



Title	ON THE CLASS NUMBER OF A UNIT LATTICE OVER A RING OF REAL QUADRATIC INTEGERS
Author(s)	Mimura, Yoshio
Citation	大阪大学, 1983, 博士論文
Version Type	VoR
URL	https://hdl.handle.net/11094/27761
rights	
Note	

The University of Osaka Institutional Knowledge Archive : OUKA

<https://ir.library.osaka-u.ac.jp/>

The University of Osaka

氏名・(本籍)	味 村 良 雄
学位の種類	理 学 博 士
学位記番号	第 6 2 5 0 号
学位授与の日付	昭 和 58 年 12 月 13 日
学位授与の要件	学位規則第 5 条第 2 項該当
学位論文題目	実 2 次体の整数環上の単位格子の類数
論文審査委員	(主査) 教 授 永尾 汎
	(副査) 教 授 尾関 英樹 教 授 宮西 正宜 助教授 山本 芳彦

論 文 内 容 の 要 旨

総実な代数体 F の整数環上の単位格子 E_n (対応する 2 次形式が $x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2$) の類数を $h_n(F)$ とかく。則ち local には E_n に同型な格子の全体 (種という) を global な同型で分類したときの類の個数を考える。 $h_n(F) = 1$ となる (n, F) を見つけることは類数 1 問題と呼ばれ, 解決されている。ここでは $h_n(F) = 2$, 則ち類数 2 問題を扱う。 $(n \geq 4$ の条件のもとでは解決されている。) 本論文は, F を実 2 次体に制限して, $n \geq 3$ という一般的な n に対して結果を与える:

主定理

$n \geq 3$ で F が実 2 次体のとき, $h_n(F) = 2$ となる (n, F) は次で与えられる:

$$\begin{array}{lll} n = 5 ; \mathbb{Q}(\sqrt{2}), & n = 3 ; \mathbb{Q}(\sqrt{3}), & n = 5 ; \mathbb{Q}(\sqrt{5}), \\ n = 3 ; \mathbb{Q}(\sqrt{13}), & n = 3 ; \mathbb{Q}(\sqrt{33}), & n = 3 ; \mathbb{Q}(\sqrt{41}). \end{array}$$

この類数問題について先駆者たちは殆んど Siegel Mass Formula を用いてきた。しかしここでは、それとは独立な方法 (いわゆる Kneser の隣接法で, 直交群の近似定理で裏づけされる) を用いる。そのため, この証明の早い段階で, 類数 1 問題の解答も自然に出てくる。また, 類の代表も具体的に与えられる。

さて, 隣接法とは, 一つの格子から, いくつかの新しい格子を産み出す方法であり,

イ) 適当な条件 C_1 のもとでは, 作られた格子は元の格子と同じ種に入り

ロ) 更にある条件 C_2 のもとでは, このような隣接法を次々と産み出された格子に施したときに, 有限回でその種の中の各類の代表が必ず顔を出す

というものである、本論文では次の段階を追って、証明を完了する。

隣接法で得られる格子の間の同型性の十分条件を与える (Lem.2~4)。 E_n の一回目の隣接化の簡易化 (Prop.1, Lem.5) ののち、そうして得られた格子の性質 (特に1や2の表現について) を調べる (Lem.6, Prop.2~7)。それを使って、一回目で (E_n を含めて) 3つ以上の互いに同型でない格子が出てくる場合 (従って $h_n(F) \geq 3$) を調べ、 $h_n(F) \leq 2$ となる必要条件を決定する (Prop.8)。次に条件 C_2 を記述し (Lem.8, 9), Prop.8 で残った考察すべき場合が、 C_2 を満たすことを示し、隣接法を引きつづいて完全遂行する。 E_n の一回目の隣接化でもう E_n と同型でないものが出てこないならば $h_n(F) = 1$ である。また一つだけ出てきたときに、この第二の格子から隣接化でもはや新しい格子が出てこなければ $h_n(F) = 2$ となる。こういう考えのもとに隣接法を使って、主定理がえられる。

論文の審査結果の要旨

K は総実代数体、 Q は K の整数環、 $V = Ke_1 + \dots + Ke_n$ は内積の定義された K 上 n 次元のベクトル空間で $\{e_1, \dots, e_n\}$ はその正規直交基とし、 $E = Qe_1 + \dots + Qe_n$ を単位格子とする。 V の格子 L は、 K の任意の有限素点 p に対して $V_p = V \otimes K_p$ の直交変換 σ_p が存在して $\sigma_p L_p = E_p$ となるとき E と同じ種に属するといひ、このような L の全体を $\text{gen}E$ で表す。また $\text{gen}E$ の元 L, M に対して V の直交変換 σ があって $\sigma L = M$ となるとき L と M は同じ類に属するといひ、 $\text{gen}E$ 内の類の個数を $h_n(K)$ とかいてそれを E の類数という。類数の有限性はすでに知られているが、自然数 k を与えて $h_n(K) = k$ となる (K, n) をすべて求めるという問題は「類数 k 問題」とよばれる。

「類数1問題」は1960年から1977年にかけてDzemas, Nebelung, Pheuffer, Peters等によって完全に解決されている。また「類数2問題」は $n \geq 4$ のときPohst (1973年), Pheuffer (1978年) 等によってほぼ解決されている。

本論文では「類数2問題」を $n \geq 3$ のときに考察し、 K が実2次体のとき $h_n(K) = 2$ となるのは $(K, n) = (Q(\sqrt{2}), 5), (Q(\sqrt{3}), 3), (Q(\sqrt{5}), 5), (Q(\sqrt{13}), 3), (Q(\sqrt{33}), 3), (Q(\sqrt{41}), 3)$ に限ることを示してこの問題の解答を与えている。またこの証明も従来のSiegelのMass Formulaを用いるものとは異なり、Kneserの方法を用いて独自の手法によるもので興味深い。

以上のように本論文は、2次形式の類数問題という困難な問題に新たな知見を加えるものであり、理学博士の学位論文として十分価値あるものと認める。