



Title	非可換体のガロア拡大の生成元について
Author(s)	永原, 賢
Citation	大阪大学, 1961, 博士論文
Version Type	
URL	<a href="https://hdl.handle.net/11094/28453">https://hdl.handle.net/11094/28453</a>
rights	
Note	著者からインターネット公開の許諾が得られていないため、論文の要旨のみを公開しています。全文のご利用をご希望の場合は、<a href="https://www.library.osaka-u.ac.jp/thesis/#closed">大阪大学の博士論文について</a>をご参照ください。

*The University of Osaka Institutional Knowledge Archive : OUKA*

<https://ir.library.osaka-u.ac.jp/>

The University of Osaka

氏 名・(本籍)	永 原 賢 なが はら たかし
学 位 の 種 類	理 学 博 士
学 位 記 番 号	第 241 号
学位授与の日付	昭 和 36 年 11 月 24 日
学位授与の要件	学位規則第 5 条第 2 項該当
学 位 論 文 題 目	非可換体のガロア拡大の生成元について
	(主 査) (副 査)
論 文 審 査 委 員	教 授 大嶋 勝 教 授 松嶋 與三 教 授 志村 五郎

### 論 文 内 容 の 要 旨

主論文非可換体のガロア拡大の生成元の研究を行うに至る迄の経緯について若干我々の無限次のガロア理論の研究について述べる。

可換体の無限次のガロア理論は W. Krull によって1928年につくられた。その後1945年に N. Jacobson, 1947年に H. Cartan によって非可換体の有限次のガロア理論がつくられた。更にそれは中山正教授によって1952年に単純環にまで拡張されたのであるが非可換体単純環の無限次のガロア理論が問題として残されたのである。

1957年になって延沢信雄氏により非可換体の無限次のガロア理論がガロア群が局所有限と云う仮定の下につくられた。それと時を同じくして N. Jacobson はガロア群が外部的な場合に於ける無限次のガロア理論を自著: Structure of rings に発表した。我々の無限次のガロア理論に対する研究はここから始まる。

K を非可換体, L をその部分非可換体とする。

そしてKはL上ガロアであるとする。即ちLの各元を不変にする様なKの同型写像の全体をGとする時  $L = \{a \in K \mid a = a, \forall \sigma \in G\}$  である。

この時GをKのL上のガロア群と呼ぶことにする。更に便宜上Kに於けるLの可換子環をVで表わすことにする:  $V = \{a \in K \mid al = la, \forall l \in L\}$

我々は先ず延沢信雄氏のガロア群が局所有限であるようなガロア拡大は殆んど外部的のガロア拡大であって N. Jacobson の外部的ガロア拡大を含んでいることを示した。即ちガロア群Gが局所有限であるならばVはKの中心に一致するか又は有限体となる ([参考論文, 1])

有限次のガロア拡大に於いてはKはL上有限次であることからKに於けるLの可換子環Vは必然的にKの中心に関して有限次である。

ここで我々は  $V$  が  $K$  の中心上有限次と云う仮定 ( $K$  は  $L$  上一般に無限次) の下に於いてガロア理論を考察し、上記の有限次の場合を含む無限次のガロア理論を構成した。

それは先ず  $K$  に於ける  $V$  の可換子環  $V_K(V)$  が  $L$  上局所有限、その他若干の条件上に於いてガロア理論を考察した。

更にガロア群に位相を入れる為に条件を強めてガロア群に局所有限次と云う仮定を与えて考察を進めた。

前者の場合には  $K$  は  $L$  上局所ガロアとなるが、一般にそのガロア群は局所有限次とはならない。後者の場合はガロア群が局所コンパクトになることと  $V$  が  $K$  の中心に関して有限次であることが同値である様なガロア拡大である ( $W. Krull, N. Nobusawa, N. Jacobson$  のガロア群はコンパクトである) ([参考論文, 2, 3])

以上の如く非可換体の無限次のガロア理論の構成に一応成功したのであるが、そのガロア拡大の基礎、構造を明確にするためにガロア拡大の生成元についての研究を試みた。以下それについて述べる。

A. A. Albert の分離的多元環の (1944年の) 結果のガロア拡大への拡張として、1951年に F. Kasch は次の結果を示している。

非可換体  $K$  はその部分非可換体  $L$  に関して有限次のガロア拡大で、 $K$  に於ける  $L$  の可換子環の中心が  $K$  の中心上分離的である時、 $K$  は  $L$  上  $K$  の内部同型写像によってうつり得る 2 個の共役元によって生成されることを示した。

ここで我々はその証明の簡単化及び中間環への拡張を [参考論文, 4] に於いて試みたのであるが、更にその結果が  $K$  に於ける  $L$  の可換子環の中心の  $K$  の中心に関する分離的条件なしに成立することを [主論文, 1] に於いて示した。

[参考論文, 6] に於いて更に上記の結果の 2 個の共役元についての精密化を試みた。即ち  $K$  は  $L$  上、 $K$  の  $L$  上のガロア群の内部同型写像によって移り得る 2 個の共役元によって生成されることを示した。

ここで我々は更に [主論文, 2] に於いて非可換体  $K$  が  $L$  上有限次のガロア拡大であるとき、 $K$  が  $L$  上 1 個の元で生成される為の必要十分条件を示した。この結果によって上記の 2 個の生成元の精密化の証明は簡単になされる。

[主論文, 3] に於いては  $K$  が  $L$  上局所有限でかつガロア拡大である時 ( $K$  は  $L$  上有限次の仮定なし)  $K$  の  $L$  上左有限次の中間環がすべて 1 個の元で生成される為の必要十分条件を示した。

この結果は可換体と非可換体のガロア拡大の生成元に関する相違を明示するものである。

[主論文, 4] に於いては、 $K$  が  $L$  上ガロアである時  $K$  の  $L$  上左有限次の両側  $L$ - $L$ -部分加群の生成元について研究し、更にその結果を利用して  $K$  が  $L$  上左代数的なガロア拡大である場合について  $K$  の  $L$  上の局所有限に関する Kurosch の問題を研究した。その主な結果は次の通りである。

$K$  が  $L$  上ガロアで、 $L$  がその中心上無限次である時、 $K$  の  $L$  上左有限次の両側  $L$ - $L$ -部分加群は両側  $L$ - $L$ -加群として  $L$  上 1 個の元で生成される。

$K$  が  $L$  上ガロアでかつ左代数的である時、 $L$  がその中心に関して無限次であるか又は  $K$  に於ける  $L$  の可換子環が  $K$  の中心に関して有限次であれば、 $K$  は  $L$  上局所有限である。

$K$ が $L$ 上ガロアでかつ左代数的でその次元が有界であれば $K$ は $L$ 上有限次である。

これらの結果は無限次のガロア理論を考察するに於いて重要な役割を果す。特に上記の第2の結果は〔参考論文, 10〕の結果とあいまって上述の〔参考論文, 2, 3〕のガロア理論が次の様に単純化された条件の下に構成されることを示している。

〔参考論文, 2, 3〕の前者のガロア理論を構成する為の必要かつ十分な条件は、 $K$ に於ける $L$ の可換子環 $V$ が $K$ の中心上有限次で、 $K$ が $L$ 上左代数的なガロア拡大であることである。

〔参考論文, 2, 3〕の后者のガロア理論（ガロア群が局所コンパクトの場合）を構成する為の必要かつ十分な条件に $V$ が $L$ の中心上有限次の条件を附加したものである。

更に上述の第3の有界次元に関する結果は中心上代数的な非可換体に関する N. Jacobson の結果を含んでいる。

我々の主論文との関係上以下参考論文について簡単に述べておく。

〔参考論文, 10〕〔参考論文, 2, 3〕の理論を進める基礎に関連して $K$ の $L$ 上の局所的性質について再考察を試みた。特に $K$ が $L$ 上ガロアで $D$ が $L$ 上左有限次の中間環ならば $K$ は $D$ 上ガロアであるという結果は N. Jacobson の $D$ から $K$ の中への同型写像の拡張定理と共に上述の〔参考論文, 2, 3〕の理論を進めるに際して条件、推論を単純化するのに有益な役割をなす。

〔参考論文, 7〕〔参考論文, 2, 3〕に於いては $K$ は $L$ 上局所ガロアとなる。更に $V$ が $K$ の中心上有限次であるから、 $K$ は $K$ に於ける $V$ の可換子環 $V_K(V)$ に関して有限次である。我々は上述の〔参考論文, 2, 3〕の結果を $K$ が $L$ 上局所ガロアの仮定の下に $[K:V_K(V)] \leq X$ 。（アレフゼロ）の場合にまで拡張することを試みた。

〔参考論文, 5〕〔参考論文, 2, 3〕のガロア理論の後半はガロア群が局所有限次かつ局所コンパクトの場合についての考察であるが、ここに更にガロア群が局所有限次であるが局所コンパクトにならない場合に於けるガロア理論があるきわめて特別なガロア拡大に於いて試みられることを示し、その例をあげた。

〔参考論文, 9〕〔参考論文, 7〕のガロア理論を少し別の立場から、中山正教授の単純環のガロア理論及び富永久雄氏のガロア理論を使って、単純環の場合に拡張することを試みた。

〔参考論文, 11〕単純環 $R$ がその単純部分環 $S$ 上局所ガロアである場合に於ける $R$ の構造的性質並びに〔主論文, 1~4〕の結果の単純環の場合への拡張を試みたが或程度の成果も得た。特に次の結果： $R$ が $S$ 上局所ガロアである時、 $R$ の $S$ 上の中間環がすべて単純環となる為の必要かつ十分な条件は $R$ に於ける $S$ の可換子環が非可換体となることである。これは単純環の生成元並びに双対なガロア対応を考察するに際して有益な役割をなすものである。

〔参考論文, 8〕有限次のガロア拡大に関連して単純環 $R$ がその単純部分環 $S$ 上有限次の強意ガロアである場合、即ち $R$ に於いて $S$ 上の正規底定理の成立するガロア拡大について考察した。同時にある種の群環の構造についても考察し、1958年の C. C. Faith の正規底元に関する結果の単純環への拡張を試みた。

## 論文の審査結果の要旨

永原君は4篇からなる主論文「非可換体のガロア拡大の生成元について」の第1篇で、非可換体 $L$ 上の有限次ガロア拡大 $K$ は  $K=L[k, U^{-1}kU]$  と共役な二つの元で生成されることを示した。これは Kasch が1953年に得た結果を改善したものである。有限次ガロア拡大 $K$ が可換の場合は $K$ は $L$ の単純拡大になることはよく知られている。第2篇では $K$ が非可換の場合にこの問題を考察し、 $K$ が $L$ 上の単純拡大となるための必要十分条件は、 $L$ が $K$ の中心に含まれるか又は $K$ が可換となることであるという結果を得ている。

第3篇では $K$ が $L$ 上の無限次拡大の場合を取扱っている。第9篇での主要な結果は、 $K$ が $L$ 上局所単純となるための条件を決定したことである。

第4篇では $K$ が $L$ 上で代数的である場合を考え、左代数的拡大と局所有限な拡大との関係について次の結果を得た。すなわち、 $L$ 上のガロア拡大 $K$ が $L$ 上で左代数的であるとき、 $L$ がその中心の上の無限次拡大であるか又は、 $K$ における $L$ の可換子環が $K$ の中心の上の有限次拡大であれば、 $K$ は $L$ の局所有限拡大となる。

11篇の参考論文は可換体及び非可換体及び単純環の場合にまで推進したもので、単純環の研究上有意義な仕事である。

以上のべたように永原君の研究は代数学について興味ある貢献をなしたものであって、これらの論文は理学博士の学位論文として十分の価値あるものと認める。