

Title	[a,b]-factorization of a graph
Author(s)	Kano, Mikio
Citation	
Issue Date	
Text Version	ETD
URL	<a href="http://hdl.handle.net/11094/27765">http://hdl.handle.net/11094/27765</a>
DOI	
rights	
Note	

*Osaka University Knowledge Archive : OUKA*

<https://ir.library.osaka-u.ac.jp/repo/ouka/all/>

氏名・（本籍）	か 加	のう 納	みき 幹	お 雄
学位の種類	理	学	博	士
学位記番号	第	6554	号	
学位授与の日付	昭和59年6月11日			
学位授与の要件	学位規則第5条第2項該当			
学位論文題目	グラフの $[a, b]$ -因子分解			
論文審査委員	(主査)			
	教授	永尾	汎	
	(副査)			
	教授	尾関	英樹	助教授 山本 芳彦

論 文 内 容 の 要 旨

ループはないが多重辺は許された有限グラフを $G$ とする。 $G$ の点集合を $V(G)$ とかき、辺集合を $E(G)$ で表す。部分グラフ $H$ とその点 $v$ に対し、 $v$ と接続する $H$ の辺の数を $v$ の $H$ における次数といい $d_H(v)$ とかく。グラフ $G$ において、 $G$ のすべての点を含む部分グラフを $G$ の全域部分グラフという。 $a, b, r$ を $0 \leq a \leq b$ ,  $1 \leq r$ となる整数とする。このとき各点 $v$ において $a \leq d_G(v) \leq b$ となるグラフ $G$ を $[a, b]$ -グラフといい、各点 $v$ で $d_{G'}(v) = r$ となるグラフ $G'$ を $r$ -正則グラフという。同様に各点 $u$ において $a \leq d_F(u) \leq b$ となる全域部分グラフ $F$ を $G$ の $[a, b]$ -因子といい、各点 $u$ で $d_{F'}(u) = r$ となる全域部分グラフ $F'$ を $r$ -因子という。

本論文ではグラフを $[a, b]$ -因子に分解する問題を考える。グラフ $G$ に対し、もし

$$E(G) = E(F_1) \cup \dots \cup E(F_n),$$

$E(F_i) \cap E(F_j) = \emptyset$ ,  $1 \leq i < j \leq n$ , 各 $F_i$ は $G$ の $[a, b]$ -因子, と分解できれば $G$ は $[a, b]$ -因子分解可能という。各 $F_i$ が $r$ -因子のときは、 $G$ は $r$ -因子分解可能という。

グラフの因子分解に関する知られている結果としては次のようなものがある。

定理A (Petersen 1891) グラフ $G$ が $2$ -因子分解できるための必要十分条件は、 $G$ が $2n$ -正則グラフであることである。ただし $n \geq 1$ 。

定理B (秋山 1982)  $r$ -正則グラフは $[2, 3]$ -因子分解可能である。ただし $r \geq 2$ 。

定理C (恵羅 1984) もし $r \geq 2k^2 + 2k$ なら多重辺を含まない $r$ -正則グラフは $[k, k+1]$ -因子分解可能である。

次に本論文で得られた結果を述べる。次の定理1は、明らかに定理Aを系として含んでいる ( $a = b$

= 1 とおけ)。

定理 1.  $0 \leq a \leq b$  とする。するとグラフ  $G$  が  $[2a, 2b]$ -因子分解可能であるための必要十分条件は  $G$  が  $[2an, 2bn]$ -グラフであることである。ただし  $n$  はある正の整数。

次の定理は  $[1, 2]$ -因子分解できるための十分条件を与えているが、 $[1, 2]$ -因子は各成分がパスまたはサイクルからなる全域部分グラフであることを注意したい。

定理 2.  $s, t$  は  $1 \leq t, 0 \leq s$  となる整数とする。すると  $[8t+2s, 10t+2s]$ -グラフは  $[1, 2]$ -因子分解可能である。

上の 2 つの定理は Lovasz の  $(g, f)$ -因子定理及び  $(g, f)$ -因子をもつための十分条件を与える補題、これは本論文で証明される新しい結果のひとつであるが、を用いて証明される。

### 論文の審査結果の要旨

有限グラフ  $G$  の頂点の集合を  $V(G)$ 、辺の集合を  $E(G)$  で表し、 $G = (V(G), E(G))$  とかく。また  $G$  の頂点  $v$  に対し  $v$  と結ばれている辺の個数を  $d_G(v)$  で表し、これを  $v$  の次数という。2 つの負でない整数  $a < b$  に対して  $a \leq d_G(v) \leq b$  がすべての  $v \in V(G)$  に対し成り立つとき、 $G$  は  $[a, b]$ -グラフであるといい、特に  $a = b$  であるとき  $G$  は  $a$ -正則であるという。

グラフ  $G$  に対し  $E(G) = E_1 \cup \dots \cup E_n$  ( $i \neq j$  ならば  $E_i \cap E_j = \emptyset$ ) と分割され、各全域部分グラフ  $F_i = (V(G), E_i)$  が  $[a, b]$ -グラフとなると、 $G$  は  $[a, b]$ -因子分解可能であるという。特に  $a = b$  のとき、 $G$  は  $a$ -因子分解可能であるという。グラフがいつ上のような因子に分解可能であるかという問題はグラフ理論で最も基本的な問題の一つで、1891 年に発表された Petersen による次の結果「 $G$  が 2-因子分解可能であるため必要十分な条件は、 $G$  が  $2n$ -正則であることである」は有名である。

Petersen 以後、この問題について本質的な進展は長い間みられなかったが、最近いくつかの結果が発表されて研究者の関心を集めてきている。中でも本論文で得られた次の主定理は、その証明に用いられた補題と共に特に評価されているものである。

定理 1. グラフ  $G$  が  $[2a, 2b]$ -因子分解可能であるため必要十分な条件は、 $G$  が  $[2an, 2bn]$ -グラフであることである。

定理 2.  $1 \leq t, 0 \leq s$  とするとき  $[8t+2s, 10t+2s]$ -グラフは  $[1, 2]$ -因子分解可能である。特に定理 1 は Petersen の古典的な結果の拡張を与えている。

$[a, b]$ -因子が存在するための条件としては Lovasz の基本定理があるが、本論文ではこの定理を用いて、帰納法が使い易い形の十分条件を与え、それが定理の証明に本質的な役割を果たしている。

以上のように本論文は、グラフ理論の基本的問題に対し本質的な寄与をなすものであり、理学博士の学位論文として十分価値あるものと認める。