

Title	ON SOME DOUBLY TRANSITIVE PERMUTATION GROUP IN WHICH $\text{SOCLE}(G_\alpha)$ IS NONSOLVABLE
Author(s)	Hiramine, Yutaka
Citation	
Issue Date	
Text Version	ETD
URL	http://hdl.handle.net/11094/27748
DOI	
rights	
Note	

Osaka University Knowledge Archive : OUKA

<https://ir.library.osaka-u.ac.jp/>

Osaka University

氏名・(本籍)	平 峰 豊
学位の種類	理 学 博 士
学位記番号	第 4 7 7 6 号
学位授与の日付	昭 和 54 年 12 月 19 日
学位授与の要件	学位規則第 5 条第 2 項該当
学位論文題目	G_α の socle が非可解なある種の 2 重可移群について
論文審査委員	(主査) 教 授 永 尾 汎 (副査) 教 授 中 井 喜 和 講 師 川 中 宣 明

論 文 内 容 の 要 旨

有限集合 Ω 上の 2 重可移群 G を, 一点 $\alpha (\in \Omega)$ の不変部分群 G_α のもつ性質により特徴づけるという研究がいままでにいくつかなされてきたが, 特にその中で O' Nan が 1975 年に「2 重可移群の基本的定理」とも言うべき定理 ([2]) を証明した。それは, $\text{socle}(G_\alpha) = A \times N$ が成り立つというものである。ここで A はアーベル群, N は単位群又は非可換単純群, $\text{socle}(G_\alpha)$ は G_α の極小正規部分群全体の積である。

$A \neq 1$ なる 2 重可移群に関しては, A が $\Omega - \{\alpha\}$ 上 semi-regular でない場合 ([1]), Ω の次数が奇数の場合 ([3]) 等についての結果が得られている。

標題の論文では, $N \neq 1$ なる場合, 即ち 1 点 α の不変部分群 G_α がある単純群を正規部分群として持つような 2 重可移群について考察する。このような 2 重可移群の例はいろいろあるが, 今までに知られているものの中では「散在する単純群」と呼ばれているものに関連して存在しているのがその特徴となっている。その例だけをあげると, $M_{11}(|\Omega|=12)$, $M_k(|\Omega|=k \in \{11, 12, 22, 23, 24\})$, $\text{Aut}(M_{22})$ ($|\Omega|=22$), $\text{HS}(|\Omega|=176)$, $\text{Co}_3(|\Omega|=276)$ などがある。

これに対して次のような問題を考える。(以下では $|\Omega|$ は偶数とする。)

問題: 今までに知られている $N \neq 1$ なる 2 重可移群を単純群 N により特徴づけられないか?

問題: 既知の単純群 N に対して, 対応する 2 重可移群 G は存在するか?

この論文は上の 2 つの問題を合わせた形での考察の一つの試みとなっている。

$N \neq 1$ なる偶数次数の 2 重可移群の一般的性質を調べる。 $G_\alpha \supseteq N$ かつ N の固定点が α だけであることより, G_α に含まれる N の共役は N に限るから N を N^α と書く。このとき G_α の構造を知る上で重要な次

の補題が成立する。

補題 $C_c(N^\alpha) \neq 1$ ならば, $N_g^\alpha = N^\alpha \cap N^\beta$, かつ $C_c(N^\alpha)$ は $\Omega - \{\alpha\}$ 上 semi-regular である。

この補題により $C_c(N^\alpha) = O(G_\alpha)$ が成りたつので, $G_\alpha/O(G_\alpha)N^\alpha$ は単純群 N^α の外部自己同型群の部分群となる。又 $N_g^\alpha = N^\alpha \cap N^\beta$ の場合の剰余群 $N_g^\alpha/N^\alpha \cap N^\beta$ の構造を考えると補題より $C_c(N^\alpha) = 1$ となるから $N^\alpha \leq G_\alpha \leq \text{Aut}(N^\alpha)$ となり, 従って $N_g^\alpha/N^\alpha \cap N^\beta \cong N_g^\alpha N^\beta/N^\beta \cong N_g^\alpha N^\alpha/N^\alpha \leq \text{Out}(N^\alpha)$ となる。

次に, N_g^α は β を含む N^α -軌道の置換表現を完全に決定しているが, N_g^α が N^α のどのような部分群になっているかをみる。 N^α が $\Omega - \{\alpha\}$ 上 $\frac{1}{2}$ -可移になっていることから $|\Omega| = |N^\alpha N_g^\alpha| \times r$ が成りたつ。ここで r は $\Omega - \{\alpha\}$ 上の N^α -軌道の個数である。仮定により $|\Omega|$ が偶数であるから $|N^\alpha N_g^\alpha|$ 及び r はいずれも奇数でなければならない。とくに N_g^α は N^α の指数が奇数の部分群となることが分かる。以上のことから与えられた $N (= N^\alpha)$ に対して G_α の構造の概観が得られたことになる。

次に G 全体の性質を知る上で重要な Witt の定理に関連した補題をのべる。Witt の定理は 2 点 $\alpha, \beta \in \Omega$ の不変部分群 $G_{\alpha\beta}$ の部分群に関するものであるが, 今の場合 N^α だけが既知であるので N_g^α の内部だけの条件に置きかえることが必要となってくる。これが次の補題である。

補題 $N^\alpha \cap N^\beta$ の部分群 X が次の $\langle \rangle$ をみたすとする。 \langle ある $g \in G$ に対して $g^{-1} X g \leq N_g^\alpha$ ならば N_g^α の元 h が存在して $h^{-1} X h = g^{-1} X g \rangle$ この時 $N_c(X)$ を X の固定点 $F(X)$ 上に制限して得られる置換群 $N_c(X)^{F(X)}$ は 2 重可移群となる。

以上の考え方をを用いて N がいわゆる Bender の単純群の時 (つまり $N \cong \text{PSL}(2, q), \text{Sz}(q), \text{PSU}(3, q) q = 2^n > 2$) を扱ったのが [4] であった。それに続きこの論文では N が 2 次の射影特殊線型変換群 $\text{PSL}(2, q), q = \text{奇数}$ の時を考察した。この中では今までに述べた方法を用いて N_g^α が $\text{PSL}(2, q)$ の 6 種類のタイプの部分群のいずれかに同型になることが分り, $N_g^\alpha/N^\alpha \cap N^\beta$ や $G_\alpha/O(G_\alpha)N^\alpha$ の構造も $\text{PSL}(2, q)$ の性質により概観が分り, $N^\alpha \cap N^\beta$ のいろいろな部分群に対して補題が適用されて G の性質や次数 $|\Omega|$ が限定されることによりこの論文の次の定理が得られる。

定理 G を Ω 上の 2 重可移群とし, $|\Omega|$ は偶数であるとする。 $G_\alpha (\alpha \in \Omega)$ が $\text{PSL}(2, q) (3 \neq q = \text{奇数})$ に同型な正規部分群 N^α を含めば, 次のいずれかが起る。

- (i) $|\Omega| = 6, N^\alpha \cong \text{PSL}(2, 5), G \cong A_6$ 又は S_6 。
- (ii) $|\Omega| = 12, N^\alpha \cong \text{PSL}(2, 11), G$ は 11 次の Mathieu 群の 12 点上の 2 重可移表現。
- (iii) $(|\Omega|, q) = (16, 9), (16, 5)$ 又は $(8, 7)$. かつ G は位数 $|\Omega|$ の regular な正規部分群をもつ。

参 考 文 献

- [1] M. O'Nan : A characterization of $L_n(q)$ as a permutation group, Math. Z. 127(1972), 301-314.
- [2] M. O'Nan : Normal structure of the one-point stabilizer of a doubly transitive permutation group II, Trans. Amer. Math. Soc. 214(1975), 43-74.
- [3] M. O'Nan : Doubly transitive groups of odd degree whose one point stabilizers are local, J. Algebra, 39(1976), 440-482.
- [4] Y. Hiramane : On doubly transitive permutation groups, Osaka J. Math. 15(1978), 613-631.

論文の審査結果の要旨

2重可移群の分類問題は置換群論において最も重要な問題の一つである。この問題に関してO'Nanは1975年に基本的な結果を発表した。

いま G を有限集合 Ω 上の2重可移な置換群とし、一点 $\alpha \in \Omega$ の安定化部分群を G_α 、 G_α の極小正規部分群すべての積を $\text{Socle}(G_\alpha)$ とする。このときO'Nanの定理によれば $\text{Socle}(G_\alpha)$ はアーベル群であるか、またはアーベル群と一つの非可換単純群の直積に分解される。平峰君はこの後者の場合を考察し、参考論文において G_α が $\text{PSL}(2, 2^n)$, $\text{PSU}(3, 2^n)$, $\text{Sz}(2^n)$ などのBender群とよばれる単純群を極小正規部分群として含む場合、主論文においては G_α が $\text{PSL}(2, q)$ (q は奇数) を極小正規部分群として含む場合の2重可移群の分類を完成した。すなわちそのような2重可移群 G は下の表にあらわれるものに限ることを示した。

(ただし G は正則な正規部分群を含まないものとする)

G	$ \Omega $	$N(<G_\alpha)$
A_6	6	$\text{PSL}(2, 4)$
S_6	6	$\text{PSL}(2, 4)$
$\text{PSL}(2, 11)$	11	$\text{PSL}(2, 4)$
A_6	6	$\text{PSL}(2, 5)$
S_6	6	$\text{PSL}(2, 5)$
M_{11}	12	$\text{PSL}(2, 11)$

(上の表で $|\Omega|$ は G の次数、 N は G_α の極小正規部分群を表す)

以上のように本論文の結果は2重可移群の分類問題に大きく寄与するものであり、その証明も置換群論的に興味深いものであって、理学博士の学位論文として十分価値あるものと認める。