【28】

氏名・(本籍)	平峰　豊(ひらみね ゆたか)
学位の種類	理学博士
学位記番号	第 4776 号
学位授与の日付	昭和54年12月19日
学位授与の要件	学位規則第5条第2項該当
学位論文題目	G_αの socle が非可解なある種の2重可移群について
論文審査委員	(主査)教授 永尾　汎 (副査)教授 中井　喜和　講師 川中　宣明

論文内容の要旨

有限集合Ω上の2重可移群Gを，一点$\alpha(\in\Omega)$の不変部分群G_αのもつ性質により特徴づけるという研究がいままでにいくつかなされてきたが，特にその中でO′ Nanが1975年に≪2重可移群の基本的定理≫とも言うべき定理([2])を証明した。それは，$\mathrm{socle}(G_\alpha)=A\times N$ が成り立つというものである。ここでAはアーベル群，Nは単位群又は非可換単純群，$\mathrm{socle}(G_\alpha)$はG_αの極小正規部分群全体の積である。

$A\neq 1$なる2重可移群に関しては，Aが$\Omega-\{\alpha\}$上semi-regularでない場合([1])，Ωの次数が奇数の場合([3])等についての結果が得られている。

標題の論文では，$N\neq 1$なる場合，即ち1点αの不変部分群G_αがある単純群を正規部分群として持つような2重可移群について考察する。このような2重可移群の例はいろいろあるが，今までに知られているものの中では≪散在する単純群≫と呼ばれているものに関連して存在しているのがその特徴となっている。その例だけをあげると，$M_{11}(|\Omega|=12)$，$M_k(|\Omega|=k\in\{11,12,22,23,24\})$，$\mathrm{Aut}(M_{22})(|\Omega|=22)$，$\mathrm{HiS}(|\Omega|=176)$，$Co_3(|\Omega|=276)$ などがある。

これに対して次のような問題を考える。(以下では$|\Omega|$は偶数とする。)

問題：今までに知られている$N\neq 1$なる2重可移群を単純群Nにより特徴づけられないか？

問題：既知の単純群Nに対して，対応する2重可移群Gは存在するか？

この論文は上の2つの問題を合わせた形での考察の一つの試みとなっている。

$N\neq 1$なる偶数次数の2重可移群の一般的性質を調べる。$G_\alpha\trianglerighteq N$かつNの固定点が$\alpha$だけであることより，$G_\alpha$に含まれるNの共役はNに限るからNを$N^\alpha$と書く。このとき$G_\alpha$の構造を知る上で重要な次

の補題が成立する。

補題　$C_G(N^\alpha) \neq 1$ ならば，$N_\beta^\alpha = N^\alpha \cap N^\beta$，かつ$C_G(N^\alpha)$は$\Omega - \{\alpha\}$上semi-regularである。

この補題により$C_G(N^\alpha) = O(G_\alpha)$が成りたつので，$G_\alpha / O(G_\alpha) N^\alpha$は単純群$N^\alpha$の外部自己同型群の部分群となる。又$N_\beta^\alpha \neq N^\alpha \cap N^\beta$の場合の剰余群$N_\beta^\alpha / N^\alpha \cap N^\beta$の構造を考えると補題より$C_G(N^\alpha) = 1$となるから$N^\alpha \leq G_\alpha \leq \mathrm{Aut}(N^\alpha)$となり，従って$N_\beta^\alpha / N^\alpha \cap N^\beta \simeq N_\beta^\alpha N^\beta / N^\beta \simeq N_\alpha^\beta N^\alpha / N^\alpha \leq \mathrm{Out}(N^\alpha)$となる。

次に，N_β^αはβを含むN^α-軌道の置換表現を完全に決定しているが，N_β^αがN^αのどのような部分群になっているかをみる。N^αが$\Omega - \{\alpha\}$上$\frac{1}{2}$-可移になっていることから$|\Omega| = 1 + |N^\alpha : N_\beta^\alpha| \times r$が成りたつ。ここで$r$は$\Omega - \{\alpha\}$上の$N^\alpha$-軌道の個数である。仮定により$|\Omega|$が偶数であるから$|N^\alpha : N_\beta^\alpha|$及び$r$はいずれも奇数でなければならない。とくに$N_\beta^\alpha$は$N^\alpha$の指数が奇数の部分群となることが分かる。以上のことから与えられた$N(=N^\alpha)$に対してG_αの構造の概観が得られたことになる。

次にG全体の性質を知る上で重要なWittの定理に関連した補題をのべる。Wittの定理は２点$\alpha, \beta \in \Omega$ の不変部分群$G_{\alpha\beta}$の部分群に関するものであるが，今の場合N^αだけが既知であるのでN_β^αの内部だけの条件に置きかえることが必要となってくる。これが次の補題である。

補題　$N^\alpha \cap N^\beta$の部分群Xが次の≪≫をみたすとする。≪ある$g \in G$に対して$g^{-1}Xg \leq N_\beta^\alpha$ならば$N_\beta^\alpha$の元hが在存して$h^{-1}Xh = g^{-1}Xg$≫この時$N_G(X)$をXの固定点$F(X)$上に制限して得られる置換群$N_G(X)^{F(X)}$は２重可移群となる。

以上の考え方を用いてNがいわゆるBenderの単純群の時（つまり$N \simeq PSL(2,q)$, $Sz(q)$, $PSU(3,q)$ $q = 2^n > 2$）を扱ったのが[4]であった。それに続きこの論文ではNが２次の射影特殊線型変換群$PSL(2,q)$, q＝奇数の時を考察した。この中では今までに述べた方法を用いてN_β^αが$PSL(2,q)$の６種類のタイプの部分群のいずれかに同型になることが分り，$N_\beta^\alpha / N^\alpha \cap N^\beta$ や$G_\alpha / O(G_\alpha) N^\alpha$ の構造も$PSL(2,q)$の性質により概観が分かり，$N^\alpha \cap N^\beta$のいろいろな部分群に対して補題が適用されてGの性質や次数$|\Omega|$が限定されることによりこの論文の次の定理が得られる。

定理　GをΩ上の２重可移群とし，$|\Omega|$は偶数であるとする。$G_\alpha (\alpha \in \Omega)$が$PSL(2,q)$($3 \neq q$＝奇数）に同型な正規部分群$N^\alpha$を含めば，次のいずれかが起る。

(i) $|\Omega| = 6$, $N^\alpha \simeq PSL(2,5)$, $G \simeq A_6$又はS_6。

(ii) $|\Omega| = 12$, $N^\alpha \simeq PSL(2,11)$，Gは11次のMathieu群の12点上の２重可移表現。

(iii) $(|\Omega|, q) = (16, 9)$, $(16, 5)$又は$(8, 7)$. かつGは位数$|\Omega|$のregularな正規部分群をもつ。

参　考　文　献

[1] M. O'Nan : A characterization of $L_n(q)$ as a permutation group, Math. Z. 127(1972), 301-314.

[2] M. O'Nan : Normal structure of the one-point stabilizer of a doubly transitive permutation group II, Trans. Amer. Math. Soc. 214(1975), 43-74.

[3] M. O'Nan : Doubly transitive groups of odd degree whose one point stabilizers are local, J. Algebra, 39(1976), 440-482.

[4] Y. Hiramine : On doubly transitive permutation groups, Osaka J. Math. 15(1978), 613-631.

論文の審査結果の要旨

2重可移群の分類問題は置換群論において最も重要な問題の一つである。この問題に関してO'Nanは1975年に基本的な結果を発表した。

いまGを有限集合Ω上の2重可移な置換群とし，一点$\alpha \in \Omega$の安定化部分群をG_α, G_αの極小正規部分群すべての積をSocle(G_α)とする。このときO'Nanの定理によればSocle(G_α)はアーベル群であるか，またはアーベル群と一つの非可換単純群の直積に分解される。平峰君はこの後者の場合を考察し，参考論文においてG_αがPSL(2, 2^n), PSU(3, 2^n)，Sz(2^n)などのBender群とよばれる単純群を極小正規部分群として含む場合，主論文においてはG_αがPSL(2, q)(qは奇数)を極小正規部分群として含む場合の2重可移群の分類を完成した。すなわちそのような2重可移群Gは下の表にあらわれるものに限ることを示した。

(ただしGは正則な正規部分群を含まないものとする)

G	$\|\Omega\|$	N($<G_\alpha$)
A_6	6	PSL(2,4)
S_6	6	PSL(2,4)
PSL(2,11)	11	PSL(2,4)
A_6	6	PSL(2,5)
S_6	6	PSL(2,5)
M_{11}	12	PSL(2,11)

(上の表で$|\Omega|$はGの次数，NはG_αの極小正規部分群を表す)

以上のように本論文の結果は2重可移群の分類問題に大きく寄与するものであり，その証明も置換群論的に興味深いものであって，理学博士の学位論文として十分価値あるものと認める。