



Title	標本化定理の拡張とその周波数分析への応用に関する研究
Author(s)	柳田, 益造
Citation	大阪大学, 1978, 博士論文
Version Type	VoR
URL	<a href="https://hdl.handle.net/11094/27710">https://hdl.handle.net/11094/27710</a>
rights	
Note	

*The University of Osaka Institutional Knowledge Archive : OUKA*

<https://ir.library.osaka-u.ac.jp/>

The University of Osaka

標本化定理の拡張とその周波数分析  
への応用に関する研究



1978年1月

柳 田 益 造

標本化定理の拡張とその周波数分析  
への応用に関する研究

1978年1月

柳 田 益 造

## 内 容 梗 概

本論文は、筆者が大阪大学産業科学研究所の研究生として、および大阪大学大学院工学研究科（電子工学専攻）の学生として角所研究室において行なった研究のうち、標準化定理の拡張とその周波数分析への応用に関する研究の成果をまとめたものであり、次の5章をもって構成されている。

第1章序論においては、本研究の目的ならびにその工学上の意義およびこの分野での研究の現状について述べ、本研究の位置づけを行ない、本研究によって得られた諸成果を概説している。

第2章においては、一般標準化定理に基づいたデジタル周波数分析の新しい計算法を2種示し、その補間法について述べている。

従来のデジタル周波数分析では、最高周波数が折返し周波数（サンプリング速度の $1/2$ の周波数）以下の信号だけしか扱われなかったが、ここでは標準化定理を帯域通過型信号にも適用できるように拡張することにより、等間隔標準化を用いて折返し周波数以上の周波数領域の分析が可能であることを示している。また、2重標準化の導入によって、帯域通過型信号の離散的フーリエ変換を計算する方法を示している。これは2組の等間隔標準列間の相対的な時間差のとり方を変えることによって、アナログ信号に対するヘテロダイン方式によるビートダウンと同様の効果が得られることを利用するものである。最後に、標準化関数を離散的な形に書き直し、その主要部だけを利用して離散的フーリエ変換の近似補間値を効率的に計算する方法を提案している。

第3章においては、高速フーリエ変換（FFT）の原理を2重標準化の理論を用いて従来の方法とは異った観点から導き、さらに実数値列に対するFFTアルゴリズムの改良および応用アルゴリズムを示している。

まず第2章で示した帯域通過型信号に対する2重標準列の離散的フーリエ変換の計算法に基づいて、その一つの特珠な場合の計算法としてFFTの原理が導かれることを示している。次に実数値列の離散的フーリエ変換計算法として、標準点数が半分のFFTを同時に2重に行なって、ワークエリアと計算手数を半減させるアルゴリズムを示している。また高速演算アルゴリズムのクロネッカ積による表現法の応用として、2次元FFTの行列表現に基づいてその高速化アルゴリズムを示している。さらにFFTを利用して、 $z$ 平面の原点を中心とした円周上でのラプラス変換に対応する値を効率的に求める方法を提案している。

第4章においては、第2章、第3章の具体的応用をFFTの利用を中心にして例示している。FFTを利用する基本的演算としては、パワースペクトルの計算をはじめとして、相関関数、

コンボリューション、フィルタリング、ケプストラム等があるが、本章ではFFTを以下のような計算ならびに信号処理に応用する手法を示している。

- ( i ) 高次代数方程式の解法
- ( ii ) 神経回路網の時空間応答の数値計算
- ( iii ) 対数尺度周波数軸上の等間隔標本点における離散的周波数特性の計算
- ( iv ) 音響管の共振特性の精密計算
- ( v ) 音のズームング
- ( vi ) 画像のボケの検出
- ( vii ) 行列の特異値分解による時変画像の符号化

第5章においては、本研究で得られた主な成果をまとめ、今後に残された問題と本研究に関連する分野における将来の予測を述べている。

## 関 連 発 表 論 文

- [1] M. Yanagida and O. Kakusho: "Frequency range extension of FFT by utilizing the fold-over effect", Memoirs of Inst. of Sci. and Ind. Res., Osaka Univ., 31, pp. 5-12 (1974).
- [2] 柳田, 角所: "標本化定理の一般化とその応用", 信学論(A), 57-A, 11, pp. 826-833 (1974-11).
- [3] 柳田, 角所: "離散的ラプラス変換", 電気関係学会関西支部連合大会, G15-1 (1974-11).
- [4] 柳田, 角所: "2重標本化によるデジタル周波数分析", 信学会, 電気音響研資, EA74-46 (1975-01).
- [5] 柳田, 角所: "離散的双直交変換", 信学会, 電気音響研資, EA75-53 (1976-01).
- [6] M. Yanagida and O. Kakusho: "Discrete Fourier transform based on double sampling and its applications", Conference Record of 1976 IEEE International Conference on Acoustics, Speech and Signal Processing, Philadelphia, 4-7, pp. 141-144 (1976-04).
- [7] 柳田, 角所: "2重標本化に基づいた離散的フーリエ変換の計算法とその応用", 信学論(A), J59-A, 6, pp. 441-448 (1976-06).
- [8] M. Yanagida, O. Kakusho, I. Inoue and S. Nishiyama: "Evaluation of the half-power band-width of acoustic tubes", Trans. IECE, Japan, E59, 9, pp. 15-16
- [9] 柳田, 角所: "高次代数方程式のFFTによる解法の可能性", 信学論(A), J59-A, 10, pp. 880-882 (1976-10).
- [10] 柳田, 角所: "神経回路網の離散的定式化", 音響学会講演論文集, 2-2-6 (1976-10).
- [11] 柳田, 角所: "帯域通過型信号の離散スペクトルの対数尺度周波数軸上への変換", 信学会, 電気音響研資, EA76-62 (1977-01).
- [12] M. Yanagida and O. Kakusho: "Logarithmic-frequency-scale representation of discrete frequency spectrum of a band-pass signal", 9th International Congress on Acoustics, Madrid, R-18, p. 864 (1977-07).

- [13] 滑川, 村田, 角所, 柳田他: “ハイブリッドIC開発技術システム等の調査研究報告書”, 関西電子工業振興センター, ハイブリッドIC研究会(1977-10).
- [14] 柳田, 角所: “多点相関によるマイクロホンスーミング”, 信学会, 電気音響研資, EA77-30(1977-10).
- [15] 柳田: “ICA報告(信号処理部門)”, 音響学会誌, 33, 11, pp. 650-651 (1977-11).
- [16] 柳田, 角所: “実数値列の複素化2重FFT”, 信学論(D), J60-D, 11, pp. 1010-1011(1977-11).
- [17] 柳田, 角所: “特異値分解による時変画像の符号化”, 信学論(A), 投稿中.

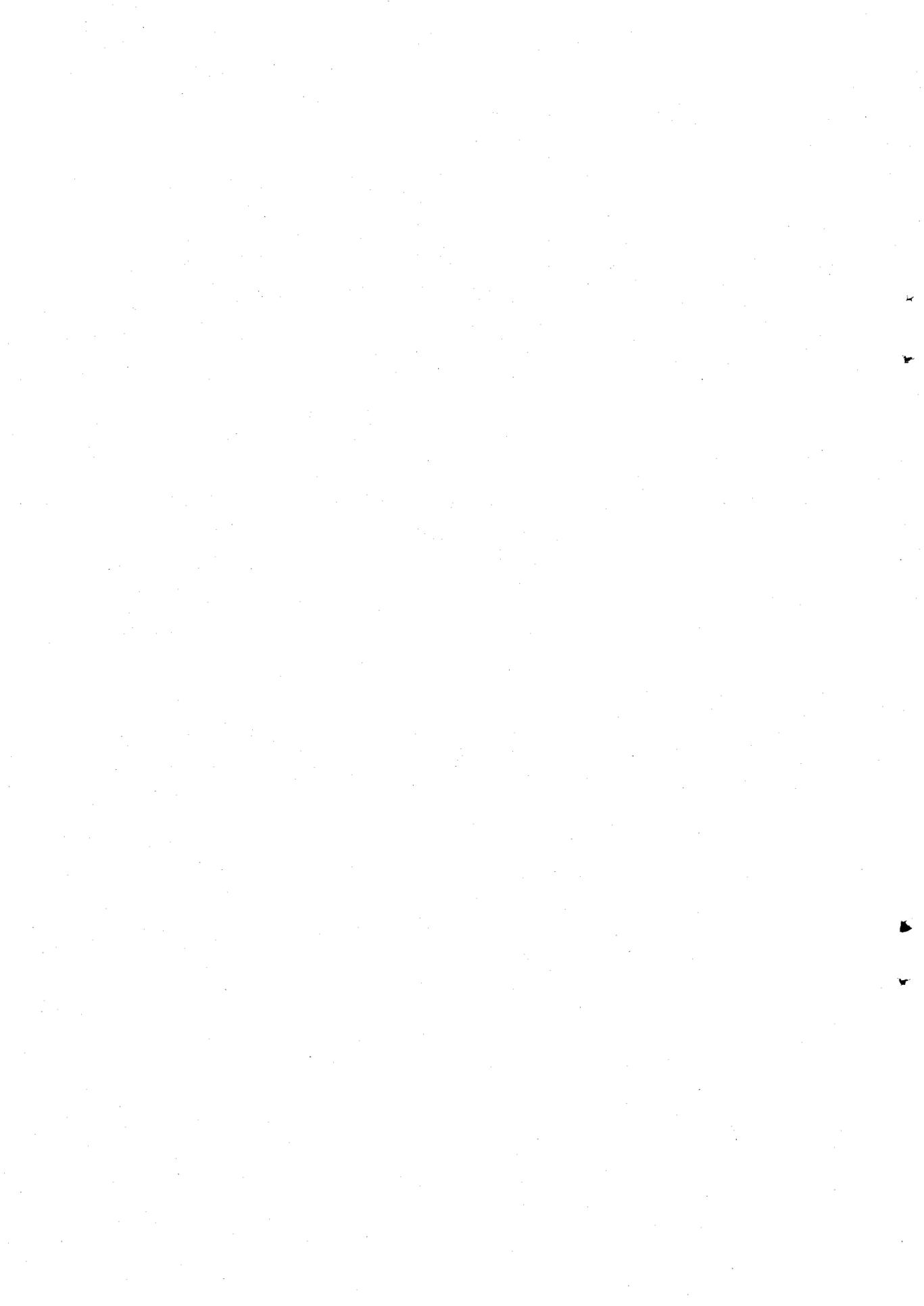
# 標本化定理の拡張とその周波数分析 への応用に関する研究

## 目 次

内 容 梗 概		i
関連発表論文		iii
第 1 章 序 論		1
第 2 章 一般標本化定理を応用した周波数分析法		5
2.1 緒 言		5
2.2 折返しを利用したディジタル周波数分析法		6
2.2.1 ラプラス変換と $z$ 変換の関係		6
2.2.2 写像 $z = e^{sT}$ による $s$ 平面と $z$ 平面の対応関係		7
2.2.3 折返しに対する解析的解釈		7
2.2.4 標本化定理の拡張		11
2.2.5 折返しを利用したディジタル周波数分析法		13
2.2.6 応 用		14
2.3 一般標本化定理に基づく 2 重標本化の導入		14
2.3.1 帯域通過型信号に対する一般標本化定理		15
2.3.2 一般標本化定理の離散的表現		18
2.3.3 直交系による 2 重標本化		20
2.3.4 双直交系による 2 重標本化		23
2.4 2 重標本列の離散的フーリエ変換		26
2.4.1 2 重標本列の離散的フーリエ変換の 2 元連立 1 次 方程式への定式化		26
2.4.2 離散的フーリエ変換の計算法		33
2.4.3 計算例		34
2.4.4 応 用		37

2.5	離散的フーリエ変換の補間法	38
2.5.1	離散的周波数スペクトルの補間公式	39
2.5.2	原データへの0付加による補間法	40
2.5.3	打ち切り型標本化関数による近似補間法	42
2.6	結 言	45
第 3 章	2重標本化に基づいた高速演算アルゴリズム	47
3.1	結 言	47
3.2	2重標本列の離散的フーリエ変換の計算法に基づく高速 フーリエ変換 (FFT) アルゴリズム	47
3.2.1	高速フーリエ変換の原理の誘導	47
3.2.2	高速フーリエ変換アルゴリズム	49
3.3	実数値列に対する高速フーリエ変換アルゴリズム	51
3.3.1	等間隔標本値列の離散的フーリエ変換計算法	51
3.3.2	2組の実数値列の同時FFT	52
3.3.3	実数値列の複素化2重FFT	54
3.4	2次元フーリエ変換の高速化	54
3.4.1	2次元離散的フーリエ変換の行列表示	55
3.4.2	変換行列のクロネッカ積への分解	57
3.4.3	2次元FFTとその高速化	59
3.5	離散的ラプラス変換の高速演算	60
3.5.1	離散的ラプラス変換	61
3.5.2	離散的ラプラス変換と離散的フーリエ変換, チャープス変換の関係	63
3.6	結 言	65
第 4 章	高速フーリエ変換の応用	67
4.1	結 言	67
4.2	高次代数方程式の解法	67
4.2.1	定式化	67

4.2.2	数値計算法	68
4.2.3	検 討	70
4.3	フーリエ変換による神経回路網の解析	71
4.3.1	定式化	72
4.3.2	モデルの解析	72
4.3.3	数値計算法	74
4.4	音響信号処理への応用	74
4.4.1	インパルス応答法による周波数特性の計算	75
4.4.2	音響管の共振特性の精密計算	77
4.4.3	音のズームング	83
4.5	画像信号処理への応用	89
4.5.1	2次元離散的フーリエ変換によるボケの検出	89
4.5.2	特異値分解による時変画像の符号化	91
4.6	結 言	96
第 5 章	結 論	97
	謝 辞	99
	参 考 文 献	101
	付 録	107



# 第 1 章 序 論

近年、計算機による音声の分析・認識・理解ならびに画像の処理・認識等の技術が進展してきたが、その背景には高速フーリエ変換 (Fast Fourier Transform : FFT) アルゴリズムの開発<sup>(1)</sup>が大きく作用している。FFTが開発される以前の周波数分析は、専らアナログ装置に頼っていたようであるが、FFTの出現以来、周波数分析以外に相関関数・コンボリューション等までがFFTによって計算されるようになってきた。FFTは $N$ 点の標本点に対して $N^2$ の手数を要した離散的フーリエ変換 (Discrete Fourier Transform : DFT) の乗算回数を $2N \log_2 N$ に減少させるもので、これによりデジタル周波数分析が飛躍的に効率良く行なえるようになった。しかしその分析周波数帯域はNyquistの標本化定理<sup>(2)</sup>により折返し周波数 (サンプリング速度の $\frac{1}{2}$ ) 以下に制限されたままであった。

本研究は、折返し周波数以上の周波数領域のデジタル周波数分析法の開発を主題としたものであり、その副産物としてデジタル周波数分析の2, 3の高速化の方法についても述べている。

現実の物理的信号をデータとして計算機へ取り込む際には必ず標本化の細かさに注意を払う必要がある。標本化の細かさには二つの意味があり、一つは1標本点あたりの量子化レベル数であり、他の一つは標本点の密度、言い換えると標本間隔あるいはサンプリング速度である。量子化レベル数については、信号のとり得る値の統計的性質がわかれば適当に量子化レベルを設定することができる。また標本点の密度については、標本化定理からの要請で、信号に含まれる最高周波数の2倍以上のサンプリング速度が要求されるとされていた。ところが、信号が帯域通過型の場合にはサンプリング速度は必ずしも最高周波数の2倍以上である必要はなく、これまでも一般に帯域幅の2倍以上であれば十分なのではないかと漠然と考えられていた。そして周波数領域での折返しを考慮しさえすれば、ある種の帯域通過型信号に対しても帯域幅の2倍のサンプリング速度による等間隔標本化が適用可能であろうということも考えられていた。しかし、連続系と離散系とを結びつける写像 $z = e^{sT}$  ( $T$ : 標本間隔) に基づく $s$ 平面と $z$ 平面との対応関係が解説論文<sup>(3)</sup>の中ですら必ずしも正確には説明されていないという状態である。一方、標本化に関しても、その理論的基礎となっている標本化定理は、染谷<sup>(4)</sup>、Shannon<sup>(5)</sup>以後種々の拡張・一般化がなされた<sup>(6~19)</sup>が、その拡張・一般化を実用的観点からデジタル周波数分析にまで応用した研究はこれまでに見あたらない。

本論文は、写像 $z = e^{sT}$ による $s$ 平面と $z$ 平面の対応関係に対する明確な説明を与え、それに基づいて等間隔標本化による帯域通過型信号のデジタル周波数分析法に理論的保証を与えて

おり、また磯道によって一般化された標本化定理<sup>(18)</sup>に基づいて2重標本化を導入し、帯域通過型信号の離散的直交変換および離散的双直交変換の方法を示して、デジタル周波数分析の計算法を具体的に示している、低域通過型信号のDFT計算法については、1965年にJ. W. Cooley<sup>(1)</sup>らによって前述のFFTアルゴリズムが開発されているが、本論文ではそのFFTアルゴリズムの原理が、帯域通過型信号の2重標本列のDFT計算法の一つの特例として直接導かれることを示し、またその改良・拡張・応用について論じている。

本論文の構成は以下のとおりである。

第2章においては、連続系と離散系を結ぶ写像 $z = e^{sT}$ による $s$ 平面と $z$ 平面の対応関係を明確にし、それに基づいて等間隔標本化に対する標本化定理を拡張し、その応用として周波数領域での折返しを利用した帯域通過型信号のデジタル周波数分析法に理論的保証を与えている。さらに一般の帯域通過型信号に対する一般標本化定理によって導入された2重標本化に従った2重標本列のDFTおよび離散的双直交変換の計算法を示し、最後にDFTの補間法を示している。

第3章においては、等間隔標本列を2重標本列の特殊な場合とみなすことにより、前章における帯域通過型信号のDFT計算法から直接にFFTアルゴリズムの原理が導かれることを示している。次に実数値列のDFT計算法として、標本点数が半分のFFTを1回のFFT操作によって同時に実行し、高速化とワークエリアの節約を計るアルゴリズムを示している。また、画像信号のDFTを求める方法として、2次元DFTの行列表現に基づき2次元のFFTの高速化とワークエリア節約の方法を示している。さらに離散的ラプラス変換として、FFTを利用して、 $z$ 平面の原点を中心とする円周上でのラプラス変換に対応する値を効率的に求める方法を示している。

第4章においては、以下のようなFFTのデジタル信号処理への応用例を示している。

- (i)  $z$ 平面上での零点探査による高次代数方程式の解法
- (ii) 隣接ニューロンへの結合がある神経回路網の時空間応答の数値計算
- (iii) インパルス応答法による周波数特性の計算とその周波数軸尺度の変換
- (iv)  $z$ 平面上での極の平行移動による共振特性の精密計算法
- (v) 周波数領域での連立1次方程式への定式化による音のズームング
- (vi) 2次元DFTによる画像のボケの検出
- (vii) FFTを用いて行列の固有多項式を求める方法を利用した特異値分解

最後に第5章で、本研究で得られた主な成果をまとめ、今後に残された問題と将来の予測を述べる。

図1. 1は本論文の内容の相互の関連を図に示したものである。図中の( )内はその項目の原著者を示す。〔 〕内の数字は関連発表論文の論文番号を示す。

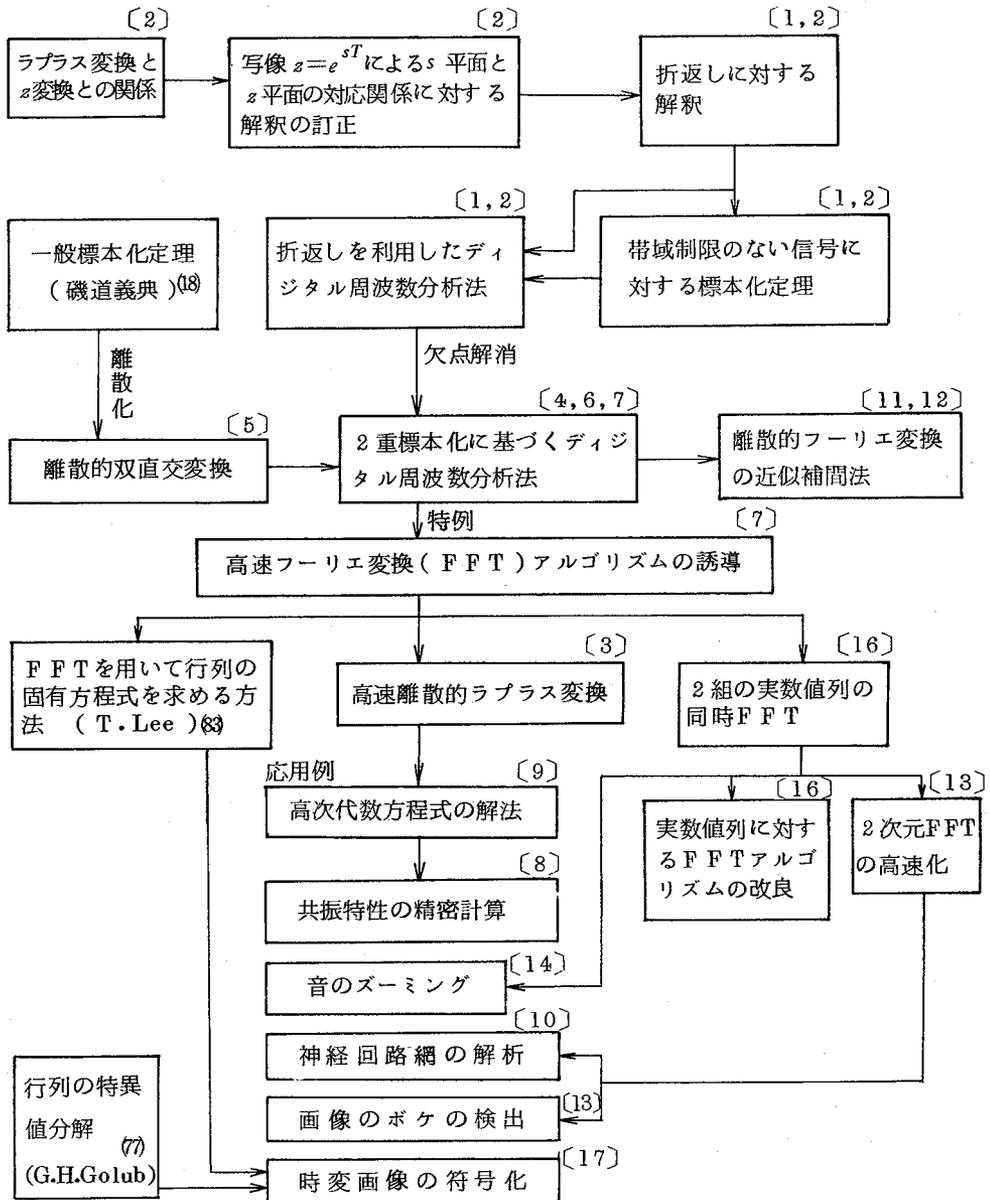
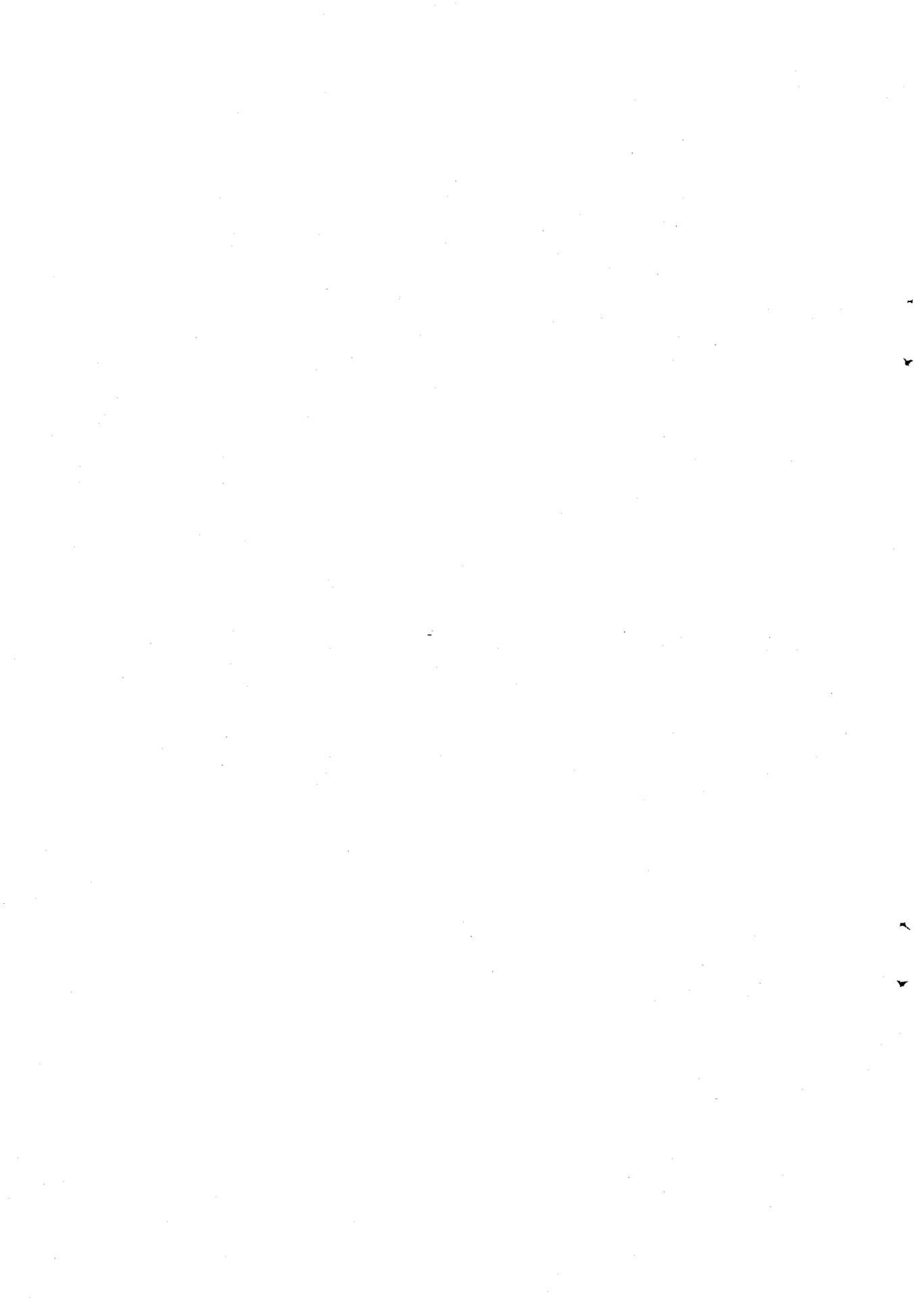


図1. 1 本研究の内容の関連図



## 第2章 一般標本化定理を応用した周波数分析法

### 2.1 緒言

本章では、帯域通過型信号のデジタル周波数分析法として、周波数軸上の折返しを利用した方法<sup>(20~22)</sup>ならびに、一般標本化定理<sup>(18)</sup>に基づく2重標本化によって得られる2重標本列の離散的フーリエ変換(Discrete Fourier Transform: DFT)による方法<sup>(23~25)</sup>について論じる。

従来のデジタル周波数分析では次のShannonの標本化定理<sup>(5)</sup>によって、信号に含まれる最高周波数の2倍以上のサンプリング速度が要求されていた。

[Shannonの標本化定理] “時間関数 $g(t)$ が $f_c$  Hz以上の周波数成分を含まないときは $1/2 f_c$  秒ごとの時点における $g(t)$ の値からすべての $g(t)$ が一意的に決定される”。

ところが、信号が帯域通過型の場合にはサンプリング速度は必ずしも最高周波数の2倍以上である必要はなく、これまでも一般に、帯域幅の2倍以上であればよいのではないかと漠然とは考えられていた。しかしその理論的根拠は明らかにされず、またそのような周波数分析の具体的な方法も示されてはいなかった。

2.2節では、連続系と離散系とを結ぶ写像 $z = e^{sT}$  ( $T$ : 標本間隔,  $s$ : 複素周波数,  $z$ : シフトオペレータ)による $s$ 平面と $z$ 平面の対応関係を明らかにし、周波数軸上の折返しに明確な説明を与え、それに基づいて等間隔標本化による折返し周波数以上の周波数領域のデジタル周波数分析法に理論的保証を与える。ただしこの方法による分析法には帯域の位置に関する条件があり、 $\xi \triangleq (f_u + f_l) / (f_u - f_l)$  ( $f_u, f_l$ : 帯域の上, 下限周波数)が奇数でなければ適用できない。

等間隔標本化によるデジタル周波数分析では折返し周波数の整数倍の周波数付近の分析が不可能であるが、この欠点を除くために2.3節では、一般標本化定理(磯道)<sup>(18)</sup>に基づく2重標本化を導入する。一般標本化定理により、帯域通過型信号に対しては適当な2重標本化を行なうことによって補間公式が与えられることが保証されているが、2.4節ではこれをデジタル周波数分析に応用する方法を示す。すなわち、2重標本化を用いると帯域の位置にかかわらず一般に帯域通過型信号は双直交変換ができ、特に上記の $\xi$ が整数のときは直交変換が可能となるので、このことを利用して、 $\xi$ が整数となるような帯域通過型信号のDFTを2重標本列から計算する方法を示す。

2.5節では、DFTの補間公式とその近似計算法を示す。

## 2.2 折返しを利用したデジタル周波数分析法

本節では、まずラプラス変換と $z$ 変換の関係を述べ、その際の写像 $z = e^{sT}$ による $s$ 平面と $z$ 平面の対応関係を明らかにし、周波数軸上の折返しに明確な説明を与える。次にそれに基づいて、等間隔標本化による帯域通過型信号のデジタル周波数分析法に理論的保証を与える。本節は、折返し周波数以上の周波数成分を含む信号を離散系で扱うことができるという啓示的な内容をはじめて示したものである。

### 2.2.1 ラプラス変換と $z$ 変換の関係

ここでは、ラプラス変換と $z$ 変換の間関係を複素周波数平面全域で考察する。 $t < 0$ で0となる実因果関数 $q(t)$ を標本間隔 $T$ で標本化して得られる標本値を $q_k$ とする。つまり

$$q_k = q(kT) \quad (2.2.1)$$

とする。このとき $q(t)$ のラプラス変換 $\mathcal{L}(s)$ と $q_k$ の $z$ 変換 $G(z)$ は次の関係で結ばれている(付録A)。(28)

$$G(z) \Big|_{z=e^{sT}} = \frac{1}{T} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \mathcal{L}\left(s + j \frac{2\pi}{T} m\right) \quad (2.2.2)$$

$$\text{ただし } s = \sigma + j\omega \quad (2.2.3)$$

ここではフーリエ変換とDFTとの関係を表わす式(付録B)

$$G(\omega) = \frac{1}{T} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \mathcal{L}\left(\omega + \frac{2\pi}{T} m\right) \quad (2.2.4)$$

との対応をつけるために、両側ラプラス変換、両側 $z$ 変換を用いなければならないが、 $q(t)$ が因果関数である場合には、それぞれ片側ラプラス変換、片側 $z$ 変換を用いたのと同じことになる。一方 $q(t)$ が因果関数でない場合には、一般には両側ラプラス変換、両側 $z$ 変換は、発散してしまう(付録C)。従ってラプラス変換と $z$ 変換の関係を全複素平面上で論じようとする、本小節の冒頭に記したように $q(t)$ は因果関数としなければならない。ただし、時間軸の原点を有限長だけ移動することによって因果関数とみなすことができる関数は許容される。

式(2.2.2)は、 $s$ 平面上で虚軸方向に $2\pi/T$ ずつ離れた点における $G(s)$ の値の総和の $1/T$ が、 $z$ 平面のただ一つの対応点における $G(z)$ の値に等しいことを示している。

### 2.2.2 写像 $z = e^{sT}$ による $s$ 平面と $z$ 平面の対応関係

式(2.2.2)における  $s$  平面と  $z$  平面の関係は、単純に解釈すると、 $s$  平面から  $z$  平面への写像  $z = e^{sT}$  によって、 $s$  平面の実軸と平行な、幅が  $2\pi/T$  の帯状の部分の各々がそれぞれ  $z$  平面へ写って、関数値は  $z$  平面上でそれらが全部加算されてその  $1/T$  がとられるということになる(例えば、L.R.Rabinerらの解説<sup>(8)</sup>でもこのように説明されている)。しかし解析的に考えると、 $g(t)$ が実関数の場合には、ラプラス変換、 $z$ 変換ともにそれぞれ  $s$  平面、 $z$  平面の横軸の上下で複素共役な値をとるので、上記の対応関係は次のように解釈するのがより自然であり、また合理的である。すなわち、 $\mathcal{G}(s)$ と  $G(z)$ の間の複素平面上での関係は、写像  $z = e^{sT}$  によって  $s$  平面が実軸と平行な、幅が  $\pi/T$  の帯状の部分に分かれて、その互いに共役な1対が1枚の全  $z$  平面へ写像されると考えるのである。具体的にいうと、式(2.2.3)とおいたとき、 $s$  平面の

$$m \frac{\pi}{T} \leq |\omega| < (m+1) \frac{\pi}{T} \quad m = 0, 1, 2, \dots \quad (2.2.5)$$

の一つの  $m$  に対応する部分が1対になって1枚の全  $z$  平面へ写像されると考える。このとき、 $m$  が偶数の場合には、 $s$  平面の上半面にある帯状の部分が  $z$  平面の上半面全体に写り、 $s$  平面の下半面にある帯状の部分が  $z$  平面の下半面全体に写る。 $m$  が奇数の場合にはこれと逆になる。図2.2.1は、 $s$  平面上で互いに共役な関係にある1対の帯状の領域が、 $m$  が偶数か奇数かによって  $z$  平面へどのように写像されるかを示したものである。

### 2.2.3 折返しに対する解析的解釈

式(2.2.2)で形式的に  $s = j\omega$  とおくと次式が得られる。

$$G(z) \Big|_{z=e^{j\omega T}} = \frac{1}{T} \sum_{m=-\infty}^{\infty}$$

$$\mathcal{G}\left(j\left(\omega + \frac{2\pi}{T}m\right)\right) \quad (2.2.6)$$

この右辺は式(2.2.4)の右辺と本質的に同一である。一般にDFTによって得られる結果は式(2.2.4)の左辺の標本値

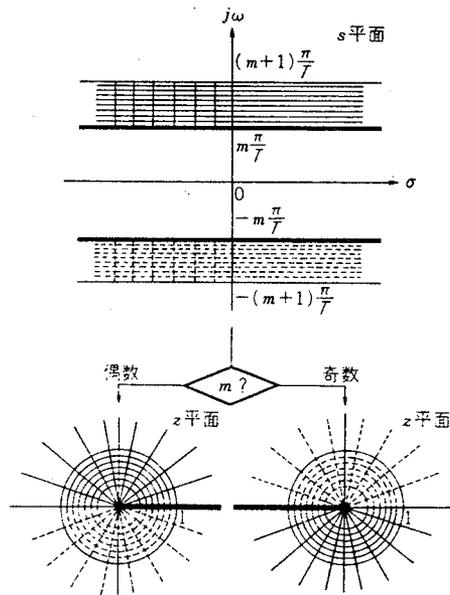


図2.2.1 写像  $z = e^{sT}$  による  $s$  平面と  $z$  平面との対応関係

であるが、これは同時に式(2.2.6)の左辺の標本値ともなっている。そこで、以後DFTは $z$ 変換で $z = e^{j\omega T}$ とおいたものの標本値列であると考えことにする。

式(2.2.6)の左辺は $z$ 平面の単位円上の関数であり、右辺は $s$ 平面の虚軸上に $2\pi/T$ の間隔で並んだ点での関数値の和の $1/T$ であるので、 $z$ 平面の単位円上の $G(z)$ が求まったとしても、それによって $z$ 平面の虚軸上の $\mathcal{S}(j\omega)$ を決定することはできない。その理由は、 $s$ 平面から $z$ 平面への写像 $z = e^{j\omega T}$ によって $z$ 平面の

単位円と $s$ 平面の虚軸が1対多対応になっているからである。 $z = e^{j\omega T}$ によって、

$s$ 平面の虚軸の $m\pi/T \leq \omega < (m+1)\pi/T$

の部分は $m$ が偶数のときは $z$ 平面の単位円の上半分に、奇数のときは下半分に写り、 $-(m+1)\pi/T < \omega \leq -m\pi/T$

の部分は $m$ が偶数のときは $z$ 平面の単位円の下半分に、奇数のときは上半分に写る。図2.2.2は $m=0, 1, 2, \dots$

についてのこのような対応関係を示している。ただし $z$ 平面の単位円は実際は一つであるが、説明の便宜上ここでは三つの同心円として表示されている。このように $z$ 平面上で単位円が多重に写像されることによって、もし $\mathcal{S}(j\omega)$ が単一の $m$ の範囲外で値を持てばそれが $G(z)$ の上に折返し誤差となって現われるのである。

例えば、図2.2.3(a)のような $s$ 平面の虚軸上の関数 $\mathcal{S}(j\omega)$ を、写像 $z = e^{j\omega T}$ によって $z$ 平面へ写すと、その結果 $z$ 平面の単位円上で(b)の破線のように重なり合う部分が生じて、 $G(z)$ としてはこれらが加算された形となり、これを周波数軸上に引延ばすと(c)の実線のようになり、これは丁度 $\mathcal{S}(j\omega)$ を $\omega = \pm\pi/T$ で折返して加算したようになっている(正確にいうと一方の複素共役との加算)。これがいわゆる“折返し(fold-over)”であり、折返し誤差の原因である。ところが、ここで $s$ 平面の虚軸上の $\mathcal{S}(j\omega)$ を $0 \leq |\omega| < \pi/T$ の部分と $\pi/T \leq |\omega| < 2\pi/T$ の部分に分離して、それぞれの1対ずつを独立に写像 $z = e^{j\omega T}$ によって $z$ 平面上へ写すと、各々の関数は単位円上で重ならなくなり、それを直線の周波数軸上へ引延ばすと、それぞれ(d),(e)のようになる。これらの図で(d)の横軸は普通の周波数軸であるが、(e)の横軸は両端を $\pm\pi/T$ として中央の値 $\pm$

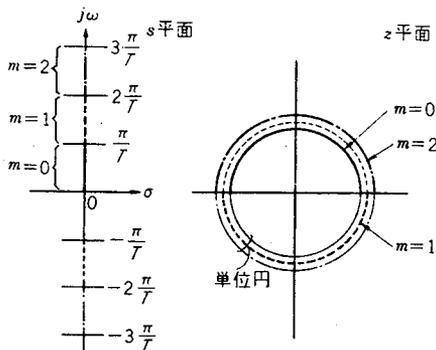
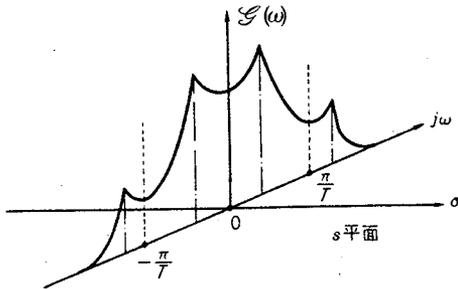
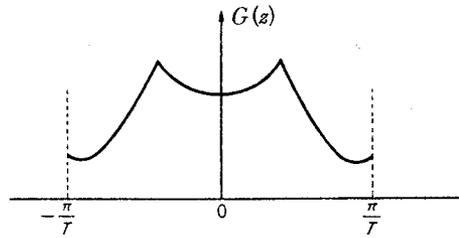


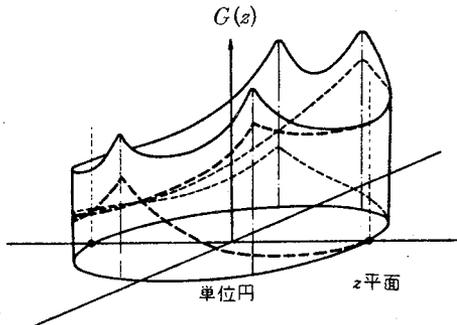
図2.2.2 写像 $z = e^{j\omega T}$ による $s$ 平面の虚軸と $z$ 平面の単位円との対応関係



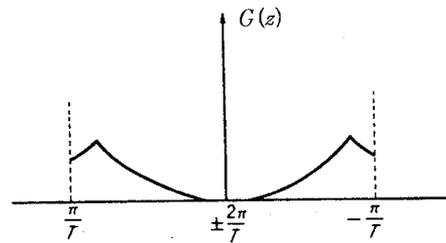
(a)  $s$  平面の虚軸上の  $\mathcal{G}(s)$



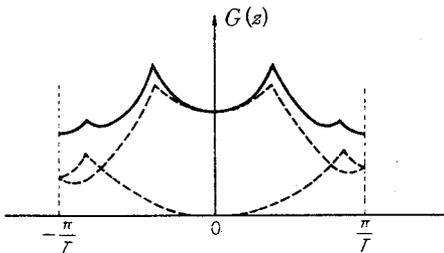
(d)  $\mathcal{G}(s)$  の  $0 \leq |\omega| < \pi/T$  の部分を  $z$  平面の単位円上に写し、直線上の関数として書き直した  $G(z)$



(b)  $\mathcal{G}(s)$  から  $z = e^{j\omega T}$  によって  $z$  平面の単位円上に写された  $G(z)$



(e)  $\mathcal{G}(s)$  の  $\pi/T \leq |\omega| < 2\pi/T$  の部分を  $z$  平面の単位円上に写し、直線上の関数として書き直した  $G(z)$



(c) 直線に書き直された  $G(z)$

図 2.2.3

$s$  平面の虚軸上の  $\mathcal{G}(s)$  と  $z$  平面の単位円上の  $G(z)$  との対応関係

$2\pi/T$  に向って折返された周波数軸とみなさなければならない。上述のことがわかれば、一般に  $|\omega| > \pi/T$  の部分については  $\pi/T$  ごとに周波数軸を折返して、折返し誤差を積極的に利用することによって、いかなる周波数帯域の信号でも適当な帯域濾波を行ない、その標本列の DFT を求めることによってデジタル周波数分析を可能にすることができる。

DFT における折返し誤差は、以上のように写像  $z = e^{j\omega T}$  による  $s$  平面の虚軸上の関数  $\mathcal{F}(\omega)$  と  $z$  平面の単位円上の関数  $G(z)$  との間の対応関係により説明されるが、一方これに対する簡単な物理的解釈として次のような説明が考えられる。

角周波数が  $\omega_1, \omega_2$  の二つの等振幅の正弦波を標本化する場合を考える。  $\omega_1$  と  $\omega_2$  及びサンプリング間隔  $T$  の間に、  $m$  を整数として

$$\omega_1 - \omega_2 = m \frac{2\pi}{T} \quad (2.2.7)$$

なる関係があるときは、

$$\sin \omega_1 kT = \sin \omega_2 kT \quad (2.2.8)$$

なる関係が成立するので、これらの正弦波は  $t = 0$  での位相が等しいとすると、すべてのサンプリング点  $t = kT$  において互いに全く同一の値をとる。同様に、

$$\omega_1 + \omega_2 = m \frac{2\pi}{T} \quad (2.2.9)$$

なる関係があるときは、

$$\sin \omega_1 kT = -\sin \omega_2 kT \quad (2.2.10)$$

なる関係が成立するので、これらの正弦波は  $t = 0$  で逆位相になっていると、すべてのサンプリング点  $t = kT$  において互いに全く同一の値をとる。従って、式(2.2.7)あるいは式(2.2.9)の関係がある正弦波をサンプリング間隔  $T$  で標本化することによって得られる標本列は全標本点で同一の値をとるので、それらの離散的フーリエ変換も全く同一になり、これらの正弦波を周波数軸上で区別することはできない。

これが折返し誤差あるいは別名誤差と呼ばれるものの物理的な意味である。

[例] 図2.2.4に(a)4kHz, (b)6kHz, (c)14kHzの等振幅の正弦波が10k サンプル/秒のサンプリング速度の場合には、適当な位相条件の下で

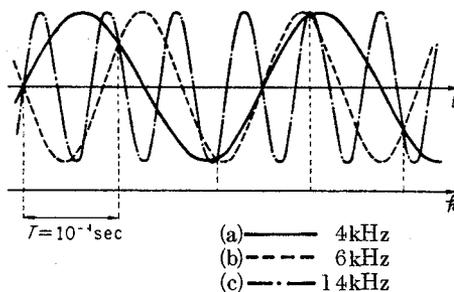


図2.2.4 折返し誤差の物理的説明

はすべての標本点で同一の値をとることを図示する。参考までに、これらの正弦波の角周波数  $\omega_a, \omega_b, \omega_c$  とサンプリング間隔  $T$  との間には、

$$\omega_a + \omega_b = \frac{2\pi}{T}$$

$$\omega_b + \omega_c = 2 \times \frac{2\pi}{T}$$

$$\omega_c - \omega_a = \frac{2\pi}{T}$$

なる関係があることを記しておく。

#### 2.2.4 標本化定理の拡張

2.2.3 で述べたことに基づき、帯域制限されない信号に対する標本化定理を次のようにして導くことができる。

実因果関数  $q(t)$  は絶対可積分で Dini の条件<sup>(27)</sup> を満たすとし、 $q(t)$  のフーリエ変換を  $\mathcal{G}(\omega)$  と書くことにすると、 $q(t)$  はその逆変換として

$$q(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{G}(\omega) e^{j\omega t} d\omega \quad (2.2.11)$$

と表わされる。ここで  $T (> 0)$  を時間領域における任意の標本間隔として、 $\mathcal{G}(\omega)$  は式(2.2.6)の右辺が収束するものであるという条件を加えておく。さらに、 $\mathcal{G}_m(\omega)$  を  $m = 0, 1, 2, \dots$  に対して

$$\mathcal{G}_m(\omega) = \begin{cases} \mathcal{G}(\omega) & m \frac{\pi}{T} \leq |\omega| < (m+1) \frac{\pi}{T} \\ 0 & \text{その他} \end{cases} \quad (2.2.12)$$

と定義しておく、 $\mathcal{G}(\omega)$  は

$$\mathcal{G}(\omega) = \sum_{m=0}^{\infty} \mathcal{G}_m(\omega) \quad (2.2.13)$$

と書けるので、式(2.2.11)は次のように変形される。

$$q(t) = \frac{1}{2\pi} \sum_{m=0}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{G}_m(\omega) e^{j\omega t} d\omega \quad (2.2.14)$$

これはさらに、 $\mathcal{G}_m(\omega)$  の定義によって積分範囲を次のように分割できる。

$$q(t) = \frac{1}{2\pi} \sum_{m=0}^{\infty} \left( \int_{-(m+1)\frac{\pi}{T}}^{-m\frac{\pi}{T}} + \int_{m\frac{\pi}{T}}^{(m+1)\frac{\pi}{T}} \right) \mathcal{G}_m(\omega) e^{j\omega t} d\omega \quad (2.2.15)$$

$\mathcal{G}_m(\omega)$  は式(2.2.15)の各々の積分範囲以外では0であるから、同式の $\mathcal{G}_m(\omega)$ を

$\sum_{l=-\infty}^{\infty} \mathcal{G}_m(\omega + \frac{2\pi}{T}l)$  で置換えてもかまわない。従って

$$q(t) = \frac{1}{2\pi} \sum_{m=0}^{\infty} \left( \int_{-(m+1)\frac{\pi}{T}}^{-m\frac{\pi}{T}} + \int_{m\frac{\pi}{T}}^{(m+1)\frac{\pi}{T}} \right) \sum_{l=-\infty}^{\infty} \mathcal{G}_m(\omega + \frac{2\pi}{T}l) e^{j\omega t} d\omega \quad (2.2.16)$$

ここで、 $\mathcal{G}_m(\omega)$  のフーリエ逆変換を  $q_m(t)$  とし、 $q_m(t)$  を標本間隔  $T$  で標本化して得られる標本値列を  $q_m(kT)$ 、その両側  $z$  変換を  $G_m(z)$  とすると、式(2.2.6)により

$$G_m(z) \Big|_{z=e^{j\omega T}} = \frac{1}{T} \sum_{l=-\infty}^{\infty} \mathcal{G}_m(\omega + \frac{2\pi}{T}l) \quad (2.2.17)$$

が成立し、また  $G_m(z)$  の定義より

$$G_m(z) \Big|_{z=e^{j\omega T}} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} q_m(kT) e^{-j\omega kT} \quad (2.2.18)$$

であるから、これらの2式より次式が成立する。

$$\sum_{l=-\infty}^{\infty} \mathcal{G}_m(\omega + \frac{2\pi}{T}l) = T \sum_{k=-\infty}^{\infty} q_m(kT) e^{-j\omega kT} \quad (2.2.19)$$

これを式(2.2.16)に代入すると

$$q(t) = \frac{T}{2\pi} \sum_{m=0}^{\infty} \left( \int_{-(m+1)\frac{\pi}{T}}^{-m\frac{\pi}{T}} + \int_{m\frac{\pi}{T}}^{(m+1)\frac{\pi}{T}} \right) \sum_{k=-\infty}^{\infty} q_m(kT) e^{-j\omega kT} e^{j\omega t} d\omega$$

$$= \frac{T}{2\pi} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} g_m(kT) \left( \int_{-(m+1)\frac{\pi}{T}}^{-m\frac{\pi}{T}} + \int_{m\frac{\pi}{T}}^{(m+1)\frac{\pi}{T}} \right) e^{j\omega(t-kT)} d\omega$$

となり、これを計算することにより次式が得られる。

$$g(t) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} g_m(kT) \frac{\sin(m+1)\frac{\pi}{T}(t-kT) - \sin m\frac{\pi}{T}(t-kT)}{\frac{\pi}{T}(t-kT)} \quad (2.2.20)$$

これは、帯域制限を受けない信号に対する標本化公式であり、標本化定理の一種の拡張になっている。 $g_m(kT)$ の物理的意味は、信号 $g(t)$ を通過帯域が $m\pi/T \leq |\omega| < (m+1)\pi/T$ の理想特性の帯域フィルタに通した出力を標本間隔 $T$ で標本化して得られる標本値である。

式(2.2.20)で第1の $\sum$ の上限を0にすると次式が得られる。

$$g(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} g_0(kT) \frac{\sin \frac{\pi}{T}(t-kT)}{\frac{\pi}{T}(t-kT)} \quad (2.2.21)$$

これは、Shannonの標本化定理<sup>(5)</sup>による低域通過型信号の標本化公式であるので、ここで導いた定理はShannonの定理を包含するものであることがわかる。

### 2.2.5 折返しを利用したデジタル周波数分析法

2.2.4での拡張された標本化定理における $g_m(kT)$ の物理的意味を考慮すると、あらかじめ $m\pi/T \leq |\omega| < (m+1)\pi/T$ の成分しか含まないということがわかっている信号のデジタル周波数分析法として、次のような方法が理論的に保証される。

信号 $g(t)$ のフーリエ変換 $\mathcal{G}(\omega)$ が、ある定まった $T$ に対して

$$\mathcal{G}(\omega) = 0 \quad \left| \omega \right| < m\frac{\pi}{T}, \quad \left| \omega \right| \geq (m+1)\frac{\pi}{T} \quad (2.2.22)$$

$m$ : 整数

であるとき、 $g(t)$ の標本間隔 $T$ による標本値列を $g(kT)$ とし、その $z$ 変換を $G(z)$ とすると、 $g(kT)$ のDFFTは $G(z)$ の単位円上の標本点での値として求まる。式(2.2.22)の条件の下では、式(2.2.4)の $\sum$ は $m$ の一つの値以外の項が消えるので、周波数軸上での折返しによる重なりは存在しない。従って、 $g(kT)$ のDFFTによって $g(t)$ の周波数スペクトルを計算することが

できる。ただし、2.2.3で述べたように、DFTの $m\pi/T \leq \omega < (m+1)\pi/T$ の周波数軸は、 $m$ が偶数のときはDFTの正の周波数側に順方向に、 $m$ が奇数のときはDFTの負の周波数側に逆方向に現われることに注意しなければならない。<sup>(20)</sup>

### 2.2.6 応用

折返しを利用したデジタル周波数分析法の応用として、広帯域デジタル周波数分析システムを構成することができる。その具体的方法としては、AD変換の前にそのサンプリング速度に適合した1組の帯域フィルタ群を設けて各帯域ごとに独立にDFTを計算すればよいということになる。図式的に示すとそのシステムは図2.2.5のようになる。この分析システムでは、奇

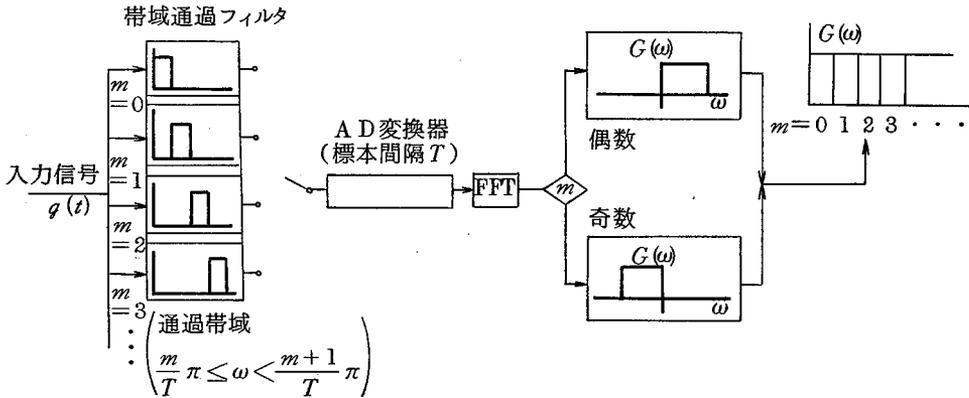


図2.2.5 折返しを利用した広帯域デジタル周波数分析システム

数の $m$ に対応する枝については周波数軸の方向が反転していることに注意する必要がある。<sup>(20)</sup>

Shannonの標本化定理は $\pi/T$ 以下の成分しか持たない信号についてだけ成立したので、これまでの通常のデジタル周波数分析は同図の $m=0$ の枝だけに限られていたことになる。

実際のデジタル周波数分析に際して図2.2.5のようなシステムを考える場合には、理想的な特性のアナログ帯域フィルタが得られないので、折返し周波数の整数倍の周波数付近の分析が不可能になるという欠点があるが、この欠点は次節の2重標本化の導入によって解決される。

### 2.3 一般標本化定理に基づく2重標本化の導入

連続信号の標本化に関しては、Nyquist<sup>(2)</sup>の先駆的研究に始まり、染谷<sup>(4)</sup>、Shannon<sup>(5)</sup>以来多数の研究が行なわれており、基本的な標本化定理では低域通過型の信号だけが対象とされていたが、次第に拡張・一般化がなされた。まず、一般の帯域通過型信号に対する標本化定理<sup>(6, 7, 8, 18)</sup>

が導かれ、筆者は帯域制限されない信号に対する標本化定理<sup>(22)</sup>を示した。また標本化操作に関しても、基本的な等間隔標本化以外に、等間隔標本化の一部が少し変歪したような場合<sup>(9)</sup>、全く任意な不等間隔標本化<sup>(9,17)</sup> および等間隔標本化を2重にした2重標本化<sup>(8,18)</sup>などが研究されており、標本化を多次元空間に拡張した形<sup>(10,14,15,16)</sup>も導かれている。また、多次元高次導関数の標本化<sup>(13,15)</sup>、周波数概念の一般化<sup>(18)</sup>、微分方程式との関連<sup>(19)</sup>などについても発表されている。以上のように、標本化に関する理論的研究は常に盛んに行なわれており、成果も多いのであるが、ほとんどの場合、標本化公式(補間公式)の誘導に主力が注がれており、実用的見地から標本化操作を直接に周波数分析まで結びつけた研究は少なく、高周波数領域の周波数分析にはアナログ的にヘテロダイン方式をとるか、あるいは単に実効的サンプリング速度を上げるという手段をとっているのが現状である。

本節では、これらの理論的研究の成果と実際のデジタル信号処理技術とのギャップを埋めるような意味で、磯道の一般標本化定理<sup>(18)</sup>に注目し、2重標本化を導入する。

### 2.3.1 帯域通過型信号に対する一般標本化定理

磯道により、以下のように一般の積分変換を導入して周波数概念を一般化することによって標本化定理が一般化されている。

信号を実関数 $g(t)$ で表示する。ここで $t$ はスカラーであってもベクトルであってもよいとする。次に $g(t)$ は2乗積分有限すなわち

$$\int_{\mathcal{G}} \{g(t)\}^2 dt < \infty \quad (2.3.1)$$

ただし  $\mathcal{G}$ : 変数 $t$ の全領域

とする。このとき次の積分変換を考える。

$$G(\omega) = \int_{\mathcal{G}} K(\omega, t) g(t) dt \quad (2.3.2)$$

この積分変換に逆積分変換が存在するとき、 $\omega$ を一般周波数と呼び、 $G(\omega)$ を関数 $g(t)$ の一般スペクトルと呼んでいる。逆積分変換の核を $H(t, \omega)$ とすると、 $g(t)$ は $G(\omega)$ により次式で与えられる。

$$g(t) = \int_{\mathcal{Q}} H(t, \omega) G(\omega) d\omega \quad (2.3.3)$$

ただし  $\mathcal{Q}$ : 変数 $\omega$ の全領域

式(2.3.2), (2.3.3)が互いに逆変換であることから, 核 $K(\omega, t), H(t, \omega)$ の間に次の関係が成立する.

$$\int_{\mathcal{D}} K(\omega, t) H(t, \sigma) dt = \delta(\omega - \sigma) \quad (2.3.4)$$

$$\int_{\mathcal{D}} H(t, \omega) K(\omega, \tau) d\omega = \delta(t - \tau) \quad (2.3.5)$$

以下, 次式のように一般スペクトルがある領域 $\mathcal{D}$ の外では0となっている信号を扱うものとする. この制限のことを帯域制限と呼ぶ.

$$G(\omega) = 0 \quad \omega \notin \mathcal{D} \quad (2.3.6)$$

ただし  $\mathcal{D}$ :  $\mathcal{D}$ に含まれる有界閉集合

ここで領域 $\mathcal{D}$ は必ずしも連結している必要はないので, この結果帯域通過型の信号を取扱うことができるのである. 式(2.3.6)の下では式(2.3.3)は次のようになる.

$$g(t) = \int_{\mathcal{D}} H(t, \omega) G(\omega) d\omega \quad (2.3.7)$$

次に標本点列 $\{t_k\}$ を領域 $\mathcal{D}$ において関数系 $\{H(t_k, \omega)\}$ が線型独立かつ完備であるように選ぶと, 飯島の方法<sup>(29)</sup>(第1種積分方程式を解くことに帰着する)または磯道の方法<sup>(18)</sup>(無限次元行列の逆行列を求めることに帰着する)によって $\{H(t_k, \omega)\}$ の正規双直交系 $\{K_k(\omega)\}$ を定めることができる. すなわち

$$\int_{\mathcal{D}} H(t_k, \omega) K_l(\omega) d\omega = \delta_{kl} \quad (2.3.8)$$

また, 関数系 $\{H(t_k, \omega)\}$ の完備性から次式が形式的に成立する.

$$\sum_k H(t_k, \omega) K_k(\sigma) = \delta(\omega - \sigma) \quad (2.3.9)$$

式(2.3.6)の条件を満たす任意の関数 $G(\omega)$ は関数系 $\{K_k(\omega)\}$ により次のように展開できる.

$$G(\omega) = \sum_k c_k K_k(\omega) \quad (2.3.10)$$

$$c_k = \int_{\mathcal{D}} H(t_k, \omega) G(\omega) d\omega \quad (2.3.11)$$

ところが式(2.3.7)により

$$c_k = g(t_k) = \int_{\mathcal{D}} H(t_k, \omega) G(\omega) d\omega \quad (2.3.12)$$

であるので、式(2.3.10)は次のようになる。

$$G(\omega) = \sum_k g(t_k) K_k(\omega) \quad (2.3.13)$$

これを式(2.3.7)に代入すると一般標本化公式が得られる。

$$\begin{aligned} g(t) &= \int_{\mathcal{D}} H(t, \omega) \sum_k g(t_k) K_k(\omega) d\omega \\ &= \sum_k g(t_k) a_k(t) \end{aligned} \quad (2.3.14)$$

ただし

$$a_k(t) = \int_{\mathcal{D}} H(t, \omega) K_k(\omega) d\omega \quad (2.3.15)$$

また、式(2.3.12)に式(2.3.2)を代入すると次式が得られる。

$$\begin{aligned} g(t_k) &= \int_{\mathcal{D}} H(t_k, \omega) \int_{\mathcal{T}} K(\omega, t) g(t) dt d\omega \\ &= \int_{\mathcal{T}} g(t) b_k(t) dt \end{aligned} \quad (2.3.16)$$

ただし

$$b_k(t) = \int_{\mathcal{D}} K(\omega, t) H(t_k, \omega) d\omega \quad (2.3.17)$$

$a_k(t)$ ,  $b_k(t)$ はそれぞれ第1種および第2種標本化関数と名付けられている。これらは一般には異なる関数であるがShannonの標本化定理のように一致する場合もある。

式(2.3.15)と(2.3.8)を使うと次式が得られる。

$$a_k(t_l) = \int_{\mathcal{D}} H(t_l, \omega) K_k(\omega) d\omega = \delta_{kl} \quad (2.3.18)$$

式(2.3.15), (2.3.17)に式(2.3.4), (2.3.5)を使うと次の関係が導かれる.

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{D}} K(\omega, t) a_k(t) dt &= \int_{\mathcal{D}} K(\omega, t) \int_{\mathcal{D}} H(t, \sigma) K_k(\sigma) d\sigma dt \\ &= \begin{cases} K_k(\omega) & \omega \in \mathcal{D} \\ 0 & \omega \notin \mathcal{D} \end{cases} \end{aligned} \quad (2.3.19)$$

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{D}} H(t, \omega) b_k(t) dt &= \int_{\mathcal{D}} H(t, \omega) \int_{\mathcal{D}} K(\sigma, t) H(t_k, \sigma) d\sigma dt \\ &= \begin{cases} H(t_k, \omega) & \omega \in \mathcal{D} \\ 0 & \omega \notin \mathcal{D} \end{cases} \end{aligned} \quad (2.3.20)$$

式(2.3.19)は $a_k(t)$ のスペクトルが領域 $\mathcal{D}$ で $K_k(\omega)$ となっていることを示し, 式(2.3.20)は $b_k(t)$ のスペクトルが領域 $\mathcal{D}$ で $H(t_k, \omega)$ となっていることを示す.

ここで $a_k(t)$ ,  $b_k(t)$ は, 式(2.3.15), (2.3.17), (2.3.4), (2.3.8)を使うと

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{D}} a_k(t) b_l(t) dt &= \int_{\mathcal{D}} \int_{\mathcal{D}} H(t, \sigma) K_k(\sigma) d\sigma \int_{\mathcal{D}} K(\omega, t) H(t_l, \omega) d\omega dt \\ &= \int_{\mathcal{D}} H(t_l, \omega) K_k(\omega) d\omega = \delta_{kl} \end{aligned} \quad (2.3.21)$$

となり, これは標本化関数 $a_k(t)$ ,  $b_k(t)$ の双直交性を示している. このことより, 式(2.3.14), (2.3.16)は $g(t)$ の関数系 $\{a_k(t)\}$ による双直交変換を与えていることが理解できる.

### 2.3.2 一般標本化定理の離散的表現

2.3.1で帯域通過型信号の一般標本化定理について述べたが, その場合時間領域は $(-\infty, +\infty)$ での離散点で記述され, 周波数領域は連続であった. しかしデジタル周波数分析の立場に立つと, 時間領域, 周波数領域共に有限個の離散点で記述しなければならない. そのために, ここで2.3.1の内容を離散的な形に書き換えておく.<sup>(30)</sup>

2.3.1では信号 $g(t)$ は2乗積分有限としたが、離散的取扱いにおいてはデータの個数が有限であるので必然的に、周波数帯域を無限と考えるか、あるいは周波数帯域が有限と仮定するならばとの時間領域の信号はデータ長の周期をもったくり返し波形と考えるなければならない。一般には周波数帯域を無限と考えるのは不都合なので、止むを得ず信号はデータ長周期のくり返し波形であると見なすことになる。従って一般にDFTと呼ばれている信号処理は、切り取り波形のフーリエ変換を計算しているのではなく、くり返し波形と見なしたときのフーリエ級数展開係数を求める計算になっていることを指摘しておく。またここで使用する離散的直交変換、離散的直交変換などの用語も直交級数展開あるいは双直交級数展開の係数の意味であることを断わっておく。

時間領域での標本点数を1標本点列あたり $N$ とし、周波数帯域を $[\omega_l, \omega_u]$ とすると、周波数領域における標本間隔 $\Omega$ は

$$\Omega = \frac{2(\omega_u - \omega_l)}{N} \quad (2.3.22)$$

となる。 $\Omega$ を用いて周波数帯域の下、上限を

$$\left. \begin{aligned} \omega_l &= n_l \Omega \\ \omega_u &= n_u \Omega \end{aligned} \right\} \quad (2.3.23)$$

ただし、 $n_l, n_u$ は一般には整数でない。

と書くことにすると次式が成立する。

$$n_u - n_l = \frac{N}{2} \quad (2.3.24)$$

周波数領域における標本点列を $\{\omega_n\}$ で表わすと、帯域制限は

$$n_l \Omega \leq |\omega_n| \leq n_u \Omega \quad (2.3.25)$$

となる。これは次のようにも書ける。

$$\omega_n = n \Omega \quad (2.3.26)$$

ただし  $n \in \mathcal{Q} \triangleq \{-n_u, \dots, -n_l-1, n_l, \dots, n_u-1\}$

このとき

$$g(t_k) = g(kT) \quad (2.3.27)$$

$$\text{ただし } k \in \mathcal{N} \triangleq \left\{ -\frac{N}{2}, \dots, 0, \dots, \frac{N}{2} - 1 \right\}$$

の DFT は式 (2.3.13) に対応して次のようにして求められる。

$$G(\omega_n) = \sum_{k \in \mathcal{N}} g(t_k) K_k(\omega_n) \quad (2.3.28)$$

ここで積分変換の核に相当する  $K_k(\omega_n)$  は直交系を用いるか双直交系を用いるかによって形が決まる。 $K_k(\omega_n)$  は関数系  $\{H(t_k, \omega_n)\}$  から決まるのであるが、 $K_k(\omega_n)$  が決定できれば式 (2.3.28) に従って DFT すなわち離散的周波数スペクトルが計算できることになる。 $K_k(\omega_n)$  の決定方法は 2.3.3 で述べる。また式 (2.3.14) に対応する補間法については 2.5.1 で述べる。

2.3.3 では、連続信号のスペクトルを離散的に求めるための標本化の条件について、まず簡単な場合として、関数系  $\{H(t_k, \omega_n)\}$  がそれ自身で離散的直交系となるための条件を求め、離散的直交変換を行なうための標本化法を導く。2.3.4 では、関数系  $\{H(t_k, \omega_n)\}$  がそれ自身では離散的直交系とはならない場合の離散的直交変換の方法を導く。

以下、周波数概念を決定する式 (2.3.2) の積分変換としてフーリエ変換を採用し、それを離散的に扱うことを試みる。また帯域制限としては、次の形をとるものとする。

$$\mathcal{D} = [-\omega_u, -\omega_l] \cup [\omega_l, \omega_u] \quad (2.3.29)$$

$$\text{ただし } 0 \leq \omega_l < \omega_u$$

### 2.3.3 直交系による 2 重標本化

簡単な場合として、標本点列  $\{t_k\}$  における離散的な関数系

$$H(t_k, \omega_n) = A e^{jn\Omega t_k} \quad (2.3.30)$$

$$\text{ただし } A \text{ は未定定数}$$

が離散的な直交系をなす場合を考える。このとき、式 (2.3.2) の変換の核  $K(\omega, t)$  に対応するものとしては

$$K_k(\omega_n) = B e^{-jn\Omega t_k} \quad (2.3.31)$$

ただし  $B$  は未定定数

となり, 正規条件

$$\sum_{n \in \mathcal{Q}} H(t_k, \omega_n) K_k(\omega_n) = 1 \quad (2.3.32)$$

より,

$$AB = \frac{1}{N} \quad (2.3.33)$$

となる. 変換・逆変換の対称性を考慮するなら

$$A = B = \frac{1}{\sqrt{N}} \quad (2.3.34)$$

とすればよいが, 数値計算の際の便宜を優先して, ここでは

$$A = \frac{1}{N}, \quad B = 1 \quad (2.3.35)$$

としておく, 次に  $\{H(t_k, \omega_n)\}$  自身の直交条件より,  $k \neq l$  に対して

$$\sum_{n \in \mathcal{Q}} H(t_k, \omega_n) \overline{H(t_l, \omega_n)} = 0 \quad (2.3.36)$$

—— は複素共役を表わす

の成立が要請される. 従って

$$\left( \sum_{n=-n_u}^{-n_l-1} + \sum_{n=n_l}^{n_u-1} \right) \frac{1}{N} e^{jn\Omega t_k} \frac{1}{N} e^{-jn\Omega t_l} = 0 \quad (2.3.37)$$

これより, すべての  $t_k, t_l$  ( $k \neq l$ ) の組合せに対して

$$(t_k - t_l) \Omega \frac{n_u - n_l}{2} = \frac{\pi}{2} \times \text{偶数} \quad (2.3.38)$$

または

$$(t_k - t_l) \Omega \frac{n_u + n_l}{2} = \frac{\pi}{2} \times \text{奇数} \quad (2.3.39)$$

のうちの少くともどちらか一方が成立しなければならない(付録E)。

ここで標本点列  $\{t_k\}$  として, 次の2重標本列

$$\left. \begin{aligned} \{t_{2k}\} &= \{(k + \alpha) T\} \\ \{t_{2k+1}\} &= \{(k + \beta) T\} \end{aligned} \right\} \quad (2.3.40)$$

$$k: \text{整数}, \quad \alpha \not\equiv \beta \pmod{1} \quad (2.3.41)$$

を想定し, まず  $t_0$  と  $t_{2k}$  の間で式(2.3.38)を要請すると,

$$T \Omega \frac{n_u - n_l}{2} = \pi \quad (2.3.42)$$

が成立しなければならない。従って

$$T = \frac{2\pi}{(n_u - n_l)\Omega} = \frac{2\pi}{\omega_u - \omega_l} = \frac{4\pi}{N\Omega} \quad (2.3.43)$$

次に  $t_0$  と  $t_1$  の間で式(2.3.39)の成立を要請すると,

$$(\beta - \alpha) T \Omega \frac{n_u + n_l}{2} = \frac{\pi}{2} \times (2m - 1) \quad (2.3.44)$$

$m$ : 任意の整数

つまり

$$\beta - \alpha = \frac{\pi \times (2m - 1)}{(n_u + n_l) T \Omega} = \frac{2m - 1}{2\xi} \quad (2.3.45)$$

$$\text{ただし} \quad \xi \triangleq \frac{n_u + n_l}{n_u - n_l} = \frac{\omega_u + \omega_l}{\omega_u - \omega_l} \quad (2.3.46)$$

でなければならない。ここで式(2.3.45)を用いて式(2.3.39)が一般の  $k, l$  について成立する条件を求めると

$$\{(\beta + \alpha)T - (l + \alpha)T\} \frac{\omega_u + \omega_l}{2} = \frac{\pi}{2} \times \text{奇数}$$

となり, これに式(2.3.45), (2.3.46)を用いると

$$2\xi(\ell-1) + 2m - 1 = \text{奇数} \quad (2.3.47)$$

となる。これが一般の $\ell, l$ について常に成立するためには

$$\xi = \text{整数} \quad (2.3.48)$$

でなければならない。また、式(2.3.45)の $\beta - \alpha$ はmodulo 1でしか意味を持たないので、 $m$ は次の値しかとることができない。

$$m \in \{1, 2, \dots, \xi\} \quad (2.3.49)$$

以上より、式(2.3.46)で定義される $\xi$ が整数であるとき、 $\alpha, \beta$ を式(2.3.45)、(2.3.49)のように選べば、式(2.3.40)で表わされる2重標本点列を用いて離散的直交変換が可能になる。各標本列の標本間隔 $T$ は式(2.3.43)で決められる。

#### 2.3.4 双直交系による2重標本化

式(2.3.40)の形の2重標本点列を想定し、その上で関数系 $\{H(t_\ell, \omega_n)\}$ が

$$\left. \begin{aligned} H(t_{2\ell}, \omega_n) &= \frac{1}{N} e^{jn\Omega(\ell + \alpha)T} \\ H(t_{2\ell+1}, \omega_n) &= \frac{1}{N} e^{jn\Omega(\ell + \beta)T} \end{aligned} \right\} \quad (2.3.50)$$

の形をとるとき、これに基づいた正規双直交系を構成することを考える。ここでも標本間隔 $T$ には式(2.3.43)が要請されるが、この標本間隔による標本化に伴う折返しの影響によって、次式で表わされる周波数 $\omega_c$ の前後で関数系の中の定数因子が異なると考えられる。

$$\omega_c = -\omega_l + \gamma(\omega_u - \omega_l) \quad (2.3.51)$$

$$\text{ただし } \gamma = \{\xi\}_{\text{Gauss}} \quad (2.3.52)$$

ここで $\omega_c$ を $\Omega$ を使って次のように表現しておく。

$$\omega_c = n_c \Omega \quad (2.3.53)$$

$$\text{ただし } n_c = \frac{\gamma(\omega_u - \omega_l)}{\Omega} - n_l = \frac{\gamma N}{2} - n_l \quad (2.3.54)$$

このとき $\{H(t_\ell, \omega_n)\}$ の離散的正規双直交系 $\{K_\ell(\omega_n)\}$ は、 $a, b, c, d, a_1, b_1, c_1,$

$d_l$  を未定定数として次のような形をとるとする。

$$\begin{aligned}
 K_{2k}(\omega_n) &= \begin{cases} a e^{-jn\Omega(k+\alpha)T} & n \in \{-n_u, \dots, -n_c - 1\} \\ b e^{-jn\Omega(k+\alpha)T} & n \in \{-n_c, \dots, -n_l - 1\} \\ c e^{-jn\Omega(k+\alpha)T} & n \in \{n_l, \dots, n_c - 1\} \\ d e^{-jn\Omega(k+\alpha)T} & n \in \{n_c, \dots, n_u - 1\} \end{cases} \\
 K_{2k+1}(\omega_n) &= \begin{cases} a_l e^{-jn\Omega(k+\beta)T} & n \in \{-n_u, \dots, -n_c - 1\} \\ b_l e^{-jn\Omega(k+\beta)T} & n \in \{-n_c, \dots, -n_l - 1\} \\ c_l e^{-jn\Omega(k+\beta)T} & n \in \{n_l, \dots, n_c - 1\} \\ d_l e^{-jn\Omega(k+\beta)T} & n \in \{n_c, \dots, n_u - 1\} \end{cases}
 \end{aligned} \quad (2.3.55)$$

これらの中の未定定数は式(2.3.50)と式(2.3.55)の正規双直交条件から決定される。まず、 $a, b, c, d$  の決定方法について述べる。

(i)  $K_{2k}(\omega_n)$  と  $H(t_{2k}, \omega_n)$  の正規条件

$$\left( \sum_{n=-n_u}^{-n_l-1} + \sum_{n=n_l}^{n_u-1} \right) K_{2k}(\omega_n) H(t_{2k}, \omega_n) = 1 \quad (2.3.56)$$

より次式が得られる。(付録F)

$$(\xi - \gamma)(a + d) + (1 - \xi + \gamma)(b + c) = 2 \quad (2.3.57)$$

(ii)  $K_{2k}(\omega_n)$  と  $H(t_{2l}, \omega_n)$  ( $k \neq l$ ) の直交条件

$$\left( \sum_{n=-n_u}^{-n_l-1} + \sum_{n=n_l}^{n_u-1} \right) K_{2k}(\omega_n) H(t_{2l}, \omega_n) = 0 \quad (2.3.58)$$

より次式が得られる。(付録G)

$$(a + d) - (b + c) = 0 \quad (2.3.59)$$

(iii)  $K_{2k}(\omega_n)$  と  $H(t_{2l+1}, \omega_n)$  の直交条件

$$\left( \sum_{n=-n_u}^{-n_l-1} + \sum_{n=n_l}^{n_u-1} \right) K_{2k}(\omega_n) H(t_{2l+1}, \omega_n) = 0 \quad (2.3.60)$$

より次式が得られる。(付録H)

$$\left. \begin{aligned} a \varepsilon^{-1} - b - c \varepsilon^\gamma + d \varepsilon^\gamma &= 0 \\ a \varepsilon^{-\gamma} - b \varepsilon^{-\gamma} - c + d \varepsilon &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (2.3.61)$$

$$\text{ただし } \varepsilon \triangleq e^{j2\pi(\beta-\alpha)} \quad (2.3.62)$$

式(2.3.57), (2.3.59), (2.3.61)より, 未定定数  $a, b, c, d$  は次のように決定される.

$$\begin{aligned} a &= \frac{2}{1 - e^{-j2\pi(\gamma+1)(\beta-\alpha)}} \\ b &= \frac{2}{1 - e^{-j2\pi\gamma(\beta-\alpha)}} \end{aligned} \quad (2.3.63)$$

$$c = 2 - b$$

$$d = 2 - a$$

全く同様にして,  $a_1, b_1, c_1, d_1$  は

(i)'  $K_{2k+1}(\omega_n)$  と  $H(t_{2k+1}, \omega_n)$  の正規条件

(ii)'  $K_{2k+1}(\omega_n)$  と  $H(t_{2l+1}, \omega_n)$  ( $k \neq l$ ) の直交条件

(iii)'  $K_{2k+1}(\omega_n)$  と  $H(t_{2l}, \omega_n)$  の直交条件

より次のように決定される.

$$\left. \begin{aligned} a_1 &= \frac{2}{1 - e^{j2\pi(\gamma+1)(\beta-\alpha)}} \\ b_1 &= \frac{2}{1 - e^{j2\pi\gamma(\beta-\alpha)}} \\ c_1 &= 2 - b_1 \\ d_1 &= 2 - a_1 \end{aligned} \right\} \quad (2.3.64)$$

以上のように、式(2.3.55)に式(2.3.63)を代入して $\{K_{2k}(\omega_n)\}$ が、また式(2.3.64)を代入して $\{K_{2k+1}(\omega_n)\}$ が決定され、双直交級数展開による離散スペクトル $G(\omega_n)$ は式(2.3.13)を用いて計算できることが示された。この方法では、 $\alpha$ 、 $\beta$ の選び方は任意であり、ただ $\alpha \not\equiv \beta \pmod{1}$ でありさえすればよい。また $\xi$ が整数である必要がないので帯域の位置に関する条件が除かれるので一般性が広い。

## 2.4 2重標本列の離散的フーリエ変換

本節では、帯域通過型信号のうち式(2.3.46)で定義される $\xi$ が整数の場合について、前節で導いた式(2.3.40)の形の2重標本列のDFTの計算法を示す。これはアナログにおけるヘテロダイン方式のビートダウンの効果がデジタルでは2重標本化によって得られることを示すものである。

2.4.1では、2重標本列の $z$ 変換とラプラス変換の関係を連立1次方程式に定式化することにより、帯域通過型信号の2重標本列のDFTができるための条件が、前節で示した「 $\xi$ が整数でなければならない」という条件と一致することを示す。2.4.2でその連立1次方程式を解くことによりDFTを計算する方法を示す。

2.2節の「折返しを利用したデジタル周波数分析法」は、本節の $\xi = \text{奇数}$ 、 $\beta - \alpha = 1/2$ の場合に相当する。また従来の低域通過型信号のデジタル周波数分析法は $\xi = 1$ 、 $\beta - \alpha = 1/2$ の場合に相当する。

### 2.4.1 2重標本列の離散的フーリエ変換の2元連立1次方程式への定式化

信号 $q(t)$ を標本間隔 $T$ で標本化した2組の標本列を

$$\left. \begin{aligned} \{q_\alpha\} &\triangleq \{q((k+\alpha)T)\} \\ \{q_\beta\} &\triangleq \{q((k+\beta)T)\} \end{aligned} \right\} \quad (2.4.1)$$

$k$ : 整数,  $\alpha \not\equiv \beta \pmod{1}$

とし、 $q(t)$ のラプラス変換を $\mathcal{L}(s)$ 、 $\{q_\alpha\}$ 、 $\{q_\beta\}$ の $z$ 変換をそれぞれ $G_\alpha(z)$ 、 $G_\beta(z)$ とする。

$$\mathcal{L}(s) = \mathcal{L}\{q(t)\} \quad (2.4.2)$$

$$\left. \begin{aligned} G_\alpha(z) &= \mathcal{Z}\{q_\alpha\} \\ G_\beta(z) &= \mathcal{Z}\{q_\beta\} \end{aligned} \right\} \quad (2.4.3)$$

このとき次の関係が成立する。(付録A参照)

$$\left. \begin{aligned} e^{-s\alpha T} G_\alpha(z) \Big|_{z=e^{sT}} &= \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \mathcal{G}\left(s + j\frac{2\pi}{T}k\right) e^{j2\pi k\alpha} \\ e^{-s\beta T} G_\beta(z) \Big|_{z=e^{sT}} &= \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \mathcal{G}\left(s + j\frac{2\pi}{T}k\right) e^{j2\pi k\beta} \end{aligned} \right\} \quad (2.4.4)$$

ここで、フーリエ変換とDFTの関係を得るために、上式で形式的に  $s$  の代わりに  $j\omega = jn\Omega$  ( $\Omega$ は周波数軸上の標本間隔) とし、表記の簡略化のため

$$\mathcal{G}(jn\Omega) \quad \text{を} \quad \mathcal{G}(n\Omega) : q(t) \text{のフーリエ変換} (\omega = n\Omega)$$

$$G_\alpha(z) \Big|_{z=e^{jn\Omega T}} \quad \text{を} \quad G_\alpha(n) : \{q_\alpha\} \text{の} N \text{点DFT}$$

$$G_\beta(z) \Big|_{z=e^{jn\Omega T}} \quad \text{を} \quad G_\beta(n) : \{q_\beta\} \text{の} N \text{点DFT}$$

と書くことにすると、次式が得られる。

$$\left. \begin{aligned} e^{-jn\Omega\alpha T} G_\alpha(n\Omega) &= \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \mathcal{G}\left(n\Omega + \frac{2\pi}{T}k\right) e^{j2\pi k\alpha} \\ e^{-jn\Omega\beta T} G_\beta(n\Omega) &= \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \mathcal{G}\left(n\Omega + \frac{2\pi}{T}k\right) e^{j2\pi k\beta} \end{aligned} \right\} \quad (2.4.5)$$

$\alpha, \beta$ はその差が modulo 1 で意味を持つだけであるので、 $\beta - \alpha \triangleq \varphi$ , つまり  $\alpha = 0, \beta = \varphi$  としても一般性は失われない。また、 $N$ 点DFTにおいては、 $\Omega = 2\pi/NT$ であるので、式(2.4.5)における  $n$  は、左辺での変換  $z = e^{jn\Omega T} = e^{j\frac{2\pi}{N}n}$ , および右辺の無限級数に関しては modulo  $N$  でしか意味を持たないので、とり得る整数値の数を  $N$  とする新しい変数  $\nu$  を次のようにして導入する。

$$\left. \begin{aligned} n &= \nu + lN \\ \text{Dim}[\nu] &= N, \quad l \text{ 整数} \end{aligned} \right\} \quad (2.4.6)$$

ここで  $\text{Dim}[\cdot]$  は  $\cdot$  のとり得る整数値の個数を表わすものとする。この  $\nu$  を用いると式(2.4.5)は次のように書くことができる。

$$G_o(\nu) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \mathcal{G}\left((\nu + kN)\Omega\right) \quad \Bigg|$$

$$e^{-jn\Omega\varphi T} G_\varphi(\nu) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \mathcal{G}((\nu + kN)\Omega) e^{j2\pi k\varphi} \quad \left. \vphantom{\sum} \right\} \quad (2.4.7)$$

$G_0(\nu)$ ,  $G_\varphi(\nu)$  はそれぞれ  $\{g_0\}$ ,  $\{g_\varphi\}$  の DFT であるから独立に計算可能である。ただし、これらの標本列は一般にアンダーサンプリングになっているので、 $G_0(\nu)$ ,  $G_\varphi(\nu)$  は折返し誤差を含んでいることに注意する必要がある。

式(2.4.7)までの段階では  $g(t)$  に条件を設けなかったが、ここで  $G_0(\nu)$ ,  $G_\varphi(\nu)$  に基づき式(2.4.7)を用いて折返し誤差を排除した形で  $g(t)$  の DFT を計算することができるように、次のように  $g(t)$  に条件をつける。

まず、 $g(t)$  は実関数であるとする。このとき

$$\mathcal{G}(-\omega) = \overline{\mathcal{G}(\omega)} \quad (2.4.8)$$

であるので、 $\omega$  の領域は  $\omega = 0$  に関して対称になっていなければならない。一方、式(2.4.6)より  $n$  のとり得る値の個数は正、負でそれぞれ  $N$  であるので、 $n$  の領域  $\mathcal{D}_n$  を次のようにする。

$$\mathcal{D}_n = \{-(n_0 + N), \dots, -n_0 - 1, n_0, \dots, n_0 + N - 1\} \quad (2.4.9)$$

$G_0(\nu)$ ,  $G_\varphi(\nu)$  が既知であるとき、式(2.4.7)から特定の  $k (= k_i, i$  は番号) に対する  $\mathcal{G}((\nu + k_i N)\Omega)$  が一意に求められるための条件は、式(2.4.7)を

$$\mathcal{G}((\nu + k_1 N)\Omega), \mathcal{G}((\nu + k_2 N)\Omega), \text{Dim}[\nu] = N \quad (2.4.10)$$

に関する2元連立1次方程式とみて、それが解けるための条件と等価である。

まず式(2.4.7)が式(2.4.10)に関する2元連立1次方程式となるための必要十分条件は

$$\mathcal{G}((\nu + kN)\Omega) = 0, \quad k \neq k_1, k_2 \quad (2.4.11)$$

である。このとき式(2.4.7)は次のようになる。

$$\left. \begin{aligned} G_0(\nu) &= \frac{1}{T} \left[ \mathcal{G}((\nu + k_1 N)\Omega) + \mathcal{G}((\nu + k_2 N)\Omega) \right] \\ e^{-jn\Omega\varphi T} G_\varphi(\nu) &= \frac{1}{T} \left[ e^{j2\pi k_1 \varphi} \mathcal{G}((\nu + k_1 N)\Omega) + e^{j2\pi k_2 \varphi} \mathcal{G}((\nu + k_2 N)\Omega) \right] \end{aligned} \right\} \quad (2.4.12)$$

ここで

$$D \triangleq e^{j2\pi k_2 \varphi} - e^{j2\pi k_1 \varphi} \quad (2.4.13)$$

とおくと、 $k_1 \neq k_2$ ,  $\varphi \neq 0 \pmod{1}$  のときは  $D \neq 0$  となるので、連立方程式(2.4.12)は解ける。また式(2.4.11)が成立するためには、式(2.4.8)の条件より、式(2.4.9)で領域の位置を決定する  $n_0$  に次の制限が加えられる。

$$2n_0 = N \times \eta, \quad \eta: \text{整数} \quad (2.4.14)$$

つまり、式(2.4.9)で決定される  $n$  の二つの領域が

$$\nu + kN, \quad \text{Dim}[\nu] = N \quad (2.4.15)$$

の二つの  $k$  の範囲にうまくあてはまるようにするには、 $n$  の領域の位置に条件がつき、それは二つの領域の間隔  $2n_0$  が  $N$  の整数倍でなければならないということである。その理由は、もし式(2.4.14)が満たされなければ、式(2.4.9)の二つの領域を式(2.4.15)の形で表わそうとするときに三つの  $k$  が必要になるからである。

式(2.4.14)が満たされるとき、 $n$  の領域を表す二つの  $k$  の値を  $\eta$  で表現しようとするとき、二つの場合に分かれてそれぞれ  $\nu$  の領域も次のように決まる。

(i)  $\eta$  が偶数のとき

$$k = \frac{\eta}{2}, \quad -\left(\frac{\eta}{2} + 1\right)$$

このとき  $0 \leq \nu < N$  とすると

$$n_0 = \frac{\eta}{2} \cdot N \leq \nu + \frac{\eta}{2} \cdot N < \left(\frac{\eta}{2} + 1\right) N = n_0 + N$$

$$-(n_0 + N) = -\left(\frac{\eta}{2} + 1\right) N \leq \nu - \left(\frac{\eta}{2} + 1\right) N < -\frac{\eta}{2} N = -n_0$$

(ii)  $\eta$  が奇数のとき

$$k = \frac{\eta + 1}{2}, \quad -\frac{\eta + 1}{2}$$

このとき  $-\frac{N}{2} \leq \nu < \frac{N}{2}$  とすると

$$n_0 = \frac{\eta}{2} N \leq \nu + \frac{\eta+1}{2} N < \left(\frac{\eta}{2} + 1\right) N = n_0 + N$$

$$-(n_0 + N) = -\left(\frac{\eta}{2} + 1\right) N \leq \nu - \frac{\eta+1}{2} N < -\frac{\eta}{2} N = -n_0$$

以上のようにして、 $n$  の二つの領域の位置は、式(2.4.14)が成立するときには、式(2.4.15)の形の二つの $k$ によって表現できることがわかった。ここで式(2.4.9)と式(2.3.29)を対比させると

$$\omega_l = n_0 \Omega, \quad \omega_u = (n_0 + N) \Omega \quad (2.4.16)$$

という対応の下で

$$\eta = \xi - 1 \quad (2.4.17)$$

の関係があることがわかる。

前節では、 $\xi$  が整数でなければならないということが直交性の要請から導かれることを述べたが、本節においては、それと同じ条件が2元連立1次方程式への定式化の条件から導かれたことになる。以後 $\eta$ の代りに前節での記号 $\xi$ によって記述を統一するため、改めて上記の二つの場合における $k$ の値を $\xi$ によって表現しておく。

(i)  $\xi$  が奇数のとき

$$k = \frac{\xi - 1}{2}, \quad -\frac{\xi + 1}{2} \quad (2.4.18)$$

(ii)  $\xi$  が偶数のとき

$$k = \frac{\xi}{2}, \quad -\frac{\xi}{2} \quad (2.4.19)$$

ただし

$$\xi = \frac{\omega_u + \omega_l}{\omega_u - \omega_l}, \quad T = \frac{2\pi}{\omega_u - \omega_l} \quad (2.4.20)$$

以下、 $q(i)$ が $\xi = \text{整数}$ となるような帯域制限を受ける場合について考える。つまり $q(i)$ が

$$\left. \begin{aligned} -\omega_n = -\left(\omega_0 + \frac{2\pi}{T}\right) \leq \omega < -\omega_l, \quad \omega_l \leq \omega < \omega_0 + \frac{2\pi}{T} = \omega_u \\ \text{ただし } \omega_0 = \frac{\pi}{T} \times i \quad i : \text{整数} \end{aligned} \right\} \quad (2.4.21)$$

以外の周波数成分を含まないとする。このとき $\omega$ を $\omega = n\Omega$ で表わし

$$n = \nu + \ell N, \quad \text{Dim}[\nu] = N$$

とすると、前述のように式(2.4.7)の右辺の $\Sigma$ は2項だけの和にすることができて、式(2.4.12)の形になる。そしてその $\ell_1, \ell_2$ の値は $\xi$ が奇数であるか偶数であるかに応じて、式(2.4.18)または(2.4.19)となり、従って以後の考察は次のように二つの場合に分かれる。

(i)  $\xi$ が奇数のとき

これは $\mathcal{S}(\omega)$ が式(2.4.21)で $\omega_0 = \frac{\pi}{T} \times \text{偶数}$ とした領域以外では0であるということであり、

$$n = \nu + \ell N, \quad \ell : \text{整数}, \quad \nu \in \mathcal{X} \triangleq \{0, 1, \dots, N-1\}$$

とすると、式(2.4.12)は次のようになる。

$$\left. \begin{aligned} G_0(\nu) &= \frac{1}{T} \left[ \mathcal{S}(\nu\Omega + \omega_l) + \mathcal{S}(\nu\Omega - \omega_u) \right] \\ e^{-jn\Omega\varphi T} G_\varphi(\nu) &= \frac{1}{T} \left[ e^{j(\xi-1)\varphi\pi} \mathcal{S}(\nu\Omega + \omega_l) + e^{-j(\xi+1)\varphi\pi} \mathcal{S}(\nu\Omega - \omega_u) \right] \end{aligned} \right\} \quad (2.4.22)$$

一方、DFTとフーリエ変換の間のよく知られた関係

$$G(n) = \frac{1}{T} \sum_{\ell=-\infty}^{\infty} \mathcal{S}\left(n\Omega + \frac{2\pi}{T}\ell\right)$$

を利用すると、 $\mathcal{S}(\omega)$ が式(2.4.21)で $i$ が偶数であるという条件を考慮すると、 $\nu \in \mathcal{X}$ に対して

$$\left. \begin{aligned} G(\nu + n_0) &= \frac{1}{T} \mathcal{S}(\nu\Omega + \omega_l) \\ G(\nu - n_0 - N) &= \frac{1}{T} \mathcal{S}(\nu\Omega - \omega_u) \end{aligned} \right\} \quad (2.4.23)$$

となる。これを式(2.4.22)に代入し、行列の形で書くと次式が得られる。

$$\begin{bmatrix} G_0(\nu) \\ e^{-jn\Omega\varphi T} G_\varphi(\nu) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ e^{j(\xi-1)\varphi\pi} & e^{-j(\xi+1)\varphi\pi} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} G(\nu + n_0) \\ G(\nu - n_0 - N) \end{bmatrix} \quad (2.4.24)$$

これを解くと求めるDFTが得られる。

$$\begin{bmatrix} G(\nu + n_0) \\ G(\nu - n_0 - N) \end{bmatrix} = \frac{e^{j\varphi\pi}}{2j \sin \xi\varphi\pi} \begin{bmatrix} -e^{-j(\xi+1)\varphi\pi} & 1 \\ e^{j(\xi-1)\varphi\pi} & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} G_0(\nu) \\ e^{-jn\Omega\varphi T} G_\varphi(\nu) \end{bmatrix} \quad (2.4.25)$$

ただし  $n = \nu + \ell N$ ,  $\ell$ : 整数,  $\nu \in \mathcal{N}$

同様にして

(ii)  $\xi$ が偶数のとき

これは $\mathcal{S}(\omega)$ が式(2.4.21)で  $\omega_0 = \frac{\pi}{T} \times \text{奇数}$  とした領域以外では0であるということであり、

$$n = \nu + \ell N, \quad \ell: \text{整数} \quad \nu \in \mathcal{N} \triangleq \left\{ -\frac{N}{2}, \dots, 0, \dots, \frac{N}{2} - 1 \right\}$$

とすると、式(2.4.12)より(i)と同様にして

$$\begin{bmatrix} G_0(\nu) \\ e^{-jn\Omega\varphi T} G_\varphi(\nu) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ e^{j\xi\varphi\pi} & e^{-j\xi\varphi\pi} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} G(\nu + n_0) \\ G(\nu - n_0 - N) \end{bmatrix} \quad (2.4.26)$$

が得られ、これを解くと次式が得られる。

$$\begin{bmatrix} G(\nu + n_0) \\ G(\nu - n_0 - N) \end{bmatrix} = \frac{1}{2j \sin \xi\varphi\pi} \begin{bmatrix} -e^{-j\xi\varphi\pi} & 1 \\ e^{j\xi\varphi\pi} & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} G_0(\nu) \\ e^{-jn\Omega\varphi T} G_\varphi(\nu) \end{bmatrix} \quad (2.4.27)$$

ただし  $n = \nu + \ell N$ ,  $\ell$ : 整数,  $\nu \in \mathcal{N}$

#### 2.4.2 離散的フーリエ変換の計算法

式(2.4.25), (2.4.27)は, 周波数帯域が

$$[-\omega_u, -\omega_l) \cup (\omega_l, \omega_u) \quad (2.4.28)$$

に制限された信号  $g(t)$  の DFT が, 次式で定義される

$$\xi \triangleq \frac{\omega_u + \omega_l}{\omega_u - \omega_l} \quad (2.4.29)$$

が整数のとき, 標本間隔  $T$  が

$$T = \frac{2\pi}{\omega_u - \omega_l} \quad (2.4.30)$$

時間差  $\varphi T$  が

$$\varphi = \frac{2m-1}{2\xi} \quad m \in \{1, 2, \dots, \xi\} \quad (2.4.31)$$

となる  $g(t)$  の 2 組の標本列  $\{g_0\}$ ,  $\{g_\varphi\}$  の DFT すなわち  $G_0(\nu)$ ,  $G_\varphi(\nu)$  を基礎にしてベクトル合成的に計算できることを示している. つまり  $g(t)$  は 2 重標本化することによって周波数分析できることを示している. 2 重標本列の標本点の相互のずれ方は  $\xi$  の値に従って上記の  $\varphi$  の値によって決定されるのであるが, このことは, ずれ方を調整することによって分析帯域を変えられることを示しており, これはヘテロダイン方式において局部発振周波数を変えることによって分析帯域を選択することに対応しているものである. また, この計算法による  $g(t)$  の DFT の計算の手数が, 最高周波数の 2 倍のサンプリング速度で標本化した標本値列の DFT の計算手数よりも短いことは, 標本点の数の相違を考えれば明らかである.

以下にこの DFT 計算法を手順を追って述べる.

与えられた信号  $g(t)$  は, 式(2.4.28)の形に帯域制限されていることがあらかじめわかっているものとする. このとき, 式(2.4.29)で定義される  $\xi$  を計算してみて,  $\xi$  が整数にならない場合には,  $\omega_l$  を与えられた  $\omega_l$  より小さい値に,  $\omega_u$  を与えられた  $\omega_u$  より大きい値に直して  $\xi$

が整数になるようにする。ξ を整数にする ω<sub>l</sub>, ω<sub>u</sub> が設定できれば、式(2.4.30)に従って標本間隔 T を定め、式(2.4.31)に従って φ を決定する。(このとき、もし ξ が奇数ならば、φ = 1/2 とする方がよい。) ここまでで 2 重標本化の仕様が決定されるので、これに従って信号 g(t) を 2 重標本化し、2 組の N 点等間隔標本列 {g<sub>0</sub>}, {g<sub>φ</sub>} の DFT G<sub>0</sub>(ν), G<sub>φ</sub>(ν) を求める。周波数帯域 [ω<sub>l</sub>, ω<sub>u</sub>] に相当する DFT は次のように求まる。

(i) ξ が奇数のときは、式(2.4.25)より

$$G(\nu + n_0) = \frac{e^{j\varphi\pi}}{2j \sin \xi\varphi\pi} \left[ -e^{-j(\xi+1)\varphi\pi} G_0(\nu) + e^{-jn\Omega\varphi T} G_\varphi(\nu) \right] \quad (2.4.32)$$

ただし、

$$\omega = n\Omega = (\nu + n_0)\Omega, \quad \nu \in \mathcal{N} \triangleq \{0, 1, 2, \dots, N-1\}$$

$$n_0 = \frac{\omega_l}{\Omega}, \quad \Omega = \frac{4\pi}{NT}$$

(ii) ξ が偶数のときは、式(2.4.27)より

$$G(\nu + n_0) = \frac{-1}{2j \sin \xi\varphi\pi} \left[ e^{-j\xi\varphi\pi} G_0(\nu) - e^{-jn\Omega\varphi T} G_\varphi(\nu) \right] \quad (2.4.33)$$

ただし、

$$\omega = n\Omega = (\nu + n_0)\Omega, \quad \nu \in \mathcal{N} \triangleq \left\{ -\frac{N}{2}, \dots, 0, \dots, \frac{N}{2} - 1 \right\}$$

$$n_0 = \frac{\omega_l}{\Omega}, \quad \Omega = \frac{4\pi}{NT}$$

### 2.4.3 計算例

2 重標本化による周波数分析のシミュレーション例として、未知信号 g(t) が 6 Hz から 14 Hz 以外の周波数成分を含まないということがあらかじめわかっていたとして、これを 2 重標本化によって周波数分析することを考える。

式(2.4.29)によると ξ = 2.5 になり、これは ξ が整数でなければならないという条件を満

たしていない。そこで $\xi$ が整数になるような適当な $\omega_l, \omega_u$ を探すと、 $\omega_l = 2\pi \times 5$ 、 $\omega_u = 2\pi \times 15$ で $\xi = 2$ となるのでこれを採用する。すなわち信号 $g(t)$ は5 Hz から15 Hz 以外の周波数成分を含んでいないものと解釈し直す。次に、式(2.4.30)により標本間隔 $T = 0.1$  sec, また式(2.4.31)より $\varphi = \frac{1}{4}$ または $\frac{3}{4}$ となる。ここでは $\varphi = \frac{1}{4}$ として計算を行なう。図2.4.1は、帯域制限と2重標本化を図示したものである。

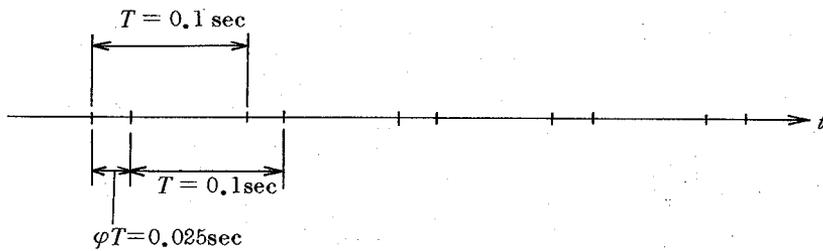
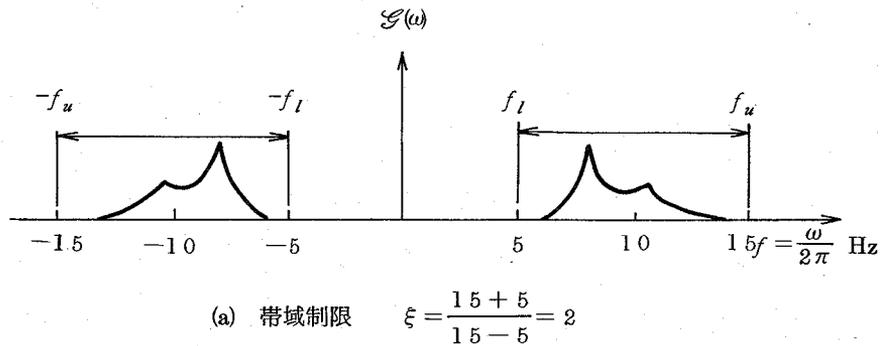


図2.4.1 帯域制限とそれに対応した2重標本化

一方の標本列を $\{g_0\}$ 、他方を $\{g_\varphi\}$ とし、それぞれのDFTを $G_0(\nu)$ 、 $G_\varphi(\nu)$ とする。 $\xi$ が偶数であるので、この例は(ii)の場合に相当し、 $\nu$ は $\mathcal{N}$ の中の値をとる。

$$\nu \in \mathcal{N} \triangleq \left\{ -\frac{N}{2}, \dots, 0, \dots, \frac{N}{2} - 1 \right\}$$

$\xi = 2$ 、 $\varphi = \frac{1}{4}$ を式(2.4.33)に代入すると次式が得られる。

$$G(\nu + n_0) = \frac{1}{2} [G_0(\nu) - j e^{-j \frac{4\pi n}{N} \frac{1}{4}} G_\varphi(\nu)]$$

従って  $g(t)$  の 5 Hz から 15 Hz に相当する DFT は  $G(\nu + n_0)$   $\nu \in \mathcal{N}$  として,  $g(t)$  の 10 Hz サンプルングによる 2 組の標本列  $\{g_0\}, \{g_\varphi\}$  の DFT  $G_0(\nu), G_\varphi(\nu)$  から上式によって計算できる。

以下に  $g(t) = \sin 2\pi \times 13 t$  としたときのシミュレーション結果を示す。DFT には FFT を使用し,  $N = 256$  とした。図 2.4.2 は  $G_0(\nu), G_\varphi(\nu), G(\nu + n_0)$  の関係を示す。ここでは横軸は  $\omega = n\Omega = (\nu + n_0)\Omega$  として周波数も並記している。同図で最大レベルの  $\nu$  を  $\nu_1, \nu_2$  とし,  $n = \nu + n_0$  でそれらに対応する点を  $n_1, n_2$  とすると,  $n_1$  は 13 Hz に対応する標本位置で,  $n_2$  はその折返し誤差が現れる位置であるが, 図 2.4.3 で, それらの位置での  $G_0(\nu), G_\varphi(\nu)$  の位相関係を見ると, 上式の  $G_\varphi(\nu)$  にかかる係数  $-j e^{-j \frac{4\pi n}{N} \frac{1}{4}}$  によって折返し誤差が消えることがわかる。

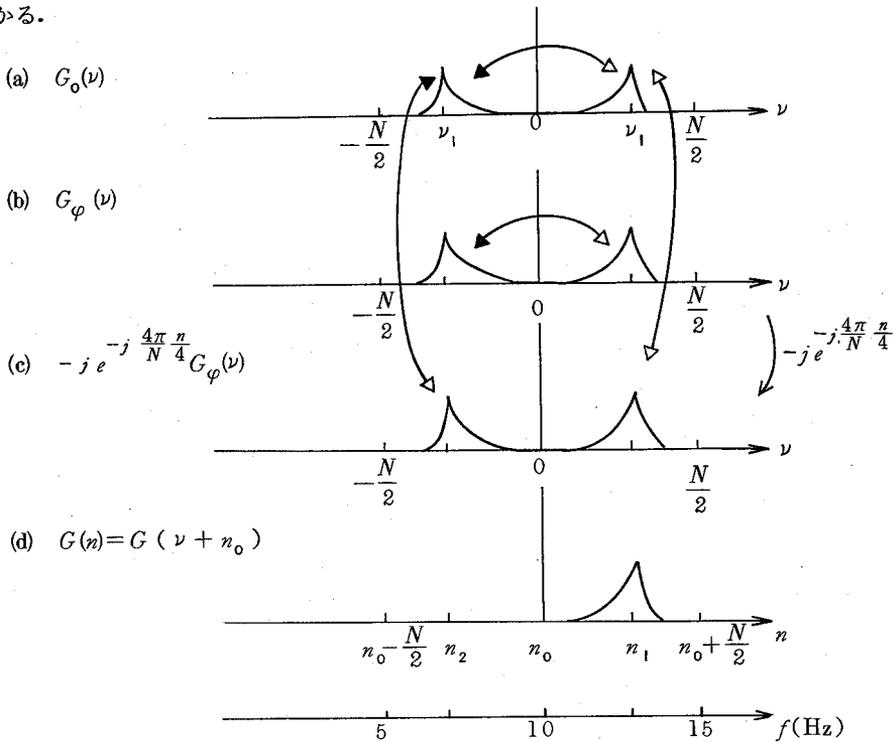


図 2.4.2  $G_0(\nu), G_\varphi(\nu), G(n)$  の関係

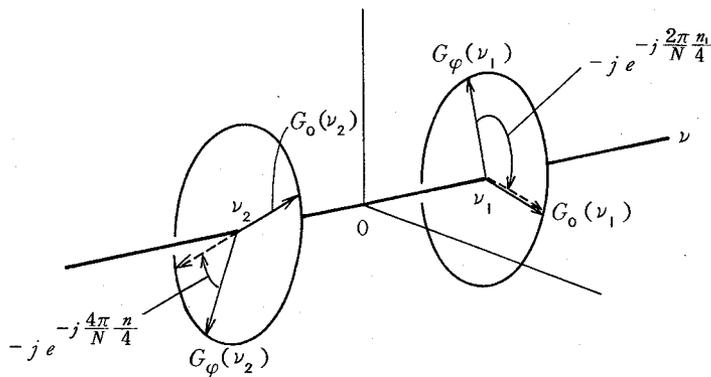


図 2.4.3  $\nu = \nu_1, \nu_2$  での  $G_0(\nu)$  と  $G_\varphi(\nu)$  の位相関係

#### 2.4.4 応用

2重標本化による DFT 計算法の応用例を示す。

##### (I) 折返しを利用したデジタル周波数分析システムの改良

図 2.2.5 に示した、デジタル周波数分析システムは、折返し周波数の整数倍の周波数付近の分析が不可能であったが、本節の  $\xi = \text{偶数}$  の場合は正にこの難点の解消に最適である。それは、折返し周波数の整数倍の周波数は、正確に  $\xi = \text{偶数}$  となる場合の分析帯域の中央に来るからであって、 $\xi = \text{奇数}$  の帯域と  $\xi = \text{偶数}$  の帯域は図 2.4.4 に示すように、互いに他の帯域分割周波数を中央に持つように相補の形で並んでいる。図の  $f_c$  は 1 標本点列に対するサンプリング速度である。つまり  $f_c = \frac{1}{T}$  である。

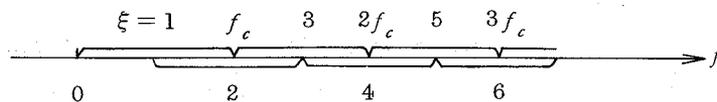


図 2.4.4  $\xi$  の値による周波数軸の分割

$f_c$  は 2 重標本列の 1 標本点列のサンプリング速度

従って広帯域デジタル周波数分析システムとしては、全周波数領域を図 2.4.4 のように分割して、各帯域について 2 重標本化による周波数分析を行ない、フィルタの特性の平坦な所だけをつなぎ合わせるようにすれば分析の信頼性が向上する。

## (II) 可変分解能周波数分析システム

2重標本化によるFFTの計算法を用いると、固定標本点数のFFT・ROMを2個使って可変分解能のデジタル周波数分析システムを図2.4.5のようにして構成することができる。データは一度アナログのまま蓄積しておき、観測者からの分析帯域の指定によってフィルタを制御してその出力を2重標本化するようにする。このシステムによると指定する帯域の幅を狭くすることによって、フィルタが物理的に構成できる限りにおいていくらかでも分解能を上げることができる。この方法は、例えば衝撃波の伝搬、反射の解析による材料の研究とか、パルスNMR（核磁気共鳴）によるFree Induction Decayの解析などの狭い帯域の高精度の周波数分析を要する研究に極めて有効であると考えられる。

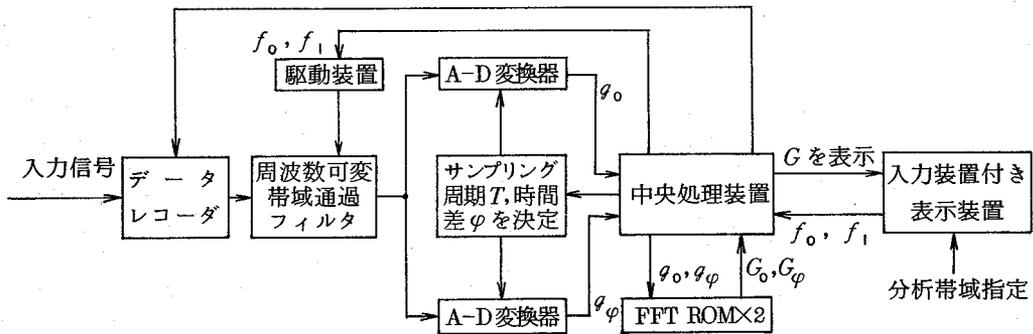


図2.4.5 可変分解能周波数分析システムの構成

## 2.5 離散的フーリエ変換の補間法

FFTが開発されて以来、計算機による周波数分析が広く行なわれているが、その結果は周波数軸上で等間隔に離れた点でのスペクトルの標本値だけが求められているに過ぎない。このため場合によっては、求めたい周波数成分についての計算結果が直接には求められていないということもあり得る。(例えば周期信号を非整数周期だけ切り出してFFTを適用した場合、周波数軸上の標本点の並び方はスペクトルの調波構造と一致しない。)このような場合、求めたい周波数成分についての計算をはじめから定義に基づいて行なうか、あるいは適当な補間法を適用するかのどちらか一方を選ばなければならない。定義に基づいた計算は標本点が多い場合には計算量が膨大になるので必ずしも良い方法ではない。一方FFTの結果から補間を正確に行なう場合、1点の補間についてDFTと同程度の計算量が必要なので、補間を行なうためには計算量を軽減する工

夫が望まれる。

本節では、まず 2.5.1 において離散的周波数スペクトルの補間公式を示し、2.5.2 では原データの後に 0 を付加して F F T の結果の周波数精度を見かけ上げる方法による補間法<sup>(31)</sup>を示す。最後に 2.5.3 では F F T によって求められた離散的周波数スペクトルから精度の良い近似補間値を、打ち切り型の標本化関数を利用して求める方法<sup>(32)</sup>を示す。

### 2.5.1 離散的周波数スペクトルの補間公式

ここでは与えられた D F T の補間について、基本的な低域通過型信号  $g(t)$  の標本間隔  $T$  による標本値列  $\{g(kT)\}$  の  $N$  点 D F T の補間を考える。

与えられた D F T を

$$G(n) \quad n \in \mathcal{N} \triangleq \left\{ -\frac{N}{2}, \dots, 0, \dots, \frac{N}{2} - 1 \right\} \quad (2.5.1)$$

とし、周波数軸上の標本間隔を  $\Omega$  とすると、 $G(n)$  は  $\omega = n\Omega$  に対応するスペクトル標本値であると考えられる。ここで一般の周波数

$$\omega = \nu\Omega \quad -\frac{N}{2} \leq \nu < \frac{N}{2} \quad (2.5.2)$$

での補間公式は次式で与えられる。

$$G(\nu) = \sum_{n \in \mathcal{N}} G(n) S((\nu - n)\pi) \quad (2.5.3)$$

ただし、 $S(x)$  は標本化関数であって次式で与えられる。

$$S(x) = \frac{\sin x}{x} \quad (2.5.4)$$

式(2.5.3)による方法では、1点の補間に  $N$  回の乗算が必要であるので、周波数軸上の多数の点の補間を行なうのには不適当である。1点の補間に  $N$  回の乗算を使うなら、むしろ定義に戻って

$$G(\nu) = \sum_{k \in \mathcal{N}} g(kT) e^{-j\nu\Omega kT} \quad (2.5.5)$$

として計算する方が計算誤差の点から考えても望ましい。ただし、ここで

$$\Omega = \frac{2\pi}{NT} \quad (2.5.6)$$

であるから式(2.5.5)は次のように書ける。

$$G(\nu) = \sum_{k \in \mathcal{K}} g(kT) e^{-j\frac{2\pi}{N}\nu k} \quad (2.5.7)$$

この計算は補間というよりは単なるDFT的計算であるが、0に近い $\nu$ については、いかなる補間法よりも信頼性が高い。

### 2.5.2 原データへの0付加による補間法

ここでは、FFTによって求められた離散的周波数スペクトルをさらに全帯域にわたって、周波数軸上の標本点の密度を上げる方法を示す。

標本間隔 $T$ による標本列

$$\{g(kT)\}, \quad k \in \mathcal{K} \triangleq \{0, 1, \dots, N-1\} \quad (2.5.8)$$

の $N$ 点DFTを

$$\{G(n)\}, \quad n \in \mathcal{N} \triangleq \left\{-\frac{N}{2}, \dots, 0, \dots, \frac{N}{2}-1\right\} \quad (2.5.9)$$

とする。このとき周波数軸上の標本間隔 $\Omega$ は式(2.5.6)で与えられる。つまり  $\omega = n\Omega$  のDFTは

$$\begin{aligned} G(n) &= \sum_{k \in \mathcal{K}} g(kT) e^{-jn\Omega kT} \\ &= \sum_{k \in \mathcal{K}} g(kT) e^{-j\frac{2\pi}{N}nk} \quad n \in \mathcal{N} \end{aligned} \quad (2.5.10)$$

であるが、ここでデータに $M-N$ 個の0を付加して

$$g(kT) = \begin{cases} g(kT) & k \in \mathcal{K} \\ 0 & k \in \mathcal{M} \triangleq \{N, N+1, \dots, M-1\} \end{cases}$$

とした $M$ 点標本列 $\{g(kT)\}$   $k \in \mathcal{K} \cup \mathcal{M}$ の $M$ 点DFTを $G'(m)$ とすると、その周波数軸上の標本間隔 $\Omega'$ は

$$\Omega' = \frac{2\pi}{MT} \quad (2.5.12)$$

となるので、 $\omega = m\Omega'$ でのDFTは、 $m \in \mathcal{M}' \triangleq \{-\frac{M}{2}, \dots, 0, \dots, \frac{M}{2} - 1\}$ に対して

$$\begin{aligned} G'(m) &= \sum_{k \in \mathcal{K} \cup \mathcal{M}} g(kT) e^{-jm\Omega' kT} \\ &= \sum_{k \in \mathcal{K}} g(kT) e^{-j\frac{2\pi}{M}mk} \end{aligned} \quad (2.5.13)$$

$$= \sum_{n \in \mathcal{N}} G(n) \frac{\sin(n - \frac{N}{M}m)\pi}{(n - \frac{N}{M}m)\pi} e^{j(n - \frac{N}{M}m)\pi} \quad (2.5.14)$$

となる(付録I)ので、 $\frac{n}{N} = \frac{m}{M}$ となる標本点に関しては

$$G'(m) = G(n) \quad (2.5.15)$$

となり、その他の標本点については、 $N$ 点DFTを標本化関数(位相項が付加している)で補間した値になる。以上より、DFT計算において、データに続けて0を付加した標本値列のDFTは、見かけ上周波数精度の高い結果を与える。ここで「見かけ上」と断ったのは、周波数軸上の

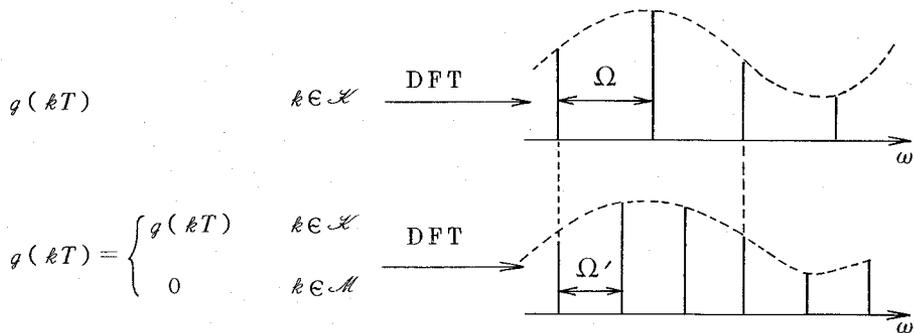


図2.5.1 0付加によるDFTの補間

新しい標本点での値は計算結果に本質的な情報の増加をもたらすものではないからである。この方法による補間の状況を図 2.5.1 に示す。

この補間法は、有限長データの DFT 計算に FFT を使用したい場合、標本点数を 2 のべき乗個にするためしばしば用いられる「0 付加」の正当性を証明するものである。FFT を使用する限り、計算結果は周波数軸上で等間隔に並んだ標本点上の値しか得られないので、この方法は補間法としてはあまり融通のきかない方法であるといえる。しかし、例えば減衰の速いインパルス応答標本値列からその周波数スペクトルを数値計算する場合などには極めて有効である。

### 2.5.3 打ち切り型標本化関数による近似補間法

2.5.1 で示した標本化関数による補間は計算量が膨大になるという欠点があり、2.5.2 で示した 0 付加 FFT による方法は周波数軸上の標本点のとり方に任意性がないという欠点がある。これらの難点を解決するために、ここでは標本化関数の両端を打ち切った形の「打ち切り型標本化関数」による DFT の近似補間法を提案する。

標本化関数は

$$S(x) = \frac{\sin x}{x} \quad (2.5.16)$$

で表わされるが、ここで打ち切り型標本化関数を次式で定義する。

$$\tilde{S}_l(x) = \begin{cases} S(x) & |x| \leq \frac{l}{2} \pi \\ 0 & |x| > \frac{l}{2} \pi \end{cases} \quad (2.5.17)$$

この  $\tilde{S}_l(x)$  を使うと、 $N$  点 DFT  $G(n) \quad n \in \mathcal{A}$  の正規化周波数  $\frac{\nu}{N} \quad (-\frac{N}{2} \leq \nu < \frac{N}{2})$  における近似補間値  $\tilde{G}_l(\nu)$  は

$$\tilde{G}_l(\nu) = \sum_{n \in \mathcal{A}} G(n) \tilde{S}_l((\nu - n)\pi) \quad (2.5.18)$$

として求めることができる。この打ち切り型標本化関数による近似補間法は、標本化関数の包絡線が両端へ行くに従って減衰することを利用して、補間点の近傍の標本値だけを使用して近似的な補間値を得るものである。式(2.5.18)によって、定数関数  $G(\omega) = 1$  をその標本点の中央で

= 1 ~ 20 として補間した結果を図 2.5.2 に示す。

これから、 $l$  が 2 の奇数倍のとき正の誤差、2 の偶数倍のとき負の誤差が大きく生じ、 $l$  が奇数のときは比較的誤差は小さく、その大きさは  $l$  が 2 増えるごとに正負の値を減衰しながらとっていることがわかる。このことを考慮して、使用する標本値の数を極力少なくして精度の良い近似補間値を得る方法として次式を提案する。

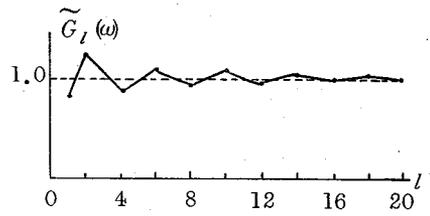


図 2.5.2  $\tilde{S}_l(x)$  による補間  $\tilde{G}_l(\omega)$  の  $l$  依存性

$$\widehat{G}_l(\nu) = \frac{1}{2} \{ \tilde{G}_l(\nu) + \tilde{G}_{l-2}(\nu) \} \quad l: \text{奇数} \quad (2.5.19)$$

以下、この補間法の手数と誤差の評価を述べる。

(I) 手数の評価

時間領域での標本点数を  $N$ 、周波数領域での求めたい標本点数を  $M$  としたときの手数（乗算 + 加算）の回数を (i) 定義式 (2.5.5) による計算、(ii) 標本化関数による補間式 (2.5.3)、(iii) 打ち切り型標本化関数による近似補間式 (2.5.19) による方法について比較すると表 2.5.1 のようになる。ただし方法(ii)、(iii)では実数値列用の FFT (3.3 節) を使用するものとした。図 2.5.3 は、方法(i)と(iii)の手数が同一になる  $M, N$  の組合せの点を、 $l$  をパラメータとして  $NM$  平面上で表わしたものである。各線より上の部分が、計算の手数の上で方法(iii)が(i)よりも有利な領域である。

表 2.5.1 補間の手数の比較

方 法	手 数	精 度
(i) DFT の定義による計算	$MN$	優
(ii) 標本化関数による補間	$N \log_2 N + MN$	良
(iii) 打ち切り型標本化関数による補間	$N \log_2 N + lM$	低域で不良

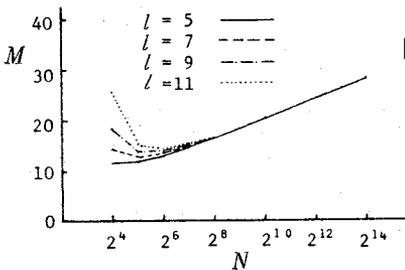


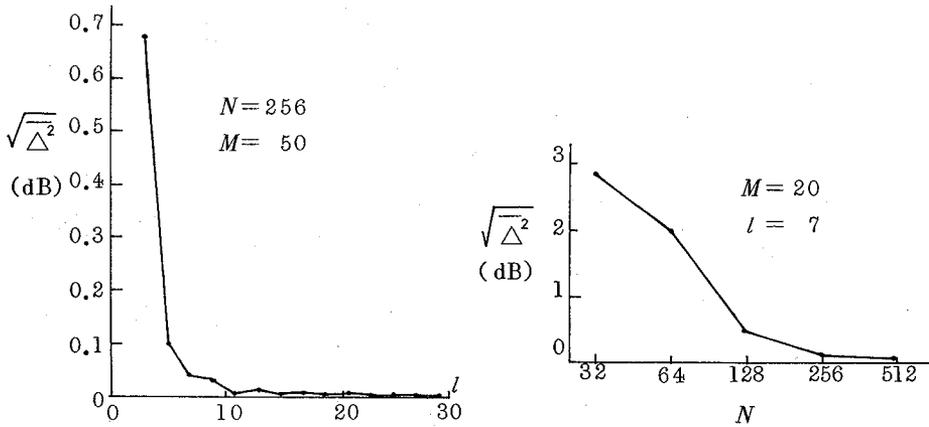
図 2.5.3 打ち切り型標本化関数による補間が手数の上で直接計算よりも有利な領域 (各線の上)

$M$ : 周波数領域の標本点数 (補間点数)  
 $N$ : 時間領域の標本点数 (2 のべき乗とする)  
 $l$ : 1 点の補間に使用する標本点数

(II) 誤差の評価

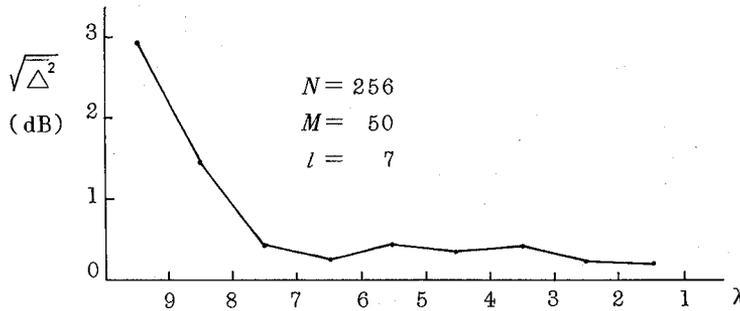
本補間法の誤差の  $l, N$ , および周波数帯域依存性について実験的に検討した結果の概略を図 2.5.4 に示す。誤差は、定義に従って計算した値との dB 値の差の r.m.s. ( 図中の記号は  $\sqrt{\Delta^2}$  ) で表わしている。(c) の周波数軸の尺度は正規化周波数の対数(底 2) に負号をつけたもので、 $\lambda = 1$  の点は折返し周波数、 $\lambda = 2$  はその  $\frac{1}{2}$  ,  $\lambda = 3$  は  $\frac{1}{4}$  の周波数に対応する。

以上から、計算の手数と誤差とのかね合いにより、適当な条件下 ( $N \geq 256$ ,  $l = 5, 7, 9$ ,  $1 < \lambda < 8$ ) では、多数 ( $M > 40$ ) の補間点での近似計算に本方法は極めて有効であることがわかる。この方法の利用例として、4.4.1 で FFT の計算結果の対数尺度周波数軸上への変換法を示す。



(a) 補間誤差の  $l$  依存性

(b) 補間誤差の  $N$  依存性



(c) 補間誤差の周波数帯域依存性

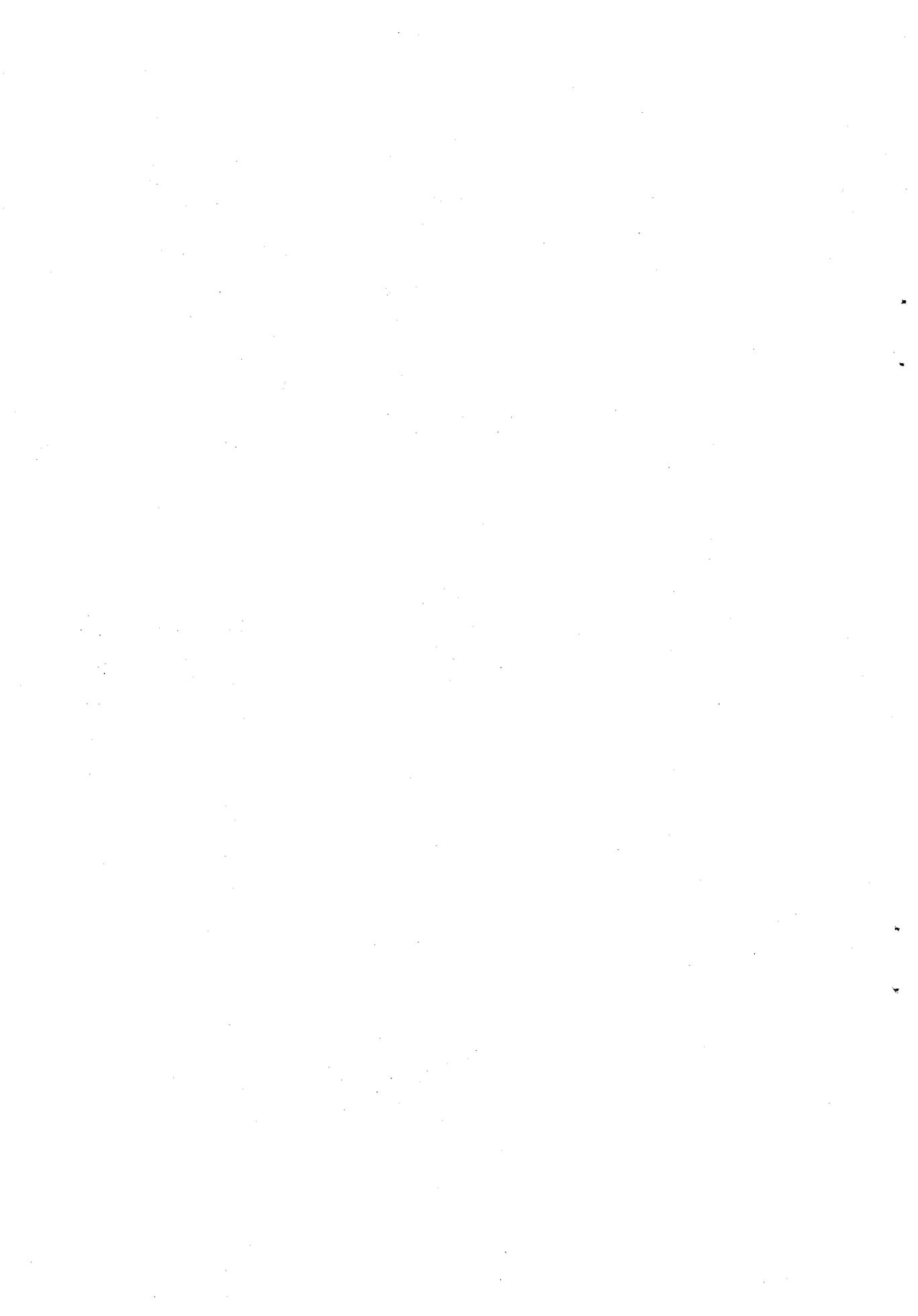
$\lambda = -\log_2 \frac{\nu}{N}$  : 正規化周波数  $\frac{\nu}{N}$  の逆対数表示

図 2.5.4 打ち切り型標本化関数による近似補間法の誤差

## 2.6 結 言

本章では、帯域通過型信号のデジタル周波数分析法として、周波数領域での折返しを利用した方法、ならびに2重標本化に基づいた方法を述べた。これらの方法によって分析できる信号は、帯域の位置に条件があるが、実際の周波数分析に際しては、これらの条件が満たされるように適当に分析範囲を拡張すればよいので実質上は問題にならない。一般の帯域通過型信号に対しては、2.3.4.で述べた離散的双直交変換を使用すればよいが、これは計算の複雑さに較べて得る所が少ない。従って帯域通過型信号の離散的周波数スペクトルの計算法として、数学的には離散的双直交変換を導入すると形が整うが、実用上は離散的双直交変換だけで処理するので十分であると考えられる。実用上問題となるのはむしろ分析以前のAD変換の前段階の帯域フィルタの構成である。

2.2.4で示した標本化定理の拡張は、2.3.1の記号を使うと、全周波数領域を $\xi =$ 奇数の互いに隣接する帯域に分割してその各帯域に $\varphi = \frac{1}{2}$ の2重標本化即ち等間隔標本化を適用したものと解釈できる。しかしこの拡張は、写像 $z = e^{sT}$ による $s$ 平面と $z$ 平面の対応関係から直接に導かれるものであるということが、この定理の本質的理解のためには重要である。



## 第3章 2重標本化に基づいた高速演算アルゴリズム

### 3.1 緒言

本章では、離散的フーリエ変換(DFT)およびそれに関連した数値計算の高速演算アルゴリズムについて述べる。

2.4節で、帯域通過型信号のDFTを2重標本化によって計算する方法を示したが、本章では、まずその計算法の一つの場合として高速フーリエ変換(FFT)<sup>注</sup>アルゴリズムの原理が直接に導かれることを示し、次に実用上要求の多い実数値データに対するFFTの高速化アルゴリズムを、同じく2重標本化の理論を用いて導く、さらに、画像情報等を扱う際の常用手段である2次元DFTを行列で表示し、その数値計算をFFTを2重に用いて効率化を計る方法を述べる。最後に、ラプラス変換の数値計算法として、 $s$ 平面の虚軸に平行な直線上に並んだ標本点での値をFFTを用いて効率的に求める方法を示す。

### 3.2 2重標本列の離散的フーリエ変換の計算法に基づく高速フーリエ変換(FFT)アルゴリズム

2.4節で、帯域通過型信号のDFTを2重標本化によって計算する方法を示したが、このとき全体のDFTは奇数番目の標本値列のDFTと偶数番目の標本値列のDFTから計算されることになっていたが、全標本点数が2のべき乗ならさらに奇数番目および偶数番目の標本値列をそれぞれの中で再び奇数番目と偶数番目というように順次2分割して行くことができる。このように考えると、分割の過程で1段前の結果が有効に使えるようにすれば、この種のアルゴリズムが手数の軽減に非常に効果的であることは明白である。本節では、2.4節の計算法で $\xi = 1$ 、 $\varphi = \frac{1}{2}$ とするとFFTアルゴリズムの原理が直ちに導かれることを示す。

#### 3.2.1 高速フーリエ変換の原理の誘導

式(2.4.29)で $\omega_j = 0$ とすると $\xi = 1$ となり、式(2.4.31)より $\varphi = \frac{1}{2}$ となる。つまり帯域通過型信号で下限周波数が0のとき、2重標本化はそれを構成する2組の等間隔標本列の相

---

注 FFTは、1965年Cooleyら<sup>(1)</sup>によって開発されたDFTの数値計算のための高速演算アルゴリズムで、これによって $N$ 点複素DFTに要する乗算回数が $N^2$ から $2N \log_2 N$ に軽減されたため、従来實際上ほとんど計算不可能であった多点データのDFTが計算可能になり、実用面で高く評価されている。

対的な時間差が一方の標本間隔の $\frac{1}{2}$ となる。このとき2重標本化は実質的に等間隔標本化になる。そして、その等間隔標本列の偶数番目および奇数番目の標本値列がそれぞれ $\{g_0\}$ および $\{g_\varphi\}$ となるのである。この場合、DFTを計算するための式(2.4.25)は全体の標本点数を $N$ とすると、 $n_0=0$ なので次のようになる。

$$\begin{bmatrix} G(n) \\ G(n-\frac{N}{2}) \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} G_0(n) \\ e^{-j\frac{4\pi}{N}n} G_\varphi(n) \end{bmatrix} \quad (3.2.1)$$

$$n \in \mathcal{N}' \triangleq \{0, 1, \dots, \frac{N}{2}-1\}$$

これは、帯域が

$$[-\omega_u, \omega_u) = [-2\pi f_u, 2\pi f_u)$$

に制限されている信号 $g(t)$ を標本間隔 $T$ 、時間差 $\varphi$ が

$$T = \frac{1}{f_u}, \quad \varphi = \frac{1}{2}$$

の2重標本化すなわち、標本間隔 $\frac{T}{2}$ の等間隔標本化をしたときのDFTの計算法を示したものであって、ここで $G_0(n)$ 、 $G_\varphi(n)$ はそれぞれ偶数番目および奇数番目の標本値列のDFTである。これより、 $[0, \omega_u)$ の周波数に対応するDFT  $G(n)$   $n \in \mathcal{N}'$ は

$$G(n) = \frac{1}{2} [G_0(n) + e^{-j\frac{4\pi}{N}n} G_\varphi(n)] \quad (3.2.2)$$

また、 $[-\omega_u, 0)$ の周波数に対応するDFT  $G(n-\frac{N}{2})$   $n \in \mathcal{N}'$ は

$$G(n-\frac{N}{2}) = \frac{1}{2} [G_0(n) - e^{-j\frac{4\pi}{N}n} G_\varphi(n)] \quad (3.2.3)$$

として求められる。式(3.2.2)、(3.2.3)では、標本点数の寄与による係数 $\frac{1}{2}$ が付いているが、これは全体に同じ重みでかかっているので計算上では省略することができる。従って周波数

$$\omega = n\Omega, \quad n\Omega - \omega_u, \quad \text{ただし } \Omega = \frac{2\omega_u}{N} \quad (3.2.4)$$

でのDFTは、偶数番目の標本値列のDFT  $G_0(n)$  と奇数番目の標本値列のDFT  $G_1(n)$  に位相項  $e^{-j\frac{4\pi}{N}n}$  をかけたものの加減算によって計算できる。もとの標本点数  $N$  が2のべき乗なら、 $\{G_0(n)\}, \{G_1(n)\}$  を求めるためにさらに偶数番目の標本列の中を偶数番目と奇数番目に、また奇数番目の標本列の中を偶数番目と奇数番目に分割するというように、順次2分割して行くことができる。分割の各段階での計算は、前段階の結果を使った加減算を行なうことになるので、式(3.2.1)はFFTアルゴリズムの原理を表わしていることになる。

### 3.2.2 高速フーリエ変換アルゴリズム

実際に前記の考え方に従って  $N$  ( $=2$  のべき乗) 点のDFTを計算するには次のように工夫を要する。

- (i) 計算は2点DFTから始めて、順次標本点数を2倍に増加させる方向で行なう。
- (ii) 複素配列を2組使用して、1段階進むたびに計算結果を空いている方の配列に格納し、現在どちらに新しい結果が入っているかを記録する。
- (iii) 現在何段目の計算を行なっているか、および何点のDFTをしているかを示すインデックスをもっておく。

このような点を考慮したFFTアルゴリズムのフローチャートを図3.2.1に示す。ここで使用した配列名および変数名は次の内容を意味する。

$N$	:	標本点数
$T_1(N), T_2(N)$	:	複素配列 ( $T_1$ は入出力用)
$SW$	:	$T_1$ を使うか $T_2$ を使うかの識別符号
$ID$	:	現在の段階を示す番号
$IH$	:	現在の段階で扱う1組のDFTの標本点数
$JA1, JA2$	:	使用するデータ(前段階の結果)の番地
$J, L$	:	結果の格納番地
$WR$	:	回転因子

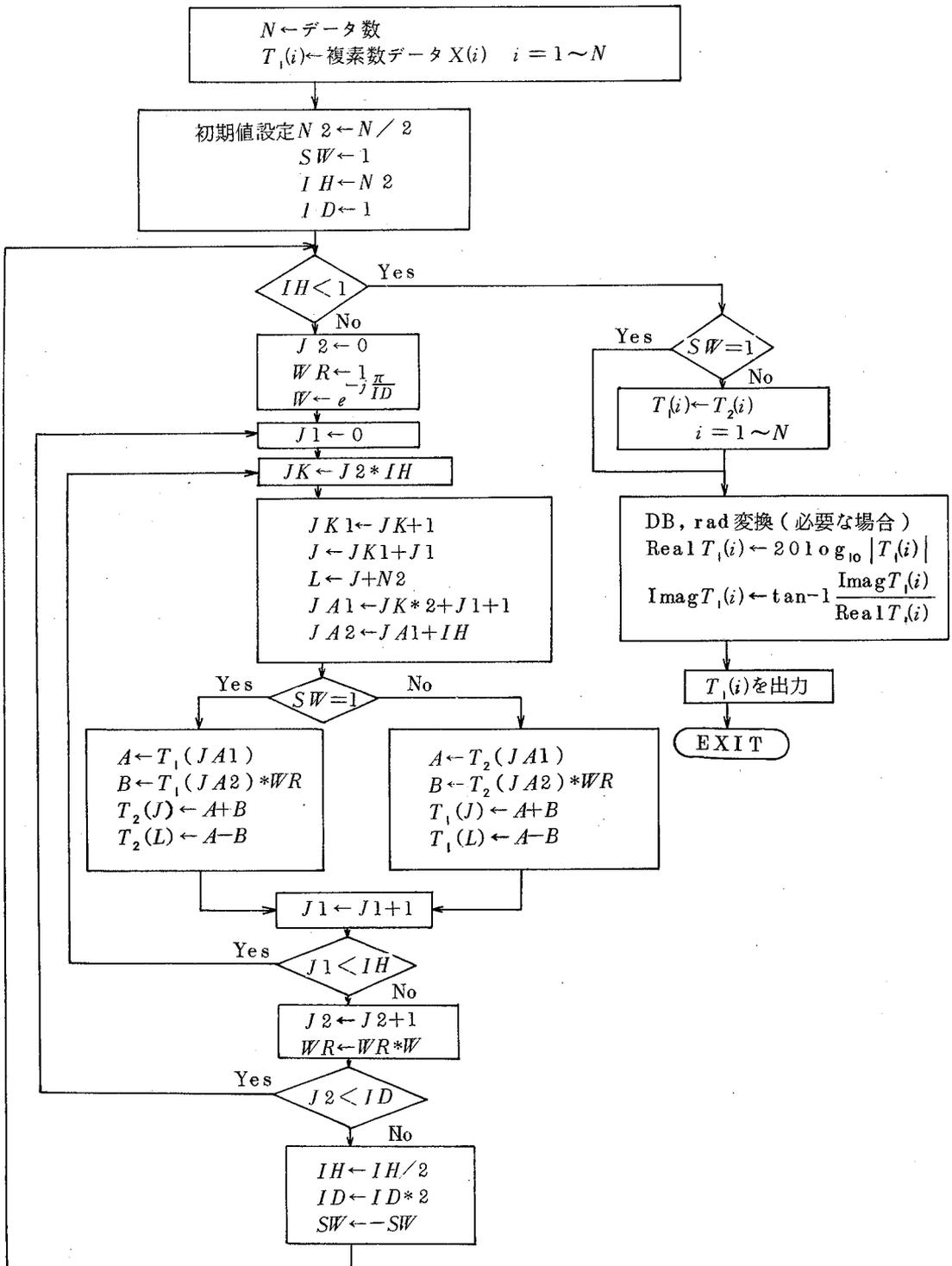


図3.2.1 FFTのフローチャート

### 3.3 実数値列に対する高速フーリエ変換アルゴリズム

現在、DFTの計算には通常FFTが用いられるが、これを特にハードウェアで実現する際は可能な限りのワークエリアの縮小、計算時間の短縮が望まれる。実数値列のDFTをFFTで求める場合には、通常複素配列の実部にデータを、虚部にはすべて0を入れて計算し、また最終的な結果は共役対称性をもっているため、そのような冗長性を排除した効率的なアルゴリズムの開発が当然の要求として研究されてきた。<sup>(33)</sup> 本節では、この問題に対して、2.4節で示した2重標本化によるDFTの計算法を応用した一つの解答を与える。<sup>(34)</sup> この方法はFFTのハードウェア化に極めて有用である。

3.3.1で、まず等間隔標本列に対するDFTの計算法として、2.4節の $\xi=1$ 、 $\varphi=\frac{1}{2}$ に対するDFT計算法を再吟味し、その高速演算のためには偶数番目の標本値列のDFTと、奇数番目の標本値列のDFTを一挙に求めることができればよいことを明らかにする。3.3.2で、その方法として2組の実数標本値列のDFTを1回のFFTで同時に計算する方法を示す。そして3.3.3でこれらを組合わせて、 $N$ 点から成る実数標本値列のDFTを、 $\frac{N}{2}$ 点FFT 1回とあと少しの計算で求める方法を示す。この方法は、実数値の標本値列から仮想的な複素数列を作ってFFTを適用するので、複素化2重FFTと呼んでおく。

#### 3.3.1 等間隔標本値列の離散的フーリエ変換計算法

本節では、等間隔標本化による標本値列を扱うので、2.4節の2重標本化が等間隔標本化になる場合、すなわち $\varphi=\frac{1}{2}$ になる場合について述べる。式(2.4.31)からわかるように、 $\varphi=\frac{1}{2}$ とできるためには $\xi$ は奇数でなければならない。ここでは最も簡単な $\xi=1$ すなわち低域通過型信号の場合を想定して述べる。

与えられた等間隔標本値列を

$$\{q_k\} \quad k \in \mathcal{K} \triangleq \{0, 1, \dots, N-1\} \quad (3.3.1)$$

とする。 $\{q_k\}$ を次のように偶数番目と奇数番目に分ける。

$$\left. \begin{aligned} \{q_k^0\} &= \{q_{2k}\} \\ \{q_k^1\} &= \{q_{2k+1}\} \end{aligned} \right\} \quad k \in \mathcal{K}' \triangleq \{0, 1, \dots, \frac{N}{2}-1\} \quad (3.3.2)$$

$\{q_k\}$ 、 $\{q_k^0\}$ 、 $\{q_k^1\}$ のDFTをそれぞれ

$$G(n) = \sum_{k \in \mathcal{K}} q_k e^{-j \frac{2\pi}{N} n k} \quad n \in \mathcal{N} \triangleq \left\{ -\frac{N}{2}, \dots, 0, \dots, \frac{N}{2} - 1 \right\} \quad (3.3.3)$$

$$\left. \begin{aligned} G^0(n) &= \sum_{k \in \mathcal{K}^0} q_k^0 e^{-j \frac{4\pi}{N} n k} \\ G^1(n) &= \sum_{k \in \mathcal{K}^1} q_k^1 e^{-j \frac{4\pi}{N} n k} \end{aligned} \right\} n \pmod{\frac{N}{2}} \in \mathcal{N}' \triangleq \left\{ -\frac{N}{4}, \dots, 0, \dots, \frac{N}{4} - 1 \right\} \quad (3.3.4)$$

とすると次式が成立する(付録J)

$$G(n) = G^0(n) + e^{-j \frac{2\pi}{N} n} G^1(n) \quad n \in \mathcal{N}' \quad (3.3.5)$$

これは式(3.2.2)で右辺の係数を除いたものと一致する。ここでは $\{q_k\}$ と $\{q_k^0\}$ 、 $\{q_k^1\}$ の標本点数のちがいが考慮されているから係数が落ちたと考えられる。この式は、 $G(n)$ が $G^0(n)$ と $G^1(n)$ から計算できることを示しているが、 $\{q_k\}$ は $N$ 点、 $\{q_k^0\}$ 、 $\{q_k^1\}$ はそれぞれ $\frac{N}{2}$ 点からなっているので、 $N$ 点DFTは $\frac{N}{2}$ 点DFTを2組実行することによって求められることを表わしている。従って、 $\frac{N}{2}$ 点DFTが2組一挙に計算できるなら、 $N$ 点DFTが $\frac{N}{2}$ 点DFTを実行するだけのワークエリアで計算できる上に、計算時間も短縮できることになるので極めて効率が良くなる。3.3.2で、2組の実数値列のDFTを1回のFFTによって計算する方法を示す。

### 3.3.2 2組の実数値列の同時FFT

2組の実数標本値列が与えられたとき、それらの標本点数が等しく、2のべき乗であるなら、以下に述べる方法によりそれら2組の標本値列のDFTを1回のFFT操作により同時に計算することが可能である。この方法を実数値列の同時FFTと呼んでおく。

2組の実数値列

$$\{a_k\}, \{b_k\} \quad k \in \mathcal{K} \triangleq \{0, 1, \dots, N-1\} \quad (3.3.6)$$

が与えられたとき、次式によって新しい複素数列 $\{c_k\}$ を定義する。

$$c_k = a_k + j b_k \quad k \in \mathcal{K} \quad (3.3.7)$$

$\{a_k\}$ 、 $\{b_k\}$ 、 $\{c_k\}$ のDFTをそれぞれ $\{A_n\}$ 、 $\{B_n\}$ 、 $\{C_n\}$ 、 $n \in \mathcal{N}$ とすると

$$C_n = A_n + j B_n \quad n \in \mathcal{A} \quad (3.3.8)$$

である。ここで  $A_n, B_n, C_n$  をそれぞれ実部 ( $A'_n, B'_n, C'_n$ ) と虚部 ( $A''_n, B''_n, C''_n$ ) に分離すると

$$\left. \begin{aligned} C'_n &= A'_n - B''_n \\ C''_n &= A''_n + B'_n \end{aligned} \right\} n \in \mathcal{A} \quad (3.3.9)$$

が成立する。一方  $\{a_k\}, \{b_k\}$  は実数値列であるとしたから  $\{A_n\}, \{B_n\}$  は  $n=0$  の前後で共役対称である。すなわち

$$\left. \begin{aligned} A'_{-n} &= A'_n, & A''_{-n} &= -A''_n \\ B'_{-n} &= B'_n, & B''_{-n} &= -B''_n \end{aligned} \right\} n \in \mathcal{A}' \triangleq \{0, 1, \dots, \frac{N}{2}-1\} \quad (3.3.10)$$

従って、式(3.3.10)を式(3.3.9)に代入すると  $n \in \mathcal{A}'$  に対して次式が成立する。

$$\left. \begin{aligned} C'_n &= A'_n - B''_n \\ C'_{-n} &= A'_{-n} - B''_{-n} = A'_n + B''_n \\ C''_n &= A''_n + B'_n \\ C''_{-n} &= A''_{-n} + B'_{-n} = -A''_n + B'_n \end{aligned} \right\} n \in \mathcal{A}' \quad (3.3.11)$$

これから、 $A_n, B_n$  の実部および虚部が求まるので、 $A_n, B_n$  は  $C_n$  の実部、虚部を用いて次のように表わすことができる。

$$\left. \begin{aligned} A_n &= \frac{1}{2} [(C'_n + C'_{-n}) + j(C''_n - C''_{-n})] \\ B_n &= \frac{1}{2} [(C''_n + C''_{-n}) + j(-C'_n + C'_{-n})] \end{aligned} \right\} n \in \mathcal{A}' \quad (3.3.12)$$

すなわち、二つの実数値列  $\{a_k\}, \{b_k\}$  の DFT を式(3.3.7)で定義される複素数値列  $\{c_k\}$  の DFT から計算できる。従って 2 組の実数値列の  $N$  点 FFT が 1 回の  $N$  点 FFT で計算可能であることがわかる。

### 3.3.3 実数値列の複素化2重FFT

3.3.1と3.3.2を結合して,  $a_k = g_{2k}$ ,  $b_k = g_{2k+1}$  と考えると,  $N$ 点実数値列のDFTを1回の $N/2$ 点FFTによって計算することが可能になる. 図3.3.1にそのフローチャートを示す. ここではプログラムとの対応のため添字は自然数とし, 与えられた実数値列を

$$\{g_i\}, \quad i \in \mathcal{S} \triangleq \{1, 2, \dots, N\} \quad (3.3.13)$$

とし, FFTのための複素配列を次のようにする.

$$\{C_i\}, \quad i \in \mathcal{S}' \triangleq \{1, 2, \dots, \frac{N}{2}\} \quad (3.3.14)$$

この方法によって, 通常の $N$ 点FFTと較べて, ワークエリアは半分に, また計算の手数は $2N \log_2 N$ だったものが $2 \left(\frac{N}{2}\right) \log_2 \left(\frac{N}{2}\right) + N = N \log_2 N$ となり, すべての面において効率が2倍になっていることがわかる. (85), (86)

### 3.4 2次元フーリエ変換の高速化

本節では, 画像などの2次元情報を扱う場合の常用手段である2次元フーリエ変換の数値計算の高速化の方法を示す.

3.4.1では, 2次元離散的フーリエ変換の行列表示

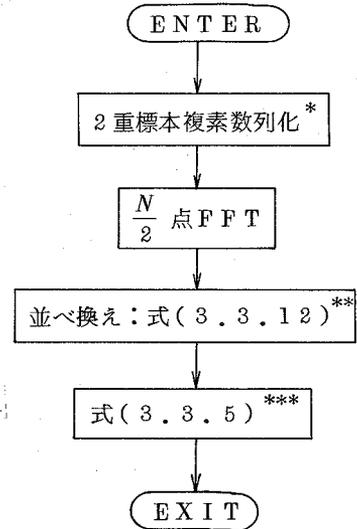


図3.3.1  
実数値列の複素化2重  
FFTのフローチャート

\*  $\text{Re}(C_i) \leftarrow g_{2i-1}, \quad \text{Im}(C_i) \leftarrow g_{2i} \quad i \in \mathcal{S}'$

\*\* ワークエリア節約のため, 式(3.3.12)の $A, B$ は次の形で $C$ に格納しておくことにする.

$$C_1 \leftarrow A_1 + j A_{N/4+1}, \quad C_{N/4+1} \leftarrow B_1 + j B_{N/4+1}$$

$$C_i \leftarrow A_i, \quad C_{N/4+i} \leftarrow B_i, \quad i \in \mathcal{S}'' \triangleq \{2, 3, \dots, \frac{N}{4}\}$$

従って実際の操作は次のようにする.

$$C_1 \leftarrow \text{Re}(C_1) + j \text{Re}(C_{N/4+1})$$

$$C_{N/4+1} \leftarrow \text{Im}(C_1) + j \text{Im}(C_{N/4+1})$$

$$\left. \begin{aligned} C_i &\leftarrow \frac{1}{2} [\text{Re}(C_i + C_{N/2+2-i}) + j \text{Im}(C_i - C_{N/2+2-i})] \\ C_{N/4+i} &\leftarrow \frac{1}{2} [\text{Im}(C_i + C_{N/2+2-i}) - j \text{Re}(C_i - C_{N/2+2-i})] \end{aligned} \right\} i \in \mathcal{S}''$$

を示し、3.4.2でその変換行列がクロネッカ積に分解できることを示す。すなわち、2次元DFTの変換行列には規則性に基づく冗長性があることを明らかにして、高速演算が可能であることを示す。その規則性は本質的には1次元DFTに対するFFTのアルゴリズムが適用可能であることを示しているのので、2次元DFTにはFFTによる高速演算を駆使できる。3.4.3では、実際の2次元FFTの計算の具体的な方法を示す。ここで示す方法は、3.3.2で示した2組の実数値列の同時FFTの手法を使うので、計算手数を普通の2次元FFTに較べて半分に軽減するものである。

### 3.4.1 2次元離散的フーリエ変換の行列表示

2次元関数  $g(x, y)$  の標本値の配列

$$\{g_{mn}\}, \quad m \in m \triangleq \{0, 1, \dots, M-1\} \quad (3.4.1)$$

$$n \in n \triangleq \{0, 1, \dots, N-1\}$$

を行列  $g$  で表わす。すなわち、縦、横の標本点数をそれぞれ  $M, N$  として次のようにおく。

$$g \triangleq [g_{mn}] = \begin{bmatrix} g_{00} & \dots & g_{0N-1} \\ \vdots & & \vdots \\ g_{M-10} & \dots & g_{M-1N-1} \end{bmatrix} \quad (3.4.2)$$

(  $g(x, y)$  と  $g_{mn}$  で縦と横の添字が入れ替っているが、これはそれぞれ2次元座標と行列の記法に従っただけで特に意味はない。 )

行列  $g$  の2次元DFTを

$$G = [G(p, q)] = [G_{kl}] = \begin{bmatrix} G_{00} & \dots & G_{0N-1} \\ \vdots & & \vdots \\ G_{M-10} & \dots & G_{M-1N-1} \end{bmatrix} \quad (3.4.3)$$

$$\begin{aligned} &*** \quad C_i \leftarrow \operatorname{Re}(C_i + C_{N/4+1}) + j \operatorname{Re}(C_i - C_{N/4+1}) \\ &\quad C_{N/4+1} \leftarrow \operatorname{Im}(C_i) - j \operatorname{Im}(C_{N/4+1}) \\ &\quad \left. \begin{aligned} C_i &\leftarrow C_i + e^{-j\frac{2\pi}{N}(i-1)} C_{N/4+i} \\ C_{N/2+2-i} &\leftarrow C_i - e^{-j\frac{2\pi}{N}(i-1)} C_{N/4+i} \end{aligned} \right\} i \in \mathcal{I}'' \end{aligned}$$

$$\text{ただし } p = k - \frac{M}{2}, \quad q = l - \frac{N}{2}$$

と書くことにすると、DFTの定義により $G(p, q)$ は次のようになる。

$$G(p, q) \triangleq \sum_{m \in m'} \sum_{n \in n'} g_{mn} e^{-j\frac{2\pi}{M}pm} e^{-j\frac{2\pi}{N}qn} \quad (3.4.4)$$

$$p \in m' \triangleq \left\{ -\frac{M}{2}, \dots, 0, \dots, \frac{M}{2} - 1 \right\},$$

$$q \in n' \triangleq \left\{ -\frac{N}{2}, \dots, 0, \dots, \frac{N}{2} - 1 \right\}$$

ここで、 $g(x, y)$ の縦方向の標本間隔を $T_V$ 、横方向の標本間隔を $T_L$ とすると、空間周波数領域での縦方向の標本間隔 $\Omega_V$ 、横方向の標本間隔 $\Omega_L$ は

$$\Omega_V = \frac{2\pi}{MT_V}, \quad \Omega_L = \frac{2\pi}{NT_L} \quad (3.4.5)$$

(85), (86)

であるので、式(3.4.4)は次のようにも書ける。

$$G(p, q) = \sum_{m \in m'} \sum_{n \in n'} g_{mn} e^{-j p \Omega_V m T_V} e^{-j q \Omega_L n T_L} \quad (3.4.6)$$

つまり $G_{pq}$ は空間周波数 $\omega_V = p\Omega_V$ 、 $\omega_L = q\Omega_L$ での2次元フーリエ変換の値に対応している。ここで

$$W_V \triangleq e^{-j\frac{2\pi}{M}}, \quad W_L \triangleq e^{-j\frac{2\pi}{N}} \quad (3.4.7)$$

と略記することによって、式(3.4.4)は次のようになる。

$$G(p, q) = \sum_{m \in m'} \sum_{n \in n'} W_V^{pm} g_{mn} W_L^{qn} \quad (3.4.8)$$

従って、これは行列で次のように書ける。

$$\underset{M \times N}{G} = \underset{M \times M}{W_V} \underset{M \times N}{g} \underset{N \times N}{W_L} \quad (3.4.9)$$

ただし

$$W_V = \begin{bmatrix} W_V^0 & W_V^0 & \dots & W_V^0 \\ W_V^0 & W_V^1 & \dots & W_V^{M-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ W_V^0 & W_V^{M-1} & \dots & W_V^{(M-1)(M-1)} \end{bmatrix} \quad W_L = \begin{bmatrix} W_L^0 & W_L^0 & \dots & W_L^0 \\ W_L^0 & W_L^1 & \dots & W_L^{N-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ W_L^0 & W_L^{N-1} & \dots & W_L^{(N-1)(N-1)} \end{bmatrix}$$

(3.4.10)

は変換行列と呼ばれている。

### 3.4.2 変換行列のクロネッカ積への分解

離散変換は、その変換行列が簡単な行列のクロネッカ積に分解できるとき高速演算が可能である<sup>(35)</sup>ことがGoodにより示されている。例えば、次のように、変換行列が $(r^\nu \times r^\nu)$ 行列 $H_\nu$ のとき、それが $M$  (  $r \times r$  行列 ) の多重クロネッカ積になるような場合である。

$$H_\nu = \bigotimes_{r^\nu \times r^\nu}^{\nu} M = \underbrace{M \otimes M \otimes \dots \otimes M}_\nu \quad (3.4.11)$$

ただし  $\otimes$  はクロネッカ積、 $\bigotimes$  は $\nu$ 重クロネッカ積を表す。

これは漸化式で次のように書ける。

$$H_\nu = M \otimes H_{\nu-1} \quad (3.4.12)$$

$$H_1 = M \quad (3.4.13)$$

1次元DFTは

$$F(n) = \sum_{k \in \mathcal{K}} f_k e^{-j \frac{2\pi}{N} nk} \quad n \in \mathcal{N} \quad (3.4.14)$$

で定義されるが、これを行列で書くと次のようになる。

$$F = \begin{matrix} N \times 1 \\ N \times N \\ N \times 1 \end{matrix} W f \quad (3.4.15)$$

ただし

$$F = \begin{bmatrix} F(-\frac{N}{2}) \\ \vdots \\ F(\frac{N}{2}-1) \end{bmatrix}, \quad f = \begin{bmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_N \end{bmatrix}, \quad N = r^\nu, \quad (r, \nu \text{ は整数}) \quad (3.4.16)$$

$$W \triangleq \begin{bmatrix} W^0 & W^0 & W^0 & \dots & W^0 \\ W^0 & W^1 & W^2 & \dots & W^{N-1} \\ W^0 & W^2 & W^4 & \dots & W^{2(N-1)} \\ \vdots & & & & \vdots \\ W^0 & W^{N-1} & W^{2(N-1)} & \dots & W^{(N-1)^2} \end{bmatrix} \quad (3.4.17)$$

$$W \triangleq e^{-j \frac{2\pi}{N}} \quad (3.4.18)$$

となるが、これは式(3.4.16)のとき

$$\Phi \triangleq \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & W & W^2 & \dots & W^{r-1} \\ 1 & W^2 & W^4 & \dots & W^{2(r-1)} \\ \vdots & & & & \vdots \\ 1 & W^{r-1} & W^{2(r-1)} & \dots & W^{(r-1)^2} \end{bmatrix} \quad (3.4.19)$$

をコア行列として

$$W = \bigotimes_{\nu} \Phi \quad (3.4.20)$$

と書ける。  $r = 2$  のとき、すなわち

$$\Phi = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & W \end{bmatrix} \quad (3.4.21)$$

のときが、標本点数  $N = 2^\nu$  のときのFFTに相当する。つまり、列ベクトルに左から  $(2 \times 2)$  の多重クロネッカ積を掛ける演算が1回のFFTに相当する。

2次元DFTの変換行列  $W_V, W_L$  は

$$W_V = \bigotimes_{\mu} \Phi_V, \quad W_L = \bigotimes_{\nu} \Phi_L \quad (3.4.22)$$

ただし  $M = 2^\mu, N = 2^\nu$  (3.4.23)

$$\Phi_V \triangleq \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & W_V \end{bmatrix}, \quad \Phi_L = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & W_L \end{bmatrix} \quad (3.4.24)$$

と書けるので、2次元DFTを表わす式(3.4.9)は次のように書ける。

$$G = [\overset{\mu}{\otimes} \Phi_V] g [\overset{\nu}{\otimes} \Phi_L] \quad (3.4.25)$$

### 3.4.3 2次元FFTとその高速化

3.4.2で述べたように、列ベクトルに左から多重クロネッカ積を掛ける演算が1回のFFTに相当するので、2次元DFTにFFTを適用するために式(3.4.25)で表わされる2次元DFTの演算を、列ベクトルに左から多重クロネッカ積を掛ける形に分解する。

まず

$$[\overset{\mu}{\otimes} \Phi_V] g$$

の部分は、 $(M \times N)$ 行列 $g$ を $M$ 次元列ベクトル $N$ 個の集合とみれば、各列ベクトルに左から多重クロネッカ積を掛ける形であるので、 $M$ 点FFTを $N$ 回実行すれば計算できる。この計算結果を $(M \times N)$ 行列 $\mathcal{G}$ に入れておくとすると、式(3.4.25)の残りの部分は

$$G = \mathcal{G} [\overset{\nu}{\otimes} \Phi_L]$$

となるが、これは転置をとって考えると、

$$G = \{ [\overset{\nu}{\otimes} \Phi]^T \mathcal{G}^T \}^T = \{ [\overset{\nu}{\otimes} \Phi] \mathcal{G}^T \}^T$$

であるので、上と同様に $(N \times M)$ 行列 $\mathcal{G}^T$ を $N$ 次元列ベクトル $M$ 個の集合とみて、その各列ベクトルに左から多重クロネッカ積を掛ける形であるので、これは $N$ 点FFTを $M$ 回実行すればよいことになる。

従って $(M \times N)$ 行列 $g$ の2次元DFTの方法は図3.4.1のようになる。

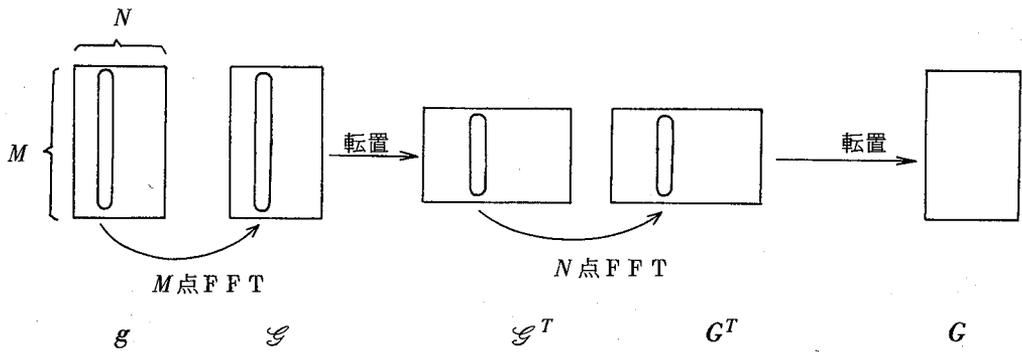


図3.4.1 2次元DFTの方法

ここで、転置を2回行なっているが、これは数値計算では実行せずに済ませることができる。また、 $g$ は通常実行列として扱えばよいので、FFTとしては、3.3.2で述べた2組の実数値列の同時FFTの手法を適用すると、計算手法は半分に軽減できる。以上より、実際の2次元DFTの方法は図3.4.2のようにできる。これを2次元倍速度FFTと呼んでおく。

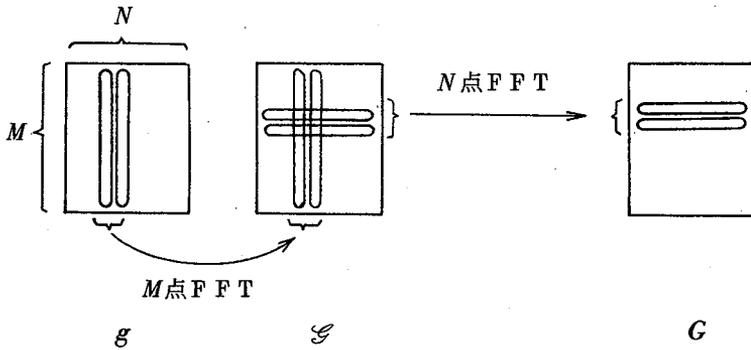


図3.4.2 2次元倍速度FFTの方法

この方法の応用としては、4.5.1で画像のボケの検出について述べる。

### 3.5 離散的ラプラス変換の高速演算

本節では、FFTを使ってラプラス変換の数値計算をする方法を述べる。この方法を離散的ラプラス変換(Discrete Laplace Transform)と呼び、以後DLTと略す。

3.5.1で、DLTおよび逆DLTの計算方法を述べ、3.5.2でDFT、チャープ $z$ 変換との関係について述べる。

計算機による周波数分析は、通常FFTを用いて行なわれるが、FFTをそのまま使用するだけでは所望の分解能が得られない場合がある。そのような例としては、音声の分析において、有声音の区間でホルマント（声道の共振点）が近接しているような場合があげられる。具体的に説明すると、ピッチ（声の高さ）が125Hz（男声の平均値はこの程度）の／ア／音の場合、第1ホルマント周波数（700～900Hz）と第2ホルマント周波数（1100～1300Hz）の間隔が狭いときには、二つのホルマントの間に成分が1本だけしか存在しないというような事態が起る。このときもしそれらのホルマントのバンド幅が広いと、二つのホルマントの分離は非常に困難になる。この困難は、周波数分析を単に $s$ 平面の虚軸上だけで行なっているから起るのであって、極の位置の近傍におけるラプラス変換を計算すれば二つのホルマントの分離は容易にできるようになる。このような考え方に立ってチャープ $z$ 変換<sup>(36)</sup>が開発された。これは $s$ 平面上における任意の位置、長さの線分上のラプラス変換に対応する値を求めるもので、分解能を上げるという意味では有効であるが、高速演算が一般にはできないという欠点がある。ここで述べるDLTは分解能を上げるという長所を保ったまま、高速演算もできるという巧妙な手法で、周波数分析法として利用価値が高い。

### 3.5.1 離散的ラプラス変換<sup>(37)</sup>

信号 $g(t)$ の両側ラプラス変換 $\mathcal{L}(s)$ は

$$\mathcal{L}(s) = \int_{-\infty}^{\infty} g(t) e^{-st} dt \quad (3.5.1)$$

で定義される。ここで複素周波数 $s$ を $s = \sigma + j\omega$ として上式を書き直すと

$$\mathcal{L}(\sigma + j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} g(t) e^{-\sigma t} e^{-j\omega t} dt \quad (3.5.2)$$

となるが、この右辺は $g(t) e^{-\sigma t}$ のフーリエ変換を表わしている。従って、 $\mathcal{L}(s)$ の収束範囲内では $\mathcal{L}(\sigma + j\omega)$ は $g(t) e^{-\sigma t}$ のフーリエ変換として求まることになるので、 $g(t)$ のDLTは $g(t) e^{-\sigma t}$ のDFTとして求められる。すなわち、標本間隔 $T$ 、標本点数 $N$ とすると $s$ 平面の虚軸と平行な直線 $\sigma = \sigma_0$ 上に標本間隔

$$\Omega = \frac{2\pi}{NT}$$

で並んだ標本点におけるDLTは,  $\mathcal{G}(\sigma_0 + jn\Omega)$  に対応する値として

$$G(n) = \sum_{k \in \mathcal{K}} g(kT) e^{-\sigma_0 kT} e^{-j \frac{2\pi}{N} nk} \quad (3.5.3)$$

$$n \in \mathcal{N} \triangleq \left\{ -\frac{N}{2}, \dots, 0, \dots, \frac{N}{2} - 1 \right\}$$

$$\mathcal{K} = \{0, 1, \dots, N-1\}$$

として計算できる. ただし,  $\omega$  軸方向の領域の幅は標本化定理によって基本的には  $0 \leq |\omega| < \frac{\pi}{T}$  に限られる.  $g(t)$  がこの領域外の成分を含む場合は 2.2.4 の形式に修正すればよい.

逆DLTは,

$$g_m^* = \frac{1}{N} \sum_{n \in \mathcal{N}} G(n) e^{\sigma_0 mT} e^{j \frac{2\pi}{N} mn}, \quad m \in \mathcal{K} \quad (3.5.4)$$

としておくと, 式(3.5.3)を式(3.5.4)に代入して

$$\begin{aligned} g_m^* &= \frac{1}{N} \sum_{n \in \mathcal{N}} \sum_{k \in \mathcal{K}} g(kT) e^{-\sigma_0 kT} e^{-j \frac{2\pi}{N} nk} e^{\sigma_0 mT} e^{j \frac{2\pi}{N} mn} \\ &= \frac{1}{N} \sum_{k \in \mathcal{K}} g(kT) e^{\sigma_0(m-k)T} \delta_{mk} N \\ &= g(mT) \end{aligned} \quad (3.5.5)$$

となり, 有限長データのDLTは常に収束し, 逆変換も可能であることがわかる. 実際のDLTの計算は, 式(3.5.3)の右辺より,  $g(kT) e^{-\sigma_0 kT}$  を標本列と考えてFFTを用いる. また逆DLTの計算は, 式(3.5.4)より

$$g(mT) = \frac{e^{\sigma_0 mT}}{N} \sum_{n \in \mathcal{N}} G(n) e^{j \frac{2\pi}{N} mn} \quad (3.5.6)$$

であるので,  $G(n)$  の逆FFTに  $e^{\sigma_0 mT}$  を掛けることによって計算する.

以上, DLT, 逆DLT共にFFTを利用できるので 計算効率の点から考えるとチャープ変換よりも有利である.

### 3.5.2 離散的ラプラス変換と離散的フーリエ変換, チャープ $z$ 変換との関係

信号 $g(t)$ の標本間隔 $T$ による標本値列 $\{g(kT)\} \ k \in \mathcal{K} \triangleq \{0, 1, \dots, N-1\}$ の離散変換の一般形は次のように書くことができる。

$$G(n) = \sum_{k \in \mathcal{K}} g(kT) z_n^{-k} \quad n \in \mathcal{N} \quad (3.5.7)$$

$$\text{ただし} \quad z_n = e^{s n T} = A W^{-n} \quad (3.5.8)$$

$$A = A_0 e^{j\omega_0} \quad (3.5.9)$$

$$W = W_0 e^{j\phi_0} \quad (3.5.10)$$

以下, DFT, チャープ $z$ 変換, DLTを $A_0, \omega_0, W_0, \phi_0$ に対する値によって記述してそれらの間の関係を明らかにし, 各々の得失を比較する。

#### (I) DFT

式(3.5.7)の形の変換のうち, DFTは

$$A_0 = 1, \quad \omega_0 = 0, \quad W_0 = 1, \quad \phi_0 = \frac{2\pi}{N}$$

の場合に相当し, 周波数領域での標本点の位置は $s$ 平面,  $z$ 平面でそれぞれ図3.5.1に示す線上に等間隔で乗っている。DFTは公知のようにFFTによる高速演算が可能である。しかし周波数分解能は固定であるので, 虚軸から離れた位置にある極の分離は困難である。

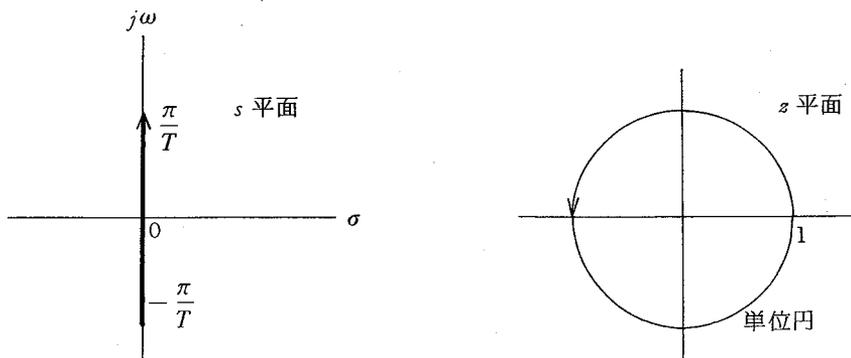


図3.5.1 DFTの周波数領域における標本点の位置

## (II) チャープ $z$ 変換

チャープ $z$ 変換は、 $A_0$ ,  $\omega_0$ ,  $W_0$ ,  $\phi_0$ に条件を課さない変換であり、標本点の位置は $s$ 平面の任意の直線上、 $z$ 平面のそれに対応する線上にとれる。従って極の近くを通る線上のラプラス変換に対応する値を得ることができるので、周波数分析の分解能を上げることができるが、一般には高速演算が不能であるので計算の効率は悪い。

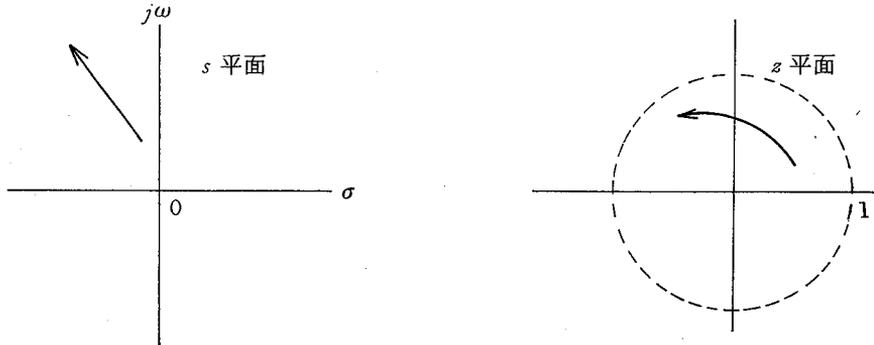


図3.5.2 チャープ $z$ 変換の周波数領域における標本点の位置

## (III) DLT

ここで示したDLTは

$$A_0 = e^{\sigma_0}, \quad \omega_0 = 0, \quad W_0 = 1, \quad \phi_0 = \frac{2\pi}{N}$$

とした場合であり、標本点は図3.5.3に示した線上に並ぶ。この方法によると、 $\sigma_0$ を適当な値に設定することによって、いかなる位置の近接した極も分離することができ、また前述したようにDLTは高速演算が可能であるという利点をもっている。

以上より、DLTは高速演算が可能であるが、 $s$ 平面の虚軸から遠い領域の解析には不十分であり、またチャープ $z$ 変換は任意の領域の解析ができるが高速演算が困難であるというようにどちらも一長一短である。本節で示したDLTはこれらの長所をあわせてもっているので、周波数分析法として極めて有用な方法であるといえる。

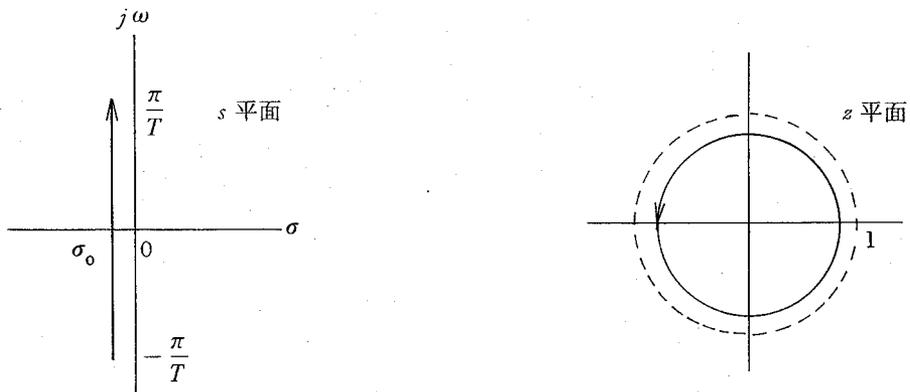


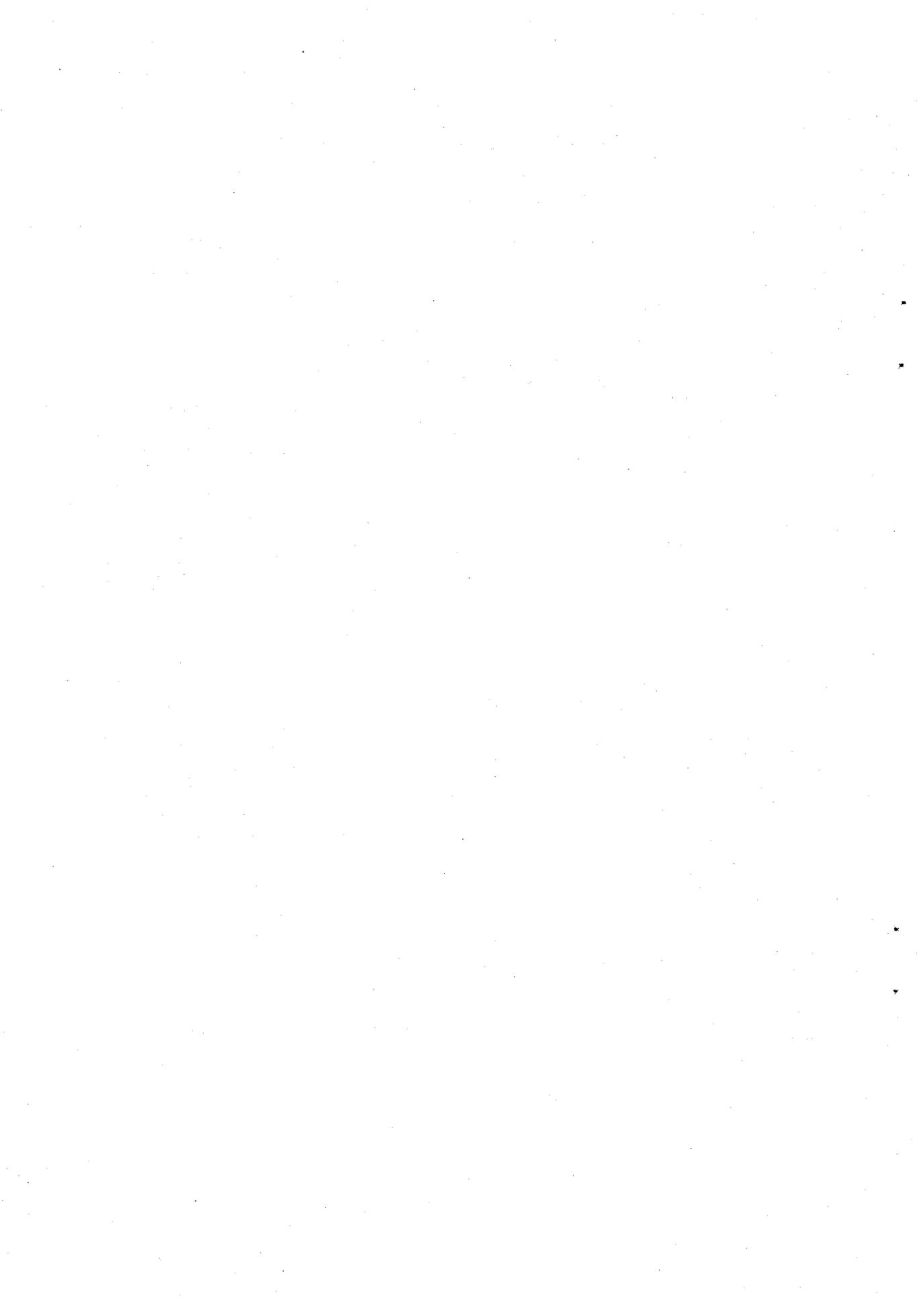
図 3.5.3 DLT の周波数領域における標本点の位置

### 3.6 結 言

本章では、まずFFTアルゴリズムの原理が2章の2重標本列のDFT計算法から直接導かれることを示し、以下FFTに関連する数値計算の高速化について述べた。これらをまとめると次のようになる。

- (i) 2組の実数値列の同時FFT
- (ii) 実数値列の複素化2重FFT
- (iii) 2次元DFTの高速化
- (iv) DLTの高速演算

これらの手法はデジタル信号処理<sup>(38~41)</sup>の各分野において広範囲に活用できるものであり、利用頻度も高いので非常に有用である。次章において、これらの手法を用いた応用例を示す。



## 第4章 高速フーリエ変換の応用

### 4.1 緒言

本章では、高速フーリエ変換 (FFT) の種々な分野への応用例を示す。FFT の基本的な応用としては、パワースペクトルの計算をはじめとして、相関関数<sup>(38,39)</sup>、コンボリューション<sup>(38,39)</sup>、フィルタリング<sup>(38-44)</sup>、ケプストラム<sup>(45-47)</sup> 等があるが、それらは既に確立された応用手法であるのでここでは述べない。本章では、FFT を以下のようなこれまであまり取扱われていなかったデジタル信号処理に応用する手法について述べる。

- (i) 高次代数方程式の解法
- (ii) 神経回路網モデルの時空間応答の数値計算
- (iii) 音響信号処理、特に音のズームイング
- (iv) 画像処理、特に特異値分解の方法

これらの計算においては、前章で示した各種の高速化手法がとり入れられており、このことはFFT およびそれに関連した計算の高速化が汎用性のあることを立証するものである。

### 4.2 高次代数方程式の解法<sup>(50)</sup>

本節では、高次代数方程式の求解過程を、その係数を標本列とみなした信号の零点探査に置換えて、その近似解をFFT によって数値的に求める方法を示す。

5 次以上の方程式を代数的に解くのが不可能であることはGalois の理論<sup>(48)</sup> によって華麗に解決されているが、数値的には一般の高次代数方程式の解を求めることが可能で、Bairstow 法、Graeffe 法など幾多の有効な方法が確立されている。<sup>(49)</sup> ここでは方程式に対する観点を少し変えて、方程式の根を求める過程を、その方程式の係数を標本列とみなした連続信号の  $z$  変換の零点を求めるという操作に置き直して、方程式の近似解をFFT によって数値的に求める方法を示す。この方法は、精度は低いが、特に高次の方程式に有効であり、他の精度の高い解法への第1 近似を与える方法として有用であると考えられる。

#### 4.2.1 定式化

ここで対象とする方程式は

$$\sum_{i=0}^n a_i z^{n-i} = 0 \quad (4.2.1)$$

であるとし、係数  $a_i$  は実数であるとする。ここで

$$a_0 = 1 \quad (4.2.2)$$

としても一般性は失なわれない。また式(4.2.1)は  $z=0$  の根を除いてあるという仮定を設けると

$$a_n \neq 0 \quad (4.2.3)$$

とすることができる。この仮定の下で、式(4.2.1)を  $z^n$  で割ると次式が得られる。

$$\sum_{i=0}^n a_i z^{-i} = 0 \quad (4.2.4)$$

ここで

$$a_i = 0 \quad i \in \{n+1, n+2, \dots\} \quad (4.2.5)$$

とすると、式(4.2.4)の根は次式の根と一致する。

$$\sum_{i=0}^{\infty} a_i z^{-i} = 0 \quad (4.2.6)$$

式(4.2.6)の左辺は係数列  $\{a_i\}$  の  $z$  変換である。従ってこの式によると、ある標本間隔  $T$  での標本値が  $a_i$  になるような連続関数  $a(t)$  を導入すれば、その標本間隔が Nyquist 間隔よりも短いか否かには無関係に、 $a(t)$  の標本値列の  $z$  変換の零点が式(4.2.1)の根を与えることになる。そこで式(4.2.1)の数値解法として、

$$A(z) \triangleq \mathcal{Z}[a_i] = \sum_{i=0}^{\infty} a_i z^{-i} \quad (4.2.7)$$

の零点を  $z$  平面上で探査することを考える。

#### 4.2.2 数値計算法

複素変数  $z$  を

$$z = e^{sT} = e^{(\sigma + j\omega)T} \quad (4.2.8)$$

とおき、式(4.2.6)の根  $z_0$  に対応する  $s_0 = \sigma_0 + j\omega_0$  を同定すれば式(4.2.1)の解が求まることになる。以下、数値計算の高速化のために  $z$  変換の計算にFFTを使用し、 $\sigma_0, \omega_0$  の近似値を求める方法を示す。<sup>(50)</sup>

$\sigma_0, \omega_0$  は3.5で述べた離散的ラプラス変換(DLT)の絶対値極小を与える  $\sigma, \omega$  として求めることができるが、DLTでは  $\sigma_0$  を指定しなければならない。従ってとりあえず適当な  $\sigma_0$  についてDLTを求め、次に  $\sigma_0$  を増加または減少させて再びDLTを求め、絶対値極小値が小さくなるように最適化手法を適用すればよいが、それは  $s$  平面上での単一変数変化型探索法(Univariate search)の一種になる。この他にも  $\sigma_0, \omega_0$  の求め方として、 $s$  平面上でのNewton-Raphson法などが考えられるが、これらは探索方法として確立された手法であるのでここでは名前をあげるに留める。その代替法としてFFTを使用した次の方法を詳述する。

$\omega_0$  は基本的には  $\{a_i\}$  のDFTの絶対値極小を与える  $\omega$  として近似的に求めることができる。その最も簡単な方法としては、 $\{a_i\}$  のDFTを周波軸に沿って逐次比較し、絶対値極小点を見つけるという方法が考えられる。この場合、 $\{a_i\} \quad i \in \{0, 1, \dots, n\}$  をそのままDFTするだけでは離散スペクトル上での標本点が一般には少ないため、絶対値極小点を見出すのは困難である。従って離散スペクトルを補間する意味で、2.5.2を応用してあらかじめ  $\{a_i\}$  の  $i \in \{n+1, \dots, N-1\} \quad N = 2^\nu \quad (\nu: \text{整数})$  の部分に0を付加してFFTを使えば詳細な離散スペクトルが得られるので、絶対値極小点の探索が容易になる。近接した零点の分離には、FFTの代りにDLTを利用すると計算の精度が上り、極小点の探索がより容易になる。

$\sigma_0$  は次のようにして求める。式(4.2.1)で  $z$  の代りに  $z - p$  ( $p$  は実数) を代入すると次のようになる。(付録N参照)

$$\sum_{i=0}^n a'_i z^{n-i} = 0 \quad (4.2.9)$$

ただし

$$a'_i = \sum_{r=0}^i a_r \binom{n-r}{i-r} p^{i-r} \quad (4.2.10)$$

ここで式(4.2.9)の係数  $a'_i$  を式(4.2.1)における  $a_i$  と同様に考えると、4.2.1の議論がそのまま適用できる。式(4.2.9)の根を  $z'_0$  とし、

$$z'_0 = e^{s'_0 T} = e^{(\sigma'_0 + j\omega'_0)T} \quad (4.2.11)$$

とおくと、図 4.2.1 の関係から次式が成立する。

$$\frac{p}{\sin(\omega'_0 - \omega_0)T} = \frac{e^{\sigma_0 T}}{\sin \omega'_0 T} \quad (4.2.12)$$

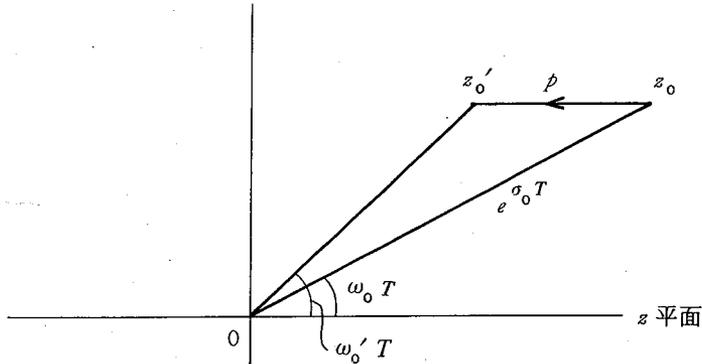


図 4.2.1 z 平面上での  $z_0$  と  $z'_0$  の位置関係

従って  $\sigma_0$  は次式によって推定することができる。

$$\hat{\sigma}_0 = \frac{1}{T} \log_e \frac{p \sin \hat{\omega}'_0 T}{\sin(\hat{\omega}'_0 - \hat{\omega}_0)T} \quad (4.2.13)$$

ただし、 $\hat{\omega}_0$ 、 $\hat{\omega}'_0$  はそれぞれ  $\omega_0$ 、 $\omega'_0$  の近似値。

### 4.2.3 検 討

(a) 実験的検討の結果、この方法は各根について

$$|\omega_0| \gg |\sigma_0| \quad (4.2.14)$$

の条件の下では 20~30 次方程式について、10 進で 2.5~3 桁程度の粗い近似解を与えることが確かめられた。この近似解は他の精度の高い逐次近似法への第 1 近似としては十分である。式(4.2.14)は、零点の位置が  $s$  平面上で実軸よりも虚軸に近いための条件を表わしているが、一般の高次方程式の根はこの条件を満たしているとは限らない。従って、本方法はあらゆる高次方程式に有効であるとはいえない。この困難に対処するためには、4.2.2 の前半で述べたよ

うにDLTを用いた最適化手法の導入が必要である。

(b)  $\omega_0$ には折返しに起因する不確定性が伴うが、これはNyquist間隔を考慮せずにとった標本値列 $\{a_i\}$ から $a(z)$ が決定できるかどうかという問題に関連しており、この点に関して岸ら<sup>(19)</sup>により次の定理が得られている。「定係数 $n$ 階線形微分方程式を満たす波形は、標本間隔 $T$ による $2n$ 個の標本値から決定されるが、指数部に $j2\pi k/T$  ( $k$ は任意の整数)の任意性が残る。」これはいい換えると、 $\omega_0$ に $j2\pi k/T$ の任意性が残るということで、つまり離散スペクトル上で折返しが起きている可能性があって、帯域を指定しないと値が確定しないということの説明になっている。 $\omega_0$ には任意性が残るが、 $\sigma_0$ および最終的な $z_0$ ではそれぞれ式(4.2.13)、(4.2.8)からわかるようにこの任意性は消滅する。

(c)  $\omega_0$ 、 $\omega_0'$ を探索する際に、離散スペクトルとしてどの程度の周波数精度が必要かという点について述べておく。標本点数が少ないと、スペクトル上の各標本点ごとの凹凸が激しくて零点の位置の同定が困難になる。そこで、2.5.2で述べた補間法を利用するため、あらかじめ $\{a_i\}$ の後に0を幾つか付加した標本値列をFFTで処理するのであるが、付加する0の個数は $n$ の3~10倍程度で、全体の標本点数が2のべき乗になるように選べばよい。

(d) 零点の移動幅 $p$ は計算精度に大きく影響するが、多くの場合 $p=0.05$ 程度が適当であった。

以上、FFTを利用して高次代数方程式の根の近似値を求める方法について述べた。この方法は、必ずしもあらゆる高次方程式に有効であるとは言えないが、次数が高い場合の粗い近似解を求めるのに適していると言える。

### 4.3 フーリエ $z$ 変換による神経回路網の解析<sup>(61)</sup>

神経回路網の相互抑制機能などをモデル化して、その時空間特性に関する生理学的現象(Mach効果<sup>(51)</sup>、Broca-Sulzer効果<sup>(54)</sup>など)との一致を目指す研究<sup>(52~54)</sup>は多いが、モデルの解析は手計算によるかアナログ計算機によるのがこれまでの通例であった。しかし神経回路網のモデル化<sup>(60)</sup>は、シミュレーションの際の有用性を考慮すると現在ではデジタル計算機に向くように書いておく方が望ましい。本節ではこのような観点から、特に聴覚神経回路網を想定して、空間的に非対称な結合をもって並んだ1次元の神経回路について離散的な定式化を行ない、その時空間応答の数値計算の高速化について述べる。

#### 4.3.1 定式化

時間、空間ともに変数を離散化<sup>(55)</sup>して、神経回路網が次式で表現できるとする。

$$y^{(\ell)}(n+1) = \sum_{r=0}^{N-1} \left( \sum_{l=-L}^L a_l^{(r)} y^{(\ell)}(k+l)^{(n-r)} + b^{(r)} x^{(\ell)}(k)^{(n-r)} \right) \quad (4.3.1)$$

つまり、位置  $\ell$  にあるニューロンの時刻  $n+1$  での出力  $y^{(\ell)}(n+1)$  は、それより前のある時間範囲 ( $N$ ) 内のその付近のニューロンの出力  $y^{(\ell)}(k+l)^{(n-r)}$  ( $l=-L, \dots, 0, \dots, L; r=0, 1, \dots, N-1$ ) の線型和とそのニューロンへの入力  $x^{(\ell)}(k)^{(n-r)}$  ( $r=0, 1, \dots, N-1$ ) の線型和との加算であるとする。実際の聴覚神経系では単一ニューロンによって送られるインパルスの大きさは“all or non”であるが、ここでは出力の大きさを発火の頻度に対応させることにしておく。もし解析的な解を必要としないなら、神経素子に閾値作用などの非線型性を導入して一般化を行ない、Caianiello<sup>(56)</sup>とか甘利<sup>(57-59)</sup>のような定式化をすることも可能であるが、ここでは解析的取扱いを容易にするために非線型性は考えないことにする。式(4.3.1)で  $a_0^{(r)} = 0$ ,  $a_l^{(r)} < 0$  ( $l \neq 0$ ) とするとこれは相互抑制機能を表わすことになる。また  $b^{(0)} > 0$ ,  $b^{(r)} < 0$  ( $r \neq 0$ ) とすると不応期の説明ができる。聴覚神経系では一般に  $a_{-l}^{(r)} \approx a_l^{(r)}$  と考えられるが、視覚神経系では  $\ell$  を2次元に拡張した上で  $a_{-l}^{(r)} = a_l^{(r)}$  としてもよいと考えられる。

#### 4.3.2 モデルの解析

ここではさらに計算を簡単にするために式(4.3.1)で  $N=1$  すなわち各ニューロンの出力は、その付近のニューロンの1単位時間前の入出力だけに依存するとし、次のような簡単な場合について考察する。

$$y^{(\ell)}(n+1) = \sum_{l=-L}^L a_l y^{(\ell)}(k+l)^{(n)} + x^{(\ell)}(k)^{(n)} \quad (4.3.2)$$

( $r$  についての添字は省略し、本質的でない  $b^{(0)}$  は1とした。)

式(4.3.2)の同次形

$$y^{(\ell)}(n+1) = \sum_{l=-L}^L a_l y^{(\ell)}(k+l)^{(n)} \quad (4.3.3)$$

の解(時空間インパルス応答)を  $y_0^{(\ell)}(k)^{(n+1)}$  とすると、式(4.3.2)の解  $y^{(\ell)}(k)^{(n+1)}$  は

$y_0(k)^{(n+1)}$  と入力  $x(k)^{(n)}$  の時間と空間に関する 2 重の離散的コンボリューションによって計算される。つまり

$$y(k)^{(n+1)} = \sum_{\nu=0}^n \sum_{\kappa=-\infty}^{\infty} y_0(k-\kappa)^{(n+1-\nu)} x(\kappa)^{(\nu)} \quad (4.3.4)$$

とすればよい。式 (4.3.4) の第 2 の  $\Sigma$  の上下限は実際には有限の値である (入力およびインパルス応答の空間的広がりには有限だから)。この式をこのままの形で実行するのは膨大な手数を要する。入力およびインパルス応答の空間的広がりそれぞれ  $K_0, K_1$  とすると、応答が存在する範囲内の全結果を得るためには  $n^2(K_0+K_1)^2$  回の乗算が必要になる。この困難は 3.4.3 で示した 2 次元 FFT を用いると、 $3n(K_0+K_1) \log_2 n(K_0+K_1) + n(K_0+K_1)$  にまで軽減させることができる。つまり、式 (4.3.4) を直接計算する代りに、 $y_0(k)^{(n+1)}$  と  $x(k)^{(n)}$  のそれぞれの 2 次元 DFT を求め、その積の 2 次元逆 DFT を計算することにより  $y(k)^{(n+1)}$  を求めるようにすればこれが可能になる。

次に系の時空間インパルス応答  $y_0(k)^{(n+1)}$  を求めるために、ここでは式 (4.3.3) をフーリエ変換 (以下 FzT と略す) を用いて解く。

$y(k)^{(n+1)}$  の FzT  $Y(z, \theta)$  を次式で定義する。

$$Y(z, \theta) \triangleq \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} y(k)^{(n+1)} z^{-n} e^{-jk\theta} \quad (4.3.5)$$

これを式 (4.3.3) に代入すると、適当な初期条件の下で系の時空間インパルス応答  $y_0(k)^{(n+1)}$  の FzT として次式が得られる (付録 K)。

$$Y_0(z, \theta) = \frac{1}{1 - z^{-1} \sum_{l=-L}^L a_l e^{jl\theta}} \quad (4.3.6)$$

この逆 FzT として  $y_0(k)^{(n+1)}$  は次式のようにして求められる。

$$\begin{aligned} y_0(k)^{(n+1)} &= \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\pi}^{\pi} \oint_{|z|=1} Y_0(z, \theta) z^{n-1} e^{jk\theta} dz d\theta \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left( \sum_{l=-L}^L a_l e^{jl\theta} \right)^n e^{jk\theta} d\theta \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{2\pi j} \oint_{|p|=1} \left( \sum_{l=-L}^L a_l p^l \right)^n p^{k-1} dp \quad (4.3.7)$$

$$\text{ただし } p = e^{j\theta}$$

これを一般の  $L$  について求めることはできなかったが、 $L=1$  (隣接するニューロンへ左右非対称な結合がある) の場合は次のようになった。(付録L)

$$y_0(k)^{(n+1)} = \sum_{l=0}^{\lfloor \frac{n-|k|}{2} \rfloor} \binom{n}{|k|+2l} \binom{|k|+2l}{l} a_{-\text{sgn}(k)}^{|k|+l} a_0^{-n-|k|-2l} a_{\text{sgn}(k)}^l \quad (4.3.9)$$

### 4.3.3 数値計算法

与えられた入力  $x(k)^{(n)}$  に対する  $L=1$  の神経回路網の時空間応答は式(4.3.9)を式(4.3.4)に代入すれば求まる。この時間と空間に関する2重コンボリューションは、先に述べたように3.4.3の2次元FFTにより時空間周波数領域での積に直して、図4.3.1のようにすると効率的になる。

ここでは、隣接したニューロンにだけ1階の結合があるだけという場合の計算法を示したが、これ以上一般の場合についてはこのような解析的接近法は困難であり、数値的に解く以外に適当な方法は見つからないように思う。

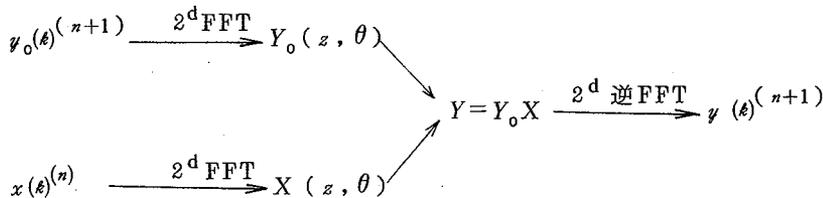


図4.3.1 2次元FFTを利用した、神経回路網の時空間応答の数値計算法

## 4.4 音響信号処理への応用

FFTの音響信号処理への応用の歴史はFFTの開発(1965年)と同時に始まっている。特に、音声の分析においてはスペクトル分析以外に、自己相関関数の計算、ケプストラム<sup>(45~47)</sup>、

準同型フィルタリング<sup>(42,44)</sup>などに多用されている。オーディオ関係では楽器音の分析<sup>(62)</sup>などに用いられており、もっと広く1次元信号の解析という意味では地震波<sup>(63)</sup>、脳波<sup>(64)</sup>、心電波<sup>(65)</sup>などへの応用も見受けられる。本節ではFFTの音響信号処理への応用として、まず4.4.1で、ある音響再生系のインパルス応答法による周波数特性の計算法について述べ、次に4.4.2では音響管の共振特性、特にバンド幅の計算を4.2節の手法を利用して行なう方法を示し、最後に昔から音響関係の研究者にとって年願の課題であった音のズームングに対する一つの解答を与える。

#### 4.4.1 インパルス応答法による周波数特性の計算

系の周波数特性はそのインパルス応答のフーリエ変換として求めることができ、この方法はインパルス応答法と呼ばれているが、実際の測定では測定されるべき系に正確なインパルスを入力することが困難であることが多い。ここではインパルスの印加が容易でしかも他の方法では周波数特性を求めることが困難な系として、古い「ろう管蓄音機」<sup>(66)</sup>をとりあげる。これの録音再生総合周波数特性はアナログ測定によっても可能である<sup>(67)</sup>が、再生周波数特性のアナログ測定は困難である。ここでは再生周波数特性を、アナログ測定による録音再生総合周波数特性と比較するために、2.5.3で示した方法により、対数尺度の周波数軸上で等間隔に並んだ標本点で計算する方法を示す。

ろう管蓄音機の再生系は、ろう管→再生針→ダイヤフラム→空洞→ゴム管→ホーンとなっており、この系全体としての周波数特性は、ろう管上に小さい段落(図4.4.1参照)を作ってその再生音をフーリエ変換すれば得られる。

具体的な手順を次に示しておく。

- (i) ろう管上に小さい段落を掘る。
- (ii) その再生音をマイクロホンで受けて、適当な低域通過型フィルタに通したあとAD変換する。
- (iii) 標本値列のDFTをFFTによって求める。(3.3.3を使用)
- (iv) FFTの結果を対数尺度周波数軸上へ変換する。(2.5.3を使用)

一例として、10kHz、12bitのAD変換、標本点数256、補間点数129、1点の補間に使用する標本点数7としたときの“Edison Standard Phonograph model A”の再生周波特性を図4.4.2に示す。

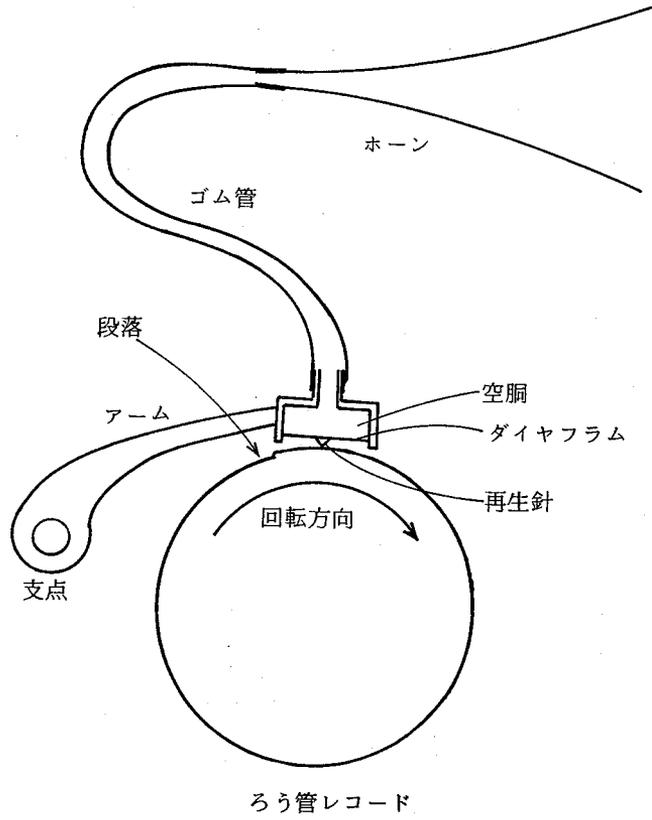


図4.4.1 ろう管蓄音機のインパルス応答の発生方法

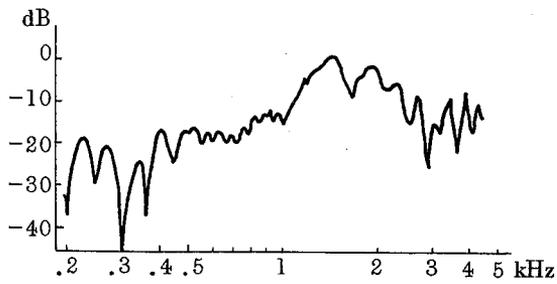


図4.4.2 周波数特性計算の例(資料: Edison Standard Phonograph)

#### 4.4.2 音響管の共振特性の精密計算

音響管の特性をそのインパルス応答のフーリエ変換によって求める場合、特にインパルス応答の標本値列からFFTによって数値的に求める場合には、共振特性の中心周波数は容易に推定可能であっても、バンド幅の計算は直接的には困難である。統計的な推定法としては自己回帰型モデルによる方法<sup>(68)</sup>があるが、ここでは決定論的な方法として、4.2節と同様の考え方に基づいて、インパルス応答の標本値列から共振特性のバンド幅を計算する方法を示す。<sup>(69)</sup>

##### (1) 共振特性の推定法

未知系のインパルス応答 $\beta(t)$ が標本間隔を $T$ とする標本値列 $\{\beta_i, i=0, 1, \dots, n\}$ で与えられているとする。 $\beta(t)$ のラプラス変換 $\mathcal{B}(s)$ の極の1つを $s_0 = \sigma_0 + j\omega_0$ とすると、 $|\omega_0| \gg |\sigma_0|$ の場合(この条件は音響管の場合にはほぼ満たされている)には $\omega \doteq \omega_0$ で $|\mathcal{B}(j\omega)|$ は極大になる(付録M)。従って $\omega_0$ の推定値 $\hat{\omega}_0$ は $\{\beta_i\}$ のDFT $\{B_k\}$ において絶対値極大を与える $\omega$ として求まる。 $\sigma_0$ の推定は4.2節と同様に次のようにする。 $\{\beta_i\}$ の $z$ 変換を $B(z)$ とし、 $z = e^{sT}$ とおくと $B(z)$ は $z_0 = e^{s_0 T} = e^{(\sigma_0 + j\omega_0)T}$ で極をもつ。 $z^n B(z)$ を $z$ 平面の実軸方向に $-\rho$ 平行移動させたものを $z^n B'(z)$ とする。

$$B'(z) = \left( \frac{z+\rho}{z} \right)^n B(z+\rho) \quad (4.4.1)$$

このとき $B'(z)$ の $z$ 逆変換を $\{\beta'_i\}$ とすると $\beta'_i$ は次式で与えられる(付録N)。

$$\beta'_i = \sum_{r=0}^i \beta_r \binom{n-r}{i-r} \rho^{i-r} \quad i=0, 1, \dots, n \quad (4.4.2)$$

$B(z)$ の極 $z_0$ に対応する $B'(z)$ の極を $z'_0 = e^{s'_0 T} = e^{(\sigma'_0 + j\omega'_0)T}$ とすると、図4.4.3の位置関係において正弦定理を用いると次式が成立する。

$$\frac{\rho}{\sin(\omega'_0 - \omega_0)T} = \frac{e^{\sigma'_0 T}}{\sin \omega'_0 T} \quad (4.4.3)$$

従って、 $\sigma_0$ の推定値 $\hat{\sigma}_0$ は、 $\omega_0$ 、 $\omega'_0$ の推定値 $\hat{\omega}_0$ 、 $\hat{\omega}'_0$ を用いて次式により求めることができる。

$$\hat{\sigma}_0 = \frac{1}{T} \log_e \frac{\rho \sin \hat{\omega}_0 T}{\sin(\hat{\omega}'_0 - \hat{\omega}_0)T} \quad (4.4.4)$$

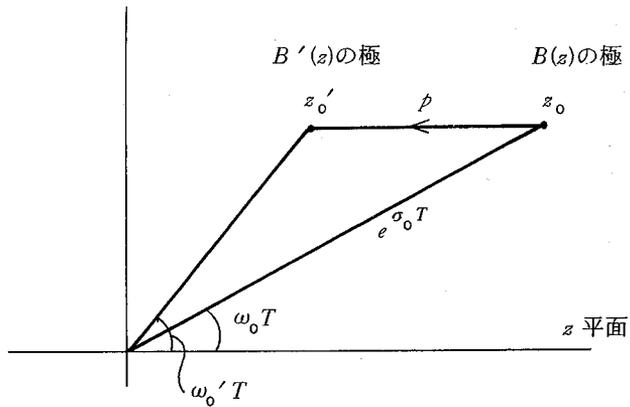


図 4.4.3 平行移動前後の極の位置関係

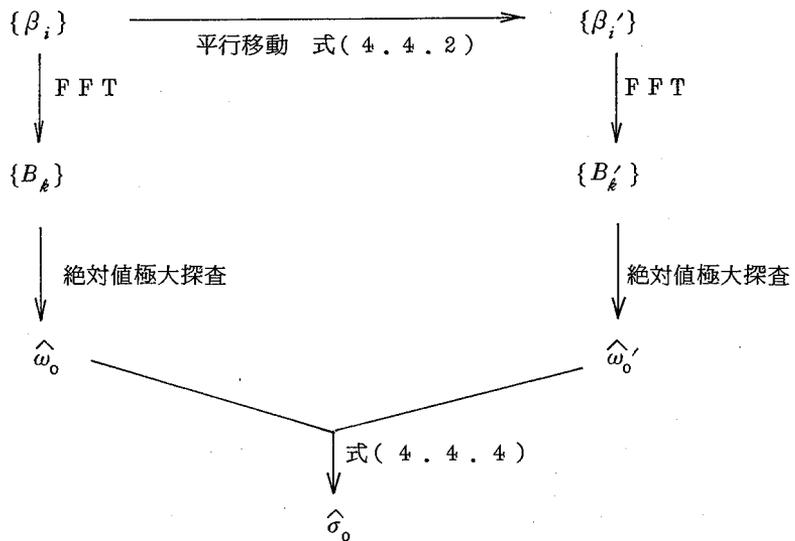


図 4.4.4  $\hat{\omega}_0$  計算の手順

ただし、 $\omega'_0$  は  $\{\beta'_i\}$  の DFT  $\{B'_k\}$  の絶対値極大を与える  $\omega$  である。以上の操作の手順を図 4.4.4 に示しておく。

さて、音響は側枝が無ければ全極型の特性をもつが、全極型の系のインパルス応答の整定時間

はバンド幅が狭くなれば長くなり、従って $\{\beta_i\}$ の標本点数 $n$ を大きくせざるを得ないので、式(4.4.2)の計算が膨大になり、しかも2項係数の値が大きくなるので計算上からも好ましくない。これを回避するために、「全零型の系のインパルス応答の整定時間は全極型の系のそれよりもはるかに短い<sup>(70)</sup>」ということを利用して上記の方法を修正できる。

(II) 計算手順の修正

$\beta(z)$ をインパルス応答としてもつ系の逆特性の系のそれを $\alpha(z)$ とし、その標本値列を $\{\alpha_i, i = 0, 1, 2, \dots, m\}$ とすると、 $\alpha_i$ は次式によって求められる(付録O)。

$$\alpha_0 = \frac{1}{\beta_0}, \quad \alpha_i = \frac{-1}{\beta_0} \sum_{r=1}^i \beta_r \alpha_{i-r} \quad i = 1, 2, \dots, m \quad (4.4.5)$$

ただし $\alpha(z)$ の整定時間は $\beta(z)$ のそれよりもはるかに短い<sup>(70)</sup>ので、 $\{\alpha_i\}$ は $m (\ll n)$ 点で打ち切ることができる。小さい $m$ で $\{\alpha_i\}$ が整定する場合には式(4.4.5)による計算が能率的であるが、 $m$ が大きいときには計算量が幾何級数的に増大するので高速化のためにはFFTを使用する方がよい。 $\beta(z)$ が極型ならば $\alpha(z)$ は零型になり零点の移動は次式のようなになる。

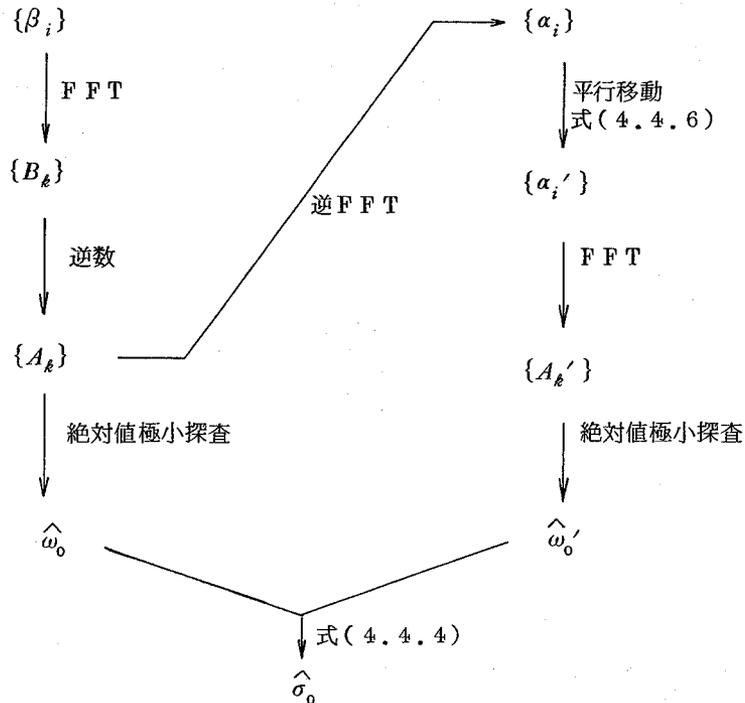


図4.4.5  $\hat{\sigma}_0$ 計算の手順の修正

$$\alpha'_i = \sum_{r=0}^i \alpha_r C_{i-r} p^{i-r}, \quad i = 0, 1, 2, \dots, m \quad (4.4.6)$$

以上より、計算手順は図4.4.5のように修正できる。

#### (III) 平行移動の幅 $p$ の選定について

前述のように、側枝のない音響管の伝達関数は全極型であり、この場合には  $|\omega_0| \gg |\sigma_0|$  の条件は満たされているので  $\hat{\omega}_0$  の推定誤差は小さい。しかし  $\hat{\sigma}_0$  の計算は  $\hat{\omega}_0, \hat{\omega}'_0$  に基づいて式(4.4.4)によって行なわれるので、 $\hat{\omega}'_0 - \hat{\omega}_0$  の値が小さい場合には誤差が大きくなる可能性がある。つまり、式(4.4.4)の  $p \sin \hat{\omega}'_0 T / \sin(\hat{\omega}'_0 - \hat{\omega}_0) T$  は1より少し小さい値になるはずであるが、この値は  $p$  の選定値に関して極めて鋭敏であり従って誤差が大きくなる危険がある。また、 $p$  の最適値は  $z$  平面上の極の位置の関数であることが予想されるので、若干の例についてシミュレーションにより  $\sigma_0$  の推定誤差が10%以下になるための  $p$  の範囲を求めたところ、概略図4.4.6のようになった。横軸は共振の中心周波数、 $f_s$  はサンプリング速度を表す。

このように  $p$  の値は、中心周波数によって適当に選定する必要があるが、中心周波数の推定値は  $B(z)$  の平行移動前に求められているので基本的には問題は生じない。ただし広い周波数範囲にわたって多数の共振点が存在する場合には平行移動の操作を何回か行なう必要がある。

#### (IV) 計算例

中心周波数 2kHz、バンド幅 100Hz の単峰系のインパルス応答が与えられたときの計算例を示す。

中心角周波数	$\omega_0 = 2\pi \times 2000$	rad.
バンド幅	$2\sigma_0 = 2\pi \times 100$	rad.
標本間隔	$T = 10^{-4}$	sec.
標本点数	$N = 512$	
実効的使用点数	$m = 18$	

として図4.4.5の計算手順により  $\hat{\omega}_0, \hat{\sigma}_0$  を求めると

$$\begin{aligned} \omega_0 \text{ の推定値} & \quad \hat{\omega}_0 = 2\pi \times 1999.513 \quad \text{rad.} \\ \sigma_0 \text{ の推定値} & \quad 2\hat{\sigma}_0 = 2\pi \times 99.780 \quad \text{rad.} \end{aligned}$$

が得られた。ただし  $p=0.05$  として計算した。このときの平行移動前後の零点の位置を図 4.4.7 に示す。この例では  $p=0.05$  としたときに  $\sigma_0$  の良い推定値が得られたが、参考のために  $p$  を変化させたときの  $\hat{\sigma}_0$  の計算値を  $\sigma_0$  で正規化した値で図 4.4.8 に示す。

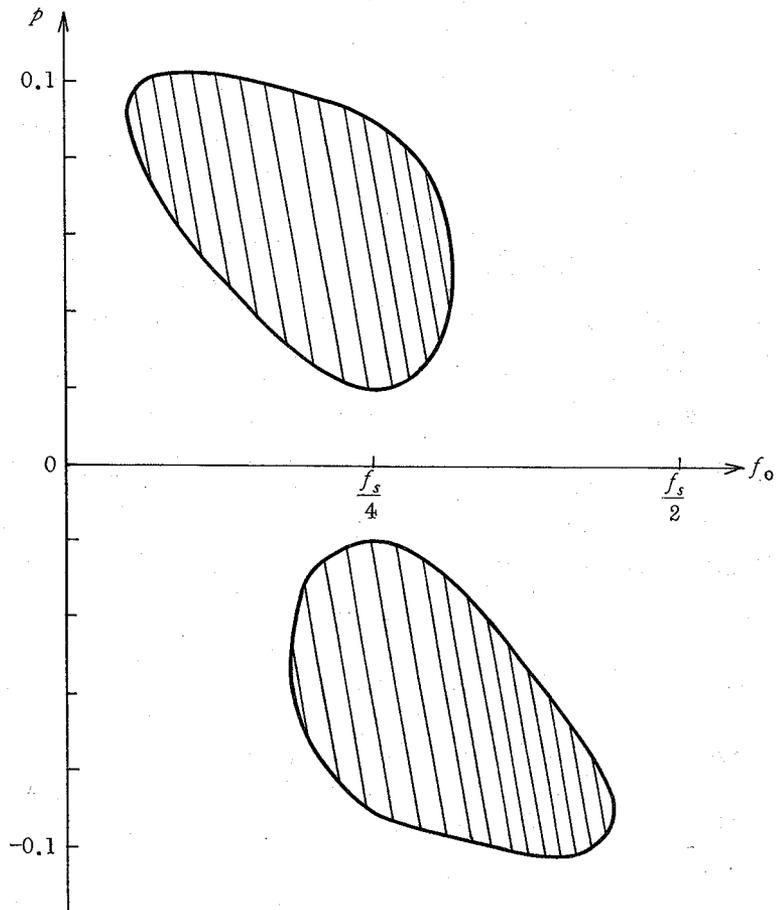


図 4.4.6 バンド幅の推定誤差が10%以内になるための  $p$  の範囲(斜線部)

$f_0$  : 共振の中心周波数

$f_s$  : サンプルング速度

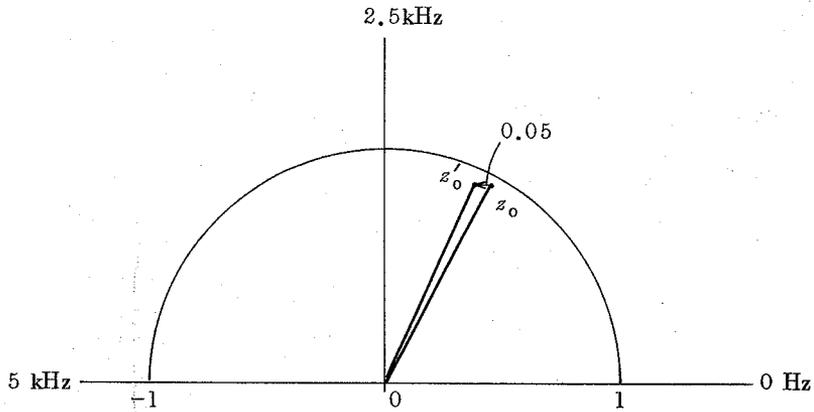


図 4.4.7 計算例における零点の移動

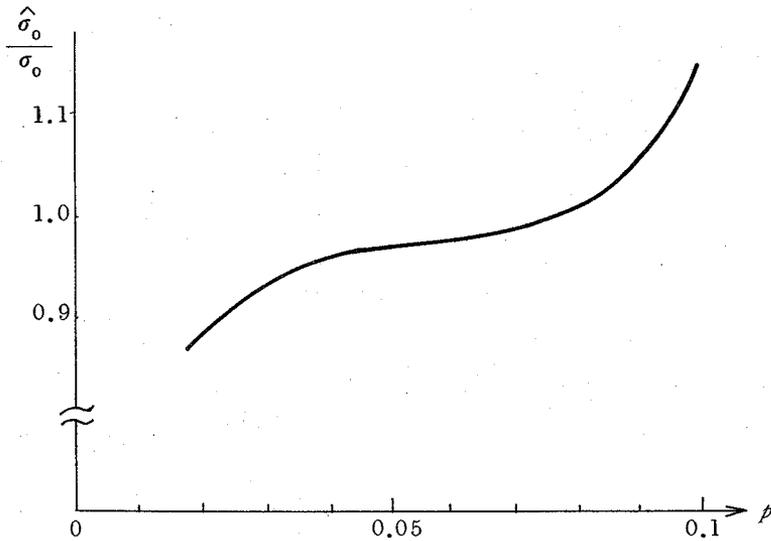


図 4.4.8  $\hat{\sigma}_0 / \sigma_0$  の  $\rho$  依存性

(V) この手法の難点

(i) 極の位置が  $z$  平面の実軸に近いときには  $\rho$  をどのように設定しても  $\sigma_0$  の良い推定値を得ることができない。理由は  $\Delta \circ z_0 z'_0$  が極端に扁平になって  $\hat{\omega}'_0 - \hat{\omega}_0$  の値が 0 に近づくため計算の精度が上がらないからである。

- (ii) 共振点の個数が多い場合には、各極の移動前後の対応が不明確になる可能性がある。
- (iii) バンド幅の広い共振に対しては式(4.4.6)の $m$ が大きくなり計算量が増大する。

#### 4.4.3 音のズームング

光学系によるズームングは容易に実現可能であるが、音のズームングに関しては多数の研究者の努力にもかかわらず現在までのところでは一般的な方法は開発されていない。これまでに発表された方法は複数のマイクロホンを使用して指向性を得るもの<sup>(71,72)</sup>であり、ズームングの効果は望めない。ズームングによって抽出したい音の特性が正確にわかっている場合には適当な手段(例えばクシ型フィルタなど)が考えられるであろうが、一般の場合に適用できる方法はそのようなヒューリスティックな手段ではないはずである。そして、音のズームングは光の場合とは違って周囲の雑音をすべて除去するという事は困難であり、予め位置のわかっている雑音源から発生される直接音だけを除去するのが限界であろうと考えられる。

ここでは、 $n$ 個の音源から自由空間に放射される $n$ 種の音を $m$ 個のマイクロホンで受けてFFTを用いてそれらを分離する方法を示す。この方法は多点受音を周波数領域での $n$ 元連立1次方程式に定式化することに基づいている。<sup>(75)</sup>

##### (I) 多点受音の基礎方程式

まず本方式の基礎となる方程式を導いておく。図4.4.9に示すように、自由空間中で $m$ 個のマイクロホン $M_i$  ( $i=1, 2, \dots, m$ )によって $n$ 個の点音源 $S_j$  ( $j=1, 2, \dots, n$ )から発生される音 $s_j(t)$ を受けるとし、その受音波形を $f_i(t)$ とする。 $M_i$ と $S_j$ 間の距離を $d_{ij}$ 、音速を $c$ とすると、球面波の音圧は音源からの距離に逆比例する<sup>(73)</sup>ので次式が成立する。ただし、ここでは $S_j$  ( $j=1, 2, \dots, n$ )以外に音源はなく、 $M_i$  ( $i=1, 2, \dots, m$ )では全音源からの直接音だけが受音されるものと仮定する。

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{d_{11}} s_1 \left( t - \frac{d_{11}}{c} \right) + \dots + \frac{1}{d_{1n}} s_n \left( t - \frac{d_{1n}}{c} \right) &= f_1(t) \\ \vdots & \\ \frac{1}{d_{m1}} s_1 \left( t - \frac{d_{m1}}{c} \right) + \dots + \frac{1}{d_{mn}} s_n \left( t - \frac{d_{mn}}{c} \right) &= f_m(t) \end{aligned} \right\} \quad (4.4.7)$$

$f_i(t)$ ,  $s_j(t)$ のフーリエ変換をそれぞれ $F_i(\omega)$ ,  $S_j(\omega)$ とし、式(4.4.7)の両辺のフーリエ変換をとると次式が得られる。

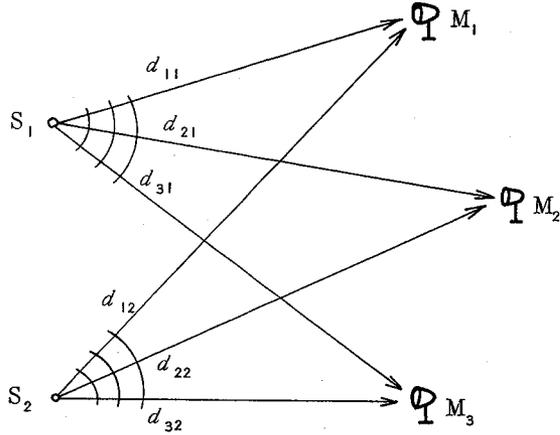


図 4.4.9 多点受音の構成例 ( $m=3, n=2$ )

$$\left. \begin{aligned}
 \frac{e^{-j\omega \frac{d_{11}}{c}}}{d_{11}} S_1(\omega) + \dots + \frac{e^{-j\omega \frac{d_{1n}}{c}}}{d_{1n}} S_n(\omega) &= F_1(\omega) \\
 \vdots & \\
 \frac{e^{-j\omega \frac{d_{m1}}{c}}}{d_{m1}} S_1(\omega) + \dots + \frac{e^{-j\omega \frac{d_{mn}}{c}}}{d_{mn}} S_n(\omega) &= F_m(\omega)
 \end{aligned} \right\} (4.4.8)$$

ここで

$$A(\omega) \triangleq \begin{bmatrix} \frac{e^{-j\omega \frac{d_{11}}{c}}}{d_{11}} & \dots & \frac{e^{-j\omega \frac{d_{1n}}{c}}}{d_{1n}} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{e^{-j\omega \frac{d_{m1}}{c}}}{d_{m1}} & \dots & \frac{e^{-j\omega \frac{d_{mn}}{c}}}{d_{mn}} \end{bmatrix} \quad (4.4.9)$$

$$S(\omega) \triangleq \begin{bmatrix} S_1(\omega) \\ \vdots \\ S_n(\omega) \end{bmatrix} \quad (4.4.10)$$

$$F(\omega) \triangleq \begin{bmatrix} F_1(\omega) \\ \vdots \\ F_m(\omega) \end{bmatrix} \quad (4.4.11)$$

とおくと式(4.4.8)は次のように表わされる。

$$A(\omega) S(\omega) = F(\omega) \quad (4.4.12)$$

これを多点受音の基礎方程式と呼んでおく。

ここでは実用的見地に立って

$$\text{rank } [A(\omega)] = \text{rank } [A(\omega) \mid F(\omega)] = n \quad (4.4.13)$$

の場合を扱う。つまり  $n$  個の音源から放射された音を  $n$  個のマイクロホンで受け、かつ  $A(\omega)$  が正則である場合について述べる。

このとき式(4.4.12)の解は

$$S(\omega) = A^{-1}(\omega) F(\omega) \quad (4.4.14)$$

であるので、これをフーリエ逆変換することによって次式が得られる。

$$s(t) = \mathcal{F}^{-1} [G(\omega)] \quad (4.4.15)$$

ただし、

$$G(\omega) \triangleq A^{-1}(\omega) F(\omega) = \begin{bmatrix} G_1(\omega) \\ \vdots \\ G_n(\omega) \end{bmatrix} \quad (4.4.16)$$

$$s(t) \triangleq \begin{bmatrix} s_1(t) \\ \vdots \\ s_n(t) \end{bmatrix} \quad (4.4.17)$$

$\mathcal{F}^{-1}$  はフーリエ逆変換を表わす。

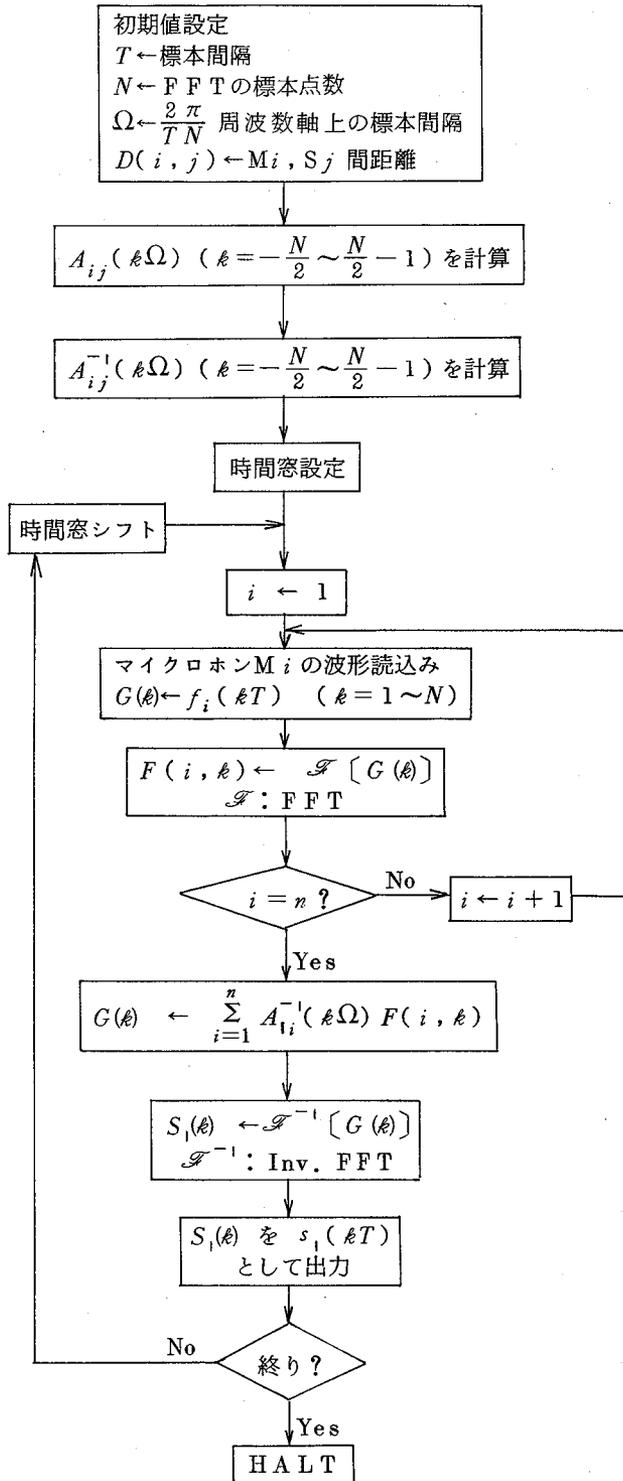


図4.4.10 音のズームインのフローチャート

式(4.4.15)が多点受音の基礎方程式の、式(4.4.13)の条件下での時間領域における解である。

### (II) 音のズームイン

式(4.4.15)を計算すれば、各音源の音を分離できるので音のズームインが可能になる。実際の計算ではフーリエ変換にはFFTを利用することになるが、その場合、連続的な波形を一挙に処理することはできないので、適当な区間に区切って処理して行かなければならない。従って「重ね合せ加算」あるいは「重ね合せ節約」<sup>(74)</sup>の手法によって $s(t)$ 合成時の時間的連続性を保つような工夫を要する。図4.4.10に音源 $S_1$ の音をズームアップするための処理手順をフローチャートにして示す。

### (III) 計算例と問題点

本方式を $m=n=2$ すなわち音源2個、マイクロホン2個の場合についてシミュレーションした結果を示す。音源 $S_1$ 、 $S_2$ およびマイクロホン $M_1$ 、 $M_2$ の配置は図4.4.11のようにし、音源波形としては次のものを用いた。

$$\left. \begin{aligned} s_1(t) &= \sum_{i=1}^3 \sin(2\pi \times i \times 977t + \phi_i) \\ s_2(t) &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^5 \sin(2\pi \times i \times 586t + \psi_i) \end{aligned} \right\} \quad (4.4.18)$$

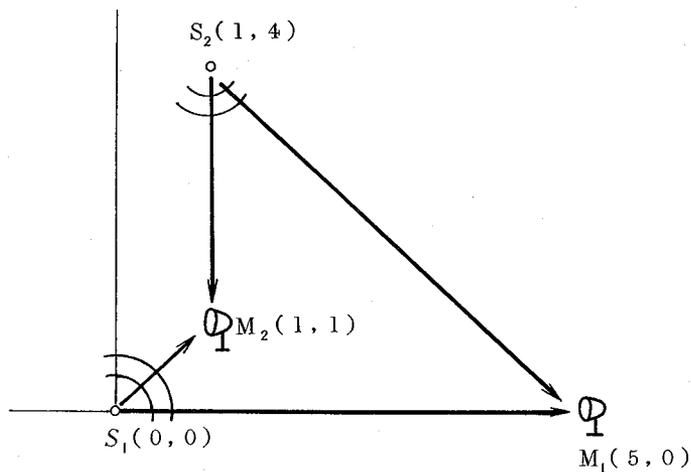


図4.4.11 シミュレーションにおける音源とマイクロホンの配置

$s_1(t)$ ,  $s_2(t)$  発生 の 標 本 間 隔 は  $10^{-4}$  sec, FFT の 標 本 点 数 は 256, 従 っ て 時 間 窓 に は  $s_1(t)$  は 25 周 期,  $s_2(t)$  は 15 周 期 の 波 形 が 含 ま れ て い る 状 況 で の シ ミ ュ レ ー シ ョ ン で あ る .

図 4.4.12 に  $S_1(\omega)$ ,  $S_2(\omega)$ ,  $F_1(\omega)$ ,  $F_2(\omega)$  お よ び 本 方 式 で 求 め た  $G_1(\omega)$  を 示 す .  $F_1(\omega)$  で は  $S_1(\omega)$  と  $S_2(\omega)$  が 混 在 し て い る が,  $G_1(\omega)$  で は  $S_2(\omega)$  の 成 分 が ほ ぼ 完 全 に 除 か れ て い る こ と が わ か る . 実 際 に は 上 で 仮 定 し た 条 件 が 厳 密 に は 成 立 し な い の で こ れ ほど う ま く 動 作 し な い と 思 わ れ る が, 実 用 上 は S/N 比 が 6 dB も 改 善 で き れ ば 十 分 で あ る の で 本 方 式 は 有 効 で あ る と 考 え ら れ る .

本方式の問題点をまとめると以下のようなになる.

- (i) 音源の位置が正確にわかっている必要がある.
- (ii) 周囲からの雑音, 反射音は除去できない.
- (iii) 計算が, 音源-マイクロホン間の距離による遅延に過度に鋭敏である.
- (iv)  $A(\omega)$  の正則性が周波数特性をもつので, 正則性が破れる周波数でのズームングは不可能である.

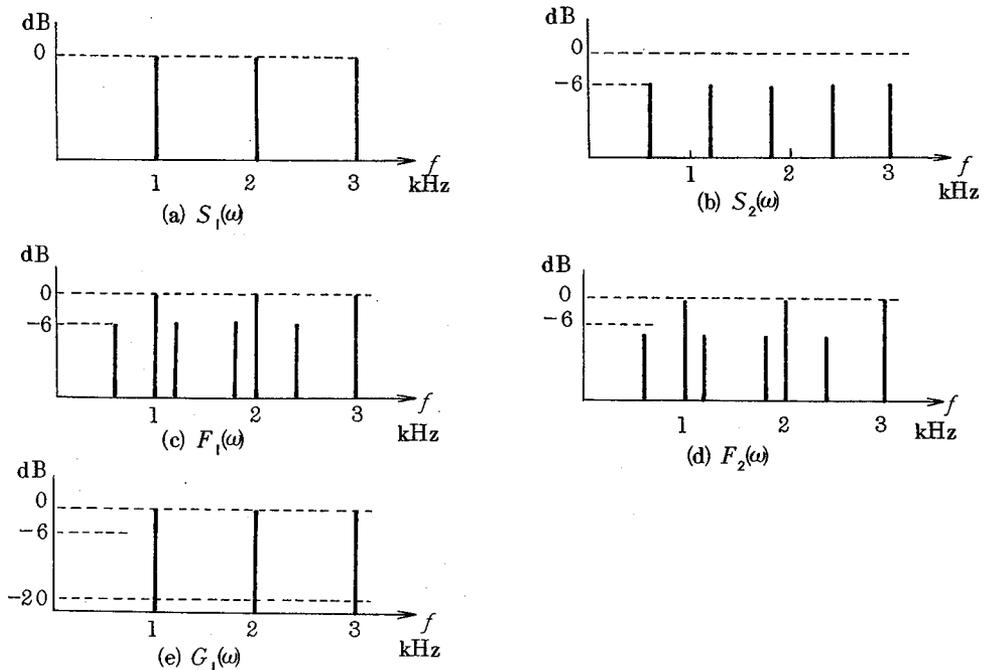


図 4.4.12 シミュレーション波形のスペクトル

- (a), (b) : 音源のスペクトル
- (c), (d) : 受信された波形のスペクトル
- (e) : ズームングによって抽出された音源1のスペクトル

以上のような問題があるが、実用的にはいくらかでもズーミングの効果があればよいのであるから、本方式は有用であると思われる。

#### 4.5 画像信号処理への応用

本節ではFFTの画像信号処理への応用例について述べる。4.5.1では3.4.3で示した2次元倍速度FFTによる画像のボケの検出法を示す。次に4.5.2では時変画像の特異値分解に「FFTを用いて行列の固有多項式を求める方法」を応用する符号化アルゴリズムを示す。

##### 4.5.1 2次元DFTによるボケの検出

光学機械の自動焦点調節などのために画像のボケ（焦点はずれ）の検出は重要である。ボケの程度が定量的に評価できれば簡単な最適手法によって自動焦点調節が可能になることは明白であるので、ここでは2次元DFTを用いたボケの程度の定量的表現を試みる。ここでの考え方の基礎になっているのは、ボケの小さい画像は空間周波数の高域成分のレベルが大きいであろうということである。

画像の標本値を

$$\{g_{mn}\}, \quad m \in \mathcal{M}, \quad n \in \mathcal{N} \quad (4.5.1)$$

$$\mathcal{M} \triangleq \{0, 1, \dots, M-1\}, \quad \mathcal{N} \triangleq \{0, 1, \dots, N-1\}$$

とし、その2次元DFTを

$$\{G_{pq}\}, \quad p \in \mathcal{M}', \quad q \in \mathcal{N}' \quad (4.5.2)$$

$$\mathcal{M}' \triangleq \left\{-\frac{M}{2}, \dots, 0, \dots, \frac{M}{2}-1\right\}, \quad \mathcal{N}' \triangleq \left\{-\frac{N}{2}, \dots, 0, \dots, \frac{N}{2}-1\right\}$$

とするとき、成分の大きさの分布状態を表わす指数 $d$ として次式を定義する。

$$d \triangleq \frac{\sum_{p \in \mathcal{M}'} \sum_{q \in \mathcal{N}'} w_{pq} |G_{pq}|^2}{\sum_{p \in \mathcal{M}'} \sum_{q \in \mathcal{N}'} u_{pq} |G_{pq}|^2} \quad (4.5.3)$$

ただし、 $u_{pq}$ ,  $w_{pq}$  は規格化された空間周波数 $p$ ,  $q$ の標本点に対する荷重で、 $u_{pq}$ は一様あるいは $|p|$ ,  $|q|$ が小さい所で大、 $w_{pq}$ は $|p|$ ,  $|q|$ が大きい所で大としておく。こうすると

$d$  は、空間周波数上の全帯域あるいは低域のパワーに対する高域のパワーの荷重された割合を表わし、同一の対象に対する画像の中では  $d$  の大きい画像の方がボケが小さいと判断できる。

$u_{pq}, w_{pq}$  は例えば次のように決めておくことにする。

$$\left. \begin{aligned} u_{pq} &= 1 \\ w_{pq} &= \begin{cases} 0 & p^2 + q^2 < r^2 \\ 1 & p^2 + q^2 \geq r^2 \end{cases} \end{aligned} \right\} \quad (4.5.4)$$

このとき  $d$  は、全パワーに対する、空間周波数  $r$  以上の成分のパワーの割合を示すことになる。

計算例として、ボケ検出用の標準図形 Siemens Star を 3 種のボケ具合 ( 整合, ボケ小, ボケ大 ) で AD 変換し, その 2 次元 DFT について式 (4.5.4) の  $u_{pq}, w_{pq}$  に対する設定値を用いたときの  $d$  を  $r$  の関数として計算した結果を図 4.5.1 に示す。画像の標本点数は  $64 \times 64$  である。

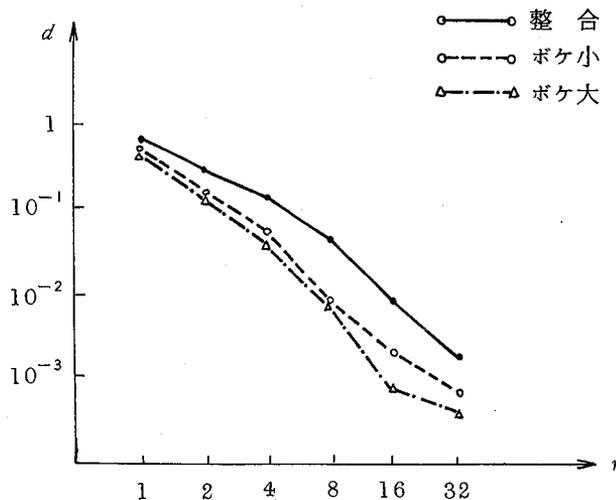


図 4.5.1 式 (4.5.4) の下での  $d$  の  $r$  依存性

以上より、2次元 DFT に基づいた  $d$  によりボケの程度を定量的に表現できることがわかった。

参考のために、より簡単な計算でボケの程度を表現する方法を検討したところ、画面の中の適当な直線上の標本点について、隣接標本値との差のうちある閾値以上のものを加算する<sup>(76)</sup> とい

う極めて簡単な計算による方が、ここで示した方法よりも信頼性が高かった。

#### 4.5.2 特異値分解による時変画像の符号化

ここではまず画像を表わす行列の特異値分解を説明し、その計算精度を向上させるための付加的処理について述べる。その過程で固有方程式を解くことになるが、そこでFFTを用いて固有多項式を求める方法を利用すれば計算の効率化が計れるのである。最後にこれらを総合した時変画像の効率的符号化アルゴリズムを示す。

##### (I) 画像の符号化の考え方

画像の符号化は、画像の伝送などの実用面から見て、帯域圧縮という意味で極めて重要な問題である。静止画像の符号化に関してはこれまで種々の方式が試みられており、特異値分解<sup>(77~78)</sup>が2乗誤差最小の意味で最適であることは公知であるが、計算量が膨大になることが原因で、高速処理を要する伝送の分野にはあまり使用されていない。そのような分野では、これの代りに最適ではないが高速演算が可能なフーリエ変換、アダマール変換、ウォルシュ変換などが、相互に独立な成分に分解できるという意味で準最適な符号化として用いられることが多い。<sup>(79,80)</sup>ところがこれらの変換では変換の核の符号化は不要であるが、符号化すべき成分の数を多くとらなければならぬという欠点があり、一方特異値分解では成分の数は少なくて済むが各成分についてその固有画像を同時に符号化しておく必要がある。ここではこれらの手法の得失を考慮に入れて、時変画像の符号化法として特異値分解を利用してフレームあたりの平均符号長を短かくできる方法を示す。

##### (II) 静止画像の特異値分解

静止画像を表わす $M \times N$ 行列を $G$ とするとき、 $G$ は次のように分解できる(付録P)。

$$G = \Phi \Lambda^{\frac{1}{2}} \Psi \quad (4.5.5)$$

ただし  $\Phi$  :  $GG^T$  の正規化固有列ベクトル行列 ( $M \times M$ )

$\Psi$  :  $G^TG$  の正規化固有列ベクトル行列 ( $N \times N$ )

$\Lambda^{\frac{1}{2}}$  :  $(i, i)$  要素に  $\lambda_i^{\frac{1}{2}}$  をもち、他の要素はすべて0である  $M \times N$  行列

ここで  $\lambda_i$  は  $G$  の自己相関行列  $GG^T$ ,  $G^TG$  の固有値で、その非負の平方根  $\lambda_i^{\frac{1}{2}}$  は  $G$  の特異値と呼ばれている。式(4.5.5)は特異値分解と呼ばれるが、これを外積記法で書くと次のようになる。

$$G = \sum_{i=1}^R \lambda_i^{\frac{1}{2}} \phi_i \psi_i^T, \quad R \triangleq \text{rank } [G] \quad (4.5.6)$$

ただし  $\phi_i$  :  $\Phi$  の第  $i$  列,  $\psi_i$  :  $\Psi$  の第  $i$  列

この右辺の階数 1 の  $M \times N$  行列  $\phi_i \psi_i^T$  は第  $i$  固有画像と呼ばれ, 従って  $G$  は固有画像の特異値による荷重和であると考えられる. 式 (4.5.6) の  $\Sigma$  の上限を  $K$  ( $K \leq R$ ) としたものを

$$G_K \triangleq \sum_{i=1}^K \lambda_i^{\frac{1}{2}} \phi_i \psi_i^T \quad (4.5.7)$$

とすると,  $G$  と  $G_K$  の差の 2 乗ノルムは

$$\epsilon = \|G - G_K\|^2 = \sum_{i=K+1}^R \lambda_i \quad (4.5.8)$$

となる (付録 Q). 従って,  $\lambda_i$  の番号付けをその大きさの順にすれば式 (4.5.7) は 2 乗誤差最小の意味で最適な  $G$  の分解になる. ここで自己相関行列の固有ベクトル  $\phi_i, \psi_i$  をそれと対応する固有ベクトルの大きさの順に求める必要が生じるが, その計算のために有効な方法としてベキ乗法<sup>(81)</sup>がある. 以下にベキ乗法によって, 自己相関行列  $A$  の固有値, 固有ベクトルを固有値の大きさの順に求める手順を簡単に説明しておく.

[ベキ乗法]

(i)  $A$  の最大固有値  $\lambda_1$  に対応する固有ベクトル  $\phi_1$  の近似ベクトル  $\tilde{\phi}_1$  は次式で求まる.

$$\tilde{\phi}_1 = A^k \mathbf{x}, \quad k : \text{十分大きい整数} \quad (4.5.9)$$

$$\mathbf{x} = \sum_{i=1}^R a_i \phi_i, \quad a_i \neq 0 \text{ で任意} \quad (4.5.10)$$

(ii) 最大固有値の近似値  $\tilde{\lambda}_1$  は次式で求まる.

$$\tilde{\lambda}_1 = \tilde{\phi}_1^T A \tilde{\phi}_1 \quad (4.5.11)$$

(iii)

$$A \leftarrow A - \tilde{\lambda}_1 \tilde{\phi}_1 \tilde{\phi}_1^T \quad (4.5.12)$$

として(i), (ii), (iii)をくり返す。

次にベキ乗法の計算精度向上のための補足的処理について述べる。ベキ乗法の近似の精度を上げるためには、まず第1に式(4.5.9)の $\epsilon$ の値を大きくとることが考えられるが、この他に(ii)における $\tilde{\lambda}_1$ の近似の程度を改善するという方法もある。ここではこの処理にFFTを利用することにする。

固有値の近似の精度を上げるために、式(4.5.11)で求めた $\tilde{\lambda}_1$ を第1近似としてNewton-Raphson法<sup>(82)</sup>を用いて固有方程式の根である $\lambda_1$ のより良い近似値を求めることを考える。そのためには固有多項式の係数が求められれば問題は解決する。ここでFFTを用いて固有多項式の係数を計算する方法<sup>(83)</sup>を簡単に説明しておく。

与えられた $N \times N$  ( $N = 2^\nu$ ) 行列を $A$ とする。このとき $W = e^{j \frac{2\pi}{N}}$ として

$$b_m \triangleq \det(W^{-m} E_N - A), \quad m \in \mathcal{N} \triangleq \left\{ -\frac{N}{2}, \dots, 0, \dots, \frac{N}{2} - 1 \right\} \quad (4.5.13)$$

の逆DFTをFFTによって計算すれば、その結果が固有多項式の係数を与える。ただしこの方法は式(4.5.13)に手数がかかるので高速化は望めない。

### (iii) 時変画像の符号化アルゴリズム

時変画像の効率的な符号化として、基本的には式(4.5.7)の形の特異値分解を利用し、画像の微小な変化に対してはそれ以前の画像の特異値分解における固有画像をそのまま流用して符号化する方法を示す。<sup>(84)</sup>

時刻 $t$ での画像を $G(t)$ とし、その特異値分解を

$$G(t) = \Phi \Lambda^{\frac{1}{2}} \Psi^T = \sum_{i=1}^R \lambda_i^{\frac{1}{2}} \phi_i \psi_i^T \quad (4.5.14)$$

とする。この式はまた $G(t)$ の再合成の方法を表わしているが、ここで特異値の番号をその大きさ順に付けると

$$G_K(t) \triangleq \sum_{i=1}^K \lambda_i^{\frac{1}{2}} \phi_i \psi_i^T = G(t) \quad (4.5.15)$$

として最適符号により近似的な再合成ができる。別の時刻 $t'$ での画像 $G(t')$ を $\Phi, \Psi$ によって

$$S = \Phi^T G(t') \Psi \quad (4.5.16)$$

のように変換すると $G(t')$ は

$$G(t') = \Phi S \Psi^T \quad (4.5.17)$$

として正確に再合成できる。ここで $G(t')$ は $G(t)$ を微小変化させたものであるとすると、 $S$ の右上、左下の要素は近似的に0になり、対角付近の要素だけが非0の値をとる。従って $G(t')$ の再合成には $S$ の対角付近の値だけがあれば十分である。

$S$ の非0の要素の対角からの広がり程度の度を表わす量として

$$d = \frac{\sum_{i=1}^M \sum_{k=1}^N k (S_{i, i-k}^2 + S_{i, i+k}^2)}{\sum_{i=1}^M S_{i,i}^2} \quad (4.5.18)$$

で表わされる「にじみ出し」を定義しておく。 $d$ がある閾値 $d_c$ よりも小のとき $G(t')$ は $G(t)$ から大きくは変化していないと判定することにする。

$d < d_c$ のとき式(4.5.16)で $\Phi, \Psi$ の代りに

$$\left. \begin{aligned} \Phi_K &= [\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_K, 0, \dots, 0] \\ \Psi_K &= [\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_K, 0, \dots, 0] \end{aligned} \right\} \quad (4.5.19)$$

を用いて $G(t')$ を

$$S_K = \Phi_K^T G(t') \Psi_K \quad (4.5.20)$$

と変換し、変換像 $S_K$ を用いて式(4.5.17)の代りに

$$G(t') = \Phi_K S_K \Psi_K^T \quad (4.5.21)$$

とすると効率のよい計算が行なえる。ただしこのとき画像の変化の程度は式(4.5.18)の $d$ を $S_K$ に対して定義した $d_K$ によって判定するものとする。以上より時変画像の符号化アルゴリズムは図4.5.2のようになる。

このアルゴリズムの動作特性は、特異値分解の成分数 $K$ と画像変化の程度の判定閾値 $d_c$ によって左右されるが、 $K \rightarrow$ 大、 $d_c \rightarrow$ 小とすると誤差は小さくなる。ただし、 $K$ を大きくすれば

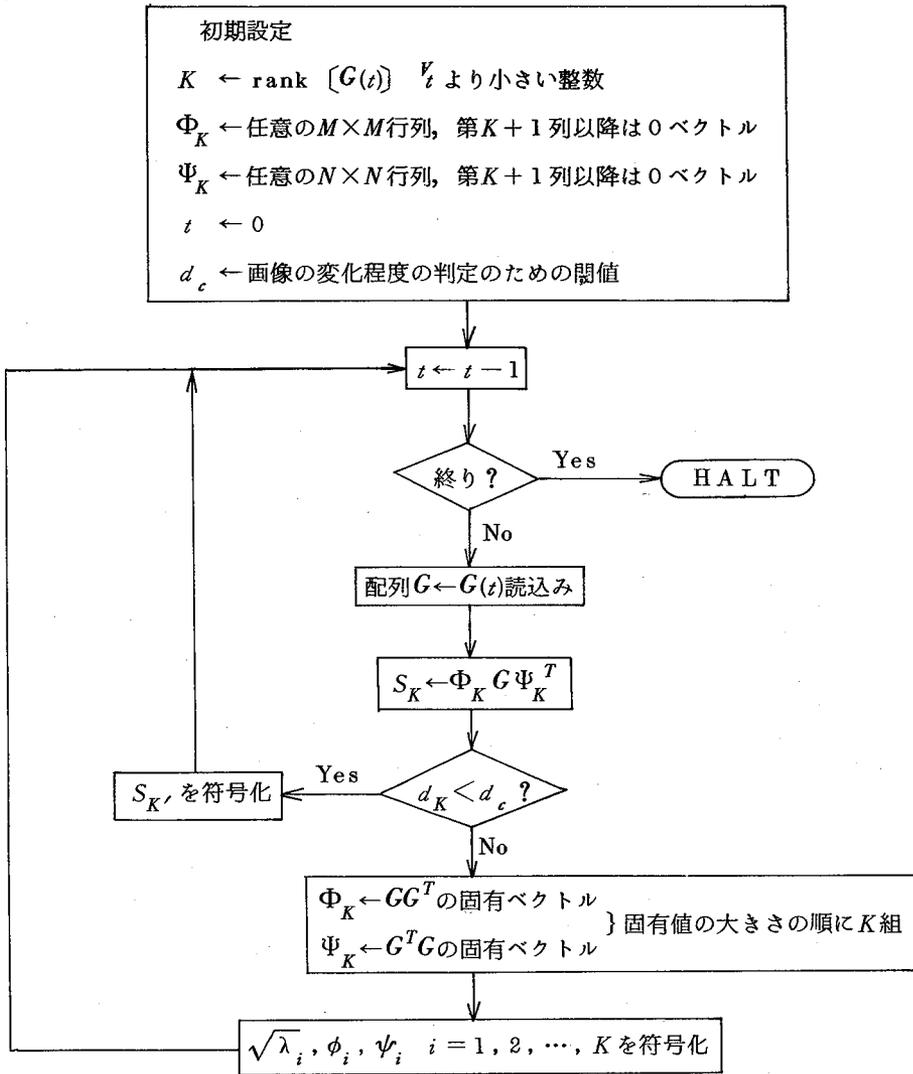


図 4.5.2 特異値分解による時変画像の符号化アルゴリズム

$\Phi_K, \Psi_K, S_K$  を求めるための計算量が増加し,  $d_c$  を小さくすれば特異値分解を行なう頻度が増加する. 本アルゴリズムは,  $K$  を縦方向と横方向で独立にとり,  $d_c$  とともに適応型のパラメータとすることによってさらに改良が可能である.

#### 4.6 結 言

本章では、種々な分野へのFFTの応用を示した。ここでは前章で示した各種の高速化の手法が駆使されており、このことはFFTおよびそれに関連した計算の高速化が、一般のデジタル信号処理法として汎用性があることを立証していると言える。今後も、FFTは単なる周波数分析に限らず広い範囲の信号処理技術の核として利用されるであろう。

## 第 5 章 結 論

本章では、本研究によって得られた成果および、今後に残された問題について総括する。

第 2 章においては、等間隔標本化に関する標本化定理を拡張し、周波数領域での折返しを利用したデジタル周波数分析法に保証を与えた。ただしこの方法では折返し周波数の整数倍の周波数付近の分析が不可能であるという難点がある。次に、帯域通過型信号に対する一般標本化定理によって導入された 2 重標本列の DFT の計算法を示し、アナログにおけるビートダウンの効果がデジタルでは 2 重標本化によって得られることを示した。この方法により上記の難点は解消したが、なお実際の分析では帯域濾波器の構成が物理的に困難であるということと、計算結果が標本化操作の時間的な誤差に過敏であることなどの難点が残っている。

第 3 章においては、まず FFT アルゴリズムの原理が 2 重標本列の DFT 計算法から直接に導かれることを示した。次に実数値列に対する FFT の高速化の方法を再び 2 重標本列の DFT 計算法を利用して開発した。現在、低域通過型信号の FFT ハードウェアにはこれと同様なアルゴリズムが利用されているが、ここで示した方法は帯域通過型信号にも適用可能であるので、将来需要が生じれば直ちに実用化可能である。この章ではまた、2 次元 DFT の高能率化の方法を示した。現在 2 次元 DFT のためのハードウェアはまだ実用化されていないが、近い将来これは必ず市販されるようになると思う。2 次元 DFT のハードウェア化には FFT の並列演算が要求されるが、ここで示した方法を用いると、必要とする並列 FFT の数を半減させることができるので実用化に際して重要な意味をもっている。

第 4 章においては、FFT のいくつかの応用例を示した。主なものを列挙すると次のようになる。

1. FFT を用いた高次代数方程式の解法を示した。ただしこの方法の精度は解の位置とパラメータ  $p$  の設定値によっては必ずしも良くないので、他の近似解法により精度を上げる必要が生じることもある。この方法は、非常に次数の高い代数方程式の解の第 1 近似を求めるのに有効であると言える。

2. 2 次元 FFT を用いた時空間コンボリューションの計算法を示した。この方法により、2 重コンボリューションは直接計算するよりも 2 次元 DFT によって周波数領域での積として計算する方が計算時間を短縮できることが明らかになった。

3. FFT を使った音のズームングの方法を示した。この方法では、係数行列の正則性が崩れる周波数での分離はできないが、全マイクロホン—全音源間の距離が正確に測定できるなら、十

分実用的な効果を得ることができる。

4. 行列の特異値分解にFFTを利用し、時変画像を効率的に符号化するアルゴリズムを示した。この方法は、経済性に応じて二つのパラメータを調節することにより性能を設定できるという利点を有するが、なお特異値分解にはかなりの手順を要するので、今後は1回の特異値分解のための手順を減少させる手法の開発が必要である。

以上、本研究ではデジタル周波数分析の高速演算を中心にまとめた。現在デジタル周波数分析はデジタル信号分析の中の大きな位置を占めているが、今後デジタル信号分析は単なる周波数分析という観点を越えて、人間の視聴覚の情報処理機能を模倣するような技術に向かうように思う。その際、特に音に関して聴覚系との対応をつけようとするなら、明瞭度貢献度(AI: Articulatory Index)を考慮しなければならないので、帯域別の効率的周波数分析法が要求され、本研究で開発した計算法が活用されるようになると予想される。また、FFT、特にそのハードウェアの利用は、現時点では周波数分析だけに限定されているようであるが、第4章で例示したように、これはもっと広汎な用途にも応用できるので、将来は単なる周波数分析以外のシステムにも組込まれるようになるであろう。その場合、第3章で示した高速演算、2重演算および記憶容量軽減を計った計算法が利用されるであろうことは論を待たない。

## 謝

## 辞

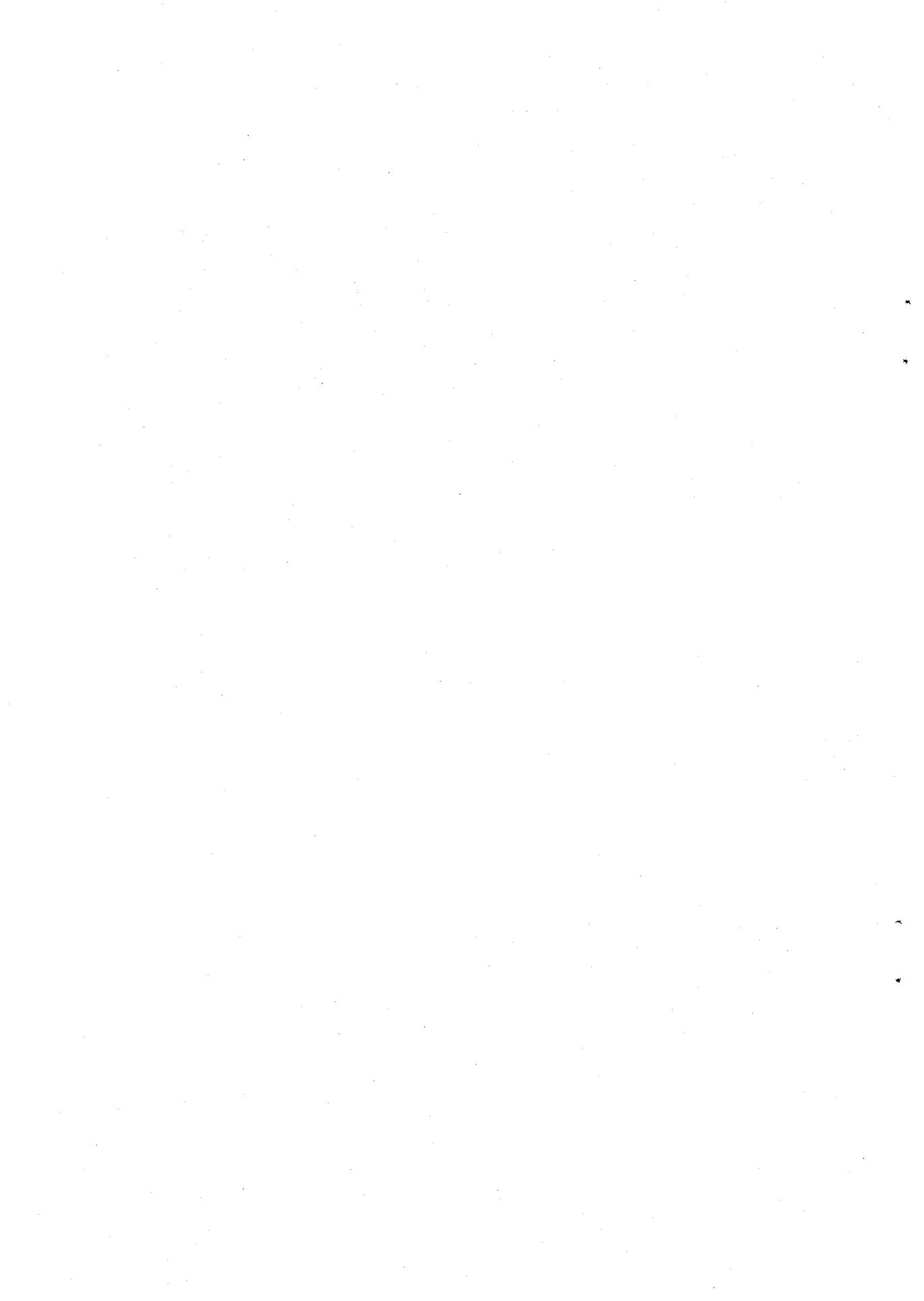
本研究の全過程を通じて、直接理解ある御指導を賜わり、つねに励ましていただいた角所収教授、ならびに翁長健治助教授に衷心より感謝の意を表する。

大学院前期、後期両課程において電子、通信工学一般および各専門分野に関し御指導、御教示を賜わった電子工学教室菅田栄治名誉教授、喜田村善一名誉教授、尾崎弘教授、中井順吉教授、小山次郎教授、児玉慎三教授、寺田浩詔教授、電子ビーム研究施設裏克己教授、埴輝雄教授、産業科学研究所加藤金正名誉教授、松尾幸人教授、中村勝吾教授、通信工学教室青柳健次名誉教授、笠原芳郎名誉教授、板倉清保教授、滑川敏彦教授、熊谷信昭教授、中西義郎教授、手塚慶一教授に深謝する。

また有益な御助言、御討論をいただいた東北大学城戸健一教授、産業科学研究所竹内龍一教授、関西大学西山静男教授、姫路工業大学三好義昭助手に深く感謝する。

第4章の内容に関して、特に4.2.3および4.4.2については第一会計計算センター井上功氏、4.3.2については大学院生谷勝二氏、4.4.1については産業科学研究所奥田良行氏、4.5.1については応用物理学教室一岡芳樹助教授および国立民族学博物館吉見賢一氏の御援助をいただいた。ここで厚く御礼申し上げる。

筆者の属している角所研究室の諸氏、特に荒川珠江嬢ならびに松田尚子嬢には種々の面で多大の御協力をお願いした。ここに記して深く感謝する次第である。



## 参 考 文 献

- (1) J.W. Cooley and J.W. Tukey: "An algorithm for the machine calculation of complex Fourier series", *Mathematics of Computation*, Vol. 19, pp. 297-301 (1965).
- (2) H. Nyquist: "Certain topics in telegraph transmission theory", *Amer. Inst. of Elec. Engrs, Trans.*, Vol. 47, pp. 617-644 (1928).
- (3) L. R. Rabiner, et al: "Terminology in digital signal processing", *IEEE Trans.*, Vol. AU-20, No. 5, pp. 322-337 (1972).
- (4) 染谷: "波形伝送", p. 70, 教修社, 東京 (昭24).
- (5) C. E. Shannon: "Communication in the presence of noise", *Proc. IRE*, Vol. 37, No. 1, pp. 10-21 (1949).
- (6) A. Kohlenberg: "Exact interpolation of band-limited functions", *J. Appl. Phys.*, Vol. 24, No. 12, pp. 1432-1436 (1953).
- (7) S. Goldman: "Information theory", Prentice-Hall, New York (1953).
- (8) 本多: "連続信号のダブルサンプリング定理", *信学誌*, Vol. 39, No. 6, pp. 545-551 (1956).
- (9) J. L. Yen: "On nonuniform sampling of band-width-limited signals", *IRE Trans.*, Vol. CT-3, pp. 251-257 (1956).
- (10) 宮川: "多次元空間中の定常的確率変数の標本化定理", *信学誌*, Vol. 42, No. 4, pp. 421-427 (1959).
- (11) H. P. Kramer: "A generalized sampling theorem", *J. Math Phys.*, Vol. 38, No. 1, pp. 68-72 (1959).
- (12) D. A. Linden: "A discussion of sampling theorems", *Proc. IRE*, Vol. 47, No. 7, pp. 1219-1225 (1959).
- (13) D. A. Linden and N. M. Abramson: "A generalization of the sampling theorem", *Inf. and Cont.* Vol. 3, pp. 26-31 (1960).
- (14) D. P. Peterson and D. Middleton: "Sampling and reconstruction of wave-number-limited functions in N-dimensional Euclidean spaces", *Inf. and Cont.*, Vol. 5, pp. 279-323 (1962).

- (15) W. D. Montgomery: "The gradient in the sampling of  $N$ -dimensional band-limited functions", J. Elec. and Cont., Vol. 17, pp. 437-447 (1964).
- (16) R. T. Prosser: "A multidimensional sampling theorem", J. Math. Anal. and Appl., Vol. 16, pp. 574-584 (1966).
- (17) 前田: "帯域制限された周期波形に対する標本化定理について", 信学誌, Vol. 50, №8, pp. 1472-1473 (1967).
- (18) 磯道: "一般標本化定理", 信学論(C), Vol. 52-C, №2, pp. 79-85 (1969).
- (19) 岸, 前田: "定数係数線形微分方程式を満たす波形の標本化定理", 信学論(A), Vol. 53-A, №4, pp. 189-196 (1970).
- (20) M. Yanagida and O. Kakusho: "Frequency range extension of FFT by utilizing the fold-over effect", Memoirs of Inst. of Sci. and Ind. Res., Osaka Univ., Vol. 31, pp. 5-12 (1974).
- (21) 柳田, 角所: "離散的フーリエ変換の周波数範囲の拡張に関する一考察", 信学会, 電気音響研資, EA73-49 (1974).
- (22) 柳田, 角所: "標本化定理の一般化とその応用", 信学論(A), Vol. 57-A, №11, pp. 826-833 (1974).
- (23) 柳田, 角所: "2重標本化によるデジタル周波数分析", 信学会, 電気音響研資, EA74-46 (1975).
- (24) M. Yanagida and O. Kakusho: "Discrete Fourier transform based on a double-sampling and its applications", IEEE International Conference on ASSP, Philadelphia, pp. 141-144 (1976).
- (25) 柳田, 角所: "2重標本化に基づいた離散的フーリエ変換の計算法とその応用", 信学論(A), Vol. J59-A, №6, pp. 441-448 (1976).
- (26) A. Papoulis 著, 大槻, 平岡訳: "応用フーリエ積分", p. 57, オーム社, 東京 (昭42).
- (27) A. N. Kolmogorov and S. V. Fomin 著, 山崎訳: "関数解析の基礎", p. 388, 岩波, 東京 (昭46).
- (28) E. I. Jury: "Theory and application of the  $z$ -transform method", p. 24, John Wiley, New York (1964).

- (29) 飯島：“関数解析の手法I（陪直交性理論）”，九大講義録（昭41）。
- (30) 柳田，角所：“離散的双直交変換”，信学会，電気音響研資，EA75-53（1976）。
- (31) 曾根，西山，柳田：“離散周波数スペクトルの高速補間法”，電気関係学会関西支部連合大会，G15-15（1975）。
- (32) M.Yanagida and O.Kakusho：“Logarithmic-frequency-scale representation of discrete Fourier spectrum of a band-pass signal”，9th Intern. Congress on Acoustics, Madrid, R-18, p. 864（1977）。
- (33) G.C.Danielson and C.Lanczos：“Some improvements in practical Fourier analysis and application to X-ray scattering from liquids”，J. Franklin Inst., Vol. 233, pp. 365-435（1962）。
- (34) 柳田，角所：“実数値列の複素化2重FFT”，信学論（D），Vol. J60-D, №11, pp. 1010-1011（1977）。
- (35) I. J. Good：“The interaction algorithm and practical Fourier analysis”，J. Roy Statist. Soc. (London) B20, pp. 361,（1958）。
- (36) L. R. Rabiner, R. Schafer and C. Rader：“The chirp  $z$ -transform algorithm and its applications”，Bell Sys. Tech. J., Vol. 48, №5, pp. 1249-1269（1969）。
- (37) 柳田，角所：“離散のラプラス変換”，電気関係学会関西支部連合大会，G15-1（1974）。
- (38) 電子通信学会編：“デジタル信号処理”，電子通信学会，東京（1975）。
- (39) B. Gold and C. M. Rader：“Digital processing of signals”，McGraw-Hill, New York（1969）。
- (40) L. R. Rabiner and B. Gold：“Theory and application of digital Signal processing”，Prentice-Hall, Englewood Cliffs（1975）。
- (41) A. V. Oppenheim and R. W. Schafer：“Digital signal processing”，Prentice-Hall, Englewood Cliffs（1975）。
- (42) A. V. Oppenheim, R. W. Schafer and T. G. Stockham Jr.：“Nonlinear filtering of multiplied and convolved signals”，Proc. IEEE, Vol. 56, №8, pp. 1264-1291（1968）。
- (43) C. M. Rader and B. Gold：“Digital filter design techniques in the

- frequency domain", Proc. IEEE, Vol. 55, No. 2, pp. 149-171 (1967).
- (44) A. V. Oppenheim: "Speech analysis-synthesis system based on homomorphic filtering", J. Acoust. Soc. Amer., Vol. 45, No. 2, pp. 458-465 (1968).
- (45) A. M. Noll: "Short-time spectrum and cepstrum techniques for vocal-pitch detection", J. Acoust. Soc. Amer., Vol. 36, No. 2, pp. 296-302 (1964).
- (46) A. M. Noll: "Cepstrum pitch determination", J. Acoust. Soc. Amer., Vol. 41, No. 2, pp. 293-309 (1966).
- (47) R. W. Schafer and L. R. Rabiner: "System for automatic formant analysis of voiced speech", J. Acoust. Soc. Amer., Vol. 47, No. 2 (Part 2), p. 634-648 (1969).
- (48) E. Artin 著, 寺田訳: "ガロア理論入門", p. 101, 東京図書, 東京, (1974).
- (49) B. Carnahan, H. A. Luther and J. O. Wilkes: "Applied numerical methods", p. 141, John Wiley, New York (1969).
- (50) 柳田, 角所: "高次代数方程式のFFTによる解法の可能性", 信学論(A), Vol. 59-A, No. 10, pp. 880-882 (1976).
- (51) 日本生物物理学会: "神経の生物物理", p. 335, 吉岡書店, 京都 (1966).
- (52) 森田, 藤井: "生体のパターン認識過程におけるLateral Inhibitionの機能", 信学誌, Vol. 49, No. 10, pp. 1857-1864 (1966).
- (53) 山下, 岡本: "神経系をモデルとする線形相互抑制回路網の解析", 信学論(C), Vol. 51-C, No. 5, pp. 203-210 (1968).
- (54) 安田, 樋渡: "網膜における時空間的情報処理過程のモデル", 信学論(C), Vol. 53-C, No. 11, pp. 823-830 (1970).
- (55) 磯道: "時空間回路の話", 電子技術総合研究所部内報予稿 (1975).
- (56) E. R. Caianiello: "Outline of a theory of thought-process and thinking machines", J. Theoret. Biol., Vol. 2, pp. 204-235 (1961).
- (57) 甘利: "ランダムしきい素子回路およびランダムしきい素子回路系の基本特性", 信学論(C), Vol. 53-C, No. 9, pp. 644-651 (1970).
- (58) 甘利: "アナログ神経素子よりなるランダム回路の特性", 信学論(D), Vol. 55-D,

- №3, pp. 171-178 (1972).
- (59) 甘利：“自己組織しきい素子回路によるパターンの学習”，信学論(D)，Vol. 55-D, №7, pp. 456-463 (1972).
- (60) J. S. Griffith: “Mathematical neurobiology”, Chap. 3, Academic Press, London (1971).
- (61) 柳田, 角所：“神経回路網の離散的定式化”，音響学会論文集, 2-2-6 (1976-10).
- (62) 安藤, 山口：“電子計算機による自然楽器音の分析 I~Ⅲ”，音響学会論文集, 3-6-7 (1977-04)など
- (63) G. D. Friedlander: “Earthquake prediction”, IEEE, Spectrum, Vol. 10, №9, pp. 46-57 (1973).
- (64) 館, 高谷：“バースペクトルによる $\alpha$ 波形の解析”，医用電子と生体工学, Vol. 11, №4, pp. 44-52 (1973).
- (65) 佐藤：“心電図の自動計測について”，医用電子と生体工学, Vol. 6, №3, pp. 25-33 (1968).
- (66) National Phonograph Company: “The phonograph and how to use it (Facsimile Edition)”, Allen Koenigsberg, New York (1971).
- (67) 柳田, 竹内, 舟橋：“初期蓄音機の音響特性の比較”，信学会, 電気音響研資, EA73-52 (1974).
- (68) J. Makhoul: “Linear prediction”, Proc. IEEE, Vol. 63, №4, pp. 561-580 (1975).
- (69) M. Yanagida, Kakusho, I. Inoue and S. Nishiyama: “Evaluation of the half-power band-width of acoustic tubes”, Trans. IECE, Japan, Vol. E59, №9, pp. 15-16 (1976).
- (70) 柳田, 角所：“線形予測法とモデル調整法の関係”，信学会, 電気音響研資, EA74-53 (1975).
- (71) 伊達：“ドップラー効果を利用して指向性を得る方法”，NHK技研月報, pp. 12-16 (1966-01).
- (72) 石亀, 安倍, 渡辺, 城戸：“n方向同時掃引超指向性スペクトル分析器”，信学会, 電気音響研資, EA77-32 (1977).
- (73) 西巻：“電気音響振動学”，p. 41 コロナ社, 東京 (1960).

- (74) B. Gold and C. M. Rader: "Digital processing of signals", pp. 208-211, McGraw-Hill, New York (1969).
- (75) 柳田, 角所: "多点相関によるマイクロホンズーミング", 信学会, 電気音響研資, EA 77-30 (1977).
- (76) 滑川, 村田, 角所, 柳田他: "ハイブリッド I C 開発技術システム等の調査研究報告書", 関西電子工業振興センター, ハイブリッド I C 研究会 (1977-10).
- (77) G. H. Golub and C. Reinsch: "Singular value decomposition and least squares solutions", Numer. Math., Vol. 14, pp. 403-420 (1970).
- (78) H. C. Andrews and C. L. Patterson: "Singular value decompositions and digital image processing", IEEE Trans. ASSP, Vol. ASSP-24, No. 1, pp. 26-53 (1976).
- (79) P. Wintz: "Transform picture coding", Proc. IEEE, Vol. 60, No. 7, pp. 809-820 (1972).
- (80) H. C. Andrews: "Computer techniques in image processing", Chap. 5, Academic, New York (1970).
- (81) 日本数学会: "数学辞典", p. 421, 岩波書店, 東京 (1960).
- (82) 一松, 森口, 山内: "電子計算機のための数値計算法 I", p. 38, 培風館, 東京 (1965).
- (83) T. Lee: "A simple method to determine the characteristic function  $f(\lambda) = |\lambda I - \mathbf{A}|$  by discrete Fourier series and fast Fourier transform", IEEE Trans. CAS, Vol. CAS-23, No. 4, p. 242 (1976).
- (84) 柳田, 角所: "特異値分解による時変画像の符号化法," 信学論(D), 投稿中.
- (85) G. D. Bergland: "FFT algorithm for real valued series", Com. of the ACM, Vol. 11, No. 17, p. 703 (1968).
- (86) E. Oranbrigham: "The fast Fourier transform", p. 166, Prentice-Hall (1974).

付 録

A. 式(2.2.2)の誘導

$$q_k = q(kT)$$

$$q(t) = 0 \quad t < 0$$

$$\mathcal{L}(s) = \mathcal{L}\{q(t)\}$$

$$G(z) = \mathcal{Z}\{q_k\}$$

$$G(z) \Big|_{z=e^{sT}} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} q_k z^{-k} \Big|_{z=e^{sT}} = \sum_{k=0}^{\infty} q(kT) e^{-skT} \quad (\text{A1})$$

$$= \int_0^{\infty} q(t) e^{-st} \sum_{k=0}^{\infty} \delta(t-kT) dt$$

$$= \mathcal{L}\{q(t) \sum_{k=0}^{\infty} \delta(t-kT)\}$$

$$= \mathcal{L}\{q(t)\} * \sum_{k=0}^{\infty} \mathcal{L}\{\delta(t-kT)\} \quad \text{収束範囲内で}\Sigma\text{と}\mathcal{L}\text{の順序変更可能}$$

$$= \mathcal{L}(s) * \sum_{k=0}^{\infty} e^{-skT} \quad (\text{A2})$$

$$= \mathcal{L}(s) * \frac{1}{1-e^{-sT}} \quad (|e^{-sT}| < 1)$$

$$= \frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} \frac{\mathcal{L}(\lambda)}{1-e^{-(s-\lambda)T}} d\lambda \quad (\text{付録D})$$

$$= - \sum_{m=-\infty}^{\infty} \left( \text{Res} \left[ \frac{\mathcal{L}(\lambda)}{1-e^{-(s-\lambda)T}} \right]_{\text{at } \lambda = s + j \frac{2\pi}{T} m} \right)$$

$$= - \sum_{m=-\infty}^{\infty} \lim_{\lambda \rightarrow s + j \frac{2\pi}{T} m} \frac{\{ \lambda - (s + j \frac{2\pi}{T} m) \} \mathcal{L}(\lambda)}{1-e^{-(s-\lambda)T}}$$

$$\begin{aligned}
&= - \sum_{m=-\infty}^{\infty} \lim_{\lambda \rightarrow s+j \frac{2\pi}{T} m} \frac{\mathcal{G}(\lambda)}{-T(1-e^{-(s-\lambda)T})} \\
&= \frac{1}{T} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \mathcal{G}\left(s+j \frac{2\pi}{T} m\right)
\end{aligned}$$

### B. 式(2.2.4)の誘導

無限級数  $\sum_{k=-\infty}^{\infty} \phi(t+kT)$  が区間  $0 \leq t < T$  で有界変分な関数に一樣収束するならば、 $\phi(t)$  がフーリエ変換可能であるという条件の下で、Poissonの求和式として知られている恒等式

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \phi(t+kT) = \frac{1}{T} \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{j \frac{2\pi}{T} mt} \Phi\left(\frac{2\pi}{T} m\right) \quad (\text{B1})$$

が成立する。(26)ただし  $\Phi(\omega)$  は  $\phi(t)$  のフーリエ変換である。式(B1)で  $t=0$  とすると

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \phi(kT) = \frac{1}{T} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \Phi\left(\frac{2\pi}{T} m\right) \quad (\text{B2})$$

となるが、ここで

$$\phi(t) = g(t) e^{-j\omega t} \quad (\text{B3})$$

として式(B2)に代入すると次式が得られる。

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} g(kT) e^{-j\omega kT} = \frac{1}{T} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \mathcal{G}\left(\omega + \frac{2\pi}{T} m\right) \quad (\text{B4})$$

式(B4)の左辺は  $g_k$  のDFT  $G(\omega)$  を表わしている。

### C. $G(t)$ が因果関数でない場合

この場合は、ラプラス変換、 $z$ 変換として両側変換を考えるならば、付録Aの式(A1)以下の  $\sum_{k=0}^{\infty}$  は  $\sum_{k=-\infty}^{\infty}$  で置換えなければならない。しかしこの場合、式(A2)の第2項に相当する

$\sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{-s kT}$  は一般には収束しない。式(2.2.4)は  $g(t)$  が因果関数でなくても成立するにもかかわらず、式(2.2.2)は  $g(t)$  が因果関数でなければ成立しないので、一見矛盾するようであるが、これは次のように説明できる。式(2.2.4)はPoissonの求和式を基礎にしているが、Poissonの求和式を導く過程でフーリエ級数核

$$k_N(t) = \frac{1}{T} \sum_{k=-n}^{\infty} e^{j \frac{2\pi}{T} k t} \quad (\text{C1})$$

が  $N \rightarrow \infty$  で  $\delta(t)$  に収束することを使っているが、これと同じ形の上記の無限数は、 $s$  が実部を持つと収束しない。つまり

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{-s k T} = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{k=-N}^N e^{-s k T} = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\sinh(N + \frac{1}{2}) s T}{\sinh \frac{s T}{2}} \quad (\text{C2})$$

となって発散する。以上のことは、片側変換を考えているなら問題にならないが、両側変換の場合は収束範囲が狭くなるので注意を要する。

#### D. 複素関数のコンボリューション

$$\mathcal{F}(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}, \mathcal{G}(s) = \mathcal{L}\{g(t)\} \quad (\text{D1})$$

とすると次の関係が導かれる。

$$\begin{aligned} & \mathcal{F}(s) * \mathcal{G}(s) \\ &= \mathcal{L}\left\{\mathcal{L}^{-1}\{\mathcal{F}(s)\} \mathcal{L}^{-1}\{\mathcal{G}(s)\}\right\} \\ &= \int_0^{\infty} \mathcal{L}^{-1}\{\mathcal{F}(s)\} g(t) e^{-st} dt \\ &= \int_0^{\infty} \left\{ \frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} \mathcal{F}(\lambda) e^{\lambda t} d\lambda \right\} g(t) e^{-st} dt \\ &= \frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} \mathcal{F}(\lambda) \left\{ \int_0^{\infty} g(t) e^{-(s-\lambda)t} dt \right\} d\lambda \\ &= \frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} \mathcal{F}(\lambda) \mathcal{G}(s-\lambda) d\lambda \quad (\text{D2}) \end{aligned}$$

#### E. 式(2.3.37)から(2.3.38), (2.3.39)の誘導

$$\varepsilon \triangleq e^{j(t_k - t_l)\Omega} \quad (\text{E1})$$

と書くと、式(2.3.37)より

$$\varepsilon^{-n_u} \frac{1 - \varepsilon^{n_u - n_l}}{1 - \varepsilon} + \varepsilon^{n_l} \frac{1 - \varepsilon^{n_u - n_l}}{1 - \varepsilon} = 0 \quad (\text{E } 2)$$

変形すると

$$\begin{aligned} \varepsilon^{-n_u} - \varepsilon^{-n_l} + \varepsilon^{n_l} - \varepsilon^{n_u} &= 0 \\ (\varepsilon^{-n_u} + \varepsilon^{n_l})(1 - \varepsilon^{n_u - n_l}) &= 0 \\ \left(\varepsilon^{-\frac{n_u + n_l}{2}} + \varepsilon^{\frac{n_u + n_l}{2}}\right) \left(\varepsilon^{-\frac{n_u - n_l}{2}} - \varepsilon^{\frac{n_u - n_l}{2}}\right) &= 0 \end{aligned}$$

従って

$$\cos(t_k - t_l) \Omega \frac{n_u + n_l}{2} \sin(t_k - t_l) \Omega \frac{n_u - n_l}{2} = 0 \quad (\text{E } 3)$$

これより式(2.3.38)または(2.3.39)の成立が要請される。

**F. 式(2.3.56)から式(2.3.57)の誘導**

付録F, G, Hを通じて次の略号を用いる。

$$\Sigma_1 = \sum_{n=-n_u}^{-n_c-1}, \quad \Sigma_2 = \sum_{n=-n_c}^{-n_l-1}, \quad \Sigma_3 = \sum_{n=n_l}^{n_c-1}, \quad \Sigma_4 = \sum_{n=n_c}^{n_u-1} \quad (\text{F } 1)$$

式(2.3.56)より

$$\Sigma_1 \frac{a}{N} + \Sigma_2 \frac{b}{N} + \Sigma_3 \frac{c}{N} + \Sigma_4 \frac{d}{N} = 1 \quad (\text{F } 2)$$

従って

$$\frac{1}{N} \{ (a+d)(n_u - n_c) + (b+c)(n_c - n_l) \} = 1 \quad (\text{F } 3)$$

ここで式(2.3.54), (2.3.23), (2.3.46)より

$$n_u - n_c = n_u + n_l - \frac{\gamma N}{2} = \frac{N}{2} (\xi - \gamma) \quad (\text{F } 4)$$

$$n_c - n_l = n_u - n_l - (n_u - n_c) = \frac{N}{2} (1 - \xi + \gamma) \quad (\text{F } 5)$$

式(F 4), (F 5)を式(F 3)に代入すると式(2.3.57)が得られる。

G. 式(2.3.58)から式(2.3.59)の誘導

$$E \triangleq e^{j\omega(l-k)T} = e^{j\frac{4\pi}{N}(l-k)} \quad (\text{G } 1)$$

とおくと, 式(2.3.58)より

$$\sum_1 \frac{a}{N} E^n + \sum_2 \frac{b}{N} E^n + \sum_3 \frac{c}{N} E^n + \sum_4 \frac{d}{N} E^n = 0 \quad (\text{G } 2)$$

$$\frac{1}{N(1-E)} \{ (1-E^{n_u-n_c})(aE^{-n_u} + dE^{n_c}) + (1-E^{n_c-n_l})(bE^{-n_c} + cE^{n_l}) \} = 0 \quad (\text{G } 3)$$

$$\begin{aligned} & \left( E^{-\frac{n_u-n_c}{2}} - E^{\frac{n_u-n_c}{2}} \right) \left( aE^{-\frac{n_u+n_c}{2}} + dE^{\frac{n_u+n_c}{2}} \right) \\ & + \left( E^{-\frac{n_c-n_l}{2}} - E^{\frac{n_c-n_l}{2}} \right) \left( bE^{-\frac{n_c+n_l}{2}} + cE^{\frac{n_c+n_l}{2}} \right) = 0 \end{aligned} \quad (\text{G } 4)$$

ここで

$$\begin{aligned} & E^{-\frac{n_u-n_c}{2}} - E^{\frac{n_u-n_c}{2}} \\ & = 2j \sin \frac{4\pi}{N} (l-k) \left( -\frac{n_u-n_c}{2} \right) \\ & = 2j \sin \frac{4\pi}{N} (l-k) \left( \frac{n_c-n_l}{2} - \frac{N}{4} \right) \\ & = 2j \left\{ \sin \frac{2\pi}{N} (l-k) (n_c-n_l) \cos \pi (l-k) \right. \\ & \quad \left. - \cos \frac{2\pi}{N} (l-k) (n_c-n_l) \sin \pi (l-k) \right\} \\ & = (-1)^{l-k} \times 2j \sin \frac{2\pi}{N} (l-k) (n_c-n_l) \end{aligned} \quad (\text{G } 5)$$

$\therefore l, k$ は整数だから  $\cos \pi (l-k) = (-1)^{l-k}, \sin \pi (l-k) = 0$

$$E \frac{n_c - n_l}{2} - E \frac{n_c - n_l}{2} = -2j \sin \frac{2\pi}{N} (l-k)(n_c - n_l) \quad (\text{G } 6)$$

$$\frac{n_u + n_c}{E \frac{n_c}{2}} = E \frac{N}{4} (1+\gamma) = e^{j\pi(l-k)(1+\gamma)} \quad (\text{G } 7)$$

$$\frac{n_c + n_l}{E \frac{n_c}{2}} = E \frac{N}{4} \gamma = e^{j\pi(l-k)\gamma} \quad (\text{G } 8)$$

式 (G 5), (G 6), (G 7), (G 8) を式 (G 4) に代入すると

$$2j \sin \frac{2\pi}{N} (l-k)(n_c - n_l) \left[ (-1)^{l-k} \left\{ a e^{-j\pi(l-k)(1+\gamma)} + d e^{j\pi(l-k)(1+\gamma)} \right\} \right. \\ \left. - \left\{ b e^{-j\pi(l-k)\gamma} + c e^{j\pi(l-k)\gamma} \right\} \right] = 0 \quad (\text{G } 9)$$

これがすべての  $k, l$  の組合せについて成立するためには [ ] 内 = 0 が必要である。ここで

$$e^{\pm j\pi(l-k)} = (-1)^{l-k} \quad (\text{G } 10)$$

であるから、式 (G 9) は次のようになる。

$$(-1)^{2(l-k)} (-1)^{(l-k)\gamma} (a+d) - (-1)^{(l-k)\gamma} (b+c) = 0$$

従って

$$(a+d) - (b+c) = 0 \quad (\text{G } 11)$$

H. 式 (2.3.60) から式 (2.3.61) の誘導

$$\epsilon \triangleq e^{j \frac{4\pi}{N} (l-k+\beta-a)} \quad (\text{H } 1)$$

とおくと、式 (2.3.60) は次のようになる。

$$\sum_1 \frac{a}{N} \epsilon^n + \sum_2 \frac{b}{N} \epsilon^n + \sum_3 \frac{c}{N} \epsilon^n + \sum_4 \frac{d}{N} \epsilon^n = 0 \quad (\text{H } 2)$$

これを展開すると

$$\frac{1}{N(1-\epsilon)} \left[ a\epsilon^{-n_u} (1-\epsilon^{n_u-n_c}) + b\epsilon^{-n_c} (1-\epsilon^{n_c-n_l}) + c\epsilon^{n_l} (1-\epsilon^{n_c-n_l}) + d\epsilon^{n_c} (1-\epsilon^{n_u-n_c}) \right] = 0$$

従って

$$a(\epsilon^{-n_u} - \epsilon^{-n_c}) + b(\epsilon^{-n_c} - \epsilon^{-n_l}) + c(\epsilon^{n_l} - \epsilon^{n_c}) + d(\epsilon^{n_c} - \epsilon^{n_u}) = 0 \quad (\text{H } 3)$$

ここで

$$n_u = n_l + \frac{N}{2}, \quad n_c = \frac{\gamma N}{2} - n_l$$

を用いると

$$\begin{aligned} \epsilon^{\pm n_u} &= e^{\pm j \frac{4\pi}{N} (l-k+\beta-a)(n_l + \frac{N}{2})} \\ &= e^{\pm j \frac{4\pi}{N} (l-k+\beta-a)n_l} e^{\pm j 2\pi (l-k+\beta-a)} \\ &= \epsilon^{\pm n_l} e^{\pm j 2\pi (\beta-a)} \end{aligned}$$

ここで

$$\epsilon \triangleq e^{j 2\pi (\beta-a)} \quad (\text{H } 4)$$

とおくと

$$\epsilon^{\pm n_u} = \epsilon^{\pm n_l} \epsilon^{\pm 1} \quad (\text{H } 5)$$

となる。同様にして

$$\epsilon^{\pm n_c} = \epsilon^{\mp n_l} \epsilon^{\pm \gamma} \quad (\text{H } 6)$$

これらを用いると、式(H 3)は次のようになる。

$$(a\epsilon^{-1} - b - c\epsilon^{\gamma} + d\epsilon^{\gamma})\epsilon^{-n_l} - (a\epsilon^{-\gamma} - b\epsilon^{-\gamma} - c + d\epsilon)\epsilon^{n_l} = 0 \quad (\text{H } 7)$$

これが任意の  $k, l$  について成立するためには、式(2.3.61)が同時に成立することが必要である。

I. 式(2.5.13)から式(2.5.14)の誘導

$$G^l(m) = \sum_{k \in K} g(kT) e^{-j \frac{2\pi}{MT} m k T} \quad (I1)$$

$$= \int_{0-}^{NT} \sum_{k \in \mathcal{K}} g(t) e^{-j \frac{2\pi}{MT} m t} \delta(t - kT) dt$$

$$= \int_{0-}^{NT} \sum_{k \in \mathcal{K}} \frac{1}{N} \sum_{n \in \mathcal{N}} G(n) e^{j \frac{2\pi}{NT} n t} e^{-j \frac{2\pi}{MT} m t} \delta(t - kT) dt$$

$$= \sum_{n \in \mathcal{N}} G(n) \int_{0-}^{NT} \sum_{k \in \mathcal{K}} \frac{1}{N} e^{j \frac{2\pi}{T} (\frac{n}{N} - \frac{m}{M}) t} \delta(t - kT) dt$$

$$= \sum_{n \in \mathcal{N}} G(n) \frac{1}{NT} \int_0^{NT} e^{j \frac{2\pi}{T} (\frac{n}{N} - \frac{m}{M}) t} dt$$

$$= \sum_{n \in \mathcal{N}} G(n) \frac{1}{NT} \frac{2j \sin \frac{\pi}{T} (\frac{n}{N} - \frac{m}{M}) NT}{j \frac{2\pi}{T} (\frac{n}{N} - \frac{m}{M})} e^{j \frac{\pi}{T} (\frac{n}{N} - \frac{m}{M}) NT}$$

$$= \sum_{n \in \mathcal{N}} G(n) \frac{\sin(n - \frac{N}{M} m) \pi}{(n - \frac{N}{M} m) \pi} e^{j(n - \frac{N}{M} m) \pi} \quad (I2)$$

J. 式(3.3.3), (3.3.4)から式(3.3.5)の誘導

$$\begin{aligned} G(n) &= \sum_{k=0}^{N-1} g_k e^{-j \frac{2\pi}{N} n k} \\ &= \sum_{k=0}^{\frac{N}{2}-1} g_{2k} e^{-j \frac{2\pi}{N} n 2k} + e^{-j \frac{2\pi}{N} n} \sum_{k=0}^{\frac{N}{2}-1} g_{2k+1} e^{-j \frac{2\pi}{N} n 2k} \\ &= G^0(n) + e^{-j \frac{2\pi}{N} n} G^1(n) \quad n \in \mathcal{N} \end{aligned} \quad (J1)$$

K. 時空間インパルス応答のフーリエ $z$ 変換式(4・3・6)の誘導

式(4・3・3)の両辺に $z^{-n} e^{-jk\theta}$ をかけて $\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty}$ とすると

$$\text{左辺} = Y(z, \theta) - \sum_{k=-\infty}^{\infty} y(k)^{(1)} e^{-jk\theta} \quad (\text{K1})$$

$$\begin{aligned} \text{右辺} &= \sum_{l=-L}^L a_l e^{jl\theta} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} y(k+l)^{(1)} z^{-n} e^{-j(k+l)\theta} \\ &= z^{-1} \sum_{l=-L}^L a_l e^{jl\theta} Y(z, \theta) \end{aligned} \quad (\text{K2})$$

時空間インパルス(時刻 $n=0$ で位置 $k=0$ に入力1)が印加されたとき, すなわち

$$x(k)^{(n)} = \begin{cases} 1 & n=0, k=0 \\ 0 & \text{その他} \end{cases} \quad (\text{K3})$$

のときの出力の初期状態を

$$y(k)^{(0)} = 0, \quad y(k)^{(1)} = \begin{cases} 1 & k=0 \\ 0 & k \neq 0 \end{cases} \quad (\text{K4})$$

とすると, 式(K1)の第2項は

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} y(k)^{(1)} e^{-jk\theta} = y(0)^{(1)} = 1 \quad (\text{K5})$$

となり, 従って式(K1), (K2), (K5)より式(4・3・6)が導かれる.

L.  $L=1$ のとき式(4・3・8)は次のようになる.

$$y_0(k)^{(n+1)} = \frac{1}{2\pi j} \oint_{|p|=1} (a_{-1} p^{-1} + a_0 + a_1 p)^n p^{k-1} dp \quad (\text{L1})$$

$(a_{-1} p^{-1} + a_0 + a_1 p)^n p^{k-1}$ の $p^{-1}$ の項の係数 $\alpha_{-1}$ は $(a_{-1} p^{-1} + a_0 + a_1 p)^n$ の $p^{-k}$ の項の係数である. 従って $k \geq 0$ のとき

$$\alpha_{-1} = \binom{n}{k} a_{-1}^k a_0^{n-k} + \binom{n}{k+1} \binom{n-k-1}{1} a_{-1}^{k+1} a_0^{n-k-2} a_1 + \dots$$

$$\begin{aligned}
& + \binom{n}{k+l} \binom{n-k-l}{l} a_{-1}^{k+l} a_0^{n-k-2l} a_1^l + \dots + \binom{n}{k+\frac{n-k}{2}} a_{-1}^{k+\frac{n-k}{2}} a_1^{\frac{n-k}{2}} \\
& = \sum_{l=0}^{\frac{n-k}{2}} \binom{n}{k+l} a_{-1}^{k+l} a_0^{n-k-2l} a_1^l \\
& = \sum_{l=0}^{\frac{n-k}{2}} \binom{n}{k+2l} \binom{k+2l}{l} a_{-1}^{k+l} a_0^{n-k-2l} a_1^l \tag{L2}
\end{aligned}$$

$k < 0$  のときも同様にして

$$\alpha_{-1} = \sum_{l=0}^{\frac{n+k}{2}} \binom{n}{-k+2l} \binom{-k+2l}{l} a_{-1}^{-k+l} a_0^{n+k-2l} a_1^l \tag{L3}$$

式 (L2), (L3) をまとめると式, (4.3.9) の右辺のようになる。

M. たとえば, 共役極の対をもつ系の伝達関数を

$$\mathcal{G}(s) = \frac{1}{(s-s_0)(s-\bar{s}_0)} \tag{M1}$$

ただし  $s_0 = \lambda_0 + j\omega_0$

とする。このとき

$$|\mathcal{G}(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{\omega^4 - 2(\omega_0^2 - \sigma_0^2)\omega^2 + (\omega_0^2 + \sigma_0^2)^2}} \tag{M2}$$

$$\frac{|\mathcal{G}(j\omega)|}{\partial \omega} = \frac{-2\omega \{ \omega^2 - (\omega_0^2 - \sigma_0^2) \}}{\sqrt{\omega^4 - 2(\omega_0^2 - \sigma_0^2)\omega^2 + (\omega_0^2 + \sigma_0^2)^2}} \tag{M3}$$

従って  $\mathcal{G}(j\omega)$  の極大を与える  $\omega$  は

$$\omega = \pm \sqrt{\omega_0^2 - \sigma_0^2} \doteq \pm \omega_0 \quad \left| \omega_0 \right| \geq \left| \sigma_0 \right| \tag{M4}$$

N. 式(4.4.2)の誘導

$$B(z) = \beta_0 + \beta_1 z^{-1} + \dots + \beta_n z^{-n}, \quad \beta_k = 0 \quad (k > n) \quad (\text{N1})$$

$z^n B(z)$  で  $z$  の代わりに  $z + p$  を代入すると

$$\begin{aligned} (z+p)^n B(z+p) &= \beta_0 (z+p)^n + \beta_1 (z+p)^{n-1} + \dots + \beta_n \\ &= \beta_0 z^n + (\beta_0 C_1 p + \beta_1) z^{n-1} + (\beta_0 C_2 p^2 + \beta_1 C_1 p + \beta_2) z^{n-2} \\ &+ \dots + (\beta_0 p^n + \beta_1 p^{n-1} + \dots + \beta_n) = \sum_{i=0}^n \sum_{r=0}^i \beta_{r, n-r} C_{i-r} p^{i-r} z^{n-i} \quad (\text{N2}) \end{aligned}$$

式(4.4.1)によって

$$\begin{aligned} B'(z) &= \frac{(z+p)^n}{z^n} B(z+p) \\ &= \sum_{i=0}^n \sum_{r=0}^i \beta_{r, n-r} C_{i-r} p^{i-r} z^{-i} \quad (\text{N3}) \end{aligned}$$

従って,  $B'(z)$  の逆  $z$  変換を  $\{\beta'_i\}$  とおくと

$$B'(z) = \sum_{i=0}^{\infty} \beta'_i z^{-i} \quad (\text{N4})$$

より

$$\begin{aligned} \beta'_i &= \sum_{r=0}^i \beta_{r, n-r} C_{i-r} p^{i-r} & i = 0, 1, \dots, n \\ \beta'_i &= 0, & i = n+1, n+2, \dots \end{aligned} \quad (\text{N5})$$

O. 互いに逆特性の関係にある系のインパルス応答の関係

一方の系のインパルス応答の標本値列を  $\{\alpha_i : i \in I\}$  ( $I = \{0, 1, 2, \dots\}$ ), その逆特性をもつ系のインパルス応答の標本値列を  $\{\beta_i : i \in I\}$  とするとそれらの  $z$  変換は互いに逆数になっているはずであるから次式が成立する.

$$\sum_{i=0}^{\infty} \beta_i z^{-i} = \frac{1}{\sum_{i=0}^{\infty} \alpha_i z^{-i}} \quad (\text{O1})$$

これを変形すると次式が得られる.

$$\sum_{j=0}^{\infty} \left( \sum_{i=0}^j \alpha_i \beta_{j-i} \right) z^{-j} = 1 \quad (02)$$

これが  $z$  のいかんにかかわらず成立するためには、両辺の係数を比較することによって次式が成立しなければならない。

$$\alpha_0 \beta_0 = 1 \quad (03)$$

$$\sum_{i=0}^j \alpha_i \beta_{j-i} = 0 \quad j \in \{1, 2, \dots\} \quad (04)$$

従って  $\{\beta_i\}$  から  $\{\alpha_i\}$  を求めるには次のようにすればよい。

$$\alpha_0 = \frac{1}{\beta_0}, \quad \alpha_i = -\frac{1}{\beta_0} \sum_{r=1}^i \beta_r \alpha_{i-r} \quad (05)$$

### P. 特異値分解

与えられた  $M \times N$  行列  $G$  の自己相関行列  $GG^T, G^T G$  を固有値分解する。

$$GG^T = \Phi \Lambda_1 \Phi^T, \quad G^T G = \Psi \Lambda_2 \Psi^T \quad (P1)$$

$M \times M$                        $N \times N$

ここで  $\Lambda_1$  を次のように変形しておく。

$$\Lambda_1 = \begin{matrix} M \times M \\ \Lambda^2 \end{matrix} \begin{matrix} M \times N \\ \Lambda^{2T} \end{matrix} \begin{matrix} N \times M \\ \Lambda^2 \end{matrix} = \begin{matrix} \frac{1}{\Lambda^2} \\ \Psi^T \end{matrix} \Psi \begin{matrix} \frac{1}{\Lambda^2} \\ \Lambda^{2T} \end{matrix} \quad (P2)$$

ただし

$$\frac{1}{\Lambda^2} = \left\{ \begin{array}{l} \left[ \begin{array}{ccc|c} \frac{1}{\lambda_1} & & & 0 \\ & \ddots & & \\ & & \frac{1}{\lambda_R} & \\ & & & \ddots \\ 0 & & & & 0 \end{array} \right] & M \leq N \text{ のとき} \\ \left[ \begin{array}{ccc|c} \frac{1}{\lambda_1} & & & 0 \\ & \ddots & & \\ & & \frac{1}{\lambda_R} & \\ & & & \ddots \\ 0 & & & & 0 \\ \hline & & & & 0 \end{array} \right] & M > N \text{ のとき} \end{array} \right\} \quad (P3)$$

$$R = \text{rank } [G]$$

式(P2)を式(P1)の第1式に代入すると次式が得られる

$$\begin{aligned} GG^T &= \Phi \Lambda^{\frac{1}{2}} \Psi^T \Psi \Lambda^{\frac{1}{2}T} \Phi^T \\ &= \Phi \Lambda^{\frac{1}{2}} \Psi^T (\Phi \Lambda^{\frac{1}{2}} \Psi)^T \end{aligned} \quad (\text{P4})$$

従って

$$G = \Phi \Lambda^{\frac{1}{2}} \Psi^T \quad (\text{P5})$$

Q.  $G$  と  $G_K$  の差の2乗ノルム

$$\begin{aligned} &\|G - G_K\|^2 \\ &= \left\| \sum_{i=1}^R \lambda_i^{\frac{1}{2}} \phi_i \psi_i^T - \sum_{i=1}^K \lambda_i^{\frac{1}{2}} \phi_i \psi_i^T \right\|^2 \\ &= \left\| \sum_{i=K+1}^R \lambda_i \phi_i \psi_i^T \right\|^2 \\ &= \sum_{i=K+1}^R \lambda_i \phi_i^T \phi_i \psi_i^T \psi_i \\ &= \sum_{i=K+1}^R \lambda_i \end{aligned} \quad (\text{Q1})$$

$\therefore \{\phi_i\}, \{\psi_j\}$  は正規直交系であるから

$$\phi_i^T \phi_j = \begin{cases} 0 & (i \neq j) \\ 1 & (i = j) \end{cases} \quad \psi_i^T \psi_j = \begin{cases} 0 & (i \neq j) \\ 1 & (i = j) \end{cases} \quad (\text{Q2})$$

