}_z\Big[(n+m)X_{n-1}^{m}+(n-m+1)X_{n-1}^{m}\Big]\Big\} \tag{3-5}$$

$$\boldsymbol{B}_{mn}(\theta,\phi)=\boldsymbol{i}_r\times\boldsymbol{C}_{mn}$$

$$=\frac{1}{2(2n+1)}\boldsymbol{i}_x\Big\{\sqrt{\frac{n+1}{n}}\Big[(1-\delta_{0m})(n+m)$$

$$\cdot (n+m-1)X_{n-1}^{m-1}-(1+\delta_{0m})X_{n-1}^{m+1}\Big]$$

$$+\sqrt{\frac{n}{n+1}}\Big[(1-\delta_{0m})(n-m+1)(n-m+2)X_{n+1}^{m-1}-(1+\delta_{0m})X_{n+1}^{m+1}\Big]\Big\}$$

$$+\frac{1}{2(2n+1)}\boldsymbol{i}_y\Big\{\sqrt{\frac{n+1}{n}}\Big[(1-\delta_{0m})(n+m)$$

$$\cdot (n+m-1)jX_{n-1}^{m-1}+(1+\delta_{0m})jX_{n-1}^{m+1}\Big]$$

$$+\sqrt{\frac{n}{n+1}}\Big[(1-\delta_{0m})(n-m+1)(n-m+2)jX_{n+1}^{m-1}+(1+\delta_{0m})jX_{n+1}^{m+1}\Big]\Big\}$$

$$+\frac{1}{2n+1}\boldsymbol{i}_z\Big\{\sqrt{\frac{n+1}{n}}(n+m)X_{n-1}^{m}-\sqrt{\frac{n}{n+1}}(n-m+1)X_{n+1}^{m}\Big\} \tag{3-6}$$

$$\boldsymbol{C}_{mn}(\theta,\phi)=-\boldsymbol{i}_r\times\boldsymbol{B}_{mn}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}\Big\{\frac{1}{2}\boldsymbol{i}_x\Big[(1-\delta_{0m})(n+m)(n-m+1)jX_n^{m-1}$$

$$+(1+\delta_{0m})jX_n^{m+1}\Big]-\frac{1}{2}\boldsymbol{i}_y\Big[(1-\delta_{0m})(n+m)$$

$$\cdot (n-m+1)X_n^{m-1}-(1-\delta_{0m})X_n^{m+1}\Big]-\boldsymbol{i}_z mjX_n^m\Big\} \tag{3-7}$$

図3－1に示す点 $Q(\gamma_0,\pi/2,0)$ でZ方向をむく電気または磁気ダイポールの入射１次電磁界は，式（3－1）～（3－7）と

$$\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{E}=-j\omega\mu\boldsymbol{H} \tag{3-8}$$

の関係を用いて表せる．また，この一次界が球に入射したときの球からの散乱界は，式（3－1）の $\boldsymbol{M}_{mn},\boldsymbol{N}_{mn}$ に未定係数 a_n,b_n を乗じて与えられる．同様に，球の内部電磁界は，式（3－1）において $k\to k_1$（球の波数）とし，$\boldsymbol{M}_{mn}$, $\boldsymbol{N}_{mn}$ に未定係数 c_n,d_n を乗じて与えられる．これらの未定係数は球表面における電磁界の連続条件から決定される．

まず，波源が電気ダイポールの場合の入射電磁界 $\boldsymbol{E}^p, \boldsymbol{H}^p$ は，式（3－1）で示されるように，$a<r<r_0$ の場合と $r>r_0$ の場合とにより表現が異なる．式（3－1）～（3－8）の関係を用いて $\boldsymbol{E}^p, \boldsymbol{H}^p$ を示せば次のようになる[21]．

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{E}^p =& jk\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2n+1}{n(n+1)}\sum_{m=0}^{n}\epsilon_m\frac{(n-m)!}{(n+m)!}\,\frac{(-1)^m}{\sin\theta} \\
&\times\left[\boldsymbol{i}_r\sin\theta\cdot\frac{n(n+1)}{2n+1}\cdot P\left(\cos\frac{\pi}{2}\right)\cdot P_n^m\ (\cos\theta)\cdot H\binom{kr_0}{kr}\cdot\frac{1}{kr}j_n\binom{kr}{kr_0}\ \cdot\cos m\phi\right. \\
&+\boldsymbol{i}_\theta\left\{m^2P_n^m(\cos\frac{\pi}{2})\cdot P_n^m(\cos\theta)\cdot h_n^{(2)}\binom{kr_0}{kr}\cdot j_n\binom{kr}{kr_0}\right\} \\
&-\frac{1}{(2n+1)^2}\ P(\cos\frac{\pi}{2})\cdot P(\cos\theta)\cdot H\binom{kr_0}{kr}\cdot J\binom{kr}{kr_0}\Big\}\ \cos m\phi \\
&+\boldsymbol{i}_\phi\frac{m}{(2n+1)}\Big\{\ P_n^m(\cos\frac{\pi}{2})\cdot P(\cos\theta)\cdot\ h_n^{(2)}\binom{kr_0}{kr}\cdot j_n\binom{kr}{kr_0} \\
&\left.-\sin\theta\cdot P(\cos\frac{\pi}{2})\ \cdot P_n^m(\cos\theta)\ \cdot H\binom{kr_0}{kr}\cdot J\binom{kr}{kr_0}\Big\}\ \sin m\phi\right] \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\begin{pmatrix}a<r<r_0\\ r>r_0\end{pmatrix}
\end{aligned}\qquad(3-9)$$

ただし，

$$P(\cos\theta)=(n+1)(n+m)P_{n-1}^m(\cos\theta)-n(n+m+1)\ P_{n+1}^m(\cos\theta)$$

$$J(kr)=\frac{1}{kr}\ \frac{d}{dr}\ \left\{r\cdot j_n(kr)\right\},\quad H(kr)=\ \frac{1}{kr}\ \frac{d}{dr}\left\{r\cdot h_n^{(2)}(kr)\right\}$$

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{H}^p=&-\omega\epsilon_0\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2n+1}{n(n+1)}\sum_{m=0}^{n}\epsilon_m\frac{(n-m)!}{(n+m)!}\,\frac{(-1)^m}{\sin\theta} \\
&\times\left[\boldsymbol{i}_r\left\{\sin\ \theta\cdot mn(n+1)\,P_n^m\left(\cos\frac{\pi}{2}\right)\cdot P_n^m(\cos\theta)\cdot h_n^{(2)}\binom{kr_0}{kr}\cdot\frac{1}{kr}\ j_n\binom{kr}{kr_0}\cdot\sin m\phi\right\}\right. \\
&-\boldsymbol{i}_\theta\left\{\frac{m}{(2n+1)}\left[P_n^m\left(\cos\frac{\pi}{2}\right)\ \cdot P(\cos\theta)\cdot h_n^{(2)}\binom{kr_0}{kr}\cdot J\binom{kr}{kr_0}\right.\right. \\
&\left.\left.+P\left(\cos\frac{\pi}{2}\right)\cdot P_n^m(\cos\theta)\cdot H\binom{kr_0}{kr}\cdot j_n\binom{kr}{kr_0}\right]\cdot\sin m\phi\right\} \\
&+\boldsymbol{i}_\phi\left\{\left[m^2\cdot\sin\theta\cdot P_n^m\left(\cos\frac{\pi}{2}\right)\cdot P_n^m(\cos\theta)\cdot h_n^{(2)}\binom{kr_0}{kr}\cdot J\binom{kr}{kr_0}\right.\right. \\
&\left.\left.\left.-\frac{1}{(2n+1)^2}\ P\left(\cos\frac{\pi}{2}\right)\cdot P(\cos\theta)\cdot H\binom{kr_0}{kr}\cdot j_n\binom{kr}{kr_0}\right]\cos m\phi\right\}\right] \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\begin{pmatrix}a\leqq r<r_0\\ r>r_0\end{pmatrix}
\end{aligned}\qquad(3-10)$$

散乱電磁界 $\boldsymbol{E}^s, \boldsymbol{H}^s$ は，磁気形および電気形未定係数 a_n および b_n を用いて次のように表わされる．なお，以下の記述においては，

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2n+1}{n(n+1)}\sum_{m=0}^{n}\epsilon_m\frac{(n-m)!}{(n+m)!}\frac{(-1)^m}{\sin\theta}\equiv\Sigma\Sigma$$

と略記する．

$$\boldsymbol{E}^s=jk\sum\sum\Big[\boldsymbol{i}_r\Big\{b_n\cdot\sin\theta\frac{n(n+1)}{(2n+1)}P\left(\cos\frac{\pi}{2}\right)\cdot P_n^m(\cos\theta)$$

$$\times H(kr_0)\cdot\frac{1}{kr}h_n^{(2)}(kr)\cdot\cos m\phi\Big\}+\boldsymbol{i}_\theta\Big\{a_n\cdot m^2P_n^m\left(\cos\frac{\pi}{2}\right)$$

$$\times P_n^m(\cos\theta)\cdot h_n^{(2)}(kr_0)\cdot h_n^{(2)}(kr)-\frac{b_n}{(2n+1)^2}\cdot P\left(\cos\frac{\pi}{2}\right)\cdot P(\cos\theta)$$

$$\times H(kr_0)\cdot H(kr)\Big\}\cos m\phi+\boldsymbol{i}_\phi\frac{m}{(2n+1)}\Big\{a_n\cdot P_n^m\left(\cos\frac{\pi}{2}\right)$$

$$\times P(\cos\theta)\cdot h_n^{(2)}(kr_0)\cdot h_n^{(2)}(kr)-b_n\cdot\sin\theta\cdot P\left(\cos\frac{\pi}{2}\right)\cdot P_n^m(\cos\theta)$$

$$\times H(kr_0)\cdot H(kr)\Big\}\sin m\phi\Big]\qquad(r\geqq a)\qquad(3-11)$$

$$\boldsymbol{H}^s=-\omega\varepsilon_0\sum\sum\Big[\boldsymbol{i}_r\Big\{a_n\cdot\sin\theta\cdot mn(n+1)P_n^m\left(\cos\frac{\pi}{2}\right)$$

$$\times P_n^m(\cos\theta)\cdot h_n^{(2)}(kr_0)\cdot\frac{1}{kr}h_n^{(2)}(kr)\cdot\sin m\phi\Big\}-\boldsymbol{i}_\theta\Big\{\frac{m}{2n+1}$$

$$\times\Big[a_n\cdot P_n^m\left(\cos\frac{\pi}{2}\right)\cdot P(\cos\theta)\cdot h_n^{(2)}(kr_0)\cdot H(kr)+b_n\cdot P\left(\cos\frac{\pi}{2}\right)$$

$$\times P_n^m(\cos\theta)\cdot H(kr_0)\cdot h_n^{(2)}(kr)\Big]\sin m\phi\Big\}$$

$$+\boldsymbol{i}_\phi\Big\{\Big[a_n\cdot m^2\cdot\sin\theta\cdot P_n^m\left(\cos\frac{\pi}{2}\right)\cdot P_n^m(\cos\theta)\cdot h_n^{(2)}(kr_0)\cdot H(kr)$$

$$-\frac{b_n}{(2n+1)^2}P\left(\cos\frac{\pi}{2}\right)\cdot P(\cos\theta)\cdot H(kr_0)\cdot h_n^{(2)}(kr)\Big]\cos m\phi\Big\}\Big]$$

$$(r\geqq a)\qquad(3-12)$$

球の内部電磁界 $\boldsymbol{E}^r,\boldsymbol{H}^r$ は，磁気形および電気形未定係数 c_n および d_n と，球の比誘電率 ε_r，比透磁率 μ_r を用いて次のようになる．

$$\boldsymbol{E}^r=jk\sqrt{\varepsilon_r\cdot\mu_r}\sum\sum\Big[\boldsymbol{i}_r\Big\{d_n\cdot\sin\theta\,\frac{n(n+1)}{(2n+1)}P\left(\cos\frac{\pi}{2}\right)\cdot P_n^m(\cos\theta)$$

$$\times J(kr_0)\,\frac{1}{\sqrt{\varepsilon_r\cdot\mu_r}\cdot kr}j_n(\sqrt{\varepsilon_r\cdot\mu_r}\cdot kr)\cdot\cos m\phi\Big\}$$

$$+\boldsymbol{i}_\theta\Big\{c_n\cdot m^2\cdot P_n^m\left(\cos\frac{\pi}{2}\right)\cdot P_n^m(\cos\theta)\cdot h_n^{(2)}(kr_0)\cdot j_n(\sqrt{\varepsilon_r\cdot\mu_r}\cdot kr)$$

$$-\frac{d_n}{(2n+1)^2}\cdot P\left(\cos\frac{\pi}{2}\right)\cdot P(\cos\theta)\cdot H(kr_0)\cdot J(\sqrt{\varepsilon_r\cdot\mu_r}\,kr)\Big\}\cos m\phi$$

$$+\boldsymbol{i}_\phi\Big\{\frac{m}{(2n+1)}\Big[c_n\cdot P_n^m\left(\cos\frac{\pi}{2}\right)\cdot P(\cos\theta)\cdot h_n^{(2)}(kr_0)\cdot j_n(\sqrt{\varepsilon_r\cdot\mu_r}\,kr)$$

$$-d_n\cdot\sin\theta\cdot P\left(\cos\frac{\pi}{2}\right)\cdot P_n^m(\cos\theta)\cdot H(kr_0)\cdot J(\sqrt{\varepsilon_r\cdot\mu_r}\cdot kr)\Big]\sin m\phi\Big\}\Big]$$

$$(r\leqq a)\qquad(3-13)$$

$$\boldsymbol{H}^r=-\omega\varepsilon_0\cdot\varepsilon_r\sum\sum\Big[\boldsymbol{i}_r\Big\{c_n\cdot\sin\theta\cdot mn(n+1)P_n^m\Big(\cos\frac{\pi}{2}\Big)\cdot P_n^m(\cos\theta)$$
$$\times h_n^{(2)}(kr_0)\frac{1}{\sqrt{\varepsilon_r\cdot\mu_r}\cdot kr}\ j_n(\sqrt{\varepsilon_r\cdot\mu_r}\cdot kr)\cdot\sin m\phi\Big\}-\boldsymbol{i}_\theta\Big\{\frac{m}{(2n+1)}$$
$$\times\Big[c_n\cdot P_n^m\Big(\cos\frac{\pi}{2}\Big)\cdot P(\cos\theta)\cdot h_n^{(2)}(kr_0)\cdot J(\sqrt{\varepsilon_r\cdot\mu_r}\cdot kr)+d_n\cdot P\Big(\cos\frac{\pi}{2}\Big)$$
$$\times P_n^m(\cos\theta)\cdot H(kr_0)\cdot j_n(\sqrt{\varepsilon_r\cdot\mu_r}\cdot kr)\Big\}\ \sin m\phi$$
$$+\boldsymbol{i}_\phi\Big\{\Big[c_n\cdot m^2\cdot\sin\ \theta\cdot P_n^m\Big(\cos\frac{\pi}{2}\Big)\cdot P_n^m(\cos\theta)\cdot h_n^{(2)}(kr_0)\cdot J(\sqrt{\varepsilon_r\cdot\mu_r}\cdot kr)$$
$$-\frac{d_n}{(2n+1)^2}P\Big(\cos\frac{\pi}{2}\Big)\cdot P(\cos\theta)\cdot H(kr_0)\cdot j_n(\sqrt{\varepsilon_r\cdot\mu_r}\cdot kr)\Big]\ \cos m\phi\ \Big\}\Big]$$
$$(r\leqq a)\qquad (3-14)$$

ただし， $\varepsilon_r=\varepsilon_1/\varepsilon_0$，$\mu_r=\mu_1/\mu_0$.

以上の電磁界に対しては球の表面 $r=a$ において，境界条件

$$E_\theta^p+E_\theta^s=E_\theta^r,\qquad H_\theta^p+H_\theta^s=H_\theta^r \qquad (3-15)$$

が成立する．式（3－9）～（3－14）の θ 成分と式（3－15）から散乱波に関する未定係数 a_n, b_n を求めると次のようになる．

$$\left.\begin{aligned}a_n&=-\frac{\sqrt{\varepsilon_r}j_n(ka)\cdot J(\sqrt{\varepsilon_r\cdot\mu_r}\cdot ka)\ -\sqrt{\mu_r}J(ka)\cdot j_n(\sqrt{\varepsilon_r\cdot\mu_r}\cdot ka)}{\sqrt{\varepsilon_r}h_n^{(2)}(ka)\cdot J(\sqrt{\varepsilon_r\cdot\mu_r}\cdot ka)-\sqrt{\mu_r}H(ka)\cdot j_n(\sqrt{\varepsilon_r\cdot\mu_r}\cdot ka)}\\ b_n&=-\frac{\sqrt{\mu_r}j_n(ka)\cdot J(\sqrt{\varepsilon_r\cdot\mu_r}\cdot ka)\ -\sqrt{\varepsilon_r}J(ka)\cdot j_n(\sqrt{\varepsilon_r\cdot\mu_r}\cdot ka)}{\sqrt{\mu_r}h_n^{(2)}(ka)\cdot J(\sqrt{\varepsilon_r\cdot\mu_r}\cdot ka)-\sqrt{\varepsilon_r}H(ka)\cdot j_n\ (\sqrt{\varepsilon_r\cdot\mu_r}ka)}\end{aligned}\right\}\qquad (3-16)$$

また，完全導体球のときの a_n を a_{Mn}，b_n を b_{Mn}（Mは完全導体を表す）とすれば，それらは式（3－16）において，$\varepsilon_r\to\infty$，$\mu_r=1$ として次のようになる．

$$a_{Mn}=-\frac{j_n(ka)}{h_n^{(2)}(ka)},\quad b_{Mn}=-\ \frac{J(ka)}{H(ka)} \qquad (3-17)$$

a_n（または a_{Mn}）および b_n（または b_{Mn}）は，それぞれ，球の磁気形および電気形散乱係数といわれるものであり，これらは平面波入射の場合[(4),(12)]と同一である．

波源が磁気ダイポールの場合の球の散乱係数も上記と同様な方法で求められる．この場合の電磁界は，

$$\nabla\times\boldsymbol{H}=j\omega\varepsilon\boldsymbol{E} \qquad (3-18)$$

の関係と式（3－9）～（3－14）から次のように得られる．すなわち，入射電磁界の $\boldsymbol{H}^p$

は式（3－9）において $E^p \to H^p$ に，E^p は式（3－10）において $H^p \to E^p$ にするとともに係数 $-\omega\varepsilon_0$ を $\omega\mu_0$ に変更すればそれぞれ得られる．散乱電磁界の H^s は式(3－11)において $E^s \to H^s$，$a_n \to b_n^*$，$b_n \to a_n^*$（＊は波源が磁気ダイポールを表す）とし，また E^s も式（3－12）において $H^s \to E^s, -\omega\varepsilon_0 \to \omega\mu_0, a_n \to b_n^*$, $b_n \to a_n^*$ とすれば得られる．また，内部電磁界の H^r は式（3－13）において $E^r \to H^r, c_n \to d_n^*$, $d_n \to c_n^*$ に変更し，E^r も式（3－14）において $H^r \to E^r$，$-\omega\varepsilon_0 \cdot \varepsilon_r \to \omega\mu_0 \cdot \mu_r$，$c_n \to d_n^*$，$d_n \to c_n^*$ に変更して得られる．

以上の諸式から，この場合の電気形および磁気形散乱係数 a_n^* および b_n^* は次式のように得られる．

$$\left.\begin{aligned} a_n^* &= -\frac{\sqrt{\mu_r} \cdot j_n(ka) \cdot J(\sqrt{\varepsilon_r \cdot \mu_r} \cdot ka) - \sqrt{\varepsilon_r} \cdot J(ka) \cdot j_n(\sqrt{\varepsilon_r \cdot \mu_r} \cdot ka)}{\sqrt{\mu_r} \cdot h_n^{(2)}(ka) \cdot J(\sqrt{\varepsilon_r \cdot \mu_r} \cdot ka) - \sqrt{\varepsilon_r} \cdot H(ka) \cdot j_n(\sqrt{{}_r \cdot \mu_r} \cdot ka)} \\ b_n^* &= -\frac{\sqrt{\varepsilon_r} \cdot j_n(ka \cdot) J(\sqrt{\varepsilon_r \cdot \mu_r} \cdot ka) - \sqrt{\mu_r} \cdot J(ka) \cdot j_n(\sqrt{\varepsilon_r \cdot \mu_r} \cdot ka)}{\sqrt{\varepsilon_r} \cdot h_n^{(2)}(ka) \cdot J(\sqrt{\varepsilon_r \cdot \mu_r} \cdot ka) - \sqrt{\mu_r} \cdot H(ka) \cdot j_n(\sqrt{\varepsilon_r \cdot \mu_r} \cdot ka)} \end{aligned}\right\} \quad (3-19)$$

すなわち，a_n^* と b_n^* は $\sqrt{\mu_r}$ と $\sqrt{\varepsilon_r}$ をそれぞれ交換した関係であり，波源が電気ダイポールのときの a_n と b_n はそれぞれ b_n^* と a_n^* と同一になる．また，完全導体球の a_{Mn}^* と b_{Mn}^* は次のようになる．

$$a_{Mn}^* = -\frac{J(ka)}{H(ka)}, \quad b_{Mn}^* = -\frac{j_n(ka)}{h_n^{(2)}(ka)} \qquad (3-20)$$

式（3－20）を式（3－17）と比較すればわかるように，a_{Mn} と b_{Mn}^* は同一であり，b_{Mn} と a_{Mn}^* は同一である．

3－3　円柱と球の散乱係数の対応

第2章で求めた円柱の $\theta=0$ における散乱係数と3－2節で求めた球の散乱係数との対応関係を示せば表3－1のようになる．すなわち，球のときの j_n を J_n に，J を J_n' に，$h_n^{(2)}$ を $H_n^{(2)}$ に，H を $H_n^{(2)'}$ にそれぞれ置き換えれば円柱の場合になる．また，J_n，N_n，$H_n^{(1)}$，$H_n^{(2)}$ を Z_n で代表し，j_n, n_n，$h_n^{(1)}$，$h_n^{(2)}$ を z_n で代表すれば，それらの間には次の関係がある[(33),(34)]．

表3—1

円　　　柱	球
$B^{e}_{ns}(\theta=0)$	a_n または b^*_n
$B^{e}_{Mn}(\theta=0)$	a_{Mn} または b^*_{Mn}
$B^{h}_{ns}(\theta=0)$	b_n または a^*_n
$B^{h}_{Mns}(\theta=0)$	b_{Mn} または a^*_{Mn}

$$z_n(z)=\sqrt{\frac{\pi}{2z}}\cdot Z_{n+\frac{1}{2}}(z) \tag{3—21}$$

したがって，球の磁気形および電気形散乱係数と，円柱の $\theta=0$ における磁気形および電気形散乱係数とは極めて類似しており，本質的には同じ性質を持つことがわかった．

3—4　むすび

本章では，球に電気または磁気ダイポール波が入射したときの球の電磁波散乱係数をグリーン関数を用いた電磁界の表現式から導出し，平面波入射の場合と同一になることを示した．そして，球の散乱係数と円柱の場合の円柱軸に直角で波源を含む面内の散乱係数とは同じ形式であり，性質も極めて類似することを示した．

第 4 章　円柱および球の散乱係数の統一的取扱い

4－1　まえがき

第2章と第3章では，電気または磁気ダイポール波が円柱または球に入射したときの電磁波散乱係数を解析した．そして，円柱の軸に直角で波源を含む面内の散乱係数と球の散乱係数がいずれも平面波入射のときと同一になり，しかもそれらは同じ形式になることを示した．円柱および球の散乱についての研究の歴史は古く(1)~(3)，これまで多くの成果があるものの，いずれも円柱および球の媒質定数並びに入射周波数に対する取扱い範囲に制限があった．周知のように，散乱現象はこれまで円柱および球の半径aと入射波長λとの関連において，$a \ll \lambda$，$a \simeq \lambda$および$a \gg \lambda$の各領域において近似的に取扱われてきた．また，媒質も完全導体または低損失誘電体が主に取扱われ，損失の大きい誘電体および媒質が誘電性と磁性を共に示す場合などはほとんど検討されていない．それは，媒質の損失が大きくなると，散乱係数の表式に含まれる複素円柱または球ベッセル関数の数値計算が困難になるためである．そのため，数値計算に便利なように散乱係数の表式を変形した取扱い方法も種々検討されたが，いずれも適用範囲に限界があった(24)．したがって，広範囲の入射周波数および媒質定数に対する円柱および球の散乱係数の性質は未だ充分解明されていないといえる．

本章は，本論文の主要部分であり，任意の媒質定数と広い周波数域における円柱および球の散乱係数の基本的性質を以下のようにして明らかにしている．まず，第2章と第3章の結論から，円柱の軸に直角で波源を含む面内の磁気形および電気形散乱係数と，球の磁気形および電気形散乱係数とを一つの式で統一的に表示している．ついで，この式を複素平面上の点（−1/2，0）を中心とする表式に変形することにより，散乱係数の性質が見通しよく得られることを示している．そして，円柱および球の媒質が無損失または完全導体のときの散乱係数は常に点（−1/2，0）を中心とする半径 1/2 の円周上にあること，媒質に有限な損失があるときは点（−1/2，0）からの距離が 1/2 以下になること，媒質定数が周波数に無関係であれば，周波数が高くなるに従い点（−1/2，0）からの距離が一定の値に近づくことを示している．また，複素ベッセル関数の数値計算法を検討し，これを

散乱係数の計算に適用することにより，媒質の損失が大きくなるに従い完全導体の性質に近づく様子を計算例で示している．また，高い周波数領域における簡単な近似式を導出し，このときの磁気形と電気形の散乱係数が相互に点（$-1/2$, 0）に関してほぼ点対称の関係になることを計算例とともに示している．さらに，近似式による値を厳密な値により評価し，近似式の適用範囲などについて考察している．さいごに，これらの散乱係数の性質を基にして，円柱および球の散乱断面積の適切な計算法も考察している．

なお，複素ベッセル関数の数値計算法は付録に記述している．

4－2　散乱系数の統一的表示

式（2－40），（2－43）および式（3－16），（3－19）を統一的に次のように表示する．

$$\rho_n = -\frac{C_1 \cdot f_n^1(x) \cdot F_n^1(z) - C_2 \cdot F_n^1(x) \cdot f_n^1(z)}{C_1 \cdot f_n^4(x) \cdot F_n^1(z) - C_2 \cdot F_n^4(x) \cdot f_n^1(z)} \qquad (4-1)$$

ただし，

$$F_n^1(x) = f_{n-1}^1(x) - n \cdot f_n^1(x)/x$$

$$F_n^4(x) = F_n^1(x) - jF_n^2(x)$$

$$F_n^2(x) = f_{n-1}^2(x) - n \cdot f_n^2(x)/x$$

$$f_n^1(z) = r_n^1(z) + ji_n^1(z)$$

$$F_n^1(z) = f_{n-1}^1(z) - n \cdot f_n^1(z)/z.$$

ここで，$x=ka$（a: 円柱または球の半径，$k=\omega\sqrt{\varepsilon_0 \cdot \mu_0}=2\pi/\lambda$：自由空間波数，$\omega$：入射波角周波数，$\lambda$：自由空間波長）であり，$z=\sqrt{\varepsilon_r \cdot \mu_r} \cdot x$（$\varepsilon_r=\varepsilon_{r0}(1-j\tan\delta_d)$：複素比誘電率，$\mu_r=\mu_{r0}(1-j\tan\delta_m)$：複素比透磁率），$C_1$ と C_2 は$\sqrt{\varepsilon_r}$ または$\sqrt{\mu_r}$ である．f_n は円柱または球ベッセル関数を表し，右肩の指標1は J_n, j_n を，2は N_n, n_n を，4は $H_n^{(2)}, h_n^{(2)}$ をそれぞれ表す．F_n^1 は J_n, j_n の第1次導関数 J_n', j_n' を，F_n^2 は N_n', n_n'を，F_n^4 は $H_n^{(2)'}$, $h_n^{(2)'}$をそれぞれ表す．r_n^1 と i_n^1 は複素ベッセル関数の実数部と虚数部である．そして，式（2－40）の $B_{ns}^e(\theta=0)$ を ρ_n^e，式（2－43）の $B_{ns}^h(\theta=0)$ を ρ_n^h，式（3－16）の a_n, b_n を ρ_{an}, ρ_{bn}，式（3－19）の a_n^*, b_n^* を ρ_{an}^*, ρ_{bn}^* とする．また，円柱およ

び球が完全導体のときの ρ_n を一般に ρ_{Mn} とし，式（2－41）の B^e_{Mns} を ρ^e_{Mn}，式（2－44）の B^h_{Mns} を ρ^h_{Mn}，式（3－17）の a_{Mn}，b_{Mn} を ρ_{Man}，ρ_{Mbn}，式（3－20）の a^*_{Mn}，b^*_{Mn} を ρ^*_{Man}，ρ^*_{Mbn} とすれば，それらは次式のように表せる．

$$\left.\begin{aligned} \rho^e_{Mn},\ \rho_{Man},\ \rho^*_{Mbn} &= -\frac{f^1_n(x)}{f^4_n(x)} \\ \rho^h_{Mn},\ \rho_{Mbn},\ \rho^*_{Man} &= -\frac{F^1_n(x)}{F^4_n(x)} \end{aligned}\right\} \qquad (4-2)$$

次に，ρ_n と ρ_{Mn} の性質を考察するために，式（4－1）と（4－2）をまず次式のように変形する．

$$\begin{bmatrix} \rho_n \\ \rho_{Mn} \end{bmatrix} = \frac{1}{-1+j\begin{bmatrix} A_n \\ A_{Mn} \end{bmatrix}} = \begin{bmatrix} \alpha_n \\ \alpha_{Mn} \end{bmatrix} + j\begin{bmatrix} \beta_n \\ \beta_{Mn} \end{bmatrix} \qquad (4-3)$$

ただし，

$$A_n = \frac{C_1\cdot f^2_n(x)\cdot F^1_n(z) - C_2\cdot F^2_n(x)\cdot f^1_n(z)}{C_1\cdot f^1_n(x)\cdot F^1_n(z) - C_2\cdot F^1_n(x)\cdot f^1_n(z)} = G_n + jD_n$$

$$A_{Mn} = \frac{f^2_n(x)}{f^1_n(x)},\quad \frac{F^2_n(x)}{F^1_n(x)}$$

ここで，$|\rho_n| \leqq 1$ であることと，G_n と D_n がともに実数であることから，$-\infty \leqq G_n \leqq +\infty$ であり，$D_n \geqq 0$ である．また，A_{Mn} は常に実数であり，$-\infty \leqq A_{Mn} \leqq +\infty$ である．これらのことから，式（4－3）はさらに次式のように変形できる．

$$\begin{bmatrix} \rho_n \\ \rho_{Mn} \end{bmatrix} = -\frac{1}{2} - \begin{bmatrix} r_n \\ r_{Mn} \end{bmatrix} \cdot \exp\begin{bmatrix} j\theta_n \\ j\theta_{Mn} \end{bmatrix} \qquad (4-4)$$

ただし

$$r_n = \left\{ \frac{1}{4} - \frac{D_n}{G_n^2 + (D_n+1)^2} \right\}^{\frac{1}{2}}$$

$$\theta_n = \tan^{-1} \frac{2G_n}{1 - G_n^2 - D_n^2}$$

$$r_{Mn}=\frac{1}{2}$$

$$\theta_{Mn}=\tan^{-1}\frac{2A_{Mn}}{1-A_{Mn}{}^2}$$

式（4－4）は，元来複素平面上の原点（0，0）を基準に表示された式（4－1），（4－2）を，同平面の点（－1/2，0）を中心とし，（－1/2，0）からの距離 r_n または r_{Mn} と，実軸からの偏角 θ_n または θ_{Mn} によって表示したものである．式（4－3）をこのように変形することにより，ρ_n または ρ_{Mn} の性質が一層明瞭になる．

4－3　統一表示式による散乱係数の解析

4－3－1　固有モードと共振現象

式（4－1）の分母は，一般に複素数の根により零になる．その複素数根は，円柱の場合はその軸方向に伝搬しない磁気形および電気形固有振動モードを規定し，球の場合も磁気形および電気形固有振動モードを規定する．すなわち，

$$C_1\cdot f_n^4(x)\cdot F_n^1(z)-C_2\cdot F_n^4(x)\cdot f_n^1(z)=0 \qquad (4-5)$$

が成立する複素数根 $\gamma_{n,\nu}$ は上記の磁気形および電気形固有モードの自由減衰振動を規定する．ここで，

$$\gamma_{n,\nu}/(\sqrt{\varepsilon_0\cdot\mu_0}\cdot a)=\omega'=\omega_{n,\nu}+j\kappa_{n,\nu} \qquad (4-6)$$

とし，$\exp(j\omega't)$ の実数部をとれば

$$\mathrm{R_e}[\exp(j\omega't)]=\exp(-\kappa_{n,\nu}t)\cdot\cos(\omega_{n,\nu}t) \qquad (4-7)$$

となる．式（4－6）の $\omega_{n,\nu}$ は円柱または球の自由減衰振動の固有角周波数を，$\kappa_{n,\nu}$ は振動の減衰（制動）定数を与える．ここで，n は固有モード次数であり，ν は $\gamma_{n,\nu}$ の絶対値の小さい方から数えた順位である．円柱または球が低損失であれば，入射波の角周波数 ω が $\omega_{n,\nu}$ に近づくと円柱または球は電気的に共振する．共振の大きさは，ρ_n の大きさとして現れる．最も典形的な場合として，媒質が無損失（ε_r, μ_r が実数）のときは，式（4－1）の変数はすべて実数になるため，ρ_n は次のように表せる．

$$\rho_n=-\frac{l_n}{l_n+jm_n} \qquad (4-7)$$

ただし，

$$l_n=C_1\cdot f_n^1(x)\cdot F_n^1(\sqrt{\varepsilon_{r0}\cdot\mu_{r0}}\cdot x)-C_2\cdot F_n^1(x)\cdot f_n^1(\sqrt{\varepsilon_{r0}\cdot\mu_{r0}}\cdot x)$$

$$m_n=-\left\{C_1\cdot f_n^2(x)\cdot F_n^1(\sqrt{\varepsilon_{r0}\cdot\mu_{r0}}\cdot x)-C_2\cdot F_n^2(x)\cdot f_n^1(\sqrt{\varepsilon_{r0}\cdot\mu_0}\cdot x)\right\}$$

式（4－7）において，$m_n=0$となるxでρ_nは共振し，このとき，$\rho_n=-1$となる．式（4－6）の$\omega_{,n\nu}$と式（4－7）の$m_n=0$となるωとは一般に異るが，両者は互いに接近している．媒質に有限な損失がある場合の円柱および球の固有振動を取扱った報告も多くある(7),(12),(18),(21)が，このことについて議論するこが本論文の目的ではないのでここでは省略する．しかし，数値計算によれば，媒質の損失が零から次第に大きくなった場合，共振現象が現れる範囲内において共振周波数は大きく変らない．このことは，後の計算例で示す．媒質が完全導体の場合も式（4－7）と同様な取扱いができる．

4－3－2　散乱係数の一般的性質

散乱係数の一般的な性質は，式（4－4）により明らかにされる．まず，ρ_nにおいて，媒質が無損失のときは$D_n=0$となる．したがって，このときは$r_n=1/2$となり，ρ_nは複素平面上の点（$-1/2, 0$）を中心とする半径 1/2 の円周上にある．そして，$G_n=0$のとき円柱または球は共振し，$\rho_n=-1$となる．$G_n=\pm\infty$のときは$\rho_n=0$となる．また，$\tan\delta_d$および$\tan\delta_m$のいずれか一方または双方が零でないときは，$D_n\geqq 0$となり，$r_n<1/2$となる．しかし，媒質の損失が大きくなるに従いr_nは 1/2 に近づく．媒質が完全導体のときのρ_{Mn}は常に$r_{Mn}=1/2$である．

4－3－3　高い周波数領域における散乱係数の性質

誘電体および磁性体は一般に周波数により媒質定数が異るのが常であるが，ここでは散乱係数の基本的性質を検討するために一応媒質定数は周波数に無関係とする．このような仮定を設けると，周波数が高い場合は式（4－3）において$x\to\infty$に相当する．したがって，$z=\sqrt{\varepsilon_r\cdot\mu_r}\cdot x$であることと，式（4－1）の$F_n^1(x), F_n^1(z)$および$F_n^2(x)$の関係から，このときの式（4－3）の$A_n$を$A_n'$で表せば，$A_n'$は次のようになる．

$$A_n'=\frac{C_1\cdot f_n^2(x)\cdot f_{n-1}^1(z)-C_2\cdot f_{n-1}^2(x)\cdot f_n^1(z)}{C_1\cdot f_n^1(x)\cdot f_{n-1}^1(z)-C_2\cdot f_{n-1}^1(x)\cdot f_n^1(z)}\qquad（4－8）$$

また，複素変数zが大きいときのベッセル関数と$\tan z$は次のようになる(76),(77)．

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{J_n(z)}{N_n(z)} \simeq \sqrt{\frac{2}{\pi z}}\,\frac{\cos}{\sin}\left(z-\frac{2n+1}{4}\pi\right)\\
&\frac{j_n(z)}{n_n(z)} \simeq \frac{1}{z}\,\frac{\cos}{\sin}\left(z-\frac{n+1}{2}\pi\right)\\
&\tan z \simeq j
\end{aligned}\right\} \qquad (|Z|\to\infty) \qquad (4-9)$$

式（4－9）の関係を式（4－8）に入れると A_n' は簡単な表現になる．式（4－8）からわかるように，A_n' は式（4－9）の$\sqrt{2/(\pi z)}$ および $1/z$ と無関係になる．$x\to\infty$ における ρ_n^e, ρ_n^h, ρ_{an}, ρ_{bn} をそれぞれ$\rho_n^{e\prime}$, $\rho_n^{h\prime}$, ρ_{an}', ρ_{bn}' で表せば，式（4－3），（4－8）および（4－9）からわかるように，$\rho_n^{e\prime}$ と $\rho_{a'n}$ および $\rho_n^{h\prime}$ と ρ_{bn}' はそれぞれ類似の特性を持つ．そこで，まず，ρ_{an}' および ρ_{bn}' の性質について考察する．また，C_1 と C_2 は $\sqrt{\varepsilon_r}$ または $\sqrt{\mu_r}$ であるが，便宜上次のようにおく．

$$C_1=|C_1|\cdot\exp(-j\varphi_1),\qquad C_2=|C_2|\cdot\exp(-j\varphi_2) \qquad (4-10)$$

(i)　$|C_1|>1$, $|C_2|>1$ のとき：

式（4－9）の $j_n(z)$, $n_n(z)$, $\tan z$ を式（4－8）に入れると，A_n' は次のようになる．

$$A_n'\simeq-\frac{C_1\cdot\cos\left(x-\frac{n}{2}\pi\right)-jC_2\cdot\sin\left(x-\frac{n}{2}\pi\right)}{C_1\cdot\sin\left(x-\frac{n}{2}\pi\right)+j\,C_2\cdot\cos\left(x-\frac{n}{2}\pi\right)} \qquad (4-11)$$

ここで，ρ_{an}', ρ_{bn}' の A_n' をそれぞれ A_{an}', A_{bn}' で表せば，

$$A'_{an}\simeq-1/A'_{bn} \qquad (4-12)$$

となる．また，ρ_{an}, ρ_{bn} における式（4－4）の r_n および θ_n をそれぞれ r_{an}, r_{bn} および θ_{an}, θ_{bn} とし，ρ_{an}', ρ_{bn}' ではそれらを r_{an}', r_{bn}' および θ_{an}', θ_{bn}' とすれば，次の関係が成立する．

$$r_{an}'\simeq r_{b'n},\ \theta_{an}'\simeq\theta_{bn}'+\pi \qquad (4-13)$$

すなわち，同一モード次数の ρ_{an}' および ρ_{bn}' は点（$-1/2$, 0）を中心とする半径 $r_{an}'\simeq r_{bn}'$ の円周上にあり，しかもそれらはたがいに点（$-1/2$, 0）に関してほぼ点対称の関係になることがわかる．

(ii)　$C_1=C_2(|C_1|=|C_2|>1, \varphi_1=\varphi_2>0)$ のとき：

このときは，式（4－11）および式（4－3）から，

$$A_{an}{}'\simeq A_{bn}{}'\simeq j,\ \rho_{an}{}'\simeq\rho_{bn}{}'\simeq-1/2 \qquad (4-14)$$

となり，ρ_{an} と ρ_{bn} は x が大きくなるに従い点（$-1/2$, 0）に近づくことがわかる．

(iii)　完全導体のとき：

媒質が完全導体のときの ρ_{Man}, ρ_{Mbn} をそれぞれ $\rho_{Man}{}'$, $\rho_{Mbn}{}'$ とし，このときの A_{Man}, A_{Mbn} をそれぞれ $A_{Man}{}'$, $A_{Mbn}{}'$,　r_{Man}, r_{Man} をそれぞれ $r_{Man}{}'$, $r_{Mbn}{}'$,　θ_{Man}, θ_{Mbn} をそれぞれ $\theta_{Man}{}'$, $\theta_{Mbn}{}'$ とすれば，式（4－3），（4－4）および式（4－9）から，それらの間には次の関係が成立する．

$$\left.\begin{aligned}&A_{Man}{}'\simeq-1/A_{Mbn}{}'\\&r_{Man}{}'=r_{Mbn}{}'=1/2(=r_{Man}=r_{Mbn})\\&\theta_{Man}{}'\simeq\theta_{Mbn}{}'+\pi\end{aligned}\right\} \qquad (4-15)$$

すなわち，このときの $\rho_{Man}{}'$, $\rho_{Mbn}{}'$ はそれぞれ ρ_{Man}, ρ_{Mbn} と同様に，点（$-1/2$, 0）を中心とする半径1/2の円周上にある．そして，それらはたがいに点($-1/2$, 0）に関してほぼ点対称の関係になる．また，式（4－15）の $A_{Man}{}'$ および $A_{Mbn}{}'$は，式（4－11）にそれぞれ $C_1=\infty, C_2=1$ および $C_1=1, C_2=\infty$ を代入して，次のようにも表せる．

$$\left.\begin{aligned}&A_{Man}{}'\simeq\tan(x-n\pi/2-\pi/2)\\&A_{Mbn}{}'\simeq\tan(x-n\pi/2)\end{aligned}\right\} \qquad (4-16)$$

すなわち，$A_{Man}{}'$ と $A_{Mb'n}$ とは x に関して相互に $\pi/2$ の位相差がある．すなわち，$\rho_{Man}{}'$ および $\rho_{Mbn}{}'$ は x に対して π の周期で変化し，しかもそれらは相互にほぼ $\pi/2$ の位相差を持つ．したがって，$|\rho_{Man}{}'|$ が最大になる x の近くで $|\rho_{Mbn}{}'|$ は零になり，$|\rho_{Ma'n}|$ が零になる x の近くで $|\rho_{Mbn}{}'|$ は最大になる．

周波数が高いときの(i)，(ii)，(iii)の関係は，波源が磁気ダイポールのときにも当然適用できる．すなわち，$x\to\infty$ における $\rho^{*\prime}_{an}$ は $\rho_{bn}{}'$, $\rho^{*\prime}_{bn}$ は $\rho_{an}{}'$, $\rho^{*\prime}_{Man}$ は $\rho_{Mbn}{}'$, $\rho^{*\prime}_{Mbn}$ は $\rho_{Man}{}'$ とそれぞれ同一の性質になる．

次に，円柱の場合の $x\to\infty$ における ρ^{e}_{n}, ρ^{h}_{n}, ρ^{e}_{Mn}, ρ^{h}_{Mn} をそれぞれ $\rho^{e\prime}_{n}$, $\rho^{h\prime}_{n}$, $\rho^{e\prime}_{Mn}$, $\rho^{h\prime}_{Mn}$ とする．このときは，式（4－9）からわかるように，式（4－8）において，$x\to(x-\pi/4)$ とし，$z\to\sqrt{\varepsilon_r\cdot\mu_r}(x-\pi/4)$ とすれば，式（4－11)～(4－16）と同一になる．すなわち，x が $\pi/4$ 異るところで $\rho^{e\prime}_{n}$ は $\rho_{an}{}'$ と，$\rho^{h\prime}_{n}$ は $\rho_{bn}{}'$と，$\rho^{e\prime}_{Mn}$ は $\rho_{Man}{}'$ と，

$\rho_{Mn}^{h\prime}$ は $\rho_{Mbn}{}'$ とそれぞれ同一の性質になる．

以上が統一表示式による散乱係数の解析であり，円柱および球の媒質定数が周波数に無関係のときは直ちに適用できる散乱係数の性質である．しかし，媒質定数は一般に周波数によって変化する．したがって，実際の散乱係数は上記のように単純ではないが，この場合においても，高い周波数領域における式（4－12)～(4－14）の関係は成立する．このことは，特に媒質が誘電体の場合を取扱うとときに有利である．何故ならば，$|\varepsilon_r|=\infty$，$\mu_r=1$ は完全導体と等価であり，誘電体の損失が大きいときの散乱現象を予測するには極めて便利である．

4－4　散乱係数の計算例とその考察

4－3節で述べたように，円柱の場合の円柱軸に直角で波源を含む面内の散乱係数と球の散乱係数は，本質的に同じである．円柱については第2章で計算例を示したので，ここでは球の場合の計算例を示し，それらについて考察する．なお，本節における散乱係数の表示は従来の表示法を使い，球の磁気形および電気形散乱係数をそれぞれ a_n，b_n とし，球が完全導体のときのそれらを a_{Mn}，b_{Mn} とする。また，高い周波数領域における近似表示のそれらを $a_n{}'$，$b_n{}'$，$a_{Mn}{}'$，$b_{Mn}{}'$ と表す．

球が完全導体の場合の a_{Mn} と b_{Mn} の正規化周波数 $x=ka$ に対する計算例を図4－1に示す．図4－1(a)は，$|a_{Mn}|, |b_{Mn}|$ の $n=1, 2, 3$ における周波数特性である．周知のように，球には $n=0$ モードの振動は存在しない[(1),(4),(12),(21)]．図4－1(a)で，n, p（または n，q）の表示は，n モード p 番目（または q 番目）の共振を表す．これは，式（4－6）の $\omega_{n,\nu}$ に対応する表示である．完全導体球では，$|b_{Mn}|$ の $q=1$ 番目の共振を除き，x に対する $|a_{Mn}|$，$|b_{Mn}|$ のすべての最大値は常に1になる．図4－1(b)は，$n=1$ のときの a_{M1} と b_{M1} の x に対する複素平面上の軌跡を描いたものである．式（4－4)，(4－15）で示したように，a_{M1}，b_{M1} は常に点（$-1/2, 0$）を中心とする半径1/2の円周上にある．そして，b_{M1} の $q=1$ では $x\simeq1.4$ のところで軌跡の回転方向が反転している．このような性質は，$n=1$ 以外の b_{Mn} においても常に示される．また，$x=20$～23 における a_{M1} と b_{M1} とは式（4－15）の関係を示している．ついで，図4－1(a)の $|a_{M1}|$ と完全導体円柱の図2－2(a) の $\theta=0$ における $|B_{M1s}^{e}|$ とを比較すると，両者は類似の特性を持つ．特に，x が大きい部分では，x の値がほぼ $\pi/4$ 異る位置（$|B_{M1s}^{e}|$ の x に $\pi/4$ を加えた値を $|a_{M1}|$ の x として見る）で両者はほとんど同じ特

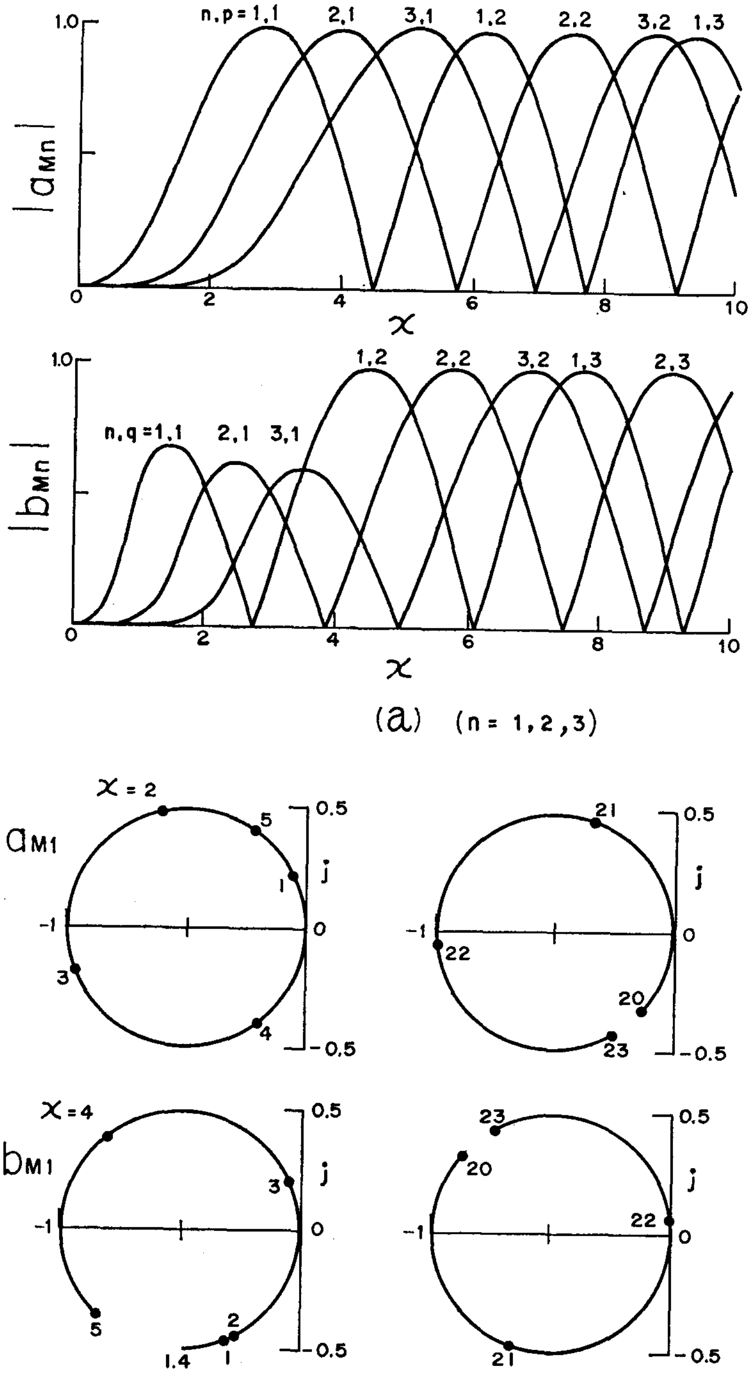
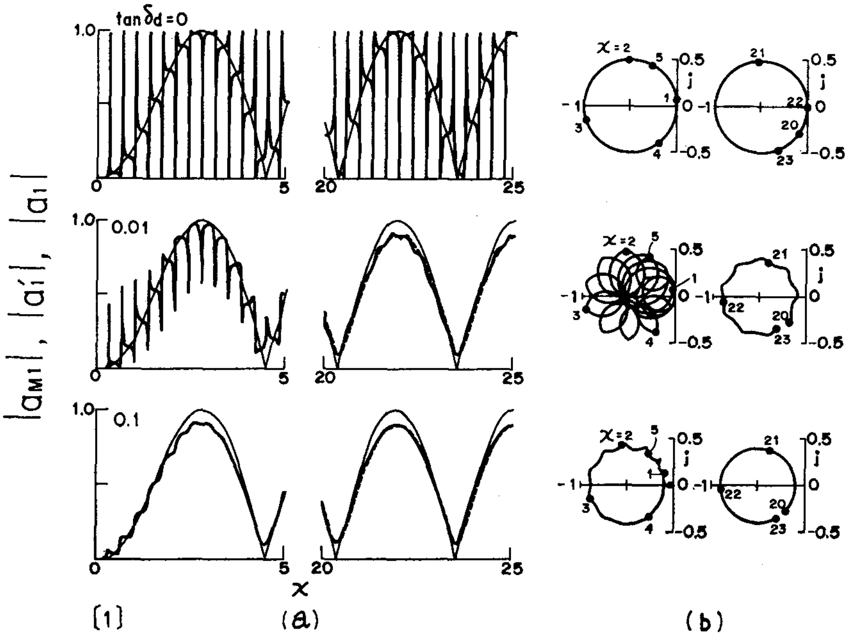
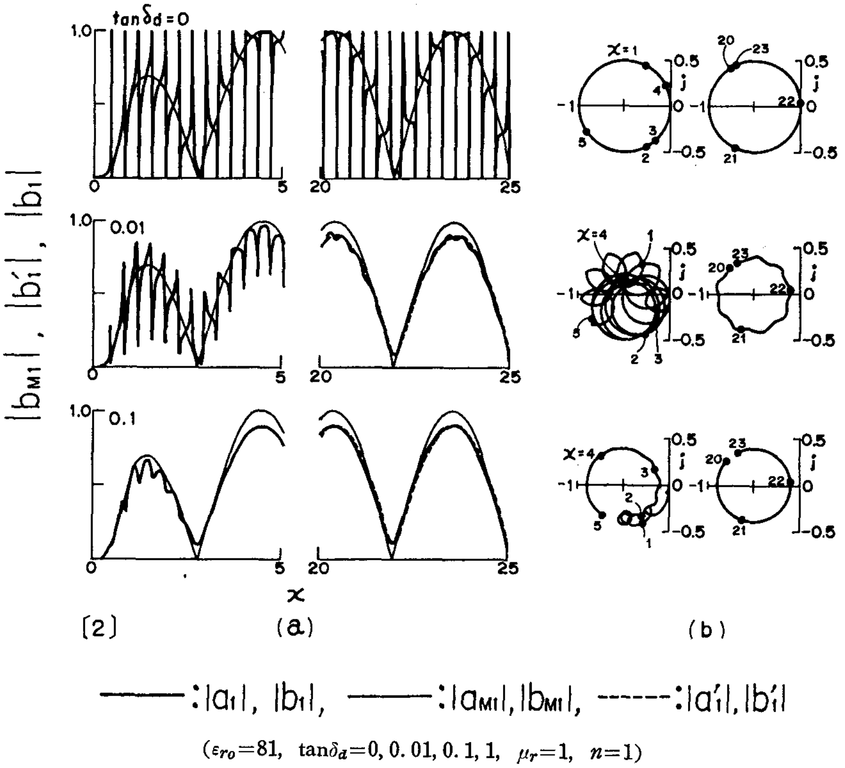


図 4－1　完全導体球における a_{Mn}, b_{Mn} の周波数特性





$(\varepsilon_{ro}=81,\ \tan\delta_d=0,\ 0.01,\ 0.1,\ 1,\ \mu_r=1,\ n=1)$

図4－2 誘電体球の a_1, a'_1 と b_1, b'_1 の周波数特性（$|a_{M1}|, |b_{M1}|$ も共に示す）

性を示している．これは，式（4－9）における J_n，N_n と j_n，n_n によって生じる $\rho^{e\prime}_{Mn}$ と $\rho_{Man}{}'$ との関係を明らかに示している．これのら関係は，$n \neq 1$ の $\rho^{e\prime}_{Mn}$，$\rho_{Man}{}'$ および $\rho^{h\prime}_{Mn}$，$\rho_{Mbn}{}'$ においても常に示される．

つぎに，誘電体球の $n=1$ における a_1，$a_1{}'$ および b_1，$b_1{}'$ の周波数特性の計算例を図4－2に示す．図4－2〔1〕(a) は，媒質定数が $\varepsilon_{r0}=81$(水)，$\tan\delta_d=0,\ 0.01,\ 0.1$ のときの $x=0\sim5,\ 20\sim25$ に対する $|a_1|$（太い実線）と $|a_1{}'|$（破線，ただし，$\tan\delta_d\neq0$，$x=20\sim25$）を完全導体球の $|a_{M1}|$（細い実線）と共に示した．$\tan\delta_d=0$ のときは x に対して多くの共振が現れ，それらの最大値は常に1である．また，x に対する各共振点の間隔はほぼ同じである．そして，各共振曲線の途中のたるみの部分は常に $|a_{M1}|$ と一致している．$\tan\delta_d$ が大きくなるに従い $|a_1|$ の共振は次第に減衰し $|a_{M1}|$ の特性に漸近している．これは，第2章の図2－5に対応するものであり，両者は極めて類似している．図4－2〔1〕(b) は，左側の(a)に対応する a_1 の x（ただし，$x=0\sim5$，$20\sim23$）に対する複素平面上の軌跡を描いたものである．4－3節で述べたように，$\tan\delta_d=0$ のときの a_1 は常に点（$-1/2,\ 0$）を中心とする半径 $1/2$ のと周上にある．そして，$\tan\delta_d$ および x が大きくなるに従い点（$-1/2,\ 0$）からの距離が一定になる様子をよく示している．図4－2〔2〕(a), (b)は，〔1〕(a), (b)と同じ表示法で b_1，$b_1{}'$ および $|b_{M1}|$ を示したものである．この図から，b_1 も a_1 と同様なことが言えることがわかる．また，図4－2〔1〕(b)と〔2〕(b) において，$\tan\delta_d=0.1$ の場合の $x=20\sim23$ における a_1 と b_1 の軌跡を比較すると，それらは同一の x の値で式（4－13）の関係になっていることがわかる．他の誘電体球においても図4－2と類似の特性が示される．

図4－2と同一の媒質定数における $|a_2|,|a_2{}'|$（および $|a_3||a_3{}'|$）の周波数特性を，図4－2〔1〕(a) と同一の表示法により，$|a_{M2}|$（および $|a_{M3}|$）と共に図4－3(1)（および(2)）に示した．$\tan\delta_d=0$ のとき，$|a_2|$ の第1共振点（x を零から大きくしたとき，最初に現れる共振点）の x の値は，$|a_3|$ の第1共振点の x の値より小さい．一般に，n が大きくなるに従い第1共振の x の値は大きくなる（計算例は後に示す）．しかし，$|a_2|$ および $|a_3|$ の第2番目からの共振点の間隔はほぼ同じである．図4－2，図4－3からわかるように，同一の ε_{r0} における $|a_n|$ の共振点の間隔は n の値によって大きく変らない．このことは，ベッセル関数の性質からも推測できる．次に，$\tan\delta_d\neq0$ のとき，図4－2〔1〕(a)と図4－3(1)，(2)からわかるように，一般に，$\tan\delta_d$ および n が大きくなるほど $|a_n|$ は $|a_{Mn}|$ にはやく漸近する．また，近似計算値 $|a_n{}'|$ は n が大きくなるに従い

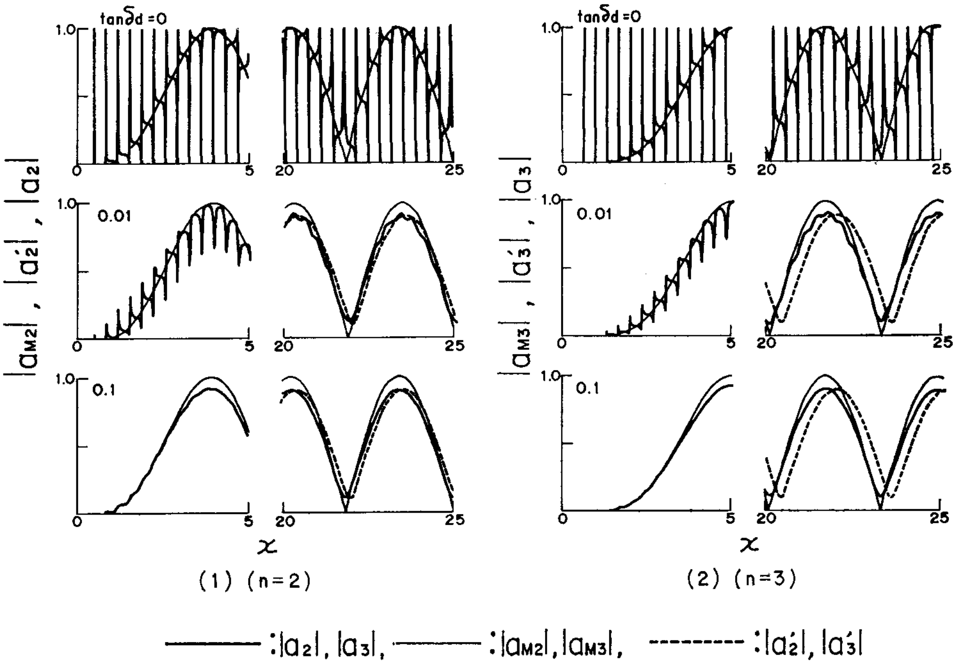


図4—3 誘電体球における $|a_n|$, $|a'_n|$ $(n=2,3)$ の周波数特性
$(\varepsilon_{r0}=81,\ \tan\delta_d=0, 0.01, 0.1)$($|a_{Mn}|$ も共に示す)

$|a_n|$ から離れる傾向を示す．このことは，式（4—1）の $F_n^1(x)$, $F_n^2(x)$, $F_n^1(z)$ の性質，および式（4—3）の A_n と式（4—8）の A_n' との関係からも予測できる（このことについての計算例は4—5節に示す）．

媒質定数が $\varepsilon_{r0}=4,\ 36,\ 400$，$\tan\delta_d=0.01$，$\mu_r=1$ のとき，$|a_1|$ の周波数特性を $|a_{M1}|$ と共に図4—4に示した．$\tan\delta_d$ が同一であれば ε_{r0} が大きいほど $|a_n|$ は $|a_{Mn}|$ にはやく漸近することを示す．

誘電体球の $\tan\delta_d=0$ における $\sqrt{\varepsilon_{r0}}$ に対する a_n, b_n の第1共振点の x の値 x_{an1}, x_{bn1} を図4—5(a),(b)に示した．図4—5と円柱の場合の図2—6とを比較すると，両図は同じ傾向を示し，x_{an1} と x_{bn1} もほぼ $1/\sqrt{\varepsilon_{r0}}$ に比例していることがわかる．一般に，誘電体球の x_{an1}（または x_{bn1}）は完全導体球の a_{Mn}（または b_{Mn}）の第1共振点 x_{aMn1}（または x_{bMn1}）（後の図4—14参照）より小さい．しかし，図4—5からわかるように，$1\lesssim\varepsilon_{r0}\lesssim3$ では ε_{r0} が小さくなるに従い x_{an1}（または x_{bn1}）は大きくなり，$x_{an1}\gtrsim x_{Man1}$（または $x_{bn1}\gtrsim x_{bMn1}$）となる．$\varepsilon_{r0}\to1$ で x_{an1}（または x_{bn1}）$\to\infty$ となる．この場合においても，$\tan\delta_d$ が極度に大きく（$\tan\delta_d\gtrsim100$）なれば，$|a_n|$（または $|b_n|$）は $|a_{Mn}|$

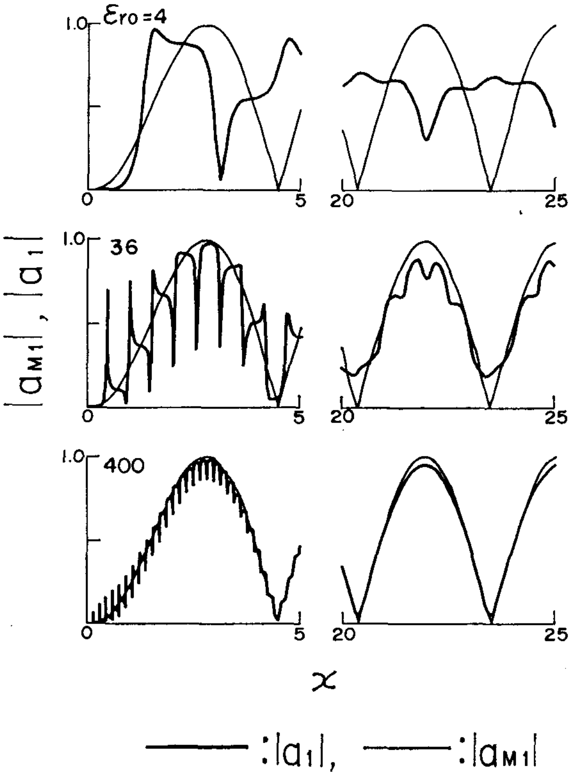


図４—４　誘電体球における $|a_1|$ の周波数特性 ($\varepsilon_{ro}=4$, 36, 400, $\tan\delta_d=0.01$) ($|a_{M1}|$ も共に示す)

(または $|b_{Mn}|$) に漸近することを数値計算により確認している．図４—２〜図４—５の計算例を用いれば，誘電体球の媒質定数と周波数に対する散乱係数の一般的な性質が容易に予測できる．

球の媒質が誘電性と磁性の一方または双方の性質を示す場合の計算例を図４—６に示す．図４—６(a)は，下の(1)，(2)，(3)，(4)，(5)で示す媒質定数のときの x に対する $|a_1|$ を，$|a_{M1}|$ および $|b_{M1}|$ とともに，図の左側の(1)，(2)，(3)，(4)，(5)の順番で示してある．また，図４—６(b)は，(a)と同じ媒質定数のときの a_1 の x に対する複素平面上の軌跡を描いてある．図４—６(1)は，媒質が誘電体のみの場合であり，本質的に図４—２〔1〕(a)，(b)と同じである．図４—６(5)は，現実にこのような物質が存在するか否かは別として，媒質が磁性体のみの場合を，図４—６(1)と対比させる意味で示した．このときは x が大きくなると $|a_1|$ は $|b_{M1}|$ の性質に近づく．すなわち，(1)の定数の場合の $|b_1|$ と同じ特性になる．図４—６(2)は，ε_r と μ_r が共存する場合の $|\varepsilon_r|>|\mu_r|$ の例である．このときの $|a_1|$

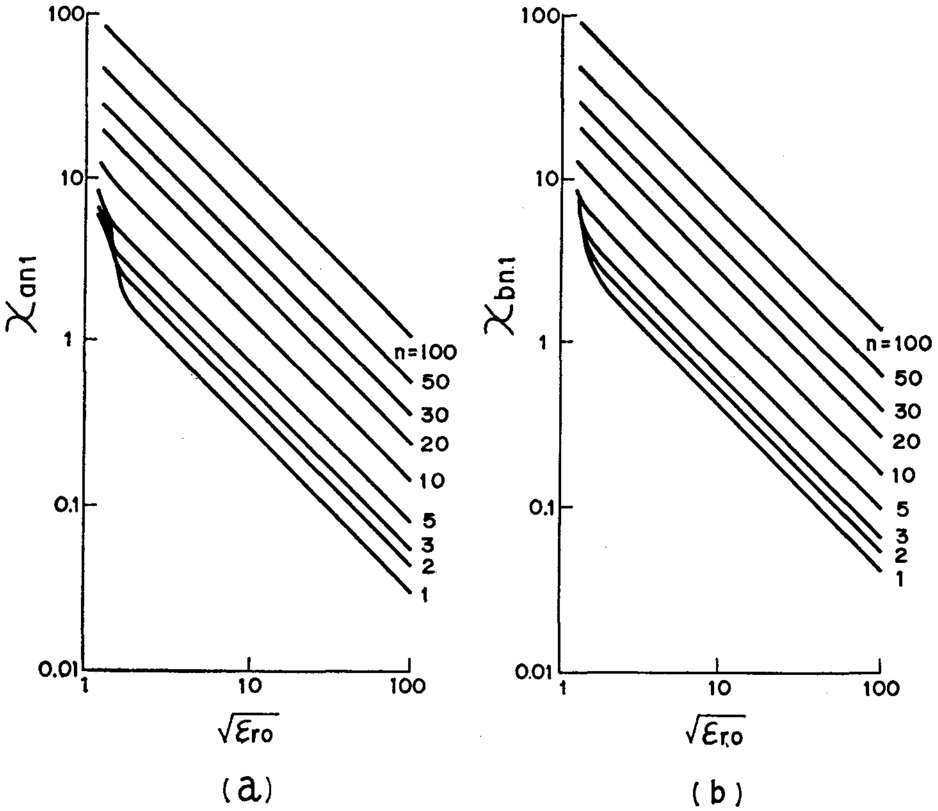
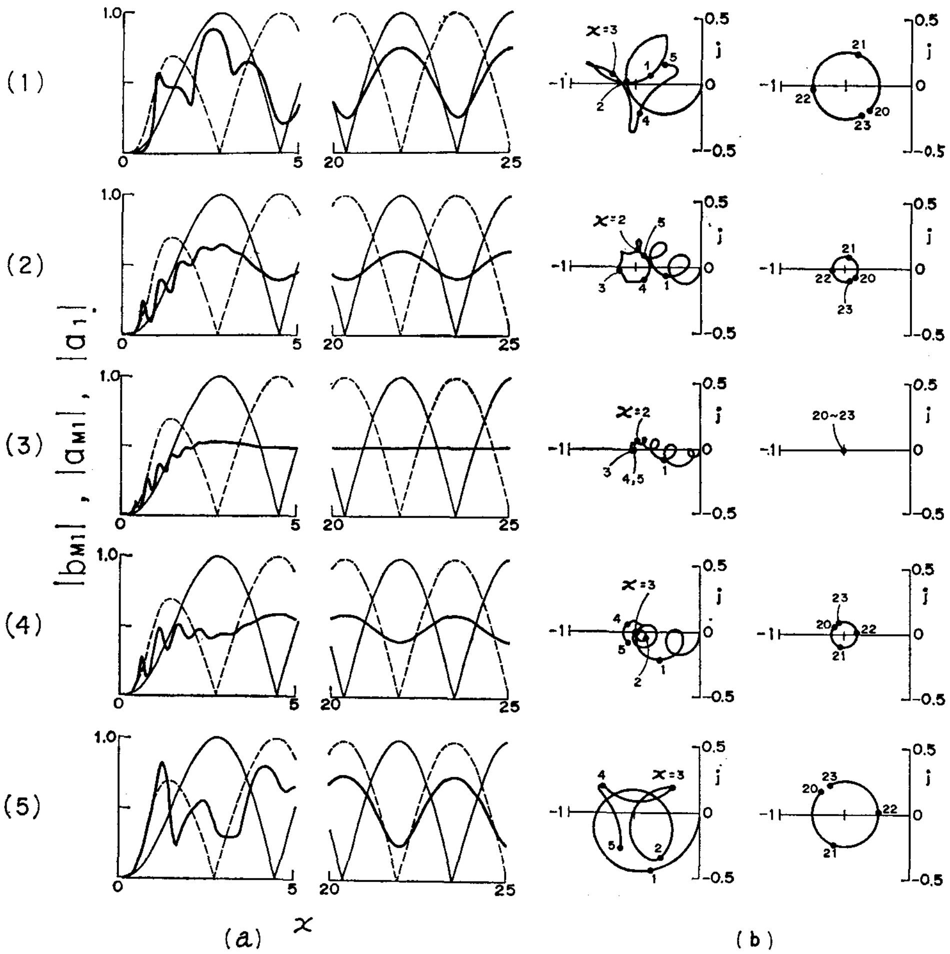


図 4 — 5 誘電体球の $\sqrt{\varepsilon_{r0}}$ に対する a_n, b_n の第1共振点 x_{an1}, x_{bn1}($\tan\delta_a=0$, $n=1\sim100$)

は $|a_{M1}|$ の性質に近く，x が大きくなると $|a_{M1}|$ とほぼ同じ傾向で増減することがわかる．図4 — 6 (3)は，$|\varepsilon_r|=|\mu_r|$ の場合であり，$|a_1|$ は $|a_{M1}|$ と $|b_{M1}|$ の中間的性質を示し，x が大きくなると 1/2 に近づく．図4 — 6 (4)は，$|\varepsilon_r|<|\mu_r|$ の例であり，このときの $|a_1|$ は $|b_{M1}|$ の性質に近く，x が大きくなると $|b_{M1}|$ とほぼ同じ傾向で増減する．図4 — 6 (2) と (4) の場合は $\varepsilon_{r0}\cdot\mu_{r0}=36$ であり，x が小さいときに現れる共振点の間隔は図4 — 4 の $\varepsilon_{r0}=36$ の場合とほぼ同じである．また，図4 — 6 (3) の場合は $\varepsilon_{r0}\cdot\mu_{r0}=81$ であり，このときの共振点の間隔は図4 — 2〔1〕(a) の場合とほぼ同じになる．すなわち，損失が小さいときに現れる共振点の間隔は，ほぼ $1/\sqrt{\varepsilon_{r0}\cdot\mu_{r0}}$ に比例することが図4 — 6 (2), (3), (4)からわかる．また，図4 — 6 (b)に示す a_1 の x に対する軌跡は，x が小さいところでは複雑であるが x が大きくなると式（4 —13）および式（4 —14）の関係になることを示している．すなわち，(1)と(5)の場合の $x=20\sim23$ における a_1 はそれぞれ点（−1/



———:$|a_1|$, ———:$|a_{M1}|$, ---------:$|b_{M1}|$

	ε_{ro}	$\tan\delta_d$	μ_{ro}	$\tan\delta_m$
(1) ——	9,	0.1,	1,	0
(2) ——	9,	0.1,	4,	0.1
(3) ——	9,	0.1,	9,	0.1
(4) ——	4,	0.1,	9,	0.1
(5) ——	1,	0 ,	9,	0.1

図4－6　球の媒質が ε_r, μ_r の一方または双方の性質を示すときの a_1 の周波数特性（$|a_{M1}|$, $|b_{M1}|$ も共に示す）

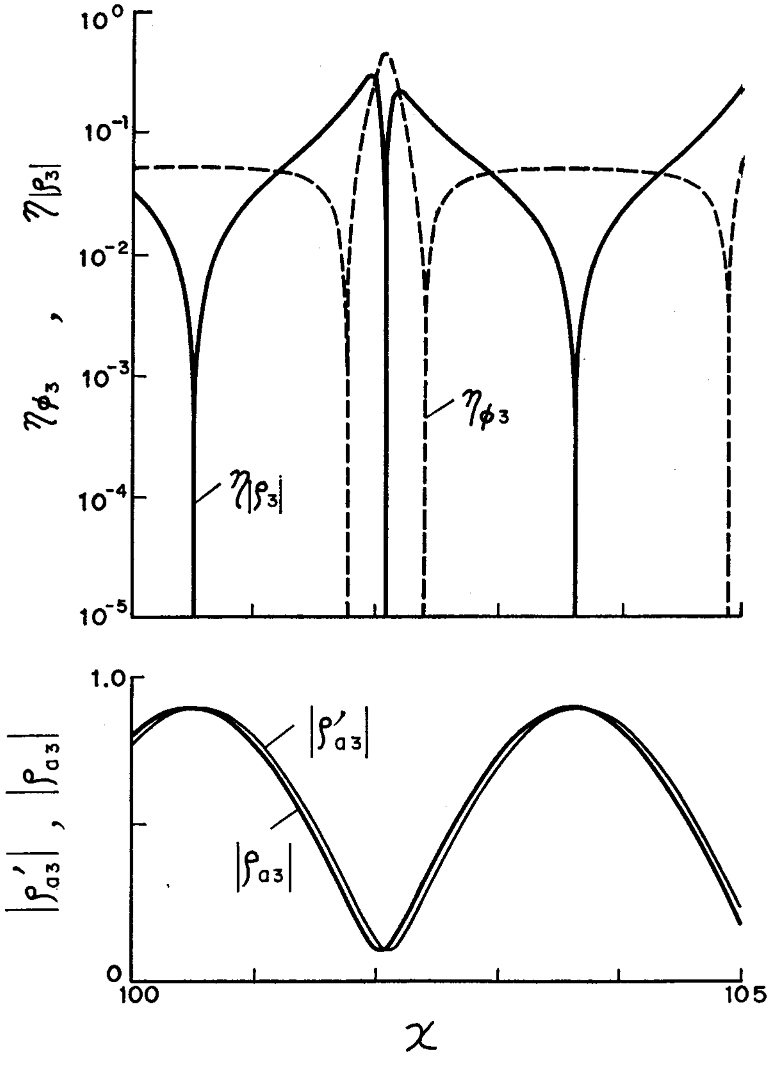
2, 0）に関してほぼ点対称の関係になっている．また，(2)と(4)の場合の $x=20\sim23$ における a_1 も同様な関係になっている．そして，(3)の場合の $x=20\sim23$ における a_1 はほぼ（$-1/2$, 0）の位置にある．

以上は，球の場合の散乱係数の計算例であるが，4－2節で述べたように，円柱の場合の $\theta=0$ における散乱係数も本質的には同じである．したがって，第2章，2－4節の計

算例と本節の計算例とを参照すれば，円柱における B^{e}_{ns} および B^{h}_{ns} の性質のあらましも容易に予想することができる．

4－5　散乱係数の近似計算

4－3節で述べたように，入射周波数が高いときの散乱係数は簡単な近似式で表すことができる．ここでは，散乱係数の厳密な計算値と近似計算値とを比較し，散乱係数を近似計算するときの適用方法について検討する．なお，ここでの計算は2倍精度演算で行った．



$(\varepsilon_{ro}=81, \tan\delta_d=0.1, \mu_r=1, n=3)$

図4－7　x に対する $\eta_{|\rho_3|}, \eta_{\phi_3}$ ($|\rho_{a3}|, |\rho'_{a3}|$ も示す)

まず，近似計算値を評価するため次のように定義する．

$$\eta_{|\rho_n|}=\left|\frac{|\rho_n|-|\rho_n'|}{|\rho_n|}\right|, \quad \eta_{\phi_n}=|\phi_n-\phi_n'| \tag{4—17}$$

ここで，ρ_n は厳密値，ρ_n' は式（4—11）を用いた近似値，$\phi_n=\tan^{-1}(\beta_n/\alpha_n)$（式4—3参照），$\phi_n'=\tan^{-1}(\beta_n'/\alpha_n')$（ただし，$\rho_n'=\alpha_n'+j\beta_n'$）である．以下に $\eta_{|\rho_n|}$，η_{ϕ_n} の計算例を示す．

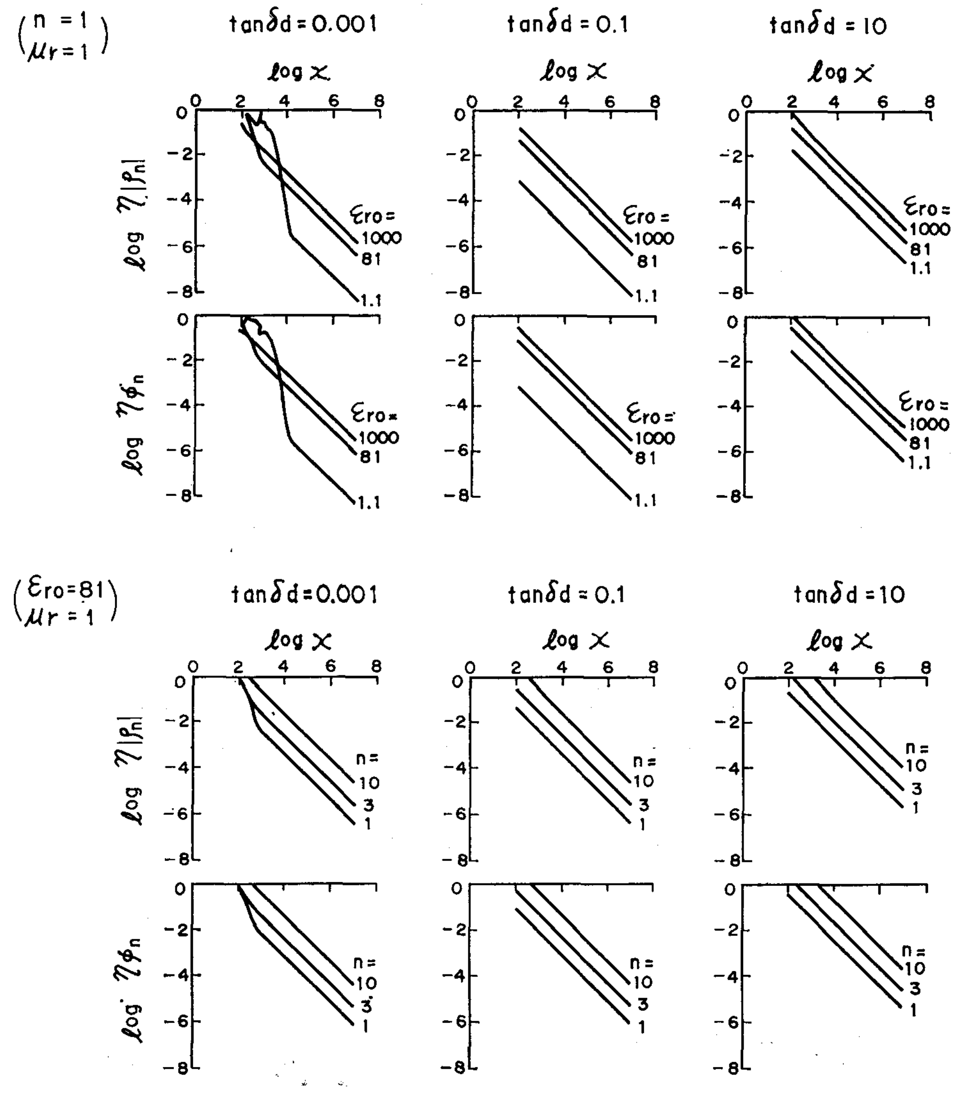


図4—8　$\eta_{|\rho_n|}$，η_{ϕ_n} の最大値の周波数特性（$\varepsilon_{ro}=1.1$，81，1000，$\tan\delta_d=0.001, 0.1, 10$，$n=1, 3, 10$）

球の媒質定数が $\varepsilon_{r0}=81$, $\tan\delta_d=0.1$, $\mu_r=1$ のとき, $x=100\sim105$ における $|\rho_{a3}|$, $|\rho_{a3}'|$ を求め，このときの $\eta_{|\rho_n|}$ と η_{ϕ_n} の計算結果を図4－7に示した．図4－7の下部には $|\rho_{a3}|$ と $|\rho_{a3}'|$ も示した．図4－7からわかるように，一般に $\eta_{|\rho_n|}$ と η_{ϕ_n} は $|\rho_n|$ が小さい附近で大きくなる．したがって，近似計算の評価は，$\eta_{|\rho_n|}$, η_{ϕ_n} の最大値を用いるのが適当と思われる．

誘電体球の $|\rho_{an}|$ と $|\rho_{an}'|$ とを用い，ε_{r0}, $\tan\delta_d$ および n をパラメータとして，$\log x=2\sim7$ における $\eta_{|\rho_n|}$, η_{ϕ_n} の最大値の周波数特性を図4－8に示した．ε_{r0} および $\tan\delta_d$ が小さいとき，$\log x\lesssim 4$ における $\eta_{|\rho_n|}$, η_{ϕ_n} は単調でない．これは，ρ_n が共振しているためである．ε_{r0}, $\tan\delta_d$ および x が大きくなると ρ_n の共振が減衰し完全導体の性質に類似してくるため，$\eta_{|\rho_n|}$ と η_{ϕ_n} は x が大きくなるに従い同じ傾向でほぼ $1/x$ に比例して小さくなる．図4－8から，散乱係数の数値計算に ρ_n' を使ったときの計算精度が予測できる．一般に ρ_n' を用いた散乱係数の数値計算では，図4－8から予想される精度よい高い精度の計算結果が得られる．図4－8からわかるように，ε_{r0}, $\tan\delta_d$ および n が大きくなるに従い ρ_n' の ρ_n に対する近似は悪くなる．このことは，式(4－1)の F_n^1, F_n^2 および式(4－3)，(4－8)からも予測できる．媒質が ε_r と μ_r の性質を共に示す場合も同様な傾向を示す．

$\log x=6$ において，ε_{r0} と n をパラメータにしたときの $\tan\delta_d$ に対する $\eta_{|\rho_n|}$ の特性を図4－9に示した．$\log x=6$ 以外の場合は，図4－8と図4－9から予測できる．媒質が ε_r と μ_r の性質を共に示す場合も同様な性質である．

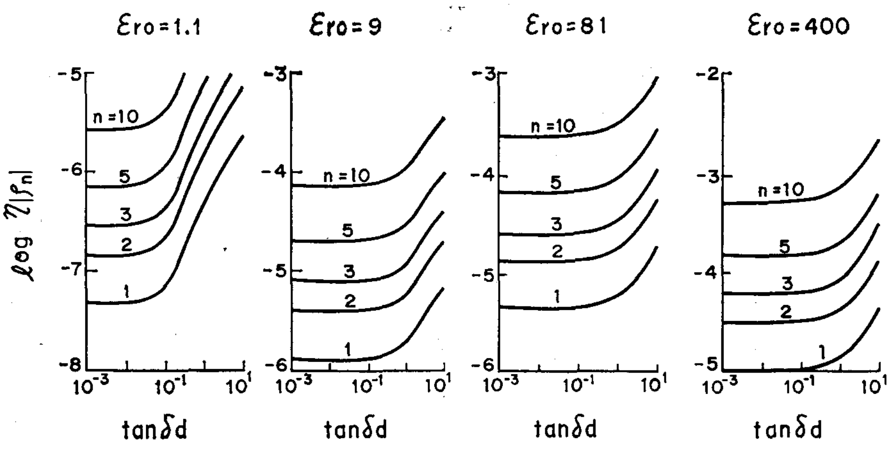


図4－9 $\tan\delta_d$ に対する $\eta_{|\rho_n|}$ の最大値（ただし，$\log x=6$, $\mu_r=1$）

図4—10は，図4—11を説明するための図である．これまでの計算例から，媒質に有限な損失がある場合の正規化周波数xに対する$|\rho_n|$と$|\rho_n'|$の性質を概略的に描けば図4—10のようになる．すなわち，xに対する$|\rho_n|$，$|\rho_n'|$は常に1/2を中心に変化し，$|\rho_n|=1/2$におけるxの値は$|\rho_n'|=1/2$におけるxの値x'より常に小さい．そこで，$x'-x=\Delta x$とし，Δxの大きさにより$|\rho_n'|$の$|\rho_n|$に対する漸近の程度を表す方法が考えられる．

球の媒質定数が$\varepsilon_{r0}=4, 81$，$\mu_r=1$のとき，$|\rho_{an}|$と$|\rho_{an}'|$のxに対するΔxをnについて計算し，その結果を図4—11(1)に示した．図4—11(1)からわかるように，Δxはxの大きさにほぼ反比例する．$\varepsilon_{r0}=4$と81の場合の両者においては図に現れるほどの差は認められなかった．しかし，同一の$\tan\delta_d$ではε_{r0}が小さいほどxの大きいところまで共振が現れるため，Δxの適用範囲は自らε_{r0}と$\tan\delta_d$の大きさにより異る．$\varepsilon_{r0}=4$と81の場合のΔxの適用範囲を図4—11(1)に示した．また，xに対するΔxがε_{r0}の大きさにより大きく変らないことから，$x\cdot\Delta x\equiv\xi$をnについて求め，その結果を図4—11(2)に

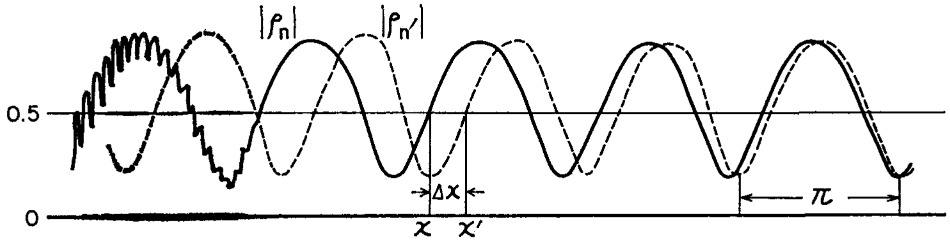


図4—10　xに対する$|\rho_n|$と$|\rho_n'|$との関係

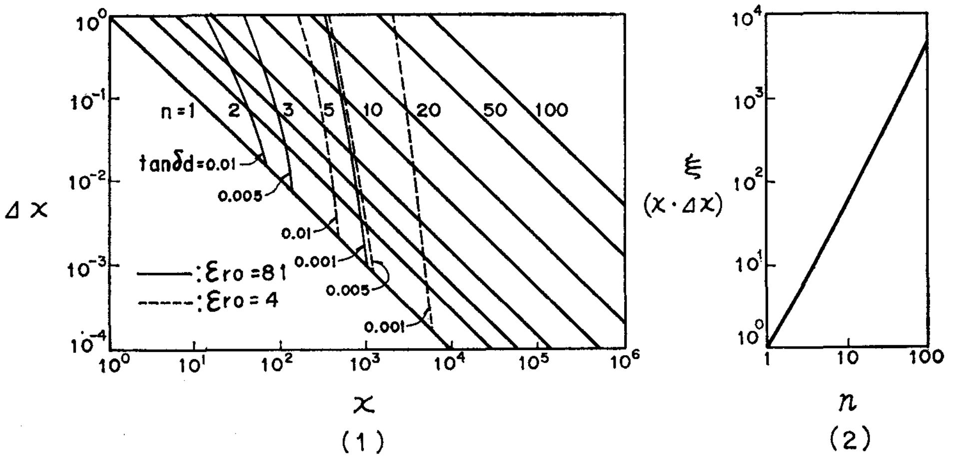


図4—11　$|\rho_{an}|$, $|\rho_{a'n}|$のxに対する$\triangle x$および$x\cdot\triangle x\equiv\xi$ ($\varepsilon_{r0}=4, 81$, $\mu_r=1$)

示した．ξ は n にほぼ比例し，n との間には次の関係がある．

$$\log\xi \simeq -0.056\log^3 n + 0.281\log^2 n + 1.514\log n - 0.001 \qquad (4-18)$$

$|\rho_{bn}|$ についても同様である．したがって，図4－11(1)と(2)は，誘電体球の散乱係数を計算するとき，近似式の適用の可否を判断する場合に有効である．また，図4－11は，誘電体円柱および媒質が ε_r と μ_r の性質を共に示す場合の円柱と球の散乱係数を取扱う場合も参考になる．

4－6　散乱断面積の計算法

散乱係数を直接的に用いるものに，円柱および球の散乱断面積の計算がある．周知のように，散乱断面積は散乱係数の無限級数式として与えられる．しかし，これを実際に数値計算するときの級数の加算項数の 決め方はこれまで 明らかにされていない[24]．4－2節～4～5節で述べたように，円柱および球には多くの共振が存在する．したがって，加算項数を安易に選べば不測の誤差を生ずるおそれがある．ここでは，散乱係数の性質を基にして，散乱断面積の適切な計算法について述べる．

4－6－1　円柱および球の散乱断面積

円柱にTM波（またはTE波）が入射したときの円柱の単位長さ当りの散乱断面積 σ_s^e（または σ_s^h）（e はTM波，h はTE波入射を表す）は次式で与えられる[18]．

$$\begin{pmatrix}\sigma_s^e\\ \sigma_s^h\end{pmatrix} = \frac{4}{k}\left|\sum_{n=0}^{\infty}\epsilon_n(-1)^n\begin{pmatrix}\rho_n^e\\ \rho_n^h\end{pmatrix}\right|^2 \qquad (4-19)$$

ここで，$\epsilon_0=1, \epsilon_n=2$ $(n\geqq1)$，ρ_n^e と ρ_n^h はそれぞれ4－2節で用いた円柱の軸に直角な方向の散乱係数（$B_{ns}^e(\theta=0)$ と $B_{ns}^h(\theta=0)$）である．

また，球の散乱断面積 σ_s は次式で与えられる[12],[18]．

$$\sigma_s = \frac{2\pi}{k^2}\sum_{n=1}^{\infty}(2n+1)(|\rho_{an}|^2+|\rho_{bn}|^2) \qquad (4-20)$$

ここで，ρ_{an} と ρ_{bn} は4－2節で用いた球の散乱係数（a_n と b_n）である．

4－6－2　級数式の項数決定法

散乱断面積を計算するときに考慮すべき散乱係数 ρ_n の主な性質は次のとおりである．

(1)　媒質の損失が小さいとき，ρ_n は各モードごとに正規化周波数 x に対して多くの共振を示す．

(2)　x を零から次第に大きくしたとき，最初に現れる各モードの第1共振点は，媒質定数が小さいほど，また，モード次数が大きいほど，x の大きいところで現れる（図2－6，図4－5参照）．

(3)　x に対する各モードの共振点間隔は，媒質定数が大きくなるほど狭くなるが，媒質の損失およびモード次数によって大きく変らない（図4－2～図4－4参照）．

(4)　媒質の損失が大きくなるに従い各モードの共振は次第に減衰し，媒質が完全導体のときの性質に漸近する．（図4－2，図4－3参照）．

(5)　媒質が完全導体のときの $|\rho_{Mn}|$ は，n が大きいほど x の大きいところで立ち上がる（図4－1(a)参照）．

以上は，散乱断面積を計算するときに用いる ρ_n の主な性質であるが，級数式の加算項数を決めるためには次の計算例を補足する必要がある．

まず，加算項数は，媒質の損失に対する ρ_n の各モードの第1共振点の振幅によって大きく左右される．ここでは，誘電体球の ρ_{an}（すなわち a_n）の例を示す．$\varepsilon_r=4$ および

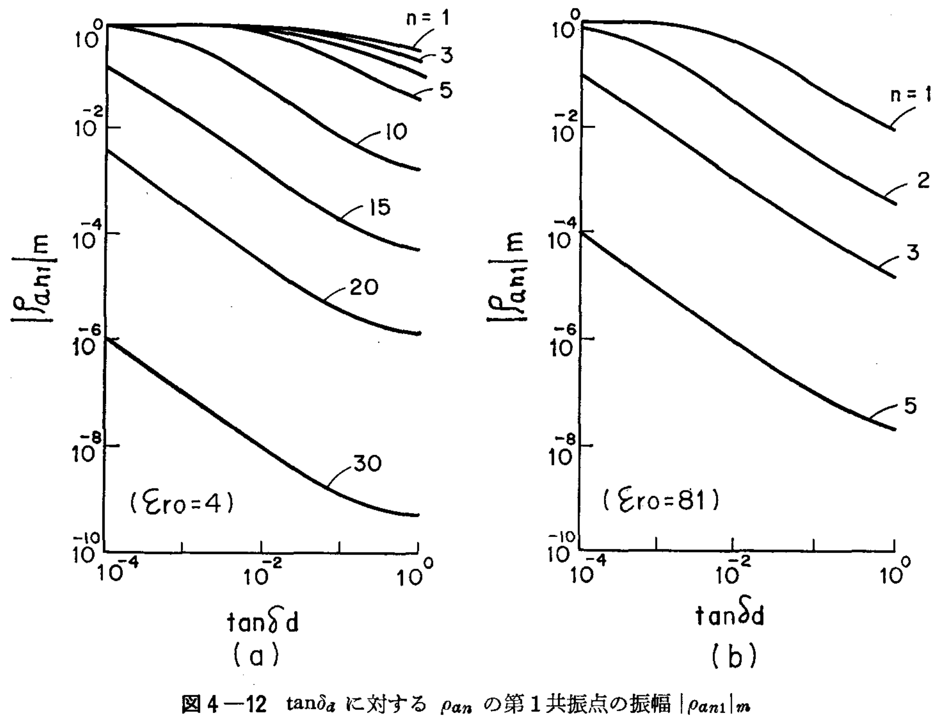


図4－12　$\tan\delta_d$ に対する ρ_{an} の第1共振点の振幅 $|\rho_{an1}|_m$
$(\varepsilon_{ro}=4, 81, \mu_r=1)$

81における ρ_{an} の第1共振点 x_{an1} の振幅 $|\rho_{an1}|_m$ （1は第1共振点，m は最大値を表す）の $\tan\delta_d$ に対する計算結果を図4―12に示す．また，誘電体球の $\rho_{a1}(n=1)$ の $\sqrt{\varepsilon_{r0}}$ に対する第1共振点の振幅 $|\rho_{a11}|_m$ を，$\tan\delta_d$ をパラメータにして図4―13に示した．誘電体球の ρ_{bn} および誘電体円柱の ρ_n^e，ρ_n^h も同様な特性である [(22),(23)]．図4―12と図4―13からわかるように，媒質が誘電体のとき ρ_n の第1共振点の振幅は，$\sqrt{\varepsilon_{r0}}$，$\tan\delta_d$ および x が大きくなるに従い指数的に小さくなる．媒質が ε_r と μ_r の性質を共に示す場合も同様な傾向である．

つぎに，正規化周波数 x を零から次第に大きくしたとき，完全導体球の $|\rho_{Man}|$ と $|\rho_{Mbn}|$ の立ち上がり状態を示す計算例を図4―14(a)($|\rho_{Man}|$)，(b)($|\rho_{Mbn}|$)に示す．図4―14において，○印（または△印）は，x に対する $|\rho_{Man}|$，$|\rho_{Mbn}|$ が最初に 0.0001（または 0.01）となる x の値を n について求めたものである．また，図4―14には，$|\rho_{Man}|$，$|\rho_{Mbn}|$ の第1共振点 x_{aMn1}，x_{bMn1} も示した(図4―1(a)参照)．完全導体円柱の $|\rho_{Mn}^e|$，$|\rho_{Mn}^h|$ もそれぞれ図4―14(a)，(b)に近い x の値をとる．

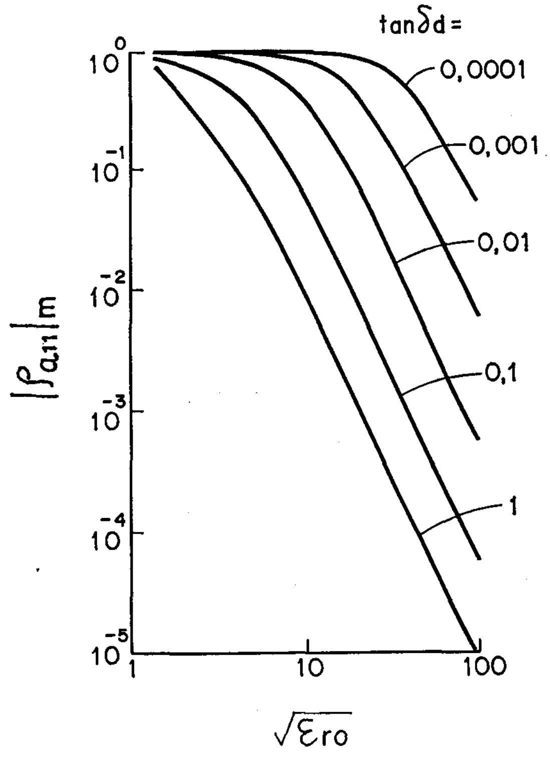


図4―13 誘電体球の $\sqrt{\varepsilon_{ro}}$ に対する第1共振点の振幅 $|\rho_{a11}|_m$
($n=1, \tan\delta_d=0.0001\sim1$)

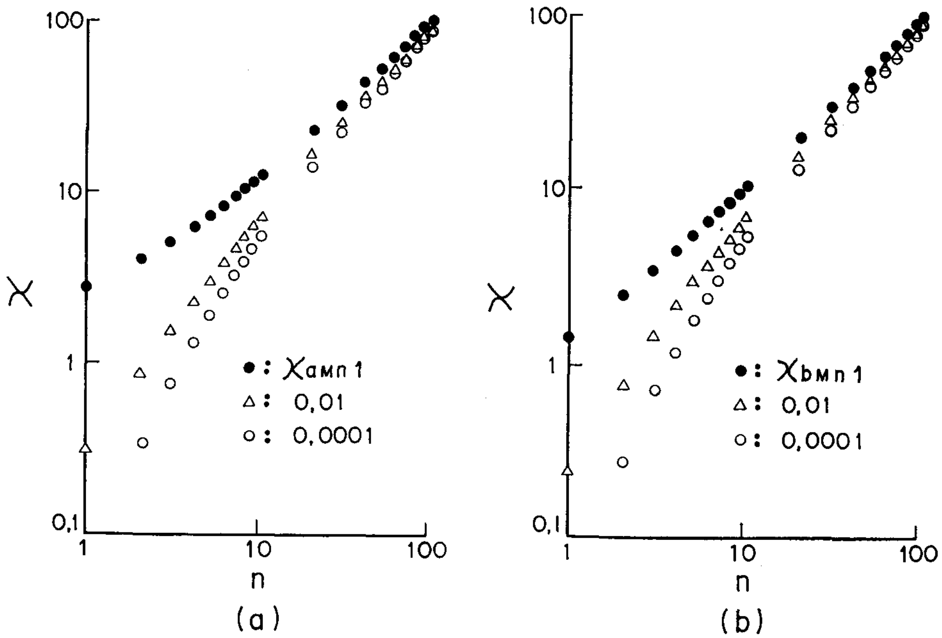


図4—14　完全導体球の $|\rho_{Man}|$, $|\rho_{Mbn}|$ の x に対する立ち上がり（第1共振点 x_{aMn1}, x_{bMn1} も示す）

以上の ρ_n, ρ_{Mn}の性質を用いれば，円柱および球の散乱断面積の適切な計算法が得られる．ここでは，これまでの計算例を参照するため，誘電体球と完全導体球の σ_s の計算法について述べる．

1．誘電体球が非共振領域にあるとき：

この領域は，与えられた ε_r の実数部 ε_{r0} と $x=ka$（球の半径と入射周波数で決まる）とを用いて図4—5(a)上にプロットした点の位置が $n=1$ のカーブより下にある場合である．図4—5(a)を用いる理由は，同一の n では常に $x_{an1}<x_{bn1}$ の関係になるためである[(23)]．この領域の $|\rho_{an}|$, $|\rho_{bn}|$ は n が大きくなるほど小さくなる性質がある．したがって，この場合の計算は，級数が希望する有効桁数に定まるまで級数の各項を $n=1$ から順次加算すればよい．$\tan\delta_d$ が大きいほど加算項数は少くなる．

2．誘電体球が共振領域にあるとき：

この領域は，ε_{r0} と x とによって決まる図4—5(a)上の点の位置が $n=1$ のカーブより上にある場合である．いま，この点の位置が $n=N$（例えば，$N=10$）のカーブの近くにあるとすれば，この球には N および N より小さいモードの ρ_{an}, ρ_{bn} の共振または振動が種々の大きさで存在する．また，この球には n が大きくなるに従い指数的に振幅が小

さくなるN以上のモードの振動も存在する．したがって，この場合の σ_s の計算は次のように大別して考える必要がある．まず，媒質の損失が極度に小さく $\tan\delta_d \simeq 0$ のときの加算はN以上の加算項数をとり，級数が希望の有効桁数に定まるまで加算を続行すればよい．つぎに， $10^{-4} \leqq \tan\delta_d \leqq 1$ の場合は，一般にN以下の加算項数でよい．この場合，必要な有効桁数を決めれば，図4－12と図4－13の計算例を参照して加算項数の大略が予測できる．例えば，有効桁数を小数点下3桁にとれば， $(2n+1)\ |\rho_{an1}|^{m}{}_2 \leqq 10^{-4}$ となるnの近くに加算項数を選べばよい． $\tan\delta_d$ が極度に大きい場合は次の完全導体球の場合の計算法に準ずればよい．

3．完全導体球のとき：

完全導体球の場合の計算法は，基本的には誘電体球の $\tan\delta_d=0$ の場合の計算法と同じである．すなわち，与えられた $x=ka$ において存在する ρ_{Man}, ρ_{Mbn} の数によって加算項数は決まる．図4－14からわかるように，$|\rho_{Man}|$, $|\rho_{Mbn}|$ は n が大きくなるほど大きいxの値から立ち上がる．したがって，例えば，級数の有効桁数を小数点下3桁にとれば，与えられたxを図4－14に適用し， $(2n+1)\ |\rho_{Man}|^2 \simeq (2n+1)|\rho_{Mbn}|^2 \leqq 10^{-4}$ となるnを求めれば，nが加算項数になる．

以上は，誘電体球と完全導体球の散乱断面積の計算法であるが，円柱の場合も同様な方法が適用できる．円柱および球の媒質が ε_r と μ_r の性質を共に示す場合も基本的な考え方は同様である．しかし，この場合は ε_r と μ_r の配分関係により，図4－12および図4－13に対応する計算をする必要がある．

4－6－3　計算例

ここでは，本節4－6－2での計算法が適切であることを証明するため，特定の共振点における誘電体球の $|\rho_{an}|$, $|\rho_{bn}|$ を示す．表4－1(1), (2)は，媒質定数が $\varepsilon_{r0}=4$, $\tan\delta_d=0 \sim 1.0$ のとき，$x=x_{a,10,1}$ における $|\rho_{an}|$, $|\rho_{bn}|$ を $n=1 \sim 20$ について計算したものである．仮数値の右端のDは2倍精度演算を示し，その右は指数である． $\tan\delta_d=0$ のとき，$|\rho_{a,10}|=1.0$ となるべきであるが，計算値は 0.999…になっている．これは，計算機の入力に用いた $x_{a,10,1}$ の有効数字不足により生じたものである．したがって，$\tan\delta_d \neq 0$ における計算値も10桁程度の計算精度である． 表4－1(1), (2) からわかるように， $\tan\delta_d=0$ のとき，$n \leqq 9$ の $|\rho_{an}|$ は種々の値であるが， $n \geqq 11$ ではnが大きくなるに従い $|\rho_{an}|$ は指数的に小さくなっている．しかし，$\tan\delta_d$ が大きくなるに従い共振モード（こ

表4－1（1）

$\varepsilon_{ro}=4$, $\tan\delta_d=0\sim1.0$, $\mu_r=1$, $n=1\sim20$, $x=x_{a,\,10,\,1}$

$\tan\delta_d$	n	$\lvert\rho_{an}\rvert$	$\lvert\rho_{bn}\rvert$
0.0	1	0.386197093846547D 00	0.290446570436561D-01
	2	0.410995011772392D-02	0.179229081081788D 00
	3	0.145935486555251D-01	0.382143147326815D-02
	4	0.342699836271887D-02	0.129430998203512D 00
	5	0.723437573847493D 00	0.252779813749461D 00
	6	0.535838220967621D 00	0.924990603616918D 00
	7	0.404829068444759D 00	0.254880805704113D 00
	8	0.149433100632036D-02	0.136006753359013D-02
	9	0.677931952479767D-03	0.303546811724093D-02
	10	0.999999999988049D 00	0.442714238545251D-04
	11	0.309090121234024D-06	0.251672095201265D-06
	12	0.730680927821619D-09	0.163689102306959D-08
	13	0.204076681232201D-11	0.856995780546319D-11
	14	0.504852203029556D-14	0.342764419943978D-13
	15	0.103206277697584D-16	0.104432127673032D-15
	16	0.171092890672402D-19	0.244699668251369D-18
	17	0.229488976467279D-22	0.446596573988322D-21
	18	0.250068462182445D-25	0.643208613175219D-24
	19	0.222826443733523D-28	0.740205616437016D-27
	20	0.163572480617851D-31	0.688551345751030D-30
0.0001	1	0.386286157440482D 00	0.298854776239624D-01
	2	0.521327134630086D-02	0.179470924109650D 00
	3	0.148828737574202D-01	0.499223361578654D-02
	4	0.469777213462768D-02	0.129734256496390D 00
	5	0.723310516265681D 00	0.253075191687809D 00
	6	0.535821337437466D 00	0.924291015595711D 00
	7	0.405255223914342D 00	0.255092639906618D 00
	8	0.153734510965656D-02	0.143036591363555D-02
	9	0.695060399492531D-03	0.318894304974939D-02
	10	0.887437871216794D 00	0.470810490001469D-04
	11	0.652052433303076D-06	0.326319797634147D-06
	12	0.102384283457181D-07	0.559434298366228D-08
	13	0.385373529411500D-09	0.241357284317475D-09
	14	0.162430413600272D-10	0.131488331862376D-10
	15	0.663360011307939D-12	0.674620680830564D-12
	16	0.249474082682579D-13	0.311758850543126D-13
	17	0.864394087081198D-15	0.129002148697071D-14
	18	0.273456411533262D-16	0.478444019086916D-16
	19	0.789365155753202D-18	0.159546269856192D-17
	20	0.208167625703695D-19	0.480249474426953D-19
0.001	1	0.387094126412299D 00	0.373726023455214D-01
	2	0.150272601413501D-01	0.181644302882318D 00
	3	0.174796926749347D-01	0.154055173080083D-01
	4	0.159967978160417D-01	0.132453913129021D 00
	5	0.722176852149619D 00	0.255706838527840D 00
	6	0.535660920392976D 00	0.918044428073265D 00
	7	0.408697644666162D 00	0.256977809248648D 00
	8	0.192434770942313D-02	0.206267061668186D-02
	9	0.349146543217969D-03	0.456462562668208D-02
	10	0.440841079653147D 00	0.723636466642263D-04
	11	0.373858555321872D-05	0.998143594550649D-06
	12	0.958075403726080D-07	0.412113484588820D-07
	13	0.383535909726089D-08	0.233644147942914D-08
	14	0.162384783632718D-09	0.131179770623504D-09
	15	0.660350279889225D-11	0.674526345939211D-11
	16	0.249473826023686D-12	0.311756489856155D-12
	17	0.864393835335853D-14	0.129002042069901D-13
	18	0.273456361955777D-15	0.478443762286708D-15
	19	0.789365057099116D-17	0.159546184569274D-16
	20	0.208167607436429D-18	0.480249213822527D-18

表4－1（2）

$\tan\delta_d$	n	$\lvert\rho_{an}\rvert$	$\lvert\rho_{bn}\rvert$
0.01	1	0.396730119705260D 00	0.104813400249091D 00
	2	0.102609696028173D 00	0.203018004569337D 00
	3	0.427251651726703D-01	0.108450018529949D 00
	4	0.116463618007367D 00	0.158687094772679D 00
	5	0.711793745165605D 00	0.279546166917330D 00
	6	0.533264656147843D 00	0.860208503983071D 00
	7	0.415981739027924D 00	0.273817156872538D 00
	8	0.577635147429449D-02	0.834130835888165D-02
	9	0.237861514169370D-02	0.173284049064424D-01
	10	0.730962993590231D-01	0.323696553919407D-03
	11	0.345024889846311D-04	0.771226126744714D-05
	12	0.950900100057028D-06	0.397320569968910D-06
	13	0.383258650412151D-07	0.232854891881405D-07
	14	0.162360533251550D-08	0.1311141283601573D-08
	15	0.660303497027878D-10	0.674480743991323D-10
	16	0.249462949300906D-11	0.311739688692296D-11
	17	0.364368665466596D-13	0.128995087708381D-12
	18	0.273450775255812D-14	0.478417522043181D-14
	19	0.789353313029708D-16	0.159537282883231D-15
	20	0.203165284135871D-17	0.480222011258533D-17
0.1	1	0.487438729531532D 00	0.332248988612825D 00
	2	0.455379564551656D 00	0.360921074860706D 00
	3	0.213445141986293D 00	0.506414868274510D 00
	4	0.520723397383299D 00	0.330997234151569D 00
	5	0.672790955119068D 00	0.381948144058991D 00
	6	0.473580248916829D 00	0.561684192548635D 00
	7	0.250475921002224D 00	0.326505501231479D 00
	8	0.330386750556757D-01	0.616576171126780D-01
	9	0.135235725850356D-01	0.335326446644725D-01
	10	0.302439392354362D-02	0.200840546661794D-02
	11	0.266511663476460D-03	0.711817702654776D-04
	12	0.394508396875662D-05	0.389944754701067D-05
	13	0.374154468104504D-06	0.231002216871018D-06
	14	0.160419655684660D-07	0.130379421750701D-07
	15	0.655760034820240D-09	0.670879948502830D-09
	16	0.248383250052545D-10	0.310090808513751D-10
	17	0.361862114695613D-12	0.128303980934615D-11
	18	0.272893729900766D-13	0.475808624343195D-13
	19	0.783181423151247D-15	0.158652294801151D-14
	20	0.207933330946499D-16	0.477517748983626D-16
1.0	1	0.522302311743452D 00	0.380773595386842D 00
	2	0.509367960339834D 00	0.495139479387493D 00
	3	0.294433517103912D 00	0.658874909145828D 00
	4	0.719599708015886D 00	0.356089098949051D 00
	5	0.691334837331432D 00	0.414955275434952D 00
	6	0.351228059466434D 00	0.492932671674866D 00
	7	0.130920099365971D 00	0.362892056052579D 00
	8	0.421900930124495D-01	0.136189353113544D 00
	9	0.102489641399211D-01	0.226822096220783D-01
	10	0.171082631824661D-02	0.262065669284183D-02
	11	0.206145477049544D-03	0.251150238335471D-03
	12	0.189572132530053D-04	0.203232735973540D-04
	13	0.133311904205332D-05	0.140482214806309D-05
	14	0.825504611550027D-07	0.840944093065601D-07
	15	0.415767533695078D-08	0.440963196554368D-08
	16	0.130035515435573D-09	0.204290202059489D-09
	17	0.532644205013642D-11	0.841780386449198D-11
	18	0.229578854644257D-12	0.310231550380743D-12
	19	0.691503137223011D-14	0.112774509262308D-13
	20	0.187964438741052D-15	0.307478172406329D-15

表4—1（3）

$\varepsilon_{ro}=81$, $\tan\delta_d=0\sim1.0$, $\mu_r=1$, $n=1\sim9$, $x=x_{a,3,1}$

$\tan\delta_d$	n	$\lvert\rho_{an}\rvert$	$\lvert\rho_{bn}\rvert$
0.0	1	0.1770602027866530-04	0.3067751450792700-01
	2	0.4674447904032550-05	0.3124000324059460-04
	3	0.9999999999942940 00	0.1281268971673610-08
	4	0.2272546789971300-13	0.4544755809788210-13
	5	0.3145414322645250-19	0.7077435464837060-18
	6	0.2492951395728170-24	0.5452095708033720-23
	7	0.5234501081215310-30	0.2296455978636370-28
	8	0.7380512062838940-36	0.5713066703842500-34
	9	0.7101718389994740-42	0.8316190790718840-40
0.0001	1	0.5698016346253940-04	0.3068449430287190-01
	2	0.5192404813733110-05	0.1402886989459280-03
	3	0.9855740017599690-01	0.1633092320902830-08
	4	0.4377898167242990-10	0.9096253305170440-12
	5	0.5242468586623780-13	0.2659489465136430-14
	6	0.7512161569083980-16	0.6720623112022190-17
	7	0.9753206764454450-19	0.1319786847057580-19
	8	0.1081780324493870-21	0.2031353240218660-22
	9	0.1013740671650670-24	0.2499314726160100-25
0.001	1	0.4103125551526170-03	0.3074734009499750-01
	2	0.9853931533324820-05	0.1103764964444890-02
	3	0.1081505599552370-01	0.4799490709449310-08
	4	0.4375834774835010-09	0.8687217554778130-11
	5	0.5242457073095210-12	0.2658850248332540-13
	6	0.7512159506806120-15	0.6720612280722450-16
	7	0.9753205655395790-18	0.1319785650501780-18
	8	0.1081780269920330-20	0.2031351374780410-21
	9	0.1013740650932940-23	0.2499312411830370-24
0.01	1	0.3920165581426200-02	0.3137827321228510-01
	2	0.5643658818417260-04	0.4399074574138940-02
	3	0.1092197660667510-02	0.3645189753221300-07
	4	0.4373810967357130-08	0.8645521371820420-10
	5	0.5242025623694520-11	0.2658555476288080-12
	6	0.7511937628254630-14	0.6720003393216160-15
	7	0.9753071516408840-17	0.1319663068464280-17
	8	0.1081772234953320-19	0.2031160009710430-20
	9	0.1013736169681350-22	0.2499075046522690-23
0.1	1	0.2992679686253330-01	0.3767533095481460-01
	2	0.4964612306259920-03	0.7633035140225320-03
	3	0.1099397970803330-03	0.3418916446298110-06
	4	0.4199602812216530-07	0.8562849226712590-09
	5	0.5199356824674750-10	0.2635657108463410-11
	6	0.7489829401702330-13	0.6659743878657520-14
	7	0.9739680882131030-16	0.1307522552588920-16
	8	0.1080969504419430-18	0.2012207602294910-19
	9	0.1013288289121090-21	0.2475567087948050-22
1.0	1	0.2604657520495070-01	0.5370743914490050-01
	2	0.1065384717788910-02	0.1758863935457930-03
	3	0.1558890501360930-04	0.1072481123976100-05
	4	0.9787053157628720-07	0.4556141798930380-08
	5	0.2995623457574880-09	0.1449082794177470-10
	6	0.5860701963456970-12	0.3581131881399650-13
	7	0.8599001924237010-15	0.6903689649188260-16
	8	0.1007808523733490-17	0.1050458232714660-18
	9	0.9710127224535210-21	0.1283501466388080-21

の場合は $n=10$) の振幅は支配的でなくなり，共振モードより低いモードが支配的になっている．この場合，$|\rho_{bn}|$ も一般に $n\leqq 10$ のモードが支配的になる．表4－1(3)は，媒質定数が $\varepsilon_{r0}=81$, $\tan\delta_d=0\sim 1.0$ のとき，$x=x_{a,3,1}$ における $|\rho_{an}|$, $|\rho_{bn}|$ を $n=1\sim 9$ について計算したものである．この場合も表4－1(1),(2)の場合と同様なことが言える．これらの計算例は，本節4－6－2で述べた散乱断面積の計算法が適切であることを示している．

4－7　むすび

本章では円柱および球の磁気形および電気形散乱係数を統一的に一つの式で表し，さらにその式を複素平面上の点（－1/2，0）を中心とする式に変形することにより，円柱および球の散乱係数の性質を，それらの媒質定数および入射周波数の広い範囲について明らかにした．すなわち，円柱および球の各固有モードにおける散乱係数の性質は次のようになることを計算例とともに示した．

1．媒質が無損失または完全導体のときは，常に複素平面上の点（－1/2，0）を中心とする半径1/2の円周上にある．

2．媒質に有限な損失があるときは，点（－1/2，0）からの距離が1/2以下になる．

3．媒質の損失が小さいときは，入射周波数に対して各モードごとに多くの共振を示す．

4．共振周波数は損失の大きさにより大きく変らない．

5．入射周波数を零から大きくしたとき，最初に現れる共振周波数は，媒質の定数が大きくなるに従い低くなり，モード次数が高くなるに従い高くなる．

6．入射周波数に対する各共振周波数の間隔は，媒質の定数が大きくなるに従い狭くなる．

7．媒質定数が一定であれば，共振周波数の間隔は入射周波数およびモード次数によって大きく変らない．

8．媒質の損失が大きくなるに従い共振は次第に減衰する．このとき，媒質定数が大きいほど，また入射周波数が高いほど共振ははやく減衰する．

9．媒質の損失が極度に大きくなると完全導体のときの性質に漸近する．

10．媒質の定数が周波数に無関係であれば，入射周波数が高くなるに従い点（－1/2，0）からの距離が一定の値に近づく．

11．媒質が有限な損失をもつとき，または完全導体のとき，高い周波数領域における磁

気形および電気形散乱係数は相互に点（－1/2，0）に関してほぼ点対称の関係になる．

以上の外に，本章の計算例から，散乱係数の共振曲線の途中に見られる「たるみ」の部分は，媒質の損失の大きさにより大きく変らないことがわかった．一般に媒質が無損失のときの散乱係数の数値計算は簡単である．したがって，円柱または球の媒質に損失があるときは，予めその媒質を無損失としたときの散乱係数を計算すれば，本章の計算例を参照することにより，実際の散乱係数の概略を予想することができる．著者は，本論文の内容とは別にマシュー関数を用いて楕円柱の散乱係数も計算している．この場合も同様なことが言える[35],[36]．また，本章では高い周波数領域における散乱係数の簡単な近似式を導出し，この近似式による値を厳密な値で評価することにより，その適用範囲などを示した．さらに，散乱係数の性質を用いて，円柱および球の散乱断面積の適切な計算法も示した．

本章で明らかにした散乱係数の性質は，円柱および球による電磁波散乱問題を取扱う場合に有効に利用できる．そして，本章の解析は，将来新しい材料（例えば，任意の誘電性と磁性を共に示す材料）が開発されたときの散乱現象を予測する場合および希望する散乱波を得るための設計指針を与える．

第５章　実　　験

５－１　まえがき

ここでは，第２章から第４章までにおいて検討した円柱および球の散乱係数の解析結果の妥当性を確認するために行った実験について述べている．一般に散乱係数を散乱電磁界の中から取り出して測定することは困難である．したがって，ここでは波源からの入射波と散乱波との遠点における合成電界の相対電界強度を計算し，その値を実験で確認することにより間接的に解析の妥当性を実証する方法を用いる．実験は，ＶＨＦ，ＵＨＦおよびＳＨＦ帯の周波数において行う．散乱体には誘電体および導体の円柱を用い，波源には電気ダイポールの代りに線状空中線を用いる．誘電体円柱には塩化ビニール系の薄いフィルム（厚さ 0.2㎜）で作った円筒の容器に純水または食塩水（食塩の濃度により損失係数が変わる誘電体）および工業用アルコール（CH_3OH）を入れたものと，固体誘電体（ＴＤＫ製，ＫＵ-16,25）を円柱状に加工したものを用い，導体円柱には銅の円筒を用いている．そして，円柱の近くに円柱軸と平行に測定波長の 1/2 以下の長さの線状空中線を置いたときの円柱軸に直角で波源を含む面内の遠点の相対電界強度を測定し，計算値と比較している．以上のような構成の実験では，到底解析の全域にわたる実証は困難であるが，少くとも実験の範囲内では計算値と実測値はよく一致しており，解析の妥当性を確認している．

５－２　遠点の合成電界

ここでは，実験との関連で，図２－１および図３－１の点QにZ方向をむく電気ダイポール波源があるときの遠点（$\rho\to\infty$）におけるZ方向の合成電界（入射電界と散乱電界）を取扱う．

５－２－１　円柱の場合

円柱の場合の遠点の合成電界のZ成分（$E_{Z,\rho\to\infty}$ と表示する）は，式（２－13）の $\rho>\rho_0$ における $\boldsymbol{E}^{ep}$ のZ成分の遠点における入射電界 $\left(E^{p}_{Z,\rho\to\infty}\text{ と表示する}\right)$ と，式（２－37）の散乱電界 $\boldsymbol{E}^{es}_{\rho\to\infty}$ のZ成分 $\left(E^{s}_{Z,\rho\to\infty}\text{ と表示する}\right)$ との合成として与えられる．ここで，

$E^{p}_{Z,\rho\to\infty}$は，第2章の2－3節で遠点の $\boldsymbol{E}^{es}_{\rho\to\infty}$を求めた方法と同様にして，次式のように表せる．

$$E^{p}_{Z,\rho\to\infty} \simeq K\frac{e^{-jkR}}{R}\sum_{n=0}^{\infty} \epsilon_n \cdot j^{n+1}(k\cos\theta)^2 \cdot J_n(k\rho_0\cdot\cos\theta)\cdot\cos n\phi \qquad (\rho\to\infty)$$

（5－1）

ただし，

$$K=-\frac{IdZ}{4\pi\varepsilon_0\omega}$$

ここで，

$$\sum_{n=0}^{\infty} \epsilon_n \cdot j^n \cdot J_n(k\rho_0\cdot\cos\theta)\cdot\cos n\phi = e^{jk\rho_0\cdot\cos\theta\cdot\cos\phi}$$

の関係[33],[34] を用い，式（5－1）の $E^{p}_{Z,\rho\to\infty}$ と式（2－37）から得た $E^{s}_{Z,\rho\to\infty}$ との合成電界 $E_{Z,\rho\to\infty}$ を表示すれば，次式のようになる[22]．

$$E_{Z,\rho\to\infty} \simeq jK\frac{e^{-jkR}}{R}(k\cos\theta)^2\left\{ e^{jk\rho_0\cdot\cos\theta\cdot\cos\phi} + \sum_{n=0}^{\infty}\epsilon_n j^n\cdot B^{e}_{ns}\cdot H^{(2)}_n(k\rho_0\cdot\cos\theta)\cdot\cos n\phi \right\} \qquad (5-2)$$

5－2－2　球の場合

球の場合の合成電界 $E_{\theta,r\to\infty}$ は，式（3－9）の $r>r_0$ における $\boldsymbol{E}^p$ の θ 成分と，式（3－11）の $\boldsymbol{E}^s$ の θ 成分に，$r\to\infty$における次の関係[33]

$$h^{(2)}_n(kr) \simeq j^{n+1}\frac{e^{-jkr}}{kr}, \qquad H(kr) \simeq -jh^{(2)}_n(kr)$$

を適用する．そして，球には$n=0$モードの散乱が存在しない[12],[21] ことを考慮すれば，$E_{\theta,r\to\infty}$ は次式のように表せる．

$$E_{\theta,r\to\infty} \simeq \frac{e^{-jkr}}{r}\left[\sin\theta\cdot e^{jkr_0\cdot\sin\theta\cdot\cos\phi} + j\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n+1}{n(n+1)}j^{n+1}\sum_{m=0}^{n}\epsilon_m\frac{(n-m)!}{(n+m)!}\frac{(-1)^m}{\sin\theta} \times\left\{a_n\cdot m^2\cdot P^m_n(0)\cdot P^m_n(\cos\theta)\cdot h^{(2)}_n(kr_0)\right.\right.$$

$$-j\frac{b_n}{(2n+1)^2}\cdot P(0)\cdot P(\cos\theta)\cdot H(kr_0)\Big\}\cos m\phi\Big] \qquad (5-3)$$

5－3　数値計算式

5－2節の式（5－2）と（5－3）は，相対電界強度を求めるには不向きである．そこで，まず，円柱の場合，ダイポール波源が$X-Y$面上の遠点に生ずる電界の強さを基準とし，その点における $E_{z,\rho\to\infty}$ の電界強度 $|E_z|_{\rho\to\infty}$ を表すと次式のようになる(22)．

$$|E_Z|_{\rho\to\infty}\simeq\cos^2\theta\Big[1+A_\phi^2+B_\phi^2+2\Big\{A_\phi\cdot\cos(k\rho_0\cdot\cos\theta\cdot\cos\phi)+B_\phi\cdot\sin(k\rho_0\cdot\cos\theta\cdot\cos\phi)\Big\}\Big]^{\frac{1}{2}} \qquad (5-4)$$

ただし，

$$A_\phi=\sum_{n=0,2,4,\cdots}^{\infty}(-1)^{\frac{n}{2}}\cdot\epsilon_n\cdot V_n\cdot\cos n\phi-\sum_{n=1,3,5,\cdots}^{\infty}(-1)^{\frac{n-1}{2}}\cdot 2\cdot U_n\cdot\cos n\phi$$

$$B_\phi=\sum_{n=0,3,4,\cdots}^{\infty}(-1)^{\frac{n}{2}}\cdot\epsilon_n\cdot U_n\cdot\cos n\phi+\sum_{n=1,3,5,\cdots}^{\infty}(-1)^{\frac{n-1}{2}}\cdot 2\cdot V_n\cdot\cos n\phi$$

$$U_n=J_n(k\rho_0\cdot\cos\theta)\cdot\beta_n^e-N_n(k\rho_0\cdot\cos\theta)\cdot\alpha_n^e$$

$$V_n=J_n(k\rho_0\cdot\cos\theta)\cdot\alpha_n^e+N_n(k\rho_0\cdot\cos\theta)\cdot\beta_n^e$$

$$B_{ns}^e=\alpha_n^e+j\beta_n^e.$$

式（5－4）は，言うまでもなく円柱が無限長のときであり，この式を用いた数値計算は$\theta=0$，すなわち$X-Y$面上においてのみ有効である．また，有限長円柱であっても$X-Y$面上の相対電界強度は式（5－4）と同一になる(22)．

つぎに，球の場合も波源の電気ダイポールが$\theta=0$方向の遠点に生ずる電界を基準に，$E_{\theta r\to\infty}$ における相対電界強度 $|E_\theta|_{r\to\infty}$ を求めると次式のようになる(21)．

$$|E_\theta|_{r\to\infty}\simeq\left(\mathrm{R}_e^2+\mathrm{I}_m^2\right)^{\frac{1}{2}} \qquad (5-5)$$

ただし，

$$\mathrm{R_e}=\sin\theta\cdot\cos(kr_0\cdot\sin\theta\cdot\cos\phi)+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n+1}{n(n+1)}\sum_{m=0}^{n}\epsilon_m\frac{(n-m)!}{(n+m)!}\frac{(-1)^m}{\sin\theta}\cdot T_n\cdot\cos m\phi$$

$$\mathrm{I_m}=\sin\theta\cdot\sin(kr_0\cdot\sin\theta\cdot\cos\phi)$$

$$-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n+1}{n(n+1)}\sum_{m=0}^{n}\epsilon_n\frac{(n-m)!}{(n+m)!}\frac{(-1)^m}{\sin\theta}\cdot S_n\cdot\cos m\phi$$

$$S_n=\left[\left\{\alpha_{an}\cdot j_n(kr_0)-\beta_{an}\cdot N_n(kr_0)\right\}\cos(n+1)\frac{\pi}{2}\right.$$

$$\left.+\left\{\alpha_{an}\cdot n_n(kr_0)+\beta_{an}\cdot j_n(kr_0)\right\}\sin(n+1)\frac{\pi}{2}\right]m^2\cdot P_n^m(0)\cdot P_n^m(\cos\theta)$$

$$+\left[\left\{\alpha_{bn}\cdot N(kr_0)+\beta_{bn}\cdot J(kr_0)\right\}\cos(n+1)\frac{\pi}{2}\right.$$

$$\left.-\left\{\alpha_{bn}\cdot J(kr_0)-\beta_{bn}\cdot N(kr_0)\right\}\sin(n+1)\frac{\pi}{2}\right]\frac{1}{(2n+1)^2}P(0)\cdot P(\cos\theta)$$

$$T_n=\left[\left\{\alpha_{an}\cdot n_n(kr_0)+\beta_{an}\cdot j_n(kr_0)\right\}\cos(n+1)\frac{\pi}{2}\right.$$

$$\left.-\left\{\alpha_{an}\cdot j_n(kr_0)-\beta_{an}\cdot n_n(kr_0)\right\}\sin(n+1)\frac{\pi}{2}\right]m^2\cdot P_n^m(0)\cdot P_n^m(\cos\theta)$$

$$-\left[\left\{\alpha_{bn}\cdot J(kr_0)-\beta_{bn}\cdot N(kr_0)\right\}\cos(n+1)\frac{\pi}{2}\right.$$

$$\left.+\left\{\alpha_{bn}\cdot N(kr_0)+\beta_{bn}\cdot J(kr_0)\right\}\sin(n+1)\frac{\pi}{2}\right]\frac{1}{(2n+1)^2}P(0)\cdot P(\cos\theta)$$

$$a_n=\alpha_{an}+j\beta_{an}$$

$$b_n=\alpha_{bn}+j\beta_{bn}$$

式（5－4）および式（5－5）は，実際に計算機を用いて計算できる円柱および球の場合における遠点の合成電界の相対電界強度を表す式である．

5－4　実験設備

実験設備は，ＶＨＦ,ＵＨＦ帯用として建物（7階）の屋上に設置した 9×9m² の銅板（厚さ 0.8mm）のグランド板と，ＳＨＦ帯用として屋内に電波吸収壁を備えた電波暗室（3.4×2.7×2.6m³）とがある．グランド板は，図5－1に示すように，中央部に直径1ｍのターンテーブルを備え，2×2m² の水平部の外側は降雨排水のため －13/1000 の負勾

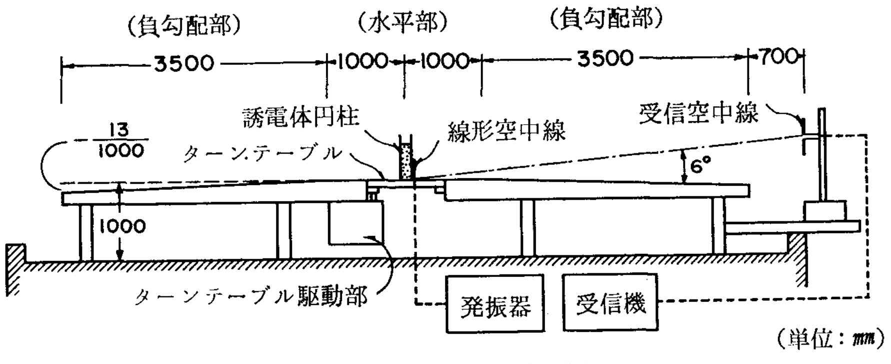


図5－1　グランド板の側面図

配になっている．ターンテーブルは0.1°ステップの制御ができ，毎分約120°の角速度で回転し，中央部に給電用の端子が取付けられるようになっている．受信空中線は，二条のレールの上にあり，グランド板との距離が可変できる台車のポールに取付けられる．ＶＨＦ,ＵＨＦ 帯の発振器と受信機はグランド板直下の測定室内にあり，ターンテーブルも同室内から遠隔制御できる．また，電波暗室は，図５－２に示すように，床面を除く５面が3GHz 以上の周波数帯において，－25dB 以下の反射係数をもつ電波吸収壁によって囲まれている．室内には回転台と受信用ホーンの支持装置とがあり，回転台は室外から制御できるようになっている．

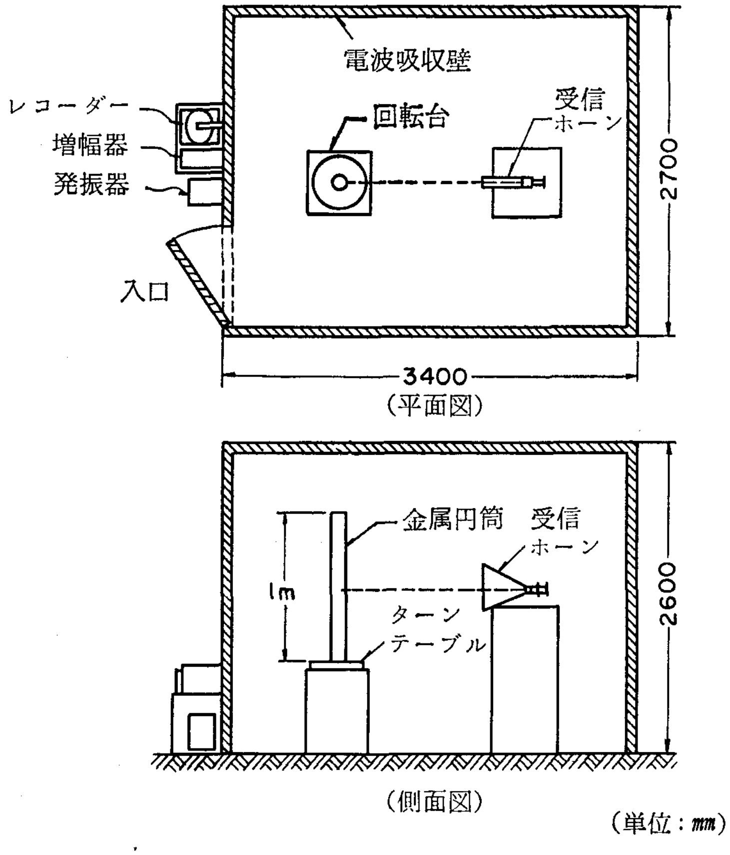


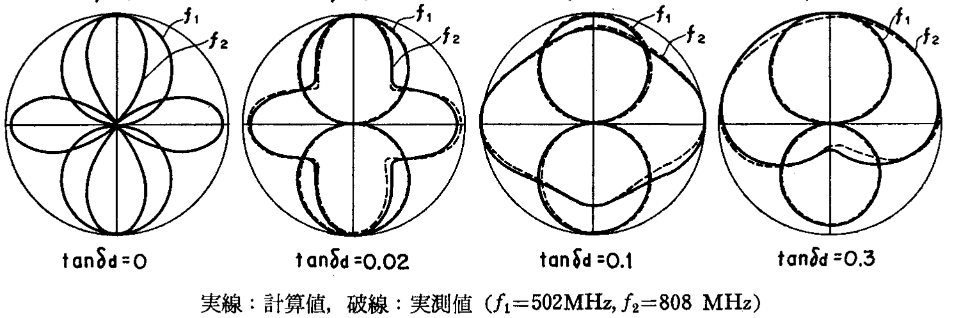
図５－２　電波暗室の構造

５－５　実験とその考察

実験は，誘電体円柱と金属円柱について行った．ＶＨＦ,ＵＨＦ 帯の周波数における誘電体円柱による実験は，図５－１に示すように，グランド板中央のターンテーブルの中心と円柱の軸を一致させ，ユニポール構成とした．誘電体円柱には，塩化ビニール系の薄

いフィルム（厚さ 0.2mm）で作った円筒（半径 a=25，44mm）に，イオン交換によって得た純水（$\varepsilon_{r0}\simeq 81$, $\tan\delta_d\simeq 0.02$, f=300MHz, T=25°C）[29]，またはこれに食塩（NaCl）を溶解させた食塩水（食塩の濃度により損失係数が変わる誘電体．付録参照）を測定波長の約1/2の高さまで入れたものを用いた．また，ダイポール波源の代りに，長さが測定波長の1/4以下の細い（太さ 1mmϕ）硬銅線を用いた．式（5－2）の第2項からわかるように，円柱の散乱特性が最も顕著に現れるのは $\rho_0=a$ のときである．したがって，この実験では波源用空中線を円柱軸と平行にフィルム円筒の外側に密着させ，ターンテーブルの背面から給電した．また，受信用空中線は，図5－1に示すように，グランド板の負勾配部から測って約6°の仰角方向に設置した．これは，グランド板が完全導体でないために起る板面効果と，グランド板端部の回折波による影響を除くためである．このような受信方向であっても，第2章の図2－8からわかるように，この実験の目的にはほとんど支障がない．むしろ，水の温度による誘電率の変化[29]，フィルム円筒の変形およびグランド板が正方形であるための影響が大きい．実験を行う際には，天候，測定時刻および受信空中線の位置（グランド板からの距離）などに細心の注意をはらった．

測定周波数は，散乱特性が最もよく現れる円柱の n＝1および2モードの第1共振点周波数を用いた．いま，これらの周波数を f_1 および f_2 とし，円柱の媒質定数が $\varepsilon_{r0}=81$, $\tan\delta_d=0$, 0.02, 0.1, 0.3 のときの $|E_Z|_{\rho\to\infty}$ の ϕ 指向特性を計算し，これを図5－3に実線で示した．また，それに対応する測定値（ただし，$\tan\delta_d=0.02$（純水），0.1，0.3（食塩水））を図5－3に破線で示した．図5－3からわかるように，計算値と実測値はよく一致している．また，同様な方法により，f_1 と f_2 において，$\phi=\pi$ 方向の $|E_Z|_N$



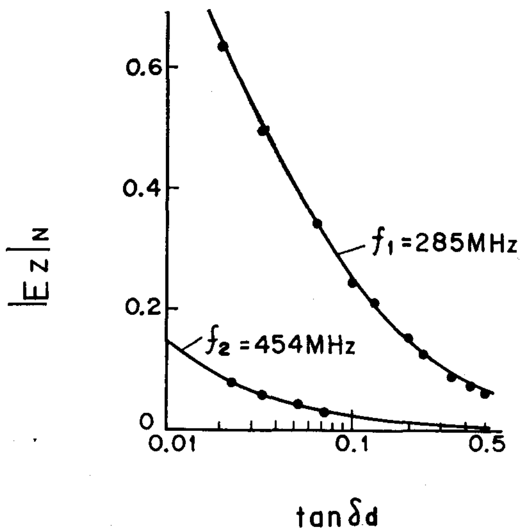
実線：計算値，破線：実測値（f_1=502MHz, f_2=808 MHz）

図5－3　$|E_z|_{\rho\to\infty}$の ϕ 指向特性（$\rho_0=a$=25mm）

$\left(\begin{array}{l}\varepsilon_{r0}=81,\ \tan\delta_d=0,\ 0.02,\ 0.1,\ 0.3,\ \mu_r=1\\ f_1, f_2:n=1,2\ \text{の第1共振点周波数}\end{array}\right)$

($\tan\delta_d \neq 0$ のときの $|E_Z|_{\rho\to\infty}$ を $\tan\delta_d=0$ のときの値で正規化したもの）を，$\varepsilon_{r0}=81$, $\tan\delta_d=0.02\sim0.5$ について測定し，計算値（実線）と共に図５－４に示した．この場合も計算値と実測値はよく合っている．$|E_Z|_N$を$\phi=\pi$で求めた理由は，図５－３からわかるように，$\tan\delta_d$ に対する $|E_Z|_N$ の変化が$\phi=0$方向より大きいためである．なお，これらの実験の外にフィルム円筒に工業用アルコール（CH_3OH, $\varepsilon_{r0}\simeq31$, $\tan\delta_d\simeq0.08$, $f=$ 300MH$_2$, $T=25$℃）[29] を入れたときの実験も行った，さらに，ＳＨＦ帯においても固体誘電体（ＴＤＫ製，KU-16, 25，$\varepsilon_{r0}\simeq16, 25$，$\tan\delta_d\simeq0.0003$, 0.0002, $f=900$MHz, $T=$ 22℃）を円柱状に加工したものを用い，電波暗室内でグランド円板（直径１ｍ）を用いたユニポール構成の実験も行った．またこのときは，角形反射板を併用したϕ指向特性の測定も行った[27]．これらは何れも計算値とよく一致していた．

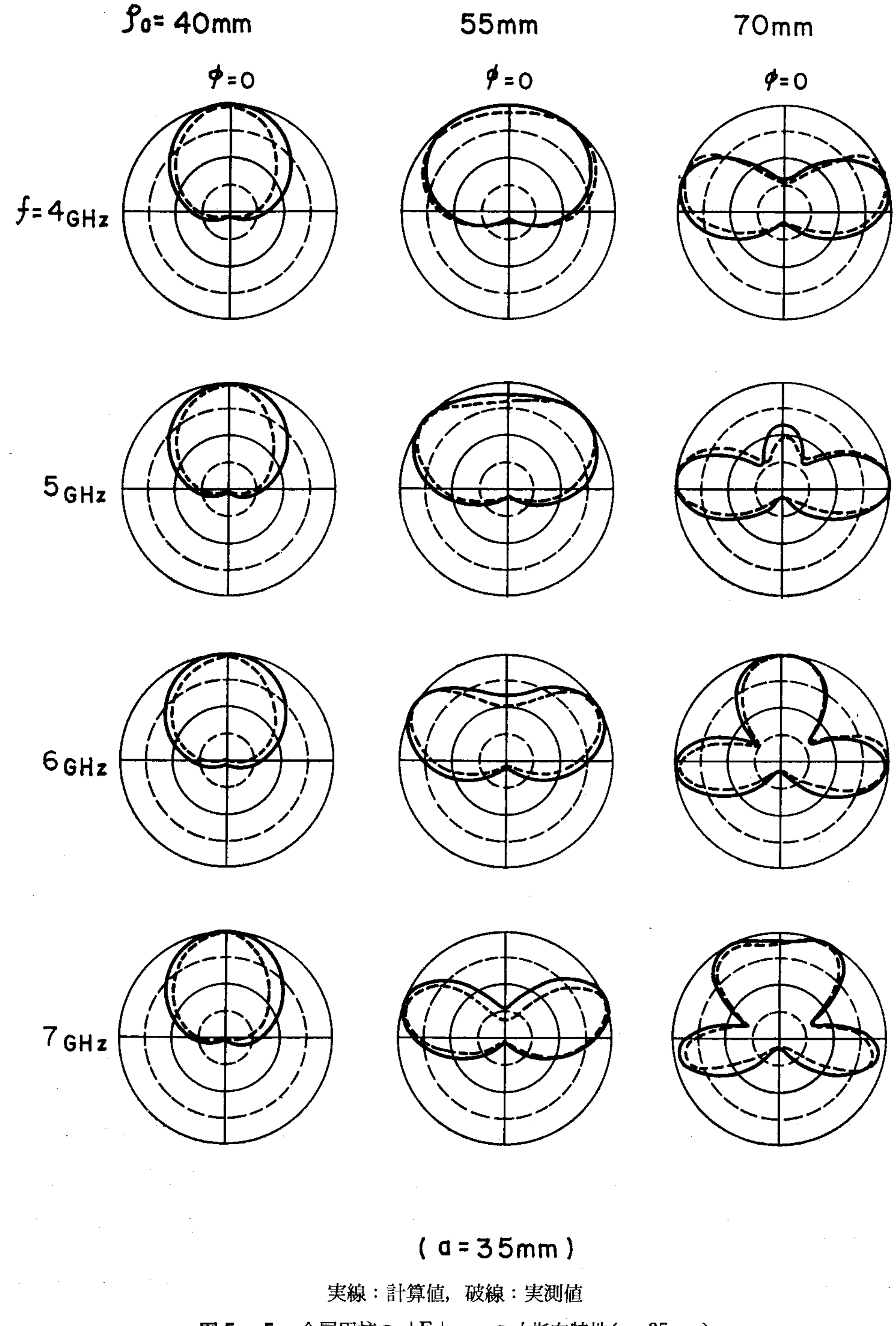
ついで，有限長円柱であっても，円柱軸に直角で波源を含む面内の相対電界強度のϕ指向特性は円柱の長さによって変化しないことを確認するための実験を行った．実験では，長さ 4m，内径50mmϕ，肉厚 1mm の建築用塩化ビニールパイプを用い，これに純水を入れた誘電体円柱と，測定波長の1/4の長さの線状空中線（太さ１mmϕ の硬銅線）を用い，空中線をビニールパイプの外側に密着させた．そして，測定周波数を f_1 および f_2 に選び，水の高さを変えたときのϕ指向特性を求めた．さらに，空中線の長さを 1/4 波長以



実線：計算値，•印：実測値

図５－４　$\tan\delta_d$ に対する $|E_z|_N(\phi=\pi, \rho_0=a=44\text{mm})$

$\left(\begin{array}{l}\varepsilon_{r0}=81, \tan\delta_d=0.02\sim0.5, \mu_r=1\\ f_1, f_2 : n=1, 2\text{の第１共振点周波数}\end{array}\right)$



実線：計算値，破線：実測値

図5－5　金属円柱の $|E_z|_{\rho\to\infty}$ の ϕ 指向特性(a=35mm)
(ρ_0=40, 55, 70mm, f=4, 5, 6, 7GHz)

下に短縮すると共に水の高さもこれと同一になるように調整してϕ指向特性を測定した．これらの実験では，水の高さが約1/20波長になるまで（これ以下では，受信電界強度が弱くなり，測定不可能になった）ϕ指向特性はほとんど変らなかった．また，受信空中線をグランド板から約30°の仰角方向に設置して同様の実験も行った．このときは，水の高さによりϕ指向特性は多様に変化した．これらの実験により，円柱軸に直角で波源を含む面内の散乱指向特性は円柱の長さに無関係であることが確認された．

つぎに，ＳＨＦ帯において金属円筒（外径70mmϕ，肉厚2.2mm，長さ１ｍの銅円筒）を用いた実験を行った．この場合は，円筒内部に平衡給電線を通し，円筒の中央（両端から50cm の位置）の小さい穴（2.2mmϕ）から円柱軸と平行に設置した半波長空中線（太さ0.8mmϕ）に給電し，この空中線と円筒との距離を変えて測定した（図５－２参照）．このときの測定結果を計算値と共に図５－５に示した．このときも計算値と実測値はよく一致している．

５－６　むすび

本章では，散乱係数の解析の妥当性を実証するために行った実験について述べた．ここでは，散乱体に誘電体および金属の円柱を用い，ダイポール波源の代りに円柱軸に平行な線状空中線を用いて円柱軸に直角で波源を含む面内の遠点における入射波と散乱波との合成電界強度を測定した．そして，誘電体に純水および食塩水を用いたときの円柱の$n=1$と２モードの第１共振点周波数における遠点の電界の水平面指向特性と，媒質の損失に対する相対電界強度を実測し，計算値とよく一致することを示した．また，円柱軸に直角で波源を含む面内の散乱指向特性は円柱の長さに無関係であることも確めた．また，工業用アルコールおよび固体誘電体を用いた場合も同様であることを述べると共に，銅の円筒を用いた場合も計算値とよく一致することを示した．このような実験では到底解析の全域にわたる散乱係数の性質を確認することは困難である．しかし，少くとも実測の範囲内では解析の妥当性が実証できた．また，この実験結果は，第２章と第３章で述べた円柱と球の散乱係数の相互関係から，球の散乱係数も間接的に実証している．ここでは，実験設備などの関係から，第２章で示した円柱軸に対する方向の散乱係数について，それが近似的に適用できる円柱の長さを決めるための実験はできなかった．これは，今後に残された課題である．

第6章 結　　論

本章は，この論文の結論として，本研究の成果を総括して述べている．

第1章では，無限長円柱および球状の物体による電磁波散乱に関する研究の歴史的背景を概説し，これまでの研究においてもなお残された問題があることを示し，本研究の目的と地位を明確にした．

第2章では，均質な無限長円柱物体の近くに円柱軸と平行に電気または磁気ダイポール波源を置いたときの遠点の散乱電磁界を，ヘルツベクトルと複素積分の鞍点法とを用いて解析し，円柱の散乱係数を導出した．そして，散乱係数の性質を知るために，円柱の媒質が完全導体，誘電体および誘電性と磁性を共に示す場合の散乱係数を円柱の代表的な固有モードについて数値計算した．ここでは，散乱係数の振幅周波数特性と代表的な周波数における円柱軸を含む面内の指向特性を示した．そして，媒質が低損失のときの散乱係数の共振周波数は，散乱方向が円柱軸に近づくに従い高くなること，共振周波数の間隔も同様な傾向で広くなること，および，媒質の損失が大きくなるに従い共振は次第に減衰し媒質が完全導体のときの性質に近づくことなどを示した．さらに，円柱軸に直角で波源を含む面内の散乱係数は，円柱に軸と直角な方向から平面波が入射したときの円柱の散乱係数と同一になることも示した．

第3章では，均質な球状物体にダイポール波が入射したときの球の磁気形および電気形散乱係数を導出し，それらが平面波入射のときの散乱係数と同一になることを示した．そして，この磁気形および電気形散乱係数は，円柱に電気または磁気ダイポール波が入射したときの軸に直角で波源を含む面内の円柱の磁気形および電気形散乱係数とそれぞれ同じ形式になることを示した．

第4章では，円柱の場合の軸に直角で波源を含む面内の磁気形および電気形散乱係数と，球の場合の磁気形および電気形散乱係数などを一つの式で統一的に表示した．そして，この式を複素平面上の点（−1/2，0）を中心とする式に書き変えることにより，散乱係数の性質が見通しよく得られることを示した．すなわち，円柱および球の媒質が無損失または完全導体のときの散乱係数は常に複素平面上の点（−1/2，0）を中心とする半径1/2の円

周上にあること，媒質に有限な損失があるときは点（−1/2，0）からの距離が1/2以下になること，媒質の定数が周波数に無関係であれば，周波数が高くなるに従い点（−1/2，0）からの距離が一定の値に近づくことを明らかにした．また，媒質が低損失のときの散乱係数の各モードにおける共振周波数の間隔は，媒質定数が大きくなるに従い狭くなること，共振周波数は損失の大きさによって大きく変らないこと，媒質の損失が大きくなるに従い完全導体のときの性質に漸近することなどを数値計算例で示した．ついで，高い周波数領域における散乱係数の簡単な近似式を導出し，このときの磁気形および電気形散乱係数が相互に点（−1/2，0）に関してほぼ点対称の関係になることを示した．この近似式による値を厳密な値で評価し，近似式の適用範囲を示した．さらに，これらの散乱係数の性質を基にして円柱および球の散乱断面積の適切な計算法を示した．

第5章では，散乱係数の解析の妥当性を実証するために行った誘電体および金属円柱に関する散乱実験について述べた．散乱係数を電磁界の中から分離して測定することは困難であるため，ここでは円柱の近くに軸と平行に線状空中線を置いたときの遠点における入射波と散乱波との合成電界強度を実測し，計算値と比較した．誘電体としては純水および食塩水を用い，円柱の共振周波数における遠点の電界の水平面指向特性並びに媒質の損失に対する相対電界強度を実測し，計算値とよく一致することを示した．また，円柱軸に直角で波源を含む面内の散乱指向特性は，円柱の長さに無関係であることを確めた．さらに，工業用アルコールおよび固体誘電体を用いた実験においても同様な結果が得られることを述べると共に，銅の円筒を用いた場合も計算値とよく一致することを示した．この実験により，少くとも実測の範囲内では散乱係数の解析が妥当であることを実証した．

付録においては，本研究の数値計算に用いた複素ベッセル関数の数値計算法および食塩水の濃度に対する損失係数の測定結果を示した．

本研究は，無限長円柱および球状物体について，すでに解析的に得られているこれらの物体の散乱係数と，本研究において新しく導出した散乱係数について，物体の媒質定数および入射周波数の広い範囲における性質を明らかにした．ここでは，媒質の周波数特性，温度特性，ヒステレシス特性および分極特性などとの関連性には触れていない．しかし，本論文で記述した円柱および球の散乱係数の性質は，これらの散乱体による散乱波の解析に，また，他の形状の散乱体による散乱現象を検討する際に有効と思われる．

今後の散乱問題の解析に，または散乱現象を利用した装置の開発に役立てば，著者の幸いである．

謝　辞

本論文をまとめるにあたり，終始御懇切な御指導と御討論を賜わりました大阪大学基礎工学部　末田正教授に衷心より厚く御礼のことばを申し上げます．

また，本論文の作成にあたり，大阪大学基礎工学部　藤沢和男教授，難波進教授，浜川圭弘教授，山本錠彦教授，西原功修教授には御懇篤な御検討と御教示を賜りました．厚く御礼申し上げます．

本研究の遂行にあたり，終始御懇切な御教示と御鞭撻を賜わりました大阪大学・大阪工業大学　園田忍名誉教授，大阪工業大学　飯田一男名誉教授，角修吉教授に心から厚く御礼申し上げます。また，終始有益な御助言と御鞭撻を賜わりました大阪工業大学　秋山博名誉教授，青井忠正常務理事・教授，佐藤次彦学長，杉浦寅彦教授に深く感謝致します。また，本論文の実験に御協力いただいた大阪工業大学電子工学科　津川哲雄講師ならびに本研究の数値計算に御便宜をいただいた同中央研究所事務長　前川迪蔵氏に謝意を表します。

参 考 文 献

(1) G. Mie, "Beiträge zur Optik trüber Medien", Ann. Phys. (Leipzig), Vol. 25, pp. 377—445, 1908.

(2) P. Debye, "Der Lichtdruck auf Kugeln von beliebigem Material", Ann. Phys. (Leipzig), Vol. 30, pp. 57—136, 1909.

(3) C. Schaefer und J. Merzkirch, "Experimentelle Untersuchungen über die Beugung ungedämpfter elektrischer Wellen an dielektrischen Zylindern und über die Eigenschwingungen dielecktrischer Zylinder, " Z. Phys. 13, pp. 166—194, 1923.

(4) C. Schaefer und K. Wilmsen", Über die elektrischen und magnetischen Eigenschwinqungen dielekrischer und metallischer Kugeln", Z. Phys., pp. 345—354, 1924.

(5) R. D. Richtmyer, "Dielectric resonators", J. Appl. Phys., Vol. 10, pp. 391—398, June 1939.

(6) P. S. Carter, "Antenna arrays around cylinders", Pro. IRE, Vol. 31, pp. 671—693, Dec. 1943.

(7) C. H. Papas, "On the infinitely long cylindrical antenna", J. Appl. Phys. Vol. 20, pp. 437—440, May 1949.

(8) W. S. Luck, "Electric dipoles in the presence of elliptic and circular cylinders", J. Appl. Phys. Vol. 22, pp. 14—19, Jan. 1951.

(9) J. R. Wait and A. M. Canda, "Resonance characteristics of a corrugated cylinder excited by a magnetic dipole", IRE Trans. Ant. and Prop. pp. 330—333, July 1961.

(10) R. J. Lytle, "Far-field patterns of point sources operated in the presence of dielectric circular cylinder", IEEE Trans. Ant. and Prop. Vol. AP-19, No. 5, Sept. 1971.

(11) J. R. Wait, "Scattering of a plane wave from a circular dielectric cylinder at oblique incidence", Can. J. Phys., 33, pp. 189—195, Feb. 1955.

(12) J. A. Stratton, "Electromagnetic theory", McGraw-Hill, (1941).

(13) G. N. Tsandoulas, "Scattering of a dipole field by finitely conducting and dielectric cicular cylinders", IEEE Trans. Ant. and Prop. Vol. AP-16, No. 3, pp. 324—328, May 1968.

(14) A. Okaya and L. F. Barash, "The dielectric microwave resonator", Pro. IRE, Vol. 50, pp. 2081—2092, Oct. 1962.

(15) P. Affoltor and B. Eliasson, "Electromagnetic resonances and Q-factor of lossy dielectric spheres", IEEE Trans. Microwave Theory Tech., Vol. 21, pp. 573—578, Sept. 1973.

(16) J. Van Bladel, "On the resonances of a dielectric resonator of very high permittivity", IEEE Trans. Microwave Theory Tech., Vol. 23, pp. 199—208, Feb. 1975.

(17) P. Guillon and Y. Garault, "Accurate resonant frequencies of dielectric resonators", IEEE Trans. Microwave Theory Tech., Vol. 25, pp. 916—922, Nov. 1977.

(18) 虫明，安達，"基礎電波工学，" 共立出版（昭45）.

(19) 森田清，"電磁波概論，" 金原出版（昭36）.

(20) 飯田，角，安藤，園田，"円柱誘電体付加空中線の理論"，電気学会雑誌，45—126, Vol.90, No. 12, pp. 171—176（昭45—12）.

(21) 安藤，飯田，角，園田，"点状波源に誘電体の球を付加したときの電磁界について"，大阪工業大学紀要，理工篇，Vol. 18, No. 2, pp. 1—24（昭49）.

(22) 安藤，飯田，"損失のある誘電体円柱による電磁波の散乱"，電子通信学会論文誌，Vol. J62-B, No. 11, pp. 974—981（昭54—11）.

(23) 安藤俊一，"共振現象を考慮した誘電体球の散乱断面積の計算法"，電子通信学会論文誌，Vol.

J64-B, No. 1, pp. 38—45 (昭56—01).

(24) 浅利英吉, "球状誘電体の散乱断面積の計算について", 電子通信会論文誌, Vol. 52-B, No. 4. pp. 185—191 (昭44—04).

(25) 安藤俊一, "円柱状または球状物体の電磁波散乱係数", 電子通信学会論文誌, Vol. J64-B, No. 12, pp. 1402—1409 (昭56—12).

(26) 安藤俊一, "球体の散乱断面積の計算法," 昭57電子通信学会, 光・電波部門全国 大会, No. 29 (昭57).

(27) 安藤俊一, "誘電体円柱のE_n モード散乱波により励振された角形反射板の指向特性", 電子通信学会論文誌, Vol. J65-B, No.5, pp. 601—605 (昭57—07).

(28) 安藤俊一, "ダイポール波励振における無限長円柱の散乱係数", 電子通信学会論文誌, Vol. J66-B, No. 5, pp. 655—662 (昭58—05).

(29) A. Von Hippel, "Dielectric materials and applications", Willey & Sons (1954).

(30) P. M. Morse and H. Feshbach, "Method of theoretical physics", part II, McGraw-Hill (Kōgakusha) (1953).

(31) 山内, 森口, 一松, "電子計算機のための数値計算法", I, II, III, 培風館 (昭40—53).

(32) 雨宮, 田口, "数値解析と FORTRAN", 増補2版, 丸善 (昭50).

(33) 森田, 宇田川, 一松, "数学公式", I, II, III, 岩波全書 (昭35).

(34) M. Abramowitz and I. A. Stegun, "Handbook of mathematical function", Dover Publications, New York (1964).

(35) 安藤俊一, "楕円柱の電磁波散乱係数", 輻射科学研究会資料, RS84-10, (昭59—09).

(36) T. Ando, "Electromagnetic Scattering Coefficient of an Elliptic Cylinder", IECE Trans. E67, pp. 623—624, Nov. 1984.

付　　録

付－1　複素ベッセル関数の数値計算法

実変数に対するベッセル関数の単精度（8桁）および2倍精度（16桁）の数値計算法は既に確立されている[(31),(32)]．しかし，複素変数に対する数値計算法は未だ決定的な方法は見当らないようである．ここでは，本研究の数値計算に用いた複素円柱ベッセル関数 $J_n(z)$ および複素球ベッセル関数 $j_n(z)$ の数値計算法について述べる[(25),(26)]．

付－1－1　$J_n(z)$ と $j_n(z)$ の表示式

$J_n(z)$，$j_n(z)$（但し，$z=x+jy$）の表示式は多くある[(33),(34)]が，ここでは本研究の数値計算に用いた表示式のみを列記する[(23),(25)]．

$$J_n(z)=\left(\frac{z}{2}\right)^n\sum_{r=0}^{\infty}\frac{(-1)^r}{r!(n+r)!}\left(\frac{z}{2}\right)^{2r}$$

$$=\left(\frac{|z|}{2}\right)^n(\cos n\theta+j\sin n\theta)\sum_{r=0}^{\infty}\frac{(-1)^r}{r!(n+r)!}\cdot\left(\frac{|z|}{2}\right)^{2r}(\cos 2r\theta+j\sin 2r\theta) \tag{付－1}$$

但し，$|z|=\sqrt{x^2+y^2}$，$\theta=\tan^{-1}\dfrac{y}{x}$

$$J_n(z)=\sum_{r=0}^{\infty}(-1)^r\frac{y^{2r}}{(2r)!}\cdot J_n^{(2r)}(x)$$

$$+j\sum_{r=0}^{\infty}(-1)^r\frac{y^{2r+1}}{(2r+1)!}\cdot J_n^{(2r+1)}(x) \tag{付－2}$$

但し，$J_n^{(2r)}, J_n^{(2r+1)}$はそれぞれ J_n の（$2r$）次，（$2r+1$）次の導関数

$$j_n(z)=(2z)^n\sum_{r=0}^{\infty}\frac{(-1)^r\cdot(n+r)!}{r!(2n+2r+1)!}z^{2r}$$

$$=(2|z|)^n\cdot(\cos n\theta+j\sin n\theta)\sum_{r=0}^{\infty}\frac{(-1)^r\cdot(n+r)!}{r!(2n+2r+1)!}$$

$$\cdot|z|^{2r}(\cos 2r\theta+j\sin 2r\theta) \tag{付－3}$$

$$j(z)=\frac{1}{z}\left[\sum_{r=0}^{[n/2]}\frac{(-1)^r(n+2r)!}{(2r)!(n-2r)!(2z)^{2r}}\sin\left(z-\frac{n}{2}\pi\right)\right.$$

$$\left.+\sum_{r=0}^{[(n-1)/2]}\frac{(-1)^r(n+2r+1)!}{(2r+1)!(n-2r-1)!(2z)^{2r+1}}\cos\left(z-\frac{n}{2}\pi\right)\right]$$

$$=\left(\frac{x}{|z|^2}-j\frac{y}{|z|^2}\right)\left[\sum_{r=0}^{[n/2]}\frac{(-1)^r(n+2r)!}{(2r)!(n-2r)!(2|z|)^{2r}}\right.$$

$$
\begin{aligned}
&\cdot(\cos 2r\theta-j\sin 2r\theta)\{(\sin x\cdot\cos hy+j\cos x\cdot\sin h\,y)\\
&\cdot\cos(n\pi/2)-(\cos x\cdot\cos hy-j\sin x\cdot\sin hy)\cdot\sin(n\pi/2)\}\\
&+\sum_{r=0}^{[(n-1)/2]}\frac{(-1)^r(n+2r+1)!}{(2r+1)!(n-2r-1)!(2|z|)^{2r+1}}\\
&\cdot\{\cos(2r+1)\theta-j\sin(2r+1)\theta\}\{(\cos x\cdot\cos hy-j\sin x\cdot\sin hy)\\
&\cdot\cos(n\pi/2)+(\sin x\cdot\cos hy+j\cos x\cdot\sin hy)\\
&\left.\cdot\sin(n\pi/2)\}\right] \qquad (付—4)
\end{aligned}
$$

但し，〔　〕はガウスの記号

$$
j_n(z)=\sum_{r=0}^{\infty}(-1)^r\frac{y^{2r}}{(2r)!}j_n^{(2r)}(x)+j\sum_{r=0}^{\infty}(-1)^r\frac{y^{2r+1}}{(2r+1)!}j_n^{(2r+1)}(x) \qquad (付—5)
$$

式（付—1），（付—3）および式（付—4）は $|z|$ と θ を用いて，また，式（付—2）と（付—5）は x と y を用いて $J_n(z)$ と $j_n(z)$ の実数部および虚数部をそれぞれ計算することができる．

付—1—2表示式の基本形

式（付—2）と（付—5）には $y^{2r}/(2r)!$ および $y^{2r+1}/(2r+1)!$ の係数があり，式(付—1）と（付—3）においても類似の係数を有している．いま，これらの係数の基本的性質を知るため，$x^m/m!=K_m$（但し，$x>0$，$m=0,1,2,\cdots$）として K_m の性質を検討すれば，次のようである(23)．

i）$0<x\leqq1$ の場合：$m=0$ のとき $K_m=1$（最大），$m\geqq1$ では m の増大に従い K_m は漸減する．

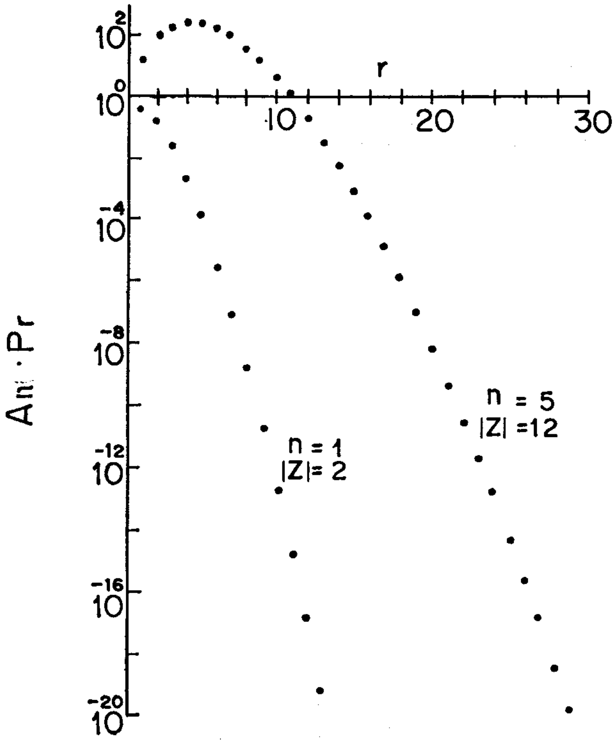
ii）$x>1$ の場合：$m=0$ のとき $K_m=1$，$m\geqq1$ では m の増大に従って漸増し，$m=[x]$（但し，〔　〕はガウスの記号）のとき最大となり，$m>[x]$ では漸減する．

iii）$m\to\infty$ において，$K_m\to0$ となる(33)．

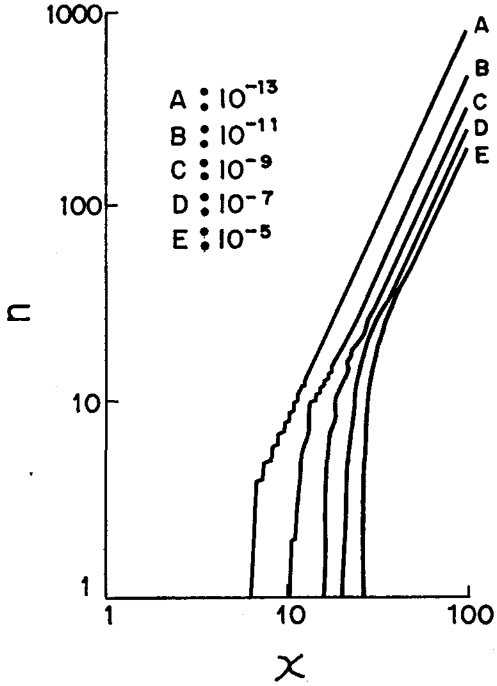
x と m の組合せにより K_m は極度に大きくなることもある．一般に $m=[x]$ のときの K_m を $K_m=M\cdot10^{\eta}$（但し，M は仮数）とすれば，$\eta\simeq0.43[x]$ の関係になる．式（付—1）と（付—3）の係数は n との関連により上記のように単純ではないが，ほぼ同様な傾向である．$J_n(z)$ と $j_n(z)$ を数値計算するときに桁落ちなく必要な有効数字を得るためには，これらの係数の性質と演算桁数との関係を充分考慮する必要がある(25),(26)．

付—1—3　計算精度

$J_n(z)$ と $j_n(z)$ の計算では，z と n により使用する表示式を適切に選択すればよい．まず，$z=x+jy$ において，$y\leqq1$ の場合は式（付—2），（付—5）を用いると便利である(25)．これらの式では $J_n(x)$，$j_n(x)$ の（$2r$）次および（$2r+1$）次の導関数を用いるが，



付図—1　展開各項の $A_n \cdot P_r$



付図—2　$j_n(x)$ の計算精度

付－1－2の K_m の性質から推測できるように，r に対する $J_n(z)$，$j_n(z)$ の収束がはやいため多くの導関数を必要としない．そのため，この計算は実変数に対する $J_n(x), j_n(x)$ の計算精度と同程度の精度の $J_n(z)$，$j_n(z)$ が容易に得られる利点がある[(25),(26)]．

次に，$y>1$ の場合の任意の z，n に対する計算法を述べる．ここでは，式（付－1）と（付－3）は類似の式であり，$j_n(z)$ については式（付－3）と（付－4）とを比較する．そのため，まず，式（付－3）の性質を検討するため，この式を次のように書き変える．

$$j_n(z)=A_n\cdot e^{jn\theta}\sum_{r=0}^{\infty}P_r\cdot e^{j2r\theta} \qquad (付－3)'$$

但し，$A_n=(2|z|)^n$，

$$P_r=\frac{(-1)^r\cdot(n+r)!}{r!(2n+2r+1)!}\cdot|z|^{2r}$$

いま，式（付－3）′について，$n=1$，$|z|=2$ および $n=5$，$|z|=12$ の場合を例にとり，展開各項 r に対する $A_n\cdot P_r$ の値を付図－1に示す．$j_n(z)$ の実数部と虚数部は展開各項に $\exp(j2r\theta)$ を乗じたものの加算と $\exp(jn\theta)$ に比例する．したがって，$j_n(z)$ は $A_n\cdot P_r$ の有効数字の桁数によって計算精度が左右される．ただし，この場合，$\exp(jn\theta)$，$\exp(j2r\theta)$ は任意の有効数字が得られるものとする．一般に，計算機は浮動小数点方式であり，単精度8桁，2倍精度16桁演算（但し，10進法）を行う．付図－1から分かるように，$n=1$，$|z|=2$ での加算は単調に収束するため，例えば2倍精度演算による A_n，P_r，$\exp(jn\theta)$，$\exp(j2r\theta)$ を用い，加算項数を12以上に選べば，計算機の丸め誤差を考慮しても，少くとも14桁以上の精度の $j_n(z)$ が得られる．しかし，$n=5$，$|z|=12$ の場合のように，r について $A_n\cdot P_r$ に極大がある場合は加算において桁落ちが生じ，結果的に $j_n(z)$ の有効数字は減少する．この辺の事情を具体的に示すため $y=0(\theta=0)$，すなわち実数 x に対する $j_n(x)$ の計算例を用いる．$j_n(x)$ の2倍精度計算法は既に確立されている[(31),(32)]．この計算法による $j_n(x)$ の値と，式(付－3)′の $|z|=x(\theta=0)$ における A_n，P_r を2倍精度演算したときの $j_n(x)$ の値との相対誤差が 10^{-13}～10^{-5} となる x と n との関係は付図－2のようになる．付図－2から，式（付－3）を用いた場合，x が小さいほど，また n が大きいほど $j_n(x)$ の計算精度が良くなることが分かる．このことは $j_n(z)$ についても言える事柄である．また，式(付－1）を用いた $J_n(z)$ の計算においても同様なことが言える．したがって，式（付－1）と（付－3）を用いて，$|z|$ が大きく n が小さい $J_n(z)$ と $j_n(z)$ を計算する場合は，$|z|$ に対して充分大きい n（この n は付図－2から予測できる）における $J_n(z)$ と $j_n(z)$ を求めておき，次の漸化式により，順次 n を漸減させて目的の $J_n(z)$ と $j_n(z)$ を得る方法をとればよい[(25)]．

$$\left.\begin{aligned} J_{n-1}(z) &= 2n \cdot z^{-1} \cdot J_n(z) - J_{n+1}(z) \\ j_{n-1}(z) &= (2n+1) \cdot z^{-1} \cdot j_n(z) - j_{n+1}(z) \end{aligned}\right\} \qquad (付－6)$$

式（付－1）と（付－3）の展開各項を2倍精度で計算した場合，$j_n(x)$ の誤差は付図－2のようになるが $J_n(x)$ もほぼ同様になる．例えば，$J_n(x)$，$j_n(x)$ の誤差が 10^{-13} となる x（但し，$x>10$）と n との関係は次のようになる．

式（付－1）の場合：$n \fallingdotseq 0.082x^2+0.0005x-0.01$

式（付－3）の場合：$n \fallingdotseq 0.082x^2+0.004x-1$

また，式（付－6）を用いて $J_{n-1}(z)$ または $j_{n-1}(z)$ の実数部および虚数部を求める場合，実際には次の関係式を用いる．

$$\mathrm{R_e}\begin{Bmatrix} J_{n-1}(z) \\ j_{n-1}(z) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 2n \\ 2n+1 \end{Bmatrix} \frac{x\mathrm{R_e}\begin{Bmatrix} J_n(z) \\ j_n(z) \end{Bmatrix} + y\mathrm{I_m}\begin{Bmatrix} J_n(z) \\ j_n(z) \end{Bmatrix}}{x^2+y^2} - \mathrm{R_e}\begin{Bmatrix} J_{n+1}(z) \\ j_{n+1}(z) \end{Bmatrix}$$

$$\mathrm{I_m}\begin{Bmatrix} J_{n-1}(z) \\ j_{n-1}(z) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 2n \\ 2n+1 \end{Bmatrix} \frac{x\mathrm{I_m}\begin{Bmatrix} J_n(z) \\ j_n(z) \end{Bmatrix} - y\mathrm{R_e}\begin{Bmatrix} J_n(z) \\ j_n(z) \end{Bmatrix}}{x^2+y^2} - \mathrm{I_m}\begin{Bmatrix} J_{n+1}(z) \\ j_{n+1}(z) \end{Bmatrix}$$

このような計算を行っても $J_n(z)$ および $j_n(z)$ の性質から誤差の累積は，ほとんど考慮しなくてもよい[(31),(32)]．

$j_n(z)$ の計算には式（付－4）を用いることもできる．式（付－4）は加算項数が有限であるため計算機に適しており，n が小さく $|z|$ が大きいときに用いて便利である．式（付－4）においても，係数に $(n+2r)!/[(2r)!(n-2r)!(2|z|)^{2r}]$ および $(n+2r+1)!/[(2r+1)!(n-2r-1)!(2|z|)^{2r+1}]$ があり，n と $|z|$ の大きさにより r について極大が存在する場合が多い．また，この式には $\cos hy$, $\sin hy$ を含むため，y が大きいときのこれらの演算精度（後述）を考慮する必要もある．しかし，$n \leq 5$，$|z| \gtrsim 5$ においては式（付－3），（付－6）を用いた計算法より有利である．

以上は，すべて2倍精度演算における $J_n(z)$ と $j_n(z)$ の計算精度について検討した結果である．しかし，実際に必要な $J_n(z)$, $j_n(z)$ の有効数字は単精度（8桁）程度で事足りる場合が多い．したがって，上記の事柄を考慮して2倍程度演算によって得られる $J_n(z)$, $j_n(z)$ の値を用いれば，n, z の大きさに殆んど制限されない実用的な $J_n(z)$, $j_n(z)$ の値が通常の計算機を用いて得られる．

付－1－4　特殊計算法

付－1－3はあくまでも表現式の細部が正確に演算されたものとしての議論であるが，実際の演算では多くの問題がある．次にこれらの主なものについて述べる．

i）指数修正

通常の計算機では演算可能な指数に限界があり，その限界を越えるとオーバフロー，アンダフローを生じ，演算が実行できない．したがって，演算途中において指数がある限定値を越えた場合には指数を修正する必要がある．本研究では，指数が±30を越えるごとに指数のみの記憶回路にこれをプールしておき，演算の修了時点において全指数を集計する方法を用いた．

ii）双曲線関数の計算

双曲線関数は変数が大きくなると極度に大きな値になる．双曲線関数の計算精度は結局指数関数の計算精度で決まる．e^x（但し，$x>0$）を計算する場合，e^x の有効数字を定められた桁数に確保するためには，x の値が大きくなるに従い使用する e の有効桁数も増やす必要がある．しかし，実際問題として任意の x に対して e の有効桁数を追従させることは困難である．また，この場合 x の値がある程度以上になると計算機はオーバフローする．従って，この場合は $x=an+b$（但し，$n=0,1,2,\cdots$）とし，計算機がオーバーフローしない a と b を求め，e^{an}，e^b の仮数部と指数部について演算すればよい．通常の計算機の演算可能な指数範囲は普通±99程度であるため，a と b は230以下であればよい．しかし，前記の指数修正法の適用を考慮すれば，例えば $a=100$ とすると便利である．e の有効数字を16桁，$a=100$，$b=0$ としたときの n に対する演算誤差を後述の多桁演算法により確認した結果，$n=1$ では10^{-14}，$n=10^2$ では 10^{-11}，$n=10^4$ では 10^{-10} 程度の誤差であった．そのため，ここでの計算法は，一般の y の範囲における sinhy, coshy の値として，充分実用的であると考えられる．

iii）多桁演算

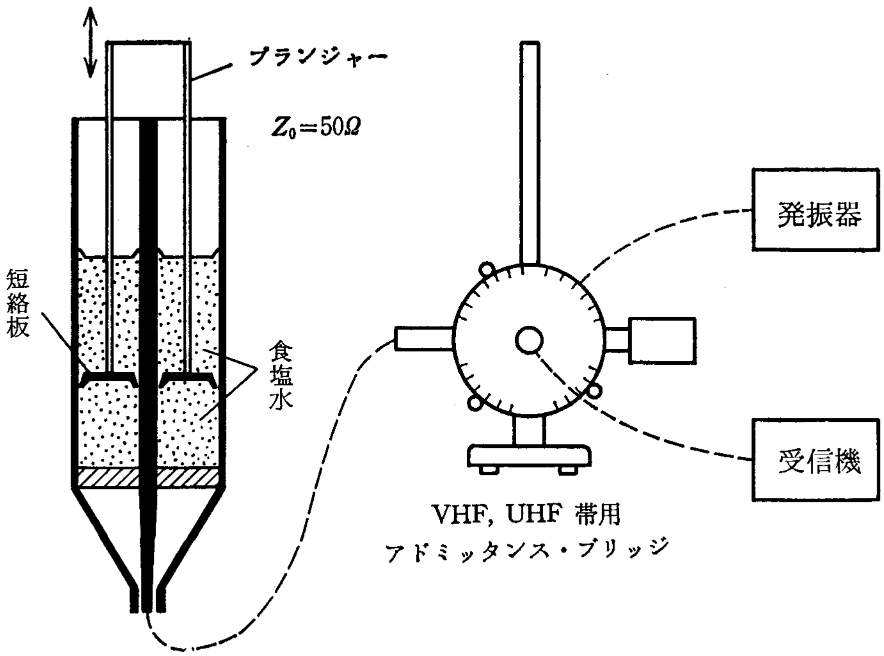
前述のごとく通常の計算機の演算桁数は有限であり，丸め誤差，2進数10進数の変換誤差もある．したがって，通常の演算における有効数字を評価するためには計算機の演算桁数（単精度，2倍精度などの）と無関係な演算プログラムを作成する必要がある．本研究では整数形の配列を用い，配列要素の一つごとに0～9までの数値を入れ，その一つを一つの位としてN個の配列をN桁として取扱う計算法を用いた．また，別の配列に正負の符号と指数を入れ，通常の筆算と同じ要領により，加・減・乗・除の演算を行った．式（付－1）～（付－4）を2倍精度で計算した結果の評価には，配列の要素を100桁で演算したものと比較した．

iv）多進数演算

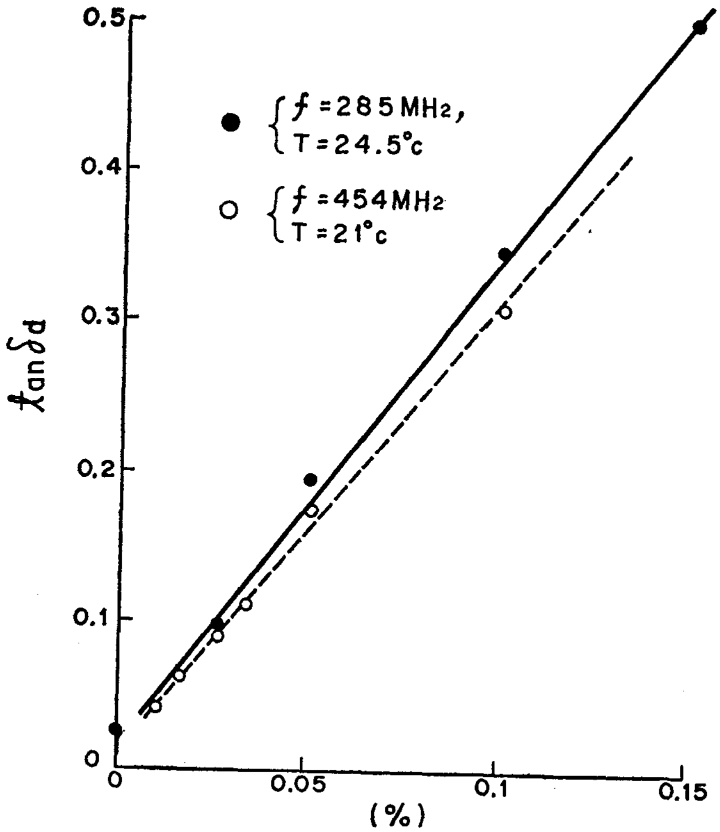
iii）の多桁演算は10進法で説明したが，配列要素には何進法を用いても同じ要領で計算できる．この研究に用いた計算機の容量と10進表示との関係から，本研究では10000進法を用いた．このようにすれば，計算機のメモリーは約1/4になり，演算の時間も約1/16に短縮された．

付 2 ― 食塩水の損失係数

誘電体の損失係数を簡単に変える一つの方法として，水に NaCl（食塩）を溶解させることが考えられる．常温における水の複素比誘電率 $\varepsilon_r=\varepsilon_{r0}(1-j\tan\delta_d)$ は，$\varepsilon_{r0}\simeq 81$ であり，水中の不純物を除去しても $\tan\delta_d\simeq 0.02$ である（但し，$f\lesssim 10^9\mathrm{Hz}$）[29]．本研究の実験ではイオン交換により得た高純度の水に NaCl を溶解させ，これを $\varepsilon_{r0}\simeq 81$, $\tan\delta_d\simeq 0.025\sim 0.5$ の誘電体として用いた．食塩水の VHF，UHF 帯における ε_r の測定方法を付図―3 に示す．被測定食塩水は内径約40mmの同軸円筒（真鍮製，$Z_0=50\Omega$）に入れた．同軸円筒の内部に可変短絡板を設け，約 20cm の同軸ケーブルを介してVHF，UHF帯用のアドミッタンス・ブリッジに接続した．短絡板の位置と NaCl 濃度に対する入力アドミッタンスから，食塩水の ε_{r0} と $\tan\delta_d$ を測定した．その結果，食塩水の ε_{r0} は NaCl 濃度 0 ～0.15%の範囲内で $\varepsilon_{r0}\simeq 81$ であった．それに対し，$\tan\delta_d$ は付図―4 に示すように，NaCl 濃度にほぼ比例して増加した．



付図―3　食塩水の ε_r の測定方法



付図—4　NaCl 濃度に対する $\tan\delta_d$