Title	[a,b]-factorization of a graph
Author(s)	Kano, Mikio
Citation	大阪大学, 1984, 博士論文
Version Type	VoR
URL	https://hdl.handle.net/11094/27765
rights	
Note	

【13】

氏名・（本籍）	加(か) 納(のう) 幹(みき) 雄(お)
学位の種類	理学博士
学位記番号	第 6554 号
学位授与の日付	昭和59年6月11日
学位授与の要件	学位規則第5条第2項該当
学位論文題目	**グラフの〔a, b〕−因子分解**
論文審査委員	（主査）教授 永尾 汎 （副査）教授 尾関 英樹 助教授 山本 芳彦

論文内容の要旨

ループはないが多重辺は許された有限グラフをGとする。Gの点集合をV(G)とかき，辺集合をE(G)で表す。部分グラフHとその点vに対し，vと接続するHの辺の数をvのHにおける次数といい $d_H(v)$ とかく。グラフGにおいて，Gのすべての点を含む部分グラフをGの全域部分グラフという。a, b, rを $0 \leq a \leq b$, $1 \leq r$ となる整数とする。このとき各点vにおいて $a \leq d_G(v) \leq b$ となるグラフGを〔a, b〕−グラフといい，各点vで $d_G{}'(v) = r$ となるグラフG′をr−正則グラフという。同様に各点uにおいて $a \leq d_F(u) \leq b$ となる全域部分グラフFをGの〔a, b〕−因子といい，各点uで $d_{F'}(u) = r$ となる全域部分グラフF′をr−因子という。

本論文ではグラフを〔a, b〕−因子に分解する問題を考える。グラフGに対し，もし

$E(G) = E(F_1) \cup \cdots \cup E(F_n)$,

$E(F_i) \cap E(F_j) = \phi$, $1 \leq i < j \leq n$, 各 F_i はGの〔a, b〕−因子，と分解できればGは〔a, b〕−因子分解可能という。各Fiがr−因子のときは，Gはr−因子分解可能という。

グラフの因子分解に関する知られている結果としては次のようなものがある。

定理A（Petersen 1891） グラフGが2−因子分解できるための必要十分条件は，Gが2n−正則グラフであることである。ただし $n \geqq 1$。

定理B（秋山1982） r−正則グラフは〔2, 3〕−因子分解可能である。ただし $r \geqq 2$。

定理C（恵羅1984） もし $r \geqq 2k^2 + 2k$ なら多重辺を含まないr−正則グラフは〔k, k+1〕−因子分解可能である。

次に本論文で得られた結果を述べる。次の定理1は，明らかに定理Aを系として含んでいる（a = b

＝1とおけ)。

定理1. $0 \leq a \leq b$とする。するとグラフGが〔2a, 2b〕－因子分解可能であるための必要十分条件はGが〔2an, 2bn〕－グラフであることである。ただしnはある正の整数。

次の定理は〔1,2〕－因子分解できるための十分条件を与えているが，〔1,2〕－因子は各成分がパスまたはサイクルからなる全域部分グラフであることを注意したい。

定理2. s，tは$1 \leq t$，$0 \leq s$となる整数とする。すると〔8t+2s, 10t+2s〕－グラフは〔1,2〕－因子分解可能である。

上の2つの定理はLovasz の(g，f)－因子定理及び（g，f)－因子をもつための十分条件を与える補題，これは本論文で証明される新しい結果のひとつであるが，を用いて証明される。

論文の審査結果の要旨

有限グラフGの頂点の集合をV(G)，辺の集合をE(G)で表し，G＝(V(G), E(G))とかく。またGの頂点vに対しvと結ばれている辺の個数を$d_G(v)$で表し，これをvの次数という。2つの負でない整数$a < b$に対して$a \leq d_G(v) \leq b$がすべての$v \in V(G)$に対し成り立つとき，Gは〔a,b〕－グラフであるといい，特に$a = b$であるときGはa－正則であるという。

グラフGに対し$E(G) = E_1 \cup \cdots \cup E_n$（$i \neq j$ならば$E_i \cap E_j = \phi$）と分割され，各全域部分グラフ$F_i = (V(G), E_i)$が〔a,b〕－グラフとなるとき，Gは〔a,b〕－因子分解可能であるという。特に$a = b$のとき，Gはa－因子分解可能であるという。グラフがいつ上のような因子に分解可能であるかという問題はグラフ理論で最も基本的な問題の一つで，1891年に発表されたPetersenによる次の結果「Gが2－因子分解可能であるため必要十分な条件は，Gが2n－正則であることである」は有名である。

Petersen以後，この問題について本質的な進展は長い間みられなかったが，最近いくつかの結果が発表されて研究者の関心を集めてきている。中でも本論文で得られた次の主定理は，その証明に用いられた補題と共に特に評価されているものである。

定理1. グラフGが〔2a, 2b〕－因子分解可能であるため必要十分な条件は，Gが〔2an,2bn〕－グラフであることである。

定理2. $1 \leq t$，$0 \leq s$とするとき〔8t+2s, 10t+2s〕－グラフは〔1,2〕－因子分解可能である。

特に定理1はPetersenの古典的な結果の拡張を与えている。

〔a,b〕－因子が存在するための条件としてはLovaszの基本定理があるが，本論文ではこの定理を用いて，帰納法が使い易い形の十分条件を与え，それが定理の証明に本質的な役割を果している。

以上のように本論文は，グラフ理論の基本的問題に対し本質的な寄与をなすものであり，理学博士の学位論文として十分価値あるものと認める。