



Title	多孔質材で構成された音響素子の動的特性に関する基礎的研究
Author(s)	大家, 左門
Citation	大阪大学, 1981, 博士論文
Version Type	VoR
URL	https://hdl.handle.net/11094/2817
rights	
Note	

The University of Osaka Institutional Knowledge Archive : OUKA

<https://ir.library.osaka-u.ac.jp/>

The University of Osaka

多孔質材で構成された音響素子 の動的特性に関する基礎的研究

大 家 左 門

目 次

第 1 章	緒 論	1
第 2 章	振動する多孔質材表面からの音の放射 (1次元問題)	6
2.1	緒 言	6
2.2	一様振動をする多孔質材中の音波の挙動	6
2.3	1次元放射問題における諸考察	11
2.3.1	半無限多孔質材からの音の放射	12
2.3.2	有限の厚さの多孔質材からの音の放射 (I)	16
2.3.3	有限の厚さの多孔質材からの音の放射 (II)	19
2.3.4	実験例	20
2.4	弾性波を考慮に入れた場合の放射特性	22
2.4.1	基礎方程式の導出	23
2.4.2	1次元放射問題の解析例	28
2.4.3	数値計算例	34
2.5	結 言	37
第 3 章	多孔質層を貼付した平面壁からの音の放射	40
3.1	緒 言	40
3.2	音波に対する基礎方程式の導出	41
3.3	音場のスペクトル表示	44
3.4	各種振動分布に対応した放射音場と放射パワー	48
3.4.1	無限に広がった振動分布	48
3.4.2	細長い帯状の振動分布	51
3.4.3	空間的に局在した振動分布	54
3.5	他の著者の結果との比較	58
3.6	結 言	59

第 4 章	多孔質材で構成された各種弾性平板の振動特性について	61
4.1	緒 言	61
4.2	音波と弾性波に対する基礎方程式の整理	61
4.3	薄い多孔質板の振動特性	64
4.3.1	多孔質板の運動方程式 (I)	64
4.3.2	多孔質板内の流体層の運動方程式	68
4.3.3	$D(\omega) \rightarrow 0$, $D(\omega) \rightarrow 1$ の場合について	72
4.4	多孔質板の運動方程式 (II)	74
4.4.1	Mindlin による板の運動方程式	75
4.4.2	流体中での多孔質板の運動方程式	77
4.5	多孔質材を両面に貼付した複合板の運動方程式	82
4.6	薄い多層状の多孔質材で構成された複合板の運動方程式	87
4.6.1	N 層多孔質板の運動方程式	88
4.6.2	流体層の運動方程式	91
4.7	結 言	93
第 5 章	多孔質板吸音材の吸音特性について	95
5.1	緒 言	95
5.2	1 次元モデル	96
5.2.1	多孔質板のノーマル音響インピーダンス (I)	96
5.2.2	多孔質板のノーマル音響インピーダンス (II)	97
5.2.3	数値計算例	99
5.3	有限の大きさの多孔質板吸音材 (I)	102
5.3.1	多孔質板吸音材の吸音特性	103
5.3.2	板振動型吸音材の吸音特性	110
5.3.3	数値計算例	110

5.4	有限の大きさの多孔質板吸音材 (Ⅱ)	
	(回折の影響を含む場合)	112
5.4.1	多孔質板吸音材の吸音特性	112
5.4.2	板振動型吸音材の吸音特性	119
5.4.3	1次元モデルによる考察	119
5.4.4	数値計算例	122
5.5	結 言	124
付録 5.1	相互放射インピーダンス密度の有限性について	125
第 6 章	多孔質材を貼付した複合板の遮音特性	129
6.1	緒 言	129
6.2	音波と複合板の振動に関する基礎方程式の整理	130
6.3	遮音特性の解析	135
6.3.1	受音側に貼付した場合	135
6.3.2	音源側に貼付した場合	139
6.3.3	両側に貼付した場合	143
6.4	数値計算例	146
6.5	透過率の近似式	156
6.6	結 言	158
第 7 章	結 論	161
謝 辞		163
参 考 文 献		164

第 1 章 緒 論

多孔質材料は、その構造上、音波の音響エネルギーをきわめて効率よく熱エネルギーに変換しうる、すなわち、きわめて効率よく音を吸収しうるということで、古くから音響制御用素子として、種々の所で用いられてきた。これらの素子は、その特性を定量的に予測するという立場から眺めた場合には、次のように大きく2つのグループに分けられるであろう。

〔A〕多孔質材自身を静止媒質とみなしてよい場合。

この例としては、マフラーの内部に用いられている吸音材、¹⁾あるいは、中高周波域の吸音のみを目的とした室内音響用吸音材²⁾などが挙げられる。

〔B〕多孔質材自身が動くということが、特性予測上重要となる場合。

この例としては、低域から高域までの全周波数範囲での吸音を目的とした多孔質板吸音材、^{3), 4)}あるいは、遮音性能のおおまかな限界とされる質量則以上の透過損失を有する、多孔質層を基板に貼付した複合型遮音板⁵⁾⁻¹⁰⁾などが挙げられる。

上述した〔A〕グループの場合には、多孔質材を、複素伝搬定数を有する静止媒質とみなし、波動解析全般に関して開発されている種々の手法¹¹⁾を用いて、基本となる波動方程式を境界条件を考慮に入れて解けば、ある程度の予測は可能と考えられる。

他方、〔B〕グループについては、幾らかの実験報告は古くからなされているものの、その実験結果を定量的に説明するような理論的考察は、ほとんどなされていない。それどころか、どのような式を基本方程式とみなし、どのような境界条件を与えればよいのかといった、根本的な問題に全くといってよいほど、手がつけられていないというのが現状である。

本論文では、このような背景をふまえて、上述した〔B〕グループ全般に関する基礎資料を得る目的で行なった若干の理論的考察を、以下のようながれで述べていきたい。

- i) 振動する多孔質材表面からの音の放射の解析。
- ii) 多孔質材で構成された、各種弾性平板の振動特性に関する基礎方程式の導出。
- iii) i), ii) の基礎的な成果の応用例としての、前述した多孔質板吸音材や、複合型遮音材の特性解析。

これら、i) - iii) について、具体的にその背景や内容のあらましを述べると、以下のようなになる。

まず、i) の放射問題であるが、これを最初にもってきたのは、この放射問題自体が音響学上基本的なテーマのひとつであること、また、本論文で述べるような iii) の応用例においては、板の振動速度そのものを問題にするよりも、板が振動した結果として放射される音場を問題にすることが多く、したがって、種々の応用例の特性に対する物理的解釈を得る上においても、まず、多孔質材表面からの放射特性をおさえておく必要がある、などの理由からである。

さて、一般に音の放射問題といえは、音響学においては最も基本的な分野のひとつであり、古くから多くの研究がなされている。¹²⁾ また最近では、電子計算機の出現に伴ない種々の数値解法も開発されてきて、複雑な形状の音源からの放射音場の解析も可能となりつつある。¹³⁾⁻¹⁶⁾ しかしながら、これらの解析のほとんどは、境界条件として、振動面における音波の粒子速度の法線成分は振動面の振動速度の法線成分に等しい、という条件を採用したものである。この扱いは、振動面が非多孔質の場合には、実際の放射特性に近い結果を与えるものと考えられる。他方、振動面が多孔質の場合には、音波の一部が振動面内部に入り込むために、上記の境界条件は一般に使えなくなってくるものと考えねばならない。このように、振動面を剛壁とみなせない場

合の放射問題に関する理論的考察は、ほとんどなく、Morse 他による平面壁からの音放射に関する近似的考察が、現存する唯一の理論である。^{17), 18)} しかし、彼等は、この放射問題を、壁の内部にまでは立ち入らず、壁の外部空間での境界値問題として処理しようとしたため、新たに物理的根拠が不明な物理量を導入せざるを得なかった。このようなことから、この剛でない壁からの放射音場に関する定量的な評価は不可能なままに終わっていた。

本論文では、振動する多孔質材内部と、音波が放射される外部空間とを合わせた全空間での境界値問題を設定し、これを解くという立場から議論をし、この種の放射問題に対する理論的基礎を与えることにする。

次に ii) の振動問題であるが、振動板を構成する材料が非多孔質の場合には、この弾性板の振動に関し、多くの研究がなされていることは衆知の事実である。^{19), 20)} しかも、この研究分野は、単に連続体力学の^力~~力~~つ分野といった純理論的な立場からのもののみならず、多くの実用例が考案され、その実用例の特性予測に関する理論的考察も数多く報告されているのである。このように、理論と応用の両面から、弾性板の振動が活発に討論されてきた裏には、きわめて使いやすい形の板の運動方程式が、先人により開発されていたという点を見逃がしてはならないであろう。

一方、多孔質材で構成された弾性板の振動に関しては、若干の実験的な考察は報告されているものの、その実験結果を説明しうる理論はもちろんのこと、それ以前の、多孔質板の運動方程式すら導出されていないというのが現状である。

ところで、多孔質材の特長に今一度目を向けると、多孔質材は、音をきわめて効率よく吸音するという性質を持っていることは、冒頭にも述べたとおりであるが、これに加えて、設計のしかたによっては、多孔質材で構成された板や棒の振動の制動作用を、まわりの流体に受け持たせることが可能だということも、振動制御の立場からは見逃せない特長のひとつであろう。このように、多孔質材で構成された弾性板は、非多孔質の板には望み得ない特長

を有しているのであるから、これをうまく使いこなすことができれば、従来のものにはない、新しい応用分野を開拓することも可能といっても過言ではあるまい。こういったことを考えてみると、まず望まれるのは、従来の多孔質でない弾性板の運動方程式に匹敵するような、使いやすい形の多孔質板の運動方程式の導出であろう。

本論文では、上述したような背景をふまえて、多孔質材で構成された単一平板、並びに、複合板が流体中で振動する場合の運動方程式を導出し、また、その適用限界についての理論的考察を与えることにする。

最後の iii) においては、前述した i), ii) で与えた基礎的考察をもとに、若干の応用例の解析を行なう。応用例としては、幾つかのものが考えられるが、本論文では、現在実験的考察が報告されている2つの例、すなわち冒頭でも述べた、多孔質板吸音材^{3), 4)}と複合構造の遮音材^{5) - 10)}を取り上げ、それらの特性を解析することにより、実験結果に対する説明や、これら音響材料が示す現象の機構に関し物理的な解釈を与えることにする。

以上述べたようなながれにそって、次章以降では、振動壁、単一板、複合板を構成する材料が、非多孔質材から多孔質材にかわった時に、種々の特性が本質的にどのように変化するかについての基本的な概念、資料を得る目的で行なった理論的考察を述べていく。次章以降の構成を要約すると以下のようになる。

第2章では、振動する多孔質材中の音波の挙動を支配する基本方程式をある程度一般的に導出する。特に、ある条件のもとでは、音波に対する一般解が簡単な形で与えられることを示すことにより、振動する多孔質材中の音波の挙動に関する基礎的な概念を与える。さらに、これらの成果を、音の放射問題としては最も基本的な1次元問題に適用することにより、振動面が多孔質になった場合の放射音場に与える影響に関する基礎的な概念を与える。

第3章では、第2章の考察を一般化して、平面壁に一定厚の多孔質材を貼付した構造の振動壁を考え、振動壁が任意の振動分布で振動した場合の放射

音場の解析を行なう。

第4章では、多孔質材で構成された弾性板が流体中で振動する場合についての基礎的な考察を行なう。前半では、単一の材料から成る多孔質板を取り上げ、多孔質板の運動方程式の導出、多孔質板内の流体層の運動方程式の導出を行ない、また、これらの式の適用限界について述べる。後半では、多孔質材で構成された各種複合板の振動に関する理論的な基礎を与える。

第5、6章では、前章までに与えた基礎的な考察をもとに、若干の応用例に関する解析を行なう。

第5章では、多孔質板吸音材の吸音率を解析することにより、従来の実験結果の説明と、この吸音材の吸音機構に関する基礎的概念を与える。

第6章では、基板の両面に多孔質層を貼付した複合構造の遮音材の遮音特性を解析し、従来の実験結果の説明と、この遮音材の遮音機構に関する基礎的概念を与える。

第7章では、本研究の成果と今後の課題についての総括を行なう。

第 2 章 振動する多孔質材表面からの音の放射

2.1 緒 言

本章では，振動物体自身が多孔質材で構成されていたり，あるいは，振動物体に多孔質材が直接貼付されていたりして，振動面を剛壁とみなしえない場合の最も基本的な放射問題として，1次元問題を取り上げ，若干の考察を試みる。

本章の前半においては，多孔質材の振動様式として，空間的に一様な振動状態を考える。まず，一様な振動をする多孔質材中の流体音波（以下では，単に音波と記す）の挙動を支配する基礎方程式であるところの，運動方程式，圧縮の式，及び，境界条件などの導出を行なう。次に，具体的な音源モデルからの放射音場について解析を行ない，音源面が剛壁から多孔質壁に変化した場合の放射音場に与える影響について議論する。

本章の後半においては，多孔質材内部に弾性波の存在を考慮に入れた場合についての考察を行なう。まず，音波や弾性波に対する運動方程式などの導出を試み，さらに，1次元放射問題に関して，具体的な解析を行ない，弾性波の放射音場に与える影響について議論する。

2.2 一様振動をする多孔質材中の音波の挙動³⁰⁾

静止した多孔質材中を伝搬する音波の挙動については，従来より，巨視的な立場から，等価的な密度 ρ^* ，等価的な体積弾性率 K^* といった“物質定数”を用いた議論がなされている。この ρ^* ， K^* と，多孔質材の構造との関係に関する理論的考察も多く報告されているが，^{21)–29)} ここでは Kosten²¹⁾ 他による毛細管集合モデルにそった議論の展開を試みる。なお，多孔質材は均質等方とし，また本節では多孔質材中の弾性波の存在を無視した場合，すなわち，多孔質材が剛体的に振動する場合に議論を限ることとする。

今図 2.2.1 のように、管壁の速度が、軸方向に、 $U \exp(j\omega t)$ で振動している半径 a の円筒中の音波の挙動を考える。ここに ω は角周波数である。（以後特にことわらない限り時間依存性は $\exp(j\omega t)$ とし、時間因子 $\exp(j\omega t)$ は省略する。）

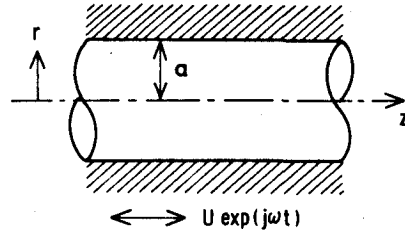


図 2.2.1 軸方向に単振動をしている円形パイプ中の音波

音波と管壁とは、流体の粘性、熱伝導により、互いに影響を及ぼしあうが、ここでは Kosten 他²¹⁾に従い、流体の運動方程式には主として粘性が、圧縮性については主として熱伝導が寄与するとして議論を進めることにする。この時、図 2.2.1 のように円筒座標系 (r, φ, z) を導入し、流体の粒子速度を $(0, 0, v)$ とすれば、粘性のみを考慮した流体に対する運動方程式は、次式で与えられる。

$$j\omega\rho_0 v(r) = -\frac{\partial p}{\partial z} + \frac{\eta}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial}{\partial r} v(r) \right), \quad (2.2.1)$$

ここに ρ_0 は流体の静止時の密度、 p は音圧、 η は粘性係数である。なお (2.2.1) 式を導出する際、変動量 v 、 p は微少量とみなし、流体の一般的な運動方程式中に現われる、2 次以上の非線型項は無視した。（以後、この意味の近似を音響近似と呼ぶことにする。）さて (2.2.1) 式を境界条件 $r = a$ で $v(a) = U$ のもとに解くと、

$$v(r) = -\frac{1}{j\omega\rho_0} \left(\frac{\partial p}{\partial z} \right) \cdot \left(1 - \frac{J_0(\beta r)}{J_0(\beta a)} \right) + \frac{J_0(\beta r)}{J_0(\beta a)} U, \quad (2.2.2)$$

を得る。ここに $\beta^2 = -j\omega\rho_0/\eta = -j\omega/\nu$ 、 ν は動粘性係数、また $J_n(x)$ は第 n 次の Bessel 関数である。我々が興味あるのは、管内の個々の場所での $v(r)$ ではなく、細管の断面内での平均量 $v_c \equiv \langle v(r) \rangle$ であ

る。そこで (2.2.2) 式を断面内で平均化してしまうと次式を得る。

$$j \omega \rho_0 v_c = - \frac{\partial p}{\partial z} + \sigma_c (U - v_c), \quad (2.2.3)$$

ここに σ_c は抵抗密度の次元をもつ係数であり次式で与えられる。

$$\sigma_c = j \omega \rho_0 \cdot \frac{X}{1-X}, \quad X = \frac{2 J_1(\mu \sqrt{-j})}{\mu \sqrt{-j} J_0(\mu \sqrt{-j})},$$

$$\mu^2 = \frac{\rho_0 \omega}{\eta} \quad a^2 = \frac{\omega a^2}{\nu} \quad (2.2.4)$$

あるいは (2.2.3) 式を変形して、1本の細管に対する等価密度 ρ_c^* を用いて表わすと次式を得る。

$$j \omega \rho_0 \left(1 + \frac{\sigma_c}{j \omega \rho_0}\right) v_c = j \omega \rho_c^* v_c = - \frac{\partial p}{\partial z} + \sigma_c U. \quad (2.2.5)$$

実際の多孔質材のモデルとしては、このような細管が多数集まり、方向もランダムな方向を向いているとして、Kosten 他²¹⁾に従い、多孔率 H 、構造因子 S を導入して (2.2.3) 式を3次元化すると次式を得る。

$$j \rho^* \omega u = - \nabla p + \sigma U, \quad (2.2.6)$$

ここに

$$\rho^* = \frac{S}{H} \rho_c^*, \quad u = H v_c, \quad \sigma = (S-1) j \rho_0 \omega + S \sigma_c, \quad (2.2.7)$$

である。式 (2.2.7) 中の σ は、一般に周波数やセルサイズなどに依存する量であり、 σ の表式は、3次元の場合にも骨格と流体との相互作用の表式は (2.2.3) 式の右辺第2項のように $(U - v_c)$ に比例するであろうとし、また骨格が静止した時、すなわち $U = 0$ の時には、(2.2.6) 式は静止多孔質材中の音波に対する運動方程式に一致しなければならないという要請から次

元解析的に得られたものである。

一方圧縮の式であるが、本節では多孔質材は剛体的に振動するとしているので、その内部の流体に対する連続の式は、音響近似の範囲内では次式で与えられる。

$$H \frac{\partial \rho}{\partial t} = -\operatorname{div} (\rho H v_c) = -\rho_0 \operatorname{div} u . \quad (2.2.8)$$

さらに毛細管中の流体の圧力変化と密度変化との関係を表わす等価弾性率として Kosten 他²¹⁾ による円筒管モデルのものを採用すると、圧縮の式は

$$-j \omega p = K^* \operatorname{div} u , \quad (2.2.9)$$

で与えられる。ここに

$$K^* = \frac{1}{H} K_c^* ,$$

$$K_c^* = x P_0 \left\{ 1 + \frac{2(x-1)}{P_t \cdot \mu \sqrt{-j}} \cdot \frac{J_1(P_t \mu \sqrt{-j})}{J_0(P_t \mu \sqrt{-j})} \right\} ,$$

$$P_t = \sqrt{\frac{\eta C_p}{\lambda_h}} , \quad (2.2.10)$$

である。また、 C_p は定圧比熱、 x は比熱比、 P_0 は静圧、 λ_h は熱伝導率である。

結局、一様振動をする多孔質材中の音波に対する運動方程式は (2.2.6) 式で、圧縮の式は (2.2.9) 式で与えられたことになる。以下では、この2つの式を組み合わせて波動方程式を作り、その一般解を与えることにする。

さて、運動方程式 (2.2.6) で、 u を2つに分け

$$u = u_s + u_d , \quad (2.2.11)$$

$$u_s = \frac{\sigma}{j \rho^* \omega} U , \quad (2.2.12)$$

とおくと、明らかに u_s は

$$\operatorname{div} \mathbf{u}_s = \frac{\sigma}{j \rho^* \omega} \operatorname{div} \mathbf{U} = 0, \quad (2.2.13)$$

を満たすので、(2.2.11) 式を (2.2.9) 式に入れても $\mathbf{u}_s$ は寄与しないことになる。従って (2.2.11) 式を (2.2.6), (2.2.9) 式に入れると、結局問題にすべき基礎式は

$$j \rho^* \omega \mathbf{u}_d = -\nabla p, \quad (2.2.14)$$

$$-j \omega p = K^* \operatorname{div} \mathbf{u}_d, \quad (2.2.15)$$

で与えられることになる。(2.2.14), (2.2.15) 式は静止多孔質材中の音波に対する式と同じ形をしており、 p , $\mathbf{u}_d$ はあるスカラーポテンシャル ϕ を用いると

$$p = j \rho^* \omega \phi, \quad \mathbf{u}_d = -\nabla \phi, \quad (2.2.16)$$

で与えられることは容易に示される。ただし ϕ は

$$(\nabla^2 + \gamma^2) \phi = 0, \quad \gamma^2 = \omega^2 \frac{\rho^*}{K^*}, \quad (2.2.17)$$

の一般解である。従って速度 $\mathbf{U}$ で一様に振動する多孔質材中の流体に対する音圧 p , 粒子速度 $\mathbf{u}$ は、(2.2.17) 式を満たすスカラーポテンシャル ϕ を用いると

$$p = j \rho^* \omega \phi, \quad (2.2.18)$$

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_s + \mathbf{u}_d = \frac{\sigma}{j \rho^* \omega} \mathbf{U} - \nabla \phi, \quad (2.2.19)$$

で与えられることになる。

このように、骨格が空間的に一様な振動をする時の多孔質材中の音波の粒子速度 $\mathbf{u}$ は、空間的に一様な振動項 $\mathbf{u}_s$ と、一般解としての波動項 $\mathbf{u}_d$ との和として与えられ、音圧 p に直接関係するのは、この波動項 $\mathbf{u}_d$ である。また、流体の一様な振動がどの程度励起されるかは、結合係数 σ と、等価的な慣性係数 $j \rho^* \omega$ との比で定まり、後に考察するように、高周波になってきて、

流体の等価的な慣性力の方が骨格との結合力よりも大きくなっていく場合には、たとえ骨格が動いていても流体の様な振動は次第に励起されにくくなり、その結果として音波もほとんど放射されなくなるというようなこともある。

本節の終わりとして、音波に対する境界条件について考察をする。

まず、多孔質材と外部空間との境界面（図 2.2.2 の B 面）では、音圧、粒子速度の連続性から次式が要求される。

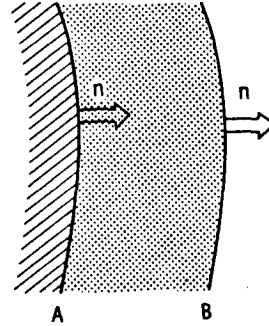


図 2.2.2 振動する多孔質材表面での境界条件

$$p^{out} = p^{in} , \quad (2.2.20)$$

$$u_n^{out} = u_n^{in} + (1 - H) U_n , \quad (2.2.21)$$

ここに指標 *out*, *in* は、それぞれの物理量 *p*, *u* が多孔質材の外部、内部の流体に属することを意味し、また指標 *n* は法線成分を表わすものとする。
(2.2.21) 式の右辺第 2 項は、振動する骨格の表面から押し出される体積速度成分である。

次に、図 2.2.2 の A 面においては、次式が要求される。

$$u_n^{in} = H U_n . \quad (2.2.22)$$

2. 3 1 次元放射問題における諸考察³⁰⁾

本節では、一様に振動する多孔質材表面からの音の放射に関し、基本的な概念をつかむために、最も簡単な 1 次元問題を取り上げ、放射特性の解析、及び、数値計算例を加えた議論を行なう。

2.3.1 半無限多孔質材からの音の放射

今、図 2.3.1 のように、 $z \leq 0$ の半無限領域に多孔質材があり、これが速度 U で一様に振動する場合の前方放射特性を考える。この時多孔質材中の音波に対しては、2.2.節での考察から、解として次式を得る。

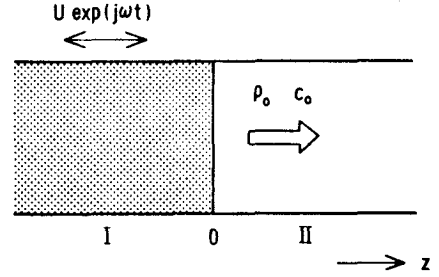


図 2.3.1 半無限多孔質材の表面からの音の放射

$$\left. \begin{aligned} p_I(z) &= j \rho^* \omega R_I \exp(j r z), \\ u_I(z) &= \frac{\sigma}{j \rho^* \omega} U - j r R_I \exp(j r z), \end{aligned} \right\} \quad (2.3.1)$$

ここに R_I は未定係数である。他方、 $z \geq 0$ の外部自由空間における解は次式で与えられる。

$$\left. \begin{aligned} p_{II}(z) &= j \rho_0 c_0 k A_{II} \exp(-j k z), \\ u_{II}(z) &= j k A_{II} \exp(-j k z), \end{aligned} \right\} \quad (2.3.2)$$

ここに k は自由空間での波数定数で $k = \omega / c_0$ 、 c_0 は自由空間での音速である。(2.3.1)、(2.3.2) 式を $z = 0$ での境界条件 (2.2.20)、(2.2.21) 式に入れて未定係数 R_I 、 A_{II} を求めれば、すべての音場が定まることになる。特に、多孔質材の直前に発生する粒子速度 $u_{II}(0)$ は次のようになる。

$$u_{II}(0) = \frac{\zeta}{\zeta + 1} D(\omega) \cdot U, \quad (2.3.3)$$

ここに ζ は多孔質材中の音波に対する特性音響インピーダンス密度であり、

$$\zeta = (\rho^* K^*)^{1/2} / \rho_0 c_0, \quad (2.3.4)$$

で与えられる。また係数 $D(\omega)$ は

$$D(\omega) = \frac{\sigma}{j \rho^* \omega} + (1 - H), \quad (2.3.5)$$

で定義される量である。この係数 $D(\omega)$ は、骨格が振動した場合に、それに伴って生ずる流体の振動を多孔質材の外部から観測した時の励起度を示すものであり、音の放射問題など、振動する多孔質材の動的音響特性を論ずる場合に重要な役割をはたすことになる係数である。

さて、今考えている音源に対する振幅放射効率 $\varepsilon(\omega)$ 、およびパワー放射効率 $E(\omega)$ を次式で定義する。

$$\varepsilon(\omega) = \frac{u_{II}(0)}{U} = \frac{\zeta}{\zeta+1} \cdot D(\omega) \quad , \quad (2.3.6)$$

$$E(\omega) = \left| \frac{u_{II}(\omega)}{U} \right|^2 = |\varepsilon(\omega)|^2 = \left| \frac{\zeta}{\zeta+1} \cdot D(\omega) \right|^2. \quad (2.3.7)$$

この $E(\omega)$ の周波数依存性などは、(2.3.7) 式の ζ, ρ^*, σ などに 2.2 節で与えたような関数形を代入して数値計算を行なえば得られるが、その前に、無次元周波数パラメーター μ ((2.2.4) 式参照) の大・小の極限での様子を定性的に調べておく。

i) $\mu \ll 1$ の時

この状態は、(2.2.4) 式から、非常に低周波の場合、あるいは多孔質材のセルサイズがきわめて小さい場合におこりうる。この時には、

$$\left. \begin{aligned} \sigma &= (S-1) j \rho_0 \omega + S \sigma_c(\omega) \simeq S \sigma_c(0) = \text{定数}, \\ \rho^* &= \frac{S}{H} \rho_c^* = \frac{S}{H} \rho_0 \left(1 + \frac{\sigma_c(\omega)}{j \omega \rho_0} \right) \simeq \frac{S}{H} \cdot \frac{\sigma_c(0)}{j \omega} \end{aligned} \right\} \quad (2.3.8)$$

から

$$D(\omega) \simeq H + (1-H) = 1 \quad , \quad (2.3.9)$$

を得る。さらに $\mu \ll 1$ のもとで $\zeta \propto \mu^{-1} \gg 1$ の性質を用いると、

$$E(\omega) \simeq 1 \quad , \quad (2.3.10)$$

を得る。すなわち、十分低周波の場合など、 $\mu \ll 1$ の時には、多孔質材直前の粒子速度は、骨格の振動速度とほぼ等しくなり、放射効率 $E(\omega)$ も 1 に

近くなる。

ii) $\mu \gg 1$ の時

この状態は非常に高周波の場合、あるいは、多孔質材のセルサイズがきわめて大きい場合におこりうる。この時には、

$$\rho^* \simeq \frac{S}{H} \rho_0, \quad \sigma_c \propto \omega^{1/2}, \quad \zeta \simeq \frac{\sqrt{S}}{H}, \quad (2.3.11)$$

の性質を用いると

$$D(\omega) \simeq \left\{ H \cdot \frac{S-1}{S} + (1-H) \right\}, \quad (2.3.12)$$

となる。高周波域で吸音率がほぼ1に近くなるような材料では、 $H \simeq 1$ 、 $S \simeq 1$ とみなしてよいと考えられ、このような場合には(2.3.12)式から $D(\omega) \simeq 0$ となり、放射効率 $E(\omega)$ も0に近づく。2.2節の終わりにも述べたように、このような材料の高周波域では、骨格が動いた時、それによって生ずる摩擦力よりも、静止していようとする流体の慣性力の方が大きくなり、その結果、流体の様な振動がほとんど励起されなくなるために、放射効率も小さくなったものと考えられる。ただし、構造因子 S が大きな材料では、粘性を介しての摩擦力以外に、骨格により直接動かされる成分が多くなると考えられ、このような材料では、高周波域になっても、放射効率 $E(\omega)$ の値はそれほど小さくならない。なお、このような材料では、吸音率自体も一般に小さいと考えられる。

次に数値計算例を示す。本論文では、特に断わらない限り、数値計算例における流体としては、1気圧、20°Cの空気を対象にする。

まず、図2.3.2には、構造因子 $S = 1.0$ とし、多孔率 H をパラメータとした時の垂直入射吸音率 $\alpha(\omega)$ と、パワー放射効率 $E(\omega)$ の周波数特性を示す。図の横軸は、無次元周波数パラメータ μ^2 ((2.2.4)式参照)である。また、

図 2.3.3 には、 $H=1.0$ とし、 S をパラメータとした時の $\alpha(\omega)$ 、 $E(\omega)$ の周波数特性を示す。図 2.3.2、図 2.3.3 から、大体の傾向としては、吸音率 α が大きくなると、放射効率 E は小さくなっていくといえる。

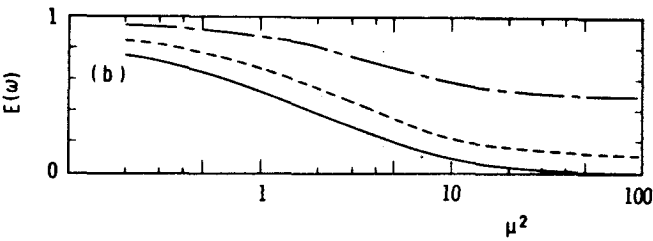
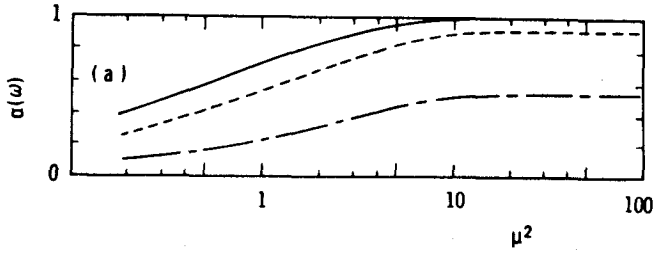


図 2.3.2 $\alpha(\omega)$ 、 $E(\omega)$ の周波数特性

$S = 1.0$,
 H
 — 1.0
 - - 0.6
 - · - 0.2

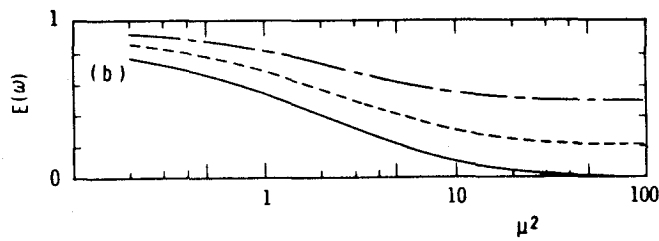
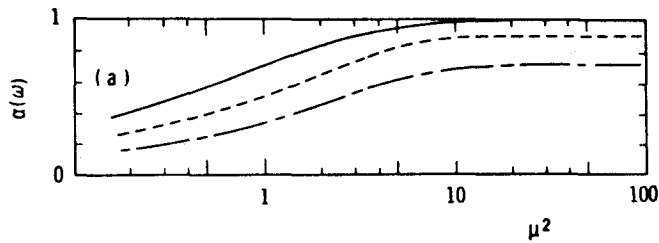


図 2.3.3 $\alpha(\omega)$ 、 $E(\omega)$ の周波数特性

$H = 1.0$,
 S
 — 1.0
 - - 3.0
 - · - 10.0

2.3.2 有限の厚さの多孔質材からの音の放射 (I)

前節では、基本的な場合のひとつ、半無限に多孔質材が存在する場合について考察したが、本節では、より実用的な例として、図 2.3.4 のように、剛体ピストンに厚さ L の多孔質材が取り付けられた時の放射問題について考察する。この時、多孔質材内部の音波に対する一般解は次式で与えられる。

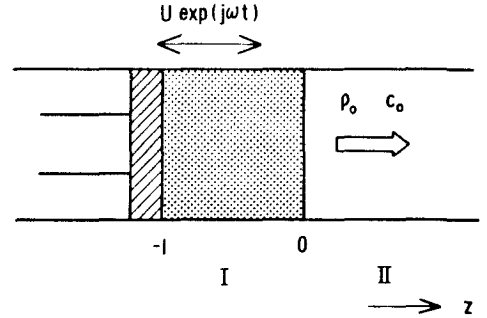


図 2.3.4 剛体ピストンに貼付された多孔質材からの音の放射

$$\begin{aligned} p_I(z) &= j\rho^*\omega \left\{ A_I \exp(-jrz) + R_I \exp(jrz) \right\}, \\ u_I(z) &= \frac{\sigma}{j\rho^*\omega} U + jr \left\{ A_I \exp(-jrz) - R_I \exp(jrz) \right\}. \end{aligned} \quad (2.3.13)$$

一方、 $z \geq 0$ の自由空間における解は (2.3.2) 式で与えられる。これらの式を、境界条件 (2.2.20) - (2.2.22) 式に代入して多孔質材直前の粒子速度 $u_{II}(0)$ を求めると、次式を得る。

$$\begin{aligned} u_{II}(0) &= \frac{1 + D(\omega) \cdot (\cos rL - 1)}{j \frac{1}{\epsilon} \sin rL + \cos rL} \cdot U \\ &= \epsilon \cdot U, \end{aligned} \quad (2.3.14)$$

ここで、2.3.1 節の (2.3.6) 式と同じ意味で、振幅放射効率 ϵ を定義した。パワー放射効率も、今の 1 次元問題では

$$E(\omega) = |\epsilon|^2, \quad (2.3.15)$$

で与えられる。

さて、ここで (2.3.14)、(2.3.15) 式における、 $u_{II}(0)$ 、 ϵ 、 E の、材料の厚さ L の大小の極限での様子を調べておく。

i) $|rL| \ll 1$ の時

この状態は、貼付した材料の厚さ L が、材料中の音波の（複素）波長に比べて十分小さい場合であり、具体的には、非常に低周波の場合や、きわめて薄い材料を貼付した時におこりうる。この時、(2.3.14) 式は

$$u_{\parallel}(0) \simeq \frac{1}{j \frac{rL}{\zeta} + 1} \cdot U \simeq U, \quad (2.3.16)$$

となり、放射効率 $E(\omega)$ は、あまり低下しない。

ii) $|\exp(jrL)| \gg 1$, または $|\exp(-jrL)| \ll 1$ の時

この状態は、厚さ L の距離を音波が伝搬した時、音波が十分減衰してしまうような状態を意味し、事実上、多重反射の影響は無視しうるような状態ともいえよう。このような時には (2.3.14) 式は、

$$u_{\parallel}(0) \simeq \frac{\zeta}{1 + \zeta} \cdot D(\omega) \cdot U, \quad (2.3.17)$$

となり、半無限の場合の式 (2.3.3) に近づく。さらに $D(\omega) \rightarrow 0$ となる場合には、放射効率 $E(\omega)$ が小さくなることが予想される。

次に数値計算例を示すが、本節では厚さを表わす量として、次に述べるような無次元パラメータを導入することにする。すなわち、厚さに比例する量 kL を書き換えると

$$kL = \frac{\omega}{c_0} L = \frac{L\nu}{a^2 c_0} \cdot \frac{a^2 \omega}{\nu} = \frac{L\nu}{a^2 c_0} \cdot \mu^2, \quad (2.3.18)$$

となるので (μ^2 は (2.2.4) 式参照), 多孔質材の厚さを表わす無次元パラメータとして

$$RE = \frac{\nu L}{a^2 c_0}, \quad (2.3.19)$$

を導入する。

図 2.3.5 には、多孔率 $H = 1.0$, 構造因子 $S = 1.0$ とし、厚さのみを変えた時の垂直入射吸音率 $\alpha(\omega)$, および、パワー放射効率 $E(\omega)$ の周波数特性

の計算例を示す。この図では、厚さが厚いほど吸音率は低周波から大きく、また放射効率 $E(\omega)$ は低周波から小さくなるという直観的にも予想された結果になっている。

図 2.3.6 には、 $H = 1.0$ 、 $RE = 0.01$ とし、構造因子 S だけを変えた時の計算値を示す。この計算例では、 $S = 1.0$ の時に比べ、 $S = 3.0$ の時は総体的に $E(\omega)$ の値は小さくなっている。ところが更に S を大きくし $S = 10.0$ とすると、再び $E(\omega)$ は大きくなっている。すなわち、この計算例からは、多孔質材の厚さ、多孔率を一定にした時に、ある帯域の $E(\omega)$ を小さくするには、 S の値に最適値が存在することが推測される。多孔質材の物質定数、どの程度制御しうるかには技術上の問題があるが、現実的な騒音対策問題として種々の制約条件のもとで放射効率 $E(\omega)$ を、ある帯域、あるいは全帯域にわたり小さくすることなどが考えられ、最適化の手法により、これら諸定数を、あるいは、材料の組み合わせを決定することは、応用的な意味で今後の課題と考えられる。

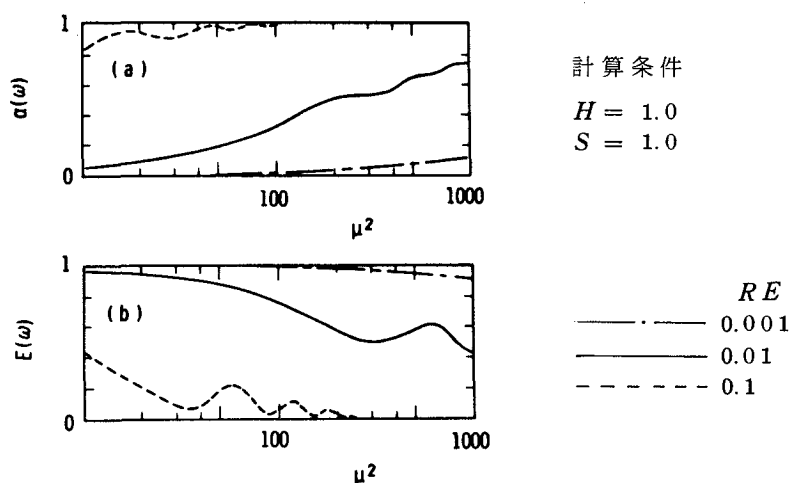


図 2.3.5 $\alpha(\omega)$ 、 $E(\omega)$ の周波数特性

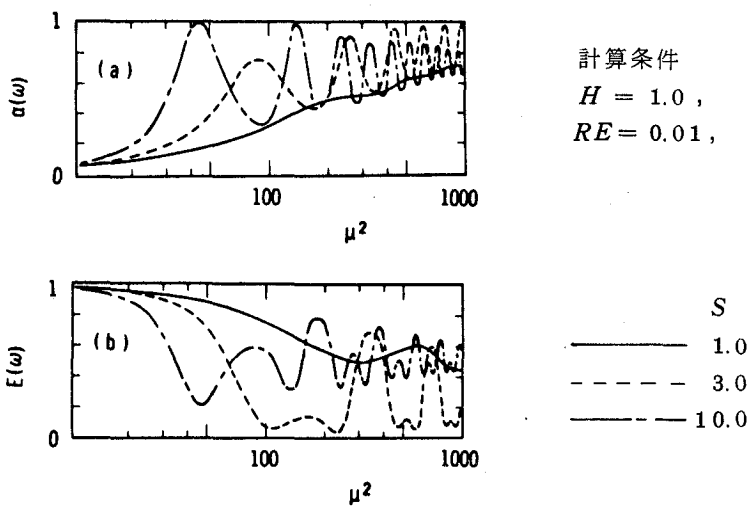


図 2.3.6 $\alpha(\omega)$, $E(\omega)$ の周波数特性

2.3.3 有限の厚さの多孔質材からの音の放射 (II)

次に図 2.3.7 に示すように厚さ L の多孔質材それ自身が振動する場合を考える。この時の材料の内外部の音場の一般解、および、境界条件は前述したことと同様にして与えられる。これらの式から、多孔質材直前の粒子速度 $u_{\text{III}}(0)$ を求めると次式のようにになる。

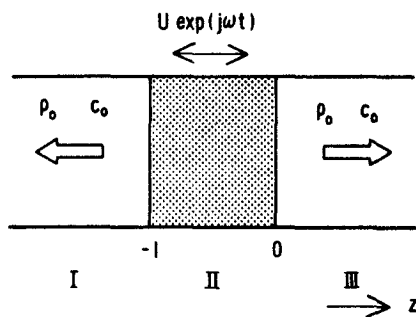


図 2.3.7 有限の厚みの多孔質材からの音の放射

$$u_{\text{III}}(0) = \frac{\zeta (\cos \gamma L + j \zeta \sin \gamma L - 1)}{(1 + \zeta^2) j \sin \gamma L + 2 \zeta \cos \gamma L} \cdot D(\omega) \cdot U \quad (2.3.20)$$

上式において

i) $|\exp(j\gamma L)| \gg 1$ の時

この時 $u_{\text{III}}(0)$ は,

$$u_{\text{III}}(0) \simeq \frac{\zeta}{\zeta + 1} \cdot D(\omega) \cdot U, \quad (2.3.21)$$

となり, 半無限の場合に近づく。

ii) $|\gamma L| \ll 1$ の時

この時 $u_{\text{III}}(0)$ は

$$\begin{aligned} u_{\text{III}}(0) &\simeq \frac{\zeta \cdot j\zeta\gamma L}{(1+\zeta^2)j\gamma L + 2\zeta} \cdot D \cdot U \\ &\simeq \frac{1}{2} j\zeta\gamma L \cdot D(\omega) \cdot U \\ &= \frac{1}{2} j\zeta\gamma L \left\{ \frac{\sigma}{j\rho^*\omega} + (1-H) \right\} \cdot U \\ &= \frac{\sigma L}{2\rho_0 c_0} \cdot U + \frac{j\zeta\gamma L}{2} (1-H) \cdot U, \quad (2.3.22) \end{aligned}$$

となる。特に, $H \simeq 1$ とみなせる場合には

$$u_{\text{III}}(0) \simeq \frac{\sigma L}{2\rho_0 c_0} \cdot U, \quad (2.3.23)$$

となり, 多孔質材前方に発生する音圧は, 結合係数 σ に比例することになる。

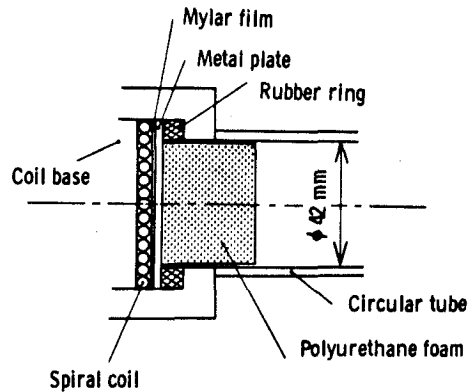
逆に, 十分薄いサンプルを振動させて, このような実験ができるならば,

$\omega \neq 0$ での $\sigma(\omega)$ を直接測定することも可能と考えられる。

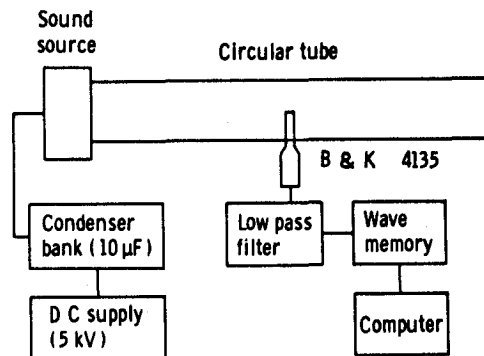
2.3.4 実験例

本節では, 前述した理論的考察に対する, ひとつの実験例として, 2.3.2 節に述べたような, 剛体ピストンに厚さ L の多孔質材が取り付けられた場合の放射効率を, 実験的に測定した結果について述べる。

実験に用いた音源は、図 2.3.8 (a)に示したような、内径 42mm の円形パイプの一端に取り付けられた電磁誘導型パルス音源である。音源の振動板は厚さ 2mm、直径 56mm のジュラルミン板で重量は約 14g である。一方、測定に用いた多孔質材は、各セル間の膜を除去したウレタンフォームであり、これを厚さ 30mm、直径 41mm、重量約 1g に、熱線にて切り取り、実験用サンプルとした。放射効率 $E(\omega)$ の実験による推定法として、ここでは、図 2.3.8(b)に示すような配置で、音源板に試料を貼付した場合と、貼付しない場合について、それぞれ数回づつパルス状放射音圧を測定し、それらのスペクトルの絶対値の平均値の 2 乗を比較することにより求めた。この時、試料を取り付けたことによる、音源板の機械インピーダンス



(a)



(b)

図 2.3.8 実験装置の略図

- (a) 音源部，
(b) 全体図。

スの変化（純機械的なものと、流体との相互作用によるものとの両方を含む）は無視した。結果を図 2.3.9(b)に示す。図には同時に、多孔質材が、試料を取り付ける前の音源板と同じ速度で剛体的に振動すると仮定した場合の理論値（2.3.2 節の結果）を参考のため点線で示した。ただし、計算に用いた物質定数のうち、多孔率 H と、平均セルサイズについてはカタログ値を用いた。

残りの定数である構造因子 S については、同じ材料の垂直入射吸音率を定在波法で測定し、 $S = 1.0$ と仮定して計算した吸音率と比較したところ、両者は比較的良く合っているということで（図 2.3.9(a)参照）、 $S = 1.0$ とした。

図 2.3.9 (b)の結果では、実測値にかなり変動がみられるので（この細かい変動は主に、音源自体の再現性や、試料の一部と管壁との接触などに起因するものと考えられる）、理論結果を完全に確認するまでには至っていないが、周波数を増すにつれて、放射効率 $E(\omega)$ が減少していくという傾向は得られたものと考えられる。

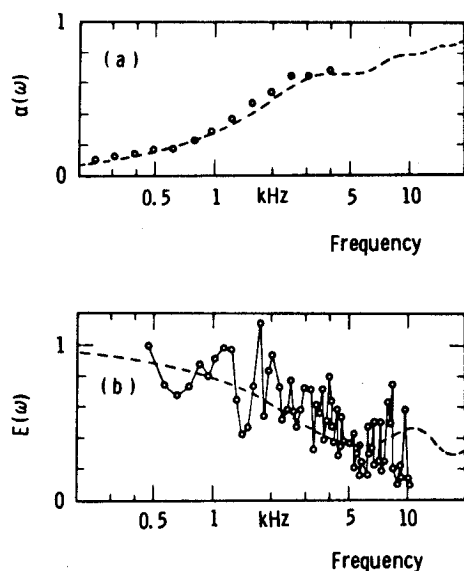


図 2.3.9 $\alpha(\omega)$, $E(\omega)$ の
測定値と計算値との比較
——○—— 測定値,
----- 計算値.

2. 4 弾性波を考慮に入れた場合の放射特性

前節までの考察においては、多孔質材は剛体的に振動するとして、多孔質材中に生じる弾性波の影響は無視する扱いをした。上記のように単純化したモデルは、振動面が剛壁でなく、多孔質性にかわったという条件のみが、音波の放射にどのように影響を与えるかを調べる上では、十分であると考えられる。しかし、材料の物質定数によっては、剛体振動モデルでは近似度が悪くなる可能性がある。そこで本節では、弾性波の存在をも許した場合に放射特性がどのように変わるかについて若干の考察を行なう。

弾性波の存在を許す場合には、流体音波と骨格中の弾性波との相互作用を考慮した運動方程式、圧縮の式を、流体音波に対しても、また弾性波に対しても導出しておかなくてはいけない。この点に関する理論的考察としては、

過去に多くの人が試みてはいるが、対象があまりにも複雑なため、今だに議論が続いており、²¹⁾⁻²⁹⁾ これといった決定的な理論はないといってもよいと考えられ、また、これから先にもおそらく決定的なものは、すぐには出ないと考えられる。逆に、既報の種々のモデルでは、主に垂直入射吸音率が計算されているが、大体の傾向はどのモデルでも実験と同じ傾向を示していることも事実である。

そこで本節では、やはり毛細管モデルを採用した議論を行なうことにする。毛細管モデルを用い、かつ弾性波の影響も考慮した考察としてはKosten 他が、²¹⁾ 式の導出過程をすべて省略した形で、運動方程式、圧縮の式を示しているが、後になって明らかな矛盾点も指摘されている。²⁵⁾ ここではKosten 他の扱いを幾分変更した扱いをすることにする。

2.4.1 基本方程式の導出^{30), 31)}

まず最初に、音波に対する圧縮の式を導出する。多孔質材中の流体、および骨格系に対する連続の式は次式で与えられる。流体に対しては

$$\frac{\partial (\rho H)}{\partial t} + \operatorname{div} (\rho H v) = 0, \quad (2.4.1)$$

ここに ρ は流体の密度、 H は多孔率、 v は ~~1本~~ の毛細管内の平均粒子速度である。また骨格に対しては

$$\frac{\partial (\rho_M (1-H))}{\partial t} + \operatorname{div} ((1-H) \rho_M U) = 0, \quad (2.4.2)$$

となる。ここに ρ_M は骨格材料自身の密度、 U は骨格の振動速度である。今は微小振幅音波を考えているので v 、 U は微小量であり、また ρ 、 ρ_M 、 H は

$$\left. \begin{aligned} \rho &= \rho_0 + \rho_1 (X, t), \\ \rho_M &= \rho_{M0} + \rho_{M1} (X, t), \\ H &= H_0 + h (X, t), \end{aligned} \right\} \quad (2.4.3)$$

のように静的な一定の項と微小変動項とに分けられる。以後は、この微小項に関しては1次の項までを考えていく。さらに仮定として、骨格材料自身の圧縮性は無視するという河島の提案を^{23), 24)}取り入れると(2.4.1), (2.4.2)式は、それぞれ

$$H_0 \frac{\partial \rho_1}{\partial t} + \rho_0 \frac{\partial h}{\partial t} + \rho_0 H_0 \operatorname{div} v = 0, \quad (2.4.4)$$

$$\begin{aligned} (1-H_0) \frac{\partial \rho_{M1}}{\partial t} - \rho_{M0} \frac{\partial h}{\partial t} + (1-H_0) \rho_{M0} \operatorname{div} U \\ \simeq -\rho_{M0} \frac{\partial h}{\partial t} + (1-H_0) \rho_{M0} \operatorname{div} U = 0, \end{aligned} \quad (2.4.5)$$

となる。したがって(2.4.5)式から

$$\frac{\partial h}{\partial t} = (1-H_0) \operatorname{div} U, \quad (2.4.6.)$$

を得、多孔率の変動は H_0 が1に近い時や、 $\operatorname{div} U \simeq 0$ の時には無視するという。さて、(2.4.4), (2.4.6)式から音波に対する連続の式は

$$H_0 \frac{\partial \rho_1}{\partial t} = -\rho_0 H_0 \operatorname{div} v - \rho_0 (1-H_0) \operatorname{div} U, \quad (2.4.7)$$

となる。さらに時間依存性を $\exp(j\omega t)$ とし(なお、以後の議論では、主に時間依存性が $\exp(j\omega t)$ の場合を考えるが、その時の複素振幅などは、前述した実振幅 p, u などと同じ記号を混用する)、また、この時の流体の体積弾性率として、毛細管モデルに対する(2.2.10)式の K_c^*, K^* を用いると、圧縮の式は

$$-j\omega p = K^* \operatorname{div} u + K^* (1-H_0) \operatorname{div} U, \quad (2.4.8)$$

となる。ただし p は音圧、 $u = H_0 v$ である。

次に、音波に対する運動方程式を考える。まず、剛体振動モデルにおける流体に対する運動方程式(2.2.6)式を単位体積あたりの式に直すと

$$j \rho_0 \omega \mathbf{u} = -\nabla (H_0 p) + \sigma (H_0 \mathbf{U} - \mathbf{u}), \quad (2.4.9)$$

となる。さらに、弾性振動を考慮に入れる時には、 $\mathbf{U}$ を空間変数 X の関数とするだけではなく、 H_0 を $H = H_0 + h$ に、また p もこれに静圧 P_0 を加えた $P = P_0 + p$ とするべきであろう。この時(2.4.9)式のかわりに次式が提案される。

$$j \rho_0 \omega \mathbf{u} = -\nabla (H P) + \sigma (H \mathbf{U} - \mathbf{u}) . \quad (2.4.10)$$

さらに1次の微少項まで残すと

$$j \rho_0 \omega \mathbf{u} = -H_0 \nabla p - P_0 \nabla h + \sigma (H_0 \mathbf{U} - \mathbf{u}), \quad (2.4.11)$$

となる。上式の右辺第2項の ∇h であるが、(2.4.6)式で $\partial/\partial t$ を $j\omega$ とすれば

$$h(X, \omega) = \frac{1}{j\omega} (1 - H_0) \operatorname{div} \mathbf{U} . \quad (2.4.12)$$

したがって(2.4.11), (2.4.12)式から、

$$j \rho_0 \omega \mathbf{u} = -H_0 \nabla p - \frac{P_0}{j\omega} \cdot (1 - H_0) \cdot \nabla (\operatorname{div} \mathbf{U}) + \sigma (H_0 \mathbf{U} - \mathbf{u}), \quad (2.4.13)$$

あるいは

$$j \rho^* \omega \mathbf{u} = -\nabla p - \frac{P_0}{j\omega} \left(\frac{1 - H_0}{H_0} \right) \nabla (\operatorname{div} \mathbf{U}) + \sigma \mathbf{U}, \quad (2.4.14)$$

を得る。一般の多孔質材料では H_0 が1に近いことが多いが、そのような場合には(2.4.13), (2.4.14)式は

$$j \rho_0 \omega \mathbf{u} = -H_0 \nabla p + \sigma (H_0 \mathbf{U} - \mathbf{u}), \quad (2.4.15)$$

$$j \rho^* \omega \mathbf{u} = -\nabla p + \sigma \mathbf{U}, \quad (2.4.16)$$

という、流体と骨格との相互作用としては係数 σ を介した摩擦力のみを含ん

だ式となる。あるいは H_0 が小さくても、後の章で考察するように $\text{div } U \simeq 0$ とみなせる場合にも音波に対する運動方程式は (2.4.15), (2.4.16) 式で与えられることになる。

ところで、(2.4.13), (2.4.14) 式で、 $\text{div } U \neq 0$ のもとで、 H_0 を小さくすると、右辺第 2 項の影響だけが著しく大きくなるが、この原因は実は (2.4.5) 式で、 $\rho_{M1} \simeq 0$ という近似を使ったところにある。この近似の成立範囲であるが、 H_0 が 1 に近くて、骨格がきわめて細い場合には、材料自身の密度をそれほど変えることなく、単に骨格が折れ曲がるだけで H の値を変えうるが、 $H_0 \ll 1$ の場合には、 $\text{div } U \neq 0$ で $\rho_{M1} \simeq 0$ という変形はおこりえないと考えられる。しかし $\text{div } U \simeq 0$ のもとでは、 $\rho_{M1} \simeq 0$ の変形は可能である。このようなことから、(2.4.13), (2.4.14) 式を導出したものの、これらの式は $\text{div } U \neq 0$ の時には、 $H_0 \simeq 1$ の場合に意味をもってくるといえ、また H_0 の値が任意の場合には $\text{div } U \simeq 0$ の時にのみ意味を持ってくるということになる。

したがって $H_0 \simeq 1$ の時、あるいは $\text{div } U \simeq 0$ とみなせる振動状態の時には、はじめから (2.4.15), (2.4.16) 式を使った方がよいといえ、この時には圧縮の式も

$$-j\omega p = K^* \text{div } u, \quad (2.4.17)$$

を用いるべきである。(幸いにして、多くの多孔質材料では、 $H_0 \simeq 1$ の条件が成り立っており、また成形多孔質板などでは必ずしも $H_0 \simeq 1$ ではないが、振動状態を考えると $\text{div } U \simeq 0$ とみなしてよいことが多い。)

次に骨格系の運動方程式であるが、今真空中での骨格の振動に対する運動方程式が、音響近似のもとでは、

$$j\omega\rho_s U_i = \sum_j \frac{\partial T_{ij}}{\partial x_j}, \quad (2.4.18)$$

で与えられるとする。ここに ρ_s は多孔質材の密度であり、 $\rho_s = (1 - H_0)\rho_{M0}$ で与えられる。また T_{ij} は真空中での角周波数 ω の微小振動に対応した、

(複素) 応力テンソル成分である。本論文では、線型振動の範囲での議論を行なうが、その場合には、(複素) 応力テンソル成分 T_{ij} は、(複素) 歪テンソル成分 e_{mn} を用いると

$$T_{ij} = \sum_{m,n} C_{ijmn} e_{mn}, \quad (2.4.19)$$

のように、 e_{mn} の線型結合で表わされる。ただし、 C_{ijmn} は動的弾性率であり、一般の粘弾性体の場合には、角周波数 ω に依存した複素数となる。

さて、このような多孔質材が流体中で微小振動をする場合を考える。この場合には、いくつかの留意点が出てくる。第1には、0でない静圧 P_0 の中に材料を浸すのであるから、振動が0の時の平衡点が移動することである。そこで、流体中での骨格の振動を議論する時には、この新しい平衡点のまわりの振動を考え、その振動速度を改めて U_i とおくことにする。第2の留意点としては、上述した平衡点の移動に加えて、主に流体や弾性体の熱伝導性などにより、動的な弾性率も、多少は変化するであろうことである。そこで、この新しい動的弾性率を、改めて C_{ijmn} とおき、また応力テンソル成分も T_{ij} とおく。第3の留意点としては、流体中で骨格が振動するのであるから、粘性などを介した摩擦力が相互作用の項として運動方程式にあらたに加わるべきであることである。ここでは、相互作用の項としては、(2.4.15) 式の右辺第2項の符号を変えたものを考えることにする。なお、上述した応力テンソル成分 T_{ij} は、一般には、多孔率の変化 h を含んだものであるが、これについては、流体について (2.4.16) 式以降で述べたような理由から、多孔率の変化は無視する立場をとる。このようなことから、流体中で振動する骨格に対する運動方程式としては、次式が提案される。

$$j\omega\rho_s U_i = \sum_j \frac{\partial T_{ij}}{\partial x_j} + \sigma(u_i - H_0 U_i) \quad (2.4.20)$$

ここで、今一度応力テンソル成分 T_{ij} について注意点を述べると、真空中の場合の (2.4.18) 式中の T_{ij} と、流体中の (2.4.20) 式中の T_{ij} とは、厳密には動的弾性率が異なるであろうから、2つの T_{ij} の式の形は違うものと

考えるべきである。しかし、本論文では、対象とする流体としては、主に1気圧の空気を考えるのであるが、そのような場合には、おそらく、動的弾性率の変化は微少であろうから、2つの T_{ij} の式の形は同じものとみなしても、大きな誤差は出ないであろうと考えられる。このようなことから、次節以降の議論においては、真空中と流体中とでの材料の弾性率の変化は一応無視することにする。

以上で、本論文の議論に必要な、弾性波を考慮に入れた場合の基礎方程式の導出を終えることにするが、ここで導出した式は、多孔率 $H \simeq H_0$ が1に近い場合か、骨格が振動した時の体積変化が無視しうる場合、すなわち $\text{div } \mathbf{U} \simeq 0$ の場合に有効と考えられる式である。多孔率にも、振動様式にも全く制限のない場合の基礎方程式の導出は今後の課題であろう。

2.4.2 1次元放射問題の解析例

本節では弾性波を考慮に入れた放射問題の最も基本的なモデルとして図2.4.1に示すような1次元の問題を取り上げ、骨格系の弾性波が、放射効率に与える影響について若干の考察を行なう。

まず、多孔質材中の音波に対する基礎式としては、多孔率 H が1に近い場合を考えると、(2.4.16), (2.4.17)式を採用することにする。これらの式の1次元形は

$$j \rho^* \omega u = - \frac{d p}{d z} + \sigma U, \quad (2.4.21)$$

$$- j \omega p = K^* \frac{d u}{d z}, \quad (2.4.22)$$

で与えられ、また骨格に対する運動方程式は

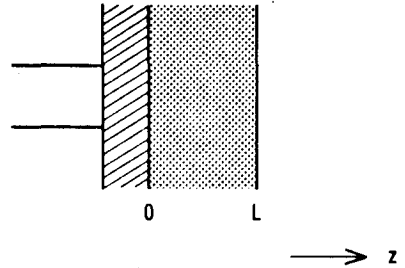


図2.4.1 1次元問題

$$j \omega \rho_s U = \frac{\kappa}{j \omega} \frac{d^2 U}{dz^2} + \sigma (u - HU), \quad (2.4.23)$$

で与えられる。ここに κ は骨格系の弾性率であるが、ここでは多孔質材は層状に無限に拡がっているとし、 κ の値としては、無限弾性体中の縦波に対応した弾性率を用いることにする。さらに骨格系は材料自身の内部損失を含むとし

$$\kappa = \kappa_0 (1 + j \eta), \quad (2.4.24)$$

とおけるとする。ただし η は損失係数であり、 κ_0 、 η は一般には ω の関数である。

次に境界条件であるが $z = 0$ のピストン面においては、

$$U(0) = U_0, \quad (2.4.25)$$

$$u(0) = HU_0, \quad (2.4.26)$$

が要求される。他方 $z = L$ の多孔質材の外部表面では

$$p^{out}(L) = p(L), \quad (2.4.27)$$

$$u^{out}(L) = u(L) + (1-H)U(L), \quad (2.4.28)$$

$$\frac{\kappa}{j \omega} \frac{dU(L)}{dz} \equiv \frac{\kappa}{j \omega} \cdot U'(L) = (1-H)p^{out}(L), \quad (2.4.29)$$

が要求される。ただし p^{out} 、 u^{out} は $z \geq L$ の領域での音波に対する音圧、粒子速度であり、特に $z \geq L$ の空間が自由空間とすると

$$p^{out}(L) = \rho_0 c_0 u^{out}(L), \quad (2.4.30)$$

が成り立つ。以後は条件 (2.4.25) - (2.4.30) 式のもとに (2.4.21) - (2.4.23) 式を結合して解いて $u^{out}(L)$ を求めればよい。この場合、音圧 p は (2.4.22) 式から

$$p(z) = - \frac{K^*}{j \omega} \frac{du}{dz} \equiv - \frac{K^*}{j \omega} u'(z), \quad (2.4.31)$$

として与えられるので、(2.4.21)–(2.4.23) 式で音圧 p を消去した基本式を求めると次式のようになる。

$$\frac{d^2 u}{dz^2} + \gamma^2 u = \frac{j\omega\sigma}{K^*} U, \quad (2.4.32)$$

$$\frac{d^2 U}{dz^2} + \Gamma^2 U - \frac{Hj\omega\sigma}{\kappa} U = -\frac{j\omega\sigma}{\kappa} u, \quad (2.4.33)$$

ただし

$$\gamma^2 = \frac{\rho^*}{K^*} \omega^2, \quad \Gamma^2 = \frac{\rho_s}{\kappa} \omega^2, \quad (2.4.34)$$

である。(2.4.32), (2.4.33) 式を、境界条件 (2.4.25)–(2.4.30) 式のもとで解く方法としては、(2.4.32), (2.4.33) 式で、 u か U のどちらかを消去して4次方程式を作り、音波と弾性波の結合を入れた伝搬定数を求めていくという、過去に吸音率を求める際に使われた方法があるが、²⁾ 今の場合 $z = 0, L$ での条件がどちらも0ではなく有限の値で与えられているために、かえって、未定係数を定める手順が複雑になることもあり、ここではフーリエ級数展開法³²⁾で解くことにする。

今の場合の境界条件は、 $z = 0$ では $u(0), U(0)$ が与えられ、 $z = L$ では $u(L), U(L), u'(L), U'(L)$ が混合した形で与えられている。しかし、幸いなことに (2.4.27)–(2.4.31) 式から、 $u'(L), U'(L)$ は $u(L), U(L)$ を用いて表わせること、さらに、今求めたいのは $u(L), U(L)$ であることを考慮に入れると、 $u(z), U(z)$ を展開する直交関数系 $\{\varphi_m\}$ としては

$$\varphi_m(0) = 0, \quad \varphi_m'(L) = 0, \quad (2.4.35)$$

を満たすものを選んだ方がよい。そこで、ここでは

$$\varphi_m(z) = \sin \frac{(2m+1)\pi}{2L} z \equiv \sin \lambda_m z, \quad (2.4.36)$$

と選ぶことにする。この時,

$$\int_0^L \varphi_m(z) \varphi_n(z) dz = \frac{L}{2} \delta_{mn}, \quad (2.4.37)$$

を考慮して, $u(z)$, $U(z)$ を次のように表わすことにする。

$$u(z) \sim \frac{2}{L} \sum_{m=0}^{\infty} A_m \varphi_m(z), \quad U(z) \sim \frac{2}{L} \sum_{m=0}^{\infty} B_m \varphi_m(z). \quad (2.4.38)$$

さて, $\varphi_m(z)$ の性質 (2.4.35)–(2.4.37) 式を用いて, まず (2.4.32) 式を係数 A_m , B_m の代数方程式に変換することを考える。まず,

$$\begin{aligned} \int_0^L u(z) \varphi_m(z) dz &= A_m, \quad \int_0^L U(z) \varphi_m(z) dz = B_m, \\ \int_0^L \left(\frac{d^2 u}{dz^2} \right) \cdot \varphi_m(z) dz &= u'(L) \cdot (-1)^m + \lambda_m u(0) - \lambda_m^2 A_m, \end{aligned}$$

より, (2.4.32) 式は

$$u'(L) \cdot (-1)^m + \lambda_m u(0) + (\gamma^2 - \lambda_m^2) A_m = \frac{j \omega \sigma}{K^*} \cdot B_m, \quad (2.4.39)$$

となる。同様にして (2.4.33) 式は,

$$\begin{aligned} U'(L) \cdot (-1)^m + \lambda_m U(0) + (\Gamma^2 - \lambda_m^2) B_m - \frac{H j \omega \sigma}{\kappa} B_m = \\ - \frac{j \omega \sigma}{\kappa} A_m, \end{aligned} \quad (2.4.40)$$

となる。あるいは, A_m , B_m を未知数とする連立方程式とみると,

$$W_m \begin{pmatrix} A_m \\ B_m \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} u'(L) \cdot (-1)^m + \lambda_m \cdot u(0) \\ U'(L) \cdot (-1)^m + \lambda_m \cdot U(0) \end{pmatrix}, \quad (2.4.41)$$

となる。ただし

$$W_m = \begin{pmatrix} (\gamma^2 - \lambda_m^2), & - \frac{j \omega \sigma}{K^*} \\ \frac{j \omega \sigma}{\kappa}, & \{ (\Gamma^2 - \lambda_m^2) - \frac{H j \omega \sigma}{\kappa} \} \end{pmatrix}, \quad (2.4.42)$$

である。(2.4.41) 式で $u(0)$, $U(0)$ は (2.4.25), (2.4.26) 式で与えられた定数である。他方 $u'(L)$, $U'(L)$ は (2.4.27)–(2.4.31) 式から, $u(L)$, $U(L)$ を用いて

$$u'(L) = - \frac{j\omega}{K^*} \rho_0 c_0 \{ u(L) + (1-H) U(L) \}, \quad (2.4.43)$$

$$U'(L) = \frac{(1-H) j\omega \rho_0 c_0}{\kappa} \{ u(L) + (1-H) U(L) \}, \quad (2.4.44)$$

と表わせる。ところで我々が今求めたいのは $\{ u(L) + (1-H) U(L) \}$ あるいはこれを U_0 で割った量である。そこで

$$\varepsilon = \frac{1}{U_0} \{ u(L) + (1-H) U(L) \}, \quad (2.4.45)$$

とおき, かつ

$$(A_m/U_0) = a_m^1 \varepsilon + a_m^2, \quad (B_m/U_0) = b_m^1 \varepsilon + b_m^2, \quad (2.4.46)$$

とおくと (2.4.41) 式は

$$W_m \begin{pmatrix} a_m^1 \\ b_m^1 \end{pmatrix} \varepsilon + W_m \begin{pmatrix} a_m^2 \\ b_m^2 \end{pmatrix} = - (-1)^m \varepsilon \cdot \begin{pmatrix} E \\ F \end{pmatrix} - \lambda_m \begin{pmatrix} H \\ 1 \end{pmatrix}, \quad (2.4.47)$$

となる。ここに

$$E = - \frac{j\omega \rho_0 c_0}{K^*}, \quad F = \frac{(1-H) j\omega \rho_0 c_0}{\kappa}, \quad (2.4.48)$$

である。(2.4.47) 式は, 係数 $a_m^1 \sim b_m^2$ が,

$$W_m \begin{pmatrix} a_m^1 \\ b_m^1 \end{pmatrix} = - (-1)^m \begin{pmatrix} E \\ F \end{pmatrix}, \quad W_m \begin{pmatrix} a_m^2 \\ b_m^2 \end{pmatrix} = - \lambda_m \begin{pmatrix} H \\ 1 \end{pmatrix}, \quad (2.4.49)$$

を満たせば, 同時に成り立つといえる。

ところで (2.4.45) 式で定義した ε は (2.4.38), (2.4.46) 式から

$$\begin{aligned}
\varepsilon &= \frac{1}{U_0} \{ u(L) + (1-H) U(L) \} \\
&= \frac{1}{U_0} \left\{ \frac{2}{L} \sum_{m=0}^{\infty} A_m (-1)^m + (1-H) \sum_{m=0}^{\infty} B_m (-1)^m \right\} \\
&= \frac{2}{L} \left\{ \sum_{m=0}^{\infty} (a_m^1 \varepsilon + a_m^2) (-1)^m + (1-H) \sum_{m=0}^{\infty} (b_m^1 \varepsilon + b_m^2) \right. \\
&\quad \left. \cdot (-1)^m \right\}, \tag{2.4.50}
\end{aligned}$$

となる。従って、(2.4.49)式を解いて $a_m^1 \sim b_m^2$ が求まったとすれば、 ε は

$$\begin{aligned}
&\left\{ 1 - \frac{2}{L} \sum_{m=0}^{\infty} (a_m^1 + (1-H) b_m^1) \cdot (-1)^m \right\} \varepsilon \\
&= \frac{2}{L} \sum_{m=0}^{\infty} (a_m^2 + (1-H) b_m^2) \cdot (-1)^m, \tag{2.4.51}
\end{aligned}$$

の解として与えられることになる。これで、弾性波の影響を入れた時の振幅放射効率 ε が定まったわけである。特別の場合として、骨格系の弾性率 $|\kappa|$ が非常に大きい場合には、(2.4.51)式から得られる ε の値は

$$\lim_{|\kappa| \rightarrow \infty} \varepsilon = \frac{1 + D (\cos rL - 1)}{\left(\frac{j}{\zeta}\right) \sin rL + \cos rL}, \tag{2.4.52}$$

に収束することは容易に示される。ただし

$$D = \frac{\sigma}{j \rho^* \omega} + (1-H), \quad \zeta = (\rho^* K^*)^{1/2} / \rho_0 c_0, \tag{2.4.53}$$

である。(2.4.52)式は、多孔質材の振動様式を、はじめから剛体振動と仮定して得られた放射効率の式(2.3.14)式に一致している。

なお、解析の過程は省略するが、同じ配置の、静止壁に貼付された多孔質材の垂直入射吸音率も、ここで述べたことと同様にして求めうることはもちろんである。

2.4.3 数値計算例

本節では、2.4.2節の解析をもとに数値計算例を示し、放射効率におよぼす弾性波の影響について考察する。

図2.4.2には、多孔率 $H = 1.0$ ，構造因子 $S = 1.0$ ，毛細管径 $2a = 0.4$ mm，厚さ $L = 5.0$ cm，骨格の密度 $\rho_s = 0.01$ g/cm³，損失係数 $\eta = 0.1$ とし、弾性率 κ_0 を変えた時の、パワー放射効率 $E(\omega) = |\epsilon(\omega)|^2$ を数値計算したものを示す。なお、2.4.2節でも述べたように κ_0 ， η は一般に角周波数 ω の関数であるが、多くの材料ではその変化は比較的小さいので、ここで図示した周波数範囲では一定とみなす扱いをした。図には同時に、同じ H ， S ， $2a$ ， L の値を有する、剛体振動モデル(2.3.2節の結果)も示す。

この数値計算例から、剛体振動モデルは、直観的にも予想されたように、物質定数と厚さで定まるある周波数（おおまかには、弾性波の波長の4分の1が厚さ L に一致する周波数）以下であれば、良い近似になっていることがわかる。この特定の周波数（以後、最低共振周波数と呼ぶ）以上では、剛体

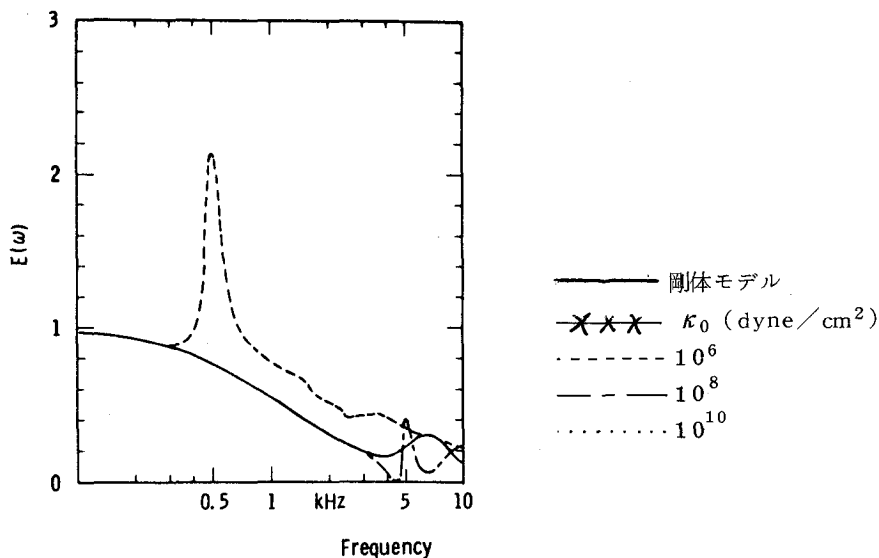


図2.4.2 放射効率に与える弾性波の影響

振動モデルの近似度は悪くなるとみなさなければならない。図は省略するが、比較的広い周波数範囲（20 Hz ～ 20 kHz）での $E(\omega)$ の値を、典型的と考えられるいくつかの例（ $\rho_s = 0.01 \text{ g/cm}^3$, $\kappa_0 = 10^5 \sim 10^{10} \text{ dyne/cm}^2$, $\eta = 0.01 \sim 0.4$, $H, S, 2a$ などは図 2.4.2 と同じ）について数値計算を試みた結果をまとめると以下のものであった。

i) 最低共振周波数以下では、剛体振動モデルは良い近似になっている。他方、 $H \simeq 1$, $S \simeq 1$ の材料の場合、非常に高い周波数域においては、弾性波を考慮に入れた時の $E(\omega)$ の値は、再び、剛体振動モデルの $E(\omega)$ の値に漸近する。この高周波域の結果は、流体と骨格との結合力よりも、流体や弾性体の慣性力の方が大きくなり、流体と骨格との結合がほぼ解除されたために生じた現象と解釈される。この場合の放射効率の低下は、主に音波が多孔質材中を伝搬した際にうける減衰に起因したものであると考えられる。数式的には (2.4.21), (2.4.23) 式において、 $|\sigma / j \rho^* \omega|$, $|\sigma / j \rho_s \omega|$ を共に 0 に近づければ、音波と弾性波に対する運動方程式が互いに独立したものになることから容易に説明しうる。

さて、弾性波の最低共振周波数以上では、一般には、弾性波を考慮に入れた時の $E(\omega)$ の値と、剛体振動モデルの $E(\omega)$ の値とは差が出てくるわけであるが、この差の現われ方は、損失係数の値にも依存してくる。この点についてまとめると以下のようになる。

ii) 比較的損失係数の小さい場合

この場合、最低共振周波数以上では、弾性波を考慮に入れた時の $E(\omega)$ の値は、剛体振動モデルの $E(\omega)$ の値からはずれてくる。この差異は、低次の共振周波数付近で特に著しく、多くは、大きなピークとなって現われてくる。ただし、図 2.4.2 の $\kappa_0 = 10^8 \text{ dyne/cm}^2$ の場合のように、比較的巾の広いディップを伴うために、全体としての $E(\omega)$ の値が、剛体振動モデルの $E(\omega)$ の値よりも小さめに現われることもある。

iii) 比較的損失係数の大きい場合

この場合にも、最低共振周波数以下では、2つのモデルに対する $E(\omega)$ の値は近いものになり、それ以上の周波数域では2つのモデルに対する $E(\omega)$ の値に差が出てくるのであるが、ただ、ii)の場合に現われたピーク、ディップは、次第に目立たなくなってくる。大体の傾向としては、弾性波を考慮に入れた時の $E(\omega)$ の値は、最低共振周波数以上では、剛体振動モデルの $E(\omega)$ の値よりも、多くは全般的に大きめの、比較的なめらかな曲線を描く。ただし、物質定数によっては、剛体振動モデルの $E(\omega)$ よりも小さめのなめらかな曲線を描くこともある。

以上、図2.4.2の数値計算例や、その後の考察からもあきらかなように、剛体振動モデルは、多孔質材の骨格の密度、弾性定数、厚さで定まる最低共振周波数以下であれば、かなり良い近似になっているといえる。これは、一樣振動という状態が、弾性波の波長が、層の厚さに比べ十分大きい場合に近似的に達せられる状態であることを考えれば、当然の結果ともいえよう。

弾性波の最低共振周波数以上、すなわち、層の厚さ内での弾性体の圧縮性が無視できなくなる場合には、2.4.2節で与えたような解析例に基づいた数値計算をしなくてはならない。なお、この場合に注意しておきたいことは、外部空間に放射される音波の振幅と、弾性体の表面での振動振幅は、必ずしも対応しないという点である。これは、我々が外部空間で放射波として観測する波動は、ピストン音源から放射され、多孔質材中を多重反射をしながら伝搬してきた波動と、骨格と流体との相互作用に起因した波動との和で与えられるということによる。したがって、材料表面での2種の波動の干渉効果いかんによっては、表面近傍の骨格の方は、かなりの振幅で振動しているにもかかわらず、放射音波の振幅は、それほど大きくならないといったこともありうる。このように、弾性波に対する最低共振周波数以上の、音波の放射特性は、きわめて複雑になるが、これは問題の性格上、致しかたのないことか

もしれない。

次に参考のために、図 2.4.3 には、図 2.4.2 の場合と同じ物質定数を有する多孔質材が、剛壁に貼付された時の、垂直入射吸音率 $\alpha(\omega)$ の計算値を示す。

この結果からもわかるように、吸音率に対しては、弾性波の影響は無視しえるくらいに小さいといえる。多孔質材中の弾性波と流体との相互作用に関しては、過去に若干の基本的な考察がなされているにもかかわらず、その後、

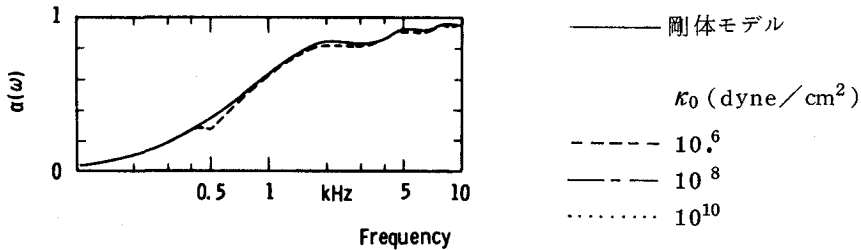


図 2.4.3 吸音率に与える弾性波の影響

あまり発展した議論は、なされなかった。その事情のひとつとして、従来、多孔質材といえば、吸音率のみを問題とし、この吸音率自体は、多孔質材が静止していると仮定した解析で十分説明しえた、³³⁾ ということも挙げられるであろう。

2.5 結 言

本章では、面音源の音源面が、剛壁面から多孔質性の面が変わった時の、放射特性の変化に関する基本的な考察を試みた。解析の基本方針として、まず、振動する多孔質材中の音波の挙動の検討を行ない、さらに、振動する多孔質材内部、及び、音波が放射される外部空間を合わせた全領域での境界値問題を解くという立場から、この放射問題を検討した。

本章の前半においては、多孔質材が空間的に一様に振動するというモデルについて考察を行なった。まず、一様に振動する多孔質材中の音波に対する、運動方程式、圧縮の式を導出し、また、その解を求め、解の挙動に関し、一般的な考察を行なった。その結果を要約すると、以下のようになる。

i) 一様な振動をする多孔質材中の音波の粒子速度は2つの成分から構成される。ひとつは、斉次方程式の一般解である波動を表わす項、今ひとつは、非斉次方程式の特解である、流体の一様振動を表わす項である。

ii) 音圧は、前者の波動項に直接結びつけられる。

iii) 後者の流体の一様振動は、一様に振動する骨格との相互作用の結果生じたものである。その励起度は、流体と骨格との結合係数と、流体の等価慣性係数との比で定まり、物質定数と周波数とのかねあいによっては、たとえ骨格が振動しても、流体の振動はほとんど励起されないようなこともおこりうる。

さらに、これらの基本的考察を基礎にして、1次元の放射問題を具体的に解析し、数値計算例を示すことにより、多孔質性の音源面からの音の放射に関し、基本的な考察を行なった。その結果として、放射効率、一般に多孔質材が静止している状態での吸音率が大きくなるに従い、小さくなる傾向にあることなどの結論を得た。

本章の後半では、多孔質材中に弾性波の存在を考慮に入れた場合の考察を行なった。最初に、音波、弾性波に対する運動方程式、圧縮の式などの基本方程式の導出を行なった。弾性波を考慮に入れた場合にも、音波に対する解が、斉次解と非斉次解との和で与えられるところまでは、前半の剛体振動モデルと同じである。しかし、非斉次解は、もはや簡単な形では得られず、また音圧も、骨格の運動に密接に結びついてくることになる。

このような一般的な議論の後、再び、1次元の放射問題を考え、解析例、

数値計算例を与えることにより，放射特性に与える弾性波の影響，特に，前半で試みた剛体振動モデルの適用限界について考察した。その結果は，直観的にも予想されたように，材料の密度，弾性率，厚さでほぼ定まる周波数以下であれば，剛体振動モデルは良い近似になっていることを示している。

以上に述べたように，本章では，1次元の放射問題を設定し，その解析に必要な基本方程式の導出と解の挙動の検討，さらに，それらの一応用ともいえる，放射特性の考察を行なった。この時に導出した運動方程式などの基本方程式は，次章以降の議論においても出発点となる式である。

なお，本章の前半で与えた剛体振動モデルは，音波に対する解が容易に求められ，その物理的意味もきわめてわかりやすいものが与えられる反面，後半で述べたように，適用限界を有している。市販の材料でも軽くて硬いものに対しては，かなり広い周波数範囲で有効であろうが，柔らかい材料については，中高周波域では近似度が悪くなる。こういった意味で，剛体振動モデルというのは，かなり思い切ったモデルではあるが，音源面が剛壁から多孔質壁に変わった時に，放射特性はどう変わるかという根本的な問に答えるモデルとしては，妥当な基本的モデルといってもよいであろう。

第 3 章 多孔質層を貼付した平面壁からの音の放射³⁷⁾

3. 1 緒 言

本章では、前章の 1 次元放射問題を一般化したものとして、非剛的な平面壁の一部、あるいは、全面が振動した場合の放射問題について、理論的考察を試みる。このような、音の放射に対する壁面の非剛性の影響に関連した考察としては、非剛的なバッフル面内の剛体ピストン音源からの音の放射^{34)–36)}、音源面も、残りのバッフル面も非剛的な場合の放射問題^{17), 18)} などに関し、若干の報告例がある。本章では、この後者の問題について考察を行なう。この後者の問題に関した、現存する理論としては、筆者の知る限りにおいて、Morse and Ingard によるものが唯一の理論であろう。^{17), 18)} しかし彼等の扱いは、壁面の非剛性を表わすものとして、ローカルリアクションを仮定し、また、壁面の振動部の性質を表わすものとして“*driving velocity*” という概念を導入し、結局問題を、外部空間だけで境界値問題にすりかえたものといえる。ローカルリアクションの仮定自身はある条件のもとでは許されるものではあるが、“*driving velocity*” という概念については、それがどのような物理的根拠のもとに導入されたのか、また、定量的には、どのような式で表わされるのかについては、いっさいの議論がなされていない。このようなことから、結局、彼等の扱いでは、放射音場の定量的な評価は不可能なままに終わっている。このような壁面からの放射特性を定量的に論ずるには、やはり、音源や壁の構造が反映されるような取り扱いをする必要があるものと考えられる。

そこで筆者は、このような壁面の理論モデルとして、平面壁に、一定の厚さの多孔質材を貼付した壁を考え、この壁の一部、あるいは全面が振動した場合の放射音場の解析を試みることにする。³⁷⁾ ここでは、振動する多孔質層内部、及び、音が放射される外部空間を合わせた全空間での境界値問題とし

て、この放射問題をとらえていく。最後に、我々の結果と、Morse and Ingard の結果との比較をし、両者の間に対応関係があるかどうか、もしあるならば、どのような条件のもとに対応がとれるか、といった点について言及する。

3. 2 音波に対する基礎方程式の導出

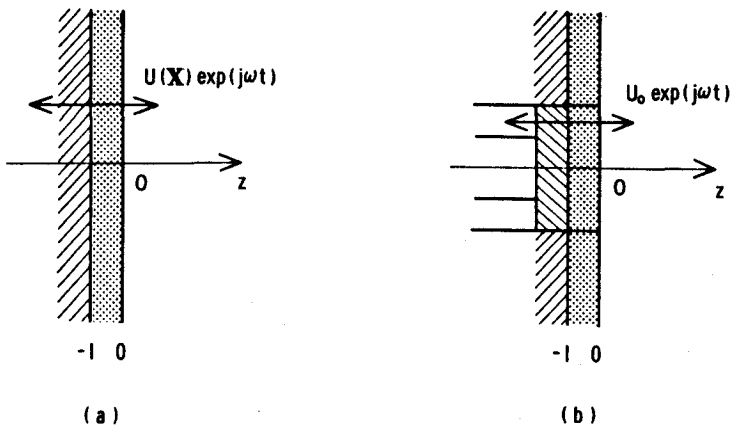


図 3.2.1 多孔質層を貼付した平面壁からの音の放射

- (a) 連続的な振動分布
- (b) ピストン音源の場合

本章で考察する音源の様子を図 3.2.1 に示した。まず、多孔質材中の音波について考える。振動する多孔質材中の音波の挙動に関する一般的な議論は、前章において与えておいたが、本章では、さらに、次のような仮定を導入して議論を進めていく。

(仮定 1) 貼付した多孔質材の骨格の振動速度の法線成分の厚み方向の変動は無視しうるとする。すなわち、骨格の法線速度成分は、壁の振動速度に等しいものとする。

(仮定 2) 多孔質材中の音波に対する、多孔質材の体積変化の影響は無視

しうるものとする。

上述した仮定のうち、(仮定1)については、2.4節で考察したように、実在の材料によっては適用限界が存在する。しかし、壁が剛壁から多孔質壁に変わった時に、放射特性はどのように変わるかといった根本的な問に答えるための解析モデルとしては妥当性を有する基本的なモデルと考えられる。また、(仮定2)についてであるが、図3.2.1(b)のようにピストンの外周にそって切ってある多孔質材が剛体的に振動する場合には、問題なく成立する仮定であろうし、図3.2.1(a)のような、連続分布の時にも、層の厚さが、振動パターンの波長に比べ十分薄ければ、近似的に成りたつものと考えられる。

さて、今、壁の振動速度を $U(X)$ 、骨格の振動速度を $U(X, z)$ 、多孔質材内部の音波の音圧を $p^{in}(X, z)$ 、粒子速度を $u^{in}(X, z)$ とする。ただし、 X は z = 一定の面上での位置ベクトルを表わすものとし、時間因子 $\exp(j\omega t)$ は省略した。この時、(2.4.14)、(2.4.8)式に、(仮定2)、すなわち $\text{div } U \simeq 0$ を考慮に入れると、流体に対する運動方程式、圧縮の式は次式で与えられる。

$$j\rho^*\omega u^{in} = -\nabla p^{in} + \sigma U, \quad (3.2.1)$$

$$-j\omega p^{in} = K^* \text{div } u^{in}, \quad (3.2.2)$$

ただし、 ρ^* 、 K^* 、 σ などの定義は前章と同様である。今、 p^{in} 、 u^{in} に対する解を求めるために、(3.2.1)式の rot をとると

$$j\rho^*\omega \text{rot } u^{in} = \sigma \text{rot } U, \quad (3.2.3)$$

を得る。ここで、公式

$$\text{rot} \cdot (\text{grad } p) = 0, \quad (3.2.4)$$

を用いた。(3.2.3)式を積分すると

$$u^{in} = \frac{\sigma}{j\rho^*\omega} U - \nabla \phi_1, \quad (3.2.5)$$

を得る。ここに ϕ_1 は任意のスカラーポテンシャルである。 u^{in} を2つに分け

$$u^{in} = u_s + u_d, \quad u_s = \frac{\sigma}{j\rho^*\omega} U, \quad u_d = -\nabla\phi_1, \quad (3.2.6)$$

とし、(3.2.6) 式を (3.2.1), (3.2.2) 式に入れて $\text{div} U \simeq 0$ の性質を使うと新しい運動方程式、圧縮の式として

$$j\rho^*\omega u_d = -j\rho^*\omega \nabla\phi_1 = -\nabla p^{in}, \quad (3.2.7)$$

$$-j\omega p^{in} = K^* \text{div} u_d = -K^* \nabla^2 \phi_1, \quad (3.2.8)$$

を得る。上式から、音圧 p^{in} は ϕ_1 を用いて

$$p^{in} = j\rho^*\omega \phi_1, \quad (3.2.9)$$

と表わせる。ただし任意の定数項は音波が存在しない時に $\phi_1 = 0$, $p^{in} = 0$ として、0 としてある。また (3.2.7) - (3.2.9) 式から、 ϕ_1 のみたすべき方程式として

$$(\nabla^2 + \gamma^2) \phi_1 = 0, \quad \gamma^2 = \omega^2 \frac{\rho^*}{K^*}, \quad (3.2.10)$$

を得る。結局、多孔質材の骨格の振動状態に、任意性を与えるにしても、 $\text{div} U \simeq 0$ の条件が成りたつ時には、内部の流体音波に対する一般解は、多孔質材が剛体的に振動するとした時の解の形と同じ形の次式で与えられることになる。

$$p^{in} = j\rho^*\omega \phi_1 = j\rho_0 c_0 \zeta \gamma \phi_1, \quad (3.2.11)$$

$$u^{in} = \frac{\sigma}{j\rho^*\omega} U - \nabla\phi_1. \quad (3.2.12)$$

さて、我々の最終的な目的は、多孔質材中の音場よりも、多孔質材の外部の音場を求めることにある。このような時には p^{in} , u^{in} よりも、次式で定義される p^{out} , u^{out} を用いた方が便利である。

$$p^{out} = p^{in} = j \rho^* \omega \phi_1, \quad (3.2.13)$$

$$\begin{aligned} u^{out} &= u^{in} + (1-H) U = \left(\frac{\sigma}{j \rho^* \omega} + 1 - H \right) U - \nabla \phi_1 \\ &\equiv D(\omega) \cdot U - \nabla \phi_1. \end{aligned} \quad (3.2.14)$$

以後、本章では指標 *out* を省略することにする。この新しい物理量 p, u に対する、図 3.2.1 での $z = -\ell$, $z = 0$ での境界条件は、(2.2.20)–(2.2.22), (3.2.13), (3.2.14) 式から、 $z = -\ell$ では、粒子速度の z 成分 $u_z(X, -\ell)$ に対し

$$u_z(X, -\ell) = U(X), \quad (3.2.15)$$

で与えられ、また $z = 0$ では、 $p, u_z(X, 0)$ が外部音場の音圧、粒子速度の z 成分にそれぞれ等しいとして与えられる。

なお、 $z \geq 0$ の外部音場の音圧、粒子速度は速度ポテンシャル $\phi(X, z)$ を用いて、

$$p = j \rho_0 \omega \phi = j \rho_0 c_0 k \phi, \quad (3.2.16)$$

$$u = -\nabla \phi, \quad (3.2.17)$$

で与えられるものとし、 ϕ は

$$(\nabla^2 + k^2) \phi = 0, \quad (3.2.18)$$

を満たすものとする。ただし、 ρ_0 は流体の静止密度、 c_0 は自由空間中での音速、 $k = \omega / c_0$ である。

3. 3 音場のスペクトル表示

今の問題においては、考えている領域は z 座標以外の座標に関しては無限大に広がっている領域であり、また境界条件はすべて $z = \text{一定}$ の面上でのみ与えられている。このような場合には p, u_z, U などの物理量を、 z 以外の空間変数に関して 2 次元フーリエ変換をほどこし、そのスペクトル間で話を進めた方が便利である。³⁸⁾

そこで、まず多孔質材中の音場をスペクトル表示することを考える。今、ポテンシャル $\phi_1(X, z)$ のフーリエ変換、逆変換を次式で定義する。

$$\phi_1(K, z) = \mathcal{F}[\phi_1] = \int \phi_1(X, z) \exp(jK \cdot X) dX, \quad (3.3.1)$$

$$\phi_1(X, z) = \mathcal{F}^{-1}[\phi_1] = \frac{1}{(2\pi)^2} \int \phi_1(K, z) \exp(-jK \cdot X) dK, \quad (3.3.2)$$

ここに K は空間周波数ベクトルであり、ここでは2次元積分を (3.3.1), (3.3.2) 式のように略記することにする。このスペクトル $\phi_1(K, z)$ を用いると、(3.2.13), (3.2.14) 式から、音圧 p , 粒子速度の z 成分 u_z のスペクトルは次式のように表わされる。

$$\mathcal{P}(K, z) = \mathcal{F}[p] = j\rho^*\omega \phi_1(K, z), \quad (3.3.3)$$

$$u_z(K, z) = \mathcal{F}[u_z] = D \cdot V(K) - \frac{d}{dz} \phi_1(K, z), \quad (3.3.4)$$

ここに $V(K)$ は、壁の振動速度 $U(X)$ のスペクトルである。なお、ここで (仮定1), すなわち $U_z(X, z) \simeq U(X)$ を用いた。ところで、 $\phi_1(X, z)$ は、(3.2.10) 式を満たすのであるから、そのスペクトル $\phi_1(K, z)$ は次式を満たす必要がある。

$$\frac{d^2}{dz^2} \phi_1(K, z) + \Gamma_z^2 \phi_1(K, z) = 0, \quad (3.3.5)$$

ここに

$$\Gamma_z^2 = r^2 - K \cdot K. \quad (3.3.6)$$

(3.3.5) 式の一般解は容易に得られ

$$\phi_1(K, z) = A(K) \exp(-j\Gamma_z z) + R(K) \exp(j\Gamma_z z), \quad (3.3.7)$$

となる。式 (3.3.7) を式 (3.3.3), (3.3.4) に入れ、 $z = -\ell, 0$ での $\mathcal{P}(K, z)$, $u_z(K, z)$ の関係を求めると、次のようになる。

$$\begin{pmatrix} \mathcal{D}(K, -\ell) \\ \mathcal{U}_z(K, -\ell) \end{pmatrix} = K \begin{pmatrix} \mathcal{D}(K, 0) \\ \mathcal{U}_z(K, 0) \end{pmatrix} + (\mathcal{E} - K) \begin{pmatrix} 0 \\ D \cdot V(K) \end{pmatrix}, \quad (3.3.8)$$

ここに $\mathcal{E}$ は単位行列, K は次式で定義される特性行列である。

$$K = \begin{pmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{21} & K_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \Gamma_z \ell, & \frac{j \rho_0 c_0 \zeta \gamma}{\Gamma_z} \sin \Gamma_z \ell \\ \frac{j \Gamma_z}{\rho_0 c_0 \zeta \gamma} \sin \Gamma_z \ell, & \cos \Gamma_z \ell \end{pmatrix}. \quad (3.3.9)$$

式 (3.3.8) において, 境界条件 (3.2.15) 式から得られる条件 $\mathcal{U}_z(K, -\ell) = V(K)$ を用い, また

$$Z_L(K) = \frac{\mathcal{D}(K, 0)}{\mathcal{U}_z(K, 0)}, \quad (3.3.10)$$

のように $z=0$ から右をみた負荷インピーダンス $Z_L(K)$ を定義すると, $\mathcal{U}_z(K, 0)$ は $V(K)$ を用いて表わされ, 次のようにして与えられる。

$$\begin{aligned} \mathcal{U}_z(K, 0) &= \frac{1 + D(\omega) \cdot (K_{22} - 1)}{K_{21} \cdot Z_L + K_{22}} \cdot V(K) \\ &\equiv \varepsilon(K) \cdot V(K). \end{aligned} \quad (3.3.11)$$

この係数 $\varepsilon(K)$ の物理的意味については次節で考察する。

次に $z \geq 0$ の外部音場について考察する。今までの議論と同様にして, 自由空間での音圧と粒子速度の z 成分に対するスペクトル表示が考えられ, これらは, 速度ポテンシャル $\phi(X, z)$ のスペクトル $\Phi(K, z)$ を用いると, (3.2.16), (3.2.17) 式から次式のように与えられる。

$$\mathcal{D}(K, z) = j \rho_0 c_0 k \Phi(K, z), \quad (3.3.12)$$

$$\mathcal{U}_z(K, z) = -\frac{d}{dz} \Phi(K, z). \quad (3.3.13)$$

一方 $\phi(X, z)$ は (3.2.18) 式をみたすところから, $\Phi(K, z)$ は

$$\frac{d^2}{dz^2} \phi(K, z) + k_z^2 \phi(K, z) = 0, \quad (3.3.14)$$

$$k_z^2 = k^2 - K \cdot K,$$

を満たさなければならない。さらに無限遠での境界条件（無限遠からの反射波はない）を考慮すれば、 $\phi(K, z)$ は

$$\phi(K, z) = \phi(K, 0) \exp(-j k_z(K) \cdot z), \quad (3.3.15)$$

で与えられることとなる。（3.3.12）,（3.3.13）,（3.3.15）式から、

$$\mathcal{D}(K, z) = j \rho_0 c_0 k \phi(K, z), \quad (3.3.16)$$

$$u_z(K, z) = j k_z(K) \phi(K, z), \quad (3.3.17)$$

を得、（3.3.10）式で定義された $Z_L(K)$ は今の場合

$$Z_L(K) = \rho_0 c_0 \frac{k}{k_z(K)}, \quad (3.3.18)$$

で与えられる。さて、 $z = 0$ での、音場の連続性を考慮に入れると、（3.3.11）,（3.3.15）,（3.3.17）式から、 $z \geq 0$ での速度ポテンシャル $\phi(X, z)$ は

$$\begin{aligned} \phi(X, z) = & \frac{1}{(2\pi)^2} \int \frac{1}{j k_z(K)} \cdot \varepsilon(K) \cdot V(K) \\ & \cdot \exp\{-j(K \cdot X + k_z(K) \cdot z)\} dK, \end{aligned} \quad (3.3.19)$$

で与えられる。 $z \geq 0$ の領域での音圧 $p(X, z)$ 、粒子速度の z 成分 $u_z(X, z)$ は、（3.3.19）式を（3.2.16）,（3.2.17）式に入れることにより得られる。

最後に、 $z = 0$ の面を通して、 $z \geq 0$ の半無限自由空間に放射される音波の時間平均したエネルギー流密度 $w(X)$ の式を導出しておく。（3.2.16）,（3.2.17）,（3.3.19）式を用いると、 $w(X)$ は、

$$w(X) = \frac{1}{2} \operatorname{Re} [p(X, 0) \overline{u_z(X, 0)}]$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{\rho_0 c_0}{2} \cdot \frac{1}{(2\pi)^4} \cdot \operatorname{Re} \left[\iint \frac{k}{k_z(K)} \cdot \varepsilon(K) \cdot \overline{\varepsilon(K')} \right. \\
 &\quad \left. \cdot V(K) \cdot \overline{V(K')} \cdot \exp \{ -j(K-K') \cdot X \} dK dK' \right], \\
 &\hspace{25em} (3.3.20)
 \end{aligned}$$

で与えられる。ここに $\operatorname{Re}[A]$ は A の実部を、また、 $\overline{A}$ は A の共役複素数を意味する。

3. 4 各種振動分布に対応した放射音場と放射パワー

本節では、3.3 節で得られた結果をもとにして、壁の代表的な振動分布に対応した遠距離音場や放射パワーに関する簡潔な式を導出する。壁の振動分布としては、

- i) 無限に広がった分布,
- ii) 長い帯状分布,
- iii) 2 次元的に局在した分布,

の 3 種類を考えることにする。

3.4.1 無限に広がった振動分布

最初に、壁の振動分布が、次式で与えられるような無限大に広がった進行波の場合を考える。

$$U(X) = U_0 \exp(-j K_0 \cdot X). \quad (3.4.1)$$

この $U(X)$ に対するスペクトル $V(K)$ は

$$V(K) = (2\pi)^2 \cdot U_0 \cdot \delta(K - K_0), \quad (3.4.2)$$

で与えられる。ここに $\delta(K)$ は Dirac のデルタ関数である。(3.3.19), (3.4.2) 式から、 $z \geq 0$ における速度ポテンシャル $\phi(X, z)$ は次式で与えられる。

$$\phi(X, z) = \frac{1}{j k_z(K_0)} \cdot \epsilon(K_0) \cdot U_0 \cdot \exp \{ -j (K_0 \cdot X + k_z(K_0) z) \} . \quad (3.4.3)$$

上式は、 $|K_0| < k$ の場合には、無限に広がった平面進行波を、また、 $|K_0| > k$ の場合には、 z 方向に急激に減衰する、減衰波を表わしている。

また、(3.4.2) 式を、(3.3.20) 式に入れることにより、多孔質材の表面の単位面積から放射される時間平均パワーは、

$$w(X) = \begin{cases} w_0 \cdot |\epsilon(K_0)|^2 \cdot \frac{k}{k_z(K_0)} & , \quad (k > |K_0|) \\ 0 & , \quad (k < |K_0|) \end{cases} \quad (3.4.4)$$

で与えられる。ここに $w_0 = (1/2) \rho_0 c_0 |U_0|^2$ である。特に、多孔質材の厚さ ℓ が 0 の時には、(3.3.11) 式から、 $\epsilon(K) \equiv 1$ となるが、この時、(3.4.3)、(3.4.4) 式は良く知られた結果³⁹⁾に一致している。

さて、(3.4.3)、(3.4.4) 式から $\epsilon(K)$ 、 $|\epsilon(K)|^2$ の物理的意味は容易に理解しうることになる。すなわち、 $\epsilon(K)$ 、 $|\epsilon(K)|^2$ は、

$$\theta = \cos^{-1} \left(\frac{k_z(K)}{k} \right) = \sin^{-1} \left(\frac{|K|}{k} \right) , \quad (3.4.5)$$

で定義される、 z 軸からの角度 θ の方向に放射される平面波成分の振幅、時間平均パワー密度に関する放射効率を表わしているといえる。特に $K = 0$ の時の $\epsilon(0)$ 、 $|\epsilon(0)|^2$ は、2.3.2 節の 1 次元問題での振幅放射効率、パワー放射効率に一致することは、容易に確かめられる。このようなことから、以後 $\epsilon(K)$ 、 $|\epsilon(K)|^2$ をそれぞれ、“一般化された振幅放射効率”、“一般化されたパワー放射効率”、あるいは単に、振幅放射効率、パワー放射効率と呼ぶことにする。

図 3.4.1、図 3.4.2 には、 $\epsilon(K) = \epsilon(|K|) = \epsilon(k \sin \theta)$ の絶対値

の 2 乗の周波数特性と指向性に関する数値計算例を示す。

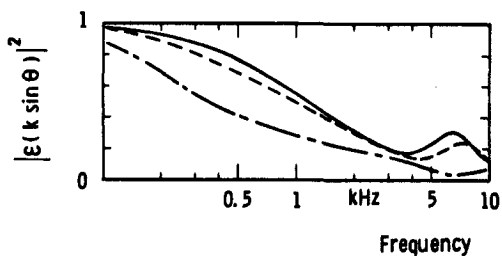


図 3.4.1 $|\epsilon(k \sin \theta)|^2$ の周波数特性
 計算条件: $H = 1.0$, $S = 1.0$, セルサイズ $2a = 0.4 \text{ mm}$
 厚さ $\ell = 5.0 \text{ cm}$
 θ ; ——— 0° , - - - - 30° , — · — · 60° .

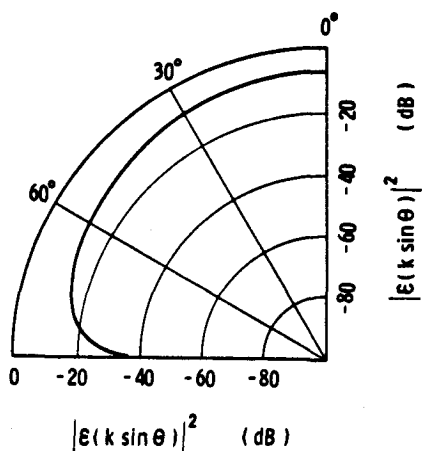


図 3.4.2 $|\epsilon(k \sin \theta)|^2$ の指向性
 (H, S, a, ℓ は, 図 3.4.1 に同じ)
 周波数: 5 kHz

これらの図から, $|\epsilon(k \sin \theta)|$ の値は, おおまかには, 周波数が高いほど, また角度 θ が大きいほど小さくなるといえる。もちろん, $|\epsilon(k \sin \theta)|$ の値は, 剛壁からの放射波と, 多孔質材中で励起された流体の振動に起因する波動との干渉効果で定まるものであるから例外はありうる。

3.4.2 細長い帯状の振動分布

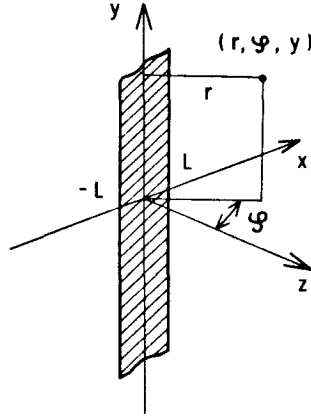


図3.4.3 帯状音源

第2の場合として、壁の振動分布が次式で与えられるような、帯状音源を考える。

$$U(X) = U_1(x) \cdot \exp(-jK_0 y), \quad (3.4.6)$$

ここに $U_1(x)$ は $|x| > L$ に対し、 $U_1(x) = 0$ とする。この時、スペクトル $V(K)$ は

$$V(K) = 2\pi \cdot \delta(K_y - K_0) \cdot V_1(K_x), \quad (3.4.7)$$

で与えられる。ただし

$$V_1(K_x) = \int_{-L}^{+L} U_1(x) \exp(jK_x x) dx, \quad (3.4.8)$$

である。(3.4.7) 式を、(3.3.19) 式に入れ、さらに、図3.4.3に示したような円柱座標系 (r, φ, y) を導入すると、 $z \geq 0$ での速度ポテンシャル $\phi(X, z)$ は、次式で与えられる。

$$\begin{aligned} \phi(X, z) = & \frac{1}{2\pi} \int \frac{1}{j k_z(K_x, K_0)} \cdot \varepsilon(K_x, K_0) \cdot V_1(K_x) \\ & \cdot \exp[-j\{K_0 y + r(K_x \sin \varphi + k_z \cos \varphi)\}] dK_x. \end{aligned} \quad (3.4.9)$$

特に、 $r \gg L$ ，すなわち遠距離領域においては、(3.4.9)式の積分は、鞍点法⁴⁰⁾⁻⁴²⁾あるいは、1次元停留位相法⁴³⁾により評価しうる。この時、 ϕ の近似形として

$$\begin{aligned} \phi(r, \varphi, y) \simeq & \sqrt{\frac{1}{2\pi k_r r}} \cdot \exp\left(-j \frac{\pi}{4}\right) \cdot \varepsilon(k_r \sin \varphi, K_0) \\ & \cdot V_1(k_r \sin \varphi) \cdot \exp\{-j(K_0 y + k_r r)\}, \end{aligned} \quad (3.4.10)$$

を得る。ここに

$$k_r = (k^2 - K_0^2)^{1/2}, \quad (3.4.11)$$

であり、 k_r の分岐は $\text{Im}(k_r) < 0$ となるように選ぶ。なお、(3.4.10)式は、(3.4.9)式の積分に、通常鞍点法を適用した時の、 $k_r r$ に関する漸近展開の初項をぬき出したものであり、観測点が極端に多孔質材の表面に近い場合を除いては、比較的良い近似になっているといえる。観測点が、多孔質材の表面に極端に近い時、すなわち $\varphi \simeq \pi/2$ の時には、 $\varepsilon(k_r \sin \varphi, K_0) \simeq 0$ となるので、この時には、さらに高次の項を出すなり⁴²⁾また、多孔質材の物質定数や厚さによっては、変形鞍点法⁴²⁾を用いるなどの配慮が必要となる。

次に、この帯状音源の単位長さあたりから放射される時間平均パワー $W^{(1)}$ を考える。 $W^{(1)}$ は(3.4.7)式を(3.3.20)式に入れ、 x について積分することにより得られる。すなわち

$$\begin{aligned} W^{(1)} &= \int_{-\infty}^{+\infty} w(X) dx \\ &= \frac{\rho_0 c_0}{4\pi} \text{Re} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} dK_x \left\{ \frac{k}{k_z(K_x, K_0)} \cdot |\varepsilon(K_x, K_0)|^2 \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \cdot |V_1(K_x)|^2 \right\} \right] \end{aligned}$$

$$= \begin{cases} \frac{\rho_0 c_0}{4\pi} \int_{-k_r}^{+k_r} dK_x \left\{ \frac{k}{k_z(K_x, K_0)} |\varepsilon(K_x, K_0)|^2 \right. \\ \quad \left. \cdot |V_1(K_x)|^2 \right\}, & (k \geq |K_0|), \\ 0, & (k < |K_0|), \end{cases}$$

(3.4.12)

ただし、 k_r は (3.4.11) 式で与えたものである。以後は $k \geq |K_0|$ の場合を考えることにする。

式 (3.4.12) で与えられる $W^{(1)}$ は、貼付した多孔質材の効果と、壁の振動分布の効果の両方を同時に含んでいる。そこで、貼付した多孔質材の効果をもう少し明確に表わすような無次元の物理量として、次のようなものを導入する。

$$E^{(1)} = \frac{W^{(1)}}{W_0^{(1)}}, \quad (3.4.13)$$

ただし、 $W_0^{(1)}$ は、同じ振動分布を有する、多孔質材を貼付しない壁の単位長さから放射される時間平均パワーであり、(3.4.12) 式で $|\varepsilon(K_x, K_0)|^2 = 1$ とおくことにより得られるものである。以後、 $E^{(1)}$ を“規格化されたパワー放射効率”と呼ぶことにする。

以上の議論では、帯の巾には何らの制限をしていなかった。以後の議論では、 $kL \ll 1$ の時、すなわち帯の巾が十分細く、無指向性とみなせる場合について考察する。(3.4.10)–(3.4.12) 式から、遠距離領域にまで波動が到達するような、あるいは、実質的なパワーの放射がおこりうるような場合には、条件

$$k \geq |K_0|, \quad (3.4.14)$$

かつ、

$$|K_x| \leq (k^2 - K_0^2)^{1/2} = k_r, \quad (3.4.15)$$

が成り立っていることがわかる。このような時には、 $|x| \leq L$ に対し、不等式

$$|K_x x| \leq |K_x L| \leq k_r L \leq k L \ll 1, \quad (3.4.16)$$

が成り立つ。(3.4.16)式のもとでは、(3.4.8)式で定義されたスペクトル $V_1(K_x)$ は

$$\begin{aligned} V_1(K_x) &= \int_{-L}^L U_1(x) \cdot \left[\sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} (jK_x x)^m \right] dx \\ &= 2L \langle U_1 \rangle + O(kL) \\ &\simeq 2L \cdot \langle U_1 \rangle, \end{aligned} \quad (3.4.17)$$

と近似しうる。ただし、

$$\langle U_1 \rangle = \frac{1}{2L} \int_{-L}^L U_1(x) dx, \quad (3.4.18)$$

である。(3.4.17)式を(3.4.10)式に入れることにより、角度 φ の関数としての $|\phi|$ は、単に $|\epsilon(k_r \sin \varphi, K_0)|$ にのみ比例することがわかる。また、(3.4.17)式を(3.4.13)式に入れ、 $K_x = k_r \sin \alpha$ なる変数変換を導入すると、規格化されたパワー放射効率 $E^{(1)}$ は

$$E^{(1)} \simeq \frac{\int_0^{\pi/2} |\epsilon(k_r \sin \alpha, K_0)|^2 d\alpha}{\int_0^{\pi/2} d\alpha}, \quad (3.4.19)$$

という簡単な式になる。(3.4.19)式は、 $|\epsilon(k_r \sin \alpha, K_0)|^2$ の値を半円上で平均した量となっている。このように、無指向性とみなしうる振動分布の場合には、多孔質材を貼付した壁からの放射パワーは、多孔質材を貼付しない、同じ振動分布の壁からの放射パワーに、一般化したパワー放射効率の平均値をかけたもので与えられることがわかる。

3.4.3 空間的に局在した振動分布

第3の場合として、図3.4.4に示したように、壁の振動分布が原点 O に中心を持つ半径 B の円内でのみ0でない値をもつ場合を考える。ここでは、便

宜上、図 3.4.4 に示したような極座標系 (R, θ, φ) を導入する。

さて、 $z \geq 0$ の空間における速度ポテンシャルの一般形は、(3.3.19) 式で与えられている。特に、 $R \gg B$ の時、すなわち遠距離領域においては、(3.3.19) 式の積分は、2次元停留位相法⁴³⁾により、あるいは、2変数に関し鞍点法⁴⁰⁾⁻⁴²⁾を適用することにより、評価しうる。この時、 $\phi(R, \theta, \varphi)$ の近似形として、

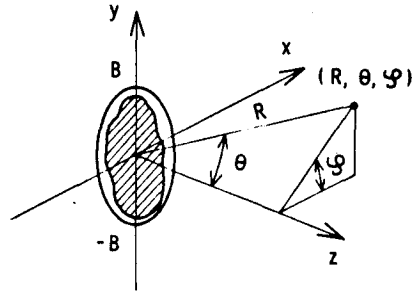


図 3.4.4 空間的に局在した振動分布

$$\phi(R, \theta, \varphi) \simeq \frac{1}{2\pi R} \cdot \exp(-jkR) \cdot \varepsilon(K^s) \cdot V(K^s), \quad (3.4.20)$$

を得る。ここに

$$K^s = k \begin{pmatrix} \sin \theta \cos \varphi \\ \sin \theta \sin \varphi \end{pmatrix}, \quad (3.4.21)$$

である。(3.4.20) 式は、(3.3.19) 式の積分に通常鞍点法を適用した場合の、 kR に関する漸近展開の初項をぬき出したものであり、適用限界に関しては、3.4.2 節の場合と同様の注意が必要である。すなわち、 $\varepsilon(K^s) \simeq 0$ となるような場合には、さらに高次の項⁴²⁾を考えるなり、また、物質定数などによっては、変形鞍点法⁴²⁾を適用するなどの配慮は必要である。ただ、多くの場合には、観測点が極端に多孔質材の表面に近い場合、すなわち、 $\theta \simeq \pi/2$ の場合を除いては、ほぼ良好な近似解になっているとみなしても、さしつかえはないと考えられる。

次に、この音源から $z \geq 0$ の空間に放射される、時間平均した総パワー

$W^{(2)}$ を考える。この $W^{(2)}$ の値は、(3.3.20)式で与えたパワー密度 $w(X)$ を X に関し全平面で積分することにより得られ、最終的には次式で与えられる。

$$\begin{aligned} W^{(2)} &= \frac{1}{2} \cdot \frac{\rho_0 c_0}{(2\pi)^2} \cdot \operatorname{Re} \left[\int dK \left\{ \frac{k}{k_z(K)} \cdot |\varepsilon(K)|^2 \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \cdot |V(K)|^2 \right\} \right] \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{\rho_0 c_0}{(2\pi)^2} \int_{|K| \leq k} \frac{k}{k_z(K)} \cdot |\varepsilon(K)|^2 \cdot |V(K)|^2 dK. \end{aligned} \quad (3.4.22)$$

上式のように、総放射パワー $W^{(2)}$ は、貼付した多孔質材の影響と、音源の振動分布の影響を同時に含んだものとなっている。貼付した多孔質材の影響を、より明確に表わすために、本節においても、前節と同様の考え方で、次式で定義されるような規格化されたパワー放射効率 $E^{(2)}$ を導入することにする。

$$E^{(2)} = \frac{W^{(2)}}{W_0^{(2)}}, \quad (3.4.23)$$

ただし $W_0^{(2)}$ は、同じ振動分布を有する、多孔質材を貼付しない壁からの総放射パワーであり、(3.4.22)式で $|\varepsilon(K)|^2 = 1$ として与えられるものである。

以上の議論においては、音源の大きさには、いっさいの制限をつけなかった。以下の議論においては、 $kB \ll 1$ の時、すなわち、音源自体が無指向性とみなせる場合についての考察を行なう。さて、(3.4.20)–(3.4.22)式からもわかるように、遠距離領域に波動となって到達しうるような、あるいは、実質的にパワーとなって放射されるようなスペクトル成分は、 $|K| \leq k$ の範囲の成分である。この範囲の K に対しては、 $|X| \leq B$ の条件のもとでは、不等式

$$|K \cdot X| \leq |K| \cdot B \leq kB \ll 1, \quad (3.4.24)$$

が成り立つ。(3.4.24)式の条件のもとでは、スペクトル $V(\mathbf{K})$ は

$$\begin{aligned}
 V(\mathbf{K}) &= \int_{|\mathbf{X}| \leq B} U(\mathbf{X}) \exp(j\mathbf{K} \cdot \mathbf{X}) d\mathbf{X} \\
 &= \int_{|\mathbf{X}| \leq B} U(\mathbf{X}) \cdot \left[\sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} (j\mathbf{K} \cdot \mathbf{X})^m \right] d\mathbf{X} \\
 &= \pi B^2 \cdot \langle U \rangle + O(kB) \\
 &\simeq \pi B^2 \cdot \langle U \rangle, \tag{3.4.25}
 \end{aligned}$$

と、近似しうる。ここに

$$\langle U \rangle = \frac{1}{\pi B^2} \int_{|\mathbf{X}| \leq B} U(\mathbf{X}) d\mathbf{X}, \tag{3.4.26}$$

である。(3.4.25)式を、(3.4.20)式に代入することにより、遠距離での速度ポテンシャルの絶対値の指向特性は $|\epsilon(\mathbf{K}^s)|$ にのみ依存することがわかる。また、(3.4.25)式を、(3.4.23)式に代入し、変数変換、

$$\mathbf{K} = k \begin{pmatrix} \sin \alpha \cos \beta \\ \sin \alpha \sin \beta \end{pmatrix},$$

を導入すると、規格化されたパワー放射効率 $E^{(2)}$ は次式で近似しうる事がわかる。

$$\begin{aligned}
 E^{(2)} &\simeq \frac{\int_0^{2\pi} d\beta \int_0^{\pi/2} \sin \alpha d\alpha [|\epsilon(k \sin \alpha)|^2]}{\int_0^{2\pi} d\beta \int_0^{\pi/2} \sin \alpha d\alpha} \\
 &= \frac{\int_0^{\pi/2} |\epsilon(k \sin \alpha)|^2 \sin \alpha d\alpha}{\int_0^{\pi/2} \sin \alpha d\alpha}, \tag{3.4.27}
 \end{aligned}$$

ただし、ここで $\epsilon(\mathbf{K})$ は、(3.3.11)式から、 $|\mathbf{K}|$ のみの関数であることを用いた。(3.4.27)式で与えられる $E^{(2)}$ は、 $|\epsilon(\mathbf{K})|^2$ の値を半球上で平均した量になっている。このように、無指向性とみなしうる振動分布の場合に

は、多孔質材を貼付した壁からの総放射パワーは、多孔質材を貼付しない、同じ振動分布を有する壁からの総放射パワーに、一般化されたパワー放射効率の平均値をかけたもので与えられることがわかる。

3. 5 他の著者の結果との比較

3.1 節でも簡単に述べたように、Morse and Ingard は剛でない振動壁からの音の放射に関し、壁の表面の音響的性質に対してはローカルリアクションの仮定を、また、振動部の性質を表わすものとしては、“*driving velocity*” という概念を導入することにより、ひとつの理論的考察を行なった。^{17), 18)} 彼等が解析の対象としたのは、本論文の 3.4.3 節で述べたような、空間的に局在した振動分布の場合である。彼等によって導出された、遠距離での速度ポテンシャルは、次式で与えられる。

$$\phi(R, \theta, \varphi) \simeq \frac{1}{2\pi R} \cdot \exp(-jkR) \cdot \frac{\zeta_n \cos \theta}{\zeta_n \cos \theta + 1} \cdot V_d(K^s), \quad (3.5.1)$$

ただし、記号 R, θ, φ, K^s などの定義は、3.4.3 節と同じにしてある。

(3.5.1) 式において、 ζ_n は剛でない壁の、ノーマル音響インピーダンス密度であり、ローカルリアクションの仮定により、 θ などには依存しない複素数である。また、 $V_d(K^s)$ は、“*driving velocity*” $U_d(X)$ の 2 次元フーリエスペクトルである。ただし、この $U_d(X)$ なる量が、どのような物理的根拠に基づいたものなのか、また、具体的にはどのような式で表わされるのか、についての議論は、なされていない。

さて、(3.5.1) 式と、本論文での結果である (3.4.20) 式とを比べてみても、このままでは、何ら対応関係は見い出せない。しかしながら、(3.4.20) 式で、 $|\exp(j\Gamma_z \ell)|$ が無限大とみなしうる時、すなわち、多孔質材内部での音波の減衰が十分大きく、多重反射の影響が無視しうるような場合に

は、(3.4.20) 式は、漸近的に次式に近づいていく。

$$\phi(R, \theta, \varphi) \simeq \frac{1}{2\pi R} \cdot \exp(-jkR) \cdot \frac{\zeta_n(\theta) \cos \theta}{\zeta_n(\theta) \cos \theta + 1} \cdot D(\omega) \cdot V(K^s), \quad (3.5.2)$$

ここに

$$\zeta_n(\theta) = \frac{\zeta r}{\Gamma_z(\theta)} = \frac{\zeta r}{\{r^2 - (k \sin \theta)^2\}^{1/2}}, \quad (3.5.3)$$

である。この時点で (3.5.1) 式と (3.5.2) 式とを比べると、(3.5.1) 式中の ζ_n と $V_d(K^s)$ が、(3.5.2) 式中の $\zeta_n(\theta)$ と $D(\omega) \cdot V(K^s)$ に等しいとみなしうる場合には、(3.5.1) 式と (3.5.2) 式とは等価であるといえる。結局、我々の結果である (3.4.20) 式が、Morse and Ingard の結果である (3.5.1) 式に等しいためには、条件

$$|\exp(j\Gamma_z \ell)| \gg 1, \quad |r| \gg k, \quad (3.5.4)$$

のもとで、 $V_d(K^s) = D(\omega) \cdot V(K^s)$ とおけばよいことになる。以上述べたことから、Morse and Ingard の理論結果と、我々の理論結果とは、一般には一致しないが、貼付した多孔質材が十分厚く、かつ、多孔質材中の音波の伝搬定数が自由空間中の音波の伝搬定数に比べ十分大きいとみなせる時にのみ、遠距離音場に関しては類似点が見い出せるといえる。

3. 6 結 言

本章では、振動する平面壁に厚さが一定の多孔質材を直接貼付した場合の、半無限空間への音放射に関し、若干の理論的考察を行なった。ここでの扱いは、他の著者等が行なったような、多孔質層の内部に立ち入らずに、外部空間だけの境界値問題として話を進める方法ではなく、多孔質層、および音波が放射される外部空間も含めた、全領域での境界値問題を解くという立場からの扱いである。このような扱いをして、はじめて、物質定数と壁の構造との

知識だけから、放射音場を推定しうるようになったものと考えられる。

本章では壁の振動状態としては、一般的な屈曲振動も入れているために、放射音場は、第2章の1次元問題のような壁に垂直な方向への平面波成分だけでなく、斜め方向への平面波、あるいはこれらの合成である円錐波、円筒波、球面波、ビーム状の波動などが出てくる。これらに対応し、放射効率を示す係数も、第2章の放射効率を一般化した形の係数を新たに定義した。この係数を用いることにより、遠距離音場や放射パワーの式に対し、比較的簡単な表式を得ることができた。また壁の振動分布が1次元的に、あるいは2次元的に局在している場合には、放射パワーは音源の振動分布の影響と、貼付した多孔質材の効果とを含んだ形として与えられるが、この貼付した多孔質材の効果を、より明確に示す量として、新たに、規格化した放射効率を定義した。この係数は、多孔質材を貼付する前の放射パワーがわかっている時に、多孔質材を貼付した時の放射パワーを推定する場合、貼付前のパワーに単にこの係数をかければ貼付後のパワーが得られるという性質を持つものである。特に、音源自体の指向性が鈍い時には、この規格化した放射効率は、前述の一般化された放射効率を角度に関して平均した量として与えられる。

最後に、本章の結果と、他の著者の結果との比較を行ない、両者は、本章の結果で貼付した多孔質材の厚さを無限大にし、さらにいくつかの対応関係を仮定した時にのみ、一致点がみられることなどについて述べた。

第 4 章 多孔質材で構成された各種弾性平板の振動特性について

4.1 緒 言

本章では，多孔質材で構成された各種多孔質板が流体中で振動する場合の板の振動特性ならびに多孔質板内部の流体の挙動に関する基礎方程式の導出を試みる。

本章の前半では，単一多孔質材のみで構成された多孔質板の振動を扱う。まず，薄い多孔質板が流体中で振動する場合を想定し，板内部での弾性体の横剪断変形，回転慣性力，及び，多孔質板内部の流体の板の面内方向の運動に起因した回転力を無視した，薄い多孔質板の運動方程式を導出する。次に，多孔質板内部の流体の運動に着目する。多孔質板内の流体の挙動は，前章までも述べたように，3次元の波動方程式に支配されているのであるが，種々の境界条件のもとに，この波動方程式を解くことには，かなりの労力を必要とするのが普通である。そこで，ここでは，板厚が音波の波長に比べ十分薄い場合に有効と考えられる，より簡単な形の，流体層の運動方程式の導出を試みる。さらに，これらの実用的な基礎方程式を導出した際に導入した種々の仮定を取り払った，より精密な，基礎方程式を導出し，前述した実用式の適用限界について若干の議論を行なう。

本章の後半では，複数個の多孔質層，及び，非多孔質層から成る，複合弾性板の振動を取り扱う。まず，非多孔質の平板の両面に異なる多孔質層を貼付した複合板の運動方程式を導出する。次に，本章の前半で考察する単一多孔質板，及び，前述した3層複合板を包括する形の， N 種の多孔質板を接合した N 層多孔質板の運動方程式と，この複合多孔質板内の流体層の運動方程式の導出を試みる。

4.2 音波と弾性波に対する基本方程式の整理

本節では、次節以降の議論で用いるため、振動する多孔質材中の音波の挙動、及び、流体中で振動する骨格の挙動について、簡単にまとめておく。なお、多孔質材は均質等方であるとし、この性質は、真空中でも、流体中でも、なりたつものとする。

さて、ここで議論の対象とするのは、比較的薄い多孔質弾性板の振動、及び、同じ多孔質板内の音波の挙動である。このような場合には、次の仮定が比較的良い近似でなりたつものと考えられる。

(仮定 1) 骨格の振動速度のうち、板面に垂直な成分の、板の厚み方向での変動は無視しうる。

(仮定 2) 多孔質材中の音波の挙動に対する、多孔質材の骨格の体積変化の影響は無視しうる。

これら上記の仮定は、実は、3.2 節で導入した仮定と全く同じものである。したがって、3.2 節で導出した、音波に対する波動方程式や、その一般解がそのまま使えることになる。すなわち骨格が速度 $U(X, z)$ (時間因子 $\exp(j\omega t)$ は省略する) で振動したとすると、(仮定 2)、すなわち、 $\text{div } U \simeq 0$ のもとで、流体に対する運動方程式、圧縮の式は次式で与えられる。

$$j\rho^*\omega u^{in} = -\nabla p^{in} + \sigma U, \quad (4.2.1)$$

$$-j\omega p^{in} = K^* \text{div } u^{in}, \quad (4.2.2)$$

ただし、そえ字 in は多孔質材内部の音波に属する物理量を表わし、 p は音圧、 u は粒子速度、 ρ^* 、 K^* 、 σ はそれぞれ、等価密度、等価体積弾性率、結合係数であり、その関数形は、第 2 章で与えたものと同じものを用いることにする。

さて、(仮定 2) の $\text{div } U \simeq 0$ のもとでは、(4.2.1)、(4.2.2) 式を結合して得られる、 p^{in} 、 u^{in} に関する波動方程式の一般解は、3.2 節と同様にして次式で与えられる。

$$p^{in} = j \rho^* \omega \phi , \quad (4.2.3)$$

$$u^{in} = \frac{\sigma}{j \rho^* \omega} U - \nabla \phi, \quad (4.2.4)$$

ただし、スカラーポテンシャル ϕ は

$$(\nabla^2 + \gamma^2) \phi = 0, \quad \gamma^2 = \omega^2 \frac{\rho^*}{K^*}, \quad (4.2.5)$$

の一般解である。

次に、多孔質材の表面における、音波に対する境界条件は、

$$p^{out}(X) = p^{in}(X) , \quad (4.2.6)$$

$$u_n^{out}(X) = u_n^{in}(X) + (1-H) U_n(X) , \quad (4.2.7)$$

で与えられる。ここに H は多孔率、そえ字 out, in はそれぞれ、多孔質材の外部、内部の流体に属する物理量を意味し、また、そえ字 n は、表面に対する法線成分を意味している。

次に、骨格の微小振動についての考察を行なう。これに関しては、2.4 節で述べた結果を用いる。すなわち、真空中での、骨格に対する運動方程式が次式で与えられるとする。

$$j \rho_s \omega U_i = \sum_j \frac{\partial T_{ij}}{\partial x_j} , \quad (4.2.8)$$

ここに、 ρ_s は骨格の密度である。また、 T_{ij} は真空中での微小振動に対応した、動的応力テンソル成分であり、線型振動を考えている範囲内では、歪テンソル成分 $e_{k\ell}$ を用いて

$$T_{ij} = \sum_{k,\ell} C_{ijk\ell} e_{k\ell} , \quad (4.2.9)$$

で与えられるものとする。ここに、 $C_{ijk\ell}$ は動的な弾性定数である。

次に、この多孔質材が流体中で微小振動する場合の運動方程式は、2.4.1 節で述べたことから、(仮定 2) のもとで、

$$j \rho_s \omega U_i = \sum_j \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} + \sigma (u_i^{in} - H U_i) , \quad (4.2.10)$$

で与えられるものとする。ここに τ_{ij} は流体中での微小振動に対応した動的応力テンソル成分であり、

$$\tau_{ij} = \sum_{k,l} C'_{ijkl} e_{kl} , \quad (4.2.11)$$

で与えられるものとする。ただし、上式で歪テンソル成分は新しい平衡点のまわりの振動に対応したものであるが、(4.2.9)式と同じ記号を用いた。また、 C'_{ijkl} は流体中での微小線型振動に対応した動的弾性定数である。この C'_{ijkl} は、2.4.1節で述べたような理由により、厳密には、(4.2.9)式の C_{ijkl} とは異なるものである。しかし、流体として、1気圧の空気を考える場合には、おそらく $C'_{ijkl} \simeq C_{ijkl}$ とみなしても、さしつかえないものと考えられる。この場合には、同じ歪量に対しては、 $\tau_{ij} \simeq T_{ij}$ としてもよいことになり、(4.2.10)式は、近似的に

$$j \rho_s \omega U_i = \sum_j \frac{\partial T_{ij}}{\partial x_j} + \sigma (u_i^{in} - H U_i) , \quad (4.2.12)$$

とおける。本論文では、動的弾性定数に、 $C'_{ijkl} \simeq C_{ijkl}$ の条件が成り立つものとして、(4.2.12)式を基礎式として考えていく。また、上述した条件にも含まれることではあるが、微小振動に対する等方性などは、真空中でも、流体中でも成り立つものとしていく。

4.3 薄い多孔質板の振動特性³¹⁾

4.3.1 多孔質板の運動方程式〔I〕

本節では、流体中で振動する、薄い多孔質平板に対する運動方程式を求める。この時に導入する仮定は、4.2節での(仮定1)、(仮定2)に加え、以下の仮定を新たに導入する。

(仮定3) 骨格系の回転慣性力は無視する。

(仮定4) 骨格系の横剪断変形の影響は無視する。

(仮定5) 多孔質材中の流体の、板の面内方向への運動に起因する回転力は無視する。

なお、(仮定1)、(仮定3)、(仮定4)は多孔質でない、普通の薄板の運動方程式を導出する際にも、通常、仮定されているものであり、また、(仮定2)は、このような薄板の振動時には、良い近似で成りたつと考えてよく、さらに、(仮定5)は、(仮定3)と同じ次元の仮定を、流体による力に対しても成りたつとして導入したものである。

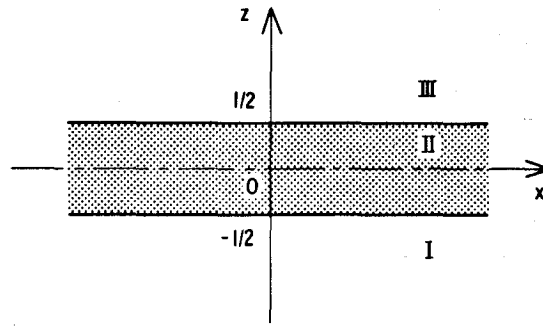


図 4.3.1 流体中で振動する多孔質板

さて、図 4.3.1 のように座標系をとる。この時、真空中では、骨格に対する運動方程式は、(4.2.8) 式、すなわち、

$$j \rho_s \omega U_i = \sum_j \frac{\partial T_{ij}}{\partial x_j} \quad , \quad (4.3.1)$$

で与えられるものとする。薄板の運動方程式は、(4.3.1) 式を板の厚さ方向に平均化することにより得られ、等方均質な材料に対しては次式で与えられる。^{44), 45)}

$$\mathcal{L}[U_n(X)] = f(X) \quad , \quad (4.3.2)$$

ここに、 $U_n(X)$ は板の振動速度、 $f(X)$ は板の表面の単位面積あたりに働く総外力、また

$$\mathcal{L} = \frac{1}{j \omega} \{ -\rho_s \ell \omega^2 + \mathcal{D} \nabla_t^4 \} \quad , \quad (4.3.3)$$

$$\mathcal{D} = \frac{E \ell^3}{12 (1 - \nu^2)} \quad , \quad (4.3.4)$$

である。ここに ℓ は板厚, E , ν は角周波数 ω の微小振動に対応した動的ヤング率, ポアソン比である。また ∇_i は板の面内方向の微分を表わす。なお, (4.3.1) 式から (4.3.2) 式を導く時に, (仮定1), (仮定3), (仮定4) を用いている。

次に, この多孔質板が流体中で振動する場合を考える。この時の骨格に対する運動方程式は, 流体の存在に起因した動的弾性定数の変化などは無視できるとして, (4.2.12) 式, すなわち,

$$j \rho_s \omega U_i = \sum_j \frac{\partial T_{ij}}{\partial x_j} + \sigma (u_i^{in} - H U_i), \quad (4.3.5)$$

で与えられるものとする。(4.3.5) 式を, (仮定1)–(仮定5)のもとに, 板の厚さ方向に平均すると, 多孔質板の運動方程式として, 次式を得る。

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[U_n(X)] &= \sigma \ell \{ \langle u_n^{in}(X) \rangle - H U_n(X) \} \\ &\quad + (1-H) \{ p(X, -\frac{\ell}{2}) - p(X, \frac{\ell}{2}) \} \\ &\quad + f(X), \end{aligned} \quad (4.3.6)$$

ここに $p(X, \pm \frac{\ell}{2})$ は, $z = \pm (\ell/2)$ での, 板の外部表面での音圧 (簡単のため, 指標 *out* は省略した), $\langle u_n^{in}(X) \rangle$ は, 次式で定義されるような, 流体の粒子速度の法線成分を板の厚さ方向に平均した量である。

$$\langle u_n^{in}(X) \rangle = \frac{1}{\ell} \int_{-\ell/2}^{\ell/2} u_n^{in}(X, z) dz. \quad (4.3.7)$$

ところで, 板の内部での骨格の体積変化速度 $\text{div} \mathbf{U}$ を考えてみると, 板の曲げの曲率半径を R とすれば, $\text{div} \mathbf{U}$ は (ℓ/R) のオーダーである。したがって, 板厚 ℓ が十分薄い場合には, $\text{div} \mathbf{U} \simeq 0$ とみなしてもよい。このようなことから (仮定2) を導入したのであるが, この時, 多孔質材内部の音波に対する音圧 p^{in} , 粒子速度の法線成分 u_n^{in} は (4.2.3), (4.2.4) 式から,

$$\left. \begin{aligned} p^{in}(X, z) &= j\rho^*\omega \phi(X, z) , \\ u_n^{in}(X, z) &= \frac{\sigma}{j\rho^*\omega} U_n(X) - \nabla_n \phi(X, z) , \end{aligned} \right\} \quad (4.3.8)$$

で与えられる。ここで（仮定1）を用いた。この（4.3.8）式を，（4.3.7）式に入れると，

$$\begin{aligned} \langle u_n^{in}(X) \rangle &= \frac{1}{\ell} \left\{ \frac{\sigma}{j\rho^*\omega} \ell \cdot U_n + \phi\left(-\frac{\ell}{2}\right) - \phi\left(\frac{\ell}{2}\right) \right\} \\ &= \frac{1}{\ell} \left\{ \frac{\sigma}{j\rho^*\omega} \ell U_n + \frac{1}{j\rho^*\omega} \left(p^{in}\left(-\frac{\ell}{2}\right) - p^{in}\left(\frac{\ell}{2}\right) \right) \right\} , \end{aligned} \quad (4.3.9)$$

を得る。ただし $\phi(X, \pm \frac{\ell}{2})$ を $\phi(\pm \frac{\ell}{2})$ などと略記した。（4.3.9）式を（4.3.6）式に入れると，多孔質板の運動方程式として，最終的に次式を得る。

$$\begin{aligned} &\{ \mathcal{L} + (1 - D(\omega)) \sigma \ell \} [U_n(X)] \\ &= D(\omega) \cdot \{ p(X, -\frac{\ell}{2}) - p(X, \frac{\ell}{2}) \} + f(X) , \end{aligned} \quad (4.3.10)$$

ここで，境界条件（4.2.6）式を用いるとともに，そえ字 in, out は省略した。また

$$D(\omega) = \frac{\sigma}{j\rho^*\omega} + (1-H) , \quad (4.3.11)$$

である。（4.3.10）式により，流体との相互作用を考慮に入れた多孔質板の運動方程式は，音波の物理量としては，板の両面の音圧のみを含んだ形で与えられたことになる。

なお，ここでは，動的な弾性定数の変化は，ほぼ無視できるとして，線型演算子 $\mathcal{L}$ は，真空中でも流体中でも同じ記号を用いた。もし，この仮定が，全く，くずれる場合には，異方性弾性板の振動として扱わねばならない。む

ろん、この時には、流体に対する基礎方程式も、等方性の場合とは異なってくる可能性がある。

次に、等方性は保存されるが、動的弾性定数の値は変化するというのであれば、この時は、 $\mathcal{L}$ の定義式、(4.3.3)式中の動的剛性係数 $\mathcal{D}$ を、流体中の微小振動に対応したものにおきかえればよいことになる。

ただし、4.2節でも、述べたように、空気中での振動を考えるのであれば、多くの材料について、動的弾性率の変化は無視しうるものと考えても、さしつかえはないであろう。

4.3.2 多孔質板内の流体層の運動方程式

前節における考察では、薄い多孔質板の運動方程式は、流体に関する物理量としては、板の両面の音圧差のみを含む形で表わされた。他方、多孔質材内部の音波の挙動は、一般に(4.2.3)–(4.2.5)式の、波動方程式に支配されている。したがって、多孔質板を用いた種々の応用問題においては、多孔質板に対する運動方程式(4.3.10)式と、音波に対する波動方程式(4.2.3)–(4.2.5)式とを、連立させて解けば、所望の解が得られるわけであるが、その過程は多少複雑となる。ところで、板厚 l が音波の波長に対しても十分薄いとみなせる時には、(4.2.3)–(4.2.5)式よりも、もう少し簡単な方程式が使えるようである。本節では、この点に関し、若干の考察を試みる。

今、図4.3.2に示すように、ある位置 X で多孔質板が板面に垂直な速度 $U_n(X)$ で振動しているとし、そこでの板の外部表面での音圧を $p_I(X)$ 、 $p_{II}(X)$ 、粒子速度の法線成分を $u_I(X)$ 、 $u_{II}(X)$ とする。他方、多孔質板の内部の音波の音圧、粒子速度の法線成分は、(4.2.3)、(4.2.4)式から次式で与えられる。

$$p^{in} = j\rho^*\omega\phi, \quad u_n^{in} = \frac{\sigma}{j\rho^*\omega}U_n - r_n\phi. \quad (4.3.12)$$

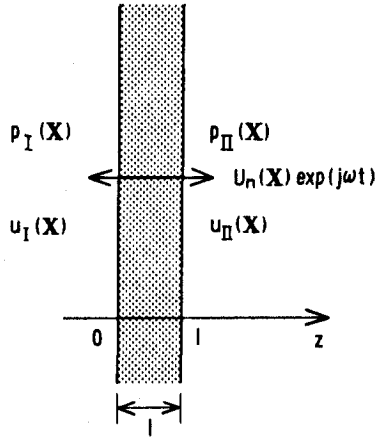


図 4.3.2 多孔質板内の流体層の振動

ところで、本節で我々が問題にしたいのは、多孔質板内部の音圧、粒子速度よりも、多孔質板の外部表面での音圧、粒子速度である。そこで、境界条件 (4.2.6), (4.2.7) 式を考慮に入れ、次のような物理量を導入する。

$$p = p^{in} = j \rho^* \omega \phi, \quad (4.3.13)$$

$$\begin{aligned} u_n &= u_n^{in} + (1 - H) U_n \\ &= D(\omega) \cdot U_n(X) - \nabla_n \phi. \end{aligned} \quad (4.3.14)$$

これら p , u_n は、板の表面では、図 4.3.2 の中の $p_I(X)$, $p_{II}(X)$, $u_I(X)$, $u_{II}(X)$ を表わすことになる。

さて、この u_I , u_{II} は、一般には等しいものではないが、板が十分に薄く、板の内部での板厚方向の流体の圧縮性が無視できる場合には、 $u_I(X) \simeq u_{II}(X)$ としてもよいと考えられる。ところで、音圧は、(4.3.13), (4.3.14) 式からもわかるように、空間座標に関しては、粒子速度に比べ、次数が 1 次高くなっている。そこで、板の厚さ方向に対し、集中定数的な近似をすれば、音圧に対しては、空間座標の 1 次関数、粒子速度に対しては、0 次関数（定数）といった展開表示が期待される。したがって、

$$u_I(X) = D(\omega) U_n(X) - (\nabla_n \phi)_I \equiv u_n(X) \simeq u_{II}(X), \quad (4.3.15)$$

$$\begin{aligned} p_{II}(X) &= p_I(X) + (\nabla_n p)_I \ell = p_I + j \rho^* \omega \ell (\nabla_n \phi)_I \\ &= p_I(X) + j \rho^* \omega \ell \{ D(\omega) U_n(X) - u_n(X) \}, \end{aligned} \quad (4.3.16)$$

あるいは,

$$p_I(X) - p_{II}(X) = j \rho^* \omega \ell \{ u_n(X) - D(\omega) U_n(X) \}, \quad (4.3.17)$$

を得る。(4.3.17)式はまた、多孔質材料中の音波に対する基礎式(4.2.1)、(4.2.2)式のうち、圧縮の式(4.2.2)式を無視し、運動方程式(4.2.1)式のみを考慮し、粒子速度を一定として(4.2.1)式を板の厚さ方向に積分し、さらに表面での境界条件(4.2.6)、(4.2.7)式を考慮することによっても得られる。さて、このようにして得られた(4.3.17)式は、多孔質板内の流体層の運動方程式を、板の外部表面での音圧、粒子速度で表わしたものであり、板の運動方程式(4.3.10)式と結合して解く場合でも、流体音波の波動的表示は板の外部空間だけ考慮すればよいという利点を持っている。

ただし、(4.3.17)式の導出過程からわかるように、板内部での流体の圧縮性が無視できない場合には、波動性を考慮した(4.2.3)–(4.2.5)式にもどって、全空間での境界値問題として扱わなければならない。この点に関し、もう少し考察を加えると次のようになる。第3章で行なったように無限大の板を考えて z 座標以外の座標成分 X に関して2次元フーリエ変換をほどこし、そのスペクトルのみを考えるとする。この時多孔質材中の音圧と粒子速度の z 成分に対する一般解(4.3.12)式を、フーリエ変換し、さらに $z = -\ell, 0$ での境界条件(4.2.6)、(4.2.7)式を考慮すると $z = -\ell, 0$ でのスペクトル間には、第3章と同様に、次の関係が成り立つ。

$$\begin{pmatrix} \mathcal{D}(\mathbf{K}, -\ell) \\ \mathcal{U}_z(\mathbf{K}, -\ell) \end{pmatrix} = \mathbf{K} \begin{pmatrix} \mathcal{D}(\mathbf{K}, 0) \\ \mathcal{U}_z(\mathbf{K}, 0) \end{pmatrix} + (\mathcal{E} - \mathbf{K}) \begin{pmatrix} 0 \\ \mathbf{D} \cdot \mathbf{V}(\mathbf{K}) \end{pmatrix}, \quad (4.3.18)$$

ただし

$$\begin{aligned} \mathcal{D}(\mathbf{K}, z) &= \mathcal{F}[p(X, z)], \quad \mathcal{U}_z(\mathbf{K}, z) = \mathcal{F}[u_z(X, z)], \\ V(\mathbf{K}) &= \mathcal{F}[U_n(X)], \end{aligned}$$

である。また $\mathcal{E}$ は単位行列、 $\mathbf{K}$ は特性行列であり、(3.3.9) 式同様に、

$$\mathbf{K} = \begin{pmatrix} \cos \Gamma_z \ell & , & \frac{j \rho_0 c_0 \zeta r}{\Gamma_z} \sin \Gamma_z \ell \\ \frac{j \Gamma_z}{\rho_0 c_0 \zeta r} \sin \Gamma_z \ell & , & \cos \Gamma_z \ell \end{pmatrix}, \quad (4.3.19)$$

$$\Gamma_z^2 = r^2 - |\mathbf{K}|^2, \quad \zeta = (\rho^* K^*)^{1/2} / \rho_0 c_0,$$

で定義される。さて (4.3.18) 式において

$$\mathcal{D}(\mathbf{K}, 0) / \mathcal{U}_z(\mathbf{K}, 0) \equiv Z_L(\mathbf{K}), \quad (4.3.20)$$

とおき $|\Gamma_z \ell| \ll 1$ のもとで (4.3.19) 式の行列 $\mathbf{K}$ を $\Gamma_z \ell$ の 1 次の項まで展開すると、

$$\begin{aligned} \mathcal{U}_z(\mathbf{K}, -\ell) &= \left\{ 1 + \frac{Z_L(\mathbf{K})}{\rho_0 c_0 \zeta r} \cdot j \Gamma_z \ell \cdot \Gamma_z \right\} \mathcal{U}_z(\mathbf{K}, 0) \\ &= (1 + \beta) \mathcal{U}_z(\mathbf{K}, 0), \end{aligned} \quad (4.3.21)$$

を得る。したがって本節で考察した近似 $u_z(X, -\ell) \simeq u_z(X, 0)$ ，すなわち $\mathcal{U}_z(\mathbf{K}, -\ell) \simeq \mathcal{U}_z(\mathbf{K}, 0)$ が成り立つか否かは、背後条件である $Z_L(\mathbf{K})$ にも依存しているといえる。例えば

$$i) \quad Z_L = \rho_0 c_0 k / (k^2 - |\mathbf{K}|^2)^{1/2} \equiv \rho_0 c_0 k / k_z \text{ の時}$$

これは背後が自由空間の場合であるが、この時

$$|\beta| = \left| \frac{1}{\zeta} \cdot \frac{\Gamma_z}{r} \cdot \frac{k}{k_z} \cdot \Gamma_z \ell \right|, \quad (4.3.22)$$

となり $|\beta| \ll 1$ であるには $|\Gamma_z \ell| \ll 1$ であること、さらに $|k_z|$ があまり小さくならないことが必要となる。 $|\Gamma_z \ell| \ll 1$ は前提条件として成り立っており、 $k \neq |K|$ であるならば、ほぼ $|\beta| \ll 1$ とみなしてよいと考えられる。

ii) $Z_L = \rho_0 c_0 \cdot \frac{k}{j k_z \cdot (k_z L)}$ の時

これは無限大の板の背後に厚さ L の空気層がある時の低周波近似でのインピーダンスの式である（第5章参照）。この時 $|\beta|$ は、

$$|\beta| = \left| \frac{1}{\zeta} \cdot \left(\frac{k}{k_z} \right) \cdot \left(\frac{\Gamma_z}{r} \right) \cdot \frac{\Gamma_z \ell}{k_z L} \right|, \quad (4.3.23)$$

となる。この時には $k \neq |K|$ のもとで $L \gg \ell$ であれば $|\beta|$ は小さくなりうる。

ただし一般には Z_L が大きくなる時もあり、この時には本節で導出した流体層に対する近似式でなく、一般解を用いる必要がある。

4.3.3 $D(\omega) \rightarrow 0$, $D(\omega) \rightarrow 1$ の場合について

前の2節においては、多孔質板、およびその内部の流体層の運動方程式を導出した。それらの式を今一度記すと板、流体層について、それぞれ次式のようになる。

$$\{ \mathcal{L} + (1 - D(\omega)) \sigma \ell \} [U_n] = D(\omega) (p_I - p_{II}) + f(X), \quad (4.3.24)$$

$$p_I - p_{II} = j \rho^* \omega \ell \{ u_n - D(\omega) U_n \}, \quad (4.3.25)$$

あるいは

$$u_n - D(\omega) U_n = \frac{1}{j \rho^* \omega \ell} \cdot (p_I - p_{II}), \quad (4.3.26)$$

ここで p_I, p_{II}, u_n は板の外部表面での音圧と粒子速度の法線成分を表わす。上式には、いずれも、骨格と流体との結合度を示す係数 $D(\omega)$ が含まれているが、本節ではこの $D(\omega)$ が 0 または 1 に近づいた時の様子について若干の考察を行なう。なお、 $D(\omega), \sigma$ などの関数形は (4.3.11), (2.2.7) 式の形のものをを用いることにする。

まず $D(\omega)$ が 1 に近づく場合を考える。このような状態としては、次の 3 つの場合が考えられる。

i) $H \rightarrow 0$ (多孔率が小さい時)

この時 (4.3.24), (4.3.26) 式は次のようになる。

$$\mathcal{L}[U_n] = p_I - p_{II} + f(X), \quad (4.3.27)$$

$$u_n = U_n. \quad (4.3.28)$$

これは、多孔質でない普通の板の方程式と外部流体に対する境界条件である。

ii) $\mu \rightarrow 0$ (低周波の時, μ は (2.2.4) 式参照)

この時 (4.3.24), (4.3.25) 式は次のようになる。

$$\mathcal{L}[U_n] = p_I - p_{II} + f(X), \quad (4.3.29)$$

$$p_I - p_{II} = \frac{\sigma(0)}{H} \ell (u_n - U_n). \quad (4.3.30)$$

この場合、多孔質板の運動方程式は普通の板に対する式と、見かけ上は同じ式になっているが、外部流体に対する境界条件は異なっている。なお (4.3.30) 式の $(\sigma(0) \ell / H)$ は (2.2.7) 式から $(S \sigma_c(0) / H)$ と表現でき、流れ抵抗に相当する。

iii) $S \rightarrow \infty$ (構造因子が大きい時)

この場合は注意を要する。なぜならば、多孔質材料中の音波の波長に比べ板厚が薄いということは、(4.2.5) 式で用いた複素伝搬定数 γ を用いると $|\gamma \ell|$

$\ll 1$ ということになるからである (r は $\sqrt{S}$ に比例する)。しかし、あえて $S \rightarrow \infty$ の極限をとると、(4.3.24), (4.3.26) 式は次のようになる。

$$\{ \mathcal{L} + H j \rho_0 \omega \ell \} [U_n] = p_I - p_{II} + f(X) \quad , \quad (4.3.31)$$

$$u_n = U_n \quad . \quad (4.3.32)$$

(4.3.31) 式は板の単位面積あたり $H \rho_0 \ell$ の重さの流体が内部に閉じ込められて、板といっしょに振動している式となっており、結果としては妥当と思われる式になっている。

一方 $D(\omega)$ が 0 に近づく場合であるが、これは、 $H \simeq 1$ 、 $S \simeq 1$ で $\mu \gg 1$ の高周波の場合におこりうる。この時 (4.3.24), (4.3.25) 式はそれぞれ次のようになる。

$$\{ \mathcal{L} + \sigma \ell \} [U_n] = f(X) \quad , \quad (4.3.33)$$

$$p_I - p_{II} = j \rho^* \omega \ell \cdot u_n \quad . \quad (4.3.34)$$

この場合、板振動と流体層振動との結合が解除された式となっている。

4. 4 多孔質板の運動方程式〔Ⅱ〕

4.3 節では、多孔質板の運動方程式を導出する際に、骨格系の横剪断変形、回転慣性力、及び多孔質板の内部流体の板面内方向の運動に起因する回転力などをすべて無視する扱いをした。これらの近似は板振動における屈曲波の波長 λ が板厚 ℓ に比べ十分長い場合に良い近似を与えるものと推測される。板が多孔質でない場合については Mindlin が上記の弾性体の横剪断変形と回転慣性力を考慮した板の運動方程式を導出し、2つの影響を無視した板の方程式（以後、古典的方程式と呼ぶことにする）の適用限界について考察している。そこで本節では多孔質板について、Mindlin の扱い⁴⁶⁾ にそって上記の影響を入れた運動方程式を導出し、特に流体の回転力の影響について若干の考察を加える。なお、簡単のため用いる座標系は直角座標系を用いるこ

とにする。

4.4.1 Mindlin による板の運動方程式⁴⁶⁾

まず、真空中での板振動に対する Mindlin の扱いの概略と結果についてまとめておく。まず、出発点となる弾性体の運動方程式は、(4.3.1) 式と同じ式である、次式で与えられるものとする。

$$j\rho_s\omega U_i = \sum_j \frac{\partial T_{ij}}{\partial x_j}, \quad (4.4.1)$$

ここで、 T_{ij} は応力テンソルであり $i = 1, 2, 3$ には x, y, z 座標が対応するものとする。また ρ_s は固体の密度、 U_i は振動速度である。

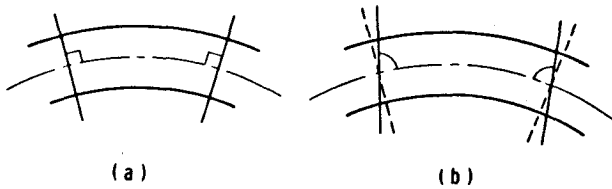


図 4.4.1 板の曲げの状態

- (a) 横剪断変形を無視した時、
- (b) 横剪断変形を考慮に入れた時。

古典的な板の方程式は、(4.4.1) 式を板の厚さ方向に平均化する際に、次の仮定を導入して得られる。

- 1) (4.4.1) 式の第 1, 第 2 式 ($i = 1, 2$) においては左辺の $j\rho_s\omega U_i$ を近似的に 0 とみなす。

(回転慣性力の影響を無視。)

- 2) 板の変形時において、面内方向の変位は、図 4.4.1(a) に示すような変形をする。すなわち、変形前に板に垂直な面 (以後参照面と呼ぶ) は、変形後も板の面に垂直であり、横剪断歪の e_{xz} , e_{yz} 成分は 0 とみなし得る。

Mindlin は、新しい板の方程式を求めるために、上記の 2 つの仮定をゆる

め、次のような仮定を導入した。

- 1') (4.4.1) 式の左辺はそのまま残す。
- 2') 板の変形時において参照面は変形後も平面的であるが、板の面に垂直である必要はない。

これらに加えて、さらに、変形時の板の内部の変位速度のうち、法線成分 U_n の板厚方向の変動は無視するとし、このことに対しては後述するような補正係数を導入している。

以上の仮定のもとに、Mindlin は次の運動方程式を得た。

$$\begin{aligned} & \frac{1}{j\omega} \left\{ B + (\mathcal{D} \nabla_t^2 - J) \left(\nabla_t^2 - \frac{B}{G'\ell} \right) \right\} [U_n] \\ &= \left(1 + \frac{J}{G'\ell} - \frac{\mathcal{D}}{G'\ell} \nabla_t^2 \right) [f(X)], \end{aligned} \quad (4.4.2)$$

ここに

$$B = -\rho_s \ell \omega^2, \quad J = -\rho_s \omega^2 \cdot \left(\frac{\ell^3}{12} \right), \quad (4.4.3)$$

であり、 $U_n(X)$ 、 $f(X)$ 、 $\mathcal{D}$ 、 ℓ は、4.3 節と同じく、それぞれ、板の法線方向の振動速度、外力、剛性係数、板厚である。また ∇_t は 4.3 節の (4.3.3) 式で用いた記号と同じく面内方向の微分を表わす。また、 G' は剪断弾性率 G を用いて

$$G' = AG, \quad (4.4.4)$$

として与えられ係数 A は前述したように、変形時での、法線方向の変位速度 U_n の板厚方向の変動を無視したことに対する補正係数で、ポアソン比によってほぼ一意的に定まる定数である。

(4.4.2) 式で $J \rightarrow 0$ 、かつ、 $G' \rightarrow \infty$ ($\frac{A}{G} \rightarrow \infty$) とすると

$$\frac{1}{j\omega} \{ B + \mathcal{D} \nabla_t^4 \} [U_n] = f(X), \quad (4.4.5)$$

という古典的な方程式になる。

Mindlin の方程式, (4.4.2) 式は, 板の振動を 3 次元的な弾性体の振動とみなした時の厳密解と, かなり良い精度で一致することが確かめられている。また古典的な (4.4.5) 式の適用範囲も調べられており, 板の屈曲振動時の波長を λ とすれば板厚 ℓ を用いると

$$\frac{\ell}{\lambda} \leq 0.2, \quad (4.4.6)$$

の範囲であれば, (4.4.5) 式はかなり良い近似を与えることが報告されている。

4.4.2 流体中での多孔質板の運動方程式

本節では前節の Mindlin の扱いを拡張して, 流体中で振動する多孔質板の運動方程式を求める。本節でも, 多孔質板内の流体の挙動を考える場合には, 骨格系の体積変化の影響は無視しうるとし, 流体に対する運動方程式, 圧縮の式は, (4.2.1), (4.2.2) 式から,

$$\left. \begin{aligned} j \rho^* \omega \mathbf{u}^{in} &= -\nabla p^{in} + \sigma \mathbf{U}, \\ -j \omega p^{in} &= K^* \operatorname{div} \mathbf{u}^{in}, \end{aligned} \right\} \quad (4.4.7)$$

で与えられるものとする。また $p^{in}, \mathbf{u}^{in}$ の一般解は, (4.2.3)–(4.2.5) 式から,

$$p^{in} = j \rho^* \omega \phi, \quad \mathbf{u}^{in} = \frac{\sigma}{j \rho^* \omega} \mathbf{U} - \nabla \phi, \quad (4.4.8)$$

で与えられるものとする。一方, 骨格系の運動方程式も 4.2 節同様に

$$j \rho_s \omega U_i = \sum_j \frac{\partial T_{ij}}{\partial x_j} + \sigma (u_i^{in} - H U_i), \quad (4.4.9)$$

で与えられるものとする。

(4.4.9) 式を Mindlin の扱いに従って板の厚さ方向に平均化し, $p^{in}, \mathbf{u}^{in}$ に対する一般解 (4.4.8) 式と, 多孔質板表面での流体に対する境界条件

$$\left. \begin{aligned} p^{out} &= p^{in} , \\ u_n^{out} &= u_n^{in} + (1-H) U_n , \end{aligned} \right\} \quad (4.4.10)$$

を用いると最終的に運動方程式として次式を得る。

$$\begin{aligned} & \frac{1}{j\omega} \left\{ B' + (\mathcal{D} \nabla_t^2 - J') \left(\nabla_t^2 - \frac{B'}{G'\ell} \right) \right\} [U_n] + \sigma \ell \langle z \nabla_t^2 \phi \rangle \\ &= \left(1 + \frac{J'}{G'\ell} - \frac{\mathcal{D}}{G'\ell} \nabla_t^2 \right) [D \cdot (p_I - p_{II}) + f(X)] , \end{aligned} \quad (4.4.11)$$

ただし p_I, p_{II} は板の表面での音圧であり、

$$B' = B + j\omega(1-D)\sigma\ell = j\omega \{ j\omega\rho_s\ell + (1-D)\sigma\ell \} , \quad (4.4.12)$$

$$\begin{aligned} J' &= J + j\omega(1-D)\sigma \cdot \left(-\frac{\ell^3}{12} \right) \\ &= j\omega \left\{ j\omega\rho_s + (1-D)\sigma \right\} \cdot \left(-\frac{\ell^3}{12} \right) , \end{aligned} \quad (4.4.13)$$

$$D = \frac{\sigma}{j\rho^*\omega} + (1-H) , \quad (4.4.14)$$

である。前節で用いた記号 B, J が B', J' に変わったことは、静止流体中で板が法線方向に振動する時、また板の中正面のまわりに回転する時に現われる、板自身の慣性力や回転慣性力の他に、流体との摩擦力が加わったことを意味している。また (4.4.11) 式の左辺第2項は

$$\sigma \ell \langle z \nabla_t^2 \phi \rangle = \sigma \ell \cdot \frac{1}{\ell} \int_{-\frac{\ell}{2}}^{\frac{\ell}{2}} z \cdot \nabla_t^2 \phi(X, z) dz , \quad (4.4.15)$$

で定義される量であり、多孔質板内部の流体の、板の面内方向の運動に起因する回転力の影響を表わしている。

さて、(4.4.11) 式は固体系の横剪断変形、回転慣性力と、流体の回転力の影響とを同時に含んだ式になっている。これらを別々に入れた式を導くこ

とも、もちろん可能であるが、(4.4.11)式から逆に $J' \rightarrow 0$, または $G' \rightarrow \infty$ として、上記の影響を別々に評価してみると次のようになる。

i) すべて無視した時 ($J' \rightarrow 0$, $G' \rightarrow \infty$, $\sigma \ell < z \nabla_t^2 \phi > \rightarrow 0$)

この時 (4.4.11) 式は次のようになる。

$$\frac{1}{j\omega} \{ B' + \mathcal{D} \nabla_t^4 \} [U_n] = D \cdot (p_I - p_{II}) + f(X). \quad (4.4.16)$$

この式は 4.3 節で導出した (4.3.10) 式に一致する。

ii) 流体の回転力のみ考慮 ($J' \rightarrow 0$, $G' \rightarrow \infty$)

この時 (4.4.11) 式は

$$\begin{aligned} & \frac{1}{j\omega} \{ B' + \mathcal{D} \nabla_t^4 \} [U_n] + \sigma \ell < z \nabla_t^2 \phi > \\ & = D (p_I - p_{II}) + f(X), \end{aligned} \quad (4.4.17)$$

となる。

iii) ii) + 骨格系の回転慣性力を考慮 ($G' \rightarrow \infty$)

この時 (4.4.11) 式は

$$\begin{aligned} & \frac{1}{j\omega} \cdot \{ B' + \mathcal{D} \nabla_t^4 - J' \nabla_t^2 \} [U_n] + \sigma \ell < z \nabla_t^2 \phi > \\ & = D \cdot (p_I - p_{II}) + f(X), \end{aligned} \quad (4.4.18)$$

となる。

次に、上述した式の適用範囲について考察する。前節でも述べたように、Mindlin は真空中での板の振動について、古典的な方程式の適用範囲について考察し、屈曲波の波長 λ と板厚との比 (ℓ/λ) の大小関係により、(ℓ/λ) ≤ 0.2 の時には古典的方程式が良い近似を与えること、(ℓ/λ) > 0.2 の時には、Mindlin の導出した (4.4.2) 式が良い近似を与えることを示した。さらに彼は、古典的な式に、単に板の回転慣性の影響のみを考慮しても、それほど改善はされないことも示している。以上の真空中での考察

から、流体中で振動する多孔質板についても次のようなことがまず結論されうると考えられる。

すなわち、 $(\ell/A) \leq 0.2$ の時には(4.4.16)式、または、さらに流体の回転力の影響のみを加えた(4.4.17)式が良い近似を与えるであろう。一方 $(\ell/A) > 0.2$ の時には、すべてを考慮した(4.4.11)式を用いる必要がある。

そこで前者の $(\ell/A) \leq 0.2$ の時には(4.4.16)式と(4.4.17)式のどちらを使うかということが問題となってくる。この点に関して筆者は、まず図4.4.2(a)に示すように板に、

$$f(X) = F_0 \exp(-jK \cdot X), \quad (4.4.19)$$

で与えられるような、進行波型の駆動力を与え、その時の板の振動速度、あ

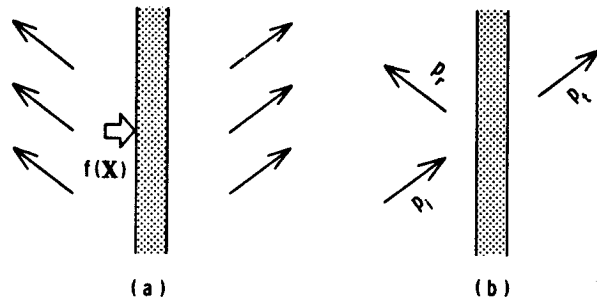


図 4.4.2 流体による回転力の影響の有無

(a) 進行波型の外力による励振、

(b) 平面入射波による励振

るいは放射音場が、板の方程式として(4.4.16)式と(4.4.17)式を採用する場合に、どの程度差が出るかを調べてみた。(4.4.19)式のような駆動力に対して(4.4.16)、(4.4.17)式は、それぞれ

$$\{ Z_P(K) + (1-D) \sigma \ell \} V_1(K) = D \cdot (\mathcal{D}_I(K) - \mathcal{D}_{II}(K)) + F_0, \quad (4.4.16')$$

$$\{ Z_P(K) + (1-D) \sigma \ell \} V_2(K) - \sigma \ell K^2 <_z \phi(K, z) >$$

$$= D \cdot \{ \mathcal{D}_I(K) - \mathcal{D}_{II}(K) \} + F_0, \quad (4.4.17')$$

となる。ただし、 $V_i(K)$, $\mathcal{D}_I(K)$, $\mathcal{D}_{II}(K)$, $\phi(K, z)$ は、空間周波数ベクトル K に対する、 $U_i(X)$, $p_I(X)$, $p_{II}(X)$, $\phi(X, z)$ のスペクトルであり、また、

$$Z_P(K) = j \rho_s \ell \omega + \frac{1}{j \omega} \mathcal{D} K^4, \quad (4.4.20)$$

$$K = |K|, \quad (4.4.21)$$

である。図 4.4.2(a) の場合には、(4.4.16') (4.4.17') 式中の $D \cdot \{ \mathcal{D}_I(K) - \mathcal{D}_{II}(K) \}$ 、および (4.4.17') 式中の $\sigma \ell K^2 <_z \phi(K, z) >$ は、いずれも $V_i(K)$ に比例するのでその比例係数を $\alpha(K)$, $\beta(K)$ とおくと、2つの式での振動速度 V_1 , V_2 の比は

$$\frac{V_2}{V_1} = \frac{Z_P(K) + (1-D) \sigma \ell - \alpha(K)}{Z_P(K) + (1-D) \sigma \ell - \alpha(K) - \beta(K)}, \quad (4.4.22)$$

で与えられる。 β の有無を評価するのに、厳しい条件は、 $Z_P = 0$ となる時、すなわち K が板の自然振動時の波数 K_0 に等しい時であり、この時 (4.4.22) 式は

$$\frac{V_2}{V_1} = \frac{(1-D) \sigma \ell - \alpha(K_0)}{(1-D) \sigma \ell - \alpha(K_0) - \beta(K_0)}, \quad (4.4.23)$$

となる。特に板厚が非常に薄い場合には、

$$\frac{\beta(K_0)}{(1-D) \sigma \ell}, \quad \frac{\beta(K_0)}{\alpha(K_0)} \propto (K_0 \ell)^2, \quad (4.4.24)$$

となることが容易に示され $K_0 \ell = 2 \pi \ell / A_0$ が小さければ流体の回転力の影響は無視してもよいといえる。板厚がそれほど薄くない場合には (4.4.23) 式を数値計算して評価する必要がある。この時には対象とする多孔質材の定数により、幾分かの差はみられるが、数種の例で計算した結果からは、やは

り $K_0 \ell \leq 1.0$ であれば $\beta(K_0)$ は $(1-D)\sigma\ell$ や $\alpha(K_0)$ に比べ無視してよいという結論を得た。むろん、今の議論は、外部駆動力の波長が板の自然振動時の波長に一致した時の話であり、もし $K \neq K_0$ ならば、 $Z_P(K) \neq 0$ となり、制限条件はもう少しゆるくなる。

同様の考察を、図 4.4.2(b)のように、斜め入射の平面波に対する振幅透過率に対して行なったが、同じ結論を得た。

以上の考察から、屈曲波の波長に比べて板厚が薄い場合には、4.3 節で導出した、簡単な表現の多孔質板の運動方程式が比較的良好な近似になっていること、逆に板厚がそれほど薄くない場合には、骨格系の横剪断変形や回転慣性力、および流体の回転力も入れた (4.4.11) 式を用いるべきであることが結論として言えるであろう。ただし、(4.4.11) 式は、式の形も複雑であるし、また、あまり空間周波数の高い振動様式に対しては、本章の前提とした 4.2 節の仮定自体、近似度が悪くなるであろうことも考えるならば、4.3 節の (4.3.10) 式のみにとどめて、多孔質板の挙動に関する大まかな様子だけを求めるとした方が良心的であると考えられる。

4.5 多孔質材を両面に貼付した複合板の運動方程式⁴⁷⁾

本節では、図 4.5.1 に示したような、非多孔質の弾性平板（以下では、基板と呼ぶ）の両面に、異なる多孔質層を直接貼付した複合板が、流体中で振動する場合の運動方程式を導出する。基板に、非多孔質の層を貼付した平板や、はりの運動方程式については、多くの理論的考察がなされている。^{48) - 51)} 本節では、これらの現存する理論のうち、Pister⁵¹⁾

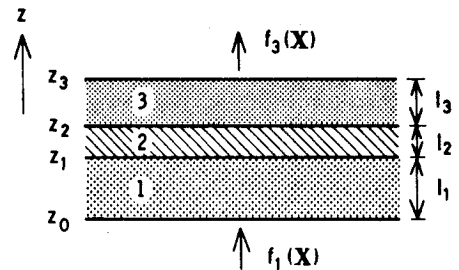


図 4.5.1 多孔質材を両面に貼付した複合板

の扱いを拡張することにより、基板に多孔質層を貼付した複合板が流体中で振動する場合の運動方程式を導出することにする。運動方程式の導出にあたっては、4.2、4.3節で導入した（仮定1）-（仮定5）を、ここでも仮定し、4.2節で整理した基礎方程式を、各層内での音波、弾性波に対する出発点の式とみなす立場をとる。なお、運動方程式の導出にあたっては、簡単のため、直角座標系を用いることにする。

まず、図4.5.1に示した複合板が、真空中で振動する場合を考える。この時、第 m 層の弾性体の微小振動に対する運動方程式が、（4.2.8）式、すなわち、

$$0 \simeq \frac{\partial T_{xx}^m}{\partial x} + \frac{\partial T_{xy}^m}{\partial y} + \frac{\partial T_{xz}^m}{\partial z} , \quad (4.5.1(a))$$

$$0 \simeq \frac{\partial T_{yx}^m}{\partial x} + \frac{\partial T_{yy}^m}{\partial y} + \frac{\partial T_{yz}^m}{\partial z} , \quad (4.5.1(b))$$

$$j \rho_m^s \omega U_z^m = \frac{\partial T_{zx}^m}{\partial x} + \frac{\partial T_{zy}^m}{\partial y} + \frac{\partial T_{zz}^m}{\partial z} , \quad (4.5.1(c))$$

で与えられるものとする。ここに、 ρ_m^s は弾性体の密度、 T_{ij}^m は、動的な応力テンソル成分である。（4.5.1(a)）,（4.5.1(b)）式では、（仮定3）により、左辺を0としてある。また、（仮定1）により、 U_z^m は z 座標に依存しない速度成分となり、同時に、層の番号にも依存しなくなるので、今後単に U と書くことにする。

複合板の運動方程式は、（4.5.1）式を複合板の厚さ全体にわたって平均化することにより得られ、次式で与えられる。⁵¹⁾

$$\mathcal{L}_e[U(X)] = f(X) , \quad (4.5.2)$$

ただし、上式を導出する際、（仮定3）,（仮定4）を用いている。（4.5.2）式で、 $f(X)$ は複合板の表面に働く、単位面積あたりの外力の総計であり、また、 $\mathcal{L}_e$ は次式で定義される演算子である。

$$\mathcal{L}_e = \frac{1}{j\omega} \{ -M_e \omega^2 + \mathcal{D}_e v_t^4 \}, \quad (4.5.3)$$

ここに,

$$M_e = \sum_{m=1}^3 \rho_m^s \ell_m, \quad (4.5.4)$$

$$\mathcal{D}_e = \frac{B_e \cdot D_e - (C_e)^2}{B_e}, \quad (4.5.5)$$

$$B_e = \sum_{m=1}^3 \frac{E_m}{1 - \nu_m^2} \cdot \ell_m, \quad (4.5.6)$$

$$C_e = \sum_{m=1}^3 \frac{E_m}{1 - \nu_m^2} \cdot \frac{1}{2} \cdot (z_m^2 - z_{m-1}^2), \quad (4.5.7)$$

$$D_e = \sum_{m=1}^3 \frac{E_m}{1 - \nu_m^2} \cdot \frac{1}{3} \cdot (z_m^3 - z_{m-1}^3), \quad (4.5.8)$$

である。ただし、 $\ell_m = z_m - z_{m-1}$ は第 m 層の厚さ、 z_m は図 4.5.1 に示したような、各境界面の z 座標の値、 E_m 、 ν_m は、それぞれ、第 m 層の物質の動的なヤング率、ポアソン比である。なお、この E_m は、一般には複素数であり、本論文では E_m は、損失係数 $\eta_m(\omega)$ を用いて

$$E_m = E_m^0 (1 + j \eta_m(\omega)), \quad (4.5.9)$$

のように表わせるものとする。

次に、この複合板が流体中で振動する場合を考える。この時、多孔質材の骨格に対する運動方程式は、流体の存在に起因した動的弾性定数の変化などは無視できるとし、(4.2.12) 式、すなわち、

$$0 \simeq \frac{\partial T_{xx}^m}{\partial x} + \frac{\partial T_{xy}^m}{\partial y} + \frac{\partial T_{xz}^m}{\partial z}, \quad (4.5.10(a))$$

$$0 \simeq \frac{\partial T_{yx}^m}{\partial x} + \frac{\partial T_{yy}^m}{\partial y} + \frac{\partial T_{yz}^m}{\partial z}, \quad (4.5.10(b))$$

$$j \rho_m^s \omega U \simeq \frac{\partial T_{zx}^m}{\partial x} + \frac{\partial T_{zy}^m}{\partial y} + \frac{\partial T_{zz}^m}{\partial z} + \sigma_m (u_{m,z}^{in} - H_m U), \quad (4.5.10(c))$$

で与えられるものとする。ここに σ_m , $u_{m,z}^{in}$ は、それぞれ、第 m 層の多孔質材中の音波に対する結合係数、粒子速度の z 成分、また、 H_m は第 m 層の多孔質材の多孔率である。

さて、図 4.5.1 の 3 層の複合板に対し、第 1, 第 3 層の多孔質層には (4.5.10) 式を、また、中央の非多孔質層には (4.5.1) 式を適用し、これらの式を複合板の厚さ全体にわたって、(4.5.1) 式から (4.5.2) 式を導出した時と同じように平均化すると、流体中で振動する 3 層の複合板の運動方程式として次式を得る。

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_e [U(X)] = & \sigma_1 \ell_1 \{ \langle u_z^{in}(X) \rangle_1 - H_1 U(X) \} \\ & + \sigma_3 \ell_3 \{ \langle u_z^{in}(X) \rangle_3 - H_3 U(X) \} \\ & + (1-H_1) p(X, z_0) + H_1 p(X, z_1) \\ & - \{ (1-H_3) p(X, z_3) + H_3 p(X, z_2) \} + f(X), \end{aligned} \quad (4.5.11)$$

ここに、 $p(X, z_m)$ は、 $z = z_m$ での音圧である。なお、上式を導出する際、次のような、動的応力テンソル成分に対する境界条件を用いた。

$$\left. \begin{aligned} T_{zz}^1(X, z_0) &= - (1-H_1) p(X, z_0) - f_1(X), \\ T_{zz}^3(X, z_3) &= - (1-H_3) p(X, z_3) + f_3(X), \\ f(X) &= f_1(X) + f_3(X), \\ T_{zz}^2(X, z_1) &= T_{zz}^1(X, z_1) - H_1 p(X, z_1), \\ T_{zz}^2(X, z_2) &= T_{zz}^3(X, z_2) - H_3 p(X, z_2), \end{aligned} \right\} \quad (4.5.12)$$

なお、音圧に関しては、(4.2.6) 式から、音波の存在する所では、常に連続となるので、そえ字 m , in , out は省略した。

(4.5.11) 式において, $\langle u_z^{in}(X) \rangle_m$ は音波の粒子速度の z 成分を, 多孔質層の厚さ ℓ_m にわたって平均した量であり, 次式で定義される。

$$\langle u_z^{in}(X) \rangle_m = \frac{1}{\ell_m} \int_{z_{m-1}}^{z_m} u_{m,z}^{in}(X, z) dz. \quad (4.5.13)$$

ところで, 多孔質材中の音波に対する一般解は, (4.2.3), (4.2.4) 式で与えられているので, 第 m 層中 ($z_{m-1} \leq z \leq z_m$) の音波に対する一般解は,

$$\left. \begin{aligned} p(X, z) &= j \rho_m^* \omega \phi_m(X, z), \\ u_{m,z}^{in}(X, z) &= \frac{\sigma_m}{j \rho_m^* \omega} U(X) - \frac{\partial \phi_m(X, z)}{\partial z} \end{aligned} \right\} \quad (4.5.14)$$

で与えられる。(4.5.14) 式を (4.5.13) 式に入れることにより,

$$\begin{aligned} \langle u_z^{in}(X) \rangle_m &= \frac{1}{\ell_m} \left\{ \frac{\sigma_m \ell_m}{j \rho_m^* \omega} U(X) + \phi_m(X, z_{m-1}) - \phi_m(X, z_m) \right\} \\ &= \frac{1}{j \rho_m^* \omega \ell_m} \left\{ \sigma_m \ell_m U(X) + p(X, z_{m-1}) - p(X, z_m) \right\}, \end{aligned} \quad (4.5.15)$$

を得る。なお, ρ_m^* は第 m 層の多孔質材中の音波に対する等価密度である。

(4.5.15) 式を (4.5.11) 式に入れると複合板の運動方程式に対する最終的な形として次式を得る。

$$\begin{aligned} &\{ \mathcal{L}_e + (1-D_1) \sigma_1 \ell_1 + (1-D_3) \sigma_3 \ell_3 \} [U(X)] \\ &= \{ D_1 p(X, z_0) + (1-D_1) p(X, z_1) \} \\ &\quad - \{ D_3 p(X, z_3) + (1-D_3) p(X, z_2) \} \\ &\quad + f(X), \end{aligned} \quad (4.5.16)$$

ただし,

$$D_m = \frac{\sigma_m}{j \rho_m^* \omega} + (1-H_m), \quad (4.5.17)$$

である。

(4.5.16) 式には、骨格と流体との結合度を表わす係数 D_m が含まれているが、4.3.3 節での議論と同じく、 D_m の値によっては、(4.5.16) 式は特別の形をとることになる。

まず、 $D_m \simeq 1$ 、例えば非常に低周波の時、(4.5.16) 式は、非多孔質の層から成る複合板の運動方程式に一致する。

他方、 $D_m \simeq 0$ 、すなわち多孔率 $H_m \simeq 1$ 、構造因子 $S_m \simeq 1$ で非常に高周波の場合には、(4.5.16) 式は次のような形になる。

$$\begin{aligned} & \{ \mathcal{L}_e + \sigma_1 \ell_1 + \sigma_3 \ell_3 \} [U(X)] \\ &= p(X, z_1) - p(X, z_2) + f(X) . \end{aligned} \quad (4.5.18)$$

また、どちらか一方の多孔質層の厚さが 0 の時、例えば $\ell_1 = 0$ とすると、(4.5.16) 式は、

$$\begin{aligned} & \{ \mathcal{L}_e + (1 - D_3) \sigma_3 \ell_3 \} [U(X)] \\ &= p(X, z_1) - \{ D_3 p(X, z_3) + (1 - D_3) p(X, z_2) \} \\ &+ f(X) , \end{aligned} \quad (4.5.19)$$

となる。ただし、上式の $\mathcal{L}_e$ は (4.5.3) - (4.5.8) 式で $\ell_1 = 0$ としたものである。

4.6 薄い多層状の多孔質材で構成された複合板の振動

本節では、図 4.6.1 に示したような、 N 個の薄い多孔質層から成る複合板が、流体中で振動する場合の振動特性について考察する。本節の前半では、板の運動方程式の導出を、また、後

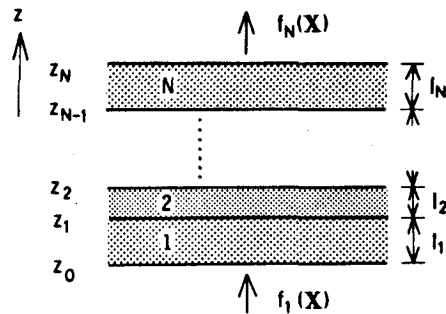


図 4.6.1 多層状多孔質板

半では、複合板の厚さ全体にわたって、音波の圧縮性が無視できる場合に有効な、流体層の運動方程式を導出する。なお、本節の議論も、4.2, 4.3節で導入した（仮定1）-（仮定5）が成り立つ範囲のものとする。

4.6.1 N 層多孔質複合板の運動方程式

運動方程式を求めるに先立ち、基本方程式を整理しておく。まず、音波についての議論を行なう。第 m 層中（ $z_{m-1} \leq z \leq z_m$ ）の音波に対する運動方程式、圧縮の式は、（4.2.1）,（4.2.2）式から、

$$j \rho_m^* \omega \mathbf{u}_m^{in} = -\nabla p_m^{in} + \sigma_m \mathbf{U}^m, \quad (4.6.1)$$

$$-j \omega p_m^{in} = K_m^* \operatorname{div} \mathbf{u}_m^{in}, \quad (4.6.2)$$

で与えられるものとする。ここに ρ_m^* , K_m^* , σ_m は第 m 層中の音波に対する等価密度, 等価体積弾性率, 結合係数である。また, p_m^{in} , $\mathbf{u}_m^{in}$ は第 m 層内部の音圧, 粒子速度, $\mathbf{U}^m$ は骨格の振動速度である。（仮定2）のもとでは, p_m^{in} , $\mathbf{u}_m^{in}$ に対する解は, 次式で与えられる。

$$p_m^{in} = j \rho_m^* \omega \phi_m, \quad (4.6.3)$$

$$\mathbf{u}_m^{in} = \frac{\sigma_m}{j \rho_m^* \omega} \mathbf{U}^m - \nabla \phi_m, \quad (4.6.4)$$

ただし, ϕ_m は

$$(\nabla^2 + \gamma_m^2) \phi_m = 0, \quad \gamma_m^2 = \omega^2 \frac{\rho_m^*}{K_m^*}, \quad (4.6.5)$$

の解である。

音波に対する境界条件であるが、板の内部の境界面（ $z = z_{m-1}$, $m = 2, 3, \dots, N$ ）においては、次式が要求される。

$$p_m^{in}(X, z_{m-1}) = p_{m-1}^{in}(X, z_{m-1}), \quad (4.6.6)$$

$$\begin{aligned}
 & u_{m,z}^{in}(X, z_{m-1}) + (1 - H_m) U(X) \\
 & = u_{m-1,z}^{in}(X, z_{m-1}) + (1 - H_{m-1}) U(X) .
 \end{aligned} \tag{4.6.7}$$

ただし, $u_{m,z}^{in}$ は u_m^{in} の z 成分を表わし, また, (仮定 1) により, U_z^m は共通なので U とした。なお, H_m は第 m 多孔質材の多孔率である。

板の外部表面, $z = z_0, z_N$ における音波に対する境界条件は,

$$p^{out}(X, z) = p^{in}(X, z) , \tag{4.6.8}$$

$$u_z^{out}(X, z) = u_z^{in}(X, z) + (1 - H) U(X) , \tag{4.6.9}$$

で与えられる。そえ字 *out* は $z \geq z_N$, または, $z \leq z_0$ における音波の物理量を表わすものとし, 上式の右辺は, 考えている面に接している多孔質材や, その中の音波に関する物理量を表わすものとする。

一方, 多孔質材の骨格に対する運動方程式は, (4.2.12) 式から, $z_{m-1} \leq z \leq z_m$ の範囲では,

$$j \rho_m^s \omega U_i^m = \sum_j \frac{\partial T_{ij}^m}{\partial x_j} + \sigma_m (u_{m,i}^{in} - U_i^m) , \tag{4.6.10}$$

で与えられるものとする。ここに ρ_m^s , T_{ij}^m は第 m 層の骨格の密度, 動的応力テンソル成分である。

複合板の運動方程式は, (4.6.10) 式を, 4.5 節と同様の過程で, 複合板の厚さ全体にわたって平均化することにより得られ, 次のようになる。

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}_e[U(X)] &= \sum_{m=1}^N \sigma_m \ell_m \{ \langle u_z^{in}(X) \rangle_m - H_m U(X) \} \\
 &+ (1 - H_1) p(X, z_0) - (1 - H_N) p(X, z_N) \\
 &+ \sum_{m=2}^N \{ H_{m-1} p(X, z_{m-1}) - H_m p(X, z_{m-1}) \} \\
 &+ f(X) ,
 \end{aligned} \tag{4.6.11}$$

ここに, $p(X, z_m)$ は, $z = z_m$ での音圧を表わす。なお, 音圧は前述した

ように、至るところで連続なので、簡単のため、そえ字 m , in , out は省略した。また、(4.6.10) 式中の $U_z^m(X, z)$ は (仮定 1) により $U(X)$ とした。(4.6.11) 式において、 $f(X)$ は板の外部表面の単位面積あたりに働く外力の総計、また、

$$\left. \begin{aligned} \mathcal{L}_e &= \frac{1}{j\omega} \{ -M_e \omega^2 + \mathcal{D}_e \nabla_t^4 \} , \\ M_e &= \sum_{m=1}^N \rho_m^S \ell_m , \quad \ell_m = z_m - z_{m-1} , \\ \mathcal{D}_e &= \frac{B_e \cdot D_e - (C_e)^2}{B_e} , \\ B_e &= \sum_{m=1}^N \frac{E_m}{1 - \nu_m^2} \cdot \ell_m , \\ C_e &= \sum_{m=1}^N \frac{E_m}{1 - \nu_m^2} \cdot \frac{1}{2} \cdot (z_m^2 - z_{m-1}^2) , \\ D_e &= \sum_{m=1}^N \frac{E_m}{1 - \nu_m^2} \cdot \frac{1}{3} \cdot (z_m^3 - z_{m-1}^3) , \end{aligned} \right\} \quad (4.6.12)$$

であり、 E_m , ν_m は、第 m 層の物質の動的なヤング率、ポアソン比である。

なお、(4.6.11) 式を導出する際、動的応力テンソル成分に関する、次のような境界条件を用いた。

$$\left. \begin{aligned} T_{zz}^1(X, z_0) &= - (1 - H_1) p(X, z_0) - f_1(X) , \\ T_{zz}^N(X, z_N) &= - (1 - H_N) p(X, z_N) + f_N(X) , \\ f(X) &= f_1(X) + f_N(X) , \\ T_{zz}^m(X, z_{m-1}) &= H_m \cdot p(X, z_{m-1}) \\ &= T_{zz}^{m-1}(X, z_{m-1}) - H_{m-1} \cdot p(X, z_{m-1}) , \end{aligned} \right\} \quad (4.6.13)$$

ただし、 $m = 2, 3, \dots, N$ である。

(4.6.11) 式における $\langle u_z^{in}(X) \rangle_m$ は、(4.5.13) 式と同じ意味の

$u_{m,z}^{in}(X, z)$ の平均値であり，運動方程式 (4.6.1) 式，あるいは，一般解 (4.6.3)，(4.6.4) 式を用いることにより，次式で与えられる。

$$\begin{aligned} \langle u_z^{in}(X) \rangle_m &\equiv \frac{1}{\ell_m} \int_{z_{m-1}}^{z_m} u_{m,z}^{in}(X, z) dz \\ &= \frac{1}{j \rho_m^* \omega \ell_m} \left\{ \sigma_m \ell_m U(X) + p(X, z_{m-1}) - p(X, z_m) \right\}. \end{aligned} \quad (4.6.14)$$

(4.6.14) 式を，(4.6.11) 式に代入することにより， N 層多孔質複合板の運動方程式に対する最終的な形として，次式を得る。

$$\begin{aligned} &\left\{ \mathcal{L}_e + \sum_{m=1}^N (1 - D_m) \sigma_m \ell_m \right\} [U(X)] \\ &= D_1 p(X, z_0) - D_N p(X, z_N) \\ &+ \sum_{m=2}^N \{ (1 - D_{m-1}) - (1 - D_m) \} p(X, z_{m-1}) \\ &+ f(X), \end{aligned} \quad (4.6.15)$$

ここに，

$$D_m = \frac{\sigma_m}{j \rho_m^* \omega} + (1 - H_m), \quad (4.6.16)$$

$m = 1, \dots, N$ ，である。

(4.6.15) 式において， D_m を 0，または，1 に近づければ，4.3.3 節，4.5 節と同様の議論が可能となる。特に，3 層の場合を考え， $H_2 = 0$ とすることにより， $D_2 = 1$ とすると，(4.6.15) 式は，4.5 節で考えた複合板の運動方程式 (4.5.16) 式に一致することが容易に確かめられる。

また，4.3 節で導出した単層の多孔質板に対する運動方程式は，(4.6.15) 式で $\ell_m = 0$ ($m \geq 2$) とし，音圧の連続性を考慮することにより得られる。

4.6.2 流体層の運動方程式

前節においては， N 層多孔質複合板の運動方程式を導出した。したがって，

各種の応用問題においては、この運動方程式 (4.6.15) 式と、音波に対する一般解 (4.6.3)–(4.6.5) 式とを結合させ、境界条件 (4.6.6)–(4.6.9) 式のもとで解けばよいことになる。

ところで、4.3.2 節では単層の多孔質板内の流体層に対する運動方程式を導出した。 N 層の場合にも、複合板の厚さ全体にわたって、流体の板の厚み方向の圧縮性が無視できる場合には、単層の時と同じ意味での、流体層の運動方程式の導出が期待できる。本節では、この点についての考察を行なう。

まず、境界条件 (4.6.6)–(4.6.9) 式を考慮に入れ、次のような新しい物理量を導入する。

$$\begin{aligned} u_{m,z}^{out} (X, z) &= u_{m,z}^{in} (X, z) + (1-H_m) U(X) \\ &= D_m(\omega) \cdot U(X) - \frac{\partial}{\partial z} \phi_m(X, z) \\ &\equiv u_z(X), \end{aligned} \quad (4.6.17)$$

$$p_m^{out} (X, z) = p_m^{in} (X, z) = j \rho_m^* \omega \phi_m \equiv p(X, z), \quad (4.6.18)$$

ただし、(4.6.17) 式の最後の式は、複合板の厚さ全体について、粒子速度の z 成分の変動は無視するという仮定により、 $u_z(X)$ とおいた。これらの新しい量 $u_z(X)$ 、 $p(X, z)$ は各境界面で連続になる。さて、(4.6.17)、(4.6.18) 式に対し、4.3.2 節と同様の操作をすることにより、次式を得る。

$$\begin{aligned} p(X, z_{m-1}) - p(X, z_m) \\ = j \rho_m^* \omega \ell_m \cdot \{ u_z(X) - D_m(\omega) \cdot U(X) \}, \end{aligned} \quad (4.6.19)$$

ただし、 $m = 1, 2, \dots, N$ である。(4.6.19) 式を、 m について和をとると、

$$\begin{aligned} p(X, z_0) - p(X, z_N) \\ = \left(\sum_{m=1}^N j \rho_m^* \omega \ell_m \right) \cdot u_z(X) - \left(\sum_{m=1}^N j \rho_m^* \omega \ell_m \cdot D_m(\omega) \right) \cdot U(X), \end{aligned} \quad (4.6.20)$$

を得る。これが、求める流体層の運動方程式であり、音圧、粒子速度などは、すべて複合板の表面でのもののみから構成されている。

また、本節の近似のもとでは、複合板内部の境界面 $z = z_M$ ($M = 1, 2, \dots, N-1$) における音圧は、(4.6.19) 式から、

$$p(X, z_0) - p(X, z_M) = \left(\sum_{m=1}^M j \rho_m^* \omega \ell_m \right) \cdot u_z(X) - \left(\sum_{m=1}^M j \rho_m^* \omega \ell_m \cdot D_m(\omega) \right) \cdot U(X), \quad (4.6.21)$$

となり、板の表面での音圧を用いて表わしうる。したがって、(4.6.20)、(4.6.21) 式を、(4.6.15) 式に入れることにより、複合板の運動方程式は、板の表面での音圧のみを用いて表わされたことになる。

以上述べたように、本節では、4.3 節で述べた単層多孔質板に対する議論を、 N 層の場合に拡張することを試みたわけであるが、ここで導出した流体層の運動方程式に対しても、4.3 節同様の、適用限界に関する諸注意が必要なことは、言うまでもない。

4.7 結 言

本章では、多孔質材料で構成された、種々の、単一、および、複合弾性平板が流体中で振動する場合に関して、理論的な考察を行なった。

最初に、単一の多孔質材で構成された、薄い弾性板の振動を取り上げた。まず、板厚が弾性波の波長に比べ十分薄いとして、多孔質板の運動方程式を導出した。また、音波の波長に比べても板厚が薄い場合を想定し、多孔質板内の流体層に対する運動方程式を導出した。これらの方程式は、いずれも、音波の物理量としては、板の表面での音圧、粒子速度の法線成分のみを含む簡単な形をしており、将来、種々の応用例を解析する上において、有用な基礎方程式になるものと考えられる。なお、これらの近似式に対し、流体層の運動方程式については、流体の板内部での圧縮性による適用限界について考

察をし、また、多孔質板の運動方程式については、骨格系の横剪断変形、回転慣性力、および、流体の板の面内方向の運動に起因する回転力などの効果を含んだ、より一般的な運動方程式を導出し、前述した薄板の方程式の適用限界について、若干の考察を行なった。

第2の場合として、非多孔質の弾性平板の両面に、異なる多孔質層を直接貼付した複合板を取り上げ、その運動方程式を導出した。この構造の板は、現在、軽量遮音材として用いられている材料の一種に相当し、本章で導出した運動方程式は、この構造板を遮音板、あるいは、遮音箱の材料などに用いた時の性能を評価する場合に、出発点ともなる基本方程式である。

第3の場合として、多層の多孔質材から成る、多孔質複合板の振動について考察を行ない、複合板の運動方程式の導出を行なった。なお、この複合板の運動方程式の特殊な場合として、前述した、第1、第2の場合の、単一多孔質板や複合板の運動方程式が得られる旨、言及した。また、この多層状多孔質板の場合についても、多孔質板内の流体層に対する簡単な形の運動方程式を導出した。

以上述べたように、本章では、多孔質材で構成された平板状弾性板の振動方程式を導出するという基礎的な理論考察を行なった。これらの運動方程式は、今後、応用例の特性を評価するうえにおいて、基礎方程式になるものと考えられる。ただし、これらの式の導出時には、本文中にも述べたように種々の仮定をしており、そのため、得られた方程式には適用限界がある点、注意して用いるべきである。

第 5 章 多孔質板吸音材の吸音特性について

5.1 緒 言

部屋の音響設計においては、種々の吸音特性を持つ音響材料を使い分けることにより、所望の特性を達成するのが普通である。このような吸音材のひとつとして、背後に空気層を有する構造の多孔質板吸音材があげられる。この吸音材の吸音特性に関する実験的考察としては、残響室法による測定が牧田他³⁾により、また木村⁴⁾により行なわれている。その測定結果は、いずれも、低域においては板振動によると考えられるピークがみられ、また、中高域においては、静止した多孔質材料としての吸音特性が観測されている。このように、多孔質板吸音材は、低域専用の板振動型吸音材と、中高域専用の多孔質型吸音材の両方の特性を合わせ持つという点では、実用的立場からも興味深い吸音材といえる。

ところで、このような吸音材の吸音特性に関する理論的考察であるが、板振動型吸音材や多孔質型吸音材に関しては、基本的な1次元モデル²⁾、あるいは、もう少し現実に近いモデルについて^{52), 53)}、若干の考察は報告されている。ただし、実験でよく行なわれる残響室の音場の影響まで入れた完全な理論はまだ完成されていないようである。他方、多孔質板吸音材については著者の知るかぎりにおいては、簡単なモデルでの定量的考察さえもまだ行なわれていないのが現状と考えられる。そこで本章では、多孔質板吸音材の吸音特性を説明するための最も基本的な考察として、2～3のモデルに対し、前章で導出した式を用いて定量的考察を試みることにする。なお、多孔質板の運動方程式としては、4.3節で導出した、板内部の横剪断変形や回転慣性力などを無視した式を用いることにする。

5. 2 1次元モデル³¹⁾

本節では、多孔質板吸音材の最も簡単なモデルとして、板振動型吸音材の説明でもよく用いられている、図5.2.1に示すような1次元モデルについて解析を行なうことにする。

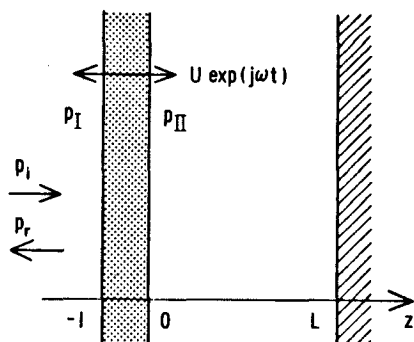


図 5. 2. 1 多孔質板吸音材
(1 次元モデル)

ここでいう1次元モデルとは、実際の多孔質板吸音材では、板は有限の大きさであり、振動時

には必ずしも屈曲振動を伴い、共振点も無限に存在するのであるが、このような高次の振動モードの影響を無視し、板振動の様子を、単一共振系の簡単な機械インピーダンスで描写するという手法である。したがって、機械インピーダンスの回路定数などは、多少天下りの与えざるを得ない弱点はある。しかしながら、式が簡単で物理的意味がわかりやすいこと、また、板振動型吸音材の場合に、この1次元モデルでも、ある程度現象を説明するのに成功しているということから、まずこのモデルについて考察することにする。なお入射音波は垂直入射の平面波とし、また空洞は空気のみという場合に議論を限ることにする。

ここでは、まず、板も、多孔質板内の流体音波についても集中定数的な扱いをした時のノーマル音響インピーダンスを求め、次に多孔質板内の流体音波については波動性を考慮した場合のノーマル音響インピーダンスを求める。最後に、これらの結果をもとにした吸音率の数値計算例を示す。

5.2.1 多孔質板のノーマル音響インピーダンス (I)

本節では、板、および多孔質板内の流体層を両方共、集中定数的に扱う場合のノーマル音響インピーダンスを求める。今、図5.2.1の系を考える。こ

の時，多孔質板および流体層に関する運動方程式は，第4章（4.3.10），
（4.3.17）式から，

$$\{ Z_p + (1-D) \sigma \ell \} U = D (p_I - p_{II}) , \quad (5.2.1)$$

$$p_I - p_{II} = j \rho^* \omega \ell (u - DU) , \quad (5.2.2)$$

となる。ただしここで $\mathcal{L}[U] = Z_p U$ とした。 Z_p は多孔質板自身の単位面積あたりの機械インピーダンスである。

さて， $z = -\ell$ からみた，この吸音材のノーマル音響インピーダンスを Z_n とし， $z = 0$ からみた空洞のインピーダンスを Z_L とし， $p_I = Z_n u$ ， $p_{II} = Z_L u$ とおいて， Z_n について解くと

$$Z_n = Z_L + \frac{Z_p' \cdot K_{12}'}{Z_p' + D^2 K_{12}'} , \quad (5.2.3)$$

を得る。ここで $K_{12}' = j \rho^* \omega \ell$ であり，また Z_p' は

$$Z_p' = Z_p + (1-D) \sigma \ell , \quad (5.2.4)$$

で与えられる。（5.2.3）式から，多孔質板のインピーダンスは Z_p' と $D^2 K_{12}'$ との並列結合のインピーダンスに比例することとなり， Z_p' ， $D^2 K_{12}'$ の大きさに差がある時には，どちらか一方の性質が大きく現われてくることになる。また Z_p' と $D^2 K_{12}'$ の大きさが同程度の場合には，板振動と流体層振動の間に結合が生ずることが期待される。

5.2.2 多孔質板のノーマル音響インピーダンス（II）

前節では，多孔質板および流体層の両方共を集中定数的扱いをした。しかし，この時用いた多孔質材料中の板厚方向の非圧縮性の仮定は，少なくとも内部流体層については，中高域では近似度が悪くなることも予想される。そこで本節では，板については前節同様，集中定数的扱いをし，流体層についてのみ波動性を考慮した場合の，多孔質板のノーマル音響インピーダンスを求める。再び図 5.2.1 の系を考える。この時，多孔質板内部の流体音波に

については、(4.2.3), (4.2.4) 式の 1 次元の場合として、一般解は次式で与えられる。

$$p^{in}(z) = j\rho^*\omega \{ A \exp(-jrz) + R \exp(jrz) \} ,$$

$$u^{in}(z) = \frac{\sigma}{j\rho^*\omega} U + jr \{ A \exp(-jrz) - R \exp(jrz) \} , \quad (5.2.5)$$

ただし ρ^* , σ , r は多孔質材中の音波に対する等価密度, 結合係数, 伝搬定数である。上式において未定係数 A , R を $p^{in}(0)$, $u^{in}(0)$ で表わし, また, 多孔質材表面での境界条件 (4.2.6), (4.2.7) 式を用いると, 多孔質板の外部表面での音圧, 粒子速度の関係式として次式を得る。

$$\begin{pmatrix} p^{out}(-\ell) \\ u^{out}(-\ell) \end{pmatrix} = K \begin{pmatrix} p^{out}(0) \\ u^{out}(0) \end{pmatrix} + (\mathcal{E} - K) \begin{pmatrix} 0 \\ D \cdot U \end{pmatrix} . \quad (5.2.6)$$

ここに $\mathcal{E}$ は単位行列, K は特性行列であり, 次式で定義される。

$$K = \begin{pmatrix} \cos r\ell & , & j\rho_0 c_0 \zeta \sin r\ell \\ \frac{j}{\rho_0 c_0 \zeta} \sin r\ell & , & \cos r\ell \end{pmatrix} , \quad (5.2.7)$$

ここに ρ_0 , c_0 は自由空間での流体の密度, 音速であり, ζ は多孔質材の特性インピーダンス密度である。(5.2.6) 式で $p^{out}(-\ell) = Z_n u^{out}(-\ell)$, $p^{out}(0) = Z_L \cdot u^{out}(0)$ において Z_n を Z_L , K_{ij} , U など表わし, さらに (5.2.1) 式を連立させると最終的に Z_n として次式を得る。

$$Z_n = \frac{A_1 \cdot Z_p' + A_2 \cdot D(\omega) \cdot Z_L}{A_3 \cdot Z_p' + D(\omega) (A_1 \cdot A_4 + A_2 \cdot A_3 - A_4 \cdot Z_L)} , \quad (5.2.8)$$

ここに

$$\left. \begin{aligned} A_1 &= K_{11} Z_L + K_{12} , & A_2 &= K_{12} \cdot D(\omega) , \\ A_3 &= K_{21} Z_L + K_{22} , & A_4 &= (1 - K_{22}) \cdot D(\omega) , \end{aligned} \right\} \quad (5.2.9)$$

である。また Z_p' は (5.2.4) 式で与えたものである。

他方、多孔質板が静止した時の、多孔質材料としての Z_n は

$$Z_n = \frac{A_1}{A_3} , \quad (5.2.10)$$

で与えられる。また多孔質でない、普通の板振動型吸音材としての Z_n は

$$Z_n = Z_p + Z_L , \quad (5.2.11)$$

として与えられる。

以上、いくつかの場合のノーマル音響インピーダンス Z_n を求めたわけであるが、この Z_n が与えられた時の吸音率 α は

$$\alpha = \left| \frac{2Z_s}{Z_n + Z_s} \right|^2 \frac{\operatorname{Re}(Z_n)}{\operatorname{Re}(Z_s)} , \quad (5.2.12)$$

で与えられる。ただし Z_s は入射波の音圧を、入射波の粒子速度の z 成分で割ったインピーダンス成分であり、垂直入射の場合には、特性インピーダンス $\rho_0 c_0$ に一致する。

5.2.3 数値計算例

本節においては 5.2.1 , 5.2.2 節での解析をもとに、多孔質板吸音材の 1 次元モデルに対する、垂直入射吸音率の数値計算例を示す。計算モデルとして Z_p , Z_L については次式を採用することにする。

$$Z_p = j\omega M + r = j\omega \rho_s \left(\frac{\rho_s}{\rho_0} \right) \ell + \rho_0 c_0 R , \quad (5.2.13)$$

$$Z_L = -j\rho_0 c_0 \cot kL , \quad (5.2.14)$$

ここに M , ρ_s は多孔質板の面密度、密度であり、 ρ_0 , c_0 は自由空間での空気の密度、音速、 $k = \omega / c_0$, L は背後空気層の厚さである。また (5.2.13) 式では、板の剛性は無視してあり、 $r = \rho_0 c_0 R$ は抵抗分である。これらの Z_p における剛性や抵抗分は、本来は、板の運動方程式を適当な境界条件のもとで解いて得られるべき量であり、板のヤング率、内部損失係数、さらに

境界条件などによって定まる量である。しかし、1次元モデルの場合には、ある程度天下りの的に与えざるを得ない。ここでは剛性は無視し、 $R = 0.2$ 、 $(\rho_s / \rho_0) = 250.0$ とした。

このような条件のもとで図5.2.2には、多孔率 $H = 0.6$ 、構造因子 $S = 3.0$ 、毛細管の径 $2a = 0.1 \text{ mm}$ 、 $\ell = 1.2 \text{ cm}$ 、 $L = 9.0 \text{ cm}$ とした時の吸音率を、(5.2.8)式をもとに計算した例を示す。図には同時に同じ Z_P をもつ多孔質でない板の吸音率、および多孔質板が静止しているとした時の、多孔質吸音材としての吸音率を示した。また、同じモデルについて、 Z_n の式として(5.2.3)式によるものと、(5.2.8)式によるものとを比較したものを図5.2.3に示す。図5.2.2から、低域においては、板自身の共振周波数より少し高い所にピークが現われ、また、中高域においては、静止した多孔質材料の吸音特性に速やかに近づいていることがわかる。また、低域のピークよりも低周波側では、板振動の影響のために、多孔質板としての吸音率は、静止した多孔質材料としての吸音率よりも急激に小さくなっている。このような現象は、5.2.1節の終わりに述べたように、ごく低域では板自身のインピーダンス Z_P よりも、静止多孔質材としてのインピーダンスの方が大きくなった結果、主に板振動の特性が現われ、逆に高周波域では、インピーダンスの大小関係が逆になって、主に、静止多孔質材料としての性質が顕著になったためにおこったものと考えられる。また、図5.2.3の例では、板振動と、その内部の流体層の振動との間に結合が生ずるような低周波数域においては、近似式(5.2.3)式でも、かなり現象を説明しうることが推測される。しかし圧縮性が無視できなくなる中高域、特に空洞のインピーダンス Z_L が大きくなるような所では、(5.2.3)式の近似度が悪くなっていることがわかる。ところで、5.2.1節でも述べたように、板振動と流体層の振動とが結合するためには、板自身のインピーダンスの大きさと、静止多孔質材料としてのインピーダンスの大きさが同じ程度になることが必要となる。図5.2.4には、毛細管径 $2a$ を0.05, 0.1, 0.2 mmと変え、他の条件は図5.2.2の例と

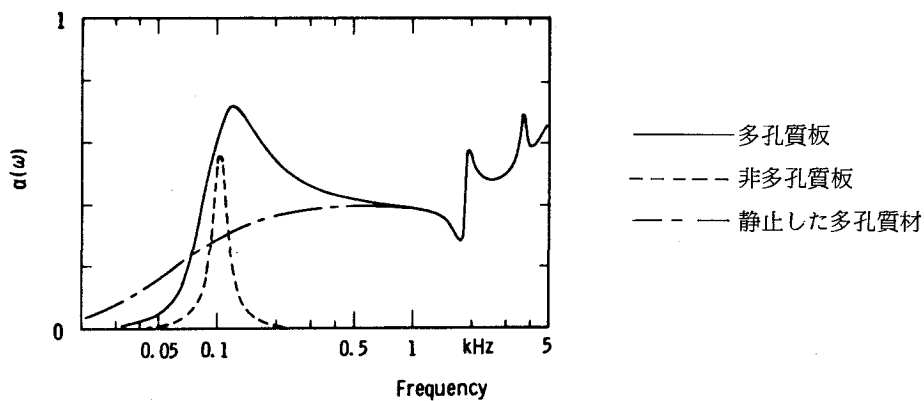


図 5.2.2 吸音率の計算値

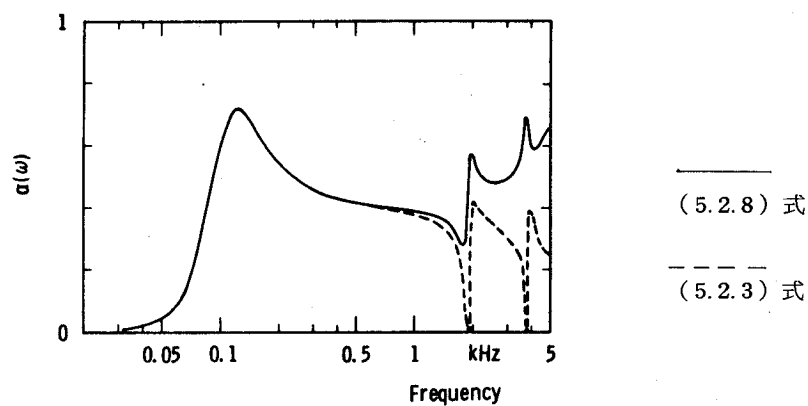


図 5.2.3 異なるノーマル音響インピーダンスの式による吸音率の計算値

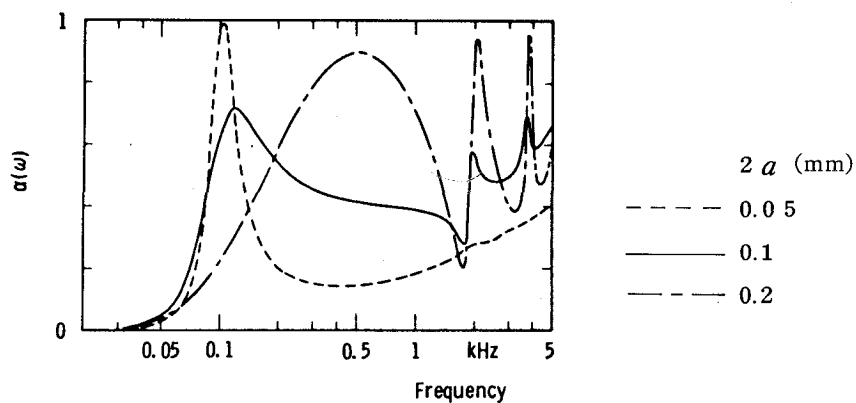


図 5.2.4 異なるセルサイズ $2a$ に対する吸音率

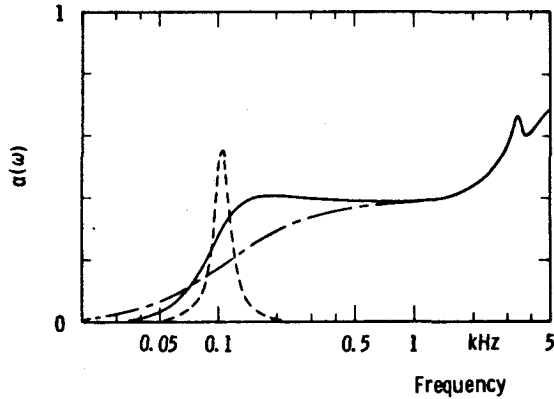


図 5.2.5 吸音率の他の計算例

$$\begin{aligned} \text{計算条件: } H &= 0.35, S = 1.0, 2a = 0.1\text{mm}, \\ \ell &= 2.4\text{ cm}, L = 4.5\text{ cm}, \\ (\rho_s / \rho_0) &= 250.0, R = 0.2. \end{aligned}$$

同じにした時の吸音率を (5.2.8) 式をもとに計算し、比較図示した。図から、毛細管径が大きい場合には、板振動と流体層の振動との結合は、ほとんど観測されず、単に静止多孔質材料としての特性を示していることがわかる。このように、板振動の影響が、どの程度現われるかは、静止多孔質材料としてのインピーダンスに依存するものであるから、 H , S , a などの多孔質材料としての定数を適当に制御できる場合には、図 5.2.5 に示したように、吸音率の周波数応答において、低域の肩を持ち上げ、しかも、ピークがあまり目立たないような特性を得ることも可能と考えられる。

5.3 有限の大きさの多孔質板吸音材〔I〕

前節では、多孔質板吸音材の最も基本的なモデルとして 1 次元モデルを考え、その吸音率について考察した。得られた結果は大体実験結果と同じ傾向にはなっており、多孔質板吸音材の吸音機構に関する基本的な知識は得られたものと考えられる。しかしながら、1 次元モデルは、板振動の様子を単一共振型の機械インピーダンスで描写するという手法であり、そこでは、有限

の大きさの板が振動する場合の高次の共振モードの影響などは直接には反映されておらず、また、機械インピーダンスの定数なども多少天下り式に与えざるを得なかった。

そこで、本節、および次節では、より現実に近いと考えられる簡単なモデルを設定し、そのモデルに対して境界値問題を解くという立場から解析を行ない、板の振動モードの吸音率に与える影響について若干の考察を試みることにする。

本節では、まず、回折の影響を伴わない例として、円筒内に設置された多孔質板吸音材モデルについて考察する。

5.3.1 多孔質板吸音材の吸音特性

ここでは、多孔質板吸音材のモデルとして、図 5.3.1 に示すようなモデルを考え、その吸音特性について考察する。

すなわち、半径 b の剛体でできた円筒の端が、また剛壁で閉じられており、その直前に厚さ L の空気層を介して多孔質板が取り付けられているというモデルを考える。入射波としては、平面波が右方から垂直入射するものとする。このようなモデルと同じ配置のもの、すなわち、板が多孔質でない場合については、Ford⁵³⁾ や平泉他⁵²⁾

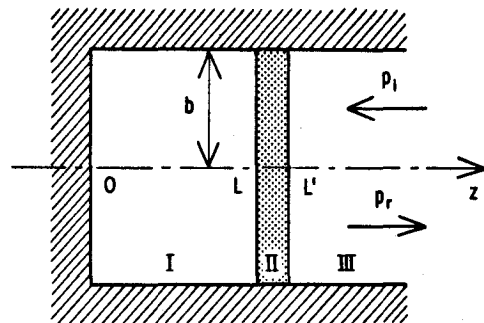


図 5.3.1 円形パイプ中に取り付けられた多孔質板吸音材

が解析を行なっているので、ここでは前著者の解析を、多孔質板の場合に拡張した議論をすることにする。

なお、1次元モデルの所でも述べたように、多孔質板の振動と流体層の振動との結合が重要になるのは比較的低周波域であること、また解析の容易さ

を考へて、多孔質板内の流体音波の扱いとしては一般解 (4.2.3) - (4.2.5) 式ではなく、流体層方程式 (4.3.17) 式を用いることにする。

まず、多孔質板の外の空間 I, III における速度ポテンシャルの形を考える。空間 I, III での速度ポテンシャル ϕ の満たす方程式はヘルムホルツの式

$$(\nabla^2 + k^2) \phi = 0, \quad (5.3.1)$$

である。ここに $k = \omega / c_0$, c_0 は自由空間での音速である。さらに $r = 0$ での有限性、系の軸対称性、および $r = b$ での

$$-\frac{\partial \phi}{\partial r} = 0, \quad (5.3.2)$$

の境界条件を考慮すると、第 I 領域の速度ポテンシャルは一般に、

$$\phi^1(r, z) = \sum_m \{ A_m^1 \exp(-j k_m z) + R_m^1 \exp(j k_m (z-L)) \} \rho_m(r), \quad (5.3.3)$$

とおける。ここに

$$\rho_m(r) = \frac{1}{\sqrt{\pi} b J_0(\beta_m)} J_0\left(\frac{\beta_m}{b} r\right), \quad (5.3.4)$$

$$k_m = \left\{ k^2 - \left(\frac{\beta_m}{b}\right)^2 \right\}^{1/2}, \quad (5.3.5)$$

であり、 $J_n(r)$ は n 次のベッセル関数、また β_m は

$$J_0'(\beta_m) = -J_1(\beta_m) = 0, \quad (5.3.6)$$

の根である。(5.3.4) 式で定義した $\rho_m(r)$ は、

$$\int_S \rho_m(r) \rho_n(r) dS \equiv \langle \rho_m | \rho_n \rangle = \delta_{mn}, \quad (5.3.7)$$

の性質をもつ規格直交関数である。なお、今後簡単のために半径 b の円内での、2つの関数の内積を (5.3.7) 式のような記号で表わすことにする。また δ_{mn} はクロネッカーのデルタである。

一方第 III 領域の速度ポテンシャル ϕ^3 であるが、今入射波を、

$$R_0 \exp(jk(z-L')) = R_0 \exp(jk(z-L')) \sqrt{\pi} b \rho_1(r), \quad (5.3.8)$$

とすると ($\rho_1(r)$ は実は $1/\sqrt{\pi} b$ なる定数である), $\phi^3(r)$ は,

$$\phi^3(r, z) = R_0 \exp(jk(z-L')) \sqrt{\pi} b \rho_1(r) + R_0 \exp(-jk(z-L')) \sqrt{\pi} b \rho_1(r) + \sum_m A_m^3 \exp(-jk_m(z-L')) \rho_m(r),$$

とおける。なお音圧 p , 粒子速度 u は, ϕ から (5.3.9)

$$p = j \rho_0 c_0 k \phi, \quad u = -\nabla \phi, \quad (5.3.10)$$

として与えられる。ここに ρ_0 は流体の密度である。

次に多孔質板の振動に関してであるが, 多孔質板の運動方程式, および, 流体層の運動方程式は (4.3.10), (4.3.17) 式から,

$$\left\{ \mathcal{L} + (1-D) \sigma \ell \right\} [U] = D \left\{ p^1(r, L) - p^3(r, L') \right\}, \quad (5.3.11)$$

$$p^1(r, L) - p^3(r, L') = F \left\{ u - DU \right\}, \quad (5.3.12)$$

となる。ここで u, U はそれぞれ流体層, 多孔質板の振動速度であり D, σ などの定義は (4.3.10), (4.3.17) 式と同じものとする。また,

$$F = j \rho^* \omega \ell, \quad (5.3.13)$$

$$\mathcal{L} = \frac{1}{j\omega} \left\{ -\rho_s \ell \omega^2 + \mathcal{D} \nabla_t^4 \right\}, \quad (5.3.14)$$

である。なお, ここでは $\mathcal{D}$ には多孔質板自身の損失係数 η を入れ

$$\mathcal{D} = \mathcal{D}_0 (1 + j\eta), \quad (5.3.15)$$

とする。板の振動姿態も適当な直交関数で展開した形で表わすことが可能である。今, 板の境界条件として, $r = b$ で固定されている, すなわち境界条件が $r = b$ で,

$$U(b) = 0, \quad \frac{\partial U}{\partial r} = 0, \quad (5.3.16)$$

で与えられるとする。このような場合に適当な直交関数 φ_m として、ここでは次式で与えられる φ_m を採用する。

$$\varphi_m(r) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} b} \left\{ \frac{J_0\left(\frac{\alpha_m}{b} r\right)}{J_0(\alpha_m)} - \frac{I_0\left(\frac{\alpha_m}{b} r\right)}{I_0(\alpha_m)} \right\}, \quad (5.3.17)$$

ここに $I_n(x)$ は第 n 次の変形ベッセル関数である。また α_m は $\varphi'_m(\alpha_m) = 0$ の根、すなわち

$$I_0(\alpha_m) J_1(\alpha_m) + I_1(\alpha_m) J_0(\alpha_m) = 0, \quad (5.3.18)$$

の根である。また $\varphi_m(r)$ は固有方程式

$$\mathcal{D}_0 \nabla_t^4 \varphi_m = \mathcal{D}_0 \left(\frac{\alpha_m}{b}\right)^4 \varphi_m, \quad (5.3.19)$$

の解であり、

$$\varphi_m(b) = 0, \quad \varphi'_m(b) = 0, \quad (5.3.20)$$

$$\langle \varphi_m | \varphi_n \rangle = \delta_{mn}, \quad (5.3.21)$$

の性質を有する。なお、式の整理上

$$\mathcal{D}_0 \left(\frac{\alpha_m}{b}\right)^4 = \mathcal{D}_0 K_m^4 = \rho_s \ell \omega_m^2, \quad (5.3.22)$$

で定義した固有角周波数 ω_m を今後用いることにする。この φ_m を用いると、多孔質板の振動速度 $U(r)$ は

$$U(r) = \sum_m B_m \varphi_m(r), \quad (5.3.23)$$

と表わせる。

他方、流体層の振動速度 $u(r)$ は、 ϕ^3 を用いると、

$$u(r) = - \frac{\partial \phi^3(r, L')}{\partial z} = \sum_m j k_m A_m^3 \rho_m(r), \quad (5.3.24)$$

として表わされる。

以上により、すべての場の物理量は、未定係数 A_m^1, A_m^3, B_m を用いて表わされたことになる。以後は境界条件などを利用して、これらの未定係数を

入射波の振幅 $\sqrt{\pi} b R_0$ で表わせばよいことになる。まず、 $z = 0$ では粒子速度の z 成分が 0 であるから、

$$-\left. \frac{\partial \phi^1}{\partial z} \right|_{z=0} = 0 = \sum_m j k_m \{ A_m^1 - R_m^1 \exp(-j k_m L) \} \rho_m(r),$$

を得る。さらに $\{ \rho_m \}$ の直交性を用いると、

$$R_m^1 = A_m^1 \exp(j k_m L),$$

$$\phi^1(r, z) = \sum_m A_m^1 \{ \exp(-j k_m z) + \exp(j k_m z) \} \rho_m(r), \quad (5.3.25)$$

となる。次に $z = L, L'$ での粒子速度の z 成分の連続性、 $u_z^1 = u, u_z^3 = u$ から、次の条件式を得る。

$$\sum_m j k_m A_m^1 \{ \exp(-j k_m L) - \exp(j k_m L) \} \rho_m(r) = \sum_n j k_n A_n^3 \rho_n(r),$$

あるいは

$$A_m^1 \{ \exp(-j k_m L) - \exp(j k_m L) \} = A_m^3. \quad (5.3.26)$$

次に多孔質板の運動方程式 (5.3.11) 式と、流体層方程式 (5.3.12) 式とを組み合わせると、

$$\{ \mathcal{L} + (1-D) \sigma \ell + D^2 F \} [U] = D \cdot F \cdot u, \quad (5.3.27)$$

を得る。この U, u に (5.3.23), (5.3.24) 式を代入し $\varphi_m(r)$ の直交性を用いると次の条件式を得る。

$$\begin{aligned} & \{ j \omega \rho_s \ell (1 - (\frac{\omega_m}{\omega})^2 (1 + j \eta)) + (1-D) \sigma \ell + D^2 F \} B_m \\ & = D \cdot F \cdot \sum_n j k_n A_n^3 \langle \varphi_m | \rho_n \rangle. \end{aligned} \quad (5.3.28)$$

また、流体層の方程式 (5.3.12) 式の $p^1(r, L), p^3(r, L'), u, U$ に (5.3.9), (5.3.10), (5.3.23), (5.3.24), (5.3.25) 式を入れ、 φ_m の直交性を用いると、

$$\begin{aligned}
-F \cdot D \cdot B_m &= j \rho_0 c_0 k \sum_n A_n^1 \{ \exp(-j k_n L) + \exp(j k_n L) \} \langle \varphi_m | \rho_n \rangle \\
&\quad - j \rho_0 c_0 k \{ 2 \sqrt{\pi} b R_0 \langle \varphi_m | \rho_1 \rangle + \sum_n A_n^3 \langle \varphi_m | \rho_n \rangle \} \\
&\quad - F \sum_n j k_n A_n^3 \langle \varphi_m | \rho_n \rangle, \tag{5.3.29}
\end{aligned}$$

を得る。ただし、上式の $\langle \rho_m | \rho_n \rangle$ はベッセル関数の性質を用いると最終的に、

$$\begin{aligned}
\langle \varphi_m | \rho_n \rangle &= \int_S \varphi_m(r) \rho_n(r) dS \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}} \left\{ \frac{1}{\alpha_m^2 - \beta_n^2} \cdot \frac{2 \alpha_m J_1(\alpha_m)}{J_0(\alpha_m)} - \frac{1}{\alpha_m^2 + \beta_n^2} \cdot \frac{2 \alpha_m I_1(\alpha_m)}{I_0(\alpha_m)} \right\} \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{2 \alpha_m J_1(\alpha_m)}{J_0(\alpha_m)} \left[\frac{1}{\alpha_m^2 - \beta_n^2} + \frac{1}{\alpha_m^2 + \beta_n^2} \right], \tag{5.3.30}
\end{aligned}$$

で与えられる。ここで固有値方程式 (5.3.18) 式を用いた。

以上で未定係数 A_m^1 , A_m^3 , B_m 間の関係式 (5.3.26), (5.3.28), (5.3.29) 式が与えられたわけである。これらは項数は無限個となっているが、実際の数値計算をする場合には項数を $m=1$ から M までの有限個に打ち切って行なうものとする。この時、(5.3.26), (5.3.28), (5.3.29) 式は未知ベクトル A^1 , A^3 , B および既知ベクトル R_0 を含む 3 つの有限次元の連立方程式になっており、 A^1 , A^3 , B はすべて R_0 を用いて表わされることになる。ただし、

$$(A^1)_m = A_m^1, (A^3)_m = A_m^3, (B)_m = B_m, (R_0)_m = 2 \sqrt{\pi} b R_0 \delta_{m1}, \tag{5.3.31}$$

である。このようにして未知ベクトル A^1 , A^3 , B が定まれば、各領域の音場、板の振動状態も定まったことになる。

特に今考察している吸音率 α であるが、 α は、

$$\alpha = \frac{W_{ab} \text{ (実際吸音されるパワー)}}{W_i \text{ (入射パワー)}} , \quad (5.3.32)$$

で定義される。今の場合,

$$\begin{aligned} W_i &= \frac{-1}{2} \operatorname{Re} \left[\int_S p_i(r, L') \overline{u_{iz}(r, L')} dS \right] \\ &= \frac{-1}{2} \operatorname{Re} \left[\int_S (j \rho_0 c_0 k \sqrt{\pi} b R_0) \overline{(-j k \sqrt{\pi} b R_0)} \rho_1 \cdot \rho_1 dS \right] \\ &= \frac{1}{2} \rho_0 c_0 k^2 |\sqrt{\pi} b R_0|^2 , \end{aligned} \quad (5.3.33)$$

$$\begin{aligned} W_{ab} &= \frac{-1}{2} \operatorname{Re} \left[\int_S p^3(r, L') \overline{(u_z^3(r, L'))} dS \right] \\ &= \frac{-1}{2} \operatorname{Re} \left[\int_S \left\{ j \rho_0 c_0 k \cdot 2 \sqrt{\pi} b R_0 \cdot \rho_1 + j \rho_0 c_0 k \sum_m A_m^3 \rho_m \right\} \right. \\ &\quad \left. \cdot \overline{\left\{ \sum_n j k_n A_n^3 \rho_n \right\}} dS \right] \\ &= \frac{-1}{2} \rho_0 c_0 k^2 \cdot \operatorname{Re} \left[2 \sqrt{\pi} b R_0 \overline{(A_1^3)} + \sum_m \left(\frac{\overline{k_m}}{k} \right) |A_m^3|^2 \right] , \end{aligned} \quad (5.3.34)$$

となる。ただし、 $\overline{X}$ は X の共役複素数を意味する。この時、次式を得る。

$$\alpha = - \frac{4}{|2 \sqrt{\pi} b R_0|^2} \cdot \operatorname{Re} \left[2 \sqrt{\pi} b R_0 \overline{(A_1^3)} + \sum_m \left(\frac{\overline{k_m}}{k} \right) |A_m^3|^2 \right] . \quad (5.3.35)$$

あるいは、 R_0 は任意に選べるので、

$$2 \sqrt{\pi} b R_0 = 1 ,$$

と選ぶと、

$$\alpha = -4 \operatorname{Re} \left[\overline{(A_1^3)} + \sum_m \left(\frac{\overline{k_m}}{k} \right) |A_m^3|^2 \right] , \quad (5.3.36)$$

となる。

5.3.2 板振動型吸音材の吸音特性

図 5.3.1 と同じ配置で、板が多孔質でない場合の吸音特性については前述した平泉他⁵²⁾が行なっているのでここでは詳細は省くことにし、基礎方程式と境界条件のみを述べておく。

今、板の面密度 ρ_{sl} ，剛性係数 $\mathcal{D} = \mathcal{D}_0(1 + j\eta)$ が、前節で考察した多孔質板と同じとし、前節と同じ記号を用いることにすると、板の運動方程式は

$$\mathcal{L}[U] = p^1(r, L) - p^3(r, L') \quad , \quad (5.3.37)$$

で与えられる。他方 $z = L, L'$ での境界条件は、

$$u_z^1(r, L) = U(r) = u_z^3(r, L') \quad , \quad (5.3.38)$$

として与えられるので、後は前節と同様に、 p, u, U などを固有関数展開の形で表わし、未定係数を求めればよい。

5.3.3 数値計算例

本節では 5.3.1 節の解析をもとに、一例について数値計算を行ない、5.2 節の 1 次元モデルの結果との比較を行なう。図 5.3.2 には、多孔率 $H = 0.6$ ，構造因子 $S = 3.0$ ，毛細管径 $2a = 0.1 \text{ mm}$ ，板厚 $\ell = 1.2 \text{ cm}$ ，空洞の深さ $L = 9.0 \text{ cm}$ ， $(\rho_s / \rho_0) = 250.0$ という、図 5.2.2 の 1 次元モデルの時と同じ定数をもち、さらに、空洞の半径 $b = 5.0 \text{ cm}$ ，ヤング率 $E = 1 \times 10^9 \text{ dyne/cm}^2$ ，ポアソン比 0.33 ，損失係数 $\eta = 0.1$ の場合の吸音材について、吸音率を数値計算した結果を示す。図には同時に、多孔質板と同じ機械定数をもつ、非多孔質板の吸音特性を示した。

また、図 5.3.2 の多孔質板の吸音特性と、図 5.2.2 の 1 次元モデルの多孔質板の吸音特性を比較したものを、図 5.3.3 に示す。

以上の結果から、板自身の最低次の振動モードに対する共振周波数が、空洞の深さと板の面密度とで定まる共振周波数よりも十分低い場合には（多く

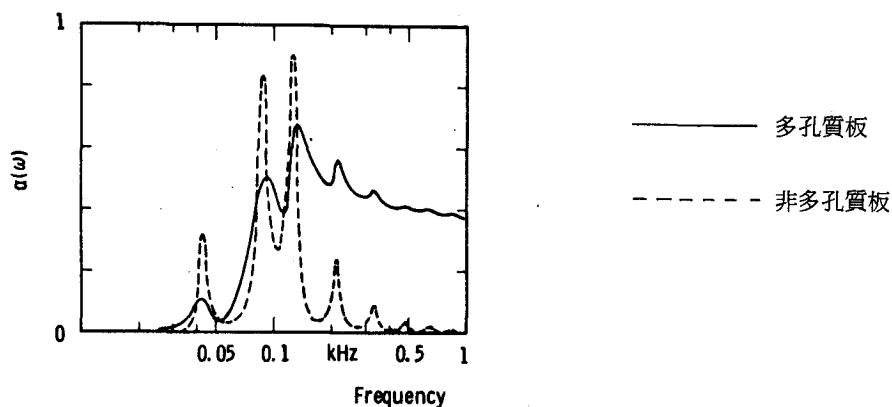


図 5.3.2 吸音率に対する板のモード振動の影響 (I)

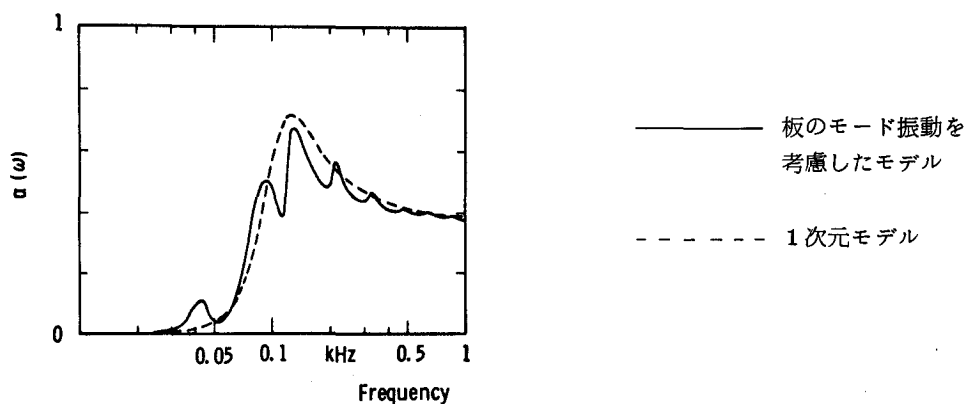


図 5.3.3 1次元モデルとの比較

の実用例ではこの状態はなりたっているものと考えられるが), 多孔質板の吸音特性は1次元モデルでも, かなり良く説明しうるといってもよいと考えられる。ただし, これは数値計算結果をみていっているだけであり, 証明をしたわけではない。

5. 4 有限の大きさの多孔質板吸音材〔Ⅱ〕

(回折の影響を含む場合)

前節では、板振動の影響を考慮に入れた場合の一例として円筒内に取り付けられた多孔質板吸音材について考察した。本節では他の基本的な例として、無限大バッフルの一部に装着された多孔質板吸音材の吸音特性について考察する。このモデルと前節のモデルとの違いとして予想されるのは、低域での吸音率が本節の場合には回折効果により大きくなるであろうということである。この効果は、いわゆる面積効果といわれているものであるが、その定量的な解析例は、吸音面の性質にローカルアクションの仮定をした場合に比較的少数の解析例があるだけであり、²⁾ 特に板振動型吸音材については、また多孔質板吸音材についてはもちろん、筆者自身はその前例をみていない。そこでここでは、多孔質板吸音材、および、板振動型吸音材が壁に孤立して装着された場合を想定し、その吸音率について若干の考察を行なう。なお、本節でも、入射音波は垂直入射の平面波に限ることにする。

5. 4. 1 多孔質板吸音材の吸音特性

本節では図 5. 4. 1 に示したように、無限大バッフルの一部に半径 b の円形の多孔質板吸音材が取り付けられている場合を考察することとし、座標系を同図に示したようにとる。なお、数式中の記号は特に断わらないかぎり、前節と同じ記号を用いることにする。

まず第 I 領域 ($-(L + \ell) \leq z \leq -\ell$) での速度ポテンシャル $\phi^1(r, z)$ は、前節と同様にして、

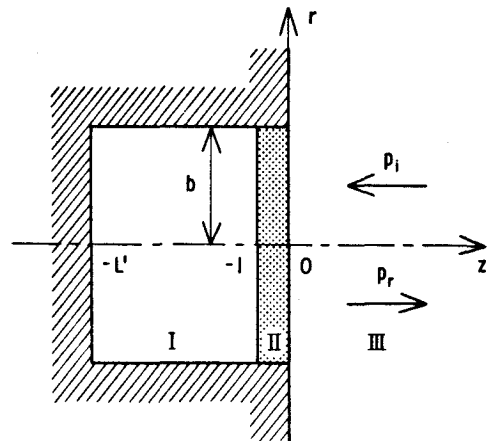


図 5. 4. 1 無限大バッフル中の多孔質板吸音材

一般に,

$$\phi^1(r, z) = \sum_m \left\{ A_m \exp(-j k_m(z + L')) + R_m \exp(j k_m(z + \ell)) \right\} \cdot \rho_m(r) \quad (5.4.1)$$

と表わされる。ここに,

$$\left. \begin{aligned} L' &= L + \ell, \\ \rho_m(r) &= \frac{1}{\sqrt{\pi} b J_0(\beta_m)} J_0\left(\frac{\beta_m}{b} r\right), \\ J_1(\beta_m) &= 0, \\ k_m &= \left\{ k^2 - \left(\frac{\beta_m}{b}\right)^2 \right\}^{1/2}, \end{aligned} \right\} \quad (5.4.2)$$

であり, $\rho_m(r)$ は次の規格直交性を有する。

$$\langle \rho_m | \rho_n \rangle = \int_S \rho_m(r) \rho_n(r) dS = \delta_{mn} \quad (5.4.3)$$

さらに $z = -L'$ での境界条件,

$$-\left. \frac{\partial \phi}{\partial z} \right|_{z=-L'} = u_z^1(r, -L') = 0,$$

から, $\phi^1(r, z)$ は係数 A_m のみを用いて次のように表わされる。

$$\phi^1(r, z) = \sum_m A_m \{ \exp(-j k_m(z + L')) + \exp(j k_m(z + L')) \} \cdot \rho_m(r) \quad (5.4.4)$$

なお, この ϕ^1 から第 I 領域の音圧, 粒子速度は,

$$p^1(r, z) = j \rho_0 c_0 k \phi^1(r, z), \quad u^1 = -\nabla \phi^1 \quad (5.4.5)$$

で与えられる。

次に第 III 領域 ($z \geq 0$) の音場を考える。今, 入射波は右方から伝搬してくる垂直入射の平面波とし, 次式で与えられるとする。

$$\phi_i = R_0 \exp(jkz) = \sqrt{\pi} b R_0 \exp(jkz) \cdot \rho_1(r). \quad (5.4.6)$$

この時、第Ⅲ領域の速度ポテンシャル $\phi^3(r, z)$ は、

$$\phi^3(r, z) = \sqrt{\pi} b R_0 \exp(jkz) \rho_1 + \sqrt{\pi} b R_0 \exp(-jkz) \rho_1 + \phi_r, \quad (5.4.7)$$

とおける。ここに、上式の第2項は鏡面反射成分を、また第3項は吸音材の開口部での境界条件をみたすように定められる反射成分である。この ϕ_r は、開口部での（未定の）粒子速度の z 成分を、

$$u(r, 0) = - \left. \frac{\partial \phi_r}{\partial z} \right|_{z=0}, \quad (5.4.8)$$

とおけば次式で与えられることになる。¹²⁾

$$\phi_r(r, z) = \frac{1}{2\pi} \int_{S'} \frac{\exp(-jk|X-X'|)}{|X-X'|} \cdot u(r', 0) dS', \quad (5.4.9)$$

ここに X' は $z=0$ の開口面上での位置を表わすベクトルである。なお、上式の $u(r, 0)$ は未定ではあるが、本節で考察するように多孔質板内の流体音波について、流体層の運動方程式を適用する場合には、 $z=-\ell$ での粒子速度の z 成分に等しくなり、

$$u(r, 0) = - \left. \frac{\partial \phi^1}{\partial z} \right|_{z=-\ell} = \sum_m jk_m A_m \left\{ \exp(-jk_m L) - \exp(jk_m L) \right\} \rho_m(r), \quad (5.4.10)$$

のように、未定係数 A_m を用いて表わすことが可能となる。

次に多孔質板の振動姿態について考察する。多孔質板、および、多孔質板内の流体層の運動方程式は、

$$\left\{ \mathcal{L} + (1-D)\sigma\ell \right\} [U] = D \left\{ p^1(r, -\ell) - p^3(r, 0) \right\}, \quad (5.4.11)$$

$$p^1(r, -\ell) - p^3(r, 0) = F(u - DU), \quad (5.4.12)$$

で与えられる。ここに $F = j\rho^*\omega\ell$ であり、また、

$$\left. \begin{aligned} \mathcal{L} &= \frac{1}{j\omega} \left\{ -\rho_s \ell \omega^2 + \mathcal{D} \nabla_t^4 \right\}, \\ \mathcal{D} &= \mathcal{D}_0 (1 + j\eta), \end{aligned} \right\} \quad (5.4.13)$$

である。また U, u はそれぞれ多孔質板、および流体層の振動速度であり、板が周辺固定の状態に取りつけられているとして、前節同様に規格直交関数 $\varphi_m(r)$ を用いて、

$$U = \sum_m B_m \varphi_m(r), \quad (5.4.14)$$

と展開できる。なお $\varphi_m(r)$ は (5.3.17) 式で与えたものであり、(5.3.18) - (5.3.22) 式の性質を持つものとする。

以上で、すべての場の量は直交関数系 $\{\rho_m\}$, $\{\varphi_m\}$ によって表わされたことになる。以後は未定係数 A_m , B_m を定めることになるが、その前に (5.4.11), (5.4.12) 式中の $p^3(r, 0)$ を後の考察に便利のように変形しておく。 $p^3(r, 0)$ は (5.4.7) 式から

$$\begin{aligned} p^3(r, 0) &= j\rho_0 c_0 k \phi^3(r, 0) \\ &= j\rho_0 c_0 k \left\{ 2\sqrt{\pi} b R_0 \rho_1 + \frac{1}{2\pi} \int_{S'} \frac{\exp(-jk|X-X'|)}{|X-X'|} u(r', 0) dS' \right\} \\ &\equiv j\rho_0 c_0 k \left\{ 2\sqrt{\pi} b R_0 \rho_1 + \sum_m H_m \rho_m(r) \right\}, \end{aligned} \quad (5.4.15)$$

と表わされる。ここに

$$\begin{aligned} H_m &= \frac{1}{2\pi} \int_S \int_{S'} \frac{\exp(-jk|X-X'|)}{|X-X'|} \rho_m(r) u(r', 0) dS dS' \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_S \int_{S'} \frac{\exp(-jk|X-X'|)}{|X-X'|} \rho_m(r) \\ &\quad \cdot \left[\sum_n jk_n A_n \{ \exp(-jk_n L) - \exp(jk_n L) \} \rho_n(r') \right] dS dS' \\ &= \sum_n \zeta_{mn} \left(\frac{k_n}{k} \right) A_n \{ \exp(-jk_n L) - \exp(jk_n L) \}, \end{aligned} \quad (5.4.16)$$

である。ただし第1式の $u(r', 0)$ に (5.4.10) 式を代入した。また (5.4.16) 式中の ζ_{mn} は

$$\zeta_{mn} = \frac{jk}{2\pi} \int_S \int_{S'} \frac{\exp(-jk|X-X'|)}{|X-X'|} \rho_m(r) \rho_n(r') dS dS', \quad (5.4.17)$$

で定義される，開口面での第 m 次モードと第 n 次モードとの相互作用の度合いを示す量であり，ここでは相互放射インピーダンス密度と呼ぶことにする。なお，この ζ_{mn} の値は有限値になることが示され，その値自身は数値計算により与えられる。(付録 5.1 参照。) 結局，開口面での音圧 $p^3(r, 0)$ は

$$p^3(r, 0) = j\rho_0 c_0 k \left\{ 2\sqrt{\pi} b R_0 \rho_1 + \sum_m H_m \rho_m(r) \right\}, \quad (5.4.18)$$

$$= j\rho_0 c_0 k \left[2\sqrt{\pi} b R_0 \rho_1 + \sum_m \rho_m(r) \left\{ \sum_n \zeta_{mn} \left(\frac{k_n}{k} \right) A_n \cdot (\exp(-jk_n L) - \exp(jk_n L)) \right\} \right], \quad (5.4.19)$$

で与えられたことになる。

以下においては ρ_m ， φ_m の直交性を用いて未定係数間の関係式を導出していく。まず (5.4.11)，(5.4.12) 式から，

$$\{ \mathcal{L} + (1-D) \sigma \ell + D^2 \cdot F \} [U] = DF \cdot u, \quad (5.4.20)$$

を得る。上式の U ， u に (5.4.14)，(5.4.10) 式を入れ， $\varphi_m(r)$ の直交性を用いると，次の関係式を得る。

$$\begin{aligned} & \left\{ j\omega \rho_s \ell \left(1 - \left(\frac{\omega_m}{\omega} \right)^2 (1 + j\eta) \right) + (1-D) \sigma \ell + D^2 F \right\} B_m \\ &= D \cdot F \cdot \sum_n jk_n \{ \exp(-jk_n L) - \exp(jk_n L) \} A_n \cdot \langle \varphi_m | \rho_n \rangle. \end{aligned} \quad (5.4.21)$$

次に、流体層の方程式 (5.4.12) 式の u, U, p^1, p^3 に (5.4.10), (5.4.14), (5.4.5), (5.4.18) 式を入れて、 φ_m の直交性を用いると

$$\begin{aligned}
 -D \cdot F \cdot B_m &= j \rho_0 c_0 k \sum_n A_n \{ \exp(-j k_n L) + \exp(j k_n L) \} \langle \varphi_m | \rho_n \rangle \\
 &\quad - j \rho_0 c_0 k \{ 2\sqrt{\pi} b R_0 \langle \varphi_m | \rho_1 \rangle + \sum_n H_n \langle \varphi_m | \rho_n \rangle \} \\
 &\quad - F \sum_n j k_n A_n \{ \exp(-j k_n L) - \exp(j k_n L) \} \langle \varphi_m | \rho_n \rangle,
 \end{aligned} \tag{5.4.22}$$

を得る。ただし上式中の $\langle \varphi_m | \rho_n \rangle$ は (5.3.30) 式で与えたものである。
 (5.4.21), (5.4.22) 式により、未定係数 A_m, B_m に関する条件式が与えられたことになり、以後は前節でも述べたように項数をそれぞれ $m = 1 \sim M$ の有限個に打ち切り数値計算により A_m, B_m の値を定める。

このようにして、係数 A_m, B_m が定まった場合、吸音率 α は次のようにして与えられる。今回の場合のように回折を伴う時の吸音率も (5.3.32) 式同様に次式で定義することにする。

$$\alpha = \frac{W_{ab} \text{ (実際吸音されるパワー)}}{W_i \text{ (みかけ上入射するパワー)}}. \tag{5.4.23}$$

まず W_i は、

$$\begin{aligned}
 W &= \frac{-1}{2} \operatorname{Re} \left[\int_S p_i(r, 0) \overline{(u_{iz}(r, 0))} dS \right] \\
 &= \frac{-1}{2} \operatorname{Re} \left[\int_S (j \rho_0 c_0 k \sqrt{\pi} b R_0 \cdot \rho_1) \overline{(-j k \sqrt{\pi} b R_0 \rho_1)} dS \right] \\
 &= \frac{1}{2} \rho_0 c_0 k^2 |\sqrt{\pi} b R_0|^2,
 \end{aligned} \tag{5.4.24}$$

で与えられる。一方 W_{ab} は次式で与えられる。

$$W_{ab} = \frac{-1}{2} \operatorname{Re} \left[\int_S p^3(r, 0) \overline{(u_z^3(r, 0))} dS \right]. \tag{5.4.25}$$

この p^3 , u_z^3 には (5.4.19), (5.4.10) 式を代入すればよいが, 式の整理上次のように書きかえておく。

$$\begin{aligned}
 u_z^3(r, 0) &= \sum_m j k_m A_m \{ \exp(-j k_m L) - \exp(j k_m L) \} \rho_m(r) \\
 &= \sum_m j k \cdot \left(\frac{k_m}{k} \right) \{ \exp(-j k_m L) - \exp(j k_m L) \} A_m \cdot \rho_m(r) \\
 &\equiv \sum_m j k \cdot A'_m \cdot \rho_m(r) .
 \end{aligned} \tag{5.4.26}$$

これに従い, $p^3(r, 0)$ は (5.4.19) 式に (5.4.26) 式を考慮に入れると,

$$p^3(r, 0) = j \rho_0 c_0 k \left[2\sqrt{\pi} b R_0 \rho_1 + \sum_{m,n} \rho_m(r) \zeta_{mn} A'_n \right] , \tag{5.4.27}$$

となる。したがって W_{ab} は

$$\begin{aligned}
 W_{ab} &= \frac{-1}{2} \operatorname{Re} \left[\int_S j \rho_0 c_0 k \left[2\sqrt{\pi} b R_0 \rho_1 + \sum_{m,n} \rho_m \cdot \zeta_{mn} A'_n \right] \right. \\
 &\quad \cdot \left. \overline{\left[\sum_{\ell} j k A'_\ell \cdot \rho_\ell(r) \right]} dS \right] \\
 &= \frac{-1}{2} \rho_0 c_0 k^2 \cdot \operatorname{Re} \left[2\sqrt{\pi} b R_0 \cdot \overline{(A'_1)} + \sum_{m,n} \overline{(A'_m)} \zeta_{mn} A'_n \right] ,
 \end{aligned} \tag{5.4.28}$$

となり, 吸音率 α は

$$\alpha = \frac{-1}{|\sqrt{\pi} b R_0|^2} \cdot \operatorname{Re} \left[2\sqrt{\pi} b R_0 \overline{(A'_1)} + \sum_{m,n} \overline{(A'_m)} \zeta_{mn} A'_n \right] , \tag{5.4.29}$$

あるいは R_0 は任意にとれるので,

$$2\sqrt{\pi} b R_0 = 1 ,$$

とすれば

$$\alpha = -4 \operatorname{Re} \left[\overline{(A'_1)} + \sum_{m,n} \overline{(A'_m)} \zeta_{mn} A'_n \right] , \tag{5.4.30}$$

で与えられることになる。

5.4.2 板振動型吸音材の吸音特性

図 5.4.1 に示したものと同一配置で、板のみを多孔質板から非多孔質板にかえた時の解析は、前節と同様にして進められる。数式中の記号は、すべて前節と同じものを用いるとすると、この場合の板の運動方程式、および、板の表面での流体音波に対する境界条件は次のようになる。

$$\mathcal{L}[U] = p^1(r, -\ell) - p^3(r, 0), \quad (5.4.31)$$

$$u_z^1(r, -\ell) = U = u_z^3(r, 0). \quad (5.4.32)$$

まず (5.4.31) 式の U , p^1 , p^3 に (5.4.14), (5.4.5), (5.4.18) 式を入れて、関数 $\varphi_m(r)$ の直交性を用いると次の関係式を得る。

$$\begin{aligned} & \{ j \rho_s \omega (1 - (\frac{\omega_m}{\omega})^2 (1 + j \eta)) \} B_m \\ &= j \rho_0 c_0 k \sum_n A_n \{ \exp(-j k_n L) + \exp(j k_n L) \} \langle \varphi_m | \rho_n \rangle \\ & - j \rho_0 c_0 k \{ 2\sqrt{\pi} b R_0 \langle \varphi_m | \rho_1 \rangle + \sum_n H_n \langle \varphi_m | \rho_n \rangle \}. \end{aligned} \quad (5.4.33)$$

また、(5.4.32) 式の U , $u_z^1(r, -\ell)$ に (5.4.14), (5.4.10) 式を入れて、関数 φ_m の直交性を用いると

$$B_m = \sum_n j k_n A_n \{ \exp(-j k_n L) - \exp(j k_n L) \} \langle \varphi_m | \rho_n \rangle, \quad (5.4.34)$$

を得る。これら (5.4.33), (5.4.34) 式をもとにして、あとは前節で述べたような手法で数値計算を行えば、吸音率などは定まることになる。

5.4.3 1次元モデルによる考察

前述した 5.4.1, 5.4.2 節の解析は、音波の回折の影響と、多孔質板、あ

るいは、板の屈曲振動の影響とを同時に含んでいるため、得られる計算結果自身は正しい結果を与えるものと考えられるが、物理的見通しはあまり良くない。本節では、特に回折の影響、すなわち面積効果を定性的に理解するために、5.2節の扱いと類似の1次元モデルについて若干の考察を行なう。

ここでは、板の振動については、板の単位面積あたりに換算した機械インピーダンス Z_P を、背後の空洞内の流体音波に対しては平面波近似を、また回折の影響は円形ピストンの放射インピーダンス密度 ζ_R を用いて議論を進めることにする。

まず、図5.4.1に示したような多孔質板吸音材を1次元モデルで考察する。この時、多孔質板と内部流体層の単位面積あたりに換算した運動方程式は

$$Z_P' U = D \cdot (p_I - p_{III}) \quad , \quad (5.4.35)$$

$$p_I - p_{III} = F(u - DU) \quad , \quad (5.4.36)$$

で与えられる。ただし U, u はそれぞれ多孔質板、内部流体層の振動速度、 p_I, p_{III} は多孔質板表面での音圧であるが、これらの物理量は、多孔質板の面上で平均した量と解釈するべきものであり、板面上では一定とみなすものとする。また

$$Z_P' = Z_P + (1 - D) \sigma \ell \quad , \quad (5.4.37)$$

である。今垂直に入射する平面波の音圧を p_i とすると、 p_I, p_{III} は

$$p_I = -Z_L u \quad , \quad p_{III} = 2p_i + \rho_0 c_0 \zeta_R \cdot u \quad , \quad (5.4.38)$$

とおける。ただし Z_L は図5.4.1で $z = -\ell$ から左をみた空洞の負荷インピーダンス密度、 ζ_R は上述した、円形ピストンの放射インピーダンス密度であり、(5.4.17)式の ζ_{11} に一致する。

さて、(5.4.35)、(5.4.36)、(5.4.38)式から、この吸音材の表面 $z = 0$ から左をみたノーマル音響インピーダンスを求めると

$$Z_n = \frac{p}{-u} = Z_L + \frac{Z'_P \cdot F}{Z'_P + D^2 F}, \quad (5.4.39)$$

であるから、 p_{III} は Z_n を用いると、 $p_{\text{III}} = Z_n \cdot (-u)$ とおけ、(5.4.38)

式の p_{III} の式に代入すると、

$$u = \frac{-2 p_i}{Z_n + \rho_0 c_0 \zeta_R} = \frac{-2 u_i}{\zeta_n + \zeta_R}, \quad (5.4.40)$$

を得る。ここに、 u_i は入射平面波の粒子速度、 $\zeta_n = Z_n / \rho_0 c_0$ である。

したがって、実際吸音されるパワーは、

$$W_{ab} = \frac{1}{2} \pi b^2 \operatorname{Re} [p_{\text{III}} \cdot \overline{(-u)}] = \frac{\pi b^2}{2 \rho_0 c_0} \cdot |2 p_i|^2 \frac{1}{|\zeta_n + \zeta_R|^2} \cdot \operatorname{Re} [\zeta_n]. \quad (5.4.41)$$

また、みかけ上、入射するパワーは、

$$W_i = \frac{\pi b^2}{2 \rho_0 c_0} \cdot |p_i|^2, \quad (5.4.42)$$

となり、吸音率 α は、

$$\alpha = \frac{W_{ab}}{W_i} = \frac{4}{|\zeta_n + \zeta_R|^2} \cdot \operatorname{Re} [\zeta_n], \quad (5.4.43)$$

で与えられる。

以上は、多孔質板吸音材についての議論であったが、非多孔質の板振動型吸音材の場合も、ほぼ平行に議論ができ、(5.4.39) 式の Z_n を、

$$Z_n = Z_P + Z_L, \quad (5.4.44)$$

におきかえるだけでよい。

ところで、ここで考察しているような吸音材の吸音率は、主に、板の面密度と空洞の弾性で定まる周波数でピークを持つのが普通である。いま、

$$\zeta_n = r_n + j x_n, \quad \zeta_R = r_R + j x_R, \quad (5.4.45)$$

とおくと共振周波数の近くでは、 $\zeta_n + \zeta_R \simeq r_n + r_R$ となり、 α は

$$\alpha \simeq \frac{4}{(\gamma_n + \gamma_R)^2} \cdot \gamma_n, \quad (5.4.46)$$

となり、これが吸音率のピーク値を示している。さらに γ_n が可変とすれば、 α のピーク値は、

$$\gamma_n = \gamma_R, \quad (5.4.47)$$

の時に最大となり、

$$\alpha \simeq \frac{1}{\gamma_R}, \quad (5.4.48)$$

となる。もし、共振周波数が、 kb ($k = \omega/c_0$, b は板の半径) の非常に小さいような低域にある場合には、 $\gamma_R \simeq (kb)^2/2$ となり、

$$\alpha \simeq \frac{2}{(kb)^2} \gg 1, \quad (5.4.49)$$

となる。すなわち、共振周波数を、 $kb \ll 1$ のような低域にとって、かつ、板の抵抗分が放射抵抗と同程度になっている場合には吸音率は非常に大きくなりうることになる。逆に共振周波数が $kb \gtrsim 2$ のような比較的高い所にある場合には $\gamma_R \simeq 1$ となり、このような、 α のピークが 1 より大きくなることはない。

ただし (5.4.47) 式のような条件は、いつも成立することはなく、普通はこの条件に、はずれていることが多い。したがって、ここで述べたことは、あくまでも、主に板振動型吸音材の面積効果に対する一つの定性的な説明ということにとどめる。

5.4.4 数値計算例

本節では、5.4.1, 5.4.2 節の解析結果をもとに、無限大バッフルに取り付けられた円形の多孔質板吸音材の吸音特性について数値計算を行なった一例について述べる。

図 5.4.2 には、図 5.3.2 で考察した時と同じ構造、同じ物質定数を持つ多

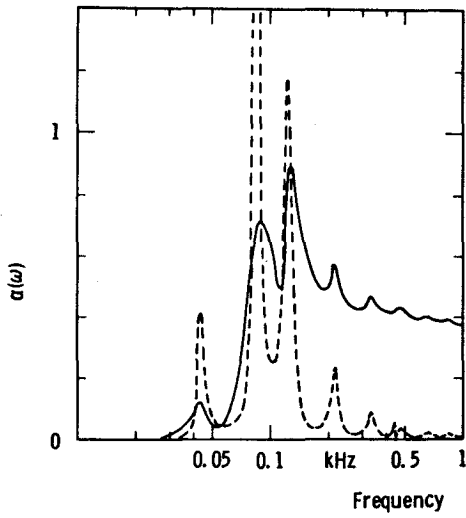


図 5.4.2 吸音率に対する板のモード振動の影響 (II)

————— 多孔質板
 - - - - - 非多孔質板

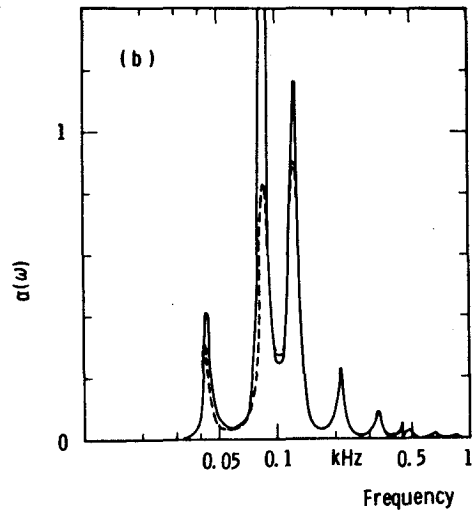
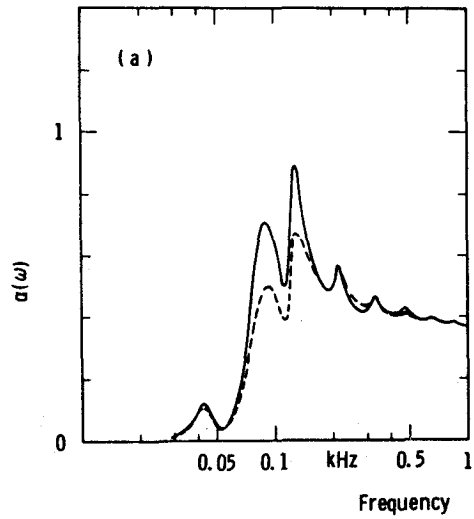


図 5.4.3 吸音率に及ぼす回折効果（面積効果）の有無の比較
 (a) 多孔質板, (b) 非多孔質板

————— (図 5.4.1) のモデル
 (回折効果を含む)

- - - - - (図 5.3.1) のモデル
 (回折効果を含まず)

孔質板，および板振動型吸音材が無限大バッフルに取り付けられたとした時の，吸音率の計算結果を示す。また，図 5. 4. 3(a), (b)には，多孔質板の場合と，非多孔質板の場合のそれぞれについて，図 5. 3. 2 の結果と図 5. 4. 2 の結果を比較したものを示す。

この例では，面積効果はもちろん現われているが，低域のピーク値がそれほど著しく大きくはなっていない。これは計算モデルに依存するものであり，この例では，板の面密度と背後空洞の深さで主に定まる共振周波数は $kb \simeq 1$ の近くであり，それほど低域ではないことや，板自身の物理定数の与え方も，5. 4. 3 節で述べたような条件からはずれていたと考えられるようなことも，その理由となるであろう。

5. 5 結 言

本章では，前章で導出した多孔質板の運動方程式，また多孔質板内の流体音波の一般解，あるいは，流体層の運動方程式を適用する場合の一つの応用例として，建築音響において用いられている多孔質板吸音材を取り上げ，その吸音特性に関して若干の理論的考察を行なった。ここでは 2 ～ 3 の簡単なモデルについて，入射波を垂直入射の平面波とした場合の計算を行なったのであるが，その結果，過去の実験結果は，ある程度まで説明できたものと考えられる。ここである程度と述べた理由としては，現実の多孔質板が非等方性であったり，また，本論文で仮定しているような完全連結胞でなかったりして，ここで採用したような単純な多孔質材のモデルでは，多孔質材自身の音響特性を完全に説明しえない可能性があること，試料の取り付け状態に依存するために，板の境界条件をはっきりと理論に取り入れるのが困難なこと，また，測定はすべて残響室法で行なわれているということなどが挙げられる。この最後の残響室法は，実装状態に近い状態で測定できるということから，多孔質板吸音材に限らず，他の吸音材や，後述する遮音材の測定によく使われている。しかし，測定には残響室自身の特性が影響し，測定値は残響室に

より、若干異なってくるという難点がある。現在のところ、吸音材、遮音材をとわず、試料面積の有限性と残響室内の音場の影響とを同時に取り入れた理論的な予測法は、未完成のようであり、今後の課題とも考えられる。

付 録 5. 1 相互放射インピーダンス密度の有限性について

ここでは (5.4.17) 式で定義した、相互放射インピーダンス密度 ζ_{mn} について若干の補足をしておく。 ζ_{mn} は

$$\zeta_{mn} = \frac{jk}{2\pi} \int_S \int_{S'} \frac{\exp(-jk|X-X'|)}{|X-X'|} \rho_m(r) \rho_m(r') dS dS' , \quad (\text{A.5.1})$$

で定義された。ここで X, X' は開口面上 ($0 \leq |X|, |X'| \leq b$) での位置を表すベクトルであり、円座標では $X \rightarrow (r, \varphi)$, $X' \rightarrow (r', \varphi')$ とおける。また $\rho_m(r)$ は (5.4.2) 式から

$$\rho_m(r) = \frac{1}{\sqrt{\pi}b J_0(\beta_m)} J_0\left(\frac{\beta_m}{b}r\right) , \quad J_1(\beta_m) = 0, \quad (\text{A.5.2})$$

として与えられる。(A.5.1) 式の、二つの面積分は数値計算には不利であるので次のような変形を行なう。すなわち、公式

$$\frac{\exp(-jk|X-X'|)}{|X-X'|} = (-j) \int_0^\infty \frac{1}{\mu} J_0(K|X-X'|) K dK , \quad (\text{A.5.3})$$

$$\mu = \begin{cases} \sqrt{k^2 - K^2} & (k > K) \\ -j\sqrt{K^2 - k^2} & (K > k) \end{cases} ,$$

および

$$J_0(K|X-X'|) = \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n \cdot J_n(Kr) J_n(Kr') \cos n(\varphi - \varphi') ,$$

$$\varepsilon_0 = 1, \quad \varepsilon_n = 2 \quad (n \geq 1) , \quad (\text{A.5.4})$$

および、(A.5.2) を (A.5.1) に入れ、 r, r', φ, φ' について積分を

実行すると最終的に,

$$\zeta_{mn} = 2kb \int_0^\infty \frac{XdX}{\mu_b} \cdot F_m(X) \cdot F_n(X) , \quad (\text{A.5.5})$$

を得る。ただし $\mu_b = b\mu$, $X = Kb$ であり, また,

$$F_m(X) = \frac{XJ_1(X)}{X^2 - \beta_m^2} , \quad (\text{A.5.6})$$

である。あるいは (A.5.5) を実部と虚部に分け, 具体的に記すと,

$$\begin{aligned} \zeta_{mn} &= r_{mn} + jx_{mn} \\ &= 2kb \int_0^{kb} \frac{XdX}{\sqrt{(kb)^2 - X^2}} \cdot F_m(X) \cdot F_n(X) \\ &\quad + j2kb \int_{kb}^\infty \frac{XdX}{\sqrt{X^2 - (kb)^2}} \cdot F_m(X) \cdot F_n(X) , \end{aligned} \quad (\text{A.5.7})$$

となる。(A.5.7) 式は 1 次元の積分であるから数値計算には, (A.5.1) 式よりも, はるかに有利である。

ζ_{mn} は (A.5.7) 式を数値計算することにより与えられるわけであるが, そのためには (A.5.7) 式の積分が有限値になることが保証されている必要がある。この点に関して若干の考察を加えると次のようになる。

まず r_{mn} について考察する。 r_{mn} は (A.5.7) 式から,

$$r_{mn} = 2kb \int_0^{kb} \frac{XdX}{\sqrt{(kb)^2 - X^2}} \cdot F_m(X) \cdot F_n(X) , \quad (\text{A.5.8})$$

となるが, まず, 区間 $[0, kb]$ において被積分関数のうち, X , $F_m(X)$, $F_n(X)$ は有限である。なぜならば, $J_1(X)$ 自身は有限であるし, また β_m , β_n が区間 $[0, kb]$ 内にあるとしても

$$\lim_{x \rightarrow \beta_m} \frac{XJ_1(X)}{X^2 - \beta_m^2} = \frac{1}{2} J_0(\beta_m) , \quad (\text{A.5.9})$$

となるからである。そこで区間 $[0, kb]$ での $F_m(X)$, $F_n(X)$ の絶対値

の最大値を M_m, M_n とおく。すなわち,

$$|F_m(X)|_{\max} = M_m, \quad |F_n(X)|_{\max} = M_n, \quad X \in [0, kb]. \quad (\text{A.5.10})$$

この時, (A.5.8) 式の絶対値は,

$$\begin{aligned} |\gamma_{mn}| &= 2kb \left| \int_0^{kb} \frac{X dX}{\sqrt{(kb)^2 - X^2}} \cdot F_m \cdot F_n \right| \\ &\leq 2kb \int_0^{kb} \frac{|X| \cdot |dX|}{\sqrt{(kb)^2 - X^2}} \cdot |F_m| \cdot |F_n| \\ &\leq 2kb \cdot kb \cdot M_m \cdot M_n \int_0^{kb} \frac{dX}{\sqrt{(kb)^2 - X^2}}, \end{aligned} \quad (\text{A.5.11})$$

となるが, さらに $X = kb \sin \theta$ と変数変換をすると,

$$\int_0^{kb} \frac{dX}{\sqrt{(kb)^2 - X^2}} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{kb \cos \theta}{kb \cos \theta} d\theta = \frac{\pi}{2},$$

より

$$|\gamma_{mn}| \leq 2kb \cdot kb \cdot M_m \cdot M_n \cdot \frac{\pi}{2}, \quad (\text{A.5.12})$$

となり γ_{mn} は有限値になることが示された。

次に x_{mn} であるが,

$$x_{mn} = 2kb \int_{kb}^{\infty} \frac{X dX}{\sqrt{X^2 - (kb)^2}} \cdot F_m(X) \cdot F_n(X), \quad (\text{A.5.13})$$

において, 積分区間を 3 つに分けて考える。すなわち,

$$[kb, X_1], [X_1, X_2], [X_2, \infty), \quad (\text{A.5.14})$$

と分け, それぞれの区間での積分値を I_1, I_2, I_3 とする。この時に問題になるのは, kb の近傍を含む積分の I_1 と, 実際の数値計算では打ち切ることになる区間 $[X_2, \infty)$ での積分 I_3 である。

まず I_1 については, γ_{mn} での考察から,

$$|I_1| \leq 2kb \cdot X_1 \cdot M_m \cdot M_n \int_{kb}^{X_1} \frac{dX}{\sqrt{X^2 - (kb)^2}}, \quad (\text{A.5.15})$$

となる。ただし M_m, M_n は区間 $[kb, X_1]$ での $|F_m|, |F_n|$ の最大値である。さらに $X = kb \cosh \theta$ と変数変換を行なうと, (A.5.15) 式は,

$$|I_1| \leq 2kb \cdot X_1 \cdot M_m \cdot M_n \cdot \cosh^{-1} \left(\frac{X_1}{kb} \right), \quad (\text{A.5.16})$$

となり I_1 は有限値になることが示された。

次に打ち切り誤差 I_3 であるが, 今 X_2 を,

$$X_2 \gg kb, \beta_m, \beta_n, 1, \quad (\text{A.5.17})$$

となるように選ぶと, 区間 $[X_2, \infty)$ では,

$$J_1(X) \simeq \sqrt{\frac{2}{\pi X}} \cos \left(X - \frac{3}{4} \pi \right).$$

したがって,

$$F_m(X) = \frac{X J_1(X)}{X^2 - \beta_m^2} \simeq \frac{1}{X} \cdot \sqrt{\frac{2}{\pi X}} \cos \left(X - \frac{3}{4} \pi \right),$$

となるので

$$\begin{aligned} |I_3| &= 2kb \left| \int_{X_2}^{\infty} \frac{X dX}{\sqrt{X^2 - (kb)^2}} F_m(X) \cdot F_n(X) \right| \\ &\leq 2kb \int_{X_2}^{\infty} \frac{|X| \cdot |dX|}{\sqrt{X^2 - (kb)^2}} \cdot |F_m| \cdot |F_n| \\ &\simeq 2kb \int_{X_2}^{\infty} \frac{2}{\pi} \cdot \frac{1}{X^3} dX = 2kb \cdot \frac{1}{\pi} \cdot \frac{1}{X_2^2}, \quad (\text{A.5.18}) \end{aligned}$$

となり, 打ち切り誤差は X_2 を十分大きくとれば, いくらでも小さくなるといえる。

第 6 章 多孔質材を貼付した複合板の遮音特性^{47), 57)}

6.1 緒 言

本章では、多孔質でない弾性平板の片面、あるいは、両面に、多孔質層を直接貼付した複合板を、遮音材として用いた時の遮音特性について、若干の理論的考察を行なう。

遮音材として最も基本的なものは、単一の弾性平板で構成されたものであり、この単一板の遮音特性に関しては、多くの実験的考察、理論的考察が報告されている。⁵⁴⁾⁻⁵⁶⁾そして、これらの研究成果のひとつとして、単一板の透過損失（以下、 TL と略記）の値を大きくしようとする場合には、内部損失を有する、質量面密度の大きい板を使用する必要があるということがいわれてきた。

他方、遮音板の面密度をそれほど大きくせずに、 TL 値を大きくしようとするひとつの試みとして、板の片面、あるいは、両面に多孔質材を貼付した構造の遮音材が考案され、実験報告もなされている。⁵⁾⁻⁷⁾それらによれば、貼付した多孔質材の効果は、低周波域では、面密度の増加によるものを除いては、ほとんど効果がなく、逆に、中高周波域においては、多孔質材の効果は、かなり著しいことが確認されている。

この遮音材の特性に関する理論的考察としては、Beranek 他が、⁸⁾ 基板と多孔質材とが上述した複合板と類似の空間配置を持つモデルについて解析を行ない、中高周波域での TL 値の増加の説明を試みている。しかし、彼等の解析は、本質的に、基板と多孔質材との間には機械的結合がなく、基板は振動しうるが多孔質材は全体として静止しているという仮定に基づいたものである。このような仮定のために、彼等の解析結果では、低域での貼付した多孔質材の効果の低下を直接的に説明することが不可能となり、低域から中域にかけての TL 値は人為的にある曲線を引くことにより推定するという、
偽

技巧的な修正を付加せざるを得なかった。⁹⁾ このようなことから、この遮音材の特性を、余分な修正を加えることなく説明するには、基板と多孔質材との間の機械的結合をも考慮に入れたモデルを設定する必要があるといえる。

ところで、本論文の 4.5 節では、基板に多孔質層を直接貼付した複合板が流体中で振動する場合の、複合板の振動に関する運動方程式を導出した。本章の目的は、この 4.5 節で導出した運動方程式をもとにして、基板と多孔質材とが同じ速度で振動するというひとつのモデルを設定し、前述した遮音材の特性の説明を、余分な修正曲線を引くことなく試みるところにある。

6.2 音波と複合板の振動に関する基礎方程式の整理

本章では、図 6.2.1 に示したような、無限に広がった複合板に音波が入射した場合の遮音機構に関する議論を行なう。本節では、この議論に必要な仮定の設定と基礎方程式の整理を行なっておく。

まず、仮定であるが、本章でも、4.2, 4.3 節で導入したのと同じ仮定、(仮定 1)–(仮定 5) を導入することにする。すなわち、貼付した多孔質材の骨格の振動速度の基板に垂直な成分

は、基板の振動速度に等しいとみなしうるとし、また、多孔質材中の音波に対する波動方程式や一般解には、3.2, 3.3 節の結果が、複合板の運動方程式としては、4.5 節の結果が使えるものとする。

この時、多孔質材中の音波の一般解は、時間因子 $\exp(j\omega t)$ を省略すると、次式で与えられることになる。

$$p^{in}(X, z) = j\rho^*\omega\phi_1(X, z) \quad , \quad (6.2.1)$$

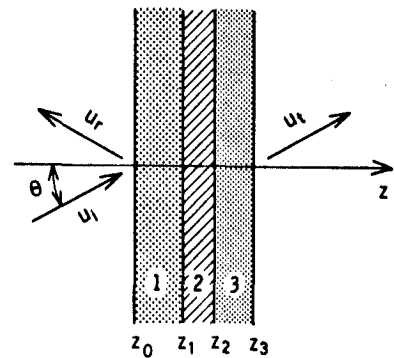


図 6.2.1 無限に広がった複合板を通しての音の透過

$$u^{in}(X, z) = \frac{\sigma}{j \rho^* \omega} U(X, z) - \nabla \phi_1(X, z), \quad (6.2.2)$$

ここに, ϕ_1 は

$$(\nabla^2 + \gamma^2) \phi_1 = 0, \quad \gamma^2 = \omega^2 \frac{\rho^*}{K^*}, \quad (6.2.3)$$

の解であり, ρ^* , K^* , σ は考えている多孔質材中の音波に対する等価密度, 等価体積弾性率, 結合係数である。また, p^{in} , u^{in} は多孔質材内部の音波の音圧, 粒子速度であり, U は骨格の振動速度である。ところで, 本章において我々が興味あるのは, 多孔質材内部の音場よりも, むしろ, 多孔質材の外部表面に現われてくる音圧, 粒子速度である。この場合には, 音波に対する境界条件 (2.2.20)–(2.2.22) を考慮に入れて, 次式で定義される新しい物理量 $p(X, z)$, $u(X, z)$ を導入した方が便利である。

$$p(X, z) = p^{in}(X, z) = j \rho^* \omega \phi_1(X, z), \quad (6.2.4)$$

$$\begin{aligned} u(X, z) &= u^{in} + (1-H) U = \left\{ \frac{\sigma}{j \rho^* \omega} + (1-H) \right\} U - \nabla \phi_1 \\ &\equiv D(\omega) U(X, z) - \nabla \phi_1(X, z). \end{aligned} \quad (6.2.5)$$

この新しい物理量に対する境界条件は, 外部自由空間との境界では, p と, u の境界面への法線成分が, 外部の音波の音圧, 粒子速度の法線成分に等しいとして与えられ, 基板と, 多孔質材との接合部では,

$$u_z(X, z) = U(X), \quad (6.2.6)$$

が要求される。ここに $U(X)$ は基板の振動速度である。

ところで, 我々の問題では, 図 6.2.1 にも示したように, 境界条件は, すべて, $z = \text{一定の面上}$ で与えられる。したがって, 本章においても, 3.3 節と同じく, z 以外の空間変数に関して 2 次元フーリエ変換をほどこし, そのスペクトル間で議論を行なった方が便利である。この時, 3.3 節と同様の過程を経ることにより, $z = z'$, および, $z = z' + \ell$ での多孔質材中の音波

に対するスペクトル間の関係式として，次式を得る。

$$\begin{pmatrix} \mathcal{D}(K, z') \\ \mathcal{U}_z(K, z') \end{pmatrix} = K \begin{pmatrix} \mathcal{D}(K, z' + \ell) \\ \mathcal{U}_z(K, z' + \ell) \end{pmatrix} + (\mathcal{E} - K) \begin{pmatrix} 0 \\ D \cdot V(K) \end{pmatrix}, \quad (6.2.7)$$

ここに，

$$\left. \begin{aligned} \mathcal{D}(K, z') &= \int p(X, z') \exp(jK \cdot X) dX \equiv \mathcal{F}[p(X, z')], \\ \mathcal{U}_z(K, z') &= \mathcal{F}[u_z(X, z')], \\ V(K) &= \mathcal{F}[U_z(X, z)] = \mathcal{F}[U(X)], \end{aligned} \right\} \quad (6.2.8)$$

であり，上式の最後の式では，（仮定1）， $U_z(X, z) \simeq U(X)$ ，を用いた。また，（6.2.7）式で， $\mathcal{E}$ は単位行列， K は次式で定義される特性行列である。

$$K = \begin{pmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{21} & K_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \Gamma_z \ell & \frac{j \rho_0 c_0 \zeta \gamma}{\Gamma_z} \sin \Gamma_z \ell \\ \frac{j \Gamma_z}{\rho_0 c_0 \zeta \gamma} \sin \Gamma_z \ell & \cos \Gamma_z \ell \end{pmatrix}, \quad (6.2.9)$$

ここに， ρ_0 ， c_0 は外部空間での流体の密度，音速，また，

$$\Gamma_z = (\gamma^2 - |K|^2)^{1/2}, \quad \zeta = (\rho^* K^*)^{1/2} / \rho_0 c_0, \quad (6.2.10)$$

である。

次に，図6.2.1の， $z \geq z_3$ ，または， $z \leq z_0$ の領域である，自由空間中の音波の物理量をスペクトル表示することを考える。自由空間中の速度ポテンシャル $\phi(X, z)$ は，波動方程式

$$(\nabla^2 + k^2) \phi = 0, \quad k = \omega / c_0, \quad (6.2.11)$$

の解であり，音圧 $p(X, z)$ ，粒子速度 $u(X, z)$ は ϕ を用いると

$$p = j \rho_0 c_0 k \phi, \quad u = -\nabla \phi, \quad (6.2.12)$$

として与えられる。これらの物理量 ϕ , p , u_z に対しても、前述したことと同様に、スペクトル表示が可能となる。たとえば、図 6.2.1 に示したような入射波の音圧 p_i , 粒子速度の z 成分 u_{iz} をスペクトル表示すると、次のようになる。

$$\begin{aligned} p_i(X, z) &= \frac{1}{(2\pi)^2} \int \mathcal{P}_i(K, z_0) \exp \left\{ -j(K \cdot X + k_z(z - z_0)) \right\} dK \\ &\equiv \mathcal{F}^{-1} \left[\mathcal{P}_i(K, z_0) \exp \left\{ -j k_z(z - z_0) \right\} \right], \end{aligned} \quad (6.2.13)$$

$$\begin{aligned} u_{iz}(X, z) &= \frac{1}{(2\pi)^2} \int \mathcal{U}_{iz}(K, z_0) \exp \left\{ -j(K \cdot X + k_z(z - z_0)) \right\} dK \\ &= \frac{1}{(2\pi)^2} \int \frac{\mathcal{P}_i(K, z_0)}{Z_S(K)} \cdot \exp \left\{ -j(K \cdot X + k_z(z - z_0)) \right\} dK, \end{aligned} \quad (6.2.14)$$

ここに,

$$k_z(K) = (k^2 - |K|^2)^{1/2}, \quad (6.2.15)$$

$$Z_S(K) = \rho_0 c_0 \frac{k}{k_z(K)}, \quad (6.2.16)$$

である。

同様にして、図 6.2.1 中の、反射波、透過波のスペクトル表示も可能であり、例えば、音圧のスペクトルと、粒子速度の z 成分のスペクトルとの比は、それぞれの場合について、次のようになる。

$z = z_0$ での反射波に対しては、

$$\frac{\mathcal{P}_r(K, z_0)}{\mathcal{U}_{rz}(K, z_0)} = -Z_S(K). \quad (6.2.17)$$

$z = z_3$ での透過波に対しては、

$$\frac{\mathcal{P}_t(K, z_3)}{\mathcal{U}_{tz}(K, z_3)} = Z_L(K). \quad (6.2.18)$$

上式の $Z_L(K)$ は、 $z \geq z_3$ の空間が自由空間の場合には、 $Z_S(K)$ に等しいのであるが、一般には区別して $Z_L(K)$ としておく。

本節の最後に、複合板の運動方程式をスペクトル表示することを考える。

図 6.2.1 に示した複合板の運動方程式は、(4.5.16) 式、すなわち、

$$\begin{aligned} & \{ \mathcal{L}_e + (1 - D_1) \sigma_1 \ell_1 + (1 - D_3) \sigma_3 \ell_3 \} [U(X)] \\ &= \{ D_1 p(X, z_0) + (1 - D_1) p(X, z_1) \} \\ & \quad - \{ D_3 p(X, z_3) + (1 - D_3) p(X, z_2) \} \\ & \quad + f(X) \quad , \end{aligned} \quad (6.2.19)$$

で与えられる。ここに、 D_m 、 σ_m のそえ字 m は、第 m 層の多孔質材に関する物理量であることを示している。また、 $\ell_m = z_m - z_{m-1}$ であり、 $\mathcal{L}_e$ は (4.5.3)–(4.5.8) 式で定義した演算子である。(6.2.19) 式をフーリエ変換することにより次式を得る。

$$\begin{aligned} & \{ Z_P(K) + (1 - D_1) \sigma_1 \ell_1 + (1 - D_3) \sigma_3 \ell_3 \} V(K) \\ &= \{ D_1 \mathcal{D}(K, z_0) + (1 - D_1) \mathcal{D}(K, z_1) \} \\ & \quad - \{ D_3 \mathcal{D}(K, z_3) + (1 - D_3) \mathcal{D}(K, z_2) \} \\ & \quad + F(K) \quad , \end{aligned} \quad (6.2.20)$$

ここに、

$$Z_P(K) = \frac{1}{j\omega} \left\{ -M_e \omega^2 + \mathcal{D}_e |K|^4 \right\} \quad , \quad (6.2.21)$$

$$F(K) = \mathcal{F}[f(X)] \quad , \quad V(K) = \mathcal{F}[U(X)] \quad ,$$

である。

次節以降では具体的に音波の透過率などを解析するが、その場合には $F(K) = 0$ として、音波のスペクトル表示の式と結合して解けばよい。

6.3 遮音特性の解析

本節では、多孔質材を貼付した平板の遮音特性や吸音特性について、具体的に解析を行なう。6.1節でも述べたように Beranek 他は、基板は動きうるが、多孔質材は全体として静止しているというモデル（以下では、静的モデルと呼ぶ）に関して、垂直入射の平面波に対する透過率を求めた。⁸⁾ ここでは、基板も多孔質材も共に同じ速度で振動するというモデル（以下では、動的モデルと呼ぶ）について、考察するのであるが、入射波は少し一般化して、斜め入射の平面波を考えることにする。

6.3.1 受音側に貼付した場合

本節では、図 6.3.1 のように、多孔質材を受音側にのみ貼付した場合について、斜め方向から平面波が入射した時の透過損失などを解析する。以後、

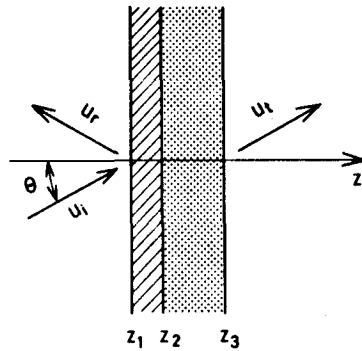


図 6.3.1 多孔質材を受音側に貼付した遮音材
(タイプA)

本章では、この空間配置の構造体を、タイプAと呼ぶことにする。この構造体に入射波として、

$$u_{iz} = u_{iz}(K, z') \exp \{ -j (K \cdot X + k_z (z - z')) \}, \quad (6.3.1)$$

が入射した時を考え、以下の解析は、この K 成分のスペクトルに関して行なうものとする。この時タイプAの動的モデルに対する運動方程式は(6.2.20)式から、次式で与えられることになる。

$$Z_P'(K) \cdot V(K) = \mathcal{D}(K, z_1) - \{D \mathcal{D}(K, z_3) + (1-D) \mathcal{D}(K, z_2)\}, \quad (6.3.2)$$

ただし、今は多孔質材は1層しか考えていないので D_m , ρ_m^* などの右下のそえ字 m は省略することにする。また、

$$Z_P'(K) = Z_P(K) + (1-D) \sigma \ell, \quad (6.3.3)$$

$$\ell = z_3 - z_2,$$

である。一方、 $\mathcal{D}(K, z_2)$, $\mathcal{U}_z(K, z_2)$, $\mathcal{D}(K, z_3)$, $\mathcal{U}_z(K, z_3)$ の間には(6.2.7)式から

$$\begin{pmatrix} \mathcal{D}(K, z_2) \\ \mathcal{U}_z(K, z_2) \end{pmatrix} = K \begin{pmatrix} \mathcal{D}(K, z_3) \\ \mathcal{U}_z(K, z_3) \end{pmatrix} + (\mathcal{C} - K) \begin{pmatrix} 0 \\ D \cdot V(K) \end{pmatrix}, \quad (6.3.4)$$

の関係を得る。さらに音波に対する境界条件は、

$$\mathcal{U}_z(K, z_1) = \mathcal{U}_z(K, z_2) = V(K), \quad (6.3.5)$$

$$\frac{\mathcal{D}(K, z_3)}{\mathcal{U}_z(K, z_3)} = Z_L(K), \quad (6.3.6)$$

で与えられる。以上の基本式から、まず $z = z_1$ からみたこの構造体のノーマル音響インピーダンス $Z_n(K)$ は、

$$\begin{aligned} Z_n(K) &= \frac{\mathcal{D}(K, z_1)}{\mathcal{U}_z(K, z_1)} = \frac{\mathcal{D}(K, z_1)}{V(K)} \\ &= Z_P'(K) + D \cdot \frac{\mathcal{D}(K, z_3)}{V(K)} + (1-D) \frac{\mathcal{D}(K, z_2)}{V(K)} \end{aligned}$$

$$= Z_P'(K) + D \cdot \epsilon_{KL}(K) \cdot Z_L(K) + (1-D) \beta(K), \quad (6.3.7)$$

となる。ただし

$$\epsilon_{KL}(K) = \frac{u_z(K, z_3)}{V(K)}, \quad (6.3.8)$$

$$\beta(K) = \frac{\mathcal{D}(K, z_2)}{V(K)}, \quad (6.3.9)$$

とした。(6.3.8)式で定義した $\epsilon_{KL}(K)$ は、速度 $V(K)$ で振動する平面壁に貼付した多孔質材の外部表面に発生する粒子速度を $V(K)$ で割ったものであり、第3章で定義した、「一般化した(振幅)放射効率」に相当する。 $\epsilon_{KL}(K)$ は(6.3.4)–(6.3.8)式から、

$$\epsilon_{KL}(K) = \frac{1 + D(K_{22} - 1)}{K_{21} Z_L + K_{22}}, \quad (6.3.10)$$

で与えられる。また(6.3.9)式の β も(6.3.4)–(6.3.8)式から求められるので $Z_n(K)$ は定まったことになる。 Z_n が定まれば、板の振動速度 $V(K)$ は、入射平面波の粒子速度の z 成分 $u_{iz}(K, z_1)$ を用いると、次式で与えられる。

$$V(K) = \frac{2Z_s(K)}{Z_n(K) + Z_s(K)} u_{iz}(K, z_1), \quad (6.3.11)$$

ここに $Z_s(K)$ は(6.2.16)式で定義したインピーダンスである。

以上から、ノーマル音響インピーダンス $Z_n(K)$ 、振幅透過率 $T(K)$ 、パワー透過率 $\tau(K)$ 、吸音率 $\alpha(K)$ などを求めると、最終的に次式を得る。

$$Z_n = Z_P' + D \cdot \epsilon_{KL} \cdot Z_L + (1-D)^2 Z_{KL} + \delta_{KL} Z_L, \quad (6.3.12)$$

$$T = \frac{u_z(K, z_3)}{u_{iz}(K, z_1)} = \frac{V(K)}{u_{iz}(K, z_1)} \cdot \frac{u_z(K, z_3)}{V(K)}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{2Z_s}{Z_n + Z_s} \cdot \epsilon_{KL} \\
&= \frac{2Z_s \cdot \epsilon_{KL}}{Z_p' + Z_s + D \cdot \epsilon_{KL} \cdot Z_L + (1-D)^2 Z_{KL} + \delta_{KL} \cdot Z_L}, \quad (6.3.13)
\end{aligned}$$

$$\tau(K) = |T(K)|^2 \frac{\operatorname{Re}(Z_L)}{\operatorname{Re}(Z_s)}, \quad (6.3.14)$$

$$\alpha(K) = \left| \frac{2Z_s}{Z_n + Z_s} \right|^2 \frac{\operatorname{Re}(Z_n)}{\operatorname{Re}(Z_s)}, \quad (6.3.15)$$

ここに, Z_{KL} , δ_{KL} は

$$Z_{KL} = \frac{K_{11}Z_L + K_{12}}{K_{21}Z_L + K_{22}}, \quad \delta_{KL} = \frac{D(1-D)}{K_{21}Z_L + K_{22}}, \quad (6.3.16)$$

である。なお (6.3.12) 式を導出する際, 行列 K の性質 $\det(K) = 1$ を用いている。(6.3.13), (6.3.14) 式から, パワー透過率 $\tau(K)$ には, パワー放射効率 $|\epsilon_{KL}|^2$ ($|\epsilon_{KL}|^2$ の値は, 第3章でも述べたように, 板厚方向の骨格の振動振幅の変動が無視できる時には, 多くの場合, 1より小さい) が, かかっているので, たとえ, この構造体の Z_n が多孔質材なしの基板だけの Z_n と同じ程度であって, 両者が同じ程度の速度で振動しても, TL 値は, 今の複合板の方が大きくなるであろうことが予想される。

以上は, タイプAの動的モデルに関する議論であるが, タイプAの静的モデルに対する, ノーマル音響インピーダンス $Z_n(K)$ と振幅透過率 $T(K)$ は次式で与えられる。

$$Z_n(K) = Z_{p\ell}(K) + Z_{KL}(K), \quad (6.3.17)$$

$$T(K) = \frac{2Z_s}{(Z_{p\ell} + Z_{KL} + Z_s)(K_{21}Z_L + K_{22})}, \quad (6.3.18)$$

ここに $Z_{p\ell}(K)$ は基板のみの機械インピーダンスであり, 基板の面密度 $M_{p\ell}$ と剛性係数 $\mathcal{D}_{p\ell}$ を用いると次式で与えられる。

$$Z_{p\ell}(K) = \frac{1}{j\omega} \left\{ -M_{p\ell}\omega^2 + \mathcal{D}_{p\ell} |K|^4 \right\} . \quad (6.3.19)$$

なお, Beranek 他⁸⁾の解析は(6.3.17)–(6.3.19)式で, $K=0$ とした時のものである。

6.3.2 音源側に貼付した場合

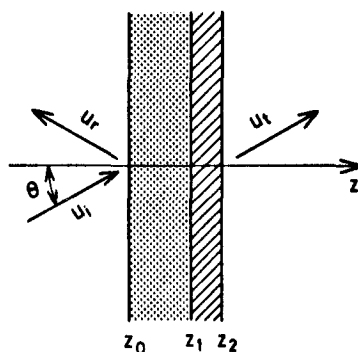


図 6.3.2 多孔質材を音源側に貼付した遮音材
(タイプB)

本節では, 前節で考察したのと同じ多孔質材を基板の音源側に貼付した場合を考える。以後, この配置のものをタイプBと呼ぶことにする。この構造体に(6.3.1)式で与えられる形の平面波が入射した時を想定する。この時, この構造体に対する運動方程式は(6.2.20)式から, 次式のようなになる。

$$Z'_p(K) \cdot V(K) = D \mathcal{D}(K, z_0) + (1-D) \mathcal{D}(K, z_1) - \mathcal{D}(K, z_2) . \quad (6.3.20)$$

また流体音波に対する境界条件は

$$u_z(K, z_1) = u_z(K, z_2) = V(K) , \quad (6.3.21)$$

$$\frac{\mathcal{D}(K, z_2)}{u_z(K, z_2)} = Z_L(K) , \quad (6.3.22)$$

で与えられる。さらに $z = z_0$, z_1 での音波のスペクトルの間に, (6.2.7) 式から, 次の関係式を得る。

$$\begin{pmatrix} \mathcal{D}(K, z_1) \\ \mathcal{U}_z(K, z_1) \end{pmatrix} = K^{-1} \begin{pmatrix} \mathcal{D}(K, z_0) \\ \mathcal{U}_z(K, z_0) \end{pmatrix} + (\mathcal{E} - K^{-1}) \begin{pmatrix} 0 \\ D \cdot V(K) \end{pmatrix}, \quad (6.3.23)$$

ここに K^{-1} は行列 K の逆行列であり, (6.2.9) 式から $(K^{-1})_{ij} = (-1)^{i+j} K_{ji}$ となる。

以上の (6.3.20)–(6.3.23) 式から, まず, この構造体の $z = z_0$ からみたノーマル音響インピーダンス $Z_n(K)$ を求めると,

$$\begin{aligned} Z_n(K) &= \frac{\mathcal{D}(K, z_0)}{\mathcal{U}_z(K, z_0)} \\ &= \frac{K_{22}(Z'_P + Z_L) + (1-D)^2 K_{12}}{2D(1-D) + (1-D)^2 K_{11} + D^2 K_{22} + K_{21}(Z'_P + Z_L)}, \end{aligned} \quad (6.3.24)$$

を得る。ただし, ここで行列 K の性質, $\det(K) = 1$ を用いている。次に粒子速度に対する振幅透過率 T であるが, $\mathcal{D}(K, z_0) / \mathcal{U}_z(K, z_0) = Z_n(K)$ とおいて, (6.3.23) 式から得られる関係式

$$\frac{V(K)}{\mathcal{U}_z(K, z_0)} = \frac{K_{22} - K_{21}Z_n}{1 + D(K_{22} - 1)}, \quad (6.3.25)$$

を用い, また入射平面波の粒子速度の z 成分の振幅 $\mathcal{U}_{iz}(K, z_0)$ と $\mathcal{U}_z(K, z_0)$ との関係式 (6.3.11) 式を用いると

$$\begin{aligned} T &= \frac{\mathcal{U}_z(K, z_2)}{\mathcal{U}_{iz}(K, z_0)} = \frac{V(K)}{\mathcal{U}_{iz}(K, z_0)} = \frac{\mathcal{U}(K, z_0)}{\mathcal{U}_{iz}(K, z_0)} \cdot \frac{V(K)}{\mathcal{U}_z(K, z_0)} \\ &= \frac{2Z_s}{Z_n + Z_s} \cdot \frac{K_{22} - K_{21}Z_n}{1 + D(K_{22} - 1)}, \end{aligned} \quad (6.3.26)$$

となる。(6.3.26) 式の Z_n として (6.3.24) 式を代入し, 行列 K の性質

$\det(K) = 1$ を用いて整理すると、最終的に、

$$T(K) = \frac{2Z_S \cdot \epsilon_{KS}}{Z'_P + Z_L + D\epsilon_{KS}Z_S + (1-D)^2 Z_{KS} + \delta_{KS}Z_S}, \quad (6.3.27)$$

を得る。ここに

$$\left. \begin{aligned} \epsilon_{KS}(K) &= \frac{1 + D(K_{22} - 1)}{K_{21}Z_S + K_{22}}, \\ Z_{KS}(K) &= \frac{K_{11}Z_S + K_{12}}{K_{21}Z_S + K_{22}}, \\ \delta_{KS}(K) &= \frac{D \cdot (1 - D)}{K_{21}Z_S + K_{22}}, \end{aligned} \right\} \quad (6.3.28)$$

である。パワー透過率 τ 、吸音率 α などは(6.3.14), (6.3.15)式と同様にして求められる。

以上はタイプBの動的モデルに対する議論であるがタイプBの静的モデルに対するノーマル音響インピーダンス $Z_n(K)$ 、振幅透過率 $T(K)$ は次式で与えられる。

$$Z_n(K) = \frac{K_{11}(Z_{p\ell} + Z_L) + K_{12}}{K_{21}(Z_{p\ell} + Z_L) + K_{22}}, \quad (6.3.29)$$

$$T(K) = \frac{2Z_S}{(Z_{p\ell} + Z_{KS} + Z_L)(K_{21}Z_S + K_{22})}, \quad (6.3.30)$$

ただし、 $Z_{p\ell}(K)$ は(6.3.19)式で定義した量である。

ここで、6.3.1, 6.3.2節の動的モデルに対する振幅透過率 T の式(6.3.13), (6.3.27)式を比べてみると、両者は記号 S と L の違いを除けば全く同じ形をしていることがわかる。すなわち、もし $Z_S(K) = Z_L(K)$ ならば、(6.3.13)式と(6.3.27)式は一致するのである。このことは、音源側と受音側とが共に自由空間とみなせる状態で、この構造体を遮音板として用いる

場合には、裏表を逆に使っても、 TL 値は同じということを示している。しかし、ノーマル音響インピーダンス Z_n 、また、これに従い、吸音率 α は一般に異なってくる。特に機械インピーダンス $Z_P(K)$ が大きい場合、タイプ A の Z_n は Z_P に近づくのに対し、タイプ B の Z_n は $(K_{22}/K_{21}) = (K_{11}/K_{21})$ 、すなわち静止した剛壁に貼付した多孔質材の Z_n に近づく。このために、前者の吸音率が中高周波域で 0 に近づくのに対し、後者の吸音率は一般に大きくなるという違いを生ずる。なお、上述した TL 値に関する可逆性、および、吸音率の違いは静的モデルにおいても成り立っていることを付記しておく。

再び動的モデルにもどり、6.3.1 節で、タイプ A の動的モデルのパワー透過率 τ は、受音側への放射率 $|\epsilon_{KL}|^2$ に依存していることを述べたが、本節の場合も (6.3.27) 式から、 τ は $|\epsilon_{KS}|^2$ の大小に依存しているため、 $|\epsilon_{KS}|^2$ の値が小さくなる場合には、 τ の値も小さくなるといえる。このパワー透過率 τ が、音源側への放射効率 $|\epsilon_{KS}|^2$ に依存することの意味を考察するために、運動方程式 (6.3.20) 式の右辺の駆動力の項のうち、音源側に属する項を、次のように分けて考えてみる。

$$\begin{aligned} & D \mathcal{D}(K, z_0) + (1-D) \mathcal{D}(K, z_1) \\ = & \{ D \mathcal{D}(K, z_0) + (1-D) \mathcal{D}(K, z_1) \}_1 \\ & + \{ D \mathcal{D}(K, z_0) + (1-D) \mathcal{D}(K, z_1) \}_2 \quad . \quad (6.3.31) \end{aligned}$$

上式の右辺第 1 項は、静止した構造体に音波が入射した時の音場に基づく開放駆動力を意味し、第 2 項は構造体が速度 $V(K)$ で振動した時に、音源側に放射される音場に基づく駆動力を意味するものとする。この第 2 項は速度 $V(K)$ に比例するので、その比例係数は機械インピーダンスに含めてしまふことができる。そこで第 1 項を入射平面波の粒子速度の z 成分の振幅 $u_{iz}(K, z_0)$ で表わすと、

$$\{ D \mathcal{D}(K, z_0) + (1-D) \mathcal{D}(K, z_1) \}_1 = 2Z_S \cdot \epsilon_{KS} \cdot u_{iz}(K, z_0), \quad (6.3.32)$$

となる。このことから、振幅透過率 T が ϵ_{KS} に比例しているのは、開放駆動力自身が ϵ_{KS} に比例しているために生じた現象であるといえる。以上の考察から、多孔質材を片側に貼付した構造体を、その両側が自由空間とみなせる状態で遮音板として用いた場合、 TL 値は裏表を逆に使っても同じになるが、その時の構造体の運動状態は全く異なっているといえる。

6.3.3 両側に貼付した場合

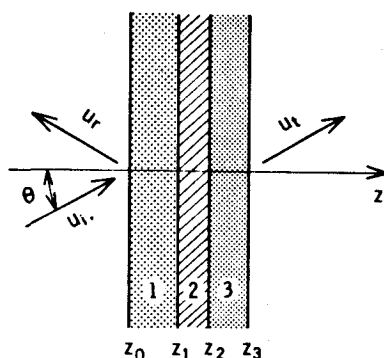


図 6.3.3 多孔質材を両側に貼付した遮音材
(タイプ C)

本節では、図 6.3.3 のように板の両側に多孔質材を貼付した場合を考える。以後、この配置のものをタイプ C と呼ぶことにする。ここでは、タイプ C の音響特性を、前 2 節の結果を利用して議論をする。なお、図 6.3.3 に示したように、音源側、受音側の多孔質材の諸定数を、それぞれ添え字 “1”, “3” で表わし、また、特性行列を K , F とする。

まずこの構造体の運動方程式は (6.2.20) 式から、

$$\begin{aligned}
 Z_P'(K) V(K) = & \{ D_1 \mathcal{D}(K, z_0) + (1-D_1) \mathcal{D}(K, z_1) \} \\
 & - \{ D_3 \mathcal{D}(K, z_3) + (1-D_3) \mathcal{D}(K, z_2) \} , \\
 \end{aligned} \tag{6.3.33}$$

となる。ただし

$$\begin{aligned}
 Z_P'(K) = & Z_P(K) + (1-D_1) \sigma_1 \ell_1 + (1-D_3) \sigma_3 \ell_3, \\
 \ell_m = & z_m - z_{m-1} , \\
 \end{aligned} \tag{6.3.34}$$

である。他方、音波に関して、 $z = z_0, z_1$ でのスペクトル間には、次の関係式が成り立つ。

$$\begin{pmatrix} \mathcal{D}(K, z_1) \\ \mathcal{U}_z(K, z_1) \end{pmatrix} = K^{-1} \begin{pmatrix} \mathcal{D}(K, z_0) \\ \mathcal{U}_z(K, z_0) \end{pmatrix} + (\mathcal{E} - K^{-1}) \begin{pmatrix} 0 \\ D_1 \cdot V(K) \end{pmatrix}. \tag{6.3.35}$$

同じく $z = z_2, z_3$ での、音波のスペクトル間の関係式として、

$$\begin{pmatrix} \mathcal{D}(K, z_2) \\ \mathcal{U}_z(K, z_2) \end{pmatrix} = F \begin{pmatrix} \mathcal{D}(K, z_3) \\ \mathcal{U}_z(K, z_3) \end{pmatrix} + (\mathcal{E} - F) \begin{pmatrix} 0 \\ D_3 \cdot V(K) \end{pmatrix}, \tag{6.3.36}$$

が成り立つ。また境界条件は

$$\mathcal{U}_z(K, z_1) = \mathcal{U}_z(K, z_2) = V(K), \tag{6.3.37}$$

$$\frac{\mathcal{D}(K, z_3)}{\mathcal{U}_z(K, z_3)} = Z_L(K), \tag{6.3.38}$$

で与えられる。

まず $z = z_0$ からみた、この構造体のノーマル音響インピーダンスを求める。

(6.3.33) 式の右辺の第 2 項は $V(K)$ に比例することが容易に示され、実際 (6.3.35)–(6.3.38) 式から、

$$\begin{aligned}
& \{ D_3 \mathcal{D}(K, z_3) + (1 - D_3) \mathcal{D}(K, z_2) \} \\
&= (D_3 \cdot \varepsilon_{FL} \cdot Z_L + (1 - D_3)^2 Z_{FL} + \delta_{FL} \cdot Z_L) \cdot V(K) \\
&\equiv Z_{L3} \cdot V(K), \tag{6.3.39}
\end{aligned}$$

となる。ここに ε_{FL} , Z_{FL} , δ_{FL} は (6.3.10), (6.3.16) 式の K を F とし $\ell = \ell_3$, $D = D_3$ などとしたものである。(6.3.39) 式を (6.3.33) 式に入れた後の Z_n を求める過程は, 6.3.2 節の場合と同じであり, 結果のみを示すと次のようになる。

$$Z_n(K) = \frac{K_{22} \cdot (Z'_P + Z_{L3}) + (1 - D_1)^2 K_{12}}{2D_1(1 - D_1) + (1 - D_1)^2 K_{11} + D_1^2 K_{22} + K_{21}(Z'_P + Z_{L3})}. \tag{6.3.40}$$

次に振幅透過率 T であるが, Z_n が定まったので, この構造体の振動速度 $V(K)$ を, 入射波の粒子速度の z 成分の振幅 $\mathcal{U}_{iz}(K, z_0)$ で表わすと, (6.3.26) 式から,

$$V(K) = \frac{2Z_S}{Z_n + Z_S} \cdot \frac{K_{22} - K_{21} \cdot Z_n}{1 + D_1(K_{22} - 1)} \cdot \mathcal{U}_{iz}(K, z_0), \tag{6.3.41}$$

となる。従って (6.3.40), (6.3.41) 式から, T を求めると次式を得る。

$$\begin{aligned}
T(K) &= \frac{\mathcal{U}_z(K, z_3)}{\mathcal{U}_{iz}(K, z_0)} = \frac{V(K)}{\mathcal{U}_{iz}(K, z_0)} \cdot \frac{\mathcal{U}_z(K, z_3)}{V(K)} \\
&= \frac{V(K)}{\mathcal{U}_{iz}(K, z_0)} \cdot \varepsilon_{FL} \\
&= \frac{2Z_S \cdot \varepsilon_{KS} \cdot \varepsilon_{FL}}{Z(1, K, S | 3, F, L)}, \tag{6.3.42}
\end{aligned}$$

ここに

$$\begin{aligned}
& Z(1, K, S | 3, F, L) \\
&= Z'_P + D_1 \varepsilon_{KS} Z_S + (1 - D_1)^2 Z_{KS} + \delta_{KS} Z_S \\
&\quad + D_3 \varepsilon_{FL} Z_L + (1 - D_3)^2 Z_{FL} + \delta_{FL} Z_L, \\
&\hspace{25em} (6.3.43)
\end{aligned}$$

である。ただし ε_{KS} , Z_{KS} , δ_{KS} は (6.3.28) 式で $\ell = \ell_1$ などとしたものである。

なお、タイプ C の静的モデルに対する Z_n , T は次のようになる。

$$Z_n(K) = \frac{K_{11}(Z_{p\ell} + Z_{FL}) + K_{12}}{K_{21}(Z_{p\ell} + Z_{FL}) + K_{22}}, \quad (6.3.44)$$

$$T(K) = \frac{2Z_S}{(Z_{p\ell} + Z_{KS} + Z_{FL})(K_{21}Z_S + K_{22})(F_{21}Z_L + F_{22})}. \quad (6.3.45)$$

本節の解析結果からも、一般的なタイプ C に対して、6.3.1, 6.3.2 節同様に、振幅透過率の可逆性などに関する議論が可能となる。

6.4 数値計算例

本節では、6.3.1 ~ 6.3.3 節で述べた解析結果をもとに、若干例につき数値計算を行ない、多孔質材を貼付したことによる効果について考察する。多孔質材を貼付する効果は、大まかには次の 3 つに分けて考えられるであろう。

- i) 放射効率の低下による、比較的広い周波数帯域での TL 値の増大効果。
- ii) 面密度の増加、あるいは、わずかではあるが、板の剛性の増加による、 TL 値の増大効果。
- iii) 貼付した材料自身の内部損失による、コインシデンス周波数付近での TL 値の減少の防止効果。⁶⁾

これらのうち、ii), iii) は貼付材が非多孔質の場合にも認められる効果であり、⁵⁸⁾すでに多くの著者により議論がされている効果であるので、ここではあまりふれない。

多孔質材を貼付した軽量遮音材として興味をもたれるのは、やはり i) の効果であると考えられるので、ここでは i) の効果をより明確に調べるために、まず平面波が垂直に入射する場合を考える。この時には複合板の機械的性質としては面密度 M_e のみがきいてくる。以下に計算例を示すが、そこでは、多孔質材の諸定数のうち、多孔率 H と構造因子 S は共に 1.0 に固定し、毛細管半径 a と厚さ ℓ , ℓ_1 , ℓ_3 を変化させることにする。

図 6.4.1 には $a = 0.2 \text{ mm}$, $M_e = 0.1 \text{ g/cm}^2$ とした時の、種々の動的モデル (A_{D1} , B_{D1} , C_{D1} , C_{D2} , C_{D3}) に対する TL 値、吸音率 α , および、この遮音板に入射した音響パワーのうち、熱エネルギーに変換されたものの入射パワーに対する比 δ ($= \alpha - \tau$, 以後、エネルギー散逸比と呼ぶ) を比較図示した。図には同時に、面密度 M_e の非多孔質板に対する TL 値も示した。なお図(b), (c) では、実線、破線が 2 本ずつあるが、 α , δ の値の大きい方が、それぞれタイプ B_{D1} , C_{D2} に相当する。この計算例では、それぞれのタイプの TL 値は、多少の違いはあるものの、おおまかには近い値となっているといえる。しかし、同図(b), (c) から、 α , δ の値は系統的に異なった値をとっているといえる。このように、同じ量の多孔質材を、基板の両側への分配比を変えて貼付した場合、 TL 値の増加量は大体同じ程度であるが、吸音率は、かなり異なるという性質は、この構造体を隔壁として用いる場合などには有用と考えられる。ただし、図 6.4.1 の例では、 TL 値はほぼ同じ程度になったが、音源側と受音側の音響条件が異なる場合には、音波の透過率に関する板の空間配置の可逆性もくずれるであろうし、また、貼付する多孔質材によっては、タイプの違いにより、特定の周波数でかなり異なった値をとることもあるので、上述したことは、あくまで実用面から、多孔質材貼付の効果をおおまかに予測する場合の議論である。ところで、本節で

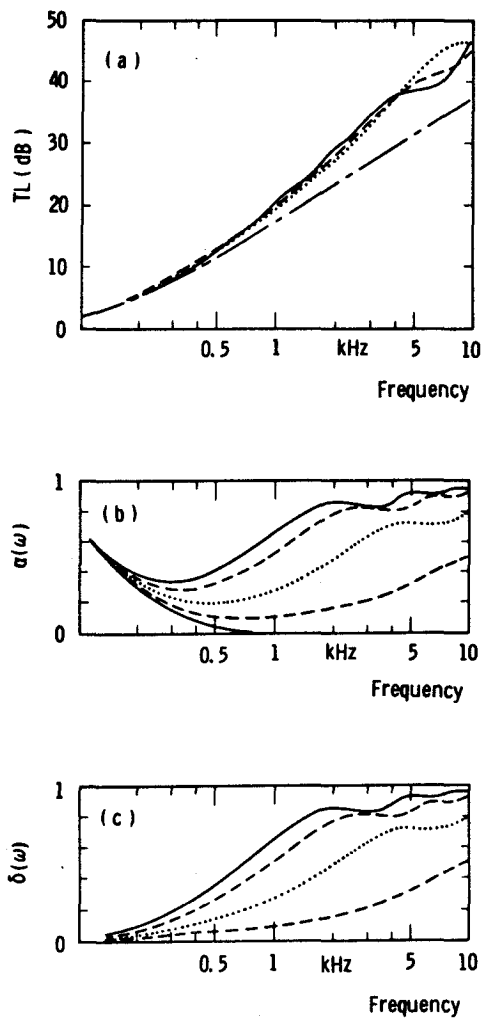


図 6.4.1 種々の動的モデルに対する, TL 値, α , δ の計算値

- タイプ AD_1, B_{D1} ($\ell = 5.0$ cm)
- タイプ C_{D1} ($\ell_1 = 1.0$ cm, $\ell_3 = 4.0$ cm)
 C_{D2} ($\ell_1 = 4.0$ cm, $\ell_3 = 1.0$ cm)
- タイプ C_{D3} ($\ell_1 = \ell_3 = 2.5$ cm)

((a)図のみ —— ——— 同じ面密度の非多孔質板)

定義し、図 6.4.1(c)に示した、エネルギー散逸比 δ は、その定義のとおり、入射波の音響エネルギーが、熱エネルギーに変換される割合を表わすものであるが、騒音対策の目的のひとつが、すでに放射された音波の伝搬経路を変えるだけでなく、音響エネルギーを熱エネルギーに変換してしまうことだとすれば、有用な量であると考えられる。なお、図 6.4.1(b)で、吸音率が低周波域で大きくなっているのは、音波が透過しているためであり、今考察している動的モデルにおいては、 δ の値自身は、きわめて小さくなっている。

次に、図 6.4.2 には、同じタイプの構造体を、動的モデル (A_{D1} , B_{D1}) と、静的モデル (A_{S1} , B_{S1}) の、2つの異なったモデルで評価した結果を示す。なお、同図(b) (c)では、実線、破線が2本ずつあるが、 α , δ の値の大きい方が、それぞれタイプ B_{D1} , B_{S1} に相当する。この計算例では、 TL 値、 α , δ の値は、2つのモデルにおいて、ほぼ同じ値となっている。ただ、 δ の値が低周波域で系統的に異なっているが、これは、動的モデルにおいては、多孔質材内部の流体は低域では構造体とほぼ一体となって動くのに対し、静的モデルの場合は、静止多孔質材中を流体が強制的に通過させられたために生じた現象と考えられる。なお、図 6.4.2 で考察した多孔質材は、多孔率 $H = 1.0$ 、構造因子 $S = 1.0$ というものであったが、現実には、 $H \leq 1.0$, $S \geq 1.0$ となりうる。もし、 $S \gg 1$ の場合には、前節での解析結果と、 ρ^* , K^* の H , S への依存性から、貼付した多孔質材の効果は、動的モデルでは多孔質材本来の効果は期待できず、単に質量則のような意味で若干の寄与をするだけである。他方、静的モデルでは、 TL 値は非常に大きくなることが示される。しかし、基板に直接多孔質材を貼付した場合には、動的モデルの方が現実に近いこと、また、たとえ基板と多孔質材との間に機械的接触がないとしても、非常に低周波の時や、 $S \gg 1$ の場合には、流体と多孔質材との結合力の方が多孔質材自身の慣性力よりも大きくなり、多孔質材も振動しうるのであることから、静的モデルによる計算値を、そのまま多孔質材貼付の効果とみなすことはできない。

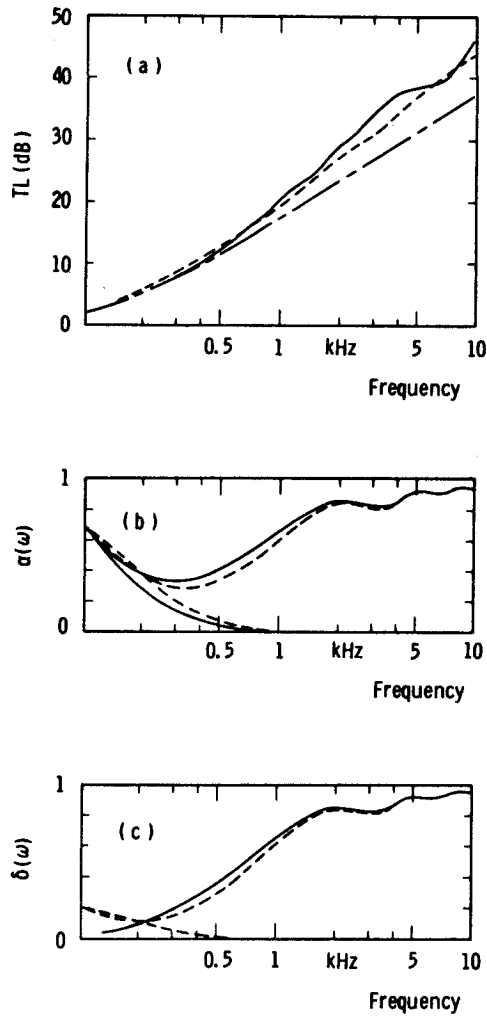


図 6.4.2 動的モデルと静的モデルとの差異

—— 動的モデル, - - - - 静的モデル.

(a)図のみ — — — 同じ面密度の非多孔質板)

次に、用いる多孔質材の構造や厚さは、図 6.4.2 で用いたものと同じであるが、面密度 M_e を変化させた場合の TL 値について、質量則による増加以外に、多孔質材と流体との相互作用により増加した量 ΔTL （以後、過剰増加量と呼ぶ）を、動的、静的両モデルについて、それぞれ比較したものを図 6.4.3 に示す。図から、面密度 M_e がある程度大きければ、 M_e の値に関係

なく、 ΔTL の値は同じ程度になるといってもよく、このことは、多孔質材貼付の効果は、おおまかには、多孔質材の純機械的な性質による TL 値の変化と、材料の多孔質性による TL 値の過剰増加の効果との2つに分けて評価してもよいことを示している。このことについては、次節で再び議論することにする。

さて、今までの数値計算例は、すべて平面波が垂直に入射する場合、すなわち複合板の屈曲振動はおこらない場合であった。そこで、屈曲振動がおこり、かつ、コインシデンス効果もおこる場合の一例として、入射角 60° の平面波が入射した場合の TL 値の計算結果を、図6.4.4に示す。この図では、

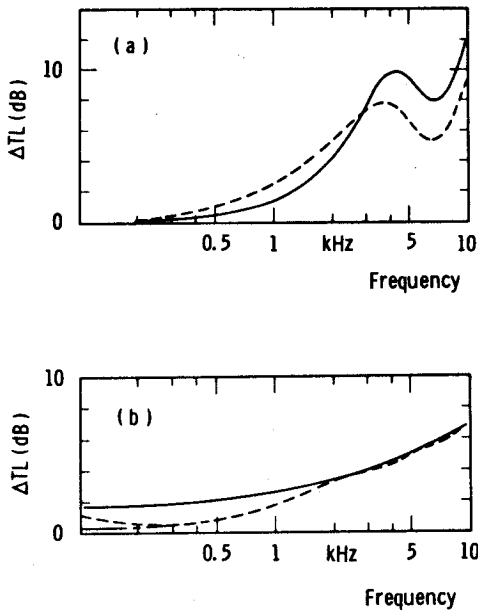


図 6.4.3 TL 値の過剰増加量 ΔTL

(a) 動的モデル (A_{D1} , B_{D1}),

(b) 静的モデル (A_{S1} , B_{S1}).

———— $M_e = 0.0 \text{ g/cm}^2$,

----- $M_e = 0.1 \text{ g/cm}^2$,

— · — $M_e = 1.0$, または, 10.0 g/cm^2

基板, および, 多孔質材自身の内部損失は 0 と仮定してある。この例のように, 貼付する多孔質材自身の内部損失が 0 の時には, 多孔質材貼付の効果は, 前述の垂直入射の場合と同じく, 比較的広い周波数範囲での, TL 値の一般的な増大効果のみといってよく, コインシデンス周波数付近の, TL 値の減少を特に改善しているとは言い難い。

次に, 図 6.4.5 には, 図 6.4.4 に用いたものと同じ構造の複合板, 入射波

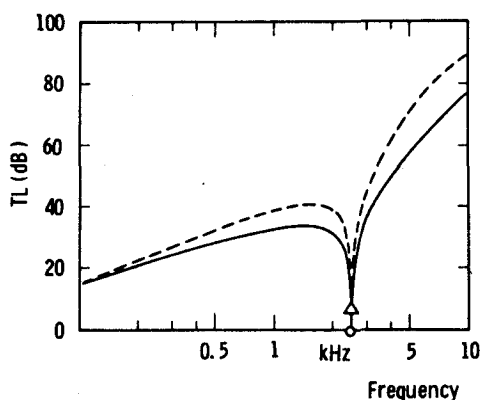


図 6.4.4 入射角 60° の平面入射波に対する TL 値の例

-----多孔質材を貼付した複合板,

—————上記複合板と同じ機械定数を有する非多孔質板.

計算条件: $\ell_1 = 0.0 \text{ cm}$, $\rho_2 = 2.7 \text{ g/cm}^3$, $\ell_2 = 0.5 \text{ cm}$,
 $E_2 = 7.0 \times 10^{11} \text{ dyne/cm}^2$, $\nu_2 = 0.333$,
 $\rho_3 = 0.01 \text{ g/cm}^3$, $\ell_3 = 5.0 \text{ cm}$,
 $E_3 = 1.0 \times 10^8 \text{ dyne/cm}^2$, $\nu_3 = 0.333$,
 $H_3 = 1.0$, $S_3 = 1.0$, $a_3 = 0.2 \text{ mm}$.

すべての固体系の内部損失は 0 とした。

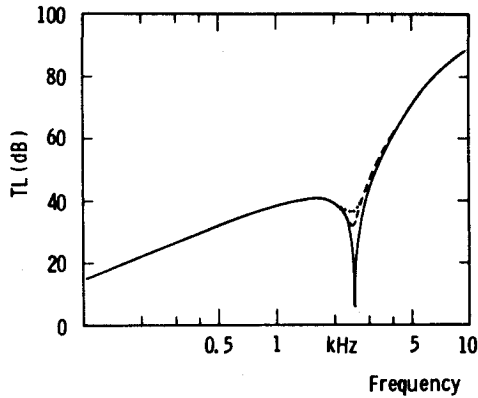


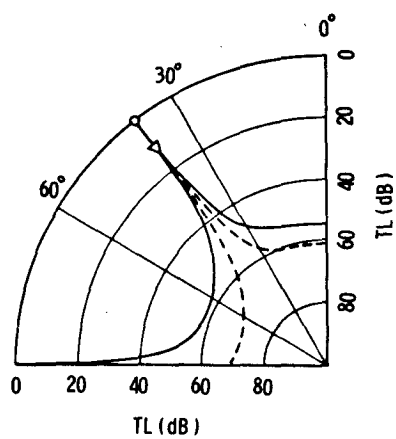
図 6.4.5 多孔質材の内部損失のコインシデンス効果への影響

————— $\eta_3 = 0.0$,
 - - - - - $\eta_3 = 0.3$,
 $\eta_3 = 0.5$.

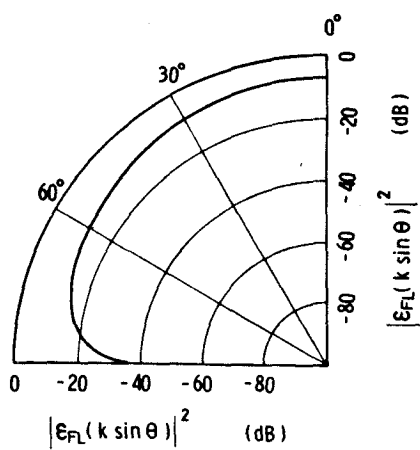
を想定し、ただ、貼付した多孔質材のみが内部損失を有するとした時の、 TL 値の計算例を示す。内部損失は、第 4 章にも若干述べたように、多孔質材の動的ヤング率 E_3 を複素数とみなし、 $E_3 \rightarrow E_3 (1 + j\eta_3)$ とおきかえることにより入れた。この η_3 は一般には、周波数に依存するものであるが、ここでは、定数とする扱いをした。この図から、貼付した多孔質材が内部損失を有する場合には、コインシデンス周波数付近の TL 値の減少をおさえる効果があるといえる。

次に、図 6.4.6(a)には、図 6.4.4 で用いたのと同じ複合板を想定し、周波数を 5 kHz に固定した時の、 TL 値の指向性を示した。また、同図(b)には、参考のため、受音側へのパワー放射効率 $|\epsilon_{FL}|^2$ の値の指向性を示した。この結果から、貼付した多孔質材の効果は、入射角 θ が大きいほど顕著であるといってよく、また、その原因は、 θ が大きいほど、 $|\epsilon_{FL}|^2$ の値が小さくなるためであるといってもよいといえる。

以上、いくつかの数値計算例を示したわけであるが、本節のしめくくりと



(a)



(b)

図 6.4.6 TL 値, 放射効率の指向特性

(a) TL 値の指向特性 ;

----- 多孔質材を貼付した複合板,

————— 同じ機械定数を有する非多孔質板.

(b) パワー放射効率の指向特性

して、我々^{47), 57)}が提案した動的モデルと、Beranek 他⁸⁾により考察された静的モデルとの比較を行なっておく。6.1 節にも述べたように、板の片面、あるいは、両面に多孔質材を貼付した遮音材の特性については、幾人かの人々が、実験的な考察を行なっている。^{5)~7)}それらによれば、貼付した多孔質材の効果は、低周波域ではほとんど効果がなく、中高周波域では、 TL 値が、かなり増大するとされている。この点に関する解析結果を調べてみると、高周波域で TL 値が増大する点については、動的モデルも、静的モデルも同じ傾向にあるといえる。しかし、図 6.4.2，図 6.4.3 の結果からもわかるように、低域では、動的モデルの方は、 TL 値の増大効果は速やかに小さくなるのに対し、静的モデルの方は有限の増大値を示している。この静的モデルの結果は、あきらかに、実験結果とも、また、直観的に予想される傾向とも異なっている。このようなことから、Beranek 他による手法では、低域の TL 値の増大効果は 0 とし、この低域の TL 値と、高域の TL 値とを、なめらかな曲線でつないだものを、予測値とするという、新たな修正を付加せざるを得なかった。⁹⁾一方、我々の動的モデルによれば、そのような付加的な修正をすることなく、実験結果の傾向を説明しうるといえよう。

次に、多孔質材を貼付する効果としては、上述したような TL 値の単調な増大以外に、コインシデンス周波数付近の TL 値の減少を緩和する効果もあることが、実験的に指摘されている。⁶⁾この点については、図 6.4.5 に示したように、多孔質材が内部損失をもっているとするれば、動的モデルにより、ある程度説明できるといえる。他方、静的モデルでは、多孔質材と基板との機械的な接触が考慮に入っていないため、この効果の説明は不可能となっている。

以上述べたようなことが、2つのモデル間の、大まかな違いといってよいであろう。

6.5 透過率の近似式

6.3節では、多孔質材を貼付した構造体の透過率などを解析したのであるが、得られた式自体は複雑であり、物理的見通しもよくない。しかし6.4節の図6.4.3の所でも議論したように、多孔質材貼付の効果は、条件によっては近似的に、複合板自身の機械インピーダンスの変化と、多孔質材の多孔質性に基づく過剰増加量 $\Delta T L$ の2つに分けてもよいものと考えられる。本節ではこの点について若干の考察を行なう。

ここでは、最も一般的な、タイプCの動的モデルに対する透過率 $T_D(K)$ を考える。この $T_D(K)$ は、(6.3.42)式、すなわち、

$$T_D(K) = \frac{2 Z_S(K) \cdot \epsilon_{KS}(K) \cdot \epsilon_{FL}(K)}{Z(1, K, S | 3, F, L)}, \quad (6.5.1)$$

で与えられる。ここに $Z(1, K, S | 3, F, L)$ は(6.3.43)式で与えられたものである。多孔質材の諸定数 ρ_m^* , K_m^* , σ_m として毛細管モデルの関数形を用いる時、まず非常に低周波では(6.5.1)式の分母は、

$$Z_P(K) + Z_S(K) + Z_L(K), \quad (6.5.2)$$

に近づく。一方、多孔率 $H \simeq 1$, 構造因子 $S \simeq 1$ のもとでの高周波域では、(6.5.1)式の分母は、次の値に近づく。

$$Z_P(K) + \sigma_1 \ell_1 + \sigma_3 \ell_3 + Z_S(K) + Z_L(K). \quad (6.5.3)$$

H や S が任意の値で、周波数も中域の場合には、(6.5.1)式の分母は、(6.5.2), (6.5.3)式とは違って来るであろうが、特に、

$$|Z_P(K)| \gg |Z_S(K)|, |Z_L(K)|, |\sigma_m \ell_m|, \quad (6.5.4)$$

のように、機械インピーダンスの値が他のインピーダンスの値よりも十分大きい時には、(6.5.1)式の分母を、 $Z_P(K)$ そのもの、あるいは、(6.5.2)式で代用しても、それほど大きな誤差は生じないと考えられる。そこで(6.5.1)式の近似形として、次式を考えてみる。

$$T_D(K) \simeq \left\{ \frac{2 Z_S(K)}{Z_P(K) + Z_S(K) + Z_L(K)} \right\} \cdot \left\{ \varepsilon_{KS}(K) \cdot \varepsilon_{FL}(K) \right\}$$

$$\equiv T_{D1}(K) \cdot T_{D2}(K) \quad (6.5.5)$$

(6.5.5) 式の第1項は複合板と同じ面密度，剛性をもつ，多孔質でない単一平板の透過率を，また第2項は放射効率の低下に起因する透過率の減少を意味している。

同様の近似化が静的モデルに対しても考えられる。すなわち，タイプCの静的モデルに対する振幅透過率 $T_S(K)$ は，(6.3.45) 式，すなわち，

$$T_S(K) = \frac{2 Z_S}{(Z_{p\ell} + Z_{KS} + Z_{FL}) (K_{21} Z_S + K_{22}) (F_{21} Z_L + F_{22})} \quad ,$$

$$(6.5.6)$$

であるが，近似式としては次式が考えられる。

$$T_S(K) \simeq \left\{ \frac{2 Z_S}{Z_{p\ell} + Z_S + Z_L} \right\} \cdot \left\{ \frac{1}{(K_{21} Z_S + K_{22}) (F_{21} Z_L + F_{22})} \right\}$$

$$\equiv T_{S1}(K) \cdot T_{S2}(K) \quad (6.5.7)$$

(6.5.7) 式第1項は，基板のみの時の振幅透過率を，第2項は基板から放射された音波が多孔質材を通過する際の減衰に起因する透過率の減少を，意味している。

これらの近似式の適用範囲であるが，まず条件式 (6.5.4) 式がくずれる場合として，一般の斜め入射の時に $Z_P(K)$ や $Z_{p\ell}(K)$ の値が小さくなる時，すなわちコインシデンス状態の時には，これらの近似式の精度は悪くなると考えられる。ちなみに，図 6.4.4 の中の動的モデルの場合，コインシデンス周波数付近では近似式の誤差は，約 2 dB 近くになったが，その周波数から $\pm 40 \sim 50 \text{ Hz}$ 離れた所からは誤差は 0.2 dB 以下であった。また，

(6.5.1) 式の分母の中の，例えば， Z_{FL} (一般に $S_3 \gg 1$ では大きくなり，

また低域では、 Z_L と流れ抵抗の和に近くなる)には、係数 $(1 - D_3)^2$ (一般に $S_3 \gg 1$ の時や、低周波の時には0に近い値となる)が、かかっているのに対し、(6.5.6)式の分母には、 Z_{FL} 自身が入っていることから、平面波の垂直入射の場合に、動的モデルに対する近似式(6.5.5)式が比較的広い範囲で良い近似度を期待できるのに対し、静的モデルの近似式(6.5.7)式は、適用範囲が限られることが予想される。ちなみに、図6.4.2で考察した、垂直入射の場合の動的モデル(A_{D1})と、静的モデル(A_{S1})について、6.3節の式と、本節の近似式との比較をした結果は、動的モデルについては、10Hz以上の全帯域で約0.3 dB以下の誤差、静的モデルについては、中高域では動的モデルと同程度の誤差であったが、200Hz以下では最大2 dB程度の誤差があった。

このように条件によっては近似式は多少の誤差を有するが、その範囲が比較的せまい周波数範囲であること、また、ここで考察したのは無限板に単一の平面波が入射するという単純な場合であったが、より現実に近い状態としては、板が有限の大きさであったり、入射音波の性質も複雑になったりする可能性があり、そのようなモデルの解析においては、種々の因子の中でも、最も重要な因子のみを残して解析を展開していかざるを得ないことからいっても、本節で述べたような近似化は、むしろ将来の理論的考察において有用になってくるのではないかと考えられる。

6.6 結 言

本章では、軽量遮音材のひとつとして知られている、基板に多孔質層を直接貼付した複合構造板の遮音特性に着目し、若干の理論的考察を行なった。

本章では、基板と多孔質層との機械的結合を考慮に入れた最初の試みとして、貼付した多孔質層の法線振動速度は基板の法線振動速度に等しいなどの仮定を導入し、4.5節で導出した、複合板の運動方程式を基礎方程式として、議論を展開した。ここでの解析モデルとしては、無限に広がった複合板を想

定し、斜め入射の平面波に対して、透過率や吸音率などを解析し、数値計算例を加えることにより、貼付した多孔質材の効果について、基礎的な考察を行なった。その結果として、以下のような結論を得た。

- (a) 貼付した材料の多孔質性が TL 値に与える効果は、低周波域では TL 値の増大効果はほとんどなく、中高周波域では、 TL 値をかなり増大させる。
- (b) 多孔質材を貼付した時、(a)とは別の効果として、コインシデンス周波数付近の TL 値の低下を緩和する効果があることが実験的に指摘されていたが、これは、主に多孔質材の内部損失に起因したものであることを示した。
- (c) この複合板の TL 値は、複合板を裏表逆に使っても同じになるが、吸音率は全く異なる。

これらの結論のうち、(a)、(b)は、現在までに報告された実験結果と一致したものである。現存する理論では、(a)については、解析結果以外に、新たな修正曲線を付加する必要があったし、また、(b)については、基板と多孔質層間の機械的結合を考慮に入れていなかったため、説明は不可能に終わっていた。しかし、本章で与えた解析によれば、全帯域にわたって実験結果を説明する曲線が得られ、また、上述した既報の手法のような、技巧的な修正はする必要がない。

なお、(c)についてであるが、この点に関する実験結果は、報告者により主張が異なっているが、報告例も少なく、実験条件も異なっているため、今のところは、はっきりしたことは言えない。しかし、筆者自身は、(c)の性質は本章で考察した動的モデル、静的モデルのどちらにおいても成立していることから、本章で導入したいいくつかの仮定を取り除いた、より一般的な解析が今後行なわれるにしても、透過率に対する複合板の空間配置の可逆性は成立するのではないかと考えている。実験結果で偏差がみられた原因のひとつとしては、種々の制約条件のために、複合板の両側の音響条件を等しくし得なかったことも挙げられるであろう。

最後に、本章では、この複合板の遮音特性を論ずるための初期の試みとし

て、貼付した多孔質層は基板と同じ速度で振動するという、複合板の振動を理論的に扱う場合によく行なわれる仮定を導入したが、比較的軟らかい材料を厚めに貼付した時には、この仮定の近似度は悪くなると考えられ、今後、このような仮定をしない、より一般的な解析をする必要があるものと考えている。今後、検討したい。

第 7 章 結 論

本章では、本研究によって得られた成果について総括する。

第 2 章では、振動する多孔質材内部の音波の挙動に関する基礎的考察をもとに、1 次元の放射問題について解析を行ない、音源の振動面が、剛壁から多孔質壁に変化した時に、放射音場は本質的にどのように変わるかといった点などについて基礎的な概念を与えた。

第 3 章では、第 2 章の考察を一般化したものとして、任意の振動分布を有する、多孔質層を貼付した平面壁からの放射問題を取り扱い、遠距離音場や放射パワーを簡潔な表式で導出し、多孔質層を貼付したことによる放射パターンや放射パワーの変化に対し、基礎的な概念を与えた。

第 4 章では、多孔質材で構成された各種弾性平板の振動に関し基礎的考察を行ない、これら多孔質板の運動方程式、および、多孔質板内の流体層の運動方程式を、実用に適した簡潔な形で導出した。さらに、これらの実用式の適用限界についての考察を与えた。

以上が本論文の基礎的な部分である。続く第 5, 6 章では、若干の応用例について考察を行なった。

第 5 章では、多孔質板吸音材の吸音率について解析を行ない、従来の実験結果の説明を試み、また、この吸音材の吸音機構について基礎的な概念を与えた。

第 6 章では、基板の両面に多孔質層を直接貼付した複合構造の遮音材の遮音特性について解析し、従来の実験結果の説明を試み、また、この遮音材の遮音機構について基礎的な概念を与えた。

以上、本研究では、振動壁や各種弾性板を構成する材料、あるいは、その一部が、非多孔質材から多孔質材に変わった時に、種々の特性が本質的にどのように変化するかについての基本的概念、資料を得るために、多孔質材の

骨格が振動するということを積極的に取り入れた理論の展開を試みてきた。

今後の課題であるが、まず基礎理論の立場からは、今回の理論展開で導入した種々の仮定、特に、多孔質層の厚み方向の振動変位の変動を無視するような仮定、を取り除いた、3次元弾性体としての多孔質材と音波との相互作用を積極的に取り入れた立場からの、種々の音響素子の動的特性の解明などが挙げられるであろう。他方、応用的な面であるが、現在、多孔質材が振動するということを積極的に設計に取り入れた音響制御用素子はきわめて少ないといってよく、今後はこれらのことを考慮に入れた新しい応用分野の開拓が期待される。その際には、本研究で与えた、放射や振動に関する基礎的資料が役にたつであろうと考えられる。

謝

辞

終わりに臨み、本研究の当初より今日に至るまで終始温かい目で見守っていただくとともに、懇切なる御指導・御鞭撻を賜りました大阪大学産業科学研究所・竹内龍一教授（現大阪大学名誉教授）に対し、ここに改めて心より感謝の意を表します。

また、有益な御助言と励ましの御言葉を頂戴いたしました同研究所・角所収教授に対し厚く御礼申し上げます。

筆者の学部学生時代以来、波動論一般に関し御教示いただくと同時に、本研究を遂行するにあたり、懇切なる御指導・御鞭撻を賜りました大阪大学工学部応用物理学教室・鈴木達朗教授ならびに三石明善教授に対し厚く感謝の意を表します。

本論文作成にあたり、有益な御討論・御助言を賜りました大阪大学工学部精密工学教室・中川憲治教授、同応用物理学教室・藤田 茂教授ならびに大阪大学基礎工学部機械工学教室・今市憲作教授に対し厚く御礼申し上げます。

さらに、有益な御助言・御助力をいただきました大阪大学産業科学研究所・中村 昭助教授に対し厚く謝意を表します。

本研究を遂行するにあたり、種々の御助言・御助力をいただきました筆者の所属している大阪大学産業科学研究所・竹内研究室（音響機器部門）の諸氏、特に2.3.4節での定在波法による吸音率の測定に関し御助力いただきました奥田良行氏（同研究所・共通施設・特殊音響実験室・技官）に対し厚く謝意を表します。

なお、参考文献として掲げた文献16）（凹型音源からの音の放射の解析に関するもの）は、筆者が、主に三菱電機㈱商品研究所在職中に行なったものをまとめたものである。この研究を支持していただきました同研究所・研究主管・進藤武男氏（現富士ゼロックス㈱勤務）に対し厚く謝意を表します。

参 考 文 献

- 1) 後藤, “騒音対策ハンドブック” (技報堂, 東京, 1966), 第7章.
- 2) 竹内, “建築音響ハンドブック” (技報堂, 東京, 1963), 第3編, 第1章.
- 3) 牧田他, 日音学誌, 10, 225 (1954).
- 4) 木村, 東大生研報告 10, 1 (1961).
- 5) K.A. Mulholland, Appl. Acoust. 2, 1 (1969).
- 6) S.M. Brown et al., J. Acoust. Soc. Am. 63, 1851 (1978).
- 7) 高山, 城戸, 信学技報 EA 78-44, 19 (1978).
- 8) L.L. Beranek and G. A. Work, J. Acoust. Soc. Am. 21, 419 (1949).
- 9) T. J. Schultz, “*Noise and Vibration Control*” (ed. by L.L. Beranek) (McGraw Hill, New York, 1971), Chap 15.
- 10) R.A. Mangiarotty, J. Acoust. Soc. Am. 35, 1023 (1963).
- 11) 小西 (編), “電磁波問題へのアタックの仕方” (電子通信学会, 東京, 1978).
- 12) E. Skudrzyk, “*The Foundations of Acoustics*” (Springer-Verlag, New York, 1971), pp 715-765.
- 13) 池谷他, 日音学誌 26, 3 (1970).
- 14) R. J. Alfredson, J. Sound and Vib. 23, 433 (1972).
- 15) Y. Ando and T. Koizumi, J. Acoust. Soc. Am. 59, 1033 (1976).
- 16) S. Oie et al., Acustica 46, 268 (1980). ~~(in the press)~~

- 17) P. M. Morse and K. U. Ingard, Handbuch der Physik 11
(1) (1961).
- 18) P. M. Morse and K. U. Ingard, " *Theoretical Acoustics* "
(McGraw Hill, New York, 1968), Chap 7.
- 19) L. Cremer and M. Heckl, " *Structure - Borne Sound* "
(transl. by E. E. Ungar) (Springer - Verlag, New York,
1973) .
- 20) A. W. Leissa, " *Vibration of Plates* " (NASA SP-160).
- 21) C. Zwikker and C. W. Kosten, " *Sound Absorbing
Materials* " (Elsevier, New York, 1949) .
- 22) R. W. Morse, J. Acoust. Soc. Am. 24, 696 (1952).
- 23) Y. Kawasima, Mem. Sci. Ind. Res., Osaka Univ. 15,
53 (1958).
- 24) Y. Kawasima, Acustica 10, 208 (1960).
- 25) G. S. Rosin, Sov. Phys. Acoust. 19, 60 (1973).
- 26) P. M. Morse and K. U. Ingard, " *Theoretical Acoustics* "
(McGraw Hill, New York, 1968), pp 609 - 611.
- 27) M. A. Biot, J. Acoust. Soc. Am. 34, 1254 (1960).
- 28) J. H. B. Zarek, J. Sound and Vib. 61, 205 (1978).
- 29) D. M. Chase, J. Acoust. Soc. Am. 65, 1 (1979).
- 30) S. Oie and R. Takeuchi, Acustica 45, 87 (1980).
- 31) S. Oie and R. Takeuchi, Acustica 45, 56 (1980).
- 32) 今村, " 物理とフーリエ変換 " (岩波, 東京, 1976).
- 33) 小安, " 建築用吸音材料 " (技術書院, 東京, 1972).
- 34) V. Mangulis, J. Acoust. Soc. Am. 35, 115 (1963).
- 35) R. Shall, J. Sound and Vib. 15, 287 (1971).
- 36) N. W. P. Strandberg, J. Acoust. Soc. Am. 65, 639 (1979).

- 37) S.Oie and R. Takeuchi, J. Acoust. Soc. Jpn. (E) 1, 149 (1980).
- 38) J. W. Goodman, " *Introduction to Fourier Optics* " (McGraw Hill, New York, 1968), Chap. 2.
- 39) E. Skudrzyk, " *The Foundations of Acoustics*" (Springer-Verlag, New York, 1971), Chap. 16.
- 40) P. M. Morse and H. Feshbach, " *Methods of Theoretical Physics*" (McGraw Hill, New York, 1953), Chap 4.
- 41) H. W. Wyld, " *Mathematical Methods for Physics*" (Benjamin, Massachusetts, 1976), Chap. 13.
- 42) L. M. Brekhovskikh, " *Waves in Layered Media*" (transl. by D. Lieberman and P. T. Beyer) (Academic Press, New York, 1960), Chap. 4.
- 43) A. Papoulis, " *Systems and Transforms with Applications in Optics*" (McGraw Hill, New York, 1968), Chap 7.
- 44) 竹内, " 弾性論" (裳華房, 東京, 1969) .
- 45) C. T. Wang, " *Applied Elasticity*" (McGraw Hill, New York, 1953), Chap. 11.
- 46) R. D. Mindlin, J. Appl. Mech. 18, 31 (1951) .
- 47) S. Oie and R. Takeuchi, J. Acoust. Soc. Jpn, (E) 1, 133 (1980) .
- 48) H. Oberst, Acustica 2, Akus. Beih. 181 (1952) .
- 49) E. M. Kerwin, J. Acoust. Soc. Am. 31, 952 (1959) .
- 50) T. Nicholas, The 38th Symposium on The Shock and Vibration, 436 (1968) .
- 51) K. S. Pister, J. Acoust. Soc. Am. 31, 233 (1959) .
- 52) 平泉他, 日音学誌 30, 276 (1974) .

- 53) R.D.Ford, J.Sound and Vib.10, 411 (1969).
- 54) J. E. Young, J.Acoust. Soc. Am. 26, 485 (1954).
- 55) E.C.Sewell, J.Sound and Vib.12, 21 (1970).
- 56) 川井, 日音学誌 29, 186 (1973).
- 57) 大家, 竹内, 日音学誌 35, 333 (1979).
- 58) István L. Vér and C.I.Holmer, " *Noise and Vibration Control* " (ed.by L.L.Beraneek) (McGraw Hill, New York, 1971), Chap. 11.