Title	あるバナッハ空間ℋの中の発展方程式
Author(s)	田辺, 広域
Citation	大阪大学, 1960, 博士論文
Version Type	
URL	https://hdl.handle.net/11094/28346
rights	
Note	著者からインターネット公開の許諾が得られていないため、論文の要旨のみを公開しています。全文のご利用をご希望の場合は、大阪大学の博士論文についてをご参照ください。

【15】

氏　名・(本籍)	田辺広城（たなべひろき）
学位の種類	理学博士
学位記番号	第 123 号
学位授与の日付	昭和35年7月1日
学位授与の要件	学位規則第5条第2項該当
学位論文題目	**あるバナッハ空間$\mathfrak{X}$の中の発展方程式**
論文審査委員	(主査) 教授 南雲 道夫　(副査) 教授 功力金二郎　教授 寺阪 英孝

論文内容の要旨

あるバナツハ空間$\mathfrak{X}$の中の発展方程式 (1.1) $dx(t)/dt=A(t)x(t)+B(t)x(t)+f(t)$, $a\leq t\leq b$で$A(t)$, $B(t)$がある性質を有するものを考える。$x(t)$は未知，$f(t)$は既知函数で値は共に$\mathfrak{X}$に属し，$A(t)$, $B(t)$は$\mathfrak{X}$の中で定義され，$\mathfrak{X}$の中の値るとる閉作用素とする。一般にAを生成素とする半群を$\exp(tA)$で表わす。$A(t)$，$B(t)$は次の仮定を満足するものとする。

仮定1°，$A(t)$は各tに対し線形作用素の一様有界な半群の生成素である。

(1.2)　$\|\exp(tA(s))\|\leqq M$

ここにMは t，s に無関係なある常数で一般に$M\geqq 1$である。：

2°　，1) $A(t)$の定義域$\mathfrak{D}$は t に無関係である。

2)　有界作用素 $B(t,s)=(A(t)-1)(A(s)-1)^{-1}$は一様有界である：

(1.3)　$\|B(t,s)\|\leqq L$

3)　$B(t,s)$はtに関し Lipschitz の条件を満足する：

(1.4)　$\|B(t',s)-B(t,s)\|\leqq N|t'-t|$

3°　$B(t,s)$はtに関し強連続微分可能，$(\partial/\partial t)B(t,s)$はtに関し強連続である

4°　t，sに無関係な常数C，t_0が存在し，各$a\leqq s\leqq b$，$o<t\leqq t_0$に対し

(1.5)　$\|(d/dt)\exp(tA(s))\|=\|A(s)\exp(tA(s))\|\leqq C/t$

5°　$B(t)$の定義域は t に関係してもよいが常に$\mathfrak{D}$を含む

6°　有界作用素$B(t)A(s)^{-1}$は各s に対し，tに関し強連続である

7°　常数C_1，C_2，$o<\rho\leqq 1$，$o<\lambda\leqq 1$が存在し

(1.6)
$$\|B(t)\exp(\tau A(s))\|\leqq C_1\tau^{-(1-\rho)}$$
$$\|(B(t')-B(t))\exp(\tau A(s))\|\leqq C_2|t'-t|^{\lambda}t^{-(1-\rho)}$$

が各$a \leqq t,t',s \leqq b$，$\tau > o$に対して成立する。

以上の仮定の下に(1.1)の斉次方程式の基本解U(t,s)：

$$\partial U(t,s)/\partial t = A(t)U(t,s) + B(t)U(t,s),\quad U(s,s) = 1$$

の存在，一意性を示しその性質を調べるのが本論文の主な目的である。$M=1$，$B(t)\equiv o$ の時は1°〜3°のみの仮定から基本解の存在が加藤敏夫博士により証明された。これは一般であるが,$M>1$或は$B(t)\neq o$ の時には適用出来ない。そこで我々は別の方法で U(t,s) を作ることにする。この方法は4°を本質的に利用するが，この仮定が満されている時はこの方が便利でこの仮定に相応する種々の性質を導くのを容易にする。

U(t,s)を作るには E.E. Levy の逐次近似法を用いる。即ち

$$(1.7)\quad U(t,s) = \exp((t-s)A(s)) + \int_s^t \exp((t-\tau)A(\tau))R(\tau,s)d\tau$$

とおいて形式的な計算を行えば，R(t,s) は

$$(1.8)\quad R(t,s) - \int_s^t (A(t)+B(t)-A(\tau))\exp((t-\tau)A(\tau))R(\tau,s)d\tau = (A(t)+B(t)-A(s))\exp((t-s)A(s))$$

なる積分程式の解として定めればよいであろうことが予想される。仮定から

$$\|(A(t)-A(s))\exp((t-s)A(s)\| \leqq \|(A(t)-A(s))A(s)^{-1}\|\ \|A(s)\exp((t-s)A(s))\| \leqq N(t-s)C(t-s)^{-1} = NC$$

となるから，積分作用素の核は積分可能である。これを用いて(1.8)を逐次近似法で解くことが出来る。この解R(t,s)について$s<\tau<t$の時

$$(1.9)\quad \|R(t,s)-R(\tau,s)\| \leqq K\alpha\left\{\frac{t-\tau}{(t-s)(\tau-s)^{1-\rho}} + \frac{(t-\tau)\rho}{(\tau-s)^{1-\rho}} + \frac{(t-\tau)\lambda}{(\tau-s)^{1-2\rho}} + \frac{(t-\tau)\alpha}{(\tau-s)^{1-2\rho-1+\alpha}}\right\}$$

$$o<\alpha<\rho$$

が成立すること及び$(\partial/\partial t+\partial/\partial s)\exp((t-s)A(s))$が一様有界であることを利用して

$$\partial U(t,s)/\partial t = A(s)\exp((t-s)A(s)) + \int_s^t A(\tau)\mathrm{ext}((t-\tau)A(t))(R(\tau,s)-R(t,s))d\tau + \int_s^t(\partial/\partial t+\partial/\partial\tau)\exp((t-\tau)A(\tau))R(\tau,s)d\tau + \exp((t-s)A(s))R(t,s)$$

となることがわかる。A(t)U(t,s)も同様に表現出来U(t,s)が(1.1′)の基本解であることがわかるのみならず

$$\|\partial U(t,s)/\partial t\|,\quad \|A(t)U(t,s)\| \leqq K/t-s,\quad \|B(t)U(t,s)\| \leqq K(t-s)^{\rho-1}$$

なる評価を満足することも証明出来る。又(1.1)の解の一意性もU(t,s)が各$x\varepsilon\vartheta$に対して

$$-\partial U(t,s)x/\partial s = U(t,s)(A(s)+B(s))x$$

を満足することがわかるから，(1.1′)の斉次方程式の任意の解$x(t)$に対し

$$o = \int_s^t \frac{\partial}{\partial\sigma}(U(t,\sigma)x(\sigma))d\sigma = x(t) - U(t,s)x(s)$$

となることから直ちにわかる。又(1.7)の右辺第2項を W(t,s) とかくと$\|\partial W(t,s)/\partial t\| \leqq K(t-s)^{\rho-1}$であることに注意し，Hölder 連続な右辺f(t)を有する$x(s)=x$なる初期条件を満足する(1.1)の解$x(t)$は

$$x(t) = U(t,s)x + \int^t U(t,\tau)f(\tau)\tau$$

で与えられることがわかる。

又，大ざっぱにいってA(t)がtに関し2回連続微分可能，B(t)，f(t)がtに関し1回Hölder 連続微分可能であれば対応する解は t に関し2回連続微分可能となる。特に U(t,s) はtに関し2回連続微分可能で$\|\partial^2 U(t,s)/\partial t^2\| \leqq K(t-s)^{-2}$ を満足する。更に各 t に対し f (t)$\varepsilon\vartheta$且あるγに対し A(γ) f (t)が t について連

続ならば$A(t)x(t)\varepsilon\mathcal{D}$，且$A(t)^2x(t)$はtについて連続である。特に$U(t,s)$には $A(t)$を２回作用させることが出来て

$\| A(t)^2U(t,s) \| \leqq K(t-s)^{-2}$ を満足する。以上の理論が適用出来る例としては，なめらかな境界を有する柱状領域での放物型偏微分方程式の解で境界条件として Dirichlet data が o となるものを扱う問題がある。係数に関する適当な仮定のもとで， Nirenberg Browder 等の結果を用いて比較的容易に， 上の理論が使えることを確かめることが出来る。

論文の審査結果の要旨

主論文は二篇から成っている。 両者は本質的に同じ問題を取扱っているが便宜上ここで之等を (A), (B)と呼ぶ。

まず，本論文の対象を説明する，独立変数が時間と空間との両種類のものから成る函数は，各時間の値 t に対して空間変数だけの函数が対応するものと考えることができる。 抽象的に云えば，空間変数の函数をバナッハ空間の点と考え，その値がバナッハ空間の点 x である時間 t の函数$x(t)$を扱うことになる。これが t と共に変化する法則が微分方程式

(1) $\frac{d}{dt}x(t)=A(t)x(t)+f(t)$

に依って与えられる時，(1) をバナッハ空間における発展方程式と云う。ここに f (t) は既知函数である。特にA (t) が t に無関係で f (t) ≡0となるとき，Aが適当な条件をみたす閉作用素ならば，Aを生成作用素 (infinitesimal generator) とする一パラメーター半群 (semi-group) $\{T_t\}(o<t)$が存在する。それは初期条件$x(o)=x$を充すような方程式

(2) $dx(t)/dt=Ax(t)$

の解が$x(t)=T_tx$，$T_t=\exp(tA)$で与えられるようなものである。 このことはHille-Yosida の理論として著名なものである。

つぎに東京大学教授加藤敏夫氏は A(t)が t を含み t の値を固定すれば半群の生成作用素となる場合にさらにA(t)及びf(t)が適当な条件を充すならば，(1)の解が初期条件 $x(s)=x$ の下で

(3) $x(t)=U(t,s)x+\int_s^t U(t,\tau)f(\tau)x d\tau$

の形で与えられることを論じた。

加藤氏の考え方は時間区間を細分してその極限をとる方法でこれは自然で，その条件も可なり一般的であるが証明における計算は相当に複雑で見透しはあまりよくない。 田辺君は加藤氏がA (t) に課した条件にさらに適当なやや強い条件（楕円形の微分作用素のとき成立する）を加える事により加藤氏の方法より見透の良い方法として，時間変数についての積分方程式(作用素U(t,s)を未知数とする)を用いた。これによってまず解の一意性の条件が或る面において一般化され， また他方作用素 A (t) に或る種の摂動作用素（微分の階数が低いが t についての正則性が少いもの） が加わる場合や， f (t)がA (t)の定義域$\mathcal{D}$に属さない場合をも取扱うことが出来た。

以上の内容を具体的に述べると次のようになる。今A(t)を次の４条件をみたす作用素であるとしよう。

1°，$A(t)$は各tにつき半群の生成作用素で $\exp[tA(s)t]$は$a\leqq s\leqq b$，$t>0$で一様有界; $\|\exp[tA(s)]\|\leqq M$ である。

2°，1) $A(s)$の定義域ϑは s に無関係である。2) $(A(t)-1)(A(s)-1)^{-1}=B(t,s)$は，$a\leqq s\leqq b$，$a\leqq t\leqq b$で一様有界である。3) $B(t,s)$は上のtにつき Lipschitz 条件をみたす。

$$\|B(t,s)-B(t',s)\|\leqq N|t'-t|.$$

3° $B(t,s)$はtに対して強連続微分可能である。

4°，$a\leqq s\leqq b$，$o<t\leqq t_o$で$\|A(s)\exp[tA(s)]\|\leqq c/t$ となるような正の定数 t_0，Cが存在する。

田辺君は以上の条件の下に(1)の基本解，即ち$U(s,s)=1, \frac{\partial}{\partial s}U(t,s)x=A(t)U(t,s)\,x\;(x\varepsilon\vartheta)$ となる作用素 $U(t,s)$で $t=s$で$x(s)=x$となる(1)の解が(3)で与えられるものが存在する事を示した。以上の4条件の中で1°は加藤氏が$M=1$としたのに対してここでは$M\geqq1$に拡張されている点が注目に値する。以上が論文(A)の内容の梗概である。

論文(B)に於いては$A(t)$にさらに摂動作用素$B(t)$が加わった場合，即ち

(1′) $$\frac{d}{dt}x(t)=(A(t)+B(t))x(t)+f(t)$$

について論じた。ただしここに$B(t)$は次の3条件を充すものと仮定する。

5°，$B(t)$は定義域がϑを含む閉作用素である。

6°，$B(t)[A(s)-1]^{-1}$は有界作用素で，tにつき強連続である。

7°，$$\begin{cases}\|B(t)\exp[\tau A(s)]\|\leqq C_1\tau^{-\rho}\\ \|\{B(t')-B(t)\}\exp[\tau A(s)]\|\leqq C_2|t'-t|^{\lambda}\tau^{-\rho}\end{cases}$$

となるような4定数$o\leqq\rho<1$，$o<\lambda\leqq1$，C_1，C_2が存在する。

この3条件の下に(1′)式の基本解の存在を証明したのが論文(B)であるが上記3条件は可成り一般的のもので例えば$A(t)$が楕円型の微分作用素であり，$B(t)$が$A(t)$より低い階数の微分作用素で，その係数がHölder連続ならば充される。

なお以上の結果を証明するに当り，それを厳密に進める為に，田辺君は多くの補題に於いていろいろな評価式（不等式）を証明している。それらの中にも重要な結果が多い。

要するに主論文はバナッハ空間に於ける発展方程式論の研究に重要な寄与をなしたもので，参考論文と共に田辺君の研究能力の優秀なことをよく示している。よってこの論文は理学博士の学位論文として充分の価値あるものと認める。