【8】

| | |
|---|---|
| 氏名・(本籍) | **曽我日出夫**（そが　ひでお） |
| 学位の種類 | 理学博士 |
| 学位記番号 | 第 4530 号 |
| 学位授与の日付 | 昭和54年3月24日 |
| 学位授与の要件 | 理学研究科　数学専攻<br>学位規則第5条第1項該当 |
| 学位論文題目 | **特異斜交微分境界条件をもつ波動方程式の混合問題** |
| 論文審査委員 | (主査)<br>教授 熊ノ郷 準<br>教授 田辺 広城　教授 池田 信行　助教授 井川 満 |

# 論文内容の要旨

$\Omega$ を滑らかで有界な境界$\Gamma$ をもつ$R^2$内の領域とし，$\nu(x)$を$\Gamma$の近傍で定義された滑らかな0にならない実ベクトル場とする。そこで次の波動方程式に対する混合問題が$C^\infty$適切になる（即ち，$C^\infty$の意味で解の存在と一意性が得られる）ための必要条件と十分条件について考察する。

$$(1)\quad \begin{cases} \Box u \equiv (\dfrac{\partial^2}{\partial t^2} - \triangle) u = f(x, t) \quad \text{in } \Omega \times (0, t_1), \\ \dfrac{\partial u}{\partial \nu}\Big|_{\Gamma} = g(x', t) \quad \text{on } \Gamma \times (0, t_1), \\ u\,|_{t=0} = u_0(x), \quad \dfrac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0} = u_1(x) \text{ on } \Omega. \end{cases}$$

$\nu$が$\Gamma$に接しないときはすでにかなり詳しい結果が得られている。まず，$\Gamma$上で$\nu$の方向が法ベクトルnと一致している場合は，問題(1)は$C^\infty$適切になることが古くから知られている。また，$\nu$とnの方向が$\Gamma$上で常に異なる場合も$C^\infty$適切になる。さらにこれら以外の場合は$\Omega$の形状を考慮に入れなければならないことも分かっている。

ここでは$\nu$が有限個の点上で$\Gamma$に接する場合について調べる。得られた主要な結果は次の定理1，2である。

定理1．$\langle \nu(x'), n(x') \rangle$ の符号が$\Gamma$上で変るならば，問題(1)は$C^\infty$適切でない。

定理2．$\langle \nu(x'), n(x') \rangle$ の符号が$\Gamma$上で変らず $|\langle \nu(x'), n(x') \rangle|^{1/2} \in C^\infty(\Gamma)$であって，しかも$\nu$とnの方向が常に異なるならば，問題(1)は$C^\infty$適切であり，依存領域は有界になる。しかし有限な伝播速度

はもたない。

2階楕円型境界値問題に対しては，問題(1)と同種の境界条件を課した場合どのような現象が起こるかすでに研究されている。その結果を簡単に云うと，$\langle \nu, n\rangle$ の符号が境界上で変るときは解の存在又は一意性が成り立たず，その符号が変らないときは解の存在と一意性が共に得られる。上記の定理1，2は，波動方程式の混合問題においても楕円型の場合と類似したことが起こることを示している。

上の定理の証明について簡単に述べておく。

Dirichlet問題

$$\square w(x, t) = 0 \quad \text{in } \Omega\times R^1,$$
$$w|_\Gamma = h(x', t) \quad \text{on } \Gamma\times R^1$$

のPoisson作用素$h\to w$をPと書く。$Th=\frac{\partial}{\partial\nu}Ph|_\Gamma$とおくと，問題(1)の適切性は方程式$Th=g$の適切性に帰着される。hXはgのwave frontが(1)のLopatinskianが0になる近傍にあるならば，Tは扱い易いある擬微分作用素$\tilde{T}$によって近似できる。これらの事実と$\tilde{T}h=0$の漸近解を詳しく調べることによって定理1を証明する。さらに定理2は，$\tilde{T}h=g$に対する非常に精密な評価式を導くことによって証明する。

## 論文の審査結果の要旨

$\Omega$を有界な$C^\infty$級の境界$\Gamma$を持つ$R^2$内の領域，$\nu=\nu(x')(\neq 0)$を$\Gamma$で定義された$C^\infty$級の実ベクトル場として，波動方程式の混合問題:

$$(\text{※})\begin{cases} \square u \equiv \left(\dfrac{\partial^2}{\partial t^2}-\dfrac{\partial^2}{\partial x^2}-\dfrac{\partial^2}{\partial x_2^2}\right)u = f(x, t) \text{ in } \Omega\times(0, t_1), \\ \dfrac{\partial u}{\partial\nu} = g(x', t) \quad \text{on } \Gamma\times(0, t_1), \\ u|_{t=0}=u_0(x), \dfrac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0}=u_1(x) \quad \text{on } \Omega(0<t_1<\infty) \end{cases}$$

を考える。このとき，もし“$C^\infty$級のデータ$(f, g, u_0, u_1)$に対して，(*)の$C^\infty$級の解uが一意的に存在して，しかもこのデータに連続的に依存する”ならば，問題(*)は“$C^\infty$－適切”であるという。この$C^\infty$-適切性について，$\nu$が$\Gamma$に接する点,“特異斜交微分点,”を持つ場合の研究は，殆んどなされていない。

曽我日出夫君は，“$\nu$が$\Gamma$に有限個の点で接する場合”について，問題(*)が$C^\infty$-適切となるためのほぼ必要かつ十分条件を示すつぎの二つの興味ある結果を得た。$n(x')$を$\Gamma$上の点$x'$における法線ベクトル，$\langle\nu(x'), n(x')\rangle$で$\nu(x')$と$n(x')$の内積を表わすとするとき，

定理1．$\langle\nu(x'), n(x')\rangle$の符号が$\Gamma$上で変わるならば，問題(*)は$C^\infty$-適切でない。

定理2．$\langle\nu(x'), n(x')\rangle$の符号が$\Gamma$上で一定で$|\langle\nu(x'), n(x')\rangle|^{1/2}$が$C^\infty$級となり，しかも$\nu(x')$と$n(x')$が$\Gamma$上で平行とならないならば，問題(*)は$C^\infty$-適切となる。

特に定理2では，さらに詳しく問題(*)について“解の依存領域は有界であるが，伝播速度は有限で

ない”という，通常の双曲型方程式の初期値問題では現れない特徴ある現象が示されている。

以上，曽我日出夫君の論文は，波動方程式の混合問題について，特異斜交境界条件を最初に扱ったものであり，そこで独創的な方法により興味ある現象が導びき出されている。それらの結果は，波動方程式，さらに双曲型方程式の混合問題の研究に寄与するところ大きく，理学博士の学位論文として十分価値あるものと認められる。